



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

**FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE  
ENRUTAMIENTO DE VEHÍCULOS PERIÓDICO PARA LA  
DISTRIBUCIÓN DE ALIMENTOS PERECEDEROS EN LA  
ZONA SUR – ORIENTE DE LA CIUDAD DE MEDELLÍN**

**FABIO ALEJANDRO HENAO SANTA  
JHON HENRY MUÑOZ RODRÍGUEZ**

**Universidad de Antioquia**

**Facultad de Ingeniería**

**Departamento Académico de Ingeniería Industrial**

**ESPECIALIZACIÓN EN LOGÍSTICA INTEGRAL**

**Medellín, Colombia**

**2020**



Formulación y Solución de un Problema de Enrutamiento de Vehículos Periódico para la Distribución de Alimentos Perecederos en la Zona Sur – Oriente de la Ciudad de Medellín

**FABIO ALEJANDRO HENAO SANTA**  
**JHON HENRY MUÑOZ RODRÍGUEZ**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**“ESPECIALISTA EN LOGÍSTICA INTEGRAL”**

Asesores (a):

Eduwin Aguirre González (Magíster en Ingeniería)

Gloria Milena Osorno (Magíster en Ingeniería)

Universidad de Antioquia

Facultad de Ingeniería

Departamento Académico de Ingeniería Industrial

**ESPECIALIZACIÓN EN LOGÍSTICA INTEGRAL**

Medellín, Colombia

2020

## **Formulación y Solución de un Problema de Enrutamiento de Vehículos Periódico para la Distribución de Alimentos Perecederos en la Zona Sur – Oriente de la Ciudad de Medellín**

Fabio Alejandro Henao Santa<sup>1</sup>, Jhon Henry Muñoz Rodríguez<sup>2</sup>

### **Resumen**

El presente trabajo se basa en el estudio realizado a una empresa que se dedica a la prestación de Servicios Logísticos, desarrollando las siguientes actividades: como la Operación bajo techo y la distribución de mercancías; su cobertura es a nivel nacional, pero el enfoque será en la ciudad de Medellín. Actualmente la empresa no cuenta con modelos diseños para ruteo de vehículos que optimicen la operación de distribución, en algunos casos la mercancía es entregada según en la experiencia de los auxiliares de distribución para realizar las entregas de las mercancías, generando así, altos costos operativos y un excesivo consumo de recursos. Se formuló el problema y a solucionarlo con herramientas de tipo computacional como: FICO Xpress-MP®, R Statistics®, Concorde® y Excel®, obteniendo como resultado el agrupamiento de los clientes en forma balanceadas, la programación de las visitas a los clientes de acuerdo a una planificación teniendo en cuenta las capacidades de los vehículos y finalmente un enrutamiento óptimo, generando así ahorros significativos en costos fijos y costos variables.

### **Palabras Claves**

VRP Periódico, Formulación Matemática, Optimización Combinatoria, Distribución

### **1. Introducción**

---

<sup>1</sup> Afiliación 1. Estudiante Especialización en Logística Integral. Universidad de Antioquia

<sup>2</sup> Afiliación 2. Estudiante Especialización en Logística Integral. Universidad de Antioquia

Las empresas para lograr competir en el mercado requieren colocar los productos (bienes y servicios) en el lugar adecuado, en el momento preciso y en las cantidades demandadas por los clientes, para así satisfacer sus necesidades. A su vez, las compañías buscan construir herramientas, aplicaciones y modelos que permitan mejorar la productividad, para así no estar amenazadas y desaparecer en un periodo dado.

La gestión de los problemas de distribución afecta directamente a la competitividad de las empresas, especialmente a aquellas dedicadas al transporte de carga. Así, el establecimiento de rutas y horarios para vehículos constituye un conjunto de problemas habituales que, si no se resuelven de manera óptima, acarrearán un deterioro significativo en las utilidades de las empresas [1]. Los problemas más comunes en una empresa de distribución de mercancía es el retraso en la entrega de los productos, puesto trabajan de forma muy empírica diseñando sus rutas sin ninguna planeación y de la falta de conocimiento de las aplicaciones que tienen los modelos matemáticos a la hora de resolver un problema de enrutamiento, los cuales tienen la finalidad de optimizar los recursos de la compañía como: disminuir los costes, maximizar las utilidades y minimizar los tiempos de respuestas. [2].

El caso de estudio corresponde a una Empresa Colombiana dedicada a la Prestación de Servicios Logísticos (Operaciones Bajo techo y Transporte Secundario) a empresas que produce productos perecederos, su cobertura está en las principales ciudades a nivel nacional, sin embargo, el estudio se centrará en la ciudad de Medellín en la cuenca 14.

En esta zona de la ciudad, se atienden los siguientes Grupos de Clientes; (Especializados) el cual representa un 52%, seguido del grupo de (Consumo Local) con una participación del 29%, el 19% restante corresponden al grupo (Masivo Bajo, Industrial, Heladerías) de las ventas. En Tabla 1 se describe los Grupos de Clientes de la Compañía y su Tipología.

*Tabla 1. Grupos de Clientes de la Compañía y su Tipología*

<b>Grupo Clientes</b>	<b>Tipología</b>
Especializado	Hoteles / Restaurantes Gourmet
Consumo local	Repostería / Cafeterías
Masivo Bajo	Grandes Panaderías / Comida Rápidas
Industrial	Otras Industrias / Operadores de Servicios
Heladerías	Tiendas Convencional / Heladerías Independiente

Fuente: Elaboración Propia.

La distribución de los clientes para la cuenca 14 de la ciudad de Medellín, en el caso de estudio se realiza con 249 clientes. La Figura 14 representa la distribución de los clientes en la Cuenca 14 y se pueden ver en el apéndice 8.1

Los clientes de la compañía se describen en términos de demanda y frecuencias de entrega de la siguiente manera. Donde la demanda se detona como la cantidad de mercancía a entregar en una visita a cada cliente, es relativamente constante y se puede estimar mediante datos históricos. La frecuencia de entrega para cada punto es pactada por el asesor comercial que atiende al cliente de manera empíricamente mediante acuerdos entre las dos partes, en algunos casos no se tiene un itinerario de visita definido lo que implica realizar visitas casi a diario con pedidos de cantidades mínimas.

Los vehículos son propios, conformados por una flota heterogénea diseñados para el transporte de productos perecederos, donde comparten las mismas características de conservación (ambiente; secos, refrigerados, congelados). Para la cuenca 14 se utilizan 4 vehículos que son homogéneos y tienen una capacidad de 4,5 toneladas, ver Tabla 2, representa la descripción de la Flota Vehicular de la Compañía.

La compañía maneja un portafolio amplio de productos con diferentes características de (volumen, peso, forma), para optimizar la capacidad de los vehículos se homologa todas sus unidades en una única unidad de medida nombrada GRD, la capacidad en GRD es de 160 unidades para cada vehículo.

*Tabla 2. Descripción de la Flota Vehicular de la Compañía.*

<b>TIPO</b>	<b>Condición Térmica</b>	<b>Capacidad [Ton]</b>	<b>Capacidad [GRD]</b>
NPR Furgón	Multi ambiente	4,5	160

Fuente: Elaboración Propia.

El problema de distribuir productos a partir de un depósito original (punto de origen) y una cantidad de clientes con una demanda por atender, juega un papel importante en empresas comercializadoras, ya que planificar adecuadamente estos envíos puede significar considerables ahorros logísticos y sobre todo en costos como: el consumo de combustible, horas hombre, entre otros; que ayudarán a una mejor rentabilidad para los negocios hoy en día. Son por estas causas que surge el problema de ruteo de vehículos [3]. Con esto se busca identificar las ineficiencias del modelo actual de distribución que

utiliza la compañía, y proponer un nuevo y mejorado procedimiento de reparto de mercancías, el cual se adapte en tiempo real a la demanda del mercado y ayude a estabilizar las variaciones en las demandas.

El objetivo general del presente trabajo fue Formular y resolver un problema de enrutamiento de vehículo Periódico para la distribución de alimentos perecederos en la Zona Sur – Oriente de la Ciudad de Medellín. Donde de forma específica se estructuró la información de la empresa utilizado la base de datos de clientes e histórico de ventas, se construyeron los parámetros para la modelación con la utilización de herramientas adecuadas de tipo computacional, así mismo, se formuló un modelo de optimización que representa las características principales del problema en estudio, el cual se resolvió mediante modelos matemáticos propuestos y se analizaron los resultados obtenidos.

El documento se divide en cuatro secciones, En la segunda sección se presenta la revisión de la literatura relacionada con el problema de ruteo de vehículos. La tercera sección muestra en detalle el proceso que se llevó a cabo para aplicar la metodología; se presenta el paso a paso realizado en el desarrollo de la información y obtener los datos relevantes que sirvieran como parámetros para la construcción de los modelos y su posterior resolución. La cuarta sección en el cual se contrastan los resultados obtenidos con el modelo y la situación actual, de la compañía. Por último, en la quinta sección se muestran las conclusiones del estudio.

## **2. Marco teórico**

En esta sección se presenta los principales conceptos asociados al problema de ruteo de vehículos como: los tipos de VRP, las variantes de VRP, los elementos del VRP y algunos conceptos del PVRP por diferentes autores.

El problema de enrutamiento de vehículos es uno de los problemas de optimización combinatoria más importantes y estudiados. Consiste en diseñar las rutas óptimas para la distribución de productos desde un centro de distribución hasta un número determinado de clientes dispersos geográficamente, utilizando para ello una flota de vehículos con cierta capacidad de transportación. Cada ruta inicia y termina en el depósito, cada cliente debe ser visitado exactamente una vez para satisfacer su demanda y además la suma de las demandas de los clientes visitados en cada ruta no excede la capacidad del vehículo asignado a dicha ruta [4].

A continuación, se presenta en la Figura 1 un típico ejemplo de una solución simple de un VRP.

