USO DEL DOBLADO DE PAPEL EN LA CONSTRUCCIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS E IDENTIFICACIÓN DE SUS CARACTERÍSTICAS

ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ
FERNÁN DIEGO BEDOYA GRAJALES
ÓSCAR IVÁN JIMÉNEZ TORRES

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MEDELLÍN
2007

USO DEL DOBLADO DE PAPEL EN LA CONSTRUCCIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS E IDENTIFICACIÓN DE SUS CARACTERÍSTICAS

ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ
FERNÁN DIEGO BEDOYA GRAJALES
ÓSCAR IVÁN JIMÉNEZ TORRES

Trabajo de grado para optar al título: "Licenciado en Educación Matemáticas y Física"

ASESOR
DIEGO LEÓN CORREA ARANGO
Licenciado en Matemáticas y Física

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MEDELLÍN
2007

"Lo que se oye, se olvida…

Lo que se ve, se recuerda…

Lo que se hace se aprende…"

Proverbio chino.

AGRADECIMIENTOS

Al Licenciado Diego León Correa Arango por sus valiosos aportes, a lo largo de un año y medio, que enriquecieron fuertemente nuestro trabajo de grado.

Al Doctor Carlos Mario Jaramillo López y al Magíster Orlando Monsalve Posada por todos los consejos que no sólo contribuyeron al trabajo presentado, sino a nuestra formación íntegra como docentes y como personas.

Al Semillero de investigación "Geometría y Doblado de papel" por abrirnos sus puertas para el mejoramiento continuo de la profesión y por el apoyo brindado durante la elaboración del proyecto.

Al Magíster Álvaro Zapata por las asesorías y las excelentes recomendaciones dadas en el transcurso de este último semestre 2007/1.

Al Licenciado Fabián Brand por todas las sugerencias brindadas en el periodo en el cual se hizo el trabajo de grado y por su excelente colaboración durante y aún después de la intervención pedagógica.

A los estudiantes del grado 10C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado por su apreciable colaboración en la solución de las actividades.

Finalmente, a nuestras familias que siempre estuvieron presentes apoyándonos en los momentos de éxito y consolándonos en los momentos de flaqueza.

CONTENIDO

RESUMEN

El siguiente trabajo de grado da solución al problema: "La enseñanza tradicional del tema secciones cónicas no permite una verdadera apropiación y aplicación del conocimiento en los estudiantes", a través de la implementación del doblado de papel como estrategia para enriquecer el proceso de enseñanza – aprendizaje del tema en cuestión. El marco referencial que valida las actividades diseñadas se basa en algunos aspectos pedagógicos como el uso de guías y módulos instruccionales; aspectos psicológicos como la concepción constructivista del aprendizaje escolar y el saber específico como uso del doblado de papel. Por su parte, el marco legal se fundamenta en los procesos de visualización y en los procesos de justificación. Para extraer las conclusiones, se hizo una intervención pedagógica en el grupo 10C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado en el segundo semestre del año 2006.

USO DEL DOBLADO DE PAPEL EN LA CONSTRUCCIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS E IDENTIFICACIÓN DE SUS CARACTERÍSTICAS

INTRODUCCIÓN

La gran utopía que tienen la mayoría de los maestros del país comprometidos verdaderamente con la educación, es generar auténticos procesos de aprendizaje a través de la apropiación y aplicación de los conocimientos. Para contribuir con un granito de arena en la realización de este gran sueño, se necesita investigar nuevos métodos de enseñanza convencionales o poco convencionales, cuyas herramientas sirvan de mediadoras en el proceso y faciliten no sólo que el estudiante se apropie de los conceptos sino que sea capaz de aplicarlos en un contexto real.

De acuerdo con lo anterior, el trabajo de grado "Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características" es un proyecto que da solución a un problema de aprendizaje que tiene que ver con la enseñanza tradicional del tema secciones cónicas, puesto que no permite una verdadera apropiación y aplicación de los conocimientos por parte de los estudiantes. Dicho problema fue hallado gracias a la información cruzada que brindaron las diferentes encuestas y entrevistas realizadas. Para responder a esa gran dificultad, se propusieron algunas actividades enmarcadas en el uso del doblado de papel como herramienta innovadora, poco convencional y económica, que posibilita los procesos de visualización y justificación.

Para lograr la creación de las actividades fue necesario consultar algunas fuentes que dieran validez al trabajo presentado. Por lo tanto, el marco referencial se basa en algunos aspectos pedagógicos como el uso de guías y módulos instruccionales; aspectos psicológicos como la concepción constructivista del aprendizaje escolar y el saber específico como uso del doblado de papel para la construcción de las secciones cónicas y las bondades pedagógicas de esta herramienta. También se consultó un marco legal, donde se enfatizó en los procesos de visualización, los procesos de justificación y los estándares curriculares.

Una vez hechas las guías, se hizo una intervención pedagógica con un propósito inicial: certificar la propuesta y un propósito último: corregir posibles errores y mejorar las actividades diseñadas. Para ello, se contó con el grupo 10C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado, que colaboró de una manera muy valiosa en la solución de algunas de las guías. Es importante tener presente que no todas las actividades se pusieron en marcha, debido a que el factor tiempo fue determinante y estuvo en contra del proyecto. Aún así, se pudo llegar a la conclusión de que el doblado de papel sí favorece la apropiación y aplicación de los conocimientos concernientes a las secciones cónicas, porque da la oportunidad de generar procesos de visualización y de justificación en la construcción y definición de los lugares geométricos respectivos.

1. DISEÑO TEÓRICO

1.1. ANTECEDENTES

En general, la enseñanza de la matemática ha sido muy tradicional; en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se lee que: “Tradicionalmente los alumnos aprenden matemáticas formales y abstractas, descontextualizadas, y luego aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en un contexto.”[1] También podemos decir algo similar en el caso particular de la enseñanza de la geometría, que “se ha utilizado en el campo educativo sólo como terreno natural para la introducción de la deducción” [16]. Al respecto, podemos señalar que la geometría se ha enseñado de una manera bastante lineal, a través del lápiz, el papel y un libro de texto. Sin embargo, investigaciones recientes, han contribuido a la enseñanza de la geometría con la utilización de herramientas informáticas como el *Cabri Géomètre*[2]. Teniendo en cuenta que las nuevas tecnologías podrían facilitar el aprendizaje gracias a su grado de interactividad y simulación, es necesario mencionar que algunos programas requieren licencias, que suelen ser costosas para las instituciones educativas. También, hemos encontrado que “el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel” [23]. Luego, el doblado de papel se convierte también en una herramienta funcional con la que se podría garantizar tanto interactividad como visualización, de una manera

[1] Lineamientos curriculares en Matemáticas. Pág.: 24.
[2] Nos remitimos al documento presentado por el Ministerio de Educación Nacional en el año 2004: “Pensamiento geométrico y Tecnologías computacionales”.

más sencilla y económica, con el fin de facilitar el aprendizaje de la geometría.

La enseñanza de la geometría debe contribuir a una buena formación para la vida en cuanto a exploración, visualización, justificación y experimentación. Esto es, "la enseñanza de la geometría debe reflejar una preocupación por desarrollar actividades en las distintas dimensiones buscando lograr en los alumnos una amplia experiencia y una perspectiva multifacética de lo que significa, elementos claves para ganar en conocimiento geométrico útil. Probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos."[3] Teniendo en cuenta la idea anterior, los maestros deben diseñar estrategias que posibiliten que la enseñanza de la geometría realmente permita que el estudiante extraiga conclusiones, experimente, explore y finalmente pruebe. Es decir, que desarrolle un pensamiento espacial. Pero, "para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas en las distintas dimensiones, los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico. Entre más dimensiones y conexiones de la geometría conozcamos, podremos guiar con mayor éxito a nuestros alumnos en la experiencia de aprender a aprender geometría y les ayudaremos a sentar bases sólidas para ampliar el panorama en los siguientes años escolares y en la vida."[4]

Por eso, nuestra idea es desarrollar una estrategia metodológica utilizando el doblado de papel como herramienta para la enseñanza de la geometría enfocada hacia la manipulación, experimentación y la comprobación en las

---

[3] MEN, Serie Documentos: "Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales". Bogotá: Enlace Editores Ltda., 2004, p. 2.
[4] Ibíd., p. 3

propias figuras realizadas. De hecho, se busca que el estudiante explore, visualice y finalmente logre generalizar y abstraer algunos conceptos geométricos, en especial de la geometría analítica, utilizando el doblado de papel.

Profundizando un poco en la geometría como tal, hemos encontrado gracias a las entrevistas y encuestas realizadas, que la enseñanza de las secciones cónicas en las aulas de clase de algunas instituciones de nuestro país, se ha desarrollado de una forma tradicional, es decir, haciendo uso de textos guías, o habitualmente se hacen las construcciones de dichas secciones en el tablero y su análisis se hace también a partir de allí, o se le pide a los estudiantes que las dibujen en papel milimetrado o que las construyan con algún tipo de material concreto tradicional, para posteriormente, hacerle algunas preguntas. Al respecto, dicen los autores Cruz y Mariño que "dentro del estudio de la geometría analítica, se han presentado dificultades en la comprensión de los contenidos relativos a las secciones cónicas."[4] Y argumentan que "en los trabajos sobre educación matemática para los alumnos que ingresan a la educación superior, se ha constatado que los conocimientos de los estudiantes se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones que caracterizan a cada una de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica ni el por qué de su definición como lugar geométrico, lo cual limita la comprensión del alcance de las posibilidades de que disponen" [4]

¿Será posible encontrar vías para mejorar el aprendizaje de la geometría analítica?, ¿seguirá siendo el libro de matemáticas el método más utilizado para la enseñanza y el aprendizaje de esta materia? Si en nuestras manos está la renovación de la enseñanza de las ciencias en especial de las matemáticas ¿qué hacer para alcanzar este propósito? El doblado de papel, por ejemplo podría ser una buena herramienta para mejorar los procesos de enseñanza de las secciones cónicas.

Otros puntos a favor para la elección del tema: "Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características" fueron las múltiples entrevistas que hemos tenido con los profesores Orlando Monsalve Posada y Carlos Mario Jaramillo López, ambos profesores de la Universidad de Antioquia, para quienes "el arte del origami es una disciplina que permite desarrollar aspectos como: memoria visual geométrica, memoria a corto y mediano plazo, coordinación visomotora, destreza manual, discriminaciones multisensoriales de tipo grueso, fino y refinado (psicomotricidad)".

También, ellos nos argumentaban textualmente que "el Origami nos enseña a hacer cosas con las manos desarrollando la capacidad de operar, resolver, crear, sintetizar, resumir, realzar, expresar y decir símbolos con menos palabras. Enseña así mismo el arte de construir para ser capaz luego de razonar y de deducir, relacionando, en suma, la teoría con la práctica. Y lo más importante, nos desarrolla la creatividad, entrenando la mente y el espíritu para, a partir de cero, saber ver de una manera nueva". Finalmente, dicen que "DOBLAR es tener la oportunidad de modificar y adaptar la forma, promoviendo la capacidad de crear."

El origami, como técnica artística que permite doblar una hoja de papel para la elaboración de figuras, ha virado en los últimos años hacia una nueva utilización para abonar el terreno de la didáctica de las matemáticas, permitiendo de esta manera, lograr métodos diferentes a los tradicionales para la enseñanza y aprendizaje de esta rama del conocimiento. Son por ejemplo enriquecedoras las aplicaciones del origami para hacer visualizaciones geométricas, es posible encontrar una gama de elementos como: segmentos, ángulos, triángulos, cuadriláteros, entre otros elementos geométricos plasmados como huellas en una hoja de papel, avanzando así en una nueva posibilidad a la hora de estudiar la geometría en el aula de clase.

¿Cómo lograr una visualización utilizando el doblado de papel? En la serie Documentos del MEN, *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*, encontramos que "La visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones (Clements y Battista, 1992[5])" [17]; podemos afirmar que el doblado de papel es un método que permite la visualización geométrica. De ahí, la importancia de utilizarlo como una herramienta para el aprendizaje, "dado que los procesos de visualización están en la base de la actividad cognitiva en geometría el estudiante debe ir evolucionando en la "forma de mirar" los objetos, desde percepciones visuales simples, hasta aquellas que le permiten explotar el potencial heurístico de la visualización."[6] Consideramos entonces que en una hoja de papel se podrían visualizar las diferentes secciones cónicas y además, se podría hacer un análisis de sus elementos, logrando un aprendizaje mediante la utilización de métodos no convencionales, para la enseñanza de las ciencias.

Ahora, como estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de La Universidad de Antioquia, es nuestro cometido, contribuir al mejoramiento de la didáctica de estas dos temáticas, fortaleciendo las habilidades y competencias de nuestros estudiantes.

[5] CLEMENS, D. y BATTISTA, M. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning.* En: GROUWS, DOUGLAS (ed.). Handbook of Research on Mathematics teaching and learning: a Project of the Nacional Council of Teachers of Mathematics. NCTM, New York.
[6] MEN. Serie Documentos: "Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales". Bogotá: Enlace Editores, 2004, p. 10.

Incluso, dos de las visiones del programa son la creación de “nuevos modelos de enseñanza de las matemáticas, de la física y de formación de maestros para los grados 10 y 11 de Educación Media” y “nuevos materiales didácticos, que permitan darle mejores significados al contenido matemático y físico”[7] [26]. De ahí la gran tarea que nos corresponde como maestros en formación de la Facultad de educación: “la investigación, producción y aplicación de conocimiento pedagógico para el desarrollo de la educación, la enseñanza, el aprendizaje y la formación en la sociedad contemporánea”[8] [26]

Para concluir, hemos considerado que el origami, o simplemente el hecho de doblar una hoja de papel, podría ayudar a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y consideramos en consecuencia, que el doblado de papel puede extenderse a la construcción de las diferentes secciones cónicas mediante la cual se puede indagar sobre algunas de sus características más relevantes.

1.2. PROBLEMA

La enseñanza tradicional del tema secciones cónicas no permite una verdadera apropiación y aplicación del conocimiento en los estudiantes del grado décimo C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado.

[7] Tomado de la página de Internet: http://ayura.udea.edu.co/autoevaluacion/matemafisica/proyecto_educativo.doc, consultada el día 4 de junio de 2006.
[8] Ibíd.

1.3. OBJETO DE INVESTIGACIÓN

El doblado de papel aplicado en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la construcción de las secciones cónicas e identificación de algunas de sus características.

1.4. CAMPO DE ACCIÓN

Geometría Analítica: Secciones Cónicas.

1.5. OBJETIVO GENERAL

Diseñar estrategias que una vez aplicadas, permitan una apropiación y aplicación del conocimiento del tema Secciones Cónicas en los estudiantes del grado 10C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado.

1.6. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1. ¿Qué actividades se pueden diseñar para que el estudiante se apropie y aplique los conceptos básicos de las secciones cónicas?
2. ¿Bajo qué teorías se pueden respaldar las actividades diseñadas para la apropiación y aplicación de los conceptos básicos de las secciones cónicas?
3. ¿Cómo verificar una apropiación y aplicación en el conocimiento una vez se hayan aplicado las guías con la técnica del doblado de papel?

1.7. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Diseñar actividades utilizando la técnica del doblado de papel para que el estudiante se apropie y aplique los conceptos básicos de las secciones cónicas.
2. Investigar las teorías que respaldan el uso de las guías utilizando el doblado de papel como medio de apropiación y aplicación de los conceptos básicos de las secciones cónicas.
3. Realizar una intervención pedagógica en el grado 10C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado aplicando los instrumentos diseñados.
4. Analizar la información recolectada en los instrumentos.
5. Evaluar la pertinencia de las guías utilizando el doblado de papel, en la apropiación y aplicación de los conceptos de las secciones cónicas.

1.8. JUSTIFICACIÓN

Bajo la siguiente premisa escrita en los Lineamientos curriculares de Matemáticas, propuestos por el MEN, queremos una vez más argumentar la importancia de la enseñanza de la geometría y su énfasis en el pensamiento espacial: “El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la “matemática moderna”. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría” [16]. Sin embargo, no nos proponemos defender la enseñanza de la geometría como tal, sino la utilización del doblado de papel como una herramienta nueva que permita el desarrollo del pensamiento espacial.

Con el uso del doblado de papel para la construcción e identificación de algunas de las características más relevantes de las secciones cónicas, se pretende formular una propuesta para la enseñaza y aprendizaje de esta temática aplicada a los estudiantes del grado décimo C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado. Esta propuesta permitirá que los estudiantes se conviertan en protagonistas en la construcción de un nuevo conocimiento afianzado mediante técnicas no convencionales como las que normalmente encontramos en el aula. La actividad lúdica con una intención formativa para el aprendizaje de las matemáticas hace que el doblado de papel sea clave para mejorar el campo de la didáctica de esta rama del conocimiento tal y como lo expresan los profesores Orlando Monsalve Posada y Carlos Mario Jaramillo López al opinar acerca de la actividad de doblar papel y su importancia en el aula de clase: "Como actividad lúdica, proporciona un potencial cognoscitivo que no se puede desperdiciar cuando se le considera un simple juego agradable para pasar el tiempo. Su utilidad didáctica radica en que permite a los estudiantes, desde los primeros años escolares, acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos matemáticos implícitos en dicha actividad lúdica"[9] Luego, los beneficios que se pueden obtener brindan una motivación para hacer de esta propuesta una realidad palpable y con el anhelo de que sea significativa para los estudiantes.

De esta manera, se pretende llegar al aula de clase con métodos diferentes de enseñanza, propiciando así una interacción completa del estudiante con el conocimiento, donde el profesor es un guía para solidificar las ideas obtenidas o para aclarar dudas que se puedan presentar. Se trata de cambiar entonces los métodos tradicionales sin desprestigiarlos ni restarles importancia. Es sólo que las sociedades van cambiando y la educación no

[9] MONSALVE, Orlando y JARAMILLO, Carlos. *El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas.* En: Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, Nº 35, (enero - abril), 2003. pp. 11 - 25

puede quedarse atrás. La educación debe ir a la vanguardia de la civilización y eso nos obliga a crear nuevas estrategias de enseñanza, a formar nuevas estructuras mentales acordes con las exigencias de la sociedad, a encaminar a los estudiantes para que tengan una cultura matemática y vean que esta ciencia no está solamente al alcance de ciertos intelectuales. El conocimiento bajo esta postura se construye y el aprendizaje es una consecuencia de la interacción con el conocimiento. El doblado de papel tendrá como propósito final una interacción amena, agradable y significativa para el aprendizaje de las secciones cónicas.

El trabajo que se presenta es útil en la medida en que se le permite al estudiante manipular una hoja de papel, rotarla, mirar el anverso y el reverso; se podrá identificar, mediante unos dobleces indicados, una parábola, una circunferencia, una elipse y una hipérbola (no con un carácter continuo como el que se muestra en los libros); se podrá además, estudiar algunos elementos que definen estas secciones cónicas.

Se convierte así la actividad de doblar papel en una herramienta significativa para el aprendizaje de las secciones cónicas, el uso del material concreto posibilita que el estudiante logre a su ritmo de aprendizaje una caracterización de cada cónica, arraigando esos conceptos matemáticos que le servirán más adelante en el estudio de otros temas, como las trayectorias elípticas del movimiento planetario según Kepler.

Si se utiliza el doblado de papel como una herramienta para la enseñanza de la geometría, y en particular, la geometría analítica, se podría ver la geometría como "un punto de encuentro entre la matemática vista como una teoría abstracta y la matemática vista como un recurso de modelación; un método para representar visualmente conceptos y procesos de otras áreas de las matemáticas o como una vía para desarrollar pensamiento y comprensión.”[10]

De hecho, desde los aspectos legales, “en los Lineamientos curriculares del área de Matemáticas elaborados por el Ministerio de Educación se enfatiza, por un lado, en la necesidad de encaminar la enseñanza de la geometría hacia el desarrollo de la percepción espacial, las representaciones bi y tri dimensionales de las figuras y el estudio de las invariantes de las figuras, sus relaciones y sus propiedades bajo el efecto que producen las diferentes transformaciones sobre ellas. Por otro lado, se propone un estudio sistemático de patrones de regularidad que conducen al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, a partir de las cuales surgen diversas formas argumentativas que poco a poco van alcanzando mejores niveles de sofisticación hasta llegar a la producción de teorías axiomáticas de carácter deductivo.”[11] El doblado de papel puede lograr ese desarrollo a través de las representaciones que se pueden establecer en las diferentes figuras que se armen y posteriormente, posibilitar la abstracción y generalización de algunos conceptos implícitos en la mera actividad del doblado.

Miguel de Guzmán menciona que lo más importante es que el estudiante manipule objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente, que haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, que adquiera confianza en sí mismo, que se divierta con su propia actividad mental y que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.[12] En el doblado de papel, el

---

[10] MEN, Serie Documentos: “Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales”. Bogotá: Enlace Editores, 2004, p. 1.
[11] Ibíd., p. 3.
[12] Miguel de Guzmán, Enseñanza de las ciencias y de las matemáticas, España: Editorial Popular, 1993, pág. 111.

estudiante tiene la posibilidad de manipular una hoja, de pensar en el proceso que realizó doblando y desdoblando una y otra vez, de analizar las relaciones encontradas, de incrementar su paciencia y su creatividad y de encontrar en el doblado una alternativa de entretenimiento y arte.

Podemos concluir entonces que el doblado de papel, como material didáctico para la enseñanza de las secciones cónicas, facilita no sólo la construcción de estas sino el análisis de sus características más representativas.

1.9. TAREAS DE INVESTIGACIÓN

1.9.1. Realización de los instrumentos:

1.9.1.1 Diseño de encuestas.

1.9.1.1.1 Encuesta socio-afectiva.

1.9.1.1.2 Encuesta sobre el proceso de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas.

1.9.1.2 Diseño entrevista al docente.

1.9.1.3 Diseño de actividades.

1.9.1.3.1 Actividad diagnóstica.

1.9.1.3.2 Generalidades de las secciones cónicas y del doblado de papel.

1.9.1.3.3 Guía 1: La Circunferencia.

1.9.1.3.4 Guía 2: La Elipse.

1.9.1.3.5 Guía 3: La parábola.

1.9.1.3.6 Guía 4: La hipérbola.

1.9.2. Investigación marco teórico.

1.9.2.1 Geometría Activa.

1.9.2.2. Procesos de visualización.

1.9.2.3. Procesos de justificación.
1.9.2.4. El uso del doblado de papel.
1.9.2.5. Aprendizaje significativo.
1.9.2.6. Cómo construir una guía.

1.9.3. Aplicación de los instrumentos.
1.9.3.1. Actividad diagnóstica
1.9.3.2. Generalidades de las secciones cónicas y del doblado de papel.
1.9.3.3. Guía 1: La Circunferencia.
1.9.3.4. Guía 2: La elipse.
1.9.3.5. Actividad Evaluativa: Portafolio.

1.9.4. Análisis de los resultados.
1.9.4.1. Análisis de las encuestas.
1.9.4.2. Análisis de las entrevistas a los docentes.
1.9.4.3. Análisis de la Actividad diagnóstica.
1.9.4.4. Análisis de la Actividad: Generalidades de las secciones cónicas y del doblado de papel.
1.9.4.5. Análisis de la Actividad evaluativa: Portafolio.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1. ASPECTOS PSICOLÓGICOS

2.1.1. Concepción Constructivista del Aprendizaje escolar [7].

La concepción constructivista del aprendizaje escolar y la intervención educativa, constituye la convergencia de diversas aproximaciones psicológicas a problemas como:

El desarrollo psicológico del individuo, particularmente en el plano intelectual y en su intersección con los aprendizajes escolares.

La identificación y atención a la diversidad de intereses, necesidades y motivaciones de los alumnos en relación con el proceso enseñanza – aprendizaje.

El reconocimiento de la existencia de diversos tipos y modalidades de aprendizaje escolar, dando una atención más integrada a los componentes intelectuales, afectivos y sociales.

La búsqueda de alternativas novedosas para la selección, organización y distribución del conocimiento escolar, asociadas al diseño y promoción de estrategias de aprendizaje e instrucción cognitivas.

La revalorización del papel del docente, no sólo en sus funciones de trasmisor del conocimiento, guía o facilitador del aprendizaje, sino como mediador del mismo, enfatizando el papel de la ayuda pedagógica que presta reguladamente al alumno.

2.1.2. Relación con la propuesta

Los aprendizajes en la escuela están supeditados a un componente psicológico que determina una postura de carácter motivacional que incentiva al estudiante a tener un desempeño adecuado en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En el presente trabajo, se ha dado un relevante lugar a los componentes afectivos y sociales que son pilares para el estudio de cualquier temática, en especial la que concierne al estudio de las secciones cónicas. No es posible concebir a un ser humano que carece de afectos porque este aspecto determina un papel clave para el aprendizaje de conceptos y procedimientos en las diversas áreas del conocimiento.

Las diferentes actividades elaboradas para la intervención pedagógica, están diseñadas para que el estudiante rescate los aspectos más relevantes con respecto al estudio de las secciones cónicas, esto fue pensado mediante la búsqueda de alternativas no convencionales (uso del doblado de papel) donde se estudian diferentes objetos geométricos y su consecuente relación con la geometría analítica.

El docente tendrá también la misión de acompañar el proceso de aprendizaje considerando las necesidades del estudiantado acorde a los resultados de la prueba socio – afectiva realizada al comienzo de la intervención.

2.2. ASPECTOS PEDAGÓGICOS

2.2.1. ¿Qué es una guía de estudio?

"Es un instrumento para obtener mejores resultados en el aprendizaje. Por lo común se estructuran a partir de un conjunto de preguntas acerca del contenido que se intenta aprender y permiten organizar el contenido y autoevaluar el grado de comprensión alcanzado al estudiar.

Al elaborarla:

Discriminar lo esencial del tema.
Comprender lo que se lee.
Reafirmar lo que se ha aprendido.
Comparar, confrontar y relacionar los puntos importantes, y generalizar el aprendizaje al aplicarlo en diferentes aspectos y/o situaciones.

Una vez hecha la guía:

Repasar en cualquier momento los temas que interesan y sólo en los aspectos más importantes.
Preparar mejor los exámenes.
Autoevaluarte"[13].

"Las guías de trabajo para los alumnos nos permiten poner en práctica la afirmación de Meirieu (1998, 77) [15]: Aunque a veces haya que renunciar a enseñar, no hay que renunciar nunca a 'hacer aprender'. Las guías didácticas de trabajo tienen las siguientes finalidades:

[13] Tomado de la página de Internet de la Universidad de Guadalajara: http://www.estudiantes.udg.mx/bienestar/tecnicas/guias_de_estudio.htm

Conectar la docencia con el estudio en la biblioteca y el autoaprendizaje. En este sentido, una buena guía ha de proponer no sólo contenidos sino facilitar los procesos de búsqueda, de crítica y de investigación que ayuden al estudiante a llegar al conocimiento.

Orientar a los estudiantes en la comprensión de que los tiempos de aprendizaje son diversos y deben desarrollar su autonomía y responsabilidad en saber utilizar su tiempo. Se trata, por tanto, de crear nuevos ambientes de aprendizaje que den protagonismo a los estudiantes.

Mantener una actitud de búsqueda ante el saber y el dominio de las estrategias rigurosas de comprensión, análisis e indagación.

Las guías nos permiten ser más creativos e innovadores y adaptarnos mejor a los distintos escenarios de aprendizaje y estilos cognitivos de nuestros estudiantes”[14].

2.2.2. La elaboración de un módulo instruccional[15].

Para la intervención pedagógica a desarrollarse en la Institución Educativa Normal Superior de Envigado se han elaborado unas guías que permiten, mediante un instructivo, construir las diferentes secciones cónicas y estudiar las características más relevantes de las mismas.

---

[14] Tomado de: Rodríguez, Rosa María. “Reaprender a enseñar: una experiencia de formación para la mejora continua de la docencia universitaria”. En: Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 17 (2), 2003, p. 79 – 94.

[15] YUKAVETSKY, Gloria J. La Elaboración de un Módulo Instruccional. Preparado para el Centro de Competencias de la Comunicación. Universidad de Puerto Rico en Humacao. Proyecto de Título V. Fecha de búsqueda: 4 de noviembre de 2006. En: http://www.ccc.uprh.edu/download/modulos/CCC_LEDUMI.pdf. 30p.

Dichas guías permitirán que el alumno estudie de una forma individualizada los diferentes conceptos y procedimientos, y en donde el maestro será un orientador en la sesión de clase por si surgen dudas o si se debe hacer alguna aclaración de tipo conceptual o procedimental.

"El Diseño Instruccional es un proceso fundamentado en teorías de disciplinas académicas, especialmente en las disciplinas relativas al aprendizaje humano, que tiene el efecto de maximizar la comprensión, uso y aplicación de la información, a través de estructuras sistemáticas, metodológicas y pedagógicas. Una vez diseñada la instrucción, deberá probarse, evaluarse y revisarse, atendiéndose de forma efectiva las necesidades particulares del individuo." [16]

De esta manera, el diseño instruccional será una metodología para el aprendizaje de las secciones cónicas partiendo desde una construcción mediante el uso del doblado de papel hasta llegar a una conceptualización y una evaluación de los saberes adquiridos.

2.2.3. Fases del diseño instruccional.

A continuación se establecerán los criterios para la elaboración de las guías.

Análisis de la audiencia: Para esta primera fase, se debe pensar en las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, necesidades que se deben suplir al finalizar el estudio de las guías.
Para el presente trabajo, la necesidad radica en construir las diferentes secciones cónicas mediante un método no convencional (doblado de papel)

[16] Ibid. p. 6

e identificar sus características más importantes mediante los procesos de visualización y justificación.

