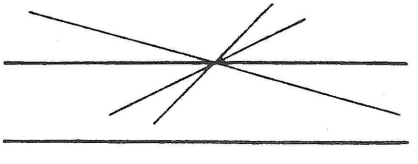
LUDWIG WITTGENSTEIN: REMARKS ON THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS.
PARTE IV.
1.942 - 1.944

Traductor: Alfonso Monsalve Solórzano.

1. "Los axiomas de un sistema axiomático deben ser autoevidentes". ¿Cómo son, entonces, autoevidentes? ¿Qué ocurre si dijera: *así* es como lo encuentro mas fácil de imaginar. Y aquí imaginar no es un proceso mental particular en el cual uno cierra sus ojos o los cubre con las manos.

2. ¿Qué decimos cuando se nos presenta un axioma tal como, por ejemplo, el axioma de las paralelas? ¿Nos ha mostrado la experiencia que así es como esto es? Bien quizá; pero *cuál* experiencia? Quiero decir: ella juega un papel; pero no el que uno *esperaría inmediatamente*. Pues no hemos hecho experimentos y encontrado en la realidad que sólo *una* línea recta a través de un punto dado no corta a otra. Y la proposición es, con todo, evidente. Suponga que yo diga ahora: es completamente indiferente el por qué es evidente. Es suficiente que nosotros la aceptemos. Todo lo que importa es cómo lo usamos.

La proposición describe una imagen, a saber:



Encontramos esta imagen aceptable. Como encontramos aceptable nuestro conocimiento aproximado de un número redondeándolo a un múltiplo de 10 ...

'Aceptamos esta proposición' ¿Pero, cómo *qué* la aceptamos?

3. Quiero decir: cuando las palabras de, por ejemplo, el axioma de las paralelas se dan (y entendemos el lenguaje), la clase de uso que esta proposición tiene y en consecuencia su sentido, están por ahora, bastante indeterminados. Y cuando decimos que es evidente, esto significa que ya hemos escogido una clase definida de empleo para la proposición, sin darnos cuenta. La proposición no es un axioma matemático si no la empleamos precisamente *para este propósito*.

Esto es, el hecho de que aquí no hacemos experimentos, sino que aceptemos la autoevidencia, es suficiente para fijar el empleo. Pues no somos tan ingenuos como para hacer que la autoevidencia cuente en lugar del experimento.

No es el encontrar la proposición verdad autoevidente, sino el hacer contar la autoevidencia, lo que la hace una proposición matemática.

4. ¿La experiencia nos dice que una línea recta es posible entre cualesquiera dos puntos? ¿O que dos colores diferentes no pueden estar en el mismo lugar?

Podría decirse: *la imaginación* nos lo dice, y el germen de la verdad está aquí; sólo que uno tiene que entenderlo correctamente.

Antes de la proposición el concepto es aún flexible.

Pero ¿no podría la experiencia determinarnos a rechazar el axioma? Si, y no obstante, este no juega el papel de una proposición empírica.

¿Por qué no son las leyes de Newton axiomas de la matemática?

Porque bien pudiéramos imaginarnos las cosas de otra manera. Pero -quiero decir- esto sólo asigna un cierto papel a estas proposiciones en contraste con otra. Esto es, decir de una proposición "esto podría imaginarse de otra manera" o "podemos imaginarnos también el opuesto", es *adscribirle* el papel de una proposición empírica.

Una proposición que se supone que sea imposible de imaginar de otra forma que verdadera, tiene una función diferente a la de una para la cuál esto no puede imaginarse.

5. El funcionamiento de los axiomas de las matemáticas es tal que si la experiencia nos lleva a abandonar un axioma, esto no haría de su opuesto un axioma.

'2 x 2   5' no significa que

'2 x 2 = 5' no ha funcionado

Uno podría, por así decir, poner antes de los axiomas un signo especial de aseveración.

Algo es un axioma, *no* porque lo aceptemos como extremadamente probable, incluso como cierto, sino porque le asignamos una función particular y una que choca con la de una proposición empírica.

Damos a un axioma una clase diferente de reconocimiento del que damos a una proposición empírica. Pero con esto no quiero decir que 'el acto mental de reconocimiento' sea diferente.

Un axioma, desearía decir, es una parte diferente de la gramática. (is a different part of speech)

6. Cuando uno oye el axioma matemático de que tal y tal es posible, uno supone sin pensarlo que sabe lo que aquí significa 'ser posible', porque esta forma de oración nos es naturalmente familiar.

¡No somos conscientes de cuán variado es el empleo del aserto '... es posible '! Y es por esto por lo que no se nos ocurre preguntar sobre el empleo especial en este caso.

Puesto que carecemos de la mas mínima visión de conjunto del uso completo, somos aquí enteramente incapaces de dudar de que entendemos la proposición.

La proposición de que hoy hay tal cosa como la acción a distancia, ¿pertenece a la familia de las propocisiones matemáticas? Aquí de nuevo desearía uno decir: La proposición no esta diseñada para expresar cualquier experiencia, sino mas bien para expresar la imposibilidad de imaginar algo diferente.

Decir que entre dos puntos -geométricamente hablando- una línea recta es siempre posible, significa: la proposición "los puntos ... están situados en una línea recta" es una aseveración sobre la posición de los puntos sólo si más de dos puntos están comprometidos.

Así como uno tampoco se pregunta a uno mismo cuál es el significado de una proposición de la forma "no hay..." (por ejemplo, "no hay prueba de esta proposición') en un caso particular. Preguntado por su significado, uno le responde a algún otro y a uno mismo con un ejemplo de no existencia.