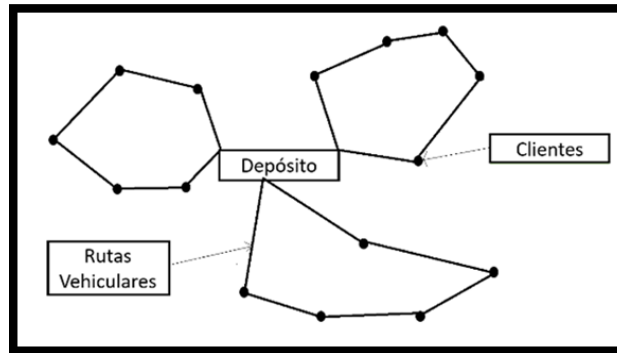


Figura 1. Representación gráfica de un VRP.

Fuente: Elaboración Propia.

A continuación, se da una breve descripción relacionada con el Ruteo de vehículos planteada por [5]

### Tipos de VRP

#### a) Según las distancias

**VRP Asimétrico:** se dice de aquel problema en el que el valor del coste de los arcos depende de la dirección de estos entre los dos nodos que unen. Se denomina grafo dirigido y la matriz de costes es asimétrica  $c_{ij} \neq c_{ji}$ .

**VRP Simétrico:** el valor de los costes de los arcos no depende de la dirección que toman. Se denomina grafo no dirigido y la matriz de costes es simétrica  $c_{ij} = c_{ji}$ .

#### b) Según tipo de flota

**Flota homogénea:** Es aquel conjunto de vehículos que tienen una capacidad idéntica entre ellos, no existiendo por tanto diferencias entre los vehículos.

**Flota heterogénea:** Es aquel conjunto de vehículos que difieren en las características técnicas, como por ejemplo la capacidad, y es necesario especificar qué tipo de vehículo circula por cada ruta.

## **Variantes del VRP**

**Problema de Rutas de Vehículos Capacitados (Capacitated VRP) (CVRP):** Las demandas de cada uno de los puntos de entrega se conocen con antelación, existe una flota homogénea de vehículos y solo existe la restricción de la capacidad de los vehículos. La función objetivo es la de minimizar el coste total a servir a todos los clientes. Esta variante es la que se focaliza el presente documento.

**Problema de Rutas de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRP with Time Windows) (VRPTW):** Es una extensión del CVRP, en el que a cada cliente se le asocia un intervalo de tiempo  $[a_i, b_i]$ , llamado ventana de tiempo. El inicio del servicio a cada cliente debe estar comprendido dentro de dicho intervalo y debe permanecer en ese punto durante el determinado tiempo de servicio. En el caso en el que el vehículo llegue antes de lo establecido, a este se le permite esperar hasta el instante  $a_i$  para que pueda comenzar el servicio. El objetivo es minimizar el tiempo de viaje total, la flota de vehículos y el tiempo de espera necesario para abastecer a todos los clientes dentro de su tiempo requerido.

**Problema de Rutas de Vehículos con Recogidas y Entregas (VRP with Pick-Up and Delivering) (VRPPD):** Existe la posibilidad de que cada cliente pueda entregar cierta mercancía. La restricción de la capacidad implica dificultar la planificación, pudiendo llevar a aumentar el tiempo de viaje, la flota de vehículos o hacer un mal uso de la capacidad.

**Problema de Rutas de Vehículos con multi depósito (Multiple Depot VRP) (MDVRP):** Una compañía está compuesta por varios depósitos desde donde poder servir a sus clientes. Cada vehículo está asignado a uno de sus depósitos y se desplaza hacia los clientes que están asociados a ese mismo depósito. El objetivo es el de servir a todos sus clientes mientras que se minimiza la flota de vehículos y la distancia realizada.

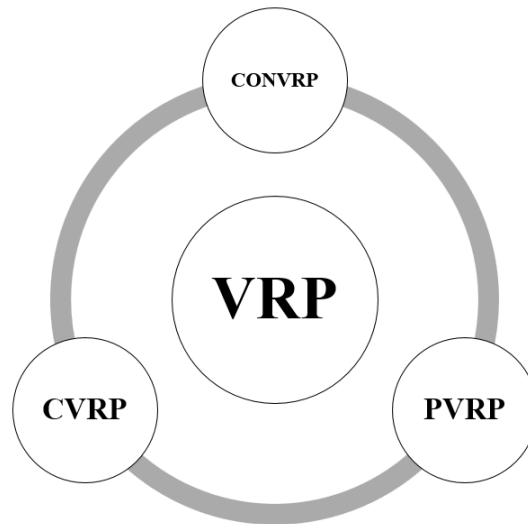
**Problema de Rutas de Vehículos con entregas divididas (Split Delivery VRP) (SDVRP):** Se permite que un mismo cliente pueda ser servido por diferentes vehículos si esto supone una reducción en los costes generales. Esta opción es muy útil cuando el tamaño de las órdenes de los clientes es tan grande como la capacidad del propio vehículo.

**Problema de Rutas de Vehículos periódico (Periodic VRP) (PVRP):** La prestación del servicio a los clientes se realiza de forma periódica, cada  $M$  días.



**Problema constante de enrutamiento del vehículo (ConVRP):** Los clientes reciben servicio durante un período de planificación determinado, por ejemplo, varios días. La satisfacción del cliente se mantiene al proporcionar un conductor y un servicio consistente en el tiempo. [6]

Dicho lo anterior, se presenta en la Figura 2 las variantes del VRP relacionadas con el problema a formular y solucionar.



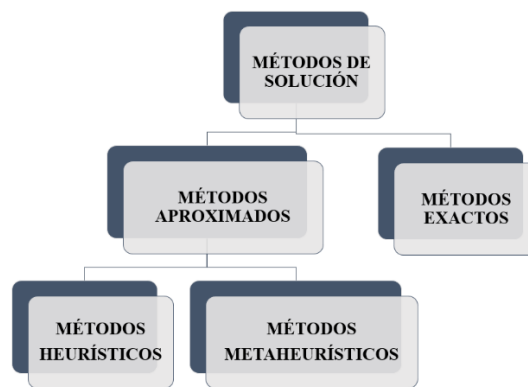
*Figura 2. Variantes del VRP relacionadas con el problema a formular y solucionar*

Fuente: Elaboración Propia.

A continuación, se da una breve descripción relacionada con los tres elementos involucrados en el VRP que son los clientes, las bodegas o depósitos y la flota de vehículos, de acuerdo a [7], los clientes generan la demanda de bienes que debe ser entregada por medio de los vehículos desde los depósitos hasta el cliente final, además las bodegas o depósitos son los lugares en donde se encuentran ubicados las mercancías a distribuir y los vehículos de entrega. Por lo general, cada ruta comienza y termina en el mismo depósito, así mismo, los vehículos son los medios de transporte utilizados para distribuir las mercancías desde los depósitos a los clientes o viceversa.

Por otra parte, existen distintos métodos para resolver un problema de optimización combinatoria lo cuales generalmente dependen del enfoque de optimización usado o de la clase de algoritmo al que pertenece. Las dos principales categorías son: los métodos exactos y los métodos aproximados. Debido a que para la mayoría de los problemas de interés no existe un algoritmo exacto que pueda encontrar una solución óptima en un

tiempo razonable, surge la necesidad de resolver este tipo de problemas NP-Hard a través de otros métodos diferentes. La principal desventaja de éstos radica en que para resolverlos se requiere de un tiempo computacional que crece exponencialmente con el tamaño del problema, lo cual ocasiona que no se pueda obtener la solución óptima en un tiempo aceptable. Con el fin de evitar este inconveniente se dio lugar al uso de los métodos aproximados para la solución de problemas NP-Hard. Estos métodos al ser procedimientos de diseño intuitivo, proporcionan resultados eficientes, que, aunque no garantizan una solución óptima, permiten obtener una solución muy cercana en un tiempo adecuado [8] . En la Figura 3, se puede observar la clasificación detallada de los métodos para resolver un problema de optimización combinatoria.



*Figura 3. Clasificación detallada de los métodos de solución.*

Fuente: Elaboración Propia.

Para el presente proyecto se eligió la variante PVRP para abarcar el caso de estudio.

De acuerdo a [9] el PVRP (VRP periódico) es el horizonte contemplado en el problema es superior a un día. De esta manera, un conjunto de clientes debe ser visitado una o más veces durante un período de tiempo establecido. El objetivo principal, es minimizar la flota de vehículos requerida y el tiempo total recorrido.

Por otro lado, para cada día del horizonte de tiempo se deben definir las rutas de tal forma que todos los clientes cuyo horario sea asignado en ese determinado día, sean atendidos. Cabe resaltar que esta variante se ajusta a los requerimientos iniciales de esta investigación, debido a que las características de este problema permiten que sea aplicado en gran medida a problemas de recolección de desechos en los que cada cliente debe ser atendido en varias ocasiones en un periodo de tiempo determinado [10].

### 3. Metodología

La resolución de este problema se llevó a cabo en varias etapas, la primera etapa está enfocada en la estructuración de datos, donde la información de los últimos tres meses de las ventas, para construir la base de datos con las demandas, buscando balancear la capacidad de los vehículos y la visita de los clientes, lo anterior prepara la construcción de los parámetros adecuados que permitan solucionar el modelo matemático característico del problema, en la segunda etapa, luego de tener la información estructurada en términos de georreferencias, se realiza la construcción de la medición de las distancias de ida y vuelta sobre malla vial entre los clientes de la cadena de distribución, obteniendo como resultado una matriz origen destino, la tercera etapa corresponde a la modelación y formulación matemática del problema, para así resolverlo a través de estrategias de solución como: agrupamiento, programación y enrutamiento.

A continuación, se describe cada una de estas etapas de una manera más detallada:

#### 3.1 Integración de la información (ETAPA 1)

En esta etapa se descarga del sistema de información de la empresa, la base de datos con las ventas de los tres últimos meses, posteriormente la información es cruzada con otra base de datos la cual contiene la unidad de medida de cada producto, permitiendo relacionar de manera homologada cada producto con los estándares que la compañía maneja, esta es nombrada (GRD), lo anterior con el fin de cuantificar la capacidad vehicular, con la información frecuencias, demandas diarias y semanales (ver Figura 16) en el apéndice 8.3. Fue necesario tomar las direcciones y hacer un proceso de georreferenciación que permitiera convertir la dirección cartográfica en longitud y latitud (ver Tabla 3), el resultado arrojado sirve como insumo para construir una matriz origen - destino, la cual tiene como característica que es asimétrica por lo que las distancias son sobre malla vial y no distancias euclidianas.