Diseño: En esta fase se debe señalar la finalidad de las guías.

Esto lleva a que se recolecte la información sobre el concepto o destreza que se va a enseñar.

En este caso, se han consultado los instructivos para la construcción de las secciones cónicas doblando papel, además, se ha consultado en diferentes libros de geometría analítica los conceptos y procedimientos matemáticos que caracterizan a las diferentes secciones. Luego, se han relacionado las diferentes construcciones en la hoja de papel con los objetos geométricos presentes allí.

Los objetivos de cada actividad, se expresan indirectamente en la parte inicial mediante la descripción de una gráfica que contiene la forma de la sección cónica a estudiar, para luego invitar al análisis detallado de las características de la misma. Por último se citan los materiales a utilizar (que en todos los casos es un lápiz y una hoja de papel que puede variar de tamaño y forma)

Desarrollo: En esta fase se expone el cómo se brindará la información.

Las guías se desarrollarán de la siguiente manera:

Se comienza con una introducción a la sección cónica en cuestión.

Se procede a explicar la construcción de la sección cónica doblando papel.

Se define el lugar geométrico estudiado desde la construcción hecha en la hoja de papel.

Se conceptualizan[17] los elementos estudiados en la hoja de papel.

[17] En este trabajo, conceptualizar tiene relación con el estudio numérico y algebraico de los elementos geométricos construidos en la hoja de papel, llegando a las ecuaciones que representa cada sección cónica y a la identificación de sus elementos.

Se plantean ejercicios de la teoría estudiada. Estos ejercicios se han propuesto desde el principio hasta el final de cada actividad.
Se diseña una evaluación de los conceptos y procedimientos estudiados. Esta evaluación se entrega al finalizar el estudio correspondiente a cada sección cónica.

Implantación: En esta fase se consigna el cómo se administrará la actividad.
Las guías diseñadas están divididas en dos partes: una de construcción doblando papel y otra donde se conceptualizan los elementos estudiados en dicha hoja haciendo énfasis en la definición del lugar geométrico estudiado.

Evaluación: En esta fase se crean los instrumentos de medición para determinar si los objetivos se han o no alcanzado.

En las guías propuestas, la evaluación se ha implementado de forma concurrente con diferentes preguntas acerca de procedimientos por desarrollar o afirmaciones donde el estudiante debe justificar. Al finalizar cada actividad, se programará también una evaluación de los contenidos estudiados en las diferentes guías.

2.2.4. Evaluación.

El proceso de evaluación que proponemos en el trabajo de grado es continuo y tiende a ser cualitativo. Puesto que la base de las actividades propuestas es el constructivismo, entonces se retomará parte de las investigaciones de Cecilia Quaas de la Universidad de Chile, quien dice que "La evaluación desde la perspectiva constructivista, tiende a centrarse en las implicancias que una construcción particular del conocimiento tiene con otros aspectos del proceso de construcción, es decir, se trata de evaluar una rejilla de implicancias donde el sujeto – alumno considere las ramificaciones de los conceptos fundamentales y sea capaz de determinar la centralidad en la amplia cadena de construcciones que le dan sentido al conocimiento" [33].

La evaluación por medio de un portafolio podría garantizar la continuidad de los procesos. De hecho, se dice que: "los métodos constructivistas enfatizan abiertamente la evaluación del desarrollo, como proyecto de continuidad y cambio en la aproximación al conocimiento." [33].

Las actividades diseñadas en este trabajo de investigación tienen varias características particulares:

- Partir de las construcciones de las secciones cónicas utilizando el doblado de papel.
- Preguntar acerca del sentido de la construcción y potencializar la búsqueda de los conceptos de los lugares geométricos respectivos.
- Tener presente el paso de lo discreto a lo continuo y de los concreto a lo abstracto. Además, en el trabajo con las actividades siempre debe permanecer el asesor orientando, despejando dudas y corrigiendo posibles errores.
- El elemento innovador que facilita los procesos de visualización y contribuye al incremento de la motivación y del trabajo manual es el doblado del papel.
- Tener presente el significado que le dan los estudiantes a las construcciones y el posible cambio que se genere en sus estructuras.

Las anteriores características las menciona LaCueva [14] (1955) en su trabajo donde plantea los siguientes principios de la enseñanza[18], muy similares a los nuestros:

La enseñanza debe partir siempre de actividades reales que logren integrar los procesos y contenidos subyacentes involucrados

Toda enseñanza debe procurar de parte de los alumnos una búsqueda activa y continua de los significados o sentidos de los aprendizajes involucrados

Debe considerarse el error como una posibilidad de autoevaluación o autovaloración de los progresos en el aprendizaje y de necesaria reflexión para continuar avanzando en su obtención

La importancia de los elementos motivacionales y el compromiso afectivo y personal del alumno y del docente en el aprendizaje de los primeros.

Necesidad de significatividad y durabilidad del cambio cognitivo que se produce en los estudiantes.

Para lograr esos principios de la enseñanza, "es necesario estructurar el trabajo en el aula de tal forma de promover el aprendizaje involucrando a los alumnos en actividades novedosas y estimulantes que les permitan reflexionar y construir sus conocimientos. Al respecto, LaCueva [14] (1995) propone:

Experiencias desencadenantes.

Proyectos de investigación.

Actividades cortas y fértiles o significativas.

Fichas autocorrectivas.

[18] Tomado de: QUAAS FERMANDOIS, Cecilia. *Nuevos Enfoques en la Evaluación de los Aprendizajes.* Artículo de Internet: http://csociales.uchile.cl/publicaciones/enfoques/04/edu03.htm

Las experiencias desencadenantes son aquellas experiencias que propicia el docente y que tienen por propósito abrir ventanas al conocimiento; poner a los alumnos en contacto con fenómenos, ideas, prácticas poco conocidas o desconocidas para ellos. Estas experiencias no sólo permiten aprender sino también despiertan inquietudes en los alumnos que muchas veces serán el inicio de proyectos de investigación que nacen de la curiosidad ante un evento interesante y de potencialidad educativa (visitas; conversaciones con expertos y/ o profesionales; puesta en discusión y análisis de temas atingentes y contingentes relacionados con la temática abordada).

Los proyectos son actividades más extensas cuyo desarrollo puede incluir una parte importante del curso o incluso el período completo de la asignatura, donde el alumno debe planificar ya sea individual o grupalmente y dar respuesta a interrogantes sentidas por ellos de manera planificada y combinando la consulta documental con el trabajo de campo en mayor o menor intensidad. Existen a lo menos tres tipos de proyectos, que podríamos denominar *didácticos*, es decir, de aprendizaje:

Las actividades cortas, fértiles y significativas corresponden a trabajos guiados de corta duración, cuyo objetivo es la realización de experiencias, desarrollar ciertas observaciones, recoger datos concretos, todo como materia prima para una posterior reflexión. La importancia a este nivel radica en la selección de actividades, de manera que sean realmente fuente de interrogantes que exijan la toma de decisiones y la comunicación y no *calles ciegas* como muchas veces observamos en las guías de laboratorio o las actividades preparadas por los docentes para finalizar un capítulo o unidad.

Por su parte, los materiales autocorrectivos permiten reforzar ciertos conocimientos y destrezas en las cuales percibe deficiencias. En estos casos, el *material autocorrectivo* puede ser de gran utilidad, ya que permite avanzar en los aprendizajes de acuerdo al tiempo y al ritmo del alumno."[19]

A partir de lo que nos propone Aurora LaCueva, nuestro trabajo se vale de experiencias desencadenantes como las construcciones elaboradas en papel; de proyectos pequeños como la entrega del portafolio; de actividades cortas, fértiles y significativas que corresponden todas las actividades que se plantearon para la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características.

2.3. DOBLADO DE PAPEL

2.3.1. Antecedentes[20].

El origami es un antiquísimo arte japonés que tiene que ver con el doblado del papel. De hecho, su raíz *ori* significa doblez y gami o kami significa papel[21].
En su forma más pura, el origami puede ser definido como el arte de manipular una hoja de papel de forma cuadrada sin que sea cortado, añadido, pegado, decorado o mutilado de forma alguna; sólo puede ser doblado. Esta regla tan estricta, hace que el origami sea la más refinada de las artes que se refieren al doblado del papel. Este precisamente constituye el secreto de su belleza y atractivo.

Dice el profesor Orlando Monsalve Posada en su artículo "*Actividades sobre una hoja de papel*"[22] que una hoja puede considerarse como una

[19] QUAAS FERMANDOIS, Cecilia. *Nuevos Enfoques en la Evaluación de los Aprendizajes.* Artículo de Internet: http://csociales.uchile.cl/publicaciones/enfoques/04/edu03.htm
[20] Estos Antecedentes ya fueron publicados en la serie "Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos". Módulo 4. Gobernación de Antioquia, 2006. pp. 83 – 87.
[21] Tomado de: GALLO, Patricia. *Origami.* La Plata – Argentina. Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. http://www.netverk.com.ar/~halgall/origami1.htm

“herramienta para múltiples usos.” Incluso, puede utilizarse inicialmente como una forma de entretenimiento y diversión, si se considera el origami como un arte; o como una manera de descubrir aplicaciones tanto en química, biología como geometría.

En particular, el origami o más estrictamente doblado de papel, se puede utilizar en geometría para trisecar ángulos agudos y rectos, trabajar simetrías y áreas, visualizar los polígonos y algunas series infinitas, identificar algunas características de las secciones cónicas, entre otras.

“Actualmente se ha comenzado a estudiar más sistemáticamente al origami como medio de representación de objetos matemáticos, y geométricos en particular. Por ejemplo se ha estudiado la relación entre el origami y la topología; la relación entre los poliedros hechos con origami y las geodésicas (estructuras basadas en los diseños de Buckminster Fuller); se han formulado listas de axiomas para el origami; el físico Jun Maekawa ha descubierto teoremas relacionados con el origami, usándolos para diseñar modelos; el matemático Toshikazu Kawasaki ha estudiado teoremas del origami en cuatro dimensiones; Robert Lang de California ha desarrollado una manera de algoritmizar el proceso de diseño para usar una computadora en la invención de modelos complejos; el educador Shuzo Fujimoto y el artista Chris Palmer han descubierto paralelismo entre origami y los teselados; Peter Engel ha relacionado el origami, incluso el artístico, y la teoría del caos (en particular con los fractales); el matemático Roger Alperin ha establecido una relación entre las construcciones de origami y los números (llamados "números construibles")”[23].

---

[22] MONSALVE, Orlando. *Actividades sobre una hoja de papel.* En: Cuadernos Pedagógicos. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Número 16 (agosto), 2001. pp. 69 – 74.

[23] Tomado de: LARIOS OSORIO, Víctor. *Taller Polígonos con papel.* II Congreso Regional del Noroeste de la Enseñanza de las Matemáticas A.N.P.M., La Paz, B.C.S., 1º-3 de junio de 2001. Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. http://www.uaq.mx/matematicas/origami/taller1.html

El origami se puede clasificar de acuerdo con su finalidad en: Origami Artístico o construcción de figuras de carácter estético y Origami Educativo o la construcción de figuras para el análisis de sus propiedades geométricas[24]. En particular, el origami educativo o simplemente doblado de papel (sin pérdida de generalidad lo seguiremos llamando doblado de papel), se convierte en una herramienta didáctica económica al alcance de todos que permite un acercamiento intuitivo a la geometría de forma intuitiva y una manipulación e interacción con objetos geométricos. O sea que el origami es un medio, no un fin del proceso de enseñanza – aprendizaje.

En este sentido, se puede argumentar que el doblado de papel podría convertirse en una herramienta útil para el docente. Esto es, descubrir su utilidad didáctica. Al respecto se encuentra que: “la utilidad didáctica del doblado de papel radica en que permite a los estudiantes, desde los primeros años escolares, acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos matemáticos implícitos en dicha actividad lúdica”[25]. Lo que significa que el doblado de papel podría permitir que el estudiante comprenda con mayor facilidad algunos conceptos matemáticos y en particular, geométricos.

“Cuando aplicamos el doblado de papel como herramienta alterna para la solución de problemas, es sorprendente el interés y el entusiasmo con que los estudiantes enfrentan la solución de ciertos ejercicios propuestos en los libros clásicos de la enseñanza del cálculo.” [19]

Los profesores en general, deben buscar e idear estrategias metodológicas para que el estudiante logre un acercamiento y un mayor interés por temas matemáticos, teniendo siempre presente que la matemática no debe convertirse en un dolor de cabeza para el estudiantado. De esta manera, la

[24] Ibíd.

[25] MONSALVE, Orlando y JARAMILLO, Carlos. *El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas.* En: Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, Nº 35, (enero - abril), 2003. pp. 11 - 25

hoja de papel se convierte en una ayuda educativa “funcional y económica que un profesor puede incorporar al quehacer docente dentro de un aula de clase en cualesquiera de los niveles escolares. Como cualquier ayuda pedagógica, ella sólo tiene una limitación: la imaginación o la creatividad de quien la use” [19]. Aquí es importante mencionar que con el origami, el estudiante tiene la oportunidad de desarrollar algún tipo de proceso cognitivo. Esto es: “Relacionar el origami con la matemática es encontrar la oportunidad de estimular el desarrollo de los procesos cognitivos del estudiante para que pueda articular conceptos abstractos y operaciones concretas en el análisis, planteamiento y solución de problemas.” [19]

Al respecto, se encuentran en la red algunas utilidades del origami por ejemplo en medicina. Así: “En el caso de la medicina el origami podría ayudar en algunos, por ejemplo, en la rehabilitación, tanto de afecciones de traumatismo óseo, como de tipo nerviosas o musculares que afectan a la posterior movilidad de manos y dedos. La actividad origamística, como todo trabajo manual, colabora a la recuperación funcional, estimula los mecanismos de coordinación manual y los circuitos nerviosos y musculares correspondientes. Naturalmente hay otros medios, pero el origami ofrece la ventaja de ser asequible a todo el mundo, y se puede practicar en cualquier lugar y momento sin recurrir a costosos aparatos; esas mismas ventajas son evidentes en Psiquiatría como terapia ocupacional en procesos de recuperación que incluyan una actividad manual que estimule los procesos mentales”.[26]

[26] Tomado de: RUBIO, Luis Alexander. *Ciencia y Medicina. Origami Colombiano.* Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. http://www.fortunecity.com/westwood/fashoinave/291/page4.html

A nivel pedagógico, también se encuentran en páginas poco reconocidas, algunas utilidades del origami. Se dice: “Las cualidades pedagógicas del origami son múltiples, y podemos destacar entre ellas las siguientes”[27]:

Ofrece el placer personal que proporciona el plegado de un modelo.

Perfecciona los sentidos de la vista, del tacto y la representación mental en el espacio.

Desarrolla la coordinación psicomotriz.

Incita a la observación y la abstracción.

Apunta a las tres fases de producción: la imitación, la modificación y la invención.

Despierta las facultades artísticas del estudiante y fomenta la creatividad.

Favorece la enseñanza de la geometría.

Ofrece infinidad de posibilidades en pedagogía.

Es una actividad artística accesible tanto técnica como económicamente.

Al crear una figura o llegar a realizarla aumentará la autoestima y la confianza en sí mismo como crecimiento personal.

Dice Robert Geretschläger en su artículo “Euclidean Constructions and the Geometry of Origami” que la conexión entre geometría y origami se hace muy notoria y muy obvia. Para muchas personas, el origami termina convirtiéndose en un simple arte, mientras que para otras, podemos mencionar entre ellas a Friedrich Fröebel, el origami se puede utilizar para enseñar conceptos elementales de geometría. Como por ejemplo, el problema de la trisección de un ángulo es un problema soluble utilizando

[27] Tomado de: http://gabrielc.galeon.com/myfav3.htm#_ftnref1 Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006.

métodos como doblado de papel, pero insoluble para la geometría euclidiana (donde se usa una regla no graduada y un compás).[28]

Igualmente, José Ignacio Royo Prieto, en su artículo “Matemáticas y papiroflexia”[29] escribe que “la mejor manera de darse cuenta de la relación entre las matemáticas y la papiroflexia es desplegar un modelo y observar el cuadrado inicial: aparece ante nuestros ojos un complejo de cicatrices que no es sino un grafo que cumple ciertas características. Intuitivamente, hay unas “matemáticas del origami” funcionando cuando plegamos un modelo.” O sea que con la papiroflexia modular es posible representar poliedros y figuras geométricas; es posible relacionar la geometría euclidiana con la geometría propia del origami y es posible el diseño de figuras a nivel artístico ayudando a la creación papirofléctica. Él también sostiene que “la papiroflexia, o mejor dicho, el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana.” La clave radica en “interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel”. Por ejemplo, realizar una mediatriz o una bisectriz.

2.3.2. Algunas generalidades del doblado de papel[30].

“Todo buen profesor de matemáticas se esfuerza constantemente por mejorar la comprensión de sus alumnos y por suscitar en ellos intereses y actitudes. Un modo fascinante de añadir realismo e interés a esta tarea es el que ofrecen los sistemas de plegado de papel. La formación de líneas rectas plegando una hoja es una manera sencilla de aclarar y descubrir las

[28] La traducción es nuestra.
[29] Este artículo aparecerá en el nº 21 de la revista “*Sigma*”, editada por el Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco/Eusko Jaurlaritza.
[30] Estas generalidades ya fueron publicadas en la serie “Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos”. Módulo 4. Gobernación de Antioquia, 2006

relaciones existentes entre las líneas y los ángulos. Una vez halladas éstas, ya no parecen extraños y difíciles los postulados formales. Por consiguiente, el plegado de papel no sólo simplifica el aprendizaje de las matemáticas, sino que mejora también la comprensión y la apreciación." [7]

"En matemáticas partimos siempre de determinadas suposiciones fundamentales en las que nos basamos para construir una estructura matemática. En cuanto al doblado de papel, damos por sentados los siguientes postulados:

Puede plegarse el papel de modo que el pliegue formado sea una línea recta.

Puede plegarse el papel de modo que el pliegue pase por uno o dos puntos dados.

Puede plegarse el papel de modo que un punto pueda superponerse a otro punto de la misma hoja.

Puede plegarse el papel de forma que un punto del mismo pueda superponerse a una línea de la misma hoja y que el pliegue resultante pase a través de un segundo punto dado.

Puede plegarse el papel de modo que una línea recta pueda superponerse a otra línea recta de la misma hoja.

Se dice que las líneas y los ángulos son iguales si coinciden cuando pueden superponerse al plegar el papel.

Si se aceptan estas suposiciones, es posible realizar todas las construcciones de la geometría plana de Euclides mediante dobleces." [11]

2.3.3. Generación de una parábola utilizando del doblado de papel.

En una hoja de papel, se construirá una parábola siguiendo las indicaciones que se presentan a continuación.

Dado un doblez L_1 y un punto P_1 exterior a L_1, se señalará una secuencia de puntos de L_1 (mientras más puntos se marquen, mejor se podrá visualizar la parábola).

A continuación, se llevará el punto P_1 sobre un primer punto marcado sobre L1, llamaremos a este punto P_2. Luego, marcamos el doblez como se ilustra en la figura 1.

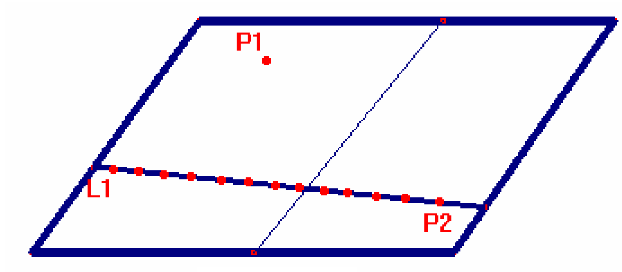


Figura 1

Ahora llamaremos P_2 al siguiente punto de los marcados en el doblez L_1 y traeremos sobre éste al punto P_1. Hemos marcado así un nuevo doblez como se ilustra en la figura 2.

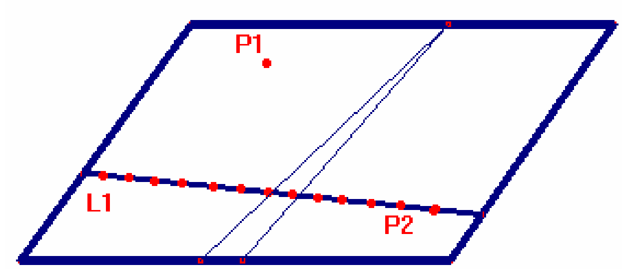


Figura 2

Se repite el proceso hasta haber trazado todos los dobleces.

Al finalizar, se podrá visualizar en la hoja de papel una parábola con foco P_1 y directriz L_1. (Figura 3)

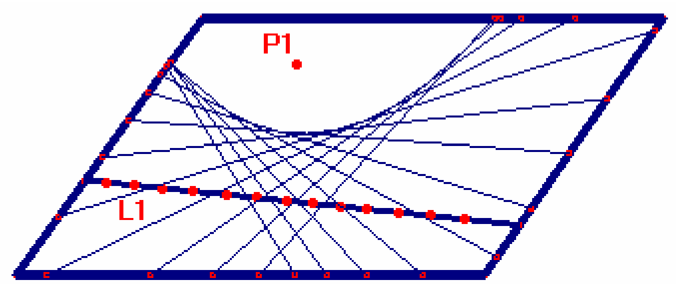


Figura 3

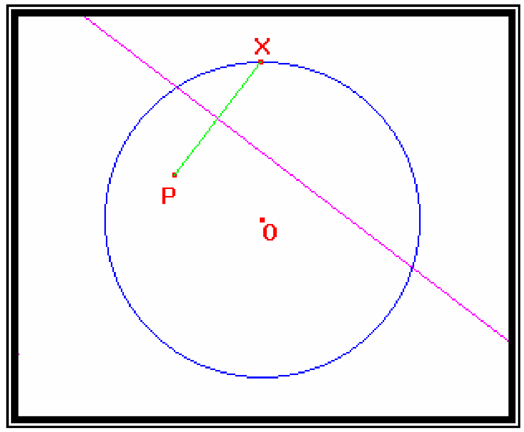
Los dobleces que generaron la parábola son tangentes a ésta.

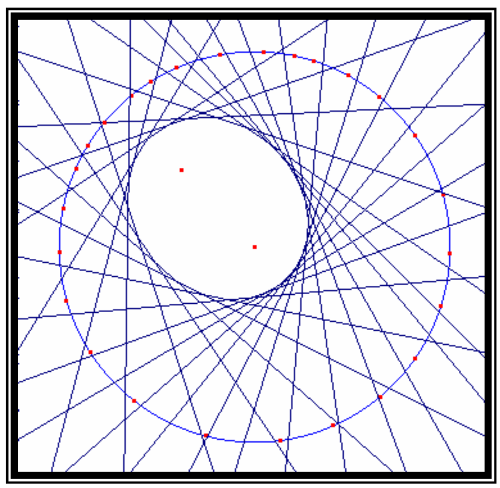
Por la construcción realizada, cada punto que genera la parábola equidista tanto del punto P_1 como del punto P_2. Luego cada doblez trazado es mediatriz del segmento P_1P_2 y como la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada directriz (L_1) y un punto llamado foco (P_1), entonces los puntos de la mediatriz siempre equidistarán del punto P_1 y la recta (doblez) L_1.

De esa manera garantizamos que la construcción realizada a partir de un doblez y un punto exterior, es una parábola.

2.3.4. Generación de una elipse utilizando el doblado de papel.

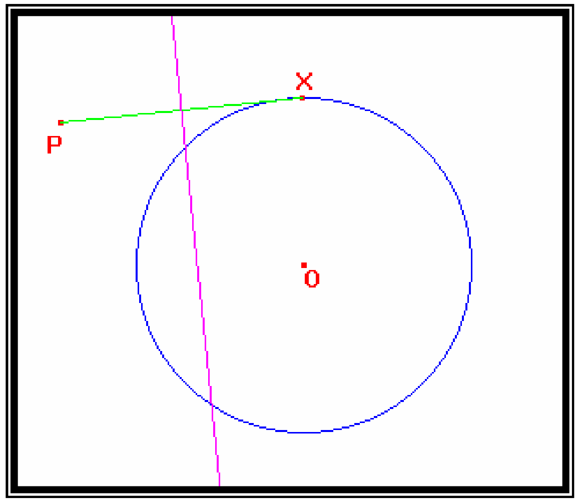
Para la construcción de la elipse, es necesario partir de una hoja de papel de forma circular. Se considera fundamental tener en cuenta el centro de la circunferencia inicial. Señale un punto P dentro de la circunferencia y doble de tal manera que ese punto se coloque sobre la circunferencia. Repita el procedimiento unas 30 veces variando la posición de P a lo largo de la circunferencia.

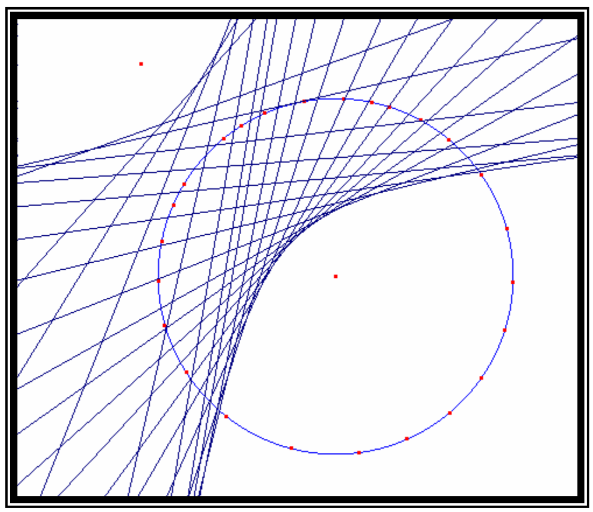




2.3.5. Generación de una hipérbola utilizando el doblado de papel.

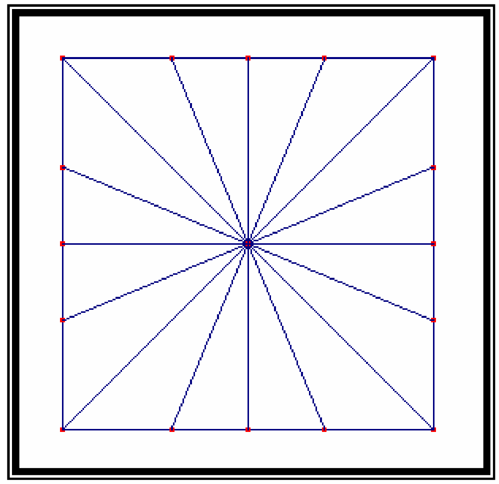
Para la construcción de la hipérbola, también es necesario partir de una hoja de papel de forma circular. Se considera fundamental tener en cuenta el centro de la circunferencia inicial. Señale un punto P por fuera de la circunferencia y doble de tal manera que ese punto se coloque sobre la circunferencia. Repita el procedimiento unas 30 veces variando la posición de P a lo largo de la circunferencia.



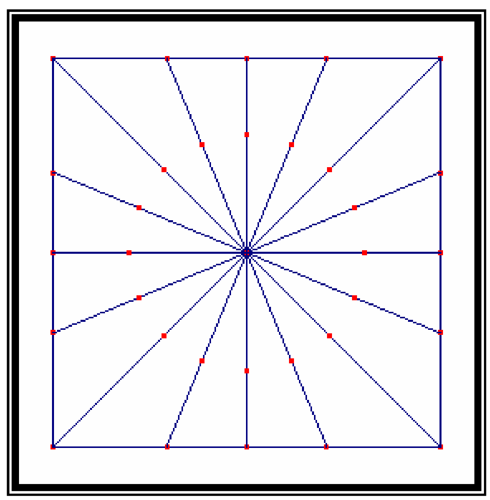


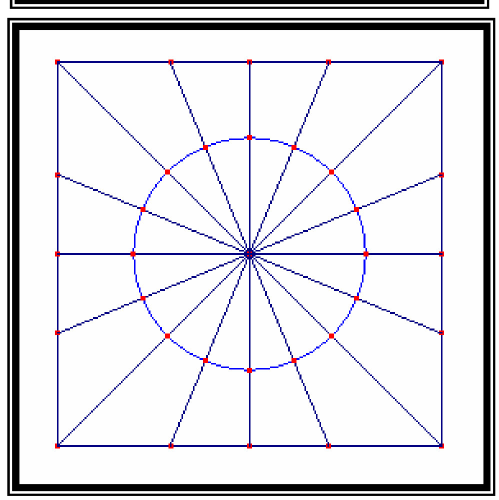
2.3.6. Generación de una circunferencia utilizando el doblado de papel.

Es posible encontrar puntos discretos de una circunferencia. Tome una hoja de papel de forma cuadrada y doble los ejes de simetría. Ahora, biseque los ángulos que forman las diagonales con las mediatrices de los lados del cuadrado. Obtendrá un mosaico de pliegues como el siguiente.



Ahora, tome un punto cualquiera sobre la diagonal y trasládelo a todos los dobleces. Podrá observar que todos esos puntos que acabó de dibujar, están a una misma distancia del centro del cuadrado.





3. ASPECTOS LEGALES

3.1. Geometría Activa

Si bien es cierto, los niveles de desarrollo formulados por los esposos van Hiele son una “aproximación aceptable a las posibles etapas en las que progresa el pensamiento geométrico” [16]. Sin embargo, los maestros deben estar atentos, pues estos niveles parecen no ir dirigidos a los logros fundamentales de la geometría: “la exploración del espacio, el desarrollo de la imaginación tridimensional, la formulación y discusión de conjeturas, jugar con los diseños y teselaciones del plano y sus grupos de transformaciones” [16]. Logros que se podrían obtener con un buen uso del doblado de papel como estrategia y a su vez, herramienta para la enseñanza de la geometría. En nuestro caso, hablamos de Geometría analítica. Ahora, podríamos plantearnos utilizar la propuesta de Geometría Activa, “que parte del juego con sistemas concretos, de la experiencia inmediata del espacio y el movimiento, que lleva a la construcción de sistemas conceptuales para la codificación y el dominio del espacio, y a la expresión externa de esos sistemas conceptuales a través de múltiples sistemas simbólicos” [16].