7. Una proposición matemática se apoya en cuatro pies, no en tres; está sobredeterminada.

8. Cuando por ejemplo, por medio de una regla describimos lo que un hombre hace, queremos que la persona a quien le damos la descripción sepa, al aplicar la regla, lo que sucede en el caso particular. ¿Ahora, le doy una descripción *indirecta* por medio de la regla?

Existe por supuesto una cosa tal como una proposición que dice: si alguien ensaya a multiplicar los números ... de acuerdo con tales y tales reglas, obtiene...

Una aplicación de una proposición matemática tiene que ser siempre el cálculo mismo. Eso determina la acción de la actividad de calcular con el sentido de las proposiciones matemáticas.

Juzgamos la identidad y la concordancia por los resultados de nuestro cálculo; es por esto por lo que no podemos usar el acuerdo para explicar el hecho de calcular.

Describimos por medio de la regla. ¿para qué? ¿por qué? Esta es otra cuestión.

"La regla, aplicada a estos números, produce esos" podría significar: la expresión de la regla, aplicada a un ser humano, lo hace producir esos números a partir de estos.

Uno siente, bastante correctamente, que esa *no* sería una proposición matemática.

La proposición matemática determina una vía, nos afirma una vía.

No es contradicción de esto que ella sea una regla, y no simplemente estipulada, sino producida de acuerdo a las reglas.

Si usted usa una regla para dar una descripción, usted mismo no sabe más que lo que dice. Es decir usted mismo no prevé la aplicación que hará de la regla en un caso particular. Si dice "y así sucesivamente" usted mismo no sabe más que "y así sucesivamente".

9. ¿Cómo podría uno explicarle a alguien lo que usted tiene que hacer si ha de seguir una regla?

Uno está tentado a explicar: primero y principalmente, hacer la cosa *más simple* (si la regla, por ejemplo, es repetir siempre la misma cosa); y hay por supuesto algo de esto. Es significativo que podamos decir que es más simple escribir una secuencia de números en la cuál cada número es el mismo que su predecesor, que una secuencia en la cual cada número es mayor en 1 que su predecesor. Y además esta ley es más simple que la de adicionar alternativamente 1 y 2.

10 ¿No es muy precipitado aplicar una proposición que uno ha verificado en palos y piedras, a longitudes de onda de la luz? Quiero decir: que 2 x 5.000 = 10.000.

¿Realmente uno cuenta con que lo que ha demostrado sea verdadero en muchos casos, debe ser válido también para éstos? ¿O no es, más bien, que con los supuestos aritméticos no nos hemos comprometido de *ninguna* manera?

11. La aritmética como la historia natural (mineralogía) de los números. Pero *¿quién* habla así de ella? Nuestro pensamiento todo esta penetrado por esta idea.

Los números (no quiero decir los numerales) son formas, y la artimética nos habla de las propiedades de estas formas. Pero la dificultad aquí es que estas propiedades de las formas son *posibilidades*, no las propiedades respecto a las formas de las cosas de esta forma. Y estas posibilidades, a su turno, emergen como posibilidades físicas o sicológicas (de separación, ordenamiento, etc.). Pero el papel de estas formas es sólo el de imágenes que se usan de tal y tal manera. Lo que damos no es propiedades de las formas, sino transformaciones de formas, establecidas como paradigmas de una u otra clase.

12. No juzgamos las imágenes, juzgamos por medio de las imágenes. No las investigamos, las usamos para investigar alguna otra cosa.

Usted lo lleva a él a decidirse a aceptar esta imagen. Y lo hace por medio de la prueba, esto es, exhibiendo una serie de imágenes, o simplemente mostrándole la imagen. Aquello que lo mueve a decidir no es aquí el asunto. La cosa principal es que es cuestión de aceptar una imagen.

La imagen de combinar no es una combinación; la imagen de separar no es una separación, la imagen del ajuste de algo no es un caso de ajustamiento. Y a pesar de esto, esas imágenes son de la mayor importancia. *Esto es lo que parece*, si una combinación se hace, si una separación, y etc.

13. ¿Que pasaría si los animales o los cristales tuviesen tantas propiedades bellas como los números? Habría entonces, por ejemplo, una serie de formas cada una más grande que la otra en una unidad.

Yo debería ser capaz de describir cómo sucede que las matemáticas nos aparecen en ocasiones como la historia natural del dominio de los números, a veces como una colección de reglas.

¿Pero no podría uno estudiar las transformaciones de por ejemplo, las formas de los animales? Pero, 'estudiar'¿ *cómo*? Quiero decir: ¿no sería útil repasar transformaciones de formas animales? Y esto, con todo, no sería una rama de la zoología.

Sería entonces una proposición matemática que (por ejemplo) *esta* forma se derive de *ésta* por la vía de *esta* transformación. (Siendo reconocibles las formas y las transformaciones).

14. Debemos recordar, sin embargo, que por estas transformaciones una prueba matemática demuestra no sólo proposiciones de geometría de signo, sino también proposiciones del más variado *contenido*.

De esta manera, la transformación en una prueba russelliana demuestra que esta proposición lógica puede formarse desde las leyes fundamentales por el uso de estas reglas. Pero la prueba se mira como una prueba de la verdad de la conclusión, o como una prueba de que la conclusión no dice *nada.*

Ahora, esto es posible sólo a través de una relación de una proposición con algo fuera de ella, quiero decir, p. ej, a través de su relación con otras proposiciones y su aplicación.