Tabla 3. Distancia euclidiana, grado latitud y longitud

ID	Dirección (Distancia Euclidiana)	Grado Longitud	Grado Latitud
C_017	CR 27 23 SUR 120	-75,56928005	6,17524106

Fuente: Elaboración Propia.

Se consideró que los clientes ubicados en sitios cercanos en sí (clientes en un mismo centro comercial o en la misma calle) se iban a visitar simultáneamente, es decir, si se visita uno cliente, se visitaban todos, además se planteó como supuesto que los clientes que comparten la ubicación, sus demandas fueran agregadas e incluidas en un único cliente para garantizar la atención a cada cliente sin afectar el nivel de servicio, con esta información se construyeron las instancias para la implementaciones computacionales.

### **3.2 Construcción de los parámetros necesarios para la formulación (ETAPA 2)**

Una vez realizada la integración de datos, se construye una nueva base de datos, el paso siguiente consta en llevar esta última a R Statistics®, fue necesario desarrollar un algoritmo de integración con la API de Bing Maps, el cual con las coordenadas transformadas realiza la extracción las distancias entre clientes obteniendo así la matriz origen destino entre los clientes, ver Figura 15 en el apéndice 8.2

### **3.3 Formulación matemática del problema (ETAPA 3)**

#### **Definición y notación del problema del PVRP**

El problema de despacho de mercancía de productos perecederos tratado en este trabajo, puede definirse y formularse con base en [11] como un VRP periódico. El problema de distribución tiene un conjunto de puntos de entrega de mercancía llamados clientes (Especializados, Consumo Local, Masivo Bajo, Industrial y Heladerías) representados por los nodos del 1 a  $N$ , adicionalmente, el depósito está representado por 0. Por lo tanto, el conjunto de vértices es  $V = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$ , y el conjunto de arcos es  $A$  con  $A = \{(i, j): i, j \in V, i \neq j\}$ , además hay una distancia  $d_{ij}$  entre los clientes  $i, j \in V$ . El período de planeación comprende un conjunto de días  $T$ , que se pueden combinar en un conjunto de diferentes escenarios de visita  $c \in C$ . Los clientes son atendidos por un conjunto de vehículos heterogéneos  $R$  cada uno con capacidad (GRD)  $Q_k$  que se encuentra en el depósito (denotado por el vértice 0). Además, cada cliente tiene un número de visitas requeridas  $f_i$  asignadas por la empresa, y el parámetro  $D_i$  es la demanda semanal del cliente  $i$  en el horizonte de planeación  $T$ , igualmente  $q_{it}$  es la demanda del cliente  $i$  por cada visita que se haga en cada día  $t$ . El parámetro binario  $a_{ct}$  es igual a 1 si se selecciona el día  $t \in T$  (para visitar los clientes) en el escenario  $c \in C$  y el parámetro  $f^c$  es igual al número de días de visita en el escenario  $c$ , así mismo, el parámetro  $E_k$  representa los costos fijos incurridos por utilizar un vehículo  $k$ . Para modelar el problema de distribución, cuatro variables de decisión:  $x_{ijkt}$  es una variable binaria, que es igual a 1

si el cliente  $i \in V$ , es visitado antes que el cliente  $j \in V$  por el vehículo  $k \in R$  en el día  $t \in T$ , 0 de lo contrario;  $y_{ic}$  es una variable binaria, que es igual a 1 si el cliente  $i \in V$  se visita según el escenario  $c \in C$ , 0 de lo contrario;  $z_{ik}$  es una variable binaria, que es igual a 1 si el cliente  $i \in V$ , es visitado por el vehículo  $k \in R$ , 0 de lo contrario; finalmente la variable  $Ftr_{ijkt}$  es binaria, si el flujo de bienes del cliente  $i \in V$  al cliente  $j \in V$  en el vehículo  $k \in R$  en el día  $t \in T$ , 0 de lo contrario.

Con base a la notación anterior, el problema de distribución se formula de la siguiente manera:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in R} \sum_{t \in T} x_{ijkt} d_{ij} + \sum_{k \in R} E_k \sum_{t \in T} \sum_{i \in V} x_{oikt} \quad (3.1)$$

Sujeto a

$$\sum_{c \in C: f^c = f_i} y_{ic} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in V} \sum_{k \in R} x_{ijkt} - \sum_{c \in C} a_{ct} y_{ic} = 0 \quad \forall i \in V; \forall t \in T \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ihkt} - \sum_{j \in V} x_{hjkt} = 0 \quad \forall h \in V; \forall k \in R; \forall t \in T \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in V} x_{oikt} \leq 1 \quad \forall k \in R; \forall t \in T \quad (3.5)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijkt} \leq z_{ik} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}; \forall k \in R; \forall t \in T \quad (3.6)$$

$$\sum_{k \in R} z_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (3.7)$$

$$\sum_{j \in V, i \neq j} Ftr_{jikt} + q_i * \sum_{j \in V} x_{ijkt} = \sum_{j \in V, i \neq j} Ftr_{ijkt} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}; \forall k \in R; \forall t \in T \quad (3.8)$$

$$\sum_{j \in V, i \neq j} Ftr_{jikt} + \sum_{j \in V} x_{ijkt} = \sum_{j \in V, i \neq j} Ftr_{ijkt} \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (3.9)$$

$$x_{ijkt} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V; \forall k \in R; \forall t \in T \quad (3.10)$$

$$y_{ic} \in \{0,1\} \quad \forall i \in V; \forall c \in C \quad (3.11)$$

$$z_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i \in V; \forall k \in R \quad (3.12)$$

$$Ftr_{ijkt} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V; \forall k \in R; \forall t \in T \quad (3.13)$$

La función objetivo (3.1) busca minimizar el costo total de la distancia recorrida entre todos los clientes para cada horizonte de planificación y el costo fijo de los vehículos utilizados para la operación de despacho. Las restricciones (3.2) asegura que se asigne exactamente un escenario para cada cliente y de acuerdo con su frecuencia. Las restricciones (3.3) asegura que cada cliente se visitará los días del escenario seleccionado. Las restricciones (3.4) asegura que cuando un vehículo llegue a un cliente, también se vaya de ese cliente. Las restricciones (3.5) imponen que cada vehículo se pueda usar como máximo una vez al día. Las restricciones (3.6) y (3.7) aseguran que cada cliente sea visitado por el mismo vehículo. Las restricciones (3.8) y (3.9) aseguran la eliminación de sub-tour, donde garantiza que el vehículo si tiene la capacidad para entregar al cliente siguiente y a la vez el vehículo no se devuelva a un cliente ya visitado. Las restricciones (3.10),(3.11),(3.12),(3.13) definen el dominio de las variables.

Dado el número de clientes, vehículos y las condiciones de periodicidad, es necesario plantear una estrategia de solución que permita obtener soluciones en tiempos razonables, para ello, basados en [11], se decide resolver el problema en tres etapas, agrupamiento, programación y enrutamiento.

### **3.3.1 Fase # 1 Agrupamiento (Clustering - CCLP)**

La primera fase agrupa los clientes de forma balanceada. Esta fase resuelve un problema de (CCLP), donde se determina cuantos concentradores se colocan y en que terminal (clientes) centrar el concentrador, de modo que a cada terminal sea asignado a un solo concentrador, además esta se puede describir de la siguiente manera. Hay un conjunto dado de terminales (clientes)  $I$ , y un conjunto de potenciales localizaciones de concentradores (vehículos)  $J$  y un conjunto de vehículos heterogéneos  $R$ . Los parámetros incluyen la distancia  $C_{ij}$  entre el concentrador  $j \in J$  y la terminal  $i \in I$ . Con demanda terminal conocidas  $d_i$  para cada cliente  $i \in I$ , cada uno de los vehículos con capacidad  $Q_k$  con  $k \in R$ ,  $E_k$  es el costo fijo de utilizar (abrir) un concentrador tipo  $k$ , donde  $l$  es el mínimo terminales por concentrador y  $h$  es el máximo, adicionalmente  $m_k$  es el máximo de concentradores tipo  $k$ . Se utiliza dos variables de decisión:  $x_{ij}$  es una variable binaria, que es igual a 1 si el cliente  $i \in I$ , es atendido por  $j \in J$ , 0 de lo contrario;  $y_{jk}$  es una variable binaria, que es igual a 1 si se abre un concentrador  $j \in J$  en tipo  $k$ , 0 de lo contrario.

Usando esta notación el CCLP se formula de la siguiente manera:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in R} E_k y_{jk} \quad (3.14)$$

Sujeto a

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.15)$$

$$\sum_{j \in J} y_{jk} \leq 1 \quad \forall j \in J \quad (3.16)$$

$$x_{ij} \leq \sum_{k \in R} y_{jk} \quad \forall i \in I; \forall j \in J \quad (3.17)$$

$$\sum_{j \in J} y_{jk} \leq m_k \quad \forall k \in R \quad (3.18)$$

$$l \sum_{k \in R} y_{jk} \leq \sum_{i \in I} x_{ij} \leq h \sum_{k \in R} y_{jk} \quad \forall j \in J \quad (3.19)$$

$$\sum_{i \in I} d_i x_{ij} \leq \sum_{k \in R} Q_k y_{jk} \quad \forall j \in J \quad (3.20)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I; \forall j \in J \quad (3.21)$$

$$y_{jk} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J; \forall k \in R \quad (3.22)$$

La función objetivo (3.14) busca minimizar el costo total de la distancia entre todas las terminales (clientes) y el costo de abrir los concentradores. Las restricciones (3.15) asegura que cada terminal es asociada exactamente a 1 concentrador. Las restricciones (3.16) asegura que solo una capacidad es seleccionada para cada concentrador. Las restricciones (3.17) aseguran que las terminales son asignadas a concentradores abiertos. Las restricciones (3.18) aseguran el número máximo de concentradores disponibles. Las restricciones (3.19) asegura que ( si se abre) cada concentrador ( cluster) tiene un munimo (l) y un maximo (h) de terminales asignadas. Las restricciones (3.20) asegura que se conserva la capacidad. Las restricciones (3.21) y (3.22) son de dominio.