Geometría Activa

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se menciona que “en los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales” [16]. Lo cual nos lleva una vez más a suponer que el doblado de papel podría servir de puente en el desarrollo del pensamiento geométrico, pues se parte de una manipulación de un material tangible para llegar a una representación simbólica de sus características. Eso es precisamente lo que se va a hacer cuando se presentan las secciones cónicas con el doblado de papel: un reconocimiento inicial de la figura y después una caracterización más formal de la misma.

La Geometría Activa es "una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio" [16]

La Geometría activa "parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo" [16]. Al utilizar el doblado de papel como estrategia para la enseñanza, se intenta que el estudiante "haga cosas, construya, produzca y tome de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente construidos a un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales" [16].

3.2. Procesos de visualización

El doblado de papel es una estrategia innovadora que promueve procesos de visualización, los cuales permiten obtener conclusiones a partir de ciertas representaciones de los objetos y de las relaciones que se pueden obtener a través de la manipulación y de la construcción. De hecho, la visualización "está en estrecha relación con la representación del espacio, la exploración heurística o la visión sinóptica de una situación compleja"[31] Dado que el doblado de papel permite "desde los primeros años de

[31] MEN, Serie Documentos: "Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales". Bogotá: Enlace Editores, 2004, p. 10 – 14.

escolaridad, desarrollar el pensamiento espacial y geométrico, abordar el estudio de la figura como un continuo, establecer relaciones de orden topológico y aplicar transformaciones geométricas"[32], entonces es palpable la estrecha relación que se presenta entre los procesos de visualización y el doblado de papel.

Al utilizar el doblado de papel y en general otros métodos no convencionales para a enseñanza de la matemática, se alimenta una tendencia clara cuyo objetivo es "hacer del razonamiento visual una práctica aceptable y habitual para el aprendizaje."[33] Esta influencia se ha ido incrementando desde los años noventa con algunos trabajos como los de Zimmermann y Cunningham (1991) [25] o las monografías de las revistas *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (Peters et al., 1992 y 1992 II) [20, 21][34]. "Importantes aportaciones desde la didáctica de la matemática han enfocado las investigaciones didácticas sobre visualización desde tres diferentes perspectivas: cultural, cognitiva y sociológica (Dreyfus, 1994) [8][35]. Desde un enfoque cultural atenderemos el obstáculo que supone para muchos estudiantes y profesores aceptar que una demostración visual pueda ser realmente una demostración matemática. Esto es debido a que se asume un lenguaje implícito en el cual han de expresarse las demostraciones y tiene consecuencias sobre la concepción que se tiene acerca de la matemática. Diversos autores han expresado que

[32] En: Programación del VI Encuentro de Matemáticas Nacional, III Internacional. Fundemar, Colegio Champagnat, Popayán, 14, 15, 16 y 17 de septiembre de 2006.
[33] FIGUEIRAS, Lourdes y DEULOFEU, Jordi. "Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización". En: Revista Enseñanza de las Ciencias, 2005, 23(2), p. 217 – 226.
[34] Estos trabajos fueron citados por Lourdes Figueiras y Jordi Deulofeu en su artículo: "Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización". Pág. 217.
[35] Este trabajo fue citado por Lourdes Figueiras y Jordi Deulofeu en su artículo: "Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización". Pág. 217.

dicha asunción depende del contexto histórico en el que se lleva a cabo la demostración (Kautschitsch, 1994) [12]."[36]

"Desde un enfoque cognitivo se tendrán en cuenta las investigaciones que profundizan en el proceso de traducción entre una imagen visual y su correspondiente analítica, y las condiciones que pueden hacer que una imagen intuitiva facilite o limite el razonamiento y la resolución de un problema (Calvo, 2001) [2]"[37]

"El enfoque sociológico aportará las referencias necesarias para atender la diversidad de estudiantes y su galería de imágenes visuales, los diferentes niveles de conocimiento en matemáticas y el nivel de experto del profesor."[38]

La visualización, teniendo en cuenta esas tres perspectivas, es tomada por los autores Lourdes Figueiras y Jordi Deulofeu como "Las representaciones intuitivas y geométricas que pueden presentar las ideas y los conceptos matemáticos, que permiten al estudiante la exploración de un problema y, al menos, una primera aproximación a su solución" [9]. Además, los autores dicen que "pertenecen igualmente al ámbito de la visualización del proceso, la actividad de encontrar la imagen o la relación entre esa imagen y el problema que se está resolviendo (Arcavi, 2003) [1]" [9]. Desde este enfoque, parece ser que se están alejando un poco de considerar la visualización como un proceso de percepción que facilita la reestructuración de componentes cognitivas (De Guzmán, 1996) [5][39].

La investigación de Figueiras y Deulofeu [9] atiende a una nueva clasificación que describe los cuatro roles fundamentales de la visualización para el estudiante de matemáticas (Arcavi, 2003) [5]:

[36] FIGUEIRAS, Lourdes y DEULOFEU, Jordi. "Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización". En: Revista Enseñanza de las Ciencias, 2005, 23(2), 217 – 226.
[37] Ibíd., p. 218.
[38] Ibíd., p. 218.
[39] Citado por FIGUEIRAS, Lourdes y DEULOFEU, Jordi en el artículo "Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización." p. 218.

3.2.1. Roles fundamentales de la visualización.

3.2.1.1. Actuar como soporte e ilustración de resultados simbólicos.

3.2.1.2. Resolver el conflicto entre soluciones correctas simbólicas e intuiciones incorrectas.

3.2.1.3. Reorganizar ciertas características de los conceptos, muchas de las cuales pueden ser obviadas por las soluciones formales.

3.2.1.4. Potenciar un cambio de concepción respecto a la matemática.

Dicha investigación arroja una conclusión final: "El objetivo de familiarizar a los estudiantes con la construcción e interpretación de diagramas visuales en el proceso de resolución de un problema no es únicamente hacer posible que una imagen conduzca a la solución, sino activar tanto sus herramientas conceptuales como su reflexión sobre lo que significa resolver el problema (encontrar conjeturas y posteriormente demostrar) y sobre el significado mismo de la demostración" [9].

Por otro lado, para muchos docentes, la visualización es una habilidad inherente a la persona, por eso ha permanecido al margen del proceso de enseñanza – aprendizaje. Sin embargo, "dado que los procesos de visualización están en la base de la actividad cognitiva en geometría, el estudiante debe ir evolucionando en la 'forma de mirar' los objetos, desde percepciones visuales simples, hasta aquellas que le permiten explotar el potencial heurístico de la visualización" [17]. Además, a la visualización se le puede atribuir una capacidad para acompañar pruebas y procesos de demostración y construcción. Por lo anterior, es de vital importancia rescatarla e incluirla en la enseñanza de la geometría. Para ello, es necesario tener presente los tres niveles de visualización que caracterizan su desarrollo y a partir de allí, diseñar las estrategias que propongan este proceso como base de la formación geométrica.

3.2.2. Niveles de visualización.

3.2.2.1. Nivel global de percepción visual: Este es el nivel más elemental de visualización. En él se encuentra la percepción global de las imágenes (forma total de la imagen) que permite asociar figuras a objetos físicos. "En un contexto matemático, la percepción global actúa para reconocer formas prototípicas que se asocian con nombres de figuras geométricas. En la percepción de estas formas prototípicas predominan aspectos no matemáticos como la posición (boca arriba, boca abajo) o el tipo de trazo (grueso, delgado). Por esta razón, este nivel debe dar paso, en la enseñanza de la geometría, a una mirada matemática de las figuras que active la mente hacia la búsqueda de objetos geométricos y sus relaciones." [17]

3.2.2.2. Nivel de percepción de elementos constitutivos: Este es un nivel posterior de visualización en el que ya no solamente se percibe la forma global, sino que se percibe la imagen constituida por elementos de su misma dimensión o de inferiores. "Desde el punto de vista matemático, lo relevante para construir conceptos y relaciones geométricas, es la identificación de esos elementos constitutivos de la figura y las relaciones entre ellos. En este nivel se rompe con el esquema de imágenes prototípicas, pues la orientación o tamaño de las formas dejan de ser relevantes, para considerar en primer plano, las relaciones entre los elementos constitutivos" [17]. De acuerdo a lo anterior, lo que se busca con la construcción de las secciones cónicas a través del doblado de papel es que en un primer momento, el estudiante perciba la imagen de una forma total y posteriormente, pueda identificar algunos de los elementos de estas curvas poseen.

“Es importante considerar que el enunciado, a pesar de no ser un recurso de representación visual, influencia la visualización. Esencialmente ayuda a re-enfocar la atención de manera que puedan percibirse aspectos que pueden pasar desapercibidos sin el enunciado. Además, permite comenzar a diferenciar entre un dibujo y una figura geométrica al aclarar qué información se puede obtener de la figura y cuál no. La percepción visual se va enriqueciendo con los enunciados que acompañan las figuras. Estos orientan la atención, de manera que puedan superarse posibles predisposiciones fisiológicas y se comiencen a ver las figuras matemáticamente. La enunciación verbal de características nos ayuda a centrar la atención en aspectos que no son percibidos de manera espontánea y, de esta manera, el discurso se convierte en catalizador de la percepción visual.” [17].

3.2.2.3. Nivel operatorio de percepción visual: Es en este nivel donde se puede operar sobre las figuras, realizando transformaciones visuales que no necesariamente están atravesadas por el discurso. “En este caso, ya no se trata únicamente de la percepción de características de una configuración, sino de una manipulación mental de las subconfiguraciones, para obtener otra disposición significativa y útil.” [17].

3.3. Procesos de Justificación

Al utilizar el doblado de papel como una herramienta para la enseñanza de la geometría, no sólo se quieren promover los procesos de visualización, sino también los procesos de justificación. Al respecto, se menciona en la serie “Pensamiento geométrico y Tecnologías computacionales” que “Al ir avanzando en el aprendizaje de la geometría los estudiantes deben ir

cambiando la organización discursiva de su razonamiento para ir ganando en precisión, perfeccionando el lenguaje geométrico, introduciendo encadenamientos lógicos, accediendo a la estructura deductiva. Por lo tanto, la transformación del discurso debe llevar de una argumentación informal que se apoya fuertemente en la visualización, y por lo tanto es de carácter descriptivo, a una organización discursiva formal que encadena proposiciones usando reglas lógicas." [17]
"La organización de un discurso informal, de carácter descriptivo es bien diferente a la organización de un discurso formal. En el primer caso, se ligan proposiciones o enunciados a partir de la visualización de una figura y sus configuraciones, por asociaciones evidentes y espontáneas tal como argumentamos al conversar. En el segundo caso, el razonamiento no se centra en una descripción basada en la visualización; la organización del discurso requiere hacer uso únicamente de proposiciones que de antemano tienen un status teórico específico (axiomas, definiciones, teoremas) y conducen un paso adelante hacia las conclusiones." [17]

Para lograr ese cambio entre los meros procesos de visualización y las relaciones involucradas en un sistema deductivo, propio de los procesos de justificación, se proponen las construcciones geométricas con regla y compás. Estas tienen dos aspiraciones: "asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de la percepción presentes en el dibujo y lograr una generalización tomando en cuenta las propiedades fundamentales del mismo por medio de la utilización de instrumentos técnicos" [17]. De aquí que la construcción geométrica se convierte en un motor del pensamiento deductivo, "pues las propiedades explícitamente construidas se convierten en premisas, siendo las conclusiones otras propiedades verificadas en la construcción, pero que de alguna manera son 'espontáneas'." [17].

Las construcciones que nosotros proponemos para pasar de los procesos de visualización a los procesos de justificación, son las construcciones elaboradas doblando papel. Inicialmente se elaboran las construcciones de las secciones cónicas y a partir de la pregunta, se generan procesos de visualización; posteriormente, se definen los lugares geométricos y se formaliza con las ecuaciones canónicas y generales de las mismas.

3.4. Estándares curriculares relacionados[40].

Pensamiento espacial y sistemas geométricos:

3.4.1. Identificar las propiedades de las curvas en los bordes obtenidos mediante cortes (longitudinal y transversal) en un cono y un cilindro.

3.4.2. Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas de manera algebraica.

[40] MEN. Estándares Básicos de Calidad en Matemáticas. Pág. 28.

4. MARCO METODOLÓGICO

4.1. CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN.

4.1.1. Población

El proyecto va dirigido a los estudiantes del grado décimo del Municipio de Envigado.

4.1.2. Muestra

Estudiantes de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado.

"La Escuela Normal Superior de Envigado está ubicada en el barrio Los Naranjos, calle 37 sur No. 33-14, fue fundada en 1953 con el nombre de COLEGIO FAMILIAR DIONISIO ARANGO FERRER. Institución fundamentada en la práctica de los valores éticos, cívicos, religiosos, sociales y culturales, donde son visibles los rasgos más marcados de los principios de la pedagogía católica, que elevan la función social de la mujer educadora.

En 1998 la institución firmó convenio con la facultad de Educación de la Universidad de Antioquia legalizando la iniciación del Ciclo Complementario en febrero de 1998 con 35 estudiantes en el grado doce con énfasis en Lengua Castellana primera promoción que se graduó en el año 2000, y en el año 2001 inician 15 estudiantes con el énfasis en Lengua Extranjera: Inglés, que se graduaron en el año 2002.

El 24 de Diciembre de 1999 se recibe la Acreditación Previa según Resolución No.3494 y se inicia el proceso de Autoevaluación, revisión y ajustes al Proyecto Educativo Institucional hacia la Acreditación de Calidad y Desarrollo otorgada mediante Resolución Nacional No. 2650 del 4 de noviembre de 2003. Como producto de la Acreditación de Calidad y Desarrollo y por el impacto que la institución genera en la subregión se autoriza a la Normal para ofrecer todos los noveles educativos creando el nivel de educación para Jóvenes y Adultos en programa nocturno.

Para el año 2007 la institución entra en proceso de evaluación hacia la Acreditación de Alta Calidad"[41].

4.1.3. Unidad de análisis

50 estudiantes del grupo 10C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado.

Edad: el 60% de los estudiantes tienen 15 años, el 20% tienen 16 años, el 12% tienen 14 años y el 8% tienen 17 años.

Sexo: el 30% de los estudiantes son hombres y el 70% son mujeres.

Lugar de vivienda: el 88% de los estudiantes encuestados vive en el Municipio de Envigado, el 8% vive en el Municipio de Itagüí y el 4% vive en el Municipio de Sabaneta.

Estrato socioeconómico: el 26% es estrato 2, el 72% es estrato 3 y el 2% es estrato 4.

El 36% lee con frecuencia y el 64% no lee con frecuencia.

El 100% de los estudiantes dicen que les gusta estudiar.

El 48% de los estudiantes dicen que la Matemática es una de las materias que más les gusta, el 32% dicen que la Matemática es una de las materias que más les disgusta y el 20% no mencionan nada acerca de dicha materia.

[41] Tomado de la página de Internet de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado: http://www.normalenvigado.edu.co/portada.htm

4.2. CUASIEXPERIMENTO

Los diseños cuasiexperimentales manipulan deliberadamente al menos una variable independiente. En éstos, los sujetos no son asignados al azar a los grupos, ni emparejados, sino que dichos grupos ya estaban conformados antes del experimento.

La propuesta que se presenta se considera un cuasiexperimento por varias razones:

- Los sujetos no son seleccionados al azar. El grupo 10C está intacto.
- Se pretende que la propuesta esté contextualizada.
- Se inicia con una actividad diagnóstica, durante las actividades se hacen evaluaciones de la temática y para finalizar se hace una evaluación general.
- El grupo es comparado en la postprueba para analizar si el tratamiento experimental tuvo un efecto sobre la variable dependiente

4.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

4.3.1. Encuesta socio – afectiva

ENCUESTA

Apreciado estudiante. La siguiente encuesta tiene como fin primordial, el conocimiento de sus motivaciones e intereses frente a la vida y frente a la academia. Por eso, se le pide que responda con la mayor sinceridad del caso.

INSTITUCIÓN: ______________________________

GRUPO: ______________________________

1. Nombre: ______________________________
2. Edad: ______________________________

3. Lugar de residencia:____

Elija la(s) opción(es) que considera correcta(s).

4. Sexo: M___ F___
5. Estrato socio económico: 1___ 2___ 3___ 4___ Otro___ ¿Cuál?___
6. ¿Con quién vive? Padres___ Tíos___ Abuelos___ Hermanos___ Otros___ ¿Quiénes?_________
7. ¿Qué actividades realiza en sus tiempos libres?
   Estudiar___ Leer___ Escribir___ Dormir___ Ver TV___ Hacer deporte___ Jugar___ Trabajar___ Otras___ ¿Cuáles?________________
8. ¿Lee con frecuencia?
   SI________ NO_______
9. ¿Le gusta estudiar?
   SI________ NO_______
10. ¿Cuáles son las materias que más le gustan?
    MATEMÁTICAS____ ESPAÑOL____ BIOLOGÍA____
    QUÍMICA____ FÍSICA____ DEPORTE____
    SOCIALES____ HISTORIA____ RELIGIÓN____
    FILOSOFÍA____ INFORMÁTICA____ IDIOMA EXTRANJ.____
11. ¿Cuáles son las materias que más le disgustan?
    MATEMÁTICAS____ ESPAÑOL____ BIOLOGÍA____
    QUÍMICA____ FÍSICA____ DEPORTE____
    SOCIALES____ HISTORIA____ RELIGIÓN____
    FILOSOFÍA____ INFORMÁTICA____ IDIOMA EXTRANJ.____
12. ¿Cuál es su aspiración profesional?
    Médico___ Ingeniero___ Profesor___ Deportista___ Abogado___ Psicólogo___ Otro___ ¿Cuál?____
13. ¿Cuál es su música favorita?
    Rock___ Pop___ Tropical___ Reggaeton___ Rap___ Otros___ ¿Cuál?______________

Complete las siguientes oraciones:

14. Quisiera saber más acerca de… __________________________________
15. Tengo facilidad para… ____
16. Tengo problemas en… ____

4.3.2. Encuesta Académica.

4.3.2.1. Determinación de los objetivos específicos:

Identificar el gusto de los estudiantes por las metodologías empleadas por los docentes en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en general.

Identificar los materiales utilizados en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en general, por algunos educadores de Instituciones Educativas públicas del Valle de Aburrá a través de sus estudiantes.

4.3.2.2. Definición de las variables:

Gusto por las Matemáticas: Es esa simpatía que logra que la persona se cautive con el saber matemático.

Forma de enseñanza de las Matemáticas: Metodologías empleadas por los docentes para llevar a cabo el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas

Enseñanza de las Matemáticas con materiales de apoyo: Uso de materiales o herramientas para mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

Uso del doblado de papel como método de enseñanza de las Matemáticas: Aprovechamiento de las bondades del papel y de su doblado para la enseñanza de algunos conceptos matemáticos.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Encuesta a los estudiantes del grado Décimo C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado.

Apreciado estudiante:

Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia están llevando a cabo una investigación para indagar sobre las metodologías empleadas por los docentes en la enseñanza de las Matemáticas. Por eso, le pedimos el favor de responder esta encuesta con toda la sinceridad del caso. El estudio de ésta será incluido en la monografía: “El uso del doblado de papel en la construcción e identificación de algunas de las características de las secciones cónicas” y se le informará de los resultados.

De antemano, muchas gracias.

Marque con una X la respuesta que considere apropiada o complete el espacio en los casos que lo requiera.

1. Edad: ____
2. Sexo: F ___ M ___
3. ¿Le agradan las matemáticas? Si___ No___ ¿Por qué? ____
4. Su dedicación en la clase de Matemáticas es:
   Muy buena __ Buena __ Regular __ Mala __ Muy mala __
5. Su dedicación extraclase al estudio de las Matemáticas es:
   Muy buena __ Buena __ Regular __ Mala __ Muy mala __

6. La metodología del profesor que más le ha gustado es: (puede señalar varias opciones)
   Con talleres, módulos o guías ___ Con exposición del docente ___
   Con exposición de los estudiantes ___ Con otras actividades ___
   ¿Cuáles? ___________________________
7. Le gusta recibir clases de matemáticas:
   En las primeras horas de la jornada ___
   En las últimas horas de la jornada ___
   En la horas centrales de la jornada ___
8. En general ¿qué jornada prefiere para estudiar matemáticas?
   Mañana ___ Tarde ___ Noche ___
9. Actualmente, la metodología de su profesor de matemáticas es: (puede señalar varias opciones)
   Con talleres, módulos o guías ___ Con exposición del docente ___
   Con exposición de los estudiantes ___ Con otras actividades ___
   ¿Cuáles? ___________________________
10. El proceso de evaluación en matemáticas lo valora:
    Muy adecuado __ Adecuado __ Ni adecuado, ni inadecuado __
    Inadecuado __ Muy inadecuado __
11. Ha sido evaluado en matemáticas con: (puede señalar varias opciones)
    Talleres ___ Proyectos ___ Evaluaciones de periodo ___ Quizes ___
    Trabajos en equipo ___ Entrega del cuaderno ___ Participación ___
    Otras actividades ___ ¿Cuáles? _______________________________
12. En la clase de matemáticas se utilizan materiales como: (puede señalar varias opciones)
    Libro guía ___ Software educativos ___ Guías ___ Internet ___
    Otros materiales ___ ¿Cuáles? _______________________________
13. ¿Ha recibido clases de matemáticas con algún tipo de actividades lúdicas? Si ___ No ___ ¿Cuáles? _____________________________

14. ¿En la clase de matemáticas ha hecho algún tipo de construcciones con materiales tangibles? Si ___ No ___ ¿Cuáles?___________________
15. ¿Ha recibido alguna clase de matemáticas en la que se manipule una hoja de papel para hacer algún tipo de mostración? Si ___ No ___
16. ¿Le parece que el doblado de papel podría ser una buena herramienta para la enseñanza de la matemática? Si ___ No ___ ¿Por qué? ____
17. ¿Cree que existe(n) algún(os) inconveniente(s) para enseñar matemáticas utilizando el doblado de papel? Si ___ No ___ ¿Cuál (es)? ____

MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

4.3.3. Entrevista.

4.3.3.1. Determinación de los objetivos específicos:

Identificar las metodologías empleadas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las secciones cónicas, por algunos educadores de Instituciones Educativas públicas del Valle de Aburrá.

Identificar los materiales utilizados en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las secciones cónicas por algunos educadores de Instituciones Educativas públicas del Valle de Aburrá.

4.3.3.2. Definición de las variables:

Enseñanza de las secciones cónicas: Proceso continuo que se lleva a cabo para que un determinado estudiante logre identificar y caracterizar las cuatro secciones cónicas: parábola, hipérbola, elipse y circunferencia.

Metodología empleada en la enseñanza de las secciones cónicas: Conjunto de métodos que se utilizan para que el estudiante logre identificar y caracterizar cada una de las secciones cónicas: parábola, hipérbola, elipse y circunferencia.

Uso del doblado de papel como método de enseñanza: Aprovechamiento de las bondades del papel y de su doblado para la enseñanza de la matemática y en particular de las secciones cónicas.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS SECCIONES CÓNICAS

Apreciado docente:

Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia están adelantando una investigación, para determinar la forma en que se está llevando a cabo el proceso de enseñanza – aprendizaje de las Secciones Cónicas en algunas Instituciones públicas de la ciudad. Por eso, le pedimos el favor de responder a esta entrevista con toda la sinceridad del caso. El estudio de ésta será incluido en la monografía: "El uso del doblado de papel en la construcción e identificación de algunas de las características de las secciones cónicas" y se le informará de los resultados.

De antemano, muchas gracias.

1. ¿Enseña Geometría Analítica en el grado décimo?

2. Si la pregunta anterior es afirmativa entonces: ¿Cuánto tiempo dedica a la enseñanza de este tema?

3. ¿Qué orden sigue para enseñar las secciones cónicas con respecto a los contenidos? ¿Por qué?

4. ¿Qué materiales de apoyo utiliza para la enseñanza de las secciones cónicas? Dentro de esos materiales, ¿ha utilizado algún software educativo aplicable a la enseñanza de las secciones cónicas?

5. ¿Qué actividades realiza para orientar la enseñanza de las secciones cónicas? En caso de no mencionarse un ANP, entonces preguntar: ¿Elabora algún tipo de actividad diagnóstico o algún aseguramiento del nivel de partida?

6. En el estudio de las secciones cónicas, ¿se centra más en las ecuaciones canónicas o se centra en su representación gráfica o en ambos? ¿Por qué? Entonces, ¿qué debería ser primero: representación gráfica y después la ecuación general de las secciones cónicas o viceversa? ¿Por qué?

7. ¿Qué actividades realiza para orientar el proceso de evaluación del tema Secciones cónicas?

8. ¿Cree que la metodología utilizada para la enseñanza de las secciones cónicas favorece el aprendizaje de las mismas por parte de los estudiantes? ¿Por qué?

9. ¿Cree usted que se pueda utilizar el doblado de papel para enseñar las secciones cónicas? En caso afirmativo, ¿Cómo?

10. ¿Qué problemas cree que pueden aparecer al utilizar el doblado de papel como herramienta para la enseñanza de las secciones cónicas?

11. Si su respuesta anterior es positiva, ¿cómo cree que se podrían resolver dichos problemas?

Muchas gracias por su colaboración.
Éxitos.

4.3.4. Actividad diagnóstica

ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

Objetivo: Identificar los conceptos previos de los estudiantes para comenzar con el estudio de las secciones cónicas.

1. Define con tus propias palabras lo que es un lugar Geométrico.

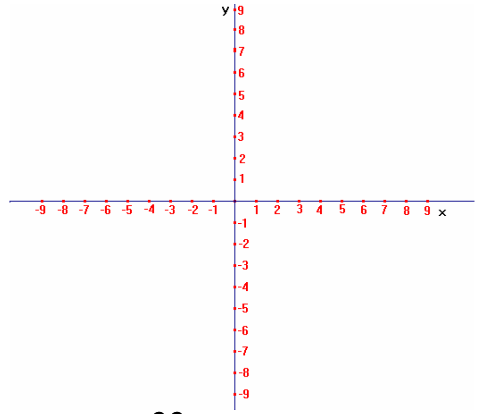
____
____
____

2. ¿Qué entiendes por relación entre dos conjuntos? Da un ejemplo.

____
____
____

3. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos.

a. (2.4) **b.** (3,5) **c.** (-3,9) **d.** (-8,-2) **e.** (3, 0) **f.** (5,-6)

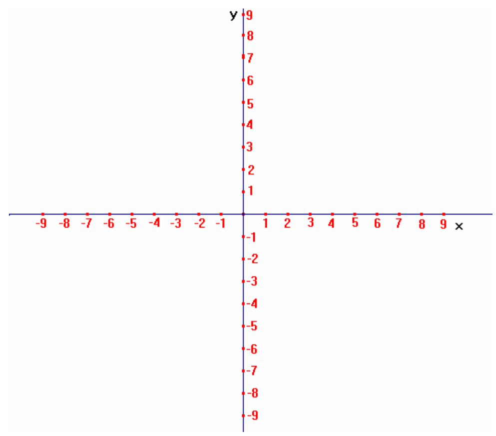


4. Marca con una X los puntos que pertenecen a la recta $y = x + 1$

a. (2,3) **b.** (-1,5) **c.** (4,5) **d.** (-8,-7) **e.** (9,8) **f.** (0,0) **g.** (2/5, 7/5)

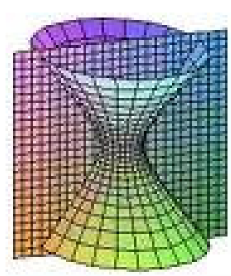
5. En un plano cartesiano, halla la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a. (2,5) y (4,8) **b.** (-4,9) y (2,-4) **c.** (0,0) y (1,1) **d.** (9,9) y (-9,4)



6. Observa las siguientes imágenes y trata de describir la forma que tiene cada una.

Descripción



Descripción

Descripción

Descripción

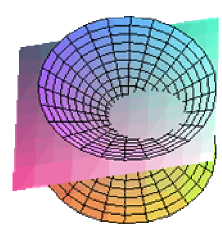
4.3.5. Algunas generalidades de las secciones cónicas y del doblado de papel.

PARA TENER EN CUENTA

ALGUNOS DATOS HISTÓRICOS DE LAS SECCIONES CÓNICAS

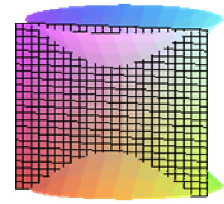
Se llaman curvas cónicas a todas aquellas que se obtienen cortando un cono con un plano. Estas curvas aparecían ya en la geometría griega y fueron denominadas *secciones cónicas,* ya que los griegos de la época de Platón consideraban que tales curvas procedían de la intersección de un cono con un plano.

El matemático griego Apolonio (262 – 190 A.C.) de Perga (antigua ciudad del Asia Menor) fue el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas. Apolonio descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos: elipses, hipérbolas y parábolas.

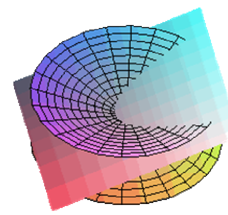


Las elipses son las curvas que se forman cortando un cono con un plano que sólo toca uno de los mantos del cono y no es paralelo a una de sus aristas.

Las hipérbolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano que tocas los dos mantos del cono.



Las parábolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano paralelo a una de sus aristas.