"Una tautología (por ejemplo, 'pv'p') no dice nada", es una proposición que refiere al juego de lenguaje en el que la proposición p tiene aplicación. (por ejemplo, "está lloviendo o no está lloviendo" no nos dice nada sobre el clima)

La lógica russelliana no dice nada acerca de las clases de proposiciones -no me refiero a las proposiciones *lógicas* - y su empleo: y sin embargo la lógica obtiene su sentido completo simplemente de su presunta aplicación a las proposiciones.

15. Se puede uno imaginar que un pueblo tenga una matemática aplicada sin ninguna matemática pura. Puede - supongamos, por ejemplo, calcular la ruta descrita por ciertos cuerpos en movimiento y predecir su lugar en un tiempo dado. Para este propósito hace uso de un sistema de coordenadas, de las ecuaciones de curvas (*una forma de descripción del movimiento real*) y de la técnica de calcular en el sistema decimal. La idea de una proposición de matemática pura puede muy bien serle enteramente extraña.

Así, este pueblo tiene reglas de acuerdo con las cuales transforma los signos apropiados (en particular por ejemplo, numerales) con miras a predecir la ocurrencia de ciertos eventos.

Pero cuando ahora multiplica, por ejemplo, ¿no llegará a una proposición que diga que el resultado de la multiplicación es el mismo, no obstante que los factores estén cambiados de orden? Esa no será una regla primaria de notación, ni tampoco una proposición de su física.

No *necesita* obtener ninguna proposición de ese tipo -aún si tiene permitido el cambio de los factores.

Imagino el asunto como si esta matemática estuviese hecha enteramente en forma de órdenes. "Usted tiene que hacer *tal y tal* ", para obtener la respuesta a la pregunta "¿donde estará este cuerpo en tal y tal momento?" (No importa en manera alguna cómo han llegado estas personas a este método de predicción).

El centro de gravedad de su matemática consiste *enteramente en hacer.*

16. Pero ¿es esto posible? ¿Es posible que ellos no declararen, por ejemplo, a la ley conmutativa como *proposición*?

Pero quiero decir: esta gente no se supone que llega a la concepción de hacer descubrimientos matemáticos -sino *sólo* descubrimientos físicos.

Pregunta: ¿deben ellos hacer descubrimientos matemáticos como descubrimientos? ¿Qué les hace falta si no hacen ninguno? ¿Podrían, por ejemplo, usar la prueba de la ley conmutativa, pero sin la concepción de su culminación en una *proposición*, y obtener así un resultado que es de alguna manera comparable con sus proposiciones físicas?

17. La simple imagen

o o o o o

o o o o o

o o o o o

o o o o o

mirada ora como cuatro filas de cinco puntos, ora como cinco columnas de cuatro puntos, podría convencer a alguien de la ley conmutativa. Y podría él luego obtener multiplicaciones, ora en una dirección, ora en otra.

Una mirada al modelo y a las piezas lo convence de que es capaz de adecuarlas a la forma, luego, *intenta* hacerlo así.

"Si, pero sólo si las piezas no cambian". - Si ellas no cambian, y si no cometemos un error ininteligible, o las piezas desaparecen o aumentan sin que lo notemos.

"¡Pero seguramente es esencial que de hecho las piezas puedan siempre adecuarse dentro de la forma! ¿Qué ocurrirá si no pudieran (adecuarse)?" - Deberíamos pensar, quizás, que algo nos confundió. Pero - qué, entonces - quizás debiéramos aceptar la cosa como fue. Y entonces Frege podría decir:" ¡Aquí tenemos una nueva clase de locura!"[1]

18. Es claro que las matemáticas como una técnica de transformación de signos para el propósito de la predicción, no tienen nada que ver con la gramática.

19. El pueblo cuya matemática fuera sólo una técnica así, presuntamente también ahora aceptaría pruebas que lo convencieran de la reemplazabilidad de una técnica de signos por otra. Es decir, ellos encuentran transformaciones, series de imágenes, sobre cuya validez pueden aventurarse a usar una técnica en lugar de otra.

---

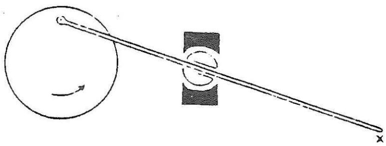
1. Cfr.Grundgesetze der Arithmetik, vol I prefacio p. XIV comparar también arriba I - 148.

20. Si calcular se nos parece a la acción de una máquina, es el *ser humano*, que hace el cálculo, quien es la máquina.

En ese caso el cálculo sería, por así decir, un diagrama diseñado por una parte de la máquina.

21. Y eso me lleva al hecho de que una imagen puede muy bien convencernos de que una parte especial de un mecanismo se movería de tal y tal forma cuando el mecanismo fuera puesto en movimiento.

El efecto de una tal imagen (o serie de imágenes) es como el de una prueba. De esta manera yo podría, por ejemplo, hacer una construcción de cómo el punto X del mecanismo.



se moverá

¿No es *extraño* que no sea instantáneamente claro *cómo* la imagen del período en división nos convenza de la recurrencia de esa fila de dígitos?

(Encuentro que es tan difícil separar el interior del exterior y la imagen de la predicción).

El doble carácter de la proposición matemática - como *ley* y como *regla*.

22. Suponga que uno dijera "suposición correcta" en lugar de "intuición": esto mostraría el valor de una intuición a una luz enteramente diferente. Pues el fenómeno de la suposición es sicológico, pero no lo es el de la suposición correcta.