### 3.3.2 Fase # 2 Programación (Scheduling)

#### Definición y notación del problema

Esta fase de programación consiste en asignar escenarios a cada cliente de cada clúster, donde un escenario hace referencia a los días de la semana en que será visitado, el calendario asignado deberá ser consistente con su frecuencia requerida (demanda). Hay un conjunto dado de terminales (clientes)  $I = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ . Esta fase asigna un escenario específico  $c \in C$  a cada cliente  $i \in I$ , que corresponde a su frecuencia de entrega de mercancía y el conjunto  $D = \{1, 2, 3, \dots, M\}$  que son los días establecidos. En esta fase se garantiza el cumplimiento de la periodicidad de las visitas mientras se mantienen las limitaciones de capacidad de los vehículos. Esta fase tiene como objetivo obtener un horario de trabajo más equilibrado para los conductores y también asegurar el flujo del depósito durante la semana. Los parámetros incluyen  $f^c$  que cuenta el número de días incluidos en el escenario  $c$ , un parámetro binario  $a_{ct}$  es igual a 1 si se selecciona el día  $d \in D$  en el escenario  $c \in C$ , 0 de lo contrario,  $f_i$  es la frecuencia del cliente  $i \in I$ , y  $s_i$  es el suministro semanal para cada cliente  $i \in I$ . Se utiliza cuatro variables de decisión:  $r_{ic}$  es una variable binaria, que es igual a 1 si el cliente  $i \in I$ , se le asigna el escenario  $c \in C$ , 0 de lo contrario;  $wl$  es el número mínimo de clientes visitados por día;  $wh$  es el número máximo de clientes visitados por día y  $z_d$  es una variable auxiliar entera que representa el número de clientes visitados en el día  $d \in D$  del horizonte de planificación.

Usando esta notación el problema de asignación de frecuencia se formula de la siguiente manera:

$$\min \quad wh - wl \quad (3.23)$$

Sujeto a

$$\sum_{c \in C: f^c = f_i} r_{ic} = 1 \quad \forall i \in V \quad (3.24)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{c \in C: f^c = f_i} a_{ct} r_{ic} = z_d \quad \forall d \in D \quad (3.25)$$

$$wl \leq z_d \leq wh \quad \forall d \in D \quad (3.26)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{c \in C} \frac{s_i}{f_i} a_{ct} r_{ic} \leq Q_k \quad \forall d \in D \quad (3.27)$$

$$r_{ic} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I; \forall c \in C \quad (3.28)$$



$$wl, wh \in Z^+ \quad (3.29)$$

$$z_d \in Z^+ \quad \forall d \in D \quad (3.30)$$

La función objetivo (3.23) busca minimizar la diferencia entre el número máximo y mínimo de visitas por día. Las restricciones (3.24) aseguran que cada cliente se le asigne exactamente a un escenario de visita (entre aquellos con el mismo número de visitas requeridas). Las restricciones (3.25) cuentan el número de visitas de los clientes cada día, mientras que las restricciones (3.26) definen el equilibrio entre días en términos de visitas a los clientes. Las restricciones (3.27) representan la restricción de capacidad diaria del vehículo seleccionado para servir al grupo correspondiente en la fase anterior. Finalmente, las restricciones (3.28), (3.29), (3.30), definen el dominio de las variables.

### 3.3.3 Fase # 3 Enrutamiento

En esta fase de enrutamiento, los vehículos visitan a los clientes en cada grupo programado para cada día del horizonte planeado, donde se resolvió un TSP con un método exacto implementado en [12]. Este método exacto se basa en resolver de manera eficiente las instancias del TSP. Esta fase tiene un conjunto de clientes representados por los nodos del 1 a N, adicionalmente, el depósito está representado por 0. Por lo tanto, el conjunto de vértices es  $V = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$ , y el conjunto de arcos es A con  $A = \{(i, j): i, j \in V, i \neq j\}$ . Los parámetros incluyen una distancia  $d_{ij}$  entre los clientes  $i, j \in V$ . Se utiliza una variable de decisión:  $x_{ij}$  es una variable binaria, que es igual a 1 si el cliente  $i \in V$ , es visitado antes que el cliente  $j \in V$ , 0 de lo contrario.

Usando esta notación el TSP se describe y formula de la siguiente manera:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \quad (3.31)$$

Sujeto a

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (3.32)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.33)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad S \subseteq N; |S| \geq 2 \quad (3.34)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I; \forall j \in J \quad (3.35)$$

La función objetivo (3.31) busca minimizar la distancia total recorrida para visitar los clientes en cada para cada horizonte de planificación en un día determinado. Las restricciones (3.32) y (3.33) aseguran que cada cliente se visita una sola vez y ese escenario garantiza la eliminación de los sub -tour (3.34). Las restricciones (3.35) define las variables de dominio. Así mismo, la distancia entre los clientes son distancias asimétricas, por lo que se requiere una transformación del TSP asimétrico (ATSP) en un TSP simétrico (STSP), para realizar esta transformación nos guiamos del método reseñado en [13]. La transformación puede ilustrarse de la siguiente manera, ver Figura 4

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & -\infty & p_{21} & p_{31} \\ \infty & 0 & \infty & p_{12} & -\infty & p_{31} \\ \infty & \infty & 0 & p_{13} & p_{23} & -\infty \\ -\infty & p_{12} & p_{13} & 0 & \infty & \infty \\ p_{21} & -\infty & p_{23} & \infty & 0 & \infty \\ p_{31} & p_{32} & -\infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4. Transformación del ATSP en un TSP

Fuente: Elaboración propia

El nuevo TSP simétrico se puede resolver utilizando técnicas para TSP simétricos y la eliminación de clientes ficticios del recorrido resultante proporciona la solución para el TSP asimétrico original.

### 3.4 Resolver los modelos matemáticos propuestos (ETAPA 4)

#### 3.4.1 Etapa de Agrupamiento

En la etapa de agrupación se desarrolla mediante el optimizador FICO Xpress-MP®, bajo el lenguaje de programación MOSEL.

En esta etapa se crean agrupaciones que admitan la combinación óptima entre vehículos y clientes, disminuyendo la distancia total recorrida y los costo fijo asociado a los vehículos, así mismo, la demanda para cada cliente y la capacidad vehicular fueron calculadas en modo semanal, al igual la política de límites de capacidades superior e inferior en cada grupo de clientes, para obtener los puntos de los concentradores se consideró aquellos clientes con frecuencia diaria, para calcular el tiempo requerido de visita a un cliente se construyó a partir de datos estadísticos.

### 3.4.2 Etapa de programación

Al igual que la etapa anterior se implementó como modelo optimizador FICO Xpress-MP® [14], con el lenguaje de programación MOSEL.

En la etapa de programación, consiste llevar cada grupo de la etapa anterior y realizar la asignación a cada cliente a un escenario compatible, lo que permite minimizar la diferencia entre cantidad máxima y mínima de visitas a cada grupo, también se logra realizar la programación de cada vehículo para cada día en una carga equitativa y balanceando las visitas bajo la política organizacional, como resultado se obtiene una combinación óptima lo que implica que el personal de transporte no genere tiempo extra en la ejecución de las actividades de entrega de mercancía.

### 3.4.3 Etapa de enrutamiento

Para el caso de la matriz de distancias sobre malla vial se calculó para cada grupo y cada día, luego se obtiene ATSP (Asymmetric Traveling Salesman Problem), la particularidad es que la distancia  $i$  a  $j$  es diferente de la distancia de  $j$  a  $i$ , para la resolución de TSP se utiliza el método conocido como concorde,

En el enrutamiento fue necesario integrar la siguientes herramientas de tipo computacional: R Statistics® [15], Concorde® [16], Excel® [17] y la API de Bing Maps [18], ver Figura 5.

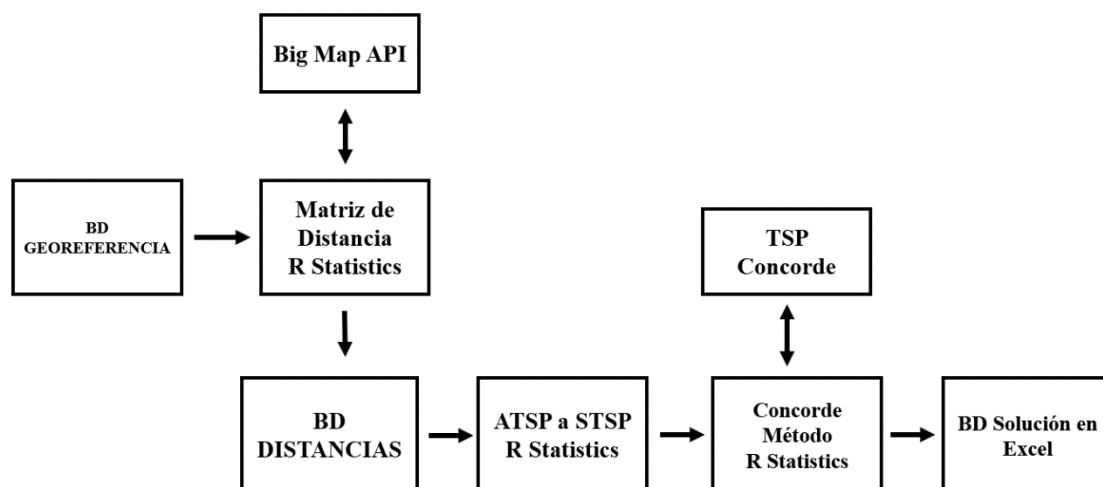


Figura 5. Flujo de información en la fase de Enrutamiento de la implementación computacional

Fuente: Elaboración Propia

#### 4. Resultados y Análisis

En esta sección se compara la situación actual de la compañía con los resultados obtenidos, luego de resolver el problema planteado

##### 4.1 datos de la compañía

La distribución de los clientes para la cuenca 14 de la ciudad de Medellín, para el caso de estudio se realiza con 249 clientes y un Depósito, ver Figura 6.