En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada Geometría Analítica. En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y.

ALGUNAS GENERALIDADES DEL DOBLADO DE PAPEL

Algunas reglas básicas a tener en cuenta para plegar el papel son:

- Se pliega siempre sobre un soporte firme y plano.
- Hay que esforzarse en realizar con exactitud y desde el principio, todos los pasos del plegado.
- Todos los dobleces y pliegues deben repasarse con la uña del pulgar.
- Después de cada paso del plegado, se debe colocar la hoja de papel en la misma posición o como se ve en la figura correspondiente.

Una hoja de papel puede representar un plano finito.

Tenga en cuenta que un doblez se asemeja a lo que en geometría se denomina línea recta.

Cuando se le mencione que trace un doblez, significa que elabore un doblez.

En cuanto al doblado de papel, se dan por sentados los siguientes postulados:

Puede plegarse el papel de modo que el pliegue formado sea una línea recta.

Puede plegarse el papel de modo que el pliegue pase por uno o dos puntos dados.

Puede plegarse el papel de modo que un punto pueda superponerse a otro punto de la misma hoja.

Puede plegarse el papel de modo que una línea recta pueda superponerse a otra línea recta de la misma hoja.

Se dice que las líneas y los ángulos son iguales si coinciden cuando pueden superponerse al plegar el papel.

4.3.6. Actividad 1: La Circunferencia

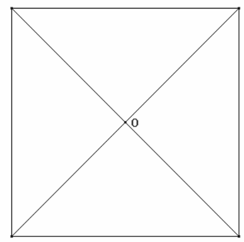
LA CIRCUNFERENCIA

He aquí un invento simple y antiquísimo. Sin embargo fue algo esencial para la evolución de maquinarias de todo tipo. La rueda es un elemento necesario en infinidad de inventos, tanto antiguos como actuales, desde los primitivos molinos, hasta la bicicleta, motocicleta, automóvil, avión, cosechadora, tractor, silla de ruedas, etc.[42]

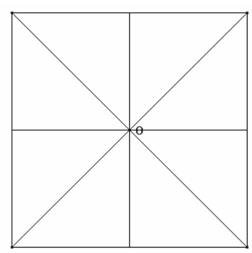
[42] Tomado de: http://www.educar.org/inventos/rueda.asp

CONSTRUCCIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA DOBLANDO PAPEL

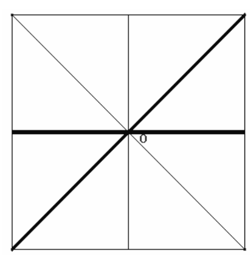
Toma una hoja de papel de forma cuadrada (se recomienda de un tamaño de 20 cms de lado) y traza mediante dobleces sus dos diagonales. Nombra con la letra O al punto de intersección de estas.



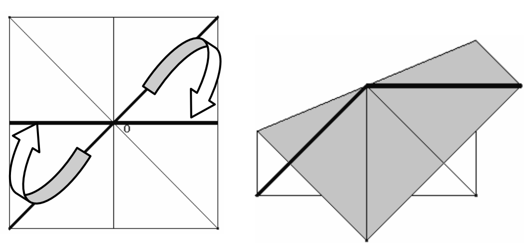
A continuación, traza perpendiculares a los lados del cuadrado que pasen por O. Realiza esto llevando cada lado sobre sí mismo hasta encontrar un doblez que pase este punto.

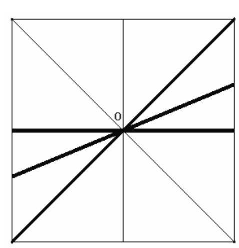


Ahora, dirige tu atención a la diagonal y la perpendicular que se resalta en la figura.

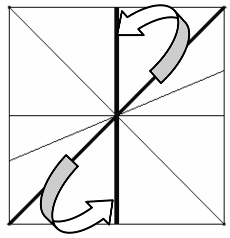


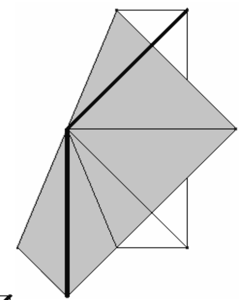
Traza el doblez que se forma al llevar la diagonal sobre la perpendicular tal y como se muestra en las figuras.

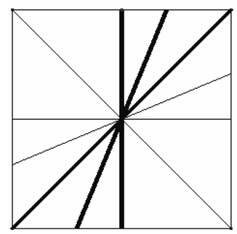




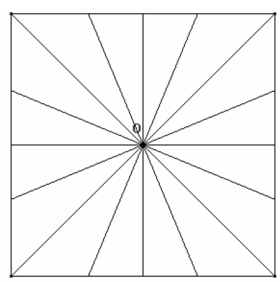
Considerando la misma diagonal y la otra perpendicular del cuadrado, realiza el mismo procedimiento anterior. Guíate de las siguientes figuras.



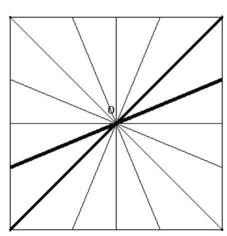


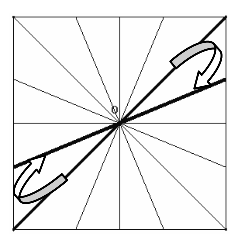


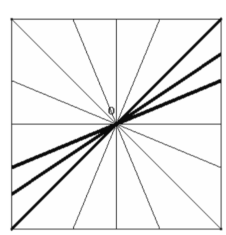
Repite el proceso utilizando la otra diagonal con cada perpendicular. Obtendrás al final los siguientes dobleces.



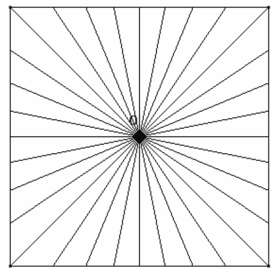
Ahora, considera dos de los dobleces trazados anteriormente que estén uno después de otro como los mostrados en la figura de la izquierda. Luego, traza el doblez al llevar uno sobre el otro como se muestra en la figura de la derecha.



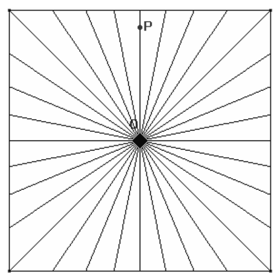




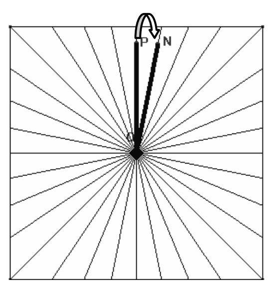
Repite el proceso utilizando los diferentes dobleces que se presentan en la hoja. Al finalizar, se visualizarán los siguientes dobleces.



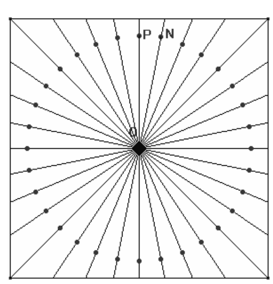
Ahora, utilizando un lápiz marca un punto P sobre una de las perpendiculares trazadas inicialmente en una posición cercana al borde de la hoja tal y como se indica en la figura.



Utilizando un lápiz, traslada la longitud del segmento OP al primer doblez ubicado a su derecha encontrando así el punto N como se muestra en la figura.



Continúa trasladando desde O la longitud del segmento OP a los demás segmentos y marca con un lápiz los puntos como se hizo con el punto N (no es necesario que nombres los puntos). Al finalizar se visualizarán los siguientes puntos



Hasta el momento hemos trazado puntos que se encuentran a una misma distancia del punto O.

Este conjunto de puntos describe un lugar geométrico llamado CIRCUNFERENCIA que se define como una curva en donde todos sus puntos equidistan de otro llamado centro.

Responde:

¿Cómo hallarías más puntos pertenecientes a la circunferencia doblando el papel? Describe con tus palabras el procedimiento que utilizaste.

¿Qué inconvenientes se te podrían presentar al doblar el papel?

Si el papel lo permitiera, ¿podríamos encontrar más y más puntos de la circunferencia?

Si prescindiéramos del papel para la construcción de una circunferencia, ¿podríamos afirmar que la circunferencia tiene infinitos puntos que equidistan de otro llamado centro?

CONCEPTUALICEMOS

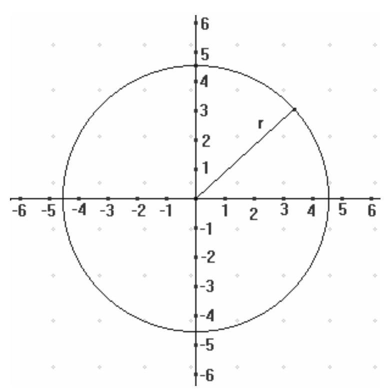
A pesar de que doblando papel podremos señalar muchos puntos que pertenecen a una misma circunferencia, debemos saber que una circunferencia es un lugar geométrico “sin huecos”, es decir, que en medio de dos puntos de la circunferencia siempre existirá otro.

La circunferencia que construimos doblando papel la podemos dibujar también en un plano cartesiano utilizando un compás.

El segmento que va desde el centro de la circunferencia hasta un punto de esta recibe el nombre de **Radio**.

El segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro se llama **Diámetro.**

Dada la siguiente gráfica:



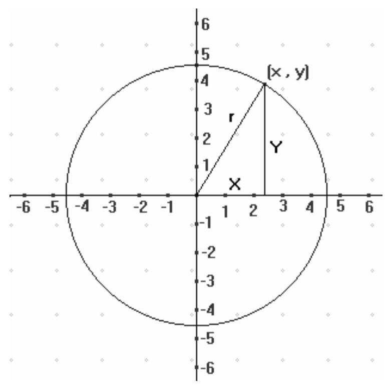
¿Cuál es el radio de esta circunferencia?

¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del centro de la circunferencia?

Cuando el centro de la circunferencia tiene coordenadas (0,0) diremos que la circunferencia tiene centro en el origen.

A continuación, encontraremos las coordenadas cartesianas de los puntos que pertenecen a la circunferencia con centro en el origen

Construyamos un triángulo rectángulo de catetos X y Y e hipotenusa r como se muestra en la figura.



¿Por qué el punto señalado en la circunferencia tiene coordenadas (x, y)?

Aplicando el teorema de Pitágoras para este triángulo encontramos que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

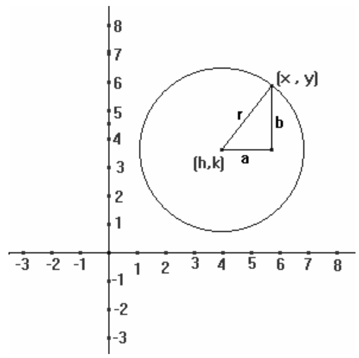
Luego, todos los puntos de coordenadas (x, y) que cumplan con la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ pertenecerán a la circunferencia de radio r.

EJERCICIO

- Dibuja en un plano cartesiano las siguientes circunferencias con centro en el origen y escribe su ecuación.
  - ✓ Con r = 4 cm.
  - ✓ Con r = 8 cm.
  - ✓ Con r = 3/2 cm.
  - ✓ Que pase por el punto (3,4)

Ahora, escribamos la ecuación de la circunferencia con centro en un punto diferente al origen.

Para ello consideremos la siguiente gráfica de una circunferencia con centro en (h, k) y el triángulo con catetos a y b e hipotenusa r (radio de la circunferencia).



Debemos encontrar la condición que deben cumplir los puntos (x, y) para pertenecer a la circunferencia.

Notemos que por resta de segmentos:

$$a = x - h$$
$$b = y - k$$

Luego, aplicando el teorema de Pitágoras para ese triángulo rectángulo obtenemos:
$a^2 + b^2 = r^2$

Y reemplazando los valores de a y b por los obtenidos anteriormente tenemos:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
(Ecuación canónica)

Los puntos (x, y) que satisfagan esta ecuación describen una circunferencia con centro en (h, k) y radio r. Observemos que cuando h = k = 0 obtenemos la ecuación de la circunferencia en el origen.

Si desarrollamos los binomios en
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ obtenemos:

$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$

Si se realizan las siguientes sustituciones: $-2h = C$, $-2k = D$, $h^2 + k^2 - r^2 = E$ y los coeficientes de x^2 y y^2, A y B respectivamente, se obtiene:

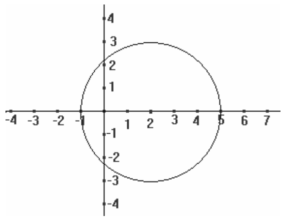
$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

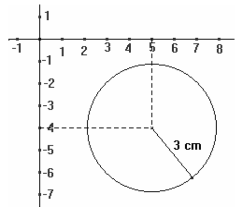
Esta expresión corresponde a la ecuación general de una circunferencia si A = B.

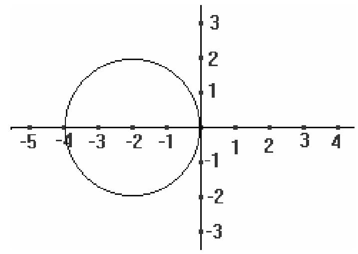
EJERCICIOS

- Dibuja en un plano cartesiano las siguientes circunferencias.
  - ✓ Con centro en (2 ,4) y radio 5 cms.
  - ✓ Con centro en (-5, 3) y radio 3 cms.
  - ✓ Con centro en (0, 6) y radio 3 cms.
  - ✓ Con centro en (2, -6) y que pase por el punto (3, -1)
  - ✓ Con centro en (-5, -6) y que pase por el origen.

- Dadas las siguientes circunferencias escribe sus respectivas ecuaciones canónica y general.







- Aplicando los casos de factorización, determina en cada una de siguientes ecuaciones el centro y el radio de la circunferencia que describen.

  ✓ $x^2 - 10x + y^2 + 4y + 25 = 0$
  ✓ $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$
  ✓ $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 4 = 0$

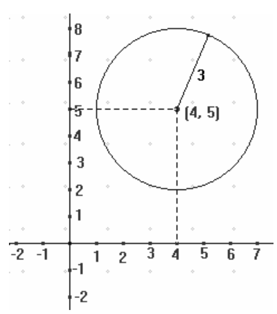
- Determina cual(es) de los siguientes puntos pertenecen a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 9$. Justifica tus respuestas.

  ✓ (0, 3)
  ✓ (2, 3)
  ✓ (3, 0)

EVALUACIÓN

Dibuja en un plano cartesiano una circunferencia con centro en (-6, 3) y radio 4 cm.

Dada la siguiente circunferencia escribe su ecuación canónica y general.



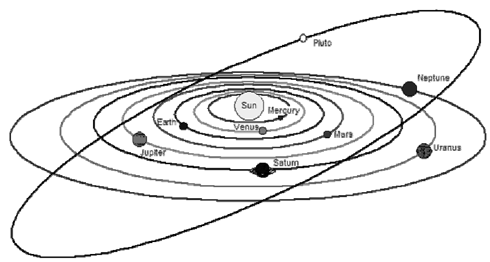
Determina cual(es) de los siguientes puntos pertenecen a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$. Justifica tus respuestas.

✓ (0, 0)
✓ (4, 3)
✓ (0, 3)
✓ (3, 5)
✓ (2, 5)

4.3.7. Actividad 2: La Elipse.

LA ELIPSE

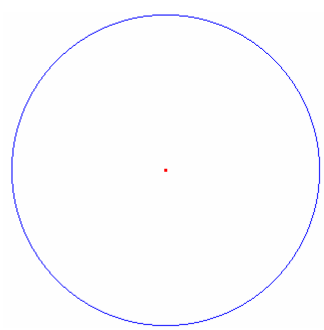
Son muchas las formas geométricas que se observan en la cotidianidad. Por ejemplo observa las trayectorias de los planetas del sistema solar.



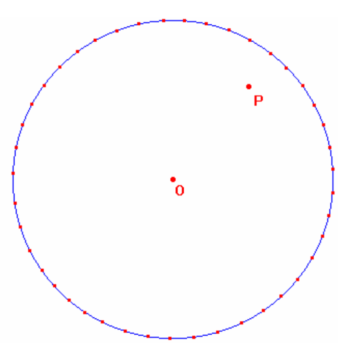
Las trayectorias que describen los planetas alrededor del sol tienen la forma de una curva ovalada que parece un círculo alargado. A continuación construiremos una forma similar denominada ELIPSE

CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE DOBLANDO PAPEL

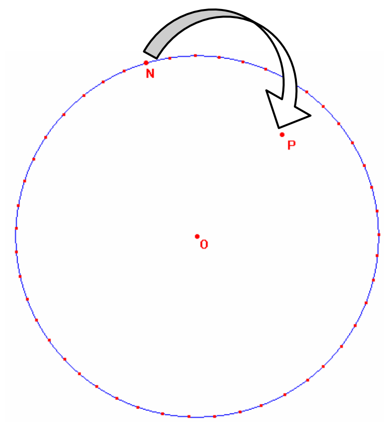
Consideremos una hoja de papel de forma circular de unos 12 centímetros de diámetro.

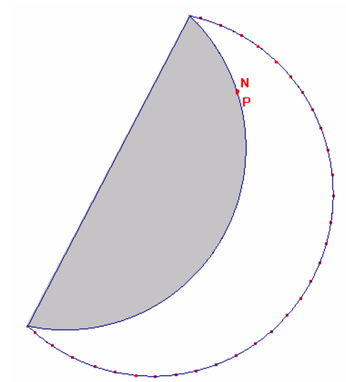


Nombremos con la letra O el centro del círculo. Marquemos un punto P cercano al borde de éste al igual que una secuencia de puntos (con una separación aproximada de un centímetro) sobre la circunferencia.

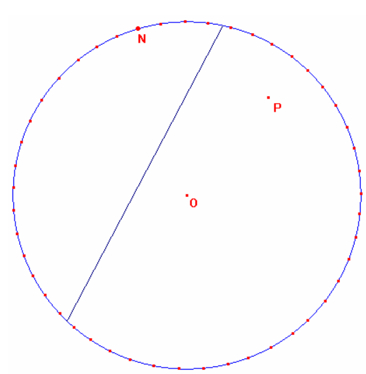


Ahora, nombra con la letra N uno de los puntos que están sobre la circunferencia. Dobla la hoja de papel de tal forma que lleves el punto P sobre el punto N como lo indica la figura. Recuerda siempre repasar los dobleces realizados.

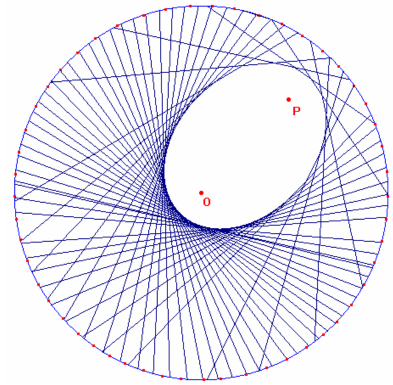




Marca el doblez y desdobla. Observarás lo siguiente:



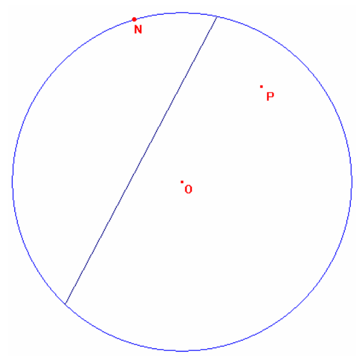
Repite el proceso anterior considerando todos los puntos marcados sobre la circunferencia. Observarás al finalizar los siguientes dobleces:



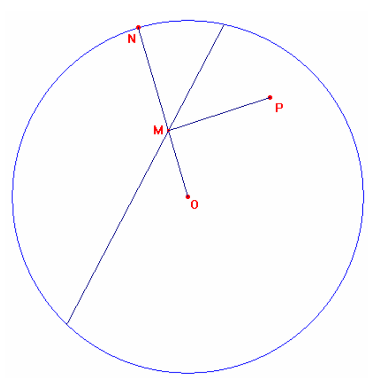
La figura que se observa dentro de la hoja (de color blanco) tiene una forma muy singular denominada ELIPSE. ¿Cómo la describirías?

Ahora, definamos la condición que cumplen los puntos que pertenecen a esta nueva cónica o lugar geométrico llamado ELIPSE.

Toma una nueva hoja de papel de forma circular y marca como se hizo anteriormente los puntos O, P, N y traza el doblez al llevar el punto N sobre el punto P como muestra la figura:



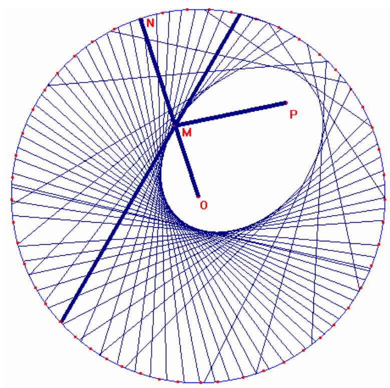
Traza con un lápiz el segmento NO y llama con la letra M al punto de intersección entre NO y el doblez. Luego traza el segmento MP.



Notemos que OM + MN es igual al radio de la circunferencia por lo tanto, esa suma siempre será **constante**.

Pero el segmento MN = MP ¿por qué? (ver figura anterior)
Luego,
OM + MP = Radio de circunferencia = Constante

Además observemos en la siguiente figura que el punto M pertenece a la elipse.



Se llama ELIPSE al lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados FOCOS, es una constante.

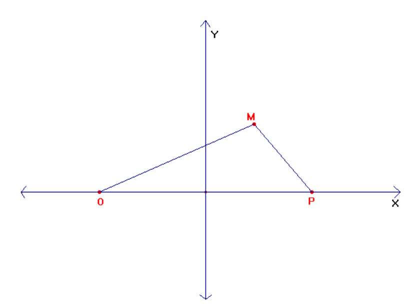
¿Cuáles son los focos de la elipse construida en la hoja de papel?
Céntrate en otro punto que tú consideres, pertenece a la elipse, ¿por qué crees que pertenece? Fíjate si la suma de las distancias de ese punto elegido a los focos es una constante. ¿Por qué?

Si el papel lo permitiera, ¿podríamos encontrar más y más puntos de la elipse?

CONCEPTUALICEMOS

A pesar de que doblando papel podremos señalar muchos puntos que pertenecen a una misma elipse, debemos saber que una elipse es un lugar geométrico "sin huecos", es decir, que en medio de dos puntos de la elipse siempre existirá otro.

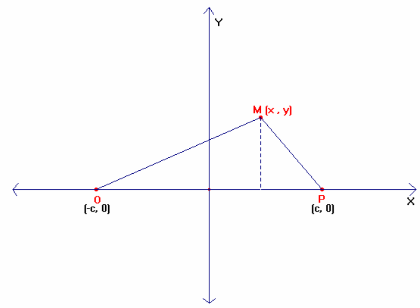
De la figura anterior consideremos en un plano cartesiano los puntos O, P y M como se muestra a continuación:



Llamaremos CENTRO DE LA ELIPSE al punto medio del segmento formado por los puntos O y P (puntos llamados anteriormente focos de la elipse)

A continuación, encontraremos las coordenadas cartesianas de los puntos que pertenecen a la elipse con centro en el origen. Para ello, supongamos que **a** es la distancia del centro de la elipse al vértice.

Sea la longitud OM + MP = 2a = constante ¿por qué? Consideremos el punto O con coordenadas (-c, 0), al punto P con coordenadas (c, 0) y por último el punto M con coordenadas (x, y) ¿por qué?



El segmento OM mide $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ y el segmento MP mide $\sqrt{(c-x)^2+y^2}$ ¿Por qué?

Por lo tanto:

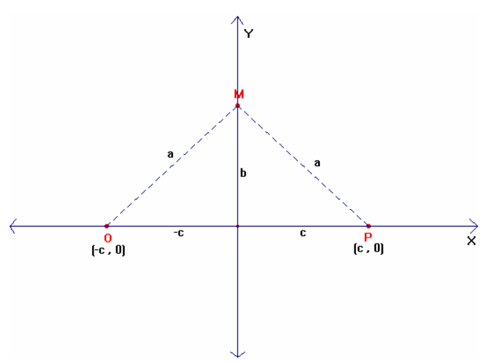
OM + MP = 2a es equivalente a

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a$$

Después de realizar algunas operaciones aritméticas y algebraicas encontramos que:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1$$

Si ubicamos el punto M sobre el eje Y, la longitud OM + MP = 2a quedara dividida en dos partes iguales. Además, nombremos con la letra b la distancia del punto M al eje x



¿Cuáles son las coordenadas del punto M en este caso?

Podemos observar que se forma en la figura un triángulo rectángulo con catetos **b** y **c** e hipotenusa **a**. Luego $a^2 - c^2 = b^2$ ¿Por qué?

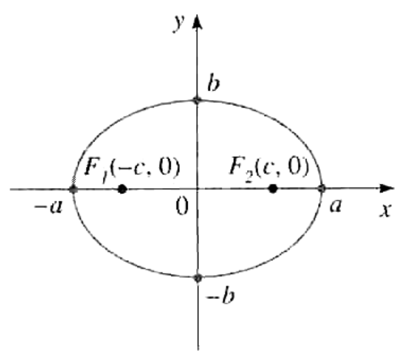
Y sustituyendo el valor de $a^2 - c^2$ por b^2 en la ecuación anterior tenemos que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (Ecuación canónica)}$$

Todos los puntos de coordenadas (x, y) que cumplan con la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pertenecen a la elipse con centro en el origen y constantes a, b.

Los valores a, b, c estudiados hasta el momento, son componentes de las siguientes coordenadas cartesianas:

- (-a, 0) y (a, 0) que representan las coordenadas de los VÉRTICES de la elipse.
- (0, -b) y (0, b) que representan las coordenadas de los interceptos de la elipse con el eje y.
- (-c, 0) y (c, 0) que representan las coordenadas de los FOCOS de la elipse.

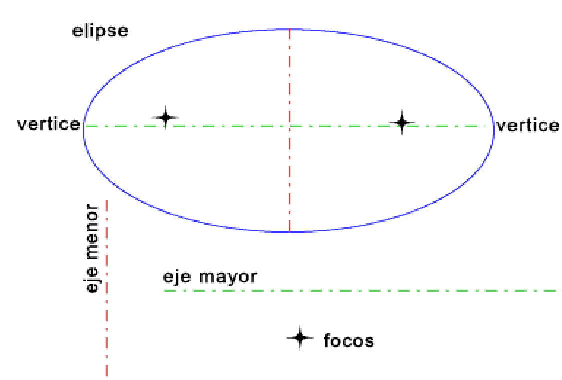


En esta elipse se pueden distinguir los siguientes elementos:
Medida del Eje Mayor = 2a (distancia entre los vértices)
Medida del Eje Menor = 2b

PARA TENER EN CUENTA:

Focos: Puntos fijos de la elipse.
Eje focal: Es la recta que pasa por los focos.

Los cuatro puntos de intersección de la elipse con los ejes de simetría se llaman vértices. El mayor de los segmentos determinados por dos de los vértices se llama Eje mayor y el menor de los segmentos se llama Eje menor. Así:



Dado que se encontró la expresión $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ como ecuación canónica de la elipse, se puede definir la excentricidad **e** como el número $e = \frac{c}{a}$ donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La excentricidad de las elipses satisface $0 < e < 1$. Así, si **e** es cercana a 1, entonces **c** casi es igual a **a** y la elipse tiene forma alargada, pero si **e** es cercana a cero, la elipse tiene casi la forma de un círculo. La excentricidad es una medida del "estiramiento" de la elipse.

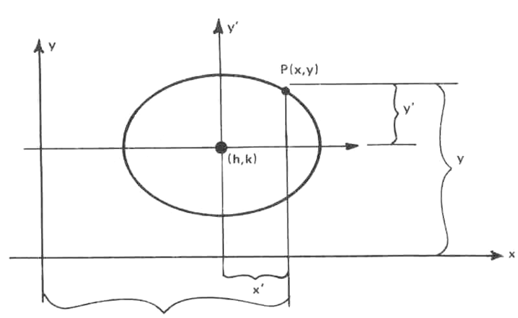
¿Cómo podrías explicar que si **e** es igual a cero entonces la elipse es una circunferencia?

Ahora, escribamos la ecuación de la elipse con centro en un punto diferente al origen.
Si el centro de una elipse no está en el origen del plano cartesiano, sino que tiene centro en otro punto (h, k) y sus respectivos ejes son paralelos a los ejes x e y, podemos establecer la ecuación reemplazando x por (x – h) e y por (y – k).

Sin embargo, es necesario tener en cuenta que la ecuación depende de la posición del lado mayor:

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Si el eje mayor es horizontal (a > b > 0).

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ Si el eje mayor es vertical (a > b > 0).



EJERCICIO 1

1. Dibuja un plano cartesiano en el centro de la elipse construida en papel y señala los elementos estudiados hasta el momento (focos, vértices, interceptos con eje y, eje mayor, eje menor)
2. Mide las distancias que requieras (focos, a, b) para encontrar la ecuación canónica de la elipse que construiste en papel.

Si se desarrolla la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\underbrace{b^2}_{A}x^2 + \underbrace{a^2}_{B}y^2 \underbrace{-2b^2h}_{C}x \underbrace{-2a^2k}_{D}y + \underbrace{\left(b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2\right)}_{E} = 0$$

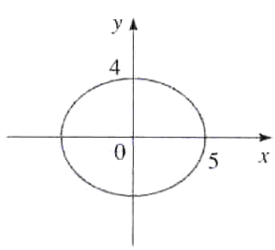
Luego, esta ecuación es de la forma:

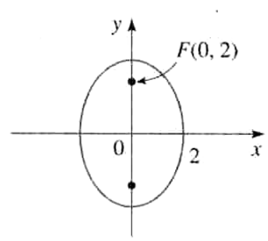
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

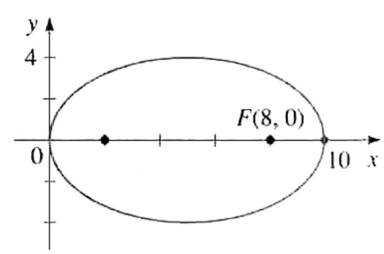
De donde se concluye que una ecuación de segundo grado en **x** e **y**, que tiene los coeficientes A y B positivos pero desiguales representa una elipse.