23. El haber aprendido una técnica nos lleva a que ahora la cambiemos en tal y tal forma después de ver esta imagen.

"Nos decidimos por un nuevo juego de lenguaje"

"Nos decidimos *espontáneamente*" (quisiera yo decir)" por un nuevo juego de lenguaje"

24. Verdad, pareciera que si nuestra memoria funcionara diferentemente, no podríamos calcular como lo hacemos. Pero en ese caso, ¿podríamos definir como lo hacemos; hablar y escribir como lo hacemos?

Pero ¿cómo describir el fundamento de nuestro lenguaje por medio de proposiciones empíricas?

25. Suponga que cuando hiciéramos una división, no diera el mismo resultado que el de la copia de su período. Eso podría provenir, por ejemplo, del hecho de que alteráramos nuestras tablas, sin que fuéramos conscientes de ello. Sin embargo podría también provenir de que copiáramos en una forma diferente.

26. ¿Cuál es la diferencia entre *no* calcular y calcular *erróneamente*? - O: ¿hay una clara línea divisoria entre *no* medir el tiempo y medirlo *erróneamente* ? ¿Entre no conocer medida alguna de tiempo y conocer una errónea?

27. Ponga atención a la charla por medio de la cual convencemos a alguien de la verdad de una proposición matemática. Ella (la charla) nos dice algo de la función de este convencimiento. Me refiero a la charla con la que se despierta la intuición.

Esto es, por la cual, el mecanismo de una técnica de cálculo es puesta en movimiento.

28. ¿Puede decirse que si usted aprende una técnica, eso lo convence de la uniformidad de sus resultados?

29. El límite de lo empírico[2] es *formación de conceptos*.

¿Cuál es la transición que hago desde "sera así" a "tiene que ser así"? Formo un concepto diferente. Uno que incluye algo que no estaba ahí antes. Cuando digo "si estas derivaciones son las mismas, entonces tiene que ser eso...", estoy convirtiendo algo en un criterio de identidad. Así, estoy remoldeando mi concepto de identidad.

Pero ¿qué sucede si alguien dice ahora: "No soy consciente de estos *dos* procesos, sólo soy consciente de lo empírico, no de una formación y transformación de conceptos que es independiente de él: me parece qué todo está al servicio de lo empírico"? En otras

---

2. En la parte III al finalizar el numeral 71 y comenzar el 27, aparece la expresión 'the limits of empiricism' que según los editores de la versión inglesa se refiere al artículo de Bertrand Russell "The Limits of Empiricism".

palabras: no pareciera que nos volviéramos ora más, ora menos racionales, o que alteráramos la forma de nuestro pensamiento hasta tal punto que alteraramos *lo que llamamos "pensamiento"*. Sólo parece que siempre estuviéramos ajustando nuestro pensamiento a la experiencia.

Lo único claro es: cuando alguien dice "si usted sigue la *regla, tiene que* ser así".No tiene ningún concepto *claro* de cuál experiencia correspondería al opuesto.

O también: no tiene ningún concepto claro de lo que sería si fuera de otra manera. Y esto es muy importante.

30. ¿Qué nos compele entonces a formar el concepto de identidad como cuando se dice por ejemplo, "si usted realmente hace la misma cosa dos veces, entonces, también el resultado tiene que ser el mismo?" - ¿Qué nos compele a proceder de acuerdo a una regla, a concebir algo como una regla ? ¿Qué nos compele a hablamos a nosotros mismos en las formas de los lenguajes que hemos aprendido ?

Pues la palabra "tiene" expresa seguramente nuestra inhabilidad para desviamos de *este* concepto. (O, debo decir "rechazo"?)

Y aún si he hecho la transición de una formación de concepto a otra, el viejo concepto está todavía ahí, en el fondo.

¿Puedo decir: "una prueba nos induce a tomar cierta decisión, a saber, la de aceptar una particular formación de concepto?

No mire la prueba como un procedimiento que lo *compele*, sino como uno que lo *guía*. - Y lo que guía es su *concepción* de una situación (particular).

¿Pero cómo ocurre que nos guíe a *cada uno* de tal forma que estemos de acuerdo con la influencia que tiene en nosotros? Bien, ¿cómo ocurre que estemos de acuerdo al *contar*?. Uno puede decir: "así es precisamente como estamos entrenados", "y el acuerdo producido de esta manera se sostiene adicionalmente por las pruebas".

En el curso de esta prueba hemos formado nuestra manera de mirar la trisección del ángulo, que excluye una construcción con regla y compás.

Al aceptar una proposición como autoevidente, también la relevamos de toda responsabilidad de cara a la experiencia.

En el curso de la prueba nuestra manera de ver se cambia - y no desacredita por ello lo que esté conectado con la experiencia.

Nuestra manera de ver se remodela.

31. Tiene que ser así no significa: será así. Al contrario. "será así" escoge entre una posibilidad y otra. "Tiene que ser así" ve sólo *una* posibilidad.

La prueba, por así decir, guía nuestra experiencia dentro de unos canales definidos. Alguien que ha ensayado una y otra vez de hacer tal y tal, renuncia al intento después de la prueba.

Alguien ensaya a ordenar piezas para hacer un patrón particular. Ahora ve un modelo en el que una *parte* de ese patrón está compuesto de todas las piezas de que dispone, y renuncia a su intento. El modelo fue la prueba de que su propósito es imposible.