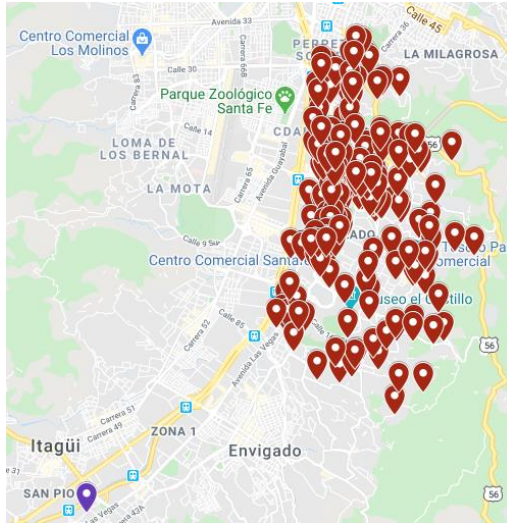


Figura 6. Clientes en la cuenca 14 y el Depósito (actualmente)

**Fuente:** Recuperado de <https://n9.cl/ylqhw>

La Figura 7, muestra la situación actual de la compañía en la utilización de la flota y las visitas ejecutadas por cada día en la semana.

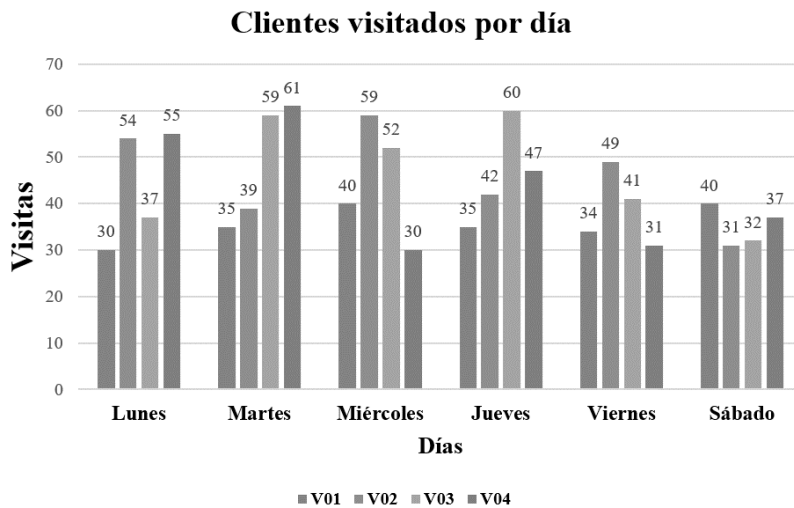


Figura 7. Número de visita por día de la Empresa.

**Fuente:** Elaboración Propia

La Tabla 4 representa los Kilómetros recorridos por día en la empresa , generados por los cuatros vehículos que estan disponible para la cuenca 14.

Tabla 4. Kilometros recorridos por día por la Empresa en los 4 vehículos.

<b>Kilómetros de los 4 vehículos de la empresa</b>							
<b>Vehículo</b>	<b>Lunes</b>	<b>Martes</b>	<b>Miércoles</b>	<b>Jueves</b>	<b>Viernes</b>	<b>Sábado</b>	<b>Total</b>
<b>V01</b>	76	84	57	63	82	66	<b>428</b>
<b>V02</b>	47	74	62	55	85	56	<b>379</b>
<b>V03</b>	56	58	79	88	82	63	<b>426</b>
<b>V04</b>	62	55	68	72	71	55	<b>383</b>
<b>Total</b>	<b>241</b>	<b>271</b>	<b>266</b>	<b>278</b>	<b>320</b>	<b>240</b>	<b>1.616</b>

Fuente: Elaboración Propia

#### 4.2 fase 1: fase de agrupamiento

En esta fase la heurística se encontró la combinación óptima entre los vehículos propuestos y los clientes, minimizando la distancia total del recorrido, agrupándolos por zonas y con diferentes colores, ver Figura 8.

Por otro lado, las Figura 9, Figura 10 y la Figura 11 representa la distribución geográfica de los clientes sobre la ciudad de Medellín en la cuenca 14 y la asignación correspondiente a los grupos con diferente color cada uno, además en la Figura 17 se muestran los 249 clientes repartidos en tres grupos de 83 clientes cada uno , ver apéndice 8.4