EJERCICIO 2

1. Dadas las siguientes elipses, determinar coordenadas de los vértices, focos, interceptos con el eje y, lado mayor y lado menor. Escriba además su respectiva ecuación.







2. Determina los vértices, focos y excentricidad de cada elipse. Calcula las longitudes de los ejes mayor y menor y traza la gráfica

   a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **b.** $4x^2 + 9y^2 = 36$ **c.** $25x^2 + 4y^2 = 100$

3. Determinar cuál(es) de los siguientes puntos pertenecen a la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

   a. (0, 5) **b.** (0, 4) **c.** (0, -4) **d.** (2, 4.33) **e.** (2, -4.33) **f.** (5, 3)

4. Determinar el centro, la medida de los ejes mayor y menor, los vértices y los focos de las elipses cuyas ecuaciones son:

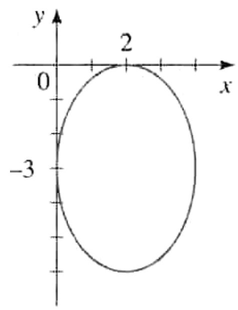
   a. $9x^2 + 16y^2 + 72x = 0$

   b. $4x^2 + 9y^2 + 24x + 36y + 36 = 0$

EVALUACIÓN

Dibuja en un plano cartesiano una elipse con centro en el origen, un foco en el punto (2, 0) y un vértice en el punto (5, 0).

Dada la siguiente elipse escribe su ecuación canónica y general.



Determina cuál(es) de los siguientes puntos pertenecen a la elipse con ecuación $x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0$. Justifica tus respuestas.

a. $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ **b.** (0, -3) **c.** (0, 3) **d.** (1, 1) **e.** $(2, \frac{\sqrt{3}}{2})$

4.3.8. Actividad 3: La Parábola.

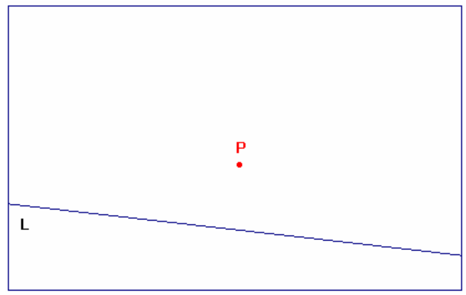
LA PARÁBOLA

Observa detenidamente la forma del slogan de McDonald’s

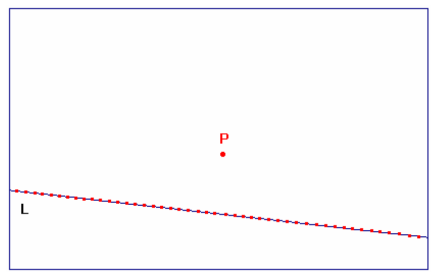
Cada V al revés del slogan describe una nueva sección cónica que estudiaremos a continuación denominada PARÁBOLA. Centremos nuestra atención a su estudio para más adelante poder describir sus características más relevantes además de determinar matemáticamente las ecuaciones de estas parábolas que nos pueden despertar el apetito.

CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA DOBLANDO PAPEL.

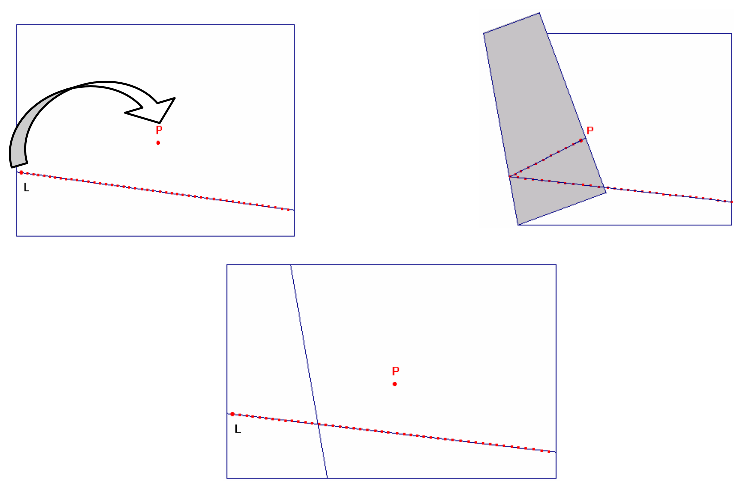
Consideremos una hoja de papel de forma rectangular (puede ser una hoja de papel tamaño carta) y ubíquela de forma horizontal. Trace un doblez en la parte inferior de esta y un punto preferiblemente como se indica en la siguiente gráfica. Llame L al doblez y P al punto.



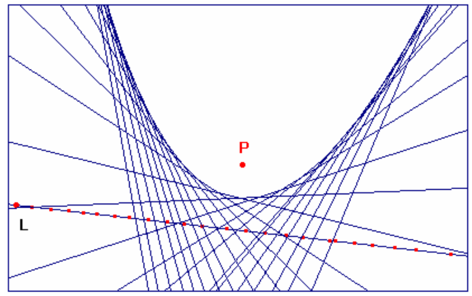
A continuación, marca puntos sobre el doblez L con una distancia entre ellos de aproximadamente 5 milímetros.



Lleva el punto ubicado en el extremo izquierdo de L sobre el punto P y trace el doblez.



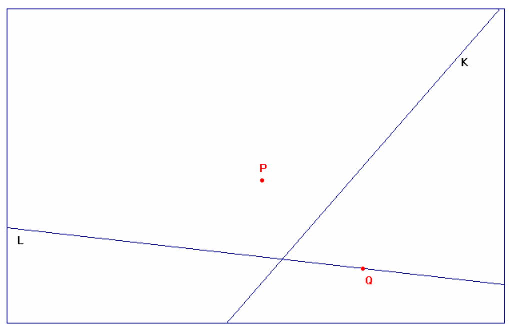
Lleva el punto P sobre cada uno de los puntos trazados sobre el doblez L, al finalizar observarás los siguientes dobleces:



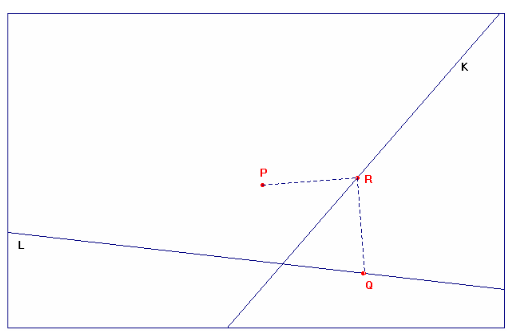
La figura en forma de U que se observa es una PARÁBOLA.

Ahora, definamos la condición que cumplen los puntos que pertenecen a esta nueva sección cónica, es decir, definamos el lugar geométrico llamado PARÁBOLA.

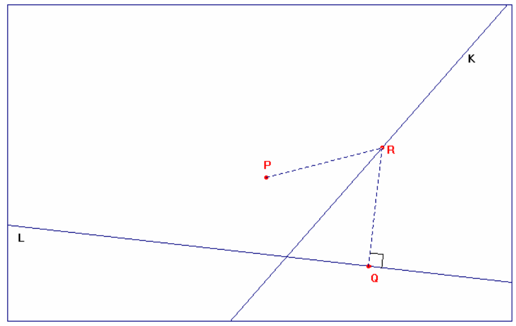
Toma una nueva hoja de papel y marca el doblez L y el punto P exterior a L. Luego señala un punto Q sobre el doblez y llévalo sobre P encontrando así el doblez K. Quedarán trazados en la hoja los siguientes elementos.



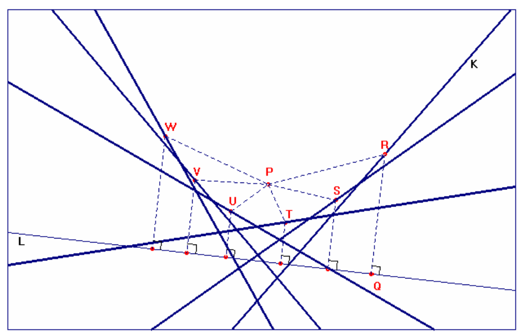
Si marcamos un punto R sobre el doblez K podemos fácilmente verificar que la distancia de P a R es igual a la distancia de R a Q ¿Cómo lo verificamos?



Para definir el lugar geométrico, tomaremos por cada punto Q marcado sobre L uno y sólo un punto R marcado sobre K. Este punto R equidistará del punto P y la recta L (Notemos que al equidistar de L también equidista de Q)
Recordemos que la distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta que pasa por dicho punto.
¿Cómo trazarías dicho segmento perpendicular doblando papel?
Luego el punto R se ubicará como se muestra en la siguiente gráfica:



Si trazamos otros puntos sobre el doblez L encontraremos, siguiendo la misma construcción anterior, otros puntos equidistantes a L y P.
A continuación se muestran los puntos R, S, T, U, V, W que equidistan de L y P.



Observa como estos puntos describen la figura en forma de U mostrada anteriormente.
Por lo tanto, **Se llama parábola al lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado FOCO y una línea recta llamada DIRECTRIZ. El punto de la parábola de menor distancia al foco y a la directriz recibe el nombre de VÉRTICE.**

¿Cuál es el foco, directriz y vértice de la parábola construida en la hoja de papel?

En la construcción de la parábola inicial, traza algunos puntos que pertenecen a ésta según lo visto anteriormente.

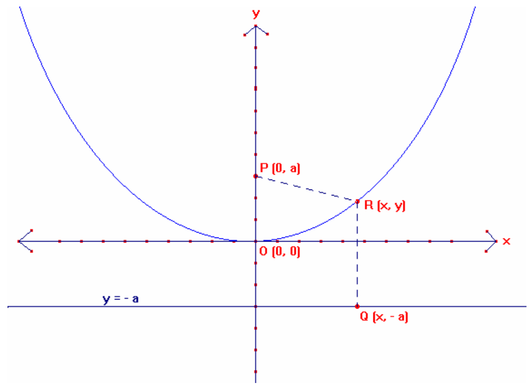
Si el papel lo permitiera, ¿podríamos encontrar más y más puntos de la parábola?
Si consideras dos puntos adyacentes de la parábola, ¿Podrías encontrar otro punto que se encuentre entre ellos? ¿Qué limitaciones encuentras en el proceso?

CONCEPTUALICEMOS

A pesar de que doblando papel podremos señalar muchos puntos que pertenecen a una misma parábola, debemos saber que una parábola es un lugar geométrico “sin huecos”, es decir, que en medio de dos puntos de la parábola siempre existirá otro.

A continuación, determinemos la condición que cumplen los puntos de coordenadas (x, y) en el plano cartesiano para que pertenezcan a una parábola con foco P y directriz L. En otras palabras, encontremos la ecuación de la parábola con foco P y directriz L.

En el plano cartesiano, consideraremos una parábola con vértice en el origen, foco P de coordenadas (0, a), la recta $y = -a$ como directriz, el punto Q de coordenadas (x , - a) perteneciente a la directriz y el punto R de coordenadas (x, y) perteneciente a la parábola.



La distancia entre los puntos P y R es $\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2}$ ¿Por qué?

La distancia entre los puntos R y Q es $\sqrt{(x-x)^2+(y+a)^2}$ ¿Por qué?

Y como el punto R pertenece a la parábola entonces equidista de los puntos P y Q. Entonces:

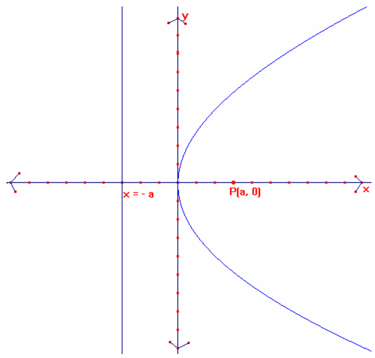
$\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+a)^2}$ elevando al cuadrado obtenemos:
$x^2+y^2-2ay+a^2=0+y^2+2ay+a^2$ sumando términos semejantes obtenemos:
$x^2=4ay$

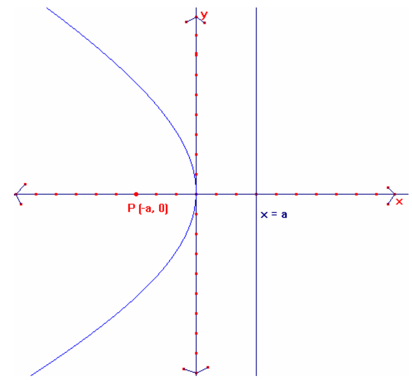
Por lo tanto, todos lo puntos de coordenadas (x, y) que cumplan con la ecuación $x^2=4ay$ pertenecerán a la parábola con foco P de coordenadas (0, a) y directriz y= - a

Ejercicio
Encuentra la ecuación de la parábola que tiene como foco el punto (0, 4) y directriz la recta y= - 4.

Haciendo el mismo procedimiento anterior, encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen, foco de coordenadas (0, - a) y directriz y= a

Una parábola también puede abrir hacia la izquierda o hacia la derecha; en este caso, escogemos los ejes X y Y, de tal manera que el foco esté en el punto P (a, 0) y la directriz tenga ecuación x = - a (parábola que abre a la derecha) o con foco (- a, 0) y directriz x = a (parábola que abre a la izquierda).





La ecuación de una parábola con vértice en el origen, foco en el punto P (a, 0) y directriz la recta x = - a es $y^2 = 4ax$ (se deja como ejercicio la verificación de la ecuación)
La ecuación de la parábola con vértice en el origen, foco en el punto P (-a, 0) y directriz la recta x = a es $y^2 = -4ax$ (se deja como ejercicio la verificación de la ecuación)

Conozcamos otros elementos de la parábola:

Eje de la parábola, es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

Cuerda, segmento de recta que une dos puntos de la parábola. Si la cuerda pasa por el foco se llama cuerda focal.

Lado recto, es una cuerda focal perpendicular al eje de la parábola.

EJERCICIO 1

1. Dibuja un plano cartesiano en la hoja de papel donde construiste la parábola de tal forma que el vértice coincida con el origen del plano y el foco esté en el eje positivo de las y.
2. Ubica en la hoja todos los elementos estudiados hasta el momento: Vértice, foco, directriz, eje de la parábola, lado recto.
3. Utilizando una regla, determina las coordenadas del foco P, la ecuación de la directriz. Halla la ecuación de la parábola.
4. ¿Cómo sería la ecuación de la parábola si el foco estuviera en el eje positivo de las abscisas (eje x) y la directriz en el lado negativo?

Ecuación de la parábola cuando el vértice no está en el origen

Cuando se conoce el vértice de coordenadas (h, k) y la directriz paralela o perpendicular al eje x, obtenemos otras ecuaciones de la siguiente forma respectivamente:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$
$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

EJERCICIO 2

1. Halla la ecuación de las siguientes parábolas dados los parámetros:
   a. Foco en (0, 3) y directriz y = - 3
   b. Foco en (0, 8) y directriz y = - 8
   c. Foco en (0, -5) y directriz y = 5
   d. Foco en (2, 0) y directriz x = - 2
   e. Foco en (-6, 0) y directriz x = 6
   f. Foco en (1, 1) y directriz y = - 1

2. Grafica las siguientes parábolas en un plano cartesiano y halla además las coordenadas del foco y vértice, la ecuación de la directriz. Señala el eje de la parábola y el lado recto.

   a. $y = x^2$
   b. $x^2 = y$
   c. $x^2 = 4y$
   d. $(x - 1)^2 = 8(y - 2)$

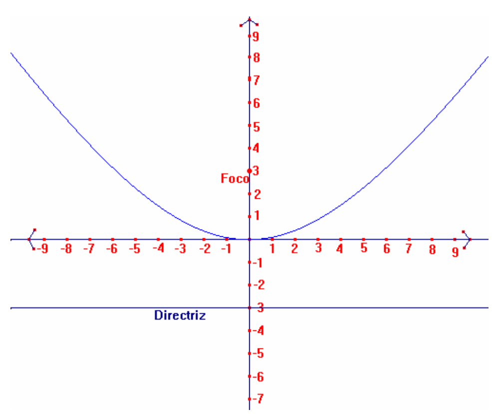
EVALUACIÓN

1. Halla la ecuación de las siguientes parábolas:
   a. Con foco en (0, 10) y directriz y = -10
   b. Con foco en (0, -9) y directriz y = 9

2. Grafica en un plano cartesiano las siguientes parábolas identificando sus características más relevantes.

   a. $x^2 = 16y$
   b. $y^2 = 24x$

3. Halla la ecuación de la siguiente parábola. Señala en la gráfica sus elementos o características relevantes.



4.3.9. Actividad 4: La Hipérbola.

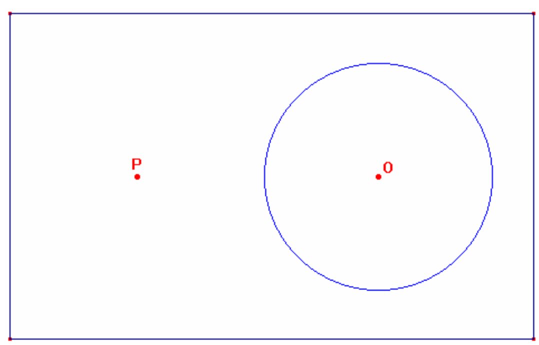
LA HIPÉRBOLA

Observa el diseño del siguiente letrero.

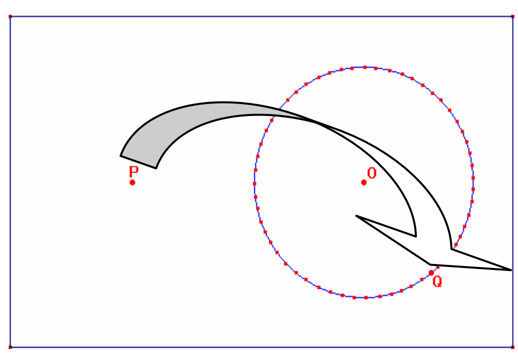
Este letrero cuyo contenido nos introduce al estudio de una nueva sección cónica, tiene un diseño bastante particular. Este se realizó utilizando la opción Insertar WordArt de Microsoft Word y seleccionando uno de los estilos allí expuestos. Este estilo se asemeja en su parte superior e inferior a una especie de HIPÉRBOLA, sección cónica en la cual centraremos nuestra atención.

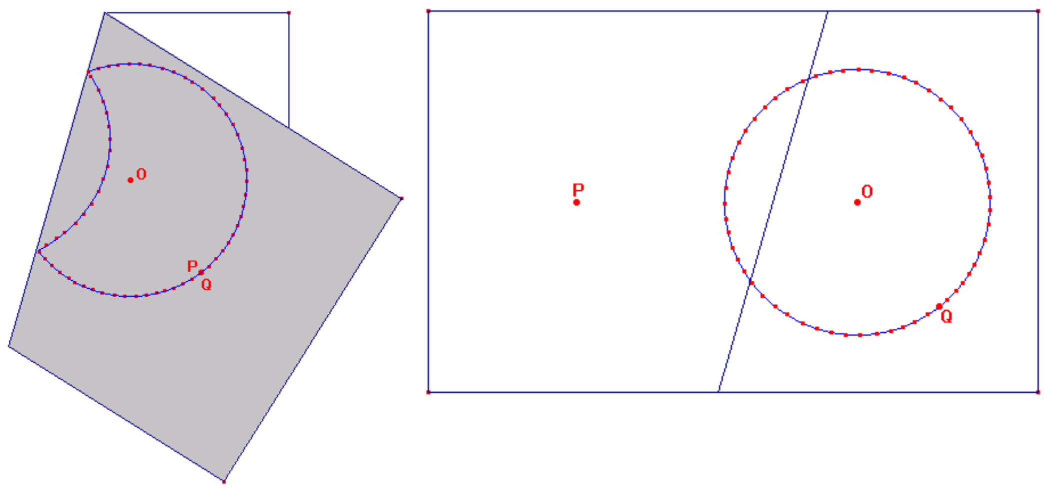
CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA DOBLANDO PAPEL

Consideremos una hoja de papel de forma rectangular (puede ser de una hoja tamaño carta) y, utilizando un compás, trace una circunferencia con centro O al lado derecho de ésta. Marque también un punto P equidistante del vértice izquierdo de la hoja y el punto más cercano de la circunferencia tal y como se observa en la figura:

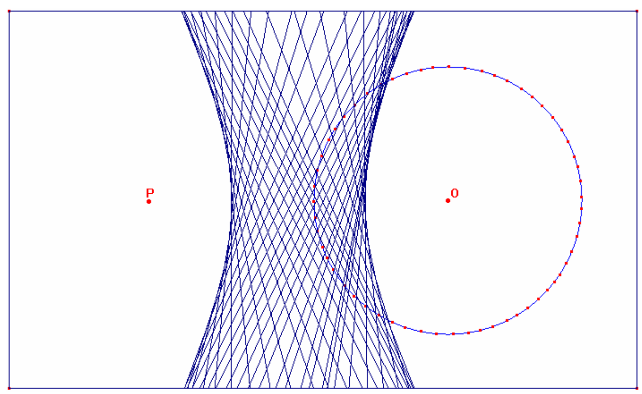


Ahora, marca puntos sobre la circunferencia con una distancia entre ellos de aproximadamente 5 milímetros. Luego, considera uno de esos puntos y llámalo Q. Lleva el punto P sobre el punto Q y traza el doblez.

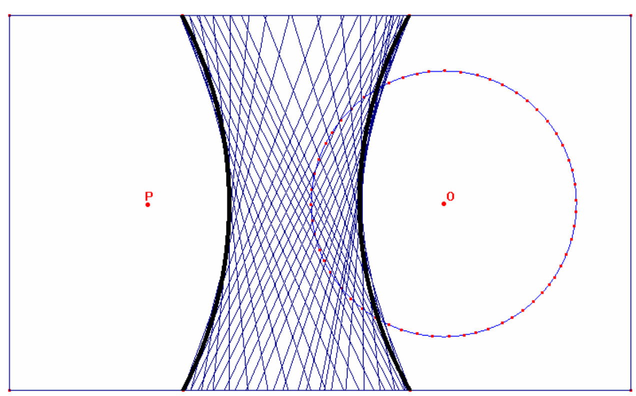




Repite el anterior proceso llevando a P sobre cada uno de los puntos marcados sobre la circunferencia. Al finalizar, se visualizará lo siguiente:

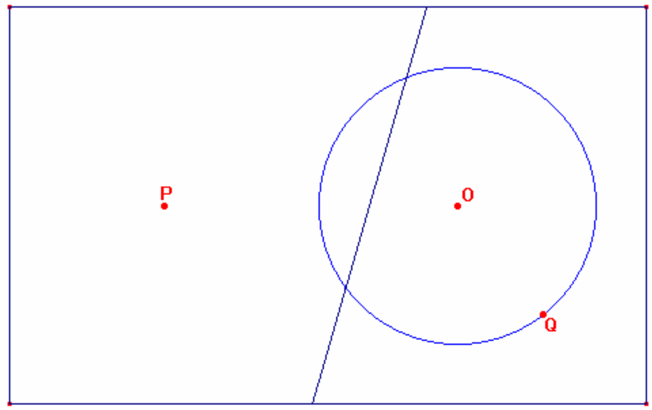


Las curvas que se señalan en la siguiente gráfica, son las RAMAS de una HIPÉRBOLA.

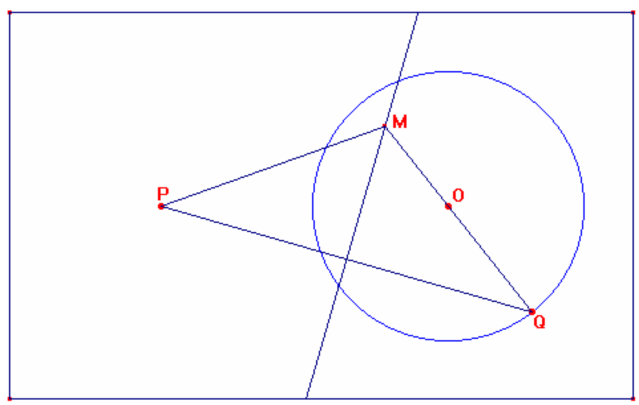


Ahora, definamos la condición que cumplen los puntos que pertenecen a esta nueva cónica. En otras palabras, definamos el lugar geométrico llamado HIPÉRBOLA.

Toma una nueva hoja de papel y traza con un lápiz la circunferencia con centro en O, el punto P, el punto Q y el doblez que se forma al llevar P sobre Q; tal y como se hizo anteriormente.

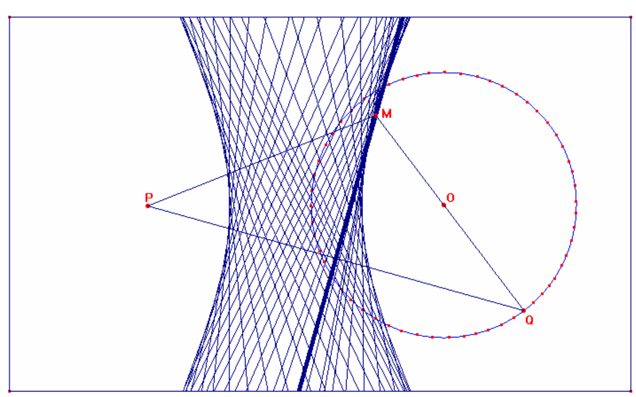


Traza el segmento PQ y el segmento QO prolongando este último hasta cortar al doblez inicial y llama M al punto de intersección. Luego, traza el segmento PM.



Notemos que por resta de segmentos QM – OM es igual a QO (radio de la circunferencia) Por lo tanto, esa resta siempre será constante. Pero el segmento QM = PM ¿Por qué?
Luego, PM – OM = Radio de la circunferencia = Constante.

Ahora, observemos que M pertenece a una de las ramas de la hipérbola.



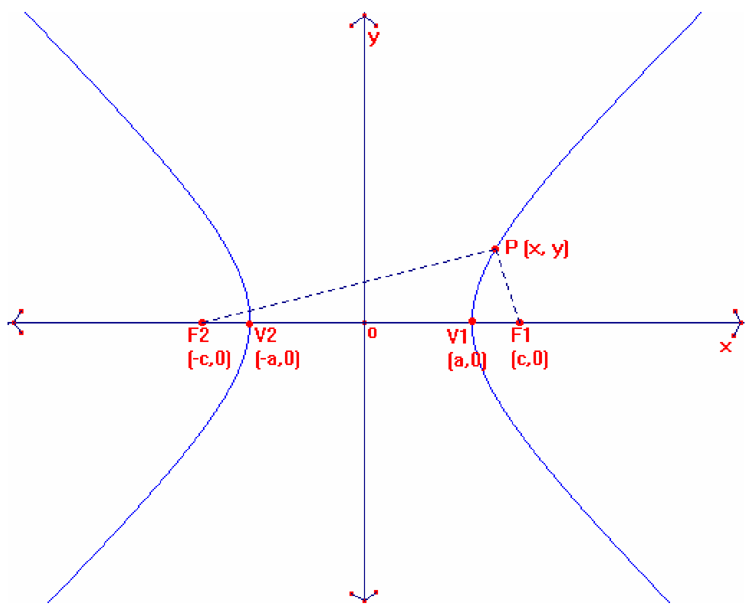
Por lo tanto, se llama HIPÉRBOLA al lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos llamados focos es CONSTANTE.

¿Cuáles son los focos de la hipérbola construida en la hoja de papel?

CONCEPTUALICEMOS

A pesar de que doblando papel podremos señalar muchos puntos que pertenecen a una misma hipérbola, debemos saber que una hipérbola es un lugar geométrico "sin huecos", es decir, que en medio de dos puntos de la hipérbola siempre existirá otro.

Considera la siguiente gráfica de una hipérbola en la cual se nombran los puntos F_1, F_2, V_1, V_2 y P.



Identifiquemos algunos ELEMENTOS de la hipérbola construida en la gráfica anterior:

Los puntos F_1, F_2 reciben el nombre de FOCOS de la hipérbola.
Los puntos V_1, V_2 reciben el nombre de VÉRTICES de la hipérbola.
La recta por donde pasan los Focos recibe el nombre de EJE FOCAL.
El segmento V_1V_2 recibe el nombre de EJE TRANSVERSO.
El eje perpendicular al eje transverso que pasa por su punto medio recibe el nombre de EJE CONJUGADO.

La longitud de cada lado recto es $2\frac{b^2}{a}$ donde $b^2 = c^2 - a^2$

Se define la EXCENTRICIDAD como $e = \frac{c}{a}$ donde $b^2 = c^2 - a^2$

Si el punto de corte entre el eje conjugado y el eje transverso es (0, 0), decimos que la hipérbola tiene su centro en el origen.

EJERCICIO 1

Traza los elementos antes mencionados en la hoja de papel donde construiste la hipérbola.

Calcula la excentricidad de esta hipérbola. ¿Cómo lo hiciste?

A continuación, encontraremos las coordenadas cartesianas (x, y) de los puntos que pertenecen a la hipérbola con centro en el origen, FOCOS F_1, F_2 y VÉRTICES V_1, V_2 tal y como se mostró en la figura anterior.

Por la definición del lugar geométrico llamado hipérbola, tenemos que:

$F_2P - PF_1$ = constante.