Ese modelo también, como éste que muestra que ese alguien puede hacer un patrón de estas piezas, cambia su *concepto*. Pues, podría uno decir, él nunca miró la tarea de hacer el modelo de estas piezas en esta forma antes.

¿Es obvio que si alguien ve que parte del patrón puede hacerse con estas piezas, se da cuenta de que no hay manera de hacer el modelo completo con ellas? ¿No puede ser que vaya ensayando y ensayando, para ver, si después de todo, algún ordenamiento en las piezas no logra este fin? ¿Y no puede lograrlo? (Utiliza una pieza dos veces, por ejemplo.)

¿No tenemos que distinguir aquí entre pensamiento y éxito práctico del pensamiento?

32. "...Quienes no tienen conocimiento inmediato de ciertas verdades, como nosotros, sino quizás están reducidos al camino indirecto de la inducción, "dice Frege"[3]. Pero lo que me interesa es esta inmediata comprensión, de si es una verdad o una falsedad. Me pregunto: ¿cuál es la conducta característica de los seres humanos que 'tienen comprensión de' algo 'inmediatamente', cualquier cosa que sea el resultado práctico de esta comprensión?

Lo que me interesa no es el tener comprensión inmediata de una verdad, sino el fenómeno de la comprensión inmediata. En realidad no como un fenómeno mental especial, sino como un fenómeno de la acción humana.

33. Sí: es como si la formación de un concepto guiara nuestra experiencia dentro de canales particulares, como si una experiencia fuera vista junto con otra en una nueva

---

3. Grundgesetze der Arithmetik, Vorwort, p. XVI.

manera. (Así como un instrumento óptico toma luz que proviene de varias fuentes en una forma particular para formar un patrón)

Imagine que una prueba fuera un trabajo de ficción, una obra de teatro. ¿No puedo observar una obra de teatro que me guíe a algo?

No sé como sería, - pero vi una imagen y sabía exactamente cómo iba a seguir y se me confirmó.

La imagen me ayudó a hacer una predicción. No como un experimento - fue sólo la partera de la predicción.

Pues, cualquier cosa que sea mi experiencia o haya sido, yo seguramente aún tengo que *hacer* la predicción. (La experiencia no la hace por mí)

No produce gran asombro entonces, que la prueba nos ayude a *predecir*. Sin esta imagen no hubiera podido decir qué pasó, pero cuando la veo, me aprovecho de ella con miras a la predicción.

No puedo predecir el color de un compuesto químico por medio de una imagen que exhiba las sustancias en el tubo de ensayo y la reacción. Si la imagen mostrara espuma y finalmente cristales rojos, no sería capaz de decir: "si, *así* es como tiene que ser" o" no, no puede ser así". Es diferente, sin embargo, cuando veo la imagen de un mecanismo en movimiento; eso puede decirme cómo se moverá realmente una pieza. Aunque si la imagen representara un mecanismo cuyas piezas estuvieran compuestas de un material muy liviano (pasta, digamos), y por lo tanto curvado de varias maneras en la imagen, entonces ella podría no ayudarme a hacer una predicción.

¿Podemos decir que un concepto es formado de tal manera que se adapte a cierta predicción, esto es, que haga posible que sea hecha en los términos más simples?

34. El problema filosófico es: ¿cómo podemos decir la verdad y calmar estos fuertes prejuicios al hacerlo?

Hay diferencia entre pensar algo como un engaño de mis sentidos o como un evento externo, entre tomar este objeto como una medida de algo o al contrario, entre resolver hacer que dos criterios decidan o sólo uno lo haga..

35. Si el cálculo ha sido correcto, entonces éste tiene que ser el resultado. ¿Tiene que ser *éste* el resultado *siempre*, en ese caso? Por supuesto.

Por estar educados en una técnica, estamos también educados para obtener una forma de mirar el asunto que está precisamente tan firmemente enraizada como la técnica.

Las proposiciones matemáticas parecen no tratar ni de signos ni de seres humanos, y por consiguiente no lo *hacen*.

Ellas muestran *aquellas* conexiones que consideramos rígidas. Pero hasta cierto punto quitamos la vista de estas conexiones y miramos a alguna otra cosa. Por así decirlo, les damos la espalda. O: descansamos, o nos apoyamos, sobre ellas.

Una vez más: no miramos la proposición matemática como una proposición que tiene que ver con signos. Y por lo tanto no *es* eso.

La reconocemos *por el hecho* de darle la espalda.

¿Qué hay acerca, por ejemplo, de las leyes fundamentales de la mecánica? Si usted las entiende, tiene que saber cómo la experiencia las sustenta. Sucede de otro modo con las proposiciones de la matemática pura.

36. Una proposición puede describir una imagen y esta imagen estar anclada variadamente en nuestra manera de ver las cosas, y por lo tanto en nuestra manera de vivir y actuar.

¿No es la prueba una razón demasiado débil para abandonar completamente la búsqueda de una construcción de la trisección? Usted sólo ha recorrido la secuencia de signos una vez o dos; ¿decidirá usted con base en eso? ¿Sólo porque ha visto esta transformación específica, abandonará la búsqueda?

El efecto de la prueba es, creo, lo que nos precipita dentro de la nueva regla.

Hasta aquí hemos calculado de acuerdo con una tal regla. Ahora alguien nos muestra la prueba de que puede hacerse de otra manera, y cambiamos a la otra técnica - No porque nos digamos que funcionará también de esta manera, sino porque sentimos la nueva técnica idéntica a la antigua, porque tenemos que darle el mismo sentido, porque la reconocemos como lo mismo, precisamente como reconocemos este color como verde.