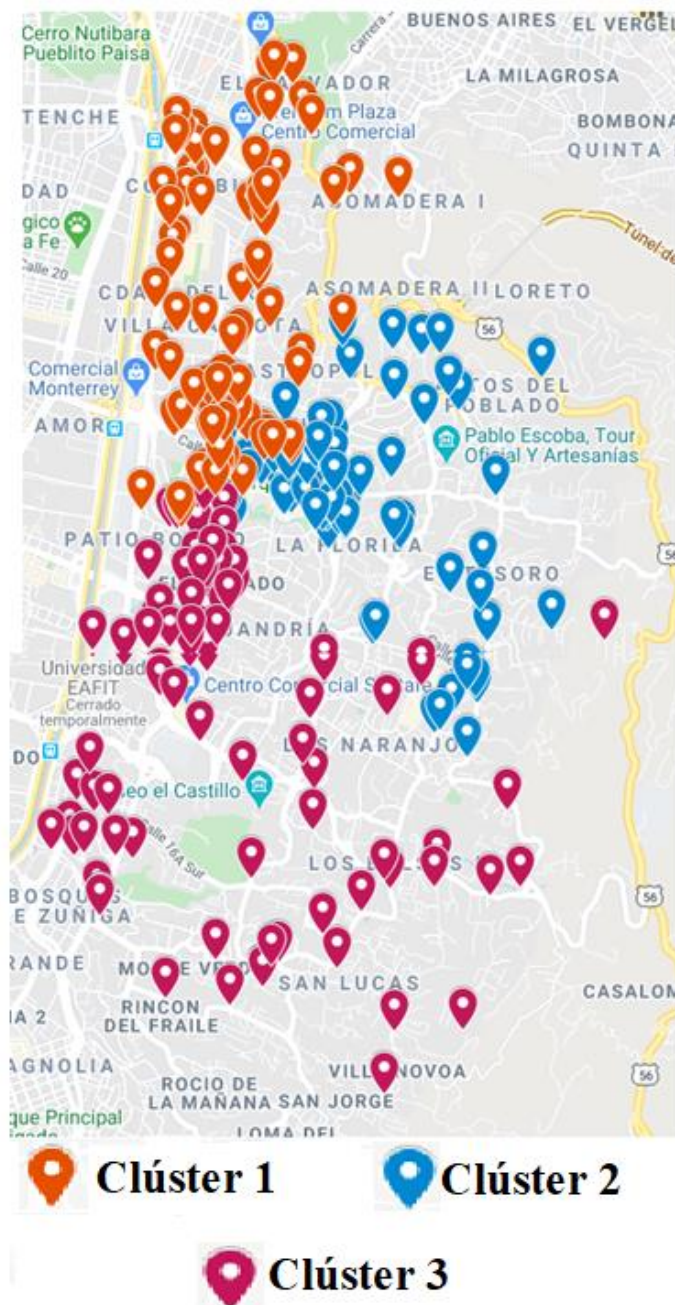


Figura 8. Resultados de la fase de agrupamiento por zona y colores

Fuente: Recuperado de <https://n9.cl/0w85>



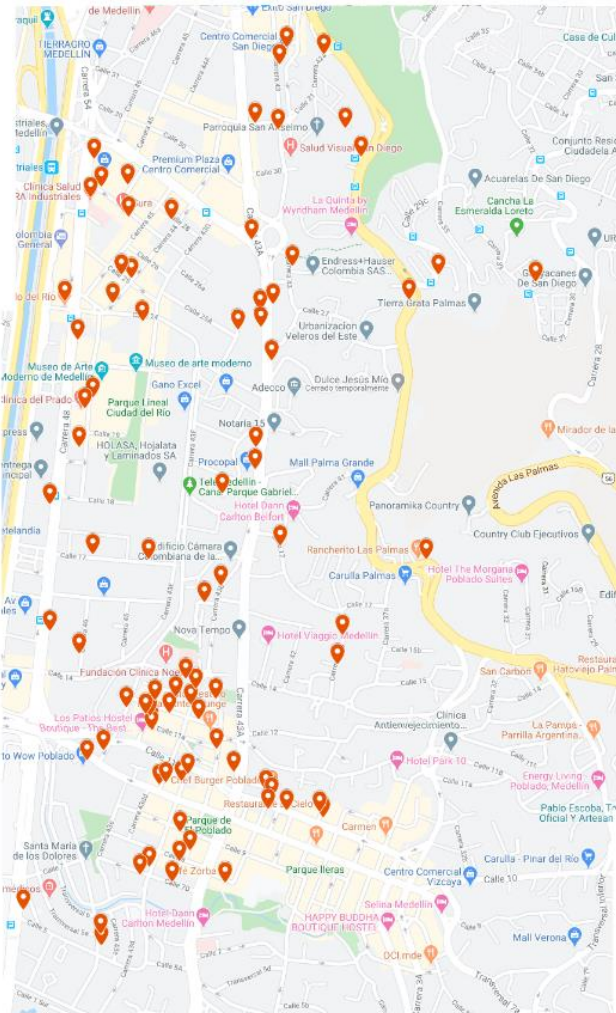


Figura 9. Resultados de la fase de agrupamiento en la zona 1

Fuente: Recuperado de <https://n9.cl/0w85>

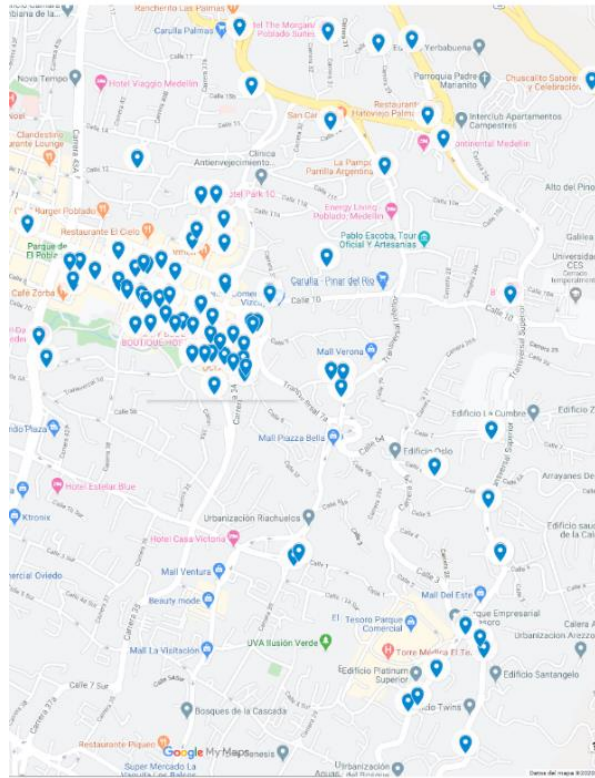


Figura 10. Resultados de la fase de agrupamiento en la zona 2

Fuente: Recuperado de <https://n9.cl/0w85>

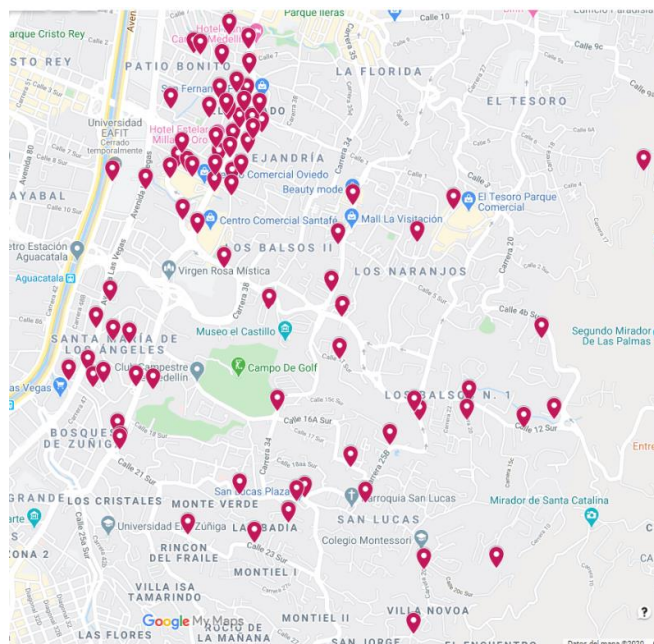


Figura 11. Resultados de la fase de agrupamiento en la zona 3

Fuente: Recuperado de <https://n9.cl/0w85>



### 4.3 fase 2: fase de Programación

Una vez que los clientes se les asigna un grupo y vehículo determinado, la segunda fase tiene como finalidad equilibrar el número de visitas realizadas durante los días de la semana, lo que permitió encontrar la solución idónea, agrupando los clientes en conglomerados, permitiendo realizar una comparación detallada del uso de los vehículos de la flota, se observa una reducción significativa del 25% con respecto a la situación actual de la compañía, La Figura 12 resume los resultados de la fase de equilibrio por día.

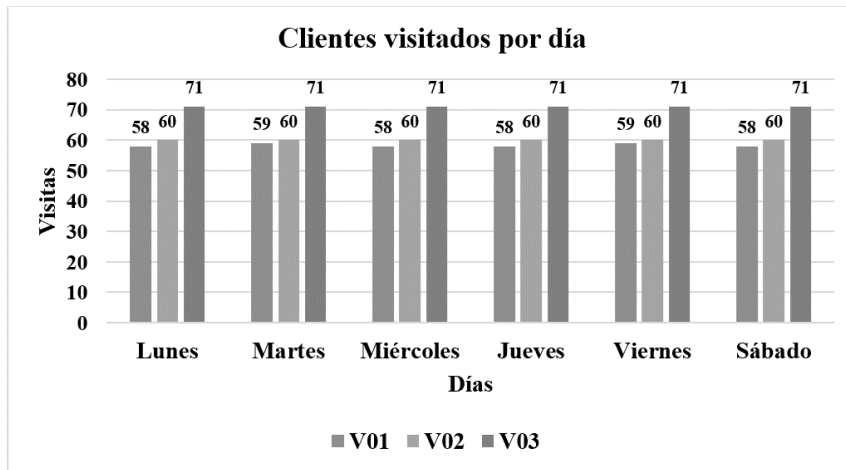


Figura 12. Número de visita por día propuesto por el Modelo.

Fuente: Elaboración Propia

### 4.4 fase 3: fase de Enrutamiento

Por último, la tercera fase enruta cada grupo de cliente con su respectivo día y escenario, obteniendo distancias diarias y semanales. La Tabla 5 muestra la distancia recorrida por día en cada escenario. Por otro lado, La Figura 13 muestra la ruta para cada día del vehículo 2, cabe aclarar que las rutas parecen diseñadas en un espacio euclidiano, pero en realidad los cálculos se realizaron a través una malla vial.

Tabla 5. Resultados de los kilómetros propuestos por el Modelo.

kilómetros (optimizados)							
Vehículo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Total
V01	70	60	49.3	70	53	43	295
V02	57	87	95	53	96	52	440
V03	46	46	45	46	46	85	315
<b>Total</b>	<b>172</b>	<b>193</b>	<b>141</b>	<b>169</b>	<b>194</b>	<b>180</b>	<b>1.049</b>

Fuente: Elaboración Propia

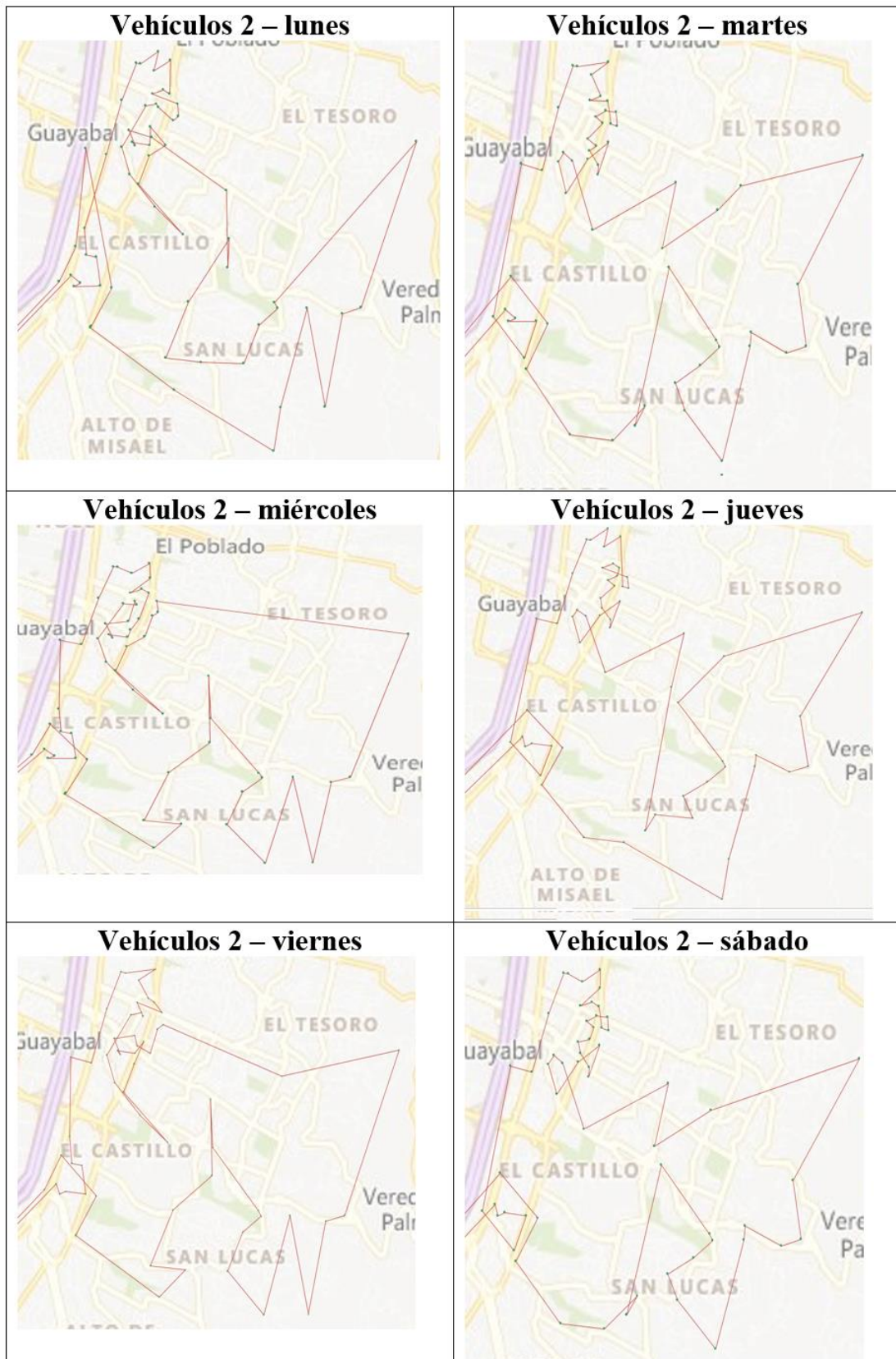


Figura 13. Ejemplos de Rutas del vehículo # 2 por cada día de la semana

Fuente: Elaboración Propia

Cada vehículo semanalmente tiene la capacidad de movilizar 960 unidades en GRD, lo anterior en relación 160 GRD por visita por 6 días a la semana, para el caso de estudio se reserva un 20% de su capacidad, dicho en otras palabras el vehículo está utilizando el 80% (768 GRD) de su capacidad semanal, permitiendo tener un espacio de holgura para atender la variabilidad de la demanda, asociado a eventos no contemplados por los clientes, ver Tabla 6.