Llamemos esa constante $2a$ ¿Existe alguna semejanza con la constante a en la construcción de la elipse?

Por lo tanto: $F_2P - PF_1 = 2a$

Pero $F_2P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ y $PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ¿Por qué?

Después de efectuar algunas operaciones algebraicas y aritméticas, y considerando de que ahora a < c. y $b^2 = c^2 - a^2$ ¿Por qué?
Obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La dirección en que se abre la hipérbola está determinada por los signos y no por los valores de los coeficientes o de los términos que están elevados al cuadrado.

Si el eje focal coincide con el eje y, la ecuación será:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

EJERCICIO 2

Los vértices de una hipérbola son los puntos V_1 = (0, 4) y V_2 = (0, -4); sus focos los puntos F_1 = (0, 6) y F_2 = (0, -6). Hallar la ecuación de la hipérbola, la longitud de sus ejes transverso y conjugado. Calcula además su excentricidad.

EJERCICIO 3

Efectúa las operaciones aritméticas y algebraicas indicadas anteriormente para deducir la ecuación de la hipérbola de constantes a, b y c.

En la hoja de papel fue sencillo construir la hipérbola teniendo los dos focos y la circunferencia. Pero cuando estemos trabajando en un plano cartesiano, es importante tener en cuenta las siguientes construcciones para trazar una determinada hipérbola.

Construcción de las asíntotas.

La asíntota de una curva es una línea recta tal que la distancia perpendicular trazada desde la recta a un punto sobre la curva, es y permanece menor que cualquier valor positivo que se le asigne a medida que el punto en la curva se aleja indefinidamente del origen.

Existe una forma sencilla de encontrar la ecuación de las asíntotas en la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

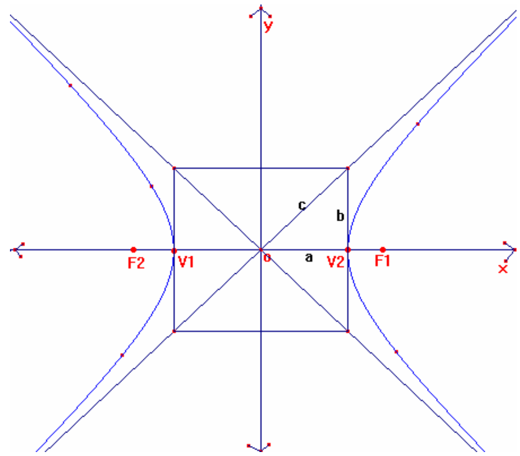
Iguala a cero el lado derecho de la anterior ecuación y luego factorice. Así obtendrás las ecuaciones de las asíntotas:

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = \frac{b}{a}x$$

De igual forma se pueden obtener las ecuaciones de las asíntotas, si la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Las asíntotas definen la forma de la curva a medida que ésta se aleja indefinidamente del origen. Así si tomamos el eje transverso $2a$ y el eje conjugado 2b, como vemos en la figura, podemos construir un rectángulo cuyo centro es el de la hipérbola y cuyos lados son 2a y 2b.



La ecuación de la hipérbola con centro en (h, k), se obtiene a partir de la traslación de ejes como se hizo con las anteriores secciones cónicas obteniendo la siguiente ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si desarrollamos los binomios y realizamos las debidas operaciones aritméticas y sustituciones por los coeficientes A, B, C, D y E, obtenemos la ecuación general de la hipérbola que es:

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

EJERCICIOS:

- Dadas las siguientes ecuaciones de hipérbolas determina las coordenadas de los vértices y focos, longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

  a) $16x^2 - y^2 = 144$
  b) $9y^2 - 16x^2 = 144$
  c) $4y^2 - x^2 = 4$
  d) $\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$
  e) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$

- Determinar la ecuación de la hipérbola si los focos son los puntos $F_1 = (0,5)$ y $F_2 = (0,-5)$, la longitud del eje transverso es 6 unidades. Dibuja la hipérbola (no olvides trazar las asíntotas para la construcción de esta cónica).

- Halle la ecuación de la hipérbola dados los siguientes datos:

  a) Vértices $V_1 = (-1, 4)$ y $V_2 = (-5, 4)$, longitud de lado recto es 5 unidades.
  b) Vértices $V_1 = (4, 4)$ y $V_2 = (4, -2)$, excentricidad es igual a: $e = 2$

- Dada la siguiente ecuación de una hipérbola $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 0$, determina 2 puntos que pertenezcan a ella. Describe el procedimiento que realizaste para encontrar dichos puntos.

EVALUACIÓN

- Dibuja en el plano cartesiano la hipérbola con ecuación: $9y^2 - 16x^2 = 1$

- Halla las coordenadas de los vértices y focos, longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad y longitud de cada lado recto de la siguiente ecuación de una hipérbola:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

- Halla vértices y focos , longitudes de sus ejes transverso y conjugado, ecuaciones de las asíntotas de la siguiente hipérbola:

$$\frac{(y+4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

4.3.10. Actividad final: Validación de la propuesta.

Para validar la propuesta, se volvieron a proponer las construcciones de la circunferencia y de la elipse. Además se retomaron algunos ejercicios de las Actividades 1 y 2.

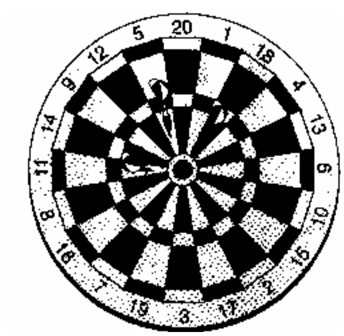
Lo nuevo de esta actividad final son los siguientes puntos:

USO DEL DOBLADO DE PAPEL EN LA CONSTRUCCIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS E IDENTIFICACIÓN DE SUS CARACTERÍSTICAS.

ACTIVIDAD FINAL

DESCRIPCIÓN DE IMÁGENES:

Observa las siguientes imágenes y trata de describir la forma que tiene cada una.



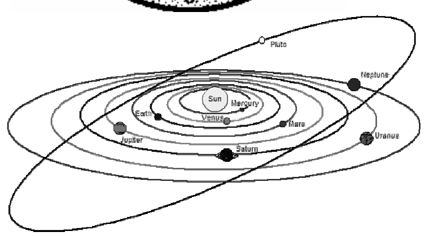
Descripción:

____

____

____

____



Descripción:

____

____

____

____

TEST

Responde con sinceridad las siguientes preguntas:

1. ¿Te parece que el doblado de papel es una buena herramienta para la enseñanza de las matemáticas? Si _____ No _____ ¿Por qué?____
____

2. ¿Te parece que el doblado de papel es una buena herramienta para la enseñanza de las secciones cónicas? Si _____ No _____ ¿Por qué?____
____

3. ¿Crees que existió (eron) algún(os) inconveniente(s) para la enseñanza de las secciones cónicas utilizando el doblado de papel? Si _____ No _____ ¿Cuál (es)?____
____

4. ¿Te sirvió la técnica del doblado de papel para el aprendizaje de las secciones cónicas?
   Si____No____ ¿Por qué?____
   ____

5. Las actividades que se hicieron para la enseñanza de las secciones cónicas doblando papel, las consideras:
   Muy adecuadas ___ Adecuadas ___ Ni adecuadas, ni inadecuadas ___ Inadecuadas ___ Muy inadecuadas ___

¡MUCHAS GRACIAS POR TU VALIOSA COLABORACIÓN!

4.4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN RECOLECTADA

4.4.1. Análisis de la Encuesta Socio – afectiva

Esta primera encuesta la presentaron 49 estudiantes.

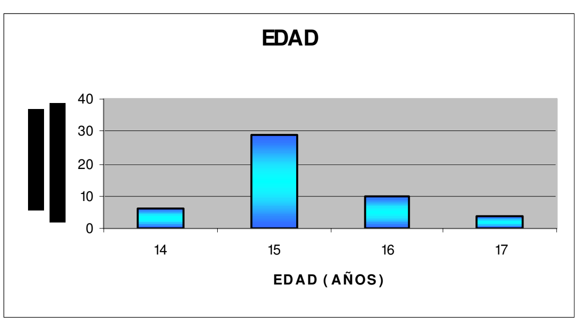
2. Edad

14 años: 6 estudiantes, 12.2%

15 años: 29 estudiantes, 59.2%

16 años: 10 estudiantes, 20.4%

17 años: 4 estudiantes, 8.2%



3. Lugar de residencia

Envigado: 15 estudiantes, 30.6%

Altos de Ayurá: 1 estudiante, 2%

Alto de Misael: 1 estudiante, 2%

San Marcos: 1 estudiante, 2%

La Sebastiana: 1 estudiante, 2%

Los Naranjos: 2 estudiantes, 4.1%

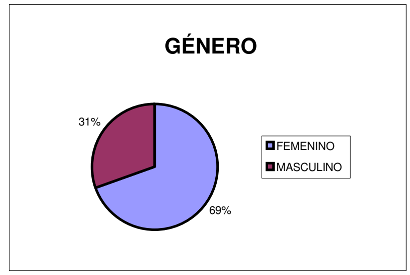
Primavera: 1 estudiante, 2%

San José: 2 estudiantes, 4.1%

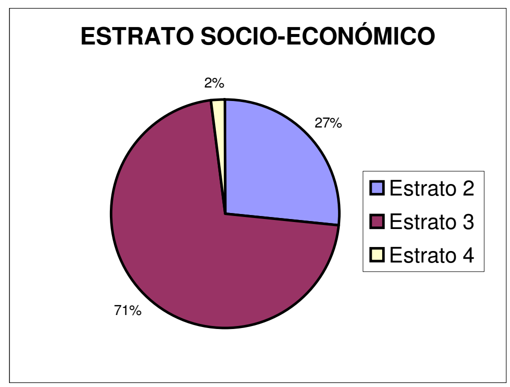
La Magnolia: 3 estudiantes, 6.1%

Barrio Mesa: 3 estudiantes, 6.1%
Alcalá: 3 estudiantes, 6.1%
Manga Azul: 3 estudiantes, 6.1%
Manuel Uribe Ángel: 3 estudiantes, 6.1%
Las Margaritas: 2 estudiantes, 4.1%
La Mina: 1 estudiante, 2%
Itagüí Guayabal: 1 estudiante, 2%
Itagüí La Esmeralda: 1 estudiante, 2%
Itagüí Yarumito: 1 estudiante, 2%
Itagüí La Hortensia: 1 estudiante, 2%
Sabaneta La Doctora: 1 estudiante, 2%
Sabaneta: 1 estudiante, 2%
No responde: 1 estudiante, 2%

4. Sexo
Masculino: 15 estudiantes, 30.6%
Femenino: 34 estudiantes, 69.4%



5. Estrato socioeconómico
Estrato 2: 13 estudiantes, 26.5%
Estrato 3: 35 estudiantes, 71.4%
Estrato 4: 1 estudiante, 2%

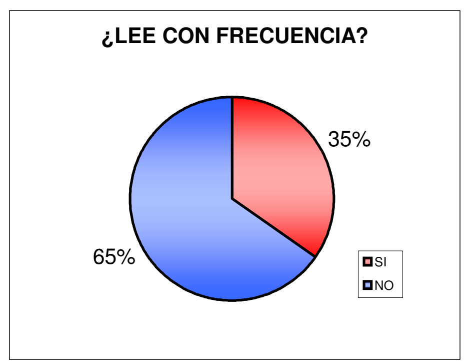


6. ¿Con quién vive?
Sólo padres: 14 estudiantes, 28.6%
Padres y hermanos: 21 estudiantes, 42.8%
Madre y hermano: 1 estudiante, 2%
Padres, tíos y hermanos: 2 estudiantes, 4.1%

Madre y su pareja: 1 estudiante, 2%
Padres, tíos, abuelos y hermanos: 3 estudiantes, 6.1%
Padres, abuelos y hermanos: 2 estudiantes, 4.1%
Madre y abuelos: 1 estudiante, 2%
Madre, abuela y tíos: 1 estudiante, 2%
Padres, hermanos, sobrinos: 1 estudiante, 2%
Tíos y hermanos: 1 estudiante, 2%
Madre y tía: 1 estudiante, 2%

7. ¿Qué actividades realiza en sus tiempos libres?
Estudiar: 21 estudiantes, 42.8%
Leer: 6 estudiantes, 12.2%
Escribir: 5 estudiantes, 10.2%
Dormir: 35 estudiantes, 71.4%
Ver TV: 40 estudiantes, 81.6%
Hacer deporte: 32 estudiantes, 65.3%
Jugar: 15 estudiantes, 30.6%
Trabajar: 1 estudiante, 2%
Otros: 11 estudiantes, 22.4%
¿Cuáles?
Cantar: 1 estudiante, 2%
Tocar la guitarra: 1 estudiante, 2%
Navegar en Internet: 1 estudiante, 2%
Salir con amigos: 1 estudiante, 2%
Escuchar música: 5 estudiantes, 10.2%
Dibujar: 2 estudiantes, 4.1%

8. ¿Lee con frecuencia?
17 estudiantes leen con frecuencia 34.7%
32 estudiantes no leen con frecuencia 65.3%



9. ¿Le gusta estudiar?
Si: 49 estudiantes
No 0 estudiantes
El 100% de los estudiantes dicen que les gusta estudiar.

10. ¿Cuáles son las materias que más le gustan?
Matemáticas: 24 estudiantes, 49%
Química: 11 estudiantes, 22.4%
Sociales: 17 estudiantes, 34.7%
Filosofía: 28 estudiantes, 57.1%
Español: 12 estudiantes, 24.5%
Física: 24 estudiantes, 49%
Historia: 9 estudiantes, 18.4%
Informática: 20 estudiantes, 40.8%
Biología: 9 estudiantes, 18.4%
Deporte: 33 estudiantes, 67.3%
Religión: 26 estudiantes, 53.1%
Idioma Extranjero: 19 estudiantes, 38.8%

11. ¿Cuáles son las materias que más le disgustan?
Matemáticas: 16 estudiantes, 32.7%
Química: 23 estudiantes, 46.9%
Sociales: 5 estudiantes, 10.2%
Filosofía: 1 estudiante, 2%
Español: 21 estudiantes, 42.9%
Física: 16 estudiantes, 32.7%
Historia: 9 estudiantes, 18.4%
Informática: 8 estudiantes, 16.3%
Biología: 7 estudiantes, 14.3%
Deporte: 7 estudiantes, 14.3%
Religión: 2 estudiantes, 4.1%
Idioma Extranjero: 19 estudiantes, 38.8%
Ninguna: 1 estudiante, 2%

El 49% de los estudiantes dicen que la Matemática es una de las materias que más les gusta, el 32.7% dicen que la Matemática es una de las materias que más les disgusta.

12. ¿Cuál es su aspiración profesional?
Médico: 14 estudiantes, 28.6%
Deportista: 3 estudiantes, 6.1%
Ingeniero: 6 estudiantes, 12.2%
Abogado: 1 estudiante, 2%

Profesor: 20 estudiantes, 40.8%
Psicólogo: 7 estudiantes, 14.3%
Otra: 22 estudiantes, 44.9%
¿Cuáles?
Comercio Exterior: 1 estudiante, 2%
Publicista: 4 estudiantes, 8.2%
Comunicador social: 4 estudiantes, 8.2%
Veterinario: 3 estudiantes, 6.1%
Criminalista: 2 estudiantes, 4.1%
Médico Forense: 1 estudiante, 2%
Administrador: 1 estudiante, 2%
Artes plásticas: 1 estudiante, 2%
Diseñador gráfico: 2 estudiantes, 4.1%
Periodista: 2 estudiantes, 4.1%
Fisioterapeuta: 1 estudiante, 2%

13. ¿Cuál es su música favorita?
Rock: 18 estudiantes, 36.7%
Pop: 25 estudiantes, 51%
Tropical: 27 estudiantes, 55.1%
Reggaeton: 36 estudiantes, 73.5%
Rap: 16 estudiantes, 32.6%
Otros: 12 estudiantes, 24.5%
¿Cuáles?
Vallenatos: 5 estudiantes, 10.2%
Música para planchar: 1 estudiante, 2%
Clásica: 1 estudiante, 2%
Hip Hop: 1 estudiante, 2%
Reggae: 1 estudiante, 2%
Electrónica: 1 estudiante, 2%
Rancheras: 1 estudiante, 2%
Punk: 1 estudiante, 2%

14. Quisiera saber más acerca de:
E1: Producción musical.
E2: Matemáticas e inglés.
E3: Física.
E4: Anatomía.
E5: La vida y sus habitantes.
E6: Las áreas de la salud y la vida.

E7: Los exámenes o pruebas ICFES e inglés, posibilidades de trabajo.
E8: La vida y quienes la conforman.
E9: La vida.
E10: No responde.
E11: Sobre estadística.
E12: Matemáticas.
E13: Informática, animales, inglés y música.
E14: Pedagogía infantil.
E15: Los enigmas sociales y éticos de la vida.
E16: Matemática e inglés.
E17: Informática.
E18: Medicina.
E19: Las autopsias.
E20: Idiomas y dibujo gráfico.
E21: Matemáticas.
E22: El fútbol.
E23: La física y las matemáticas.
E24: Las cosas sobrenaturales.
E25: Idioma extranjero.
E26: Matemáticas.
E27: Cómo podría concentrarme más y sobre otras culturas.
E28: El fútbol.
E29: Idiomas y dibujo gráfico.
E30: La vida.
E31: Inglés y dibujo gráfico.
E32: La medicina veterinaria.
E33: Matemáticas.
E34: Lo artístico.
E35: La educación sexual.
E36: Otro idioma.
E37: Sexualidad, dibujos y decoración.
E38: Filosofía.
E39: Matemáticas.
E40: Todo lo que tiene que ver con Español.
E41: La informática, la música, la matemática y el inglés.
E42: Cómo conseguir trabajo y la vida.
E43: Todo lo relacionado con la educación artística, espantos, música.
E44: Inglés y matemáticas.
E45: Las carreras universitarias que me gustan.
E46: Matemáticas para tener más facilidad.
E47: La lógica y el cálculo.
E48: Inglés y química.

E49: Los valores humanos y la filosofía.

Análisis por contenidos:

Quisiera saber más acerca de:

Algunas asignaturas que se ven en el colegio:

Matemáticas, español, informática, idioma extranjero, física, estadística, filosofía…

E2, E3, E11, E12, E16, E17, E21, E23, E25, E26, E33, E36, E38, E39, E40, E41, E44, E46, E47, E48

40.8%

Cuerpo humano.

E4, E6, E18, E19, E35, E37 (1)

12.2%

Vida.

E5, E8, E9, E15, E30, E49

12.2%

Carreras universitarias o vida laboral.

E7, E20, E29, E31, E32, E34, E37 (2), E42, E45

18.4%

Varios: música, fútbol, cosas sobrenaturales…

E1, E22, E24, E28, E43

10.2%

No responde.

E10

2%

15. Tengo facilidad para:

E1: Expresarme y ayudar a la gente.

E2: Hacer amistades, para el español, religión y ética.

E3: Matemáticas.

E4: Matemáticas y hacer deporte.

E5: Vivir por mi y ser mejor para mi familia.

E6: Matemáticas y explicarle a la gente.

E7: Matemáticas.

E8: Expresarme y ayudar a quienes lo necesitan.

E9: Hablar en público.

E10: La informática y matemáticas.

E11: Los deportes.

E12: Conseguir amigos.

E13: Hacer muñecos con plastilina.

E14: Artística, deporte y didáctica.

E15: Ayudar a las personas, ser sociable, colaboradora.
E16: Artística.
E17: Informática.
E18: El deporte.
E19: Realizar deportes.
E20: Matemáticas y física.
E21: El dibujo.
E22: El deporte.
E23: Inglés y redacción.
E24: Sociales, español y artística.
E25: Deporte.
E26: Deportes, filosofía y química.
E27: Manualidades, dibujo, pintura y natación.
E28: El fútbol.
E29: Idiomas y química.
E30: Acercarme a las personas.
E31: Inglés, informática, química.
E32: Dibujar.
E33: El deporte.
E34: El deporte.
E35: El inglés.
E36: Resolver problemas.
E37: Deportes, pintar, bailar.
E38: Dibujar, pintar, hablar inglés.
E39: La natación.
E40: Dibujar, pintar, escribir y leer.
E41: Los computadores y el inglés.
E42: Física.
E43: Dibujar, copiar.
E44: Sociales y pedagogía.
E45: Escribir y la música.
E46: Religión, ética, para los amigos y hacer planes.
E47: Entender y asimilar las cosas.
E48: Hablar, dibujar, pintar.
E49: Matemáticas y las artes.

Análisis por contenidos:

Tengo facilidad para:
Las habilidades de tipo social
E1, E2 (1), E5, E8, E9, E12, E15, E30, E46, E48 (1)
20.4%
Las habilidades de tipo intelectual
E2 (2), E3, E4 (1), E6, E7, E10, E17, E20, E23, E24, E26 (2), E29, E31, E35, E36, E38

(2), E40 (2), E42, E44, E45, E47, E49
44.9%
Las habilidades de tipo físico y manual.
E4 (2), E11, E13, E14, E16, E18, E19, E21, E22, E25, E26 (1), E27, E28, E32, E33, E34, E37, E38 (1), E39, E40 (1), E43, E48 (2)
44.9%

16. Tengo problemas en:
E1: Disciplina y mal genio
E2: Matemáticas.
E3: Inglés.
E4: Inglés y física.
E5: El amor.
E6: Expresarme bien ante el público.
E7: XXX, un poco en español.
E8: Mi genio e impaciencia.
E9: El mal genio.
E10: Inglés y sociales.
E11: El estudio.
E12: Matemáticas.
E13: Dibujar y hablar en público.
E14: Inglés, matemáticas y español.
E15: Mi timidez y que hay veces soy mal genio.
E16: Matemáticas.
E17: Inglés.
E18: Matemáticas, pero me gusta aprender.
E19: Disciplina.
E20: Disciplina.
E21: Matemáticas.
E22: Ninguna parte.
E23: Física.
E24: Inglés.
E25: Matemáticas.
E26: Matemáticas e inglés.
E27: Concentración, matemáticas y química.
E28: En el estadio.
E29: Matemáticas.
E30: Mi genio.
E31: Matemáticas.
E32: Matemáticas.
E33: Matemáticas.
E34: Inglés y matemáticas.
E35: Matemáticas.
E36: Matemáticas.
E37: Matemáticas, física, química y español.
E38: Matemáticas.
E39: Español.
E40: Matemáticas.

E41: Los cálculos y el español complejo.
E42: Memorizar cosas.
E43: Química, matemáticas, la convivencia con los demás.
E44: Matemáticas, física e inglés.
E45: El área de inglés.
E46: Matemáticas e inglés.
E47: Español y lógica.
E48: Matemáticas.
E49: Inglés y español.

Análisis por contenidos:

Tengo problemas en:
Lo social: (convivencia, mal genio, disciplina, timidez, amor, expresarse…)
E1, E5, E6, E9, E13 (2), E15, E19, E20, E30, E43 (2)
20.4%
En el estudio y/o en algunas materias: matemáticas, español, inglés, física, química…
E2, E3, E4, E7, E10, E11, E12, E14, E16, E17, E18, E21, E23, E24, E25, E26, E27, E29, E31, E32, E33, E34, E35, E36, E37, E38, E39, E40, E41, E42, E43 (1), E44, E45, E46, E47, E48, E49
75.5%
En particular en matemáticas:
E2, E12, E14, E16, E18, E21, E25, E26, E27, E29, E31, E32, E33, E34, E35, E36, E37, E38, E40, E41, E43, E44, E46, E47, E48
51%

Otros.
E13 (1), E22, E28
6.1%

Conclusiones de la encuesta Socio – afectiva:
Nos encontramos un grupo un poco heterogéneo.
De las encuestas se puede extraer que la mayoría de los estudiantes son mujeres (69.4%), que viven con sus padres y hermanos (42.8%), su estrato socio económico es 3 (71.4%) y la edad más frecuente es 15 años (59.2%).

Lo que los estudiantes más hacen en su tiempo libre es ver televisión (81.6%), hacer deporte (65.3%) y estudiar (42.8%). La música favorita es reggaeton (75.3%), tropical (55.1%), pop (51%) y rock (36.7%).

A nivel académico, se puede extraer que a la gran mayoría le gusta estudiar (100%) pero no leen con frecuencia (65.3%). Las materias que más les gusta son deporte (67.3%), filosofía (57.1%), religión (53.1%), matemáticas y física (cada una 49%). Las materias que más les disgusta son química (42.9%), español (42.9%) e idioma extranjero (38.8%).
Es importante destacar en este punto que no estamos frente a un grupo que no le disgusta la matemática, pero que tiene problemas con ella (51%). He aquí un gran problema.
La aspiración profesional general del grupo es docencia (40.8%) y medicina (28.6%).

En las tres preguntas abiertas "me gustaría saber más acerca de", "tengo facilidad para" y "tengo problemas en", los estudiantes respondieron:
40.8% quisieran saber más acerca de algunas asignaturas como matemáticas, español, informática, idioma extranjero, física, estadística…
En particular el 20.4% quisieran saber más acerca de matemáticas.
El 18.4% quisieran saber más acerca de algunas carreras universitarias y el campo laboral.
44.9% tienen facilidad para las habilidades de tipo intelectual, en particular, el 14.3% tienen facilidades para las matemáticas.

44.9% tienen facilidad para las habilidades de tipo físico y manual.
75.5% tienen problemas en el estudio y en algunas asignaturas. Parece ser que el 51% tiene problemas en matemáticas.
20.4% tienen problemas en la parte social: convivencia, mal genio, amor, entre otros.

Para alcanzar nuestras metas con el doblado de papel, es importante que algunos estudiantes tengan habilidades intelectuales y motrices, además de estar interesados en el área de matemáticas. Es fundamental tener en cuenta también que para el grupo, el estudio se ve relegado a un segundo plano. Por lo tanto, se deben planear actividades dentro de la jornada académica, pues tal parece que los estudiantes en su tiempo libre no realizan ningún tipo de trabajo intelectual.

Hay concordancia entre el número de registros que tienen que ver con el querer saber más sobre matemáticas (10/49) y las facilidades para las mismas (7/49).

Se observa que más de la mitad de los estudiantes reconocen tener problemas con las matemáticas (51%).

4.4.2. Análisis de la Encuesta Académica

Los objetivos específicos de esta segunda encuesta eran:

- Identificar el gusto de los estudiantes por las metodologías empleadas por los docentes en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en general.
- Identificar los materiales utilizados en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en general, por algunos educadores de Instituciones Educativas públicas del Valle de Aburrá a través de sus estudiantes.

10C empezó con 50 estudiantes. Durante el año, cancelaron 6 estudiantes. El grupo tiene entonces a la fecha 44 estudiantes.

De esos estudiantes, presentaron la encuesta sólo 34. Algunos de los que no la presentaron, tenían permiso para estar en una reunión. Los demás no asistieron a clase.

Teniendo en cuenta ese dato, vamos a tomar como muestra los 34 estudiantes que presentaron la encuesta.

1. Edad:

2 tienen 14 años 5.9%
14 tienen 15 años 41.2%
12 tienen 16 años 35.3%
5 tienen 17 años 14.7%
1 tiene 18 años 3%

2. Sexo:

9 son de sexo masculino. 26.5%
25 son de sexo femenino. 73.5%

3. ¿Le agradan las matemáticas?

Si: 28 estudiantes. 82%
No: 6 estudiantes. 18%

¿Por qué?

Si:

E1: Ayuda a mi aprendizaje lógico cognitivo.
E2: Desde que estoy estudiando esto es lo que más entiendo.
E3: Me sirven para la vida diaria.
E4: Porque aunque hay veces no la entiendo me agradan y siempre busco encontrarle un entendimiento,
E5: Porque se me hace fácil entenderla.
E6: Es muy práctica para la vida.
E7: Son una forma de pasar el tiempo y es muy buena para el pensamiento lógico.
E8: No responde.
E9: Son muy interesantes y de gran utilidad para nuestra vida cotidiana.
E10: Porque puedo aprender mucho más y me ayuda a desarrollar más mi forma de pensar.
E11: La matemática de este grado es muy interesante y la forma de enseñanza ha sido muy didáctica, lo que hace que le coja gusto.
E12: Las necesito para mi vida cotidiana y sólo es práctica constante.

E13: Necesitamos saber la solución de problemas matemáticos que ayuden en lo cotidiano.
E14: Ayudan a desarrollar mis habilidades mentales.
E15: Considero que son de gran ayuda para muchos aspectos de mi vida.
E16: Me permiten el análisis y la reflexión de acontecimientos, aportándome para un crecimiento personal.
E17: Porque aunque hay cosas que no entiendo, son la base para toda carrera universitaria.
E18: Porque nos ayuda a desarrollar la lógica y la capacidad pensante.
E19: Nos concentramos en la clase y porque es fácil, sólo es cuestión de práctica.
E20: Porque entiendo la mayoría de las veces y ésta se necesita para cualquier carrera.
E21: Mi carrera requiere de esta materia, así que me gusta mucho esta materia.
E22: Porque es algo que necesitamos para ser alguien en la vida.
E23: Estas nos permiten saber muchas cosas.
E24: Pero depende de quien la enseñe.
E25: Gracias a esta me puedo desempeñar bien en las diferentes situaciones de mi vida.
E26: Porque creo que son muy esenciales para la vida y porque todo gira en torno a ellas.
E27: Porque aunque algunas veces no entiendo, pienso que son muy buenas.
E28: Porque me entretienen y me ponen a pensar, a trabajar mi mente en los tiempos libres.

Análisis por contenidos.