Es decir: la comprensión de las relaciones matemáticas tiene un papel similar al de ver una identidad. Casi podría decirse que es una clase más complicada de identidad.

Podría decirse: las razones por las que ahora cambiamos a una técnica diferente son de la misma clase que aquellas que nos hacen efectuar una multiplicación como lo hacemos. Aceptamos la técnica como la *misma* que hemos aplicado al hacer otras multiplicaciones.

37. Un ser humano está *prisionero* en un cuarto si la puerta está sin seguro, pero abre hacia adentro; él, sin embargo, nunca tiene la idea de *halarla* en lugar de empujarla.

38. Cuando el blanco se vuelve negro alguna gente dice "esencialmente es aún el mismo"; y otros, cuando el color se vuelve un matiz mas obscuro: "es *completamente* diferente".

39. Las proposiciones 'a=a', 'p p', 'la palabra 'Bismarck' tiene 8 letras', 'no hay cosa tal como el verde rojizo' son todas obvias y son proposiciones acerca de la esencia. ¿Qué tienen en común?

Evidentemente cada una es de una clase diferente y se usan diferentemente. La penúltima es la mas parecida a una proposición empírica. Y puede, comprensiblemente, ser llamada una proposición sintética a priori.

Puede decirse: a menos que usted ponga la serie de los números y la serie de las letras lado a lado, no puede saber cuantas letras tiene la palabra.

40. Un patrón derivado de otro de acuerdo a una regla (por ejemplo el inverso de un tema)

Entonces el resultado puesto como equivalente a la operación.

41. Cuando escribí: "la prueba tiene que ser diáfana" eso significaba: la *causalidad* no toma parte en la prueba.

O aún: una prueba tiene que ser capaz de ser reproducida por simple copia.

42. El que si usted continúa dividiendo 1:3 tenga que seguir obteniendo 3 en el resultado, no se conoce por intuición, como tampoco el que la multiplicación 25 x 25 dé el mismo producto cada vez que se repite.

43. Quizás podría decirse que el carácter sintético de las proposiciones matemáticas aparece más obviamente en la ocurrencia impredecible de los números primos.

Pero el que sean sintéticas (en este sentido) no las hace algo menos a priori. De ellas podría decirse, quiero decir, que no salen de sus conceptos por medio de alguna clase de análisis, sino que realmente determinan un concepto por síntesis como por ejemplo, puede hacerse que prismas cruzados determinen un cuerpo.

La distribución de los primos sería un ejemplo ideal de lo que podría llamarse sintético *a priori*, pues uno puede decir que en ningun caso es descubrible por un análisis del concepto de número primo.

44. ¿No podría uno realmente hablar de intuición en matemáticas? Aunque no sería una verdad *matemática* que fuera comprendida intuitivamente, sino una verdad física o una sicológica. De está manera sé con *gran* certeza que si multiplico 25 por 25, diez veces, obtendré 625 en cada ocasión. Es decir, que conozco el hecho sicológico de que este cálculo continuamente me parecerá correcto; como sé que si escribo la serie de los números del 1 al 20 diez veces, mis listas resultaran idénticas al cotejarlas. - Ahora, ¿es eso un hecho empírico? por supuesto - con todo, sería difícil mencionar los experimentos que me convencerían de ello. Una cosa tal podría llamarse un hecho *empírico* conocido intuitivamente,

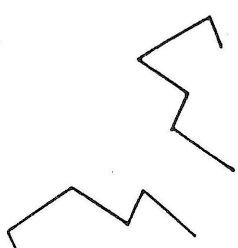
45. Usted quiere decir que cada prueba nueva altera el concepto de prueba en una u otra forma.

Pero entonces, ¿por cuál principio se reconoce algo como una nueva prueba? O más bien, no hay ciertamente 'principio' aquí.

46. Ahora debo decir: ¿"estamos convencidos de que siempre dará el mismo resultado"? No, eso no es suficiente. Estamos convencidos de que el mismo cálculo saldrá siempre, será siempre calculado. Ahora, ¿es *ésa* una convicción matemática? No - pues si no fuera siempre lo mismo lo que se calculara, no podríamos concluir que el cálculo produce en una ocasión un resultado y en otra otro.

Estamos, *por supuesto*, también convencidos de que cuando repetimos un cálculo, repetimos el patrón del cálculo.

47. ¿No podría decir: si usted hace una multiplicación, no encuentra en cualquier caso el hecho matemático, pero si encuentra la proposición matemática? pues lo que usted *encuentra* es el hecho no matemático, y en esta forma la proposición matemática. Porque una proposición matemática es la determinación de un concepto que se sigue de un descubrimiento.



Usted *encuentra* una nueva fisonomía. Ahora puede, por ejemplo, memorizarla o copiarla.

Una nueva forma ha sido encontrada, construida. Pero se usa para dar un nuevo concepto junto con el viejo.

El concepto es alterado de tal modo que éste *tuvo* que ser el resultado.

Encuentro, no el resultado, sino el hecho de que llego a él.

Y no es éste comenzar aquí la ruta y terminar aquí, lo que es un hecho empírico, sino el hecho de haber ido por esta vía, o por alguna vía hasta este fin.

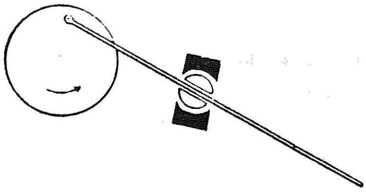
48. ¿Pero no podría decirse que las *reglas* conducen por este camino, aún si nadie fuera por él?