*Tabla 6. Demanda que genero el Modelo*

Demanda							
<b>Vehículo</b>	<b>Lunes</b>	<b>Martes</b>	<b>Miércoles</b>	<b>Jueves</b>	<b>Viernes</b>	<b>Sábado</b>	<b>Total</b>
<b>V01</b>	148	130	147	130	148	129	832
<b>V02</b>	137	122	140	116	143	119	777
<b>V03</b>	131	125	131	125	131	125	768
<b>Total</b>	<b>416</b>	<b>377</b>	<b>418</b>	<b>371</b>	<b>422</b>	<b>373</b>	<b>2377</b>

**Fuente:** Elaboración Propia

## **5. Conclusiones**

En esta sección se resume los principales hallazgos y se describe los posibles trabajos futuros.

En el desarrollo del trabajo se puede observar la ineficiencia operativa del modelo actual, dado que las distancias recorridas por los vehículos y la asignación de visitas a clientes no tiene una estructura planeada, debido a que los auxiliares de distribución deciden como realizar el recorrido de las visitas a los cliente, utilizando la experticia adquirida a través del tiempo y no bajo el lineamiento de un modelo de ruteo, pero con el modelo propuesto se programa el orden de las visitas a los clientes, por lo cual la distancia de los recorridos será la mínima.

Los resultados obtenidos luego de resolver el problema VRP periódico, refleja una oportunidad importante en términos de eficiencias para el tamaño de la flota, representada en los costos fijos al suprimir el 25%, pasando de 4 a 3 vehículos en la cuenca 14. La distancia total recorrida disminuye sustancialmente de 1616 kilómetros a 1049 kilómetros por semana, la reducción de los costos variables se acerca al 35% representado en combustible y tiempo extra debido al agrupamiento y programación realizada por el modelo.

Claramente una limitación para implementar esta solución a nivel corporativo (en las ciudades y sus zonas), está en que el software de solución (FICO), donde debe adquirirse y licenciarse, lo cual implica una inversión de capital importante, no obstante, dados los ahorros planteados que son del 25% en este caso de estudio, el análisis de retorno de la inversión seguramente será favorable y en corto plazo.

### **Trabajos futuros**

Hacer una implementación real en el ámbito empresarial a escala y analizar el comportamiento de los parámetros y los resultados esperados, para que con los aprendizajes se pueda robustecer el modelo e incluir nuevas variables de interés en caso que así se requiera.

## **6. Agradecimientos**

### **De Fabio Alejandro Henao.**

**A mi esposa Lili.** Tu ayuda ha sido fundamental has estado conmigo incluso momentos más turbulentos. Este proyecto no fue fácil, pero estuviste motivando y acompañándome en cada fase, gracias por creer en mis proyectos de familia, profesionales y personales.

**A mis hijos Alejo y Miguel.** Aunque en el momento no comprendan bien mis palabras, pero cuando sean capaz, quiero que se den cuenta de lo que significan para mí, son la razón de que me levante cada día y esfuerzaren por el presente y el mañana,

**Jhon Henry Muñoz Rodríguez.** Compañero de monografía gracias por el excelente equipo que conformamos, por brindarme su confianza y compartir sus experiencias.

### **De Jhon Henry Muñoz Rodríguez**

**A Dios y la Virgen.** Quien me ha iluminado en cada etapa de mi vida y con quien estoy inmensamente agradecido por las grandes bendiciones recibida.

**A mi novia Rina Isabel Martínez P.** Muchas gracias por tu Amor, Comprensión y Apoyo en todos mis proyectos.

**A mi mejor amigo Beselel Sánchez Torres.** Muchas gracias por estos 20 años de amistad, por ayudarme a solucionar todas dificultades que se presentaban, por confiar y creer en mí.

**A la coordinadora de la Especialización Mónica Jhanet Gallego D.** Muchas gracias por tu colaboración y por la creer en mi “Perseverancia y la Fe”

**A mi tío Rodrigo Antonio Muñoz C.** Muchas gracias por colaborarme y hacer el préstamo en el banco para hacer la Especialización.

**A Fabio Alejandro Henao.** Compañero de monografía. Muchas gracias por tus aportes, consejos, asesorías, brindarme la oportunidad de conocer la empresa, fue muy satisfactorio trabajar como equipo

**A los compañeros de clase de la Especialización.** Muchas gracias a todos mis compañeros por la colaboración, la amistad y los consejos.

### **Compartido:**

**A nuestras familias.** Gracias porque siempre han estado ahí ofreciéndonos su amor, comprensión y un apoyo incondicional. A ellos la más especial de las dedicatorias.

**A la empresa objeto de estudio.** Por abrirnos sus puertas, toda su información y colaboración aportadas para la elaboración del monográfico.

**A la Universidad de Antioquia.** Gracias al Alma Mater, por la formación académica y los conocimientos ofrecidos durante el transcurso de la Especialización en Logística Integral. Gracias a los profesores por compartir sus experiencias y su conocimiento.

**A Eduwin Javier Aguirre González (asesor temático).** Por guiarnos y retarnos, por los consejos, por su tiempo y apoyarnos en el presente proyecto.

**A Gloria Osorno (asesor metodológico).** Por su asesoría y tiempo brindado en la elaboración del trabajo de grado.

## 7. Referencias

- [1] Y. Hernández, «Diseño de un Sistema de Ruteo de Vehículos con Múltiples Depósitos en Empresas de Transporte de Carga por Carretera,» Bogotá, 2016.
- [2] C. Morán y J. Núñez, «Implementación de un Problema de Ruteo Vehicular con Ventanas de Tiempo (VRPTW) en una empresa de venta de agroquímicos, sucursal Milagro,» Guayaquil, 2012.
- [3] J. Gallart, «Análisis, diseño e implementación de un algoritmo meta heurístico grasp que permita resolver el problema de rutas de vehículos con capacidad,» Lima, 2009.
- [4] M. Luna, «Problema Dinámico de Rutas de Vehículos Centrado en el Cliente,» 2016.
- [5] A. Fernández, «Algoritmos heurísticos y metaheurísticos basados en búsqueda local aplicados a Problemas de Rutas de Vehículos,» Valladolid, 2016.
- [6] VRP - REP, [En línea]. Available: <http://www.vrp-rep.org/variants/item/convrp.html>. [Último acceso: 26 Mayo 2020].
- [7] P. Toth y D. Vigo, *The Vehicle Routing Problem*, Philadelphia: Society of Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [8] P. Cabrales y J. Galeano, «Diseño de un modelo de recolección de residuos de aceites y grasas de origen animal y vegetal en las comunas 9, 10 y 11 de Bucaramanga,» Universidad Industrial de Santander, 2017.
- [9] V. Cacchiani y V. T. F. Hemmelmayr, «A set-covering based heuristic algorithm for the periodic vehicle routing problem,» *Discrete Applied Mathematics*, pp. 53-64, 2014.
- [10] F. Daneshzand, «The Vehicle-Routing Problem,» *Logistics Operations and Management*, pp. 127-153, 2011.
- [11] E. Aguirre, «Modeling and Solution of a Periodic Vehicle Routing Problem for the Collection of Waste Animal Tissue in a Colombian Rendering Company, a Case Study,» Medellín, 2017.
- [12] M. Hahsler y K. Hornik, «TSP – Infrastructure for the Traveling Salesperson Problem,» *Journal of Statistical Software*, vol. 23, n° 2, pp. 1-21, 2007.
- [13] R. Jonker y T. Volgenant, «Transforming asymmetric into symmetric traveling salesman problems,» *Operations Research Letters*, vol. 2, n° 4, p. 161 –163, 1983.

- [14] FICO, «FICO® Xpress Optimization | FICO,» [En línea]. Available: <https://www.fico.com/es/products/fico-xpress-optimization>. [Último acceso: 30 Mayo 2020].
- [15] R Studio, «<https://rstudio.com/>,» [En línea]. Available: <https://rstudio.com/>. [Último acceso: 30 Mayo 2020].
- [16] Concorde TSP solver, «TSP,» [En línea]. Available: <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html>. [Último acceso: 30 Mayo 2020].
- [17] Microsoft, «Microsoft excel,» [En línea]. Available: <https://www.microsoft.com/es-ww/microsoft-365/excel>. [Último acceso: 30 Mayo 2020].
- [18] Bing Maps Dev Center, «Bing maps / Dev Center,» [En línea]. Available: <https://www.bing.com/api/maps/sdk/mapcontrol/isdk>. [Último acceso: 30 Mayo 2020].
- [19] Y. Velásquez, «Análisis de las Características y Aplicaciones de los Sistemas de Ruteo de Vehículos,» Bogotá D.C., 2015.
- [20] L. Barragán, «Metaheurística Aplicadas al Problema de Ruteo Vehicular ( VRP: Vehicle – Routing Problem). Revisión documenta,» Milagro, 2018.