Porque las entiende:
E2, E4, E5, E20 (1)
11.8%
Porque desarrollan el pensamiento lógico:

E1, E7, E10, E14, E16, E18, E28
20.6%
Porque sirven para la vida.
E3, E6, E9, E12, E13, E15, E17, E20 (2), E21, E25, E26
32.4%
Otros:
E8, E11, E19, E23, E24, E27
17.6%

No:
E29: No me gusta.
E30: Porque no entiendo mucho que digamos.
E31: La mayoría de veces no entiendo, entonces no me gustan.
E32: Hay que pensar mucho y me producen dolor de cabeza, pero en ocasiones me gustan.
E33: Desde octavo no entiendo prácticamente nada, aunque últimamente más o menos.
E34: No me va bien y no las entiendo.

Análisis por contenidos.

Porque no las entiende:
E30, E31, E33, E34
11.8%
Por otras razones:
E29, E32
5.9%

4. ¿Su dedicación en la clase de matemáticas es?
Muy buena: 7 estudiantes. 20.6%
Buena: 21 estudiantes. 61.8%
Regular: 5 estudiantes. 14.7%
Mala: 1 estudiante. 3%
Muy mala: 0 estudiantes

5. ¿Su dedicación extraclase al estudio de las Matemáticas es?
Muy buena: 4 estudiantes, 11.8%
Buena: 10 estudiantes, 29.4%
Regular: 16 estudiantes, 47.1%
Mala: 4 estudiantes,11.8%
Muy mala: 0 estudiantes

6. ¿La metodología del profesor que más le ha gustado es?

Con talleres, módulos o guías: 8 estudiantes. 23.5%
Con exposición del docente: 3 estudiantes. 8.8%
Con exposición de los estudiantes: 0 estudiantes.
Con otras actividades: 2 estudiantes. 5.9%
Con talleres, módulos o guías y con exposición del docente: 12 estudiantes. 35.3%
Con talleres, módulos o guías y con otras actividades: 3 estudiantes. 8.8%
Con exposición del docente y otras actividades: 3 estudiantes. 8.8%
Con talleres, módulos o guías, con exposición del docente y otras actividades: 2 estudiantes. 5.9%
Con talleres, módulos o guías, con exposición del docente, con exposición de los estudiantes y otras actividades: 1 estudiante. 3%

¿Cuáles?
Con dinámicas que no se salgan del tema.
Con temas en clase.
Actividades lúdicas fuera del aula de clase.
Salir a trabajar en el campo.
Investigar y depués explicación de la profe.
Origami y otras en donde el estudiante se divierte pensando.
Origami y trabajos de campo.
Con material didáctico como dibujos, doblados, etc.
Participando y haciendo ejercicios mientras se explica.
Actividades de lógica.

7. ¿Le gusta recibir clases de matemáticas?
En las primeras horas de la jornada: 26 estudiantes, 76.5%
En las últimas horas de la jornada: 1 estudiante, 3%
En las horas centrales de la jornada: 5 estudiantes, 14.7%
A ninguna hora: 1 estudiante, 3%
En las primeras horas y en las horas centrales: 1 estudiante, 3%

8. ¿Qué jornada prefiere para estudiar matemáticas?
Mañana: 32 estudiantes, 94.1%
Tarde: 0 estudiantes.
Noche: 0 estudiantes.
Ninguna: 1 estudiante, 3%
Mañana y noche: 1 estudiante, 3%

9. ¿Actualmente, la metodología de su profesor de matemáticas es?
Con talleres, módulos o guías: 6 estudiantes, 17.6%
Con exposición del docente: 1 estudiante, 3%
Con exposición de los estudiantes: 0 estudiantes.
Con otras actividades: 2 estudiantes: 0 estudiantes.
Con talleres, módulos o guías y con exposición del docente: 24 estudiantes. 70.6%
Con talleres, módulos o guías y con otras actividades: 0 estudiantes.
Con exposición del docente y otras actividades: 0 estudiantes.
Con talleres, módulos o guías, con exposición del docente y otras actividades: 2 estudiantes, 5.9%
Con talleres, módulos o guías, con exposición del docente, con exposición de los estudiantes y otras actividades: 1 estudiante, 3%

¿Cuáles?
Participación, entrega de cuadernos, proyectos.
Quiz.
Salidas y dinámicas matemáticas.

10. ¿El proceso de evaluación en matemáticas lo valora?
Muy adecuado: 20 estudiantes, 58.8%
Adecuado: 14 estudiantes, 41.2%
Ni adecuado, ni inadecuado: 0 estudiantes.
Inadecuado: 0 estudiantes.
Muy inadecuado: 0 estudiantes.

11. ¿Ha sido evaluado en matemáticas con?

Talleres: 0 estudiantes.

Proyectos: 0 estudiantes.

Evaluaciones de periodo: 0 estudiantes.

Quices: 0 estudiantes.

Trabajos en equipo: 0 estudiantes

Entrega del cuaderno: 0 estudiantes.

Participación: 0 estudiantes.

Otras actividades: 0 estudiantes.

Con todas las opciones: 20 estudiantes, 58.8%

Talleres, evaluaciones de periodo, quizes, trabajos en equipo, entrega del cuaderno y participación: 8 estudiantes, 23.5%

Talleres, proyectos, evaluaciones de periodo, quizes y entrega del cuaderno: 1 estudiante, 3%

Talleres, evaluaciones de periodo, quizes, entrega del cuaderno y participación: 1 estudiante, 3%

Talleres, evaluaciones de periodo, quices, trabajos en equipo y entrega del cuaderno: 1 estudiante, 3%

Talleres, evaluaciones de periodo, quices y trabajos en equipo: 1 estudiante, 3%

Evaluaciones de periodo, quizes y trabajos en equipo: 1 estudiante, 3%

Talleres, proyectos, evaluaciones de periodo, quizes, entrega del cuaderno, participación y otras actividades: 1 estudiante, 3%

Talleres, evaluaciones de periodo, quizes, trabajos en equipo, entrega del cuaderno y participación: 1 estudiante, 3%

Con otras actividades ¿cuáles?

Tareas.

Doblado de papel y más.

Exposiciones.

Origami.

Origami y salidas de proyectos.

12. ¿En la clase de matemáticas se utilizan materiales como?
Libro guía: 2 estudiantes, 5.9%
Software educativo: 0 estudiantes.
Guías: 3 estudiantes, 8.8%
Internet: 0 estudiantes.
Otros materiales: 0 estudiantes.
Libro guía, guías, Internet y otros materiales: 3 estudiantes, 8.8%
Libro guía y guías: 7 estudiantes, 20.6%
Libro guía, guías e Internet: 5 estudiantes, 14.7%
Guías y otros materiales: 1 estudiante, 3%
Guías e Internet: 1 estudiante, 3%
Libro guía e Internet: 1 estudiante, 3%
Libro guía, guías y otros materiales: 8 estudiantes, 23.5%
Libro guía y otras actividades: 3 estudiantes, 8.8%

¿Cuáles?
Triángulos de papel, transportadores en madera.
Objetos de la vida cotidiana, haciendo proyectos con éstos.
Salir afuera del salón y mirar los espacios del colegio.
Triángulos de papel, transportador y calculadora (2).
Documentos.
Calculadora científica (2).
Fotocopias de talleres (3).
Papel iris para las razones trigonométricas.
Origami
Calculadora, transportador, compás, reglas, papeles, etc. (2)

13. ¿Ha recibido clases de matemáticas con algún tipo de actividades lúdicas?
Si: 31 estudiantes 91.2%
No: 3 estudiantes. 8.8%
¿Cuáles?
E1: Salidas por el colegio localizando ejercicios.
E2: Origami e historias lógicas lúdicas.
E3: Con actividades al aire libre de los ángulos.

E4: Salir a la cancha a medir superficies y crear problemas.
E5: Materiales como el papel.
E6: Haciendo un proyecto de cómo encontrar varias medidas en algún lugar del colegio.
E7: Ir a la cancha y sacar problemas de distancias con los objetos que allí se veían.
E8, E9: Trabajo de campo (2).
E10: Ir al patio.
E11: Cuando medíamos ángulos agudos que en la cancha encontrábamos.
E12: En la ocasión que vimos los inicios de las razones trigonométricas.
E13: En una ocasión doblado de papel.
E14: Ir al patio y sacar un problema de la cancha.
E15: Elaborar figuras geométricas en papel.
E16: Salidas afuera.
E17: Juegos, trabajos dinámicos.
E18: Ir al patio a medir varios objetos.
E19, E20, E21: Doblado de triángulo, medición de ángulos y guías (3).
E22: Actividades de lógico – pensamiento y con “salidas pedagógicas”.
E23: Realizando proyecto en el medio natural (fuera del salón).
E24: Doblado de papel y buscar la h., c.o, c.a, etc.
E25: Doblado de papel y trabajos al aire libre.
E26, E27: Cuando fuimos al patio e inventamos un problema trigonométrico (2).
E28: El origami y juegos de razonamiento.
E29: Juegos de razonamiento, salidas pedagógicas, etc.
E30: La salida al patio para realizar un trabajo de medidas.

Análisis por contenidos.

Salidas al patio para hacer mediciones:
E1, E3, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E14, E16, E18, E19 (2), E20 (2), E21 (2), E22 (2),

E23, E25 (2), E26, E27, E29 (2), E30

64.7%

Doblado de papel:

E2 (1), E5, E13, E15, E19 (1), E20 (1), E21 (1), E24, E25 (1), E28 (1)

29.4%

Problemas lógicos:

E2 (2), E22 (1), E28 (2), E29 (1)

11.8%

Otros:

E12, E17

5.9%

14. ¿En la clase de matemáticas ha hecho algún tipo de construcciones con materiales tangibles?

Si: 31 estudiantes, 91.2%

No: 3 estudiantes, 8.8%

¿Cuáles?

E1, E2, E3: Con triángulos hechos en cartulina (3).

E4, E5, E6, E7, E8: Figuras con papel iris, regla, compás, calculadora (5).

E9: Con unos cuadritos.

E10: Con regla, con origami, con papel y ángulos.

E11, E12, E13: Papel (3).

E14, E15: Compás y regla (2).

E16: Compás.

E17, E18: Origami (2).

E19: Ángulos.

E20: Cartón paja y cartulina.

E21: Papel iris.

E22, E23, E24: Regla, compás, transportador, calculadora (3).

E25: Papel, compás, transportador, etc.

E26: Realizar cuadrados y hallar sus lados, etc.

E27: Utilizando papel y otros instrumentos.

E28: Un cuadro en papel para encontrar área y perímetro.

15. ¿Ha recibido alguna clase de matemáticas en la que se manipule una hoja de papel para hacer algún tipo de mostración?

Si: 32 estudiantes, 94.1%

No: 2 estudiantes, 5.9%

16. ¿Le parece que el doblado de papel podría ser una buena herramienta para la enseñanza de la matemática?
Si: 32 estudiantes, 94.1%
No: 2 estudiantes, 5.9%
¿Por qué?
Si
E1: Nos ayuda de una forma más dinámica a aprender.
E2: Uno se entretiene.
E3: Se haría de una manera más lúdica y fácil de aprender.
E4, E5: Puede hacer figuras geométricas (2).
E6: No sólo sabríamos doblar sino con esto hacer muchas cosas más.
E7: Es una forma más lúdica de aprender.
E8: La hace más dinámica.
E9: Ayuda con el afianzamiento y entretiene.
E10: Sería menos numérica y con estas manualidades podemos entender más los problemas.
E11: Porque es una metodología nueva y creativa.
E12, E13: Mediante ésta se crea más interés por el área (2).
E14: Ya que es muy didáctico.
E15: Hace muy buenas demostraciones.
E16: Aprendemos figuras geométricas lúdicamente.
E17: Es más fácil aprender con práctica.
E18: Porque es otra manera de aprender.
E19: Porque sería una manera más lúdica de aprenderlas.
E20: Se practica la elaboración de objetos y cosas.
E21: Las clases serían más dinámicas y más interesantes.
E22: Con estos podemos hacer demostración de triángulos y muchas cosas.
E23: Nos relaja un poco y a la vez aprendemos.
E24: Es más didáctico y nos orienta hacia la utilidad en uso cotidiano.
E25: Atrae más nuestra atención.

E26: Es una forma didáctica que atrae la atención del alumno.
E27: Nos ayuda a captar.
E28: Le pondría más atención y ganas de estudiar.
E29: Nos permite identificar y demostrar el proceso.

Análisis por contenidos.

Porque ayuda a tener más interés por el área:
E12, E13, E21, E25
11.8%
Porque es una forma dinámica de aprender.
E1, E3, E7, E8, E10, E16, E17, E18, E19, E23, E27, E29
35.3%
Porque entretiene:
E2, E9
5.9%
Porque se pueden hacer demostraciones, figuras, objetos o cosas:
E4, E5, E6, E15, E20, E22, E29
20.6%
Porque es didáctico:
E11, E14, E24, E26
11.8%

No
E30: Prefiero los métodos tradicionales de enseñanza.

17. ¿Cree que existe(n) algún(os) inconveniente(s) para enseñar matemáticas utilizando el doblado de papel?
Si: 8 estudiantes, 23.5%
No: 26 estudiantes, 76.5%

¿Cuál(es)?
E1: Que de pronto las enseñanzas no queden muy claras.
E2: Que hay personas que lo toman como un juego y no encuentran en este un medio de aprendizaje.
E3: Que no entendamos y lo hagamos mal.
E4: La concentración por parte de algunos compañeros.
E5: Que nos enredemos más.
E6: La falta de colaboración por parte de los alumnos.
E7: Falta de materiales.

E8: La concentración por parte de algunos estudiantes.

E9: La agilidad del estudiante para doblar en forma correcta.

Conclusiones finales de la segunda encuesta.

Esta segunda encuesta nos arrojó datos demasiado importantes para nuestra investigación con respecto al doblado de papel.

En primera instancia se nota que a la mayoría de los estudiantes les agrada las matemáticas (82%) porque creen que ayudan a desarrollar el pensamiento lógico y porque son importantes para la vida, lo que es un buen comienzo para nosotros.

La dedicación a la clase de matemáticas por parte de los estudiantes es buena (61.8%), sin embargo, su dedicación extra es más bien regular (47.1%).

Este grupo coincide en que la metodología del profesor que más le ha gustado es con talleres, módulos o guías y con exposición del docente; además dicen que esta es la metodología que recibieron en el grado décimo en el año 2006. Tal parece que a 10C le agrada el trabajo en equipo y los métodos tradicionales de enseñanza como exposición del docente. Algo extraño para un grupo hoy en día.

El proceso de evaluación de los estudiantes durante el 2006 fue valorado en general como muy adecuado (58.8%) y adecuado (41.2%). Las actividades que se realizaron para dicha valoración fueron: talleres, proyectos, evaluaciones finales de periodo, quices, trabajo en equipo, entrega de cuaderno y participación.

Los materiales más utilizados en las clases recibidas en el año 2006 fueron libro guía, guías y otros materiales como: regla, compás, calculadora, hojas de papel, cartulina, transportador, entre otros. Además, se realizaron actividades lúdicas como salidas al patio para hacer mediciones y doblado de papel para hacer algunas mostraciones.

Los estudiantes reconocen una metodología tradicional en la enseñanza del profesor (talleres, módulos, guías, exposición). Desde este nivel consideran que la evaluación es adecuada, cuyas modalidades son las tradicionales.

Finalmente, la parte más interesante es que los estudiantes coincidieron en que el doblado de papel podría ser una buena herramienta para la enseñanza de las matemáticas porque consideran que es una forma dinámica de aprender (35.3%), porque entretiene (5.9%), porque se pueden hacer demostraciones, figuras, objetos o cosas (20.6%) y porque es didáctica (11.8%).

También, el 23.5% de los estudiantes dicen que pueden existir inconvenientes al enseñar matemáticas utilizando el doblado de papel porque es posible que el tema no quede bien claro, no haya un buen entendimiento, los estudiantes no colaboren con la disciplina, que se tome como un juego o que sencillamente algunos estudiantes no tengan habilidades motrices para el doblado.

4.4.3. Análisis de las Entrevistas

PROFESOR FABIÁN BRAND

Institución Educativa Normal Superior de Envigado

1. ¿Enseña Geometría Analítica en el grado décimo?

   Si, me parece que es importante trabajar la geometría y por lo tanto lo hago.

2. Si la pregunta anterior es afirmativa entonces: ¿Cuánto tiempo dedica a la enseñanza de este tema?

   La verdad no mucho tiempo. Generalmente la última parte del año, digamos el último mes o si hay tiempo, eventualmente se hace más.

3. ¿Qué orden sigue para enseñar las secciones cónicas con respecto a los contenidos? ¿Por qué?

   Inicialmente trabajamos lo que es las fórmulas básicas para distancia, punto medio, la ecuación de la circunferencia y ya después todo lo relacionado con la línea recta. Y ya después de que los estudiantes hayan trabajado problemas de línea recta, rectas paralelas, perpendiculares, etc, se trabaja lo que es la parábola, la elipse y la hipérbola. Básicamente eso, aunque la hipérbola no se trabaja mucho. No hay tiempo, se hace muy extenso. Se trata de llegar hasta la elipse.

4. ¿Qué materiales de apoyo utiliza para la enseñanza de las secciones cónicas? Dentro de esos materiales, ¿ha utilizado algún software educativo aplicable a la enseñanza de las secciones cónicas?

   Escaso. Lengua, tablero y tiza.

   Generalmente, en el caso de la parábola me gusta que los estudiantes la construyan a partir de la definición, digamos con una escuadra buscando que las distancia, es decir los puntos que ellos construyan estén a una misma distancia de una recta que es la directriz y a un punto que es el foco sea la misma. Con el compás y la escuadra hacen los puntos. Parte geométrica de la parábola.

   La elipse, hago algo parecido, pero con una cuerda, se ubican los puntos fijos con clavos, en el piso para que se vea más grande.

   La circunferencia con una cuerda, más fácil, más sencillo como si fuera un compás. Así se trabaja.

Software no he utilizado.

5. ¿Qué actividades realiza para orientar la enseñanza de las secciones cónicas? En caso de no mencionarse un ANP, entonces preguntar: ¿Elabora algún tipo de actividad diagnóstico o algún aseguramiento del nivel de partida?

   Tomando como una actividad las construcciones mencionadas con materiales concretos.

   Las actividades que traen los textos escolares: deducir la ecuación canónica a partir de algunos elementos previamente dados o viceversa, partiendo de la ecuación canónica hallar los elementos: directriz…

   Más que todo a nivel del tratamiento de las ecuaciones.

   Diagnóstico: Asegurarme de que los estudiantes manejen por ejemplo la ecuación de segundo grado y algunas formas de factorización. Sobre la marcha trato de ir llenando los vacíos que hayan porque el tiempo no me permite hacer un repaso muy amplio de los temas previos.

6. En el estudio de las secciones cónicas, ¿se centra más en las ecuaciones canónicas o se centra en su representación gráfica o en ambos? ¿Por qué? Entonces, ¿qué debería ser primero: representación gráfica y después la ecuación general de las secciones cónicas o viceversa? ¿Por qué?

   Trabajo las dos cosas al mismo tiempo.

   A partir de la representación gráfica que los estudiantes puedan deducir ecuaciones canónicas y viceversa. Interactuando con esas dos maneras.

Indiscutiblemente es más importante la representación gráfica y cuando el estudiante ya tenga una claridad sobre la representación gráfica y ya se haya adiestrado en eso pues ya se le puede pedir que manipule más las ecuaciones. Pero pienso que lo básico es que maneje las representaciones gráficas.

7. ¿Qué actividades realiza para orientar el proceso de evaluación del tema Secciones cónicas?
   Generalmente se utilizan los ejercicios guías.
   Los mismos ejemplos elaborados en clase, pero presentados de una manera como diferente. En los que el estudiante tenga que aportar algo o analizar un poco. Generalmente se cae en la rutina: por ejemplo en la parábola preguntar por foco, directriz, el vértice. Se le da la ecuación para encontrar una serie de elementos que uno le pide. Forma general de evaluarlo.

   No se evalúa con gráficas en papel milimetrado ni con trabajos de ese tipo. Aunque considero que no deja de ser importante explorar la parte de la capacidad para que los estudiantes grafiquen.

8. ¿Cree que la metodología utilizada para la enseñanza de las secciones cónicas favorece el aprendizaje de las mismas por parte de los estudiantes? ¿Por qué?
   Creo que no es muy favorable, pues se ha notado que en muchas ocasiones los estudiantes se aprenden de memoria las ecuaciones sin llegar a comprenderlas realmente. Es decir, se dedican a la aplicación de ciertos algoritmos y no interiorizan los conceptos. Pienso que se podría pensar en otro tipo de metodologías, creo que sería importante.

9. ¿Cree usted que se pueda utilizar el doblado de papel para enseñar las secciones cónicas? En caso afirmativo, ¿Cómo?
   Creo que si se puede utilizar. Pero la verdad, no sé a ciencia cierta, pues no tengo como un conocimiento o la capacidad para ejecutar ese trabajo con los estudiantes.

10. ¿Qué problemas cree que pueden aparecer al utilizar el doblado de papel como herramienta para la enseñanza de las secciones cónicas?
    El problema podría ser que generalmente los estudiantes el doblado de papel lo cojan como una actividad muy lúdica. De pronto pudieran pensar los estudiantes que la actividad no es como para un aprendizaje concreto en el área de las matemáticas, sino que es algo para divertirse. Pienso que eso es un obstáculo.

11. Si su respuesta anterior es positiva, ¿cómo cree que se podrían resolver dichos problemas?
    Si uno trata como de primero orientar al estudiante y mostrarle la importancia de lo que se va hacer y cómo se va a hacer, podría que esa dificultad fuera superada y se le diera la seriedad pues al trabajo.

PROFESOR FERNANDO

INSTITUCIÓN: I. E. JOSÉ ANTONIO GALÁN

1. ¿Enseña Geometría Analítica en el grado décimo?
   Si.

2. Si la pregunta anterior es afirmativa entonces: ¿Cuánto tiempo dedica a la enseñanza de este tema?
   Aproximadamente 2 meses

3. ¿Qué orden sigue para enseñar las secciones cónicas con respecto a los contenidos? ¿Por qué?

   Distancia entre 2 puntos, coordenadas del punto medio, línea recta (conocidos 2 puntos; punto y pendiente; pendiente e intercepto con el eje Y, rectas normales, rectas paralelas, etc.). Luego paso a la parábola, la elipse y finalmente la hipérbola.

   ¿Por qué?

   - Es como un orden en que se dan los temas cuando estudié en la universidad.
   - Concuerda con la gran cantidad de textos que he podido observar.
   - Es un orden natural de cada tema que sirve de base para el siguiente.

4. ¿Qué materiales de apoyo utiliza para la enseñanza de las secciones cónicas? Dentro de esos materiales, ¿ha utilizado algún software educativo aplicable a la enseñanza de las secciones cónicas?

   - Copias de textos.
   - talleres que elaboro
   - talleres tipo Icfes
   - En algunos temas investigan los alumnos antes de abordar el tema.

   Acerca del software

   - No pero he observado algunos como el Derive en la Universidad Nacional, para mirar la posibilidad de implementarlo en el aula de clase.

5. ¿Qué actividades realiza para orientar la enseñanza de las secciones cónicas? En caso de no mencionarse un ANP, entonces preguntar:

¿Elabora algún tipo de actividad diagnóstico o algún aseguramiento del nivel de partida?

- Los alumnos investigan o leen el tema a tratar
- Algunos alumnos exponen a sus compañeros
- Explica el profesor en el tablero el tema, sus demostraciones.
- Realizo algunos ejemplos de aplicación
- Soluciono dudas e inquietudes.
- Se entrega taller de ejercicios para realizar en clase y terminar en clase.
- Luego se evalúan los temas.

6. En el estudio de las secciones cónicas, ¿se centra más en las ecuaciones canónicas o se centra en su representación gráfica o en ambos? ¿Por qué? Entonces, ¿qué debería ser primero: representación gráfica y después la ecuación general de las secciones cónicas o viceversa? ¿Por qué?

   - Considero importantes ambas pues son necesarias para manejar diferentes tipos de problemas, según los datos que se den.
     Es importante saber elaborar sus gráficas y reconocer el tipo de ecuación dada su gráfica.
   - Considero que se debe dar su representación gráfica, pero inmediatamente dar a conocer sus ecuaciones, pues las cónicas son lugares geométricos o cuerpos que resultan de la intersección de conos y planos.

7. ¿Qué actividades realiza para orientar el proceso de evaluación del tema Secciones cónicas?

   - Demostraciones
   - Explicación de ejemplos.

- Talleres en el aula
- Evaluación.

8. ¿Cree que la metodología utilizada para la enseñanza de las secciones cónicas favorece el aprendizaje de las mismas por parte de los estudiantes? ¿Por qué?
   En cierta medida se logra que los estudiantes utilicen las ecuaciones para resolver problemas. Sin embargo, la gran mayoría llega a una universidad con una fórmula aprendida o un concepto errado, como el de lugar geométrico. Puede que el método tradicional no sea el más conveniente, pero es el que más se utiliza.

9. ¿Cree usted que se pueda utilizar el doblado de papel para enseñar las secciones cónicas? En caso afirmativo, ¿Cómo?

   No lo he visto, pero sé que la papiroflexia es un arte con el cual se logran cantidad de figuras extraordinarias.

10. ¿Qué problemas cree que pueden aparecer al utilizar el doblado de papel como herramienta para la enseñanza de las secciones cónicas?
    - No doblar el papel en forma correcta, ya que origina piezas mal hechas.
    - Al leer instrucciones en algunos textos, que no pueden ser muy claras sus instrucciones.

11. Si su respuesta anterior es positiva, ¿cómo cree que se podrían resolver dichos problemas?
    - De pronto emplear materiales adicionales como reglas, etc. a la hora de doblar.
    - Tratando de crear instrucciones claras.

PROFESOR: CARLOS MARIO MACEA CORONADO
INSTITUCIÓN: COLEGIO DIVINO SALVADOR (LA ESTRELLA)

1. ¿Enseña Geometría Analítica en el grado décimo? Si

2. Si la pregunta anterior es afirmativa entonces: ¿Cuánto tiempo dedica a la enseñanza de este tema? Cuarto periodo (mes y medio)

3. ¿Qué orden sigue para enseñar las secciones cónicas con respecto a los contenidos? ¿Por qué?
   El orden que lleva este profesor es:
   - Línea recta
   - Parábola
   - Elipse
   - Circunferencia
   - Hipérbola

   La razón por la cual este docente sustenta este orden es el grado de dificultad de los temas, pues la línea recta es menos compleja que la parábola y así sucesivamente.

4. ¿Qué materiales de apoyo utiliza para la enseñanza de las secciones cónicas? Dentro de esos materiales, ¿ha utilizado algún software educativo aplicable a la enseñanza de las secciones cónicas?
   Hasta el momento ha utilizado la construcción de las secciones cónicas con tablas, clavos, cuerdas, regla y compás y para este periodo se utiliza un software diseñado en Visual Basic donde se muestra la utilización de este tema; vale aclarar que la utilización de este software sólo se empezó a utilizar este año. Antes no había implementado esta herramienta informática.

5. ¿Qué actividades realiza para orientar la enseñanza de las secciones cónicas? En caso de no mencionarse un ANP, entonces preguntar: ¿Elabora algún tipo de actividad diagnóstico o algún aseguramiento del nivel de partida?

   Inicia normal, le va mostrando al estudiante de dónde salen, por qué se le llaman secciones cónicas. Pero no hace ninguna prueba diagnostica ni actividades de ANP.

6. En el estudio de las secciones cónicas, ¿se centra más en las ecuaciones canónicas o se centra en su representación gráfica o en ambos? ¿Por qué? Entonces, ¿qué debería ser primero: representación gráfica y después la ecuación general de las secciones cónicas o viceversa? ¿Por qué?

   En ambas, la ecuación hay que mostrarla en su forma gráfica, de dónde salen las cosas, qué función tiene el valor de p, qué función tiene cada resultado en la grafica. Considera primero la gráfica y luego la ecuación, porque a través de la gráficas se va a tratar de deducir las ecuaciones de dichas secciones.

7. ¿Qué actividades realiza para orientar el proceso de evaluación del tema Secciones cónicas?

   Evalúa con pruebas escritas, actividades con regla y compás, ejercicios, talleres grupales, pruebas tipo ICFES y este periodo se incluirá en este proceso el software.

8. ¿Cree que la metodología utilizada para la enseñanza de las secciones cónicas favorece el aprendizaje de las mismas por parte de los estudiantes? ¿Por qué?

Si, considera que el uso de software puede ser una buena estrategia para lograr el aprendizaje de los conceptos y de las ecuaciones de las secciones cónicas. Apenas lo va a aplicar este semestre, por lo tanto, aún no puede concluir sobre la pertinencia del mismo. Sin embargo, dice que el grado de simulación e interactividad de un software podrían garantizar una participación activa del estudiante en su proceso.

9. ¿Cree usted que se pueda utilizar el doblado de papel para enseñar las secciones cónicas? En caso afirmativo, ¿Cómo?
   Si, no sabe su aplicación pero está enterado de que se puede.

10. ¿Qué problemas cree que pueden aparecer al utilizar el doblado de papel como herramienta para la enseñanza de las secciones cónicas?
    Su aplicación, la construcción de la curvas con el doblado de papel: cómo se construye la parábola, la circunferencia…

11. Si su respuesta anterior es positiva, ¿cómo cree que se podrían resolver dichos problemas?
    Practicando y realizando una mejor aplicación de éste y mostrando que si es posible su construcción.