Pues esto es lo que quisiera decir - y aquí vemos la máquina matemática, que guiada por las reglas mismas, obedece sólo a las leyes matemáticas y no a las físicas.

Quiero decir: el funcionamiento de la máquina matemática es sólo una *imagen* del funcionamiento de una máquina.

La regla no hace el trabajo, pues todo lo que sucede de acuerdo a la regla es una interpretación de la regla.

49. Supongamos que tengo las etapas del movimiento de



en una imagen frente a mí; entonces esto me posibilita formar una proposición, que, por así decir, yo leo de la imagen. La proposición contiene la palabra "aproximadamente" y es una proposición de geometría.

Es raro que yo pueda leer una proposición a partir de una imagen.

La proposición, sin embargo, no trata de la imagen que veo. No dice que tal y tal cosa pueden verse en esta imagen. Pero tampoco dice lo que hará el mecanismo real, aunque lo sugiere.

Pero ¿podría dibujar el movimiento del mecanismo de otras maneras también, si sus piezas no cambian? Es decir, *¿no estoy compelido, bajo estas condiciones*, a aceptar precisamente esto como la imagen del movimiento?

Imaginemos la construcción de las fases del mecanismo puestas con línea de color cambiante. Que las líneas sean en parte negra sobre una base blanca, en parte blancas sobre una base negra. Imagine las construcciones en Euclides efectuadas de esta manera, perderían toda obviedad.

50. Una palabra invertida tiene una *nueva* cara.

¿Qué, si se dijera: si usted invierte la secuencia 123, *aprende* acerca de ella que produce 321 cuando la invierte? Y lo que usted aprende no es la propiedad de estas marcas de tinta, sino de la secuencia de *formas*. Usted aprende una propiedad *formal* de las formas. La proposición que asevera esta propiedad formal se prueba por experiencia, la cuál le muestra una forma que surge, de esta manera, de la otra.

Ahora, si usted aprende esto, ¿tiene *dos* impresiones? Una del hecho de que la secuencia se *invierte*, la otra, del hecho de que resulta 321? ¿Y no podría usted tener la experiencia, la impresión de que el 123 se invierte y no obstante no resulta el 321? Quizás se dirá: "sólo por una extraña ilusión".

La razón por la que realmente uno no puede decir que aprende esa proposición formal a partir de la experiencia es que uno la llama esta experiencia cuando este proceso lleva a este resultado. La experiencia a la que me refiero consiste, como tal, en este proceso con este resultado.

Es por esto por lo que es más que la experiencia: es ver un patrón.

¿Puede una fila de letras tener dos inversiones?

Digamos, una inversión acústica y otra óptica. Suponga que explico a alguien qué es la inversa de una palabra en el papel y ahora resulta que él tiene una inversión acústica de la palabra, esto es, algo a lo cuál quisiera llamar así, pero que no es completamente igual a la inversión escrita. Así que uno puede decir: el oye *esto* como la inversa de la palabra. Como si, por así decir, la palabra se le distorsionara al ser invertida. Y esto quizá podría ocurrir si por ejemplo, él pronunciara la palabra y su inversa con fluidez, por oposición al caso de deletrearla. O la inversión podría parecer diferente cuando dijera la palabra hacia adelante y hacia atrás en una sola emisión.

Podría ser que la imagen exacta de un perfil reflejado en un espejo, vista inmediatamente después del perfil, nunca fuera considerada como algo igual, sólo que en diferente dirección; sino que para dar la impresión de inversión exacta, el perfil tuviera que ser alterado un poco en sus dimensiones.

Pero quiero decir que no tenemos derecho a decir: aunque en realidad dudemos sobre la inversión correcta de, por ejemplo, una palabra larga, *sabemos* no obstante que la palabra sólo tiene *una* inversa.

"Si, pero si se supone que sea una inversa en *este* sentido, puede haber sólo una". ¿'En este sentido' significa aquí: por estas reglas o; con esta fisonomía? En el primer caso la proposición sería tautológica, en el segundo no es necesario que sea verdadera.

51. Piénsese en una máquina que 'esté construida de manera tal' que invierte una fila de letras. Y ahora, en la proposición que en el caso es

S O B R E

resulta

E R B O S

la regla, como realmente es entendida, parece ser una fuerza de impulso que invierte una secuencia ideal de *esta manera*-cualquier cosa que pueda hacer un ser humano con una secuencia real. Este es el mecanismo que es el patrón, el ideal del mecanismo real.

Y eso es *inteligible*. Pues si el resultado de la inversión llega a ser el criterio por el cual determinar si la fila ha sido realmente invertida, y si expresamos esto como nuestra imitación de una máquina ideal, entonces esta máquina tiene *infaliblemente* que producir este resultado.

52. Ahora, ¿puede decirse que los conceptos que la matemática produce son una cosa útil, que esencialmente podríamos arreglárnoslas sin ellos?

Primero y principalmente, la adopción de estos conceptos expresa la espectativa *segura* de experiencias ciertas.

No aceptamos, por ejemplo, una multiplicación que no produzca siempre el mismo resultado.

Y lo que esperamos con certeza es esencial a nuestra vida toda.

53. ¿Por qué, entonces, no debería yo decir que las proposiciones matemáticas solamente expresan estas expectativas especiales, esto es, por consiguiente, que ellas expresan asuntos de la experiencia? Sólo porque precisamente no lo hacen. Quizá no debiera tomar la medida de adoptar un cierto concepto si no esperara completa y definitivamente la ocurrencia de ciertos hechos; pero por esa razón, tomar esa medida y expresar las expectativas no es equivalente.