## 8. Apéndices

### 8.1 Distribución de los clientes en la Cuenca # 14

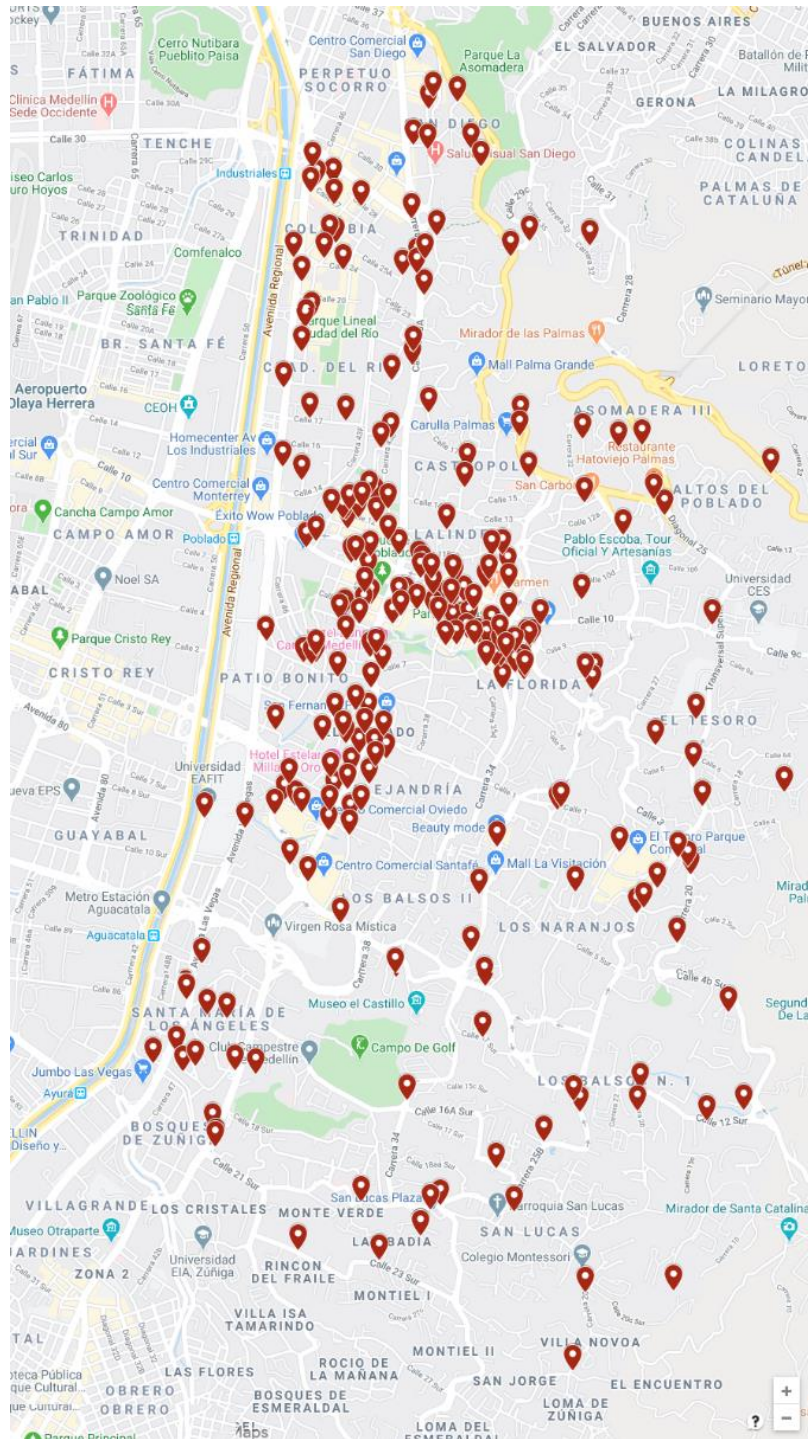


Figura 14. Distribución de los clientes en la Cuenca 14

Fuente: Recuperado de <https://n9.cl/ylqhw>

## 8.2 Matriz Origen - Destino (como ejemplo solo se tomo una parte de la Matriz O-D)

	DEPOT	C_001	C_002	C_003	C_004	C_005	C_006	C_007	C_008	C_009	C_010	C_011	C_012	C_013	C_014	C_015
DEPOT	0	10.254	13.823	6.647	9.781	8.449	6.51	9.138	9.067	9.057	7.882	9.233	7.168	9.188	9.481	8.717
C_001	11.066	0	6.83	6.056	0.718	2.426	4.809	2.691	2.62	2.61	2.718	2.24	4.488	2.195	1.871	2.147
C_002	15.255	9.844	0	8.195	9.511	8.655	9.107	8.325	8.254	8.244	8.824	7.874	8.808	7.829	8.1	8.742
C_003	6.618	6.132	8.989	0	5.799	4.455	2.773	4.304	4.233	4.223	3.888	4.399	1.934	4.354	4.695	4.479
C_004	10.944	0.805	6.708	5.934	0	2.304	4.52	2.569	2.498	2.488	2.596	2.118	4.366	2.073	1.749	2.025
C_005	9.097	2.102	5.428	4.822	1.769	0	3.184	1.289	1.218	1.208	1.139	0.838	3.254	0.793	0.61	0.913
C_006	5.589	5.551	8.807	2.481	5.078	3.746	0	4.122	4.051	4.041	3.179	4.217	2.152	4.172	4.778	4.014
C_007	10.206	2.755	4.602	5.826	2.422	1.566	4.148	0	1.165	1.155	1.879	0.785	3.994	0.74	1.011	1.653
C_008	10.265	2.814	4.661	5.885	2.481	1.625	4.207	1.295	0	1.214	1.938	0.844	4.053	0.799	1.07	1.712
C_009	10.275	2.824	4.671	5.895	2.491	1.635	4.217	1.305	0.01	0	1.948	0.854	4.063	0.809	1.08	1.722
C_010	7.658	2.696	6.15	4.183	2.363	1.019	2.068	1.465	1.394	1.384	0	1.56	2.615	1.515	1.63	1.122
C_011	10.091	2.64	4.589	5.813	2.307	1.451	4.033	1.121	1.05	1.04	1.764	0	3.879	0.625	0.896	1.538
C_012	6.344	4.626	8.35	2.224	4.293	2.949	1.267	3.665	3.594	3.584	2.382	3.76	0	3.715	4.056	3.217
C_013	9.816	2.365	4.635	5.859	2.032	1.176	3.758	0.846	0.775	0.765	1.489	0.045	3.604	0	0.621	1.263
C_014	9.29	2.232	5.156	4.55	1.899	1.118	3.136	1.017	0.946	0.936	0.867	0.566	2.982	0.521	0	0.641
C_015	8.648	3.184	5.569	3.908	2.851	1.299	2.494	0.884	0.813	0.803	0.487	0.979	2.34	0.934	1.275	0

Figura 15. Ejemplo de la Matriz Origen – Destino

Fuente: Elaboración Propia

## 8.3 Base de datos organizada

ID	Lunes	Martes	Miercoles	Jueves	Viernes	Sabado	Frecuencias Dias/Semana	GRD/ Trimestre	GRD/ Mes	Demanda x visita
<b>DEPOT</b>										
C_001	X		X		X		3	3	1	0,33
C_002	X	X	X	X	X	X	6	159	14	2,33
C_003		X		X		X	3	13	2	0,67
C_004	X	X	X	X	X	X	6	30	3	0,50
C_005	X		X		X		3	16	2	0,67
C_006	X	X	X	X	X	X	6	5	1	0,17
C_007	X	X	X	X	X	X	6	118	10	1,67
C_008	X	X	X	X	X	X	6	52	5	0,83
C_009	X	X	X	X	X	X	6	14	2	0,33
C_010	X	X	X	X	X	X	6	179	15	2,50
C_011	X	X	X	X	X	X	6	50	5	0,83
C_012		X		X		X	3	90	8	2,67
C_013		X		X		X	3	26	3	1,00
C_014	X	X	X	X	X	X	6	150	13	2,17
C_015	X	X	X	X	X	X	6	20	2	0,33
C_016		X		X		X	3	29	3	1,00
C_017	X	X	X	X	X	X	6	63	6	1,00
C_018	X	X	X	X	X	X	6	113	10	1,67
C_019	X	X	X	X	X	X	6	6	1	0,17
C_020	X	X	X	X	X	X	6	48	4	0,67

Figura 16. Base de datos organizada

Fuente: Elaboración Propia

### 8.4 Clúster en la Cuenca # 14

Clúster 01		Clúster 02		Clúster 03	
C_007	C_071	C_002	C_122	C_001	C_190
C_008	C_072	C_003	C_123	C_004	C_191
C_009	C_073	C_006	C_124	C_005	C_193
C_011	C_074	C_010	C_125	C_014	C_194
C_013	C_075	C_012	C_126	C_016	C_195
C_017	C_076	C_015	C_127	C_019	C_196
C_018	C_077	C_022	C_128	C_020	C_197
C_023	C_079	C_024	C_129	C_021	C_198
C_025	C_080	C_029	C_130	C_028	C_199
C_026	C_083	C_035	C_131	C_030	C_200
C_027	C_084	C_036	C_132	C_031	C_202
C_033	C_085	C_037	C_133	C_032	C_203
C_034	C_086	C_042	C_134	C_038	C_207
C_039	C_088	C_081	C_135	C_040	C_208
C_043	C_089	C_082	C_136	C_041	C_212
C_044	C_090	C_087	C_137	C_057	C_213
C_045	C_091	C_094	C_138	C_078	C_214
C_046	C_092	C_096	C_139	C_095	C_215
C_047	C_093	C_097	C_140	C_164	C_216
C_048	C_098	C_099	C_141	C_165	C_217
C_051	C_180	C_103	C_144	C_168	C_221
C_052	C_182	C_104	C_145	C_169	C_222
C_053	C_192	C_105	C_146	C_170	C_223
C_054	C_201	C_106	C_147	C_171	C_224
C_055	C_204	C_107	C_148	C_172	C_225
C_056	C_205	C_108	C_149	C_173	C_226
C_058	C_206	C_109	C_150	C_174	C_230
C_059	C_209	C_110	C_151	C_176	C_231
C_060	C_210	C_111	C_152	C_177	C_232
C_061	C_211	C_112	C_153	C_178	C_234
C_062	C_218	C_113	C_154	C_179	C_235
C_063	C_227	C_114	C_155	C_181	C_236
C_064	C_228	C_115	C_156	C_183	C_238
C_065	C_229	C_116	C_157	C_184	C_239
C_066	C_233	C_117	C_158	C_185	C_241
C_067	C_237	C_118	C_159	C_186	C_244
C_068	C_240	C_119	C_160	C_187	C_245
C_069	C_242	C_120	C_161	C_188	C_247
C_070	C_243	C_121	C_162	C_189	C_248
	C_246		C_163		C_249

Figura 17. Clúster por zonas

Fuente: Elaboración Propia