54. Es difícil colocar el cuerpo del hecho en la perspectiva correcta; mirar lo dado como dado. Es difícil poner el cuerpo de manera diferente a como uno está acostumbrado a verlo. Una mesa en un depósito de madera puede siempre ponerse patas arriba, en orden quizás a salvar el espacio. Así he visto siempre el cuerpo del hecho situado de *esta* manera, por razones varias; y ahora se supone que he de ver alguna otra cosa como su comienzo, y otra diferente, como su fin. Esa es la dificultad. No se sostiene, por así decir, de esa manera, a menos que uno lo mantenga en esta posición por medio de otros artificios.

55. Una cosa es usar una técnica matemática consistente en la elusión de la contradicción, y otra, filosofar contra la contradicción en matemática.

56. Contradicción. ¿Por qué precisamente *este* espectro? Esto es con seguridad muy sospechoso.

¿Por qué no podría decirme un cálculo hecho para un propósito práctico, con un resultado contradictorio: "haga como quiera; yo, el cálculo, no decidido el asunto"?.

La contradicción podría ser concebida como una señal de los dioses para que yo actúe en vez de hacer consideraciones.

57. ¿Por qué debe ser prohibida la contradicción en matemáticas? Bien, ¿por qué no se admite en nuestros juegos del lenguaje simples? (Hay ciertamente una conexión aquí) ¿Es ésta, entonces, una ley fundamental que gobierna todos los juegos de lenguaje pensables?

Supongamos que una contradicción en una orden produce, por ejemplo, asombro e indecisión y decimos ahora, ése es precisamente el propósito de la contradicción en este juego del lenguaje.

58. Alguien viene a la gente y dice: "siempre miento". La gente responde. "¡Bien, en ese caso podemos confiar en usted!". -pero ¿podía *él* realmente querer decir lo que dijo? ¿No hay un sentimiento de incapacidad de decir algo realmente verdadero, sea lo que sea?

"Siempre miento" - Bien, y *qué* ? " ¡También fue una mentira!" ¡Pero en ese caso usted no siempre miente! - "¡No, todo son mentiras!"

Quizá deberíamos decir de este hombre que no quiere decir lo mismo que nosotros con "verdad" y "mentira". Quizá quiere decir algo como: lo que dice fluctúa; o realmente lo dice de dientes para fuera.

Podría también decirse: su 'yo miento siempre' no fue realmente una *aseveración*. Fue, más bien una exclamación.

Y así podría decirse: "si dijo esa oración, no impensadamente - entonces tiene que haber querido decir las palabras en tal y tal forma, ¿*no puede* haberlas querido decir en la forma usual"?

59. ¿Por qué la contradicción en Russell no debería concebirse como algo supraproposicional, algo que sobresale por encima de la proposición y mira en ambas direcciones como una cabeza de Jano? N.B. La proposición F (F) -en la que F (ξ) ="ξ(ξ)- no contiene variables y así podría tenerse como algo supralógico, algo inatacable y cuya negación a su vez sólo la *asevera*. ¿No podría incluso uno comenzar la lógica con esta contradicción? Y por así decir, descender desde ella a las proposiciones.

La proposición que se autocontradice se levantaría como un monumento (con cabeza de Jano) sobre las proposiciones de la lógica.

60. La cosa dañina no es: producir una contradicción en la región en la que ni las proposiciones consistentes ni las contradictorias tienen alguna clase de trabajo que cumplir; no, lo que *es* dañino es: no saber cómo llegó uno al lugar donde la contradicción ya no hará ningún daño.

TRABAJOS DE GRADO

Carlos Alberto Carvajal Correa. El Tiempo en Aristóteles: mismidad y otredad del Ahora. Medellín : Universidad de Antioquia, Departamento de Filosofía, 1988. Tesis (Diplomado en Filosofía).

En este trabajo se lleva a cabo un análisis del tratado Aristotélico sobre el tiempo, contenido en los capítulos X al XIV del libro IV de la Física. Se trata de establecer la relación entre la exposición fenomenológica que parte de la percepción tiempo-movimiento caracterizada por la anterioridad y posterioridad de los ahoras, y la original consideración del fenómeno fundamental del "ahora" en términos de mismidad y otredad.

Siguiendo el orden expositivo del texto se detallan, en primer lugar, las dificultades o aporías que según Aristóteles genera la argumentación exotérica, como también las concepciones precedentes frente a las cuales fija su posición. Del mismo modo es seguida la trayectoria que conduce a la definición del tiempo como número del movimiento, la cual comienza con la exposición de las relaciones entre ambos fenómenos, comprendidas bajo la estructura general denominada seguimiento. Se destaca en dicha definición la insuficiencia del empleo corriente del número como el instrumento con el cual se numera, y que hace necesarias las acepciones de numerado y numerable que incluyen la actualidad y la posibilidad. Estas nuevas acepciones expresan la situación del ente, en virtud del cual se establece la correspondencia entre los lugares ocupados, las fases del movimiento y los ahoras. Allí se encuentran tanto el ente como el ahora en su pura otredad, que impone reconocer la permanencia del primero en su ser y la mismidad del segundo abarcando la totalidad del tiempo. En esta dirección se muestra cómo se hacen compatibles lo anterior-posterior dado por la sensación, con la construcción teórica de Aristóteles que encierra la mismidad y la otredad del ahora.