Conclusiones finales de las entrevistas:

Los tres profesores entrevistados enseñan geometría analítica en el grado décimo aproximadamente uno o dos meses. Ellos inician con generalidades de geometría (distancia entre puntos y coordenadas del punto medio), después trabajan línea recta (rectas paralelas, rectas perpendiculares, ecuación), circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Es importante tener presente que el orden de las secciones cónicas para alguno de los profesores es diferente.

De todas formas, nosotros en la intervención consideramos el siguiente orden: circunferencia, elipse, parábola y elipse.
Las entrevistas nos arrojan que los materiales utilizados en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las secciones cónicas son los tradicionales: construcciones con clavos, cuerdas, regla y compás, además de incluir talleres tipo Icfes e investigaciones. Alguno de los profesores empezó a implementar un software educativo para la construcción de dichos lugares geométricos.
Por lo tanto, se puede decir que las actividades utilizadas para enseñar secciones cónicas son: Construcciones con materiales concretos, exposición alumnos, explicación docente, talleres y ejercicios de aplicación para hallar ecuaciones (de los textos seguidos). Las actividades de evaluación son muy tradicionales también: talleres y ejercicios guías donde se hallan las ecuaciones o donde se hallan los elementos a partir de cierta información, pruebas escritas, actividades de entrega de las construcciones con materiales concretos.
Los tres profesores coinciden en que es tan importante la representación gráfica como las ecuaciones de los lugares geométricos. Sin embargo, argumentan que debe ser primero la representación gráfica para poder deducir de ésta la expresión matemática. En nuestro caso, este punto es crucial, pues se parte de la construcción de la sección cónica con el doblado de papel, para generar un proceso de visualización y justificación con el fin de deducir las características más relevantes y las ecuaciones.
Es fundamental tener en cuenta que los tres profesores han enseñado el tema de una manera tradicional. Si los profesores coinciden en que la metodología es “coja” porque el estudiante no llega a comprender las secciones cónicas como lugares geométricos y realiza sólo procesos mecánicas para hallar una ecuación, entonces encontramos una gran falencia en cuanto a la metodología implementada para la enseñanza de las secciones cónicas (que por cierto es muy similar en los tres casos).

Se nota en las entrevistas que los profesores creen que se puede utilizar el doblado de papel para la enseñanza de las secciones cónicas, pero que no saben cómo se debe utilizar. Además, explican que se pueden presentar varios problemas al aplicar este tipo de estrategias: ser tomada como una mera actividad lúdica, que no se doble el papel en forma correcta y que las instrucciones no sean claras. En este trabajo de investigación, ya se habían tenido en cuenta las dificultades mencionadas y se utilizaron algunas tácticas para solucionarlas: concienciar a los estudiantes de la importancia del trabajo, pruebas piloto de las guías para mejorar las instrucciones dadas y por ende, mejorar los procesos de doblado.
Los consejos que nos dan los profesores para solucionar los problemas que ellos mencionaron son: mostrar la importancia del doblado de papel, emplear materiales adicionales como regla y compás, crear instrucciones claras. Estas ideas se tuvieron en cuenta para la intervención pedagógica.

En resumen, se dedica un mes y medio en promedio para el tema secciones cónicas. Se sigue un orden tradicional preestablecido llegando hasta la hipérbola. Los materiales de apoyo son los tradicionales. No se asegura un nivel de partida. Parece ser que se le da prioridad a la representación gráfica pero evalúan las ecuaciones con el método tradicional a pesar de que creen que la metodología no es la más adecuada.

4.4.4. Análisis de la Actividad diagnóstica

La actividad diagnóstica fue presentada por 40 estudiantes del grupo 10C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado.

1. Define con tus propias palabras lo que es un lugar geométrico

E1: Un lugar geométrico.

E2, E3, E5, E7, E12, E39: No responde (6).

E4: Es un espacio de masa con ángulos a encontrar.

E6: Es el espacio utilizado por la figura donde se hallan puntos del plano Cartesiano.

E8: Es el espacio en donde se hallan figuras geométricas.

E9: Es un espacio donde se encuentra una figura que tiene forma. Ejemplo: Un edificio cuadrado, tercera dimensión.

E10: Pienso que es un punto o un espacio en el que está ubicado algo.

E11: Es todo aquello que se puede identificar con figuras geométricas o algo parecido.

E13: Donde se pueden tomar muchas medidas.

E14: Es un espacio que tiene una forma y una medida.

E15: Es un lugar que ocupa algún espacio geométricamente.

E16: Un punto en el espacio que cumple reglas, funciones y propiedades.

E17: Es un ángulo.

E18: Es donde se presentan distintas formas como cuadrado, triángulo, círculo, rectángulo.

E19: Es un punto donde se cumplen algunas reglas.

E20: Lugar donde se pueden hallar figuras geométricas.

E21: Por ejemplo el salón, un lugar con figuras geométricas.

E22: Creo que son los puntos de los que parte y termina una gráfica o una figura.

E23: Es un conjunto de puntos.

E24: Lugar geométrico es lo que presenta determinada forma, que estudia distintos ángulos.

E25: Es un espacio (geométrico) que tiene forma definida, no abstracta.

E26: Es el espacio donde se encuentran figuras como círculos, rectángulos, etc, o puede ser cualquiera y buscamos diferentes figuras.
E27: Espacio donde se integran todas las figuras geométricas para hallar alguna incógnita.
E28: Es un lugar que es ocupado por un cuerpo y se desplaza en él.
E29: Es un espacio ocupado por un cuerpo (o punto) determinado.
E30: Es un espacio que ocupa un cuerpo y se desplaza en él.
E31: Es el espacio que ocupa un cuerpo.
E32: Es el espacio que ocupa un cuerpo de una figura plana.
E33: Son planos o figuras que van unidas con infinitos puntos.
E34: Es donde se encuentran cada una de las diferentes figuras geométricas.
E35: Es un lugar que se caracteriza en su forma y sus elementos con figuras geométricas.
E36: Es aquel lugar donde hay figuras geométricas, las cuales se forman por madera, ladrillo…
E37: Son las partes de figuras geométricas, como el centro en una circunferencia.
E38: Es todo lugar que forma una figura geométrica.
E40: Para mí es el espacio que ocupa cualquier figura o un determinado punto en la misma.

Análisis por contenidos

Lugar geométrico es:

Espacio donde se hallan figuras geométricas.
E8, E9, E11, E18, E20, E21, E26, E27, E34, E35, E36 (1)
11 estudiantes: 27.5%

Espacio con determinada forma y donde se pueden tomar medidas.

E13, E14, E24 (1), E25

4 estudiantes: 10%

Punto(s) que cumple(n) algunas reglas.

E16, E19

2 estudiantes: 5%

Espacio que ocupa una figura o un cuerpo.

E6, E15, E28 (1), E29, E30 (1), E31, E33, E40

8 estudiantes: 20%

Punto o conjunto de puntos.

E22, E23

2 estudiantes: 5%

No responde.

E1, E3, E5, E7, E12, E39

6 estudiantes: 15%

Otras.

E4, E6, E10, E17, E24 (2), E28 (2), E30 (2), E33, E36 (2), E37, E38

11 estudiantes: 27.5%

2. ¿Qué entiendes por relación entre dos conjuntos? Da un ejemplo

E1, E3, E5, E28, E23, E8: No responde (6).

E2: Que dos conjuntos tienen elementos similares.

E4: Que los dos conjuntos tienen su mismo contenido.

E6, E12: Igualdad entre ellos (2).

E7: Que su estructura es diferente. Ejemplo: el diagrama de Veen.

E9: Lo que hay de común en dos uniones de conjuntos.

E10: Creo que es lo que hay en común entre ellos. Por ejemplo dos conjuntos que tienen la misma cantidad de cosas.

E11: Es cuando los elementos de varios conjuntos pueden interactuar entre sí sin afectar el mismo.

E13: Cuando hay algo igual entre ellos.

E14: Es la unión de dos conjuntos. Ejemplo: un eclipse se relaciona mucho con esto.

E15: Cuando dos conjuntos de diferentes elementos se relacionan entre sí.

E16: Cuando un conjunto de elementos tiene propiedades en común.

E17: Que poseen iguales elementos.

E18: Es cuando un conjunto tiene algo en común con el otro.

E19: En que en los dos conjuntos hay por lo menos uno o dos elementos en común.

E20: Objeto en común. El 2 es un número natural y a la vez par.

E21: Cuando hay los mismos elementos en dos conjuntos y se relacionan aquellos elementos similares.

E22: Los elementos en común. Ejemplo: {2, 5, 9, 4, 8, 1} y {1, 7, 4, 5} Los elementos comunes son el 4 y el 1.

E24: Es el dato que relaciona o enlaza distintos conjuntos de acuerdo a sus características.

E25: Que tienen semejanzas. Conjunto A: Círculos, conjunto B: Lunas y soles (planetas).

E26: Es cuando se compartan dichos valores entre varios. A = (3, 5) B = (6, 7) C = (7, 3) D = (6, 5)

E27: Es la unión de dos conjuntos donde uno se forma con el otro.

E29: Se relacionan dos conjuntos cuando se unen los elementos de un conjunto A con los elementos de un conjunto B.

E30: Zaida, lo siento pero no me acuerdo.

E31: Donde se encuentran las mismas figuras.

E32: Son diagramas que se reparten en otro diagrama llamados Diagrama de Venn.

E33: La relación se da cuando sus elementos son iguales. Ejemplo: vacas se relacionan con vacas.

E34: Que tienen una misma característica.

E35: Entiendo que deben de haber cosas comunes entre ellos. Ejemplo: Dos conjuntos de frutas.

E36: Son los elementos en común que entre ambos conjuntos existen.

E37: Cuando tienen algo en común, como el conjunto de números del 1 al 5 y el conjunto de los números del 5 al 9, su relación es el 5.

E38: Que hay elementos compartidos. Ejemplo: Tenemos dos conjuntos y al unirlos vemos que tienen elementos en común.

E39: Entiendo por esto que es que tienen igual elementos en su forma y en su número.

E40: Cuando ambos tienen elementos en común. Ejemplo: {1, 2, 3, 4, 5, 6} y {3, 6, 7} Elementos en común: 3, 6.

Análisis por contenidos:

¿Qué entiendes por relación entre dos conjuntos?

Que son iguales.

E4, E6, E12, E13, E17, E21 (1), E31, E33, E39

9 estudiantes: 22.5%

Que los dos conjuntos tienen elementos en común o elementos similares.

E2, E9, E10, E18, E19, E20, E21 (2), E22, E35, E36, E37, E38, E40

13 estudiantes: 32.5%

Es la unión entre los dos conjuntos.

E14, E27, E29

3 estudiantes: 7.5%

Que tienen propiedades o características en común.

E16, E25, E34

3 estudiantes: 7.5%

No responde.

E1, E3, E5, E8, E23, E28

6 estudiantes: 15%

Otros.

E7, E11, E15, E24, E26, E30, E32

7 estudiantes: 17.5%

3. Ubicación de puntos en el plano cartesiano (Total: 6)

   15 estudiantes ubicaron los 6 puntos correctamente (37.5%).

   17 estudiantes ubicaron 5 puntos correctamente (42.5%).

   4 estudiantes ubicaron 4 puntos correctamente (10%).

   2 estudiantes ubicaron 3 puntos correctamente (5%).

   1 estudiante ubicó 2 puntos correctamente (2.5%).

   1 estudiante ubicó sólo un punto correctamente (2.5%).

4. Puntos que pertenecen a una recta dada (De los 7 puntos, cuatro pertenecen a la recta $y = x + 1$)

   15 estudiantes eligieron los 4 puntos que pertenecían a la recta (37.5%).

   14 estudiantes eligieron 3 puntos que pertenecían a la recta (35%).

3 estudiantes eligieron 2 puntos que pertenecían a la recta (7.5%).
8 estudiantes no eligieron puntos que pertenecían a la recta (20%).

5. Distancia entre dos puntos en el plano (Eran cuatro ejercicios)

   11 estudiantes hallaron la distancia entre dos puntos en el plano en los cuatro ejercicios propuestos (27.5%).

   6 estudiantes hallaron la distancia entre dos puntos en el plano en tres ejercicios propuestos (15%).

   5 estudiantes hallaron la distancia entre dos puntos en el plano en dos ejercicios propuestos (12.5%).

   4 estudiantes hallaron la distancia entre dos puntos en el plano en sólo un ejercicio propuesto (10%).

   14 estudiantes no hallaron la distancia entre dos puntos en el plano en los ejercicios propuestos (35%).

6. Descripciones

   Figura 1: Rueda

   E1: Tiene la forma circular con radios medidos cada uno y tiene un punto inicial.

   E2: Esta figura tiene forma circular y dentro de esta se puede observar cantidad de ángulos.

   E3: Es redonda con triángulos dentro de este.

   E4: Esta es una rueda, tiene un círculo grande y el otro pequeño, entre estos se sostienen unas varas, las cuales les da el movimiento.

   E5: Su forma es redonda, tiene variedad de partes que forman una rueda.

   E6: Eso es una rueda formada por un plano cartesiano y se parece a una circunferencia repartida por 12 lados.

E7: Es redonda, está conformada como por líneas que hacen que formen triángulos en la mitad. Tiene un punto que hace que se divida en forma de pelota.

E8: Es una rueda, tiene líneas curvas, rectas. La rueda tiene fórmula de círculo.

E9: Tiene una forma circular con radios y con un círculo en la mitad.

E10: Es una circunferencia con centro de la misma forma, con líneas que salen desde la mitad como si estuvieran midiendo el radio.

E11: Es circular, está dividida en 12 partes.

E12: Figura circular, es una rueda.

E13: Un círculo que tiene varias divisiones en su interior.

E14: Es una circunferencia de 360º, un centro también redondo y palos cada 30º.

E15: Es una circunferencia que está de una manera circular, tiene en el centro una esfera de la cual se despegan unas líneas, es de un color negro oscuro.

E16: Es una circunferencia con varias líneas que parten del centro como si midieran el radio.

E17: Rueda circular.

E18: Aquí se ve un círculo con unas líneas del centro hasta la punta del círculo.

E19: Es una circunferencia de radio R, con centro en el origen, que también es una circunferencia, pero de menor diámetro.

E20: Es una rueda, un círculo grande y en el medio uno chiquito. Entre dos vallas se forman una especie de triángulos.

E21: Es una rueda con figura circular y tiene varios radios que tienen la misma distancia.

E22: Es una rueda de un objeto movible, de madera o de algún otro material.

E23: Es una rueda con forma circular.

E24: Rueda con radios, su figura geométrica es un círculo uniformemente formado.

E25: Es una rueda que tiene triángulos centrados, tiene un círculo en la mitad, parece de madera.

E26: Es redonda sobre una superficie plana, con un circulito en el medio y líneas en diferentes direcciones horizontales, verticales, diagonales y se encuentra en una superficie plana. Es una rueda.

E27: Este es un círculo donde geométricamente se toma como el radio de una circunferencia dividido en partes.

E28: Es una rueda grande que tiene otra pequeña en el centro. Entre los dos círculos se van formando unos triángulos.

E29: Su forma es de una circunferencia, propia de una rueda. Una curva de 360º. En su interior tiene líneas que forman ángulos de 30º.

E30: Es una rueda, tiene una circunferencia, es como un radio.

E31: Tiene una forma circular, está dividida en varias partes iguales.

E32: Es una circunferencia, es la rueda de cómo una carroza. Es una figura plana.

E33: Es una rueda que cumple la función de circunferencia que tiene varios radios y van dirigidos a un mismo centro.

E34: Tiene forma circular y triangular en los lados.

E35: Lo que se encuentra allí es una circunferencia la cual está conformada por algunos radios, esta representa la llanta de una carroza.

E36: Su forma es cilíndrica, es decir que la rueda está formando una circunferencia de 360º.

E37: Forma circular con varios radios y un centro.

E38: Es una figura redonda dividida en su parte interior en 12 áreas.

E39: Es una circunferencia dividida en varios radios dirigidos a un mismo centro.

E40: Su forma es circular, se asemeja a una circunferencia, dividida en varios radios de igual medida.

Análisis por contenidos:

Tiene forma circular con radios que apuntan a un mismo centro.
E1, E2 (1), E9, E21, E37, E40
6 estudiantes: 15%

Es redonda.
E3 (1), E5, E7 (1), E26 (1), E38
5 estudiantes: 12.5%

Es circular.
E11, E12, E17, E23, E31, E34 (1)
6 estudiantes: 15%

Es una circunferencia.
E6 (2), E14, E29 (1), E30, E32
5 estudiantes: 12.5%

Circunferencia con centro y radios.
E10, E15, E16, E19, E33, E35, E39
7 estudiantes: 17.5%

Es un círculo.
E4, E13, E18, E20 (1), E24, E27
6 estudiantes: 15%

Tiene triángulos en su interior.
E3 (2), E7 (2), E20 (2), E25, E28 (2), E34 (2)
6 estudiantes: 15%

Otras.

E2 (2), E6 (1), E7 (3), E8, E22, E26 (2), E28 (1), E29 (2), E36

9 estudiantes: 22.5%

Figura 2: Hiperboloide:

E1, E19, E28: No describe.

E2: Esta figura en su parte superior e inferior es circular, a sus lados vemos dos curvas y está dentro de un cuadrado.

E3: Es una copa con cuadros.

E4: Esto es un espacio de causa con muchos espacios o ángulos.

E5: Es como en forma de cono, tiene varias rayas horizontales y verticales.

E6: Conjunto de líneas enlazadas entre sí con formas diferentes.

E7: La figura en sí, no sé cómo describirla, pero veo que está conformada por un cuadrado y en su centro tiene una cuadrícula. En toda la mitad va un cono y con su estructura tiene cuadrículas.

E8: Es una copa con cuadros, líneas rectas y curvas, también está formada por un cuadrado.

E9: Es una figura en tercera dimensión, se muestra un cuadrado, un círculo en la parte inferior y es angosto en la mitad.

E10: Es una elipse que se forma.

E11: Es un cono dividido en dos por una especie de lámina, el objeto parece tridimensional.

E12: Figura cónica en 3D (tercera dimensión).

E13: Me parece que es una figura cónica en tercera dimensión.

E14: Tiene un óvalo en la superficie, luego se encoge y a continuación se estira. Esta figura está elaborada en 3D.

E15: En el fondo se ve que está un cuadrado con muchos cuadritos pequeños, en la superior hay una figura que en los dos extremos tiene dos circunferencias que al final se unen en un espacio más angosto.

E16: Dos conos que se unen por la parte más delgada en forma de reloj de arena.

E17: Forma de cono y un cuadrado en su interior.

E18: Es un cuadrado partido en varios cuadritos, mezclado con unas cosas volteadas.

E20: Es una figura en dos planos.

E21: Una serie de rectas y columnas y otras curvas, y también observamos un óvalo y en una figura en dos planos.

E22: Es una figura en círculo, con curvas y se puede realizar con distinto material (conos).

E23: Esto es una copa dibujada en una cuadrícula.

E24: Figura geométrica en tres de que muestra tres lados de una figura en forma de embudo.

E25: Está conformada por cuadrados, tiene un fondo y una figura con forma de reloj de arena. En el centro de este los cuadrados no se pueden distinguir.

E26: Tiene forma de cilindro con cintura, en el medio tiene un cuadro con una pequeña cuadrícula y las líneas horizontales y verticales se unen en el centro.

E27: Esta son dos figuras unidas formando una geométrica.

E29: Hay un cuadrado y en su interior hay dos conos. La figura está toda rayada con cuadros.

E30: Al principio tiene una forma redonda y luego se vuelve angosto, tiene un cuadrado en la parte de atrás con líneas horizontales y verticales.

E31: Tiene dos formas cónicas atravesadas por la mitad, trazadas por una serie de cuadrados.

E32: Es una figura plana en forma de cilindro con muchos cuadros y con conos.

E33: Es una figura tridimensional en una superficie plana que nos da figuras curvas.
E34: Tiene forma de cono y por su centro se encuentra dividida por un cuadrado y está dividido en forma de cuadros toda la figura.
E35: en esta figura observo una figura circular encima de un cuadro, los cuales se encuentran como en tres dimensiones y éstos están divididos por cuadros.
E36: Según mi opinión parece ser una forma cilíndrica, la cual está formada por conos y están repletos de recuadros.
E37: Posee líneas curvas, es un cilindro con la mitad apretada, hay varios cuadros, si se observa, se puede ver un plano cartesiano o varios.
E38: Esta figura forma dos conos divididos en cuadrados.
E39: Figura tridimensional con una superficie plana la cual se ve a su fondo un cuadrado.
E40: Es una figura tridimensional con forma de reloj de arena o de dos embudos unidos. Su parte central es más angosta y está dividido por un cuadrado.

Análisis por contenidos

No describe.
E1, E19, E28.
3 estudiantes: 7.5%

Copa con cuadros, líneas rectas y curvas.
E3, E8, E23
3 estudiantes: 7.5%

Cono(s) con rayas horizontales y verticales.

E5, E7 (2), E11 (1), E17, E29 (1), E34, E36 (2), E38

8 estudiantes: 20%

Cuadrado con cuadrícula al fondo.

E7 (1), E9 (2), E15 (1), E18, E26 (2), E29 (2), E30 (2)

7 estudiantes: 17.5%

Figura en tercera dimensión.

E9 (1), E11 (2), E14 (2), E33, E35 (2), E39, E40 (1)

7 estudiantes: 17.5%

Figura cónica en 3E.

E12, E13

2 estudiantes: 5%

Dos circunferencias que se unen en un espacio angosto.

E15 (2), E30 (1)

2 estudiantes: 5%

Tiene forma de reloj de arena o embudo.

E16, E24, E25, E40 (2)

4 estudiantes: 10%

Forma cilíndrica con centro angosto.

E26 (1), E32, E36 (1), E37

4 estudiantes: 10%

Otras.

E2, E4, E6, E10, E14 (1), E20, E21, E22, E27, E31, E35 (1)

11 estudiantes: 27.5%

Figura 3: El símbolo de McDonald’s

E1: No describe.

E2: Esta figura tiene dos curvas, en su parte superior termina en punta y en su inferior es recta.

E3: Es una marca de comida.

E4: Esta es una figura que tiene un poco de ángulos a descubrir.

E5: Es una línea curva en forma de m. Es la m de McDonald’s

E6: Son un conjunto de líneas curvas enlazadas que forman una letra y se sostienen por una especie de tabla con un nombre.

E7: Es una marca famosísima de Donald’s, su estructura se de en una m con un logotipo de McDonald’s.

E8: Es una M de McDonald’s, es de color amarillo y rojo, tiene líneas curvas y rectas.

E9: Línea curva que da forma de la letra M, en la parte inferior hay un rectángulo con letras en la mitad.

E10: Son dos líneas curvas que forman la M.

E11: Es un objeto ondulado unido con otra de su misma manera para formar una letra.

E12: Esta M se parece a la de McDonald’s casualmente. Esta parece una línea curva.

E13: Es una línea curva y casualmente se parece a la M de McDonald’s.

E14: Tiene dos líneas curvas, paralelas y están sobre un rectángulo.

E15: En esta figura se ve que esto en forma de la letra eme (M), en la parte inferior tiene un sostén rectangular donde se apoya la m, es de un color gris claro y en la parte de abajo es de color negro con unas letras que dicen McDonald’s.

E16: Par de líneas curvas unidas que forman una M.

E17: Forma de la consonante M.

E18: Esta imagen presenta rectángulo en la parte inferior, líneas horizontales y verticales con unas curvas profundas y pronunciadas.

E19: Tiene forma de dos conos al revés.

E20: Es un anuncio publicitario. En la parte inferior se observa un rectángulo y en la M se podría decir que hay dos óvalos.

E21: Una línea curva en forma de M, está sobre un rectángulo y la forma de la M es muy ovalada.

E22: Es una letra M, formada por curvas y ángulos.

E23: Esto es unas líneas curvas con forma de m.

E24: Figura que presenta líneas ovaladas y un rectángulo.

E25: Se compone de un rectángulo el título. El símbolo tiene óvalo cortado a la mitad.

E26: Tiene forma de óvalo, semi puntudo con un rectángulo. Éstas forman montañas.

E27: Estas son unas líneas curvas formando una m montada en un rectángulo.

E28: Es un anunciado publicitario que en la parte inferior tiene un rectángulo y en la m se observan dos óvalos.

E29: Son dos parabólicas hacia abajo. Al final hay un rectángulo con unas letras.

E30: Son dos líneas curvas unidas encima de un rectángulo que tiene un letrero.

E31: Son unas líneas curvas que forman una m, montada sobre un rectángulo.

E32: Es una figura en curvas y rectas.

E33: Una línea curva que forma una m y las curvas tiene igual diámetro.

E34: Presenta curvas en diferentes direcciones.

E35: Este es el logo de una comida americana y su forma está conformada por una línea curva que forma un medio óvalo en forma de triángulo.

E36: Presentan curvas en diferentes direcciones.

E37: Esta imagen posee líneas curvas en diferentes tamaños ya que hay unas más anchas que otras.
E38: Dos curvas formando la letra m en una base rectangular.
E39: Es una línea curva que forma una m, las curvas tienen igual medida.
E40: Es una figura conformada por dos medio óvalos y al final está sostenida por una figura en forma rectangular.

Análisis por contenidos:

Marca de comida o anuncio publicitario.
E3, E20 (1), E28 (1), E35 (1)
4 estudiantes: 10%

Línea(s) curva(s) en forma de M y/o en una base rectangular.
E5 (1), E6, E9, E10, E15, E16, E17, E18, E21 (1), E22, E23, E27, E30, E31, E33, E38, E39
17 estudiantes: 42.5%

Es la M de McDonald's.
E5 (2), E7, E8 (1), E12 (1), E13 (2)
5 estudiantes: 12.5%

Forma ovalada con una base rectangular.
E20 (2), E21 (2), E24, E25, E26, E28 (2), E40
7 estudiantes: 17.5%
Figura formada por líneas curvas y/o rectas.
E2, E8 (2), E12 (2), E13 (1), E14, E32, E34, E36, E37
9 estudiantes: 22.5%

Otras.
E1, E4, E11, E19, E29, E35 (2)
6 estudiantes: 15%

Figura 4: Estadio
E1, E5: No describe.
E2: Esta figura es circular con un orificio en el centro.
E3: Es un estadio con grama, espectadores con tribunas.
E4: Esto es un estadio y es un cuerpo con una gran estructura.
E6: Conjunto de estructuras formadas por líneas que constituyen un círculo y de éstas se desprenden líneas paralelas.
E7: La descripción que yo le doy a esta figura es que su estructura es de un estadio.
E8: Es un estadio, tiene forma de círculo con líneas curvas y rectas, tiene el escudo del mundial.
E9: Círculo con óvalo en la mitad.
E10: Es una línea gruesa que no se cierra.
E11: Tiene forma ovalada y está dividida por líneas que van desde su comienzo hasta su final.
E12: Figura ovalada, es un estadio.
E13: Figura ovalada.
E14: Es un óvalo, luego más adentro contiene otro óvalo y finalmente vemos un rectángulo con una circunferencia de 360º en la mitad.
E15: Este dibujo está de forma de circunferencia, en el centro tiene otra circunferencia en forma de óvalo y dentro hay un cuadrado.
E16: En forma circular, línea curva que no se une por sus extremos.
E17: Forma circular. Letra O.
E18: Es un óvalo arredondeado con un rectángulo en la mitad.
E19: Es un óvalo grande que en el centro tiene otro de menor tamaño.

E20: Es un estadio en forma de óvalo. A los lados se alcanza a observar varios rectangulitos, se ve un círculo en la mitad y la cancha es en forma de rectángulo.

E21: Un estadio de fútbol con forma de óvalo que ocupa un amplio espacio terrestre.

E22: Es un estadio, o sea una figura circular o en rombo con distancias y ángulos, este puede contener muchas características matemáticas.

E23: Esto es un estadio con forma circular.

E24: Círculo ovalado.

E25: Es un óvalo y tiene una parte que se corta y en su centro hay un rectángulo y en el centro de éste se encuentra un círculo blanco.

E26: Tiene forma de círculo (semicírculo) en el medio tiene un óvalo y tiene varias figuras, líneas, cuadrados, círculos, rectángulos, etc.

E27: Este es un círculo que integra por dentro otra figura.

E28: Es un estadio en forma de óvalo. A los dos lados se alcanzan a observar varios rectangulitos y en la mitad de la cancha hay un círculo y la cancha es un rectángulo.

E29: Tiene forma de óvalo.

E30: Es de forma ovalada con líneas verticales en la parte de arriba y a los lados, por dentro tiene un cuadrado.

E31: Tiene una forma circular y tiene un rectángulo en el centro.

E32: Su forma es circular, tiene rectas a los alrededores.

E33: Es un estadio en forma de óvalo que tiene un mismo centro en común.

E34: Tiene una forma circular.

E35: Este es un estadio el cual está formado de manera de circunferencia, dentro de este hay un rectángulo llamado cancha, la cual está conformada por líneas rectas paralelas. Este círculo está recubierto por otro más pequeño el cual representa el techo de las tribunas en donde la gente se sitúa para disfrutar de un partido de fútbol.

E36: Observamos una especie de óvalo o un estadio en forma circular.

E37: Forma ovalada, posee un centro y varios radios.

E38: Es una figura ovalada partida en uno de sus radios.

E39: Es un estadio en forma de óvalo, el cual tiene un centro de igual forma y diferente distancia.

E40: Es una figura circular con otro pequeño círculo en el centro. No está cerrada totalmente.

Análisis por contenidos:

Es un estadio.

E3, E4, E7

3 estudiantes: 7.5%

Figura(s) ovalada(s).

E11, E12, E13, E14, E18, E19, E20 (1), E21, E24, E25 (1), E28 (1), E29, E30, E33, E36 (1), E37, E38, E39

18 estudiantes: 45%

Forma de circunferencia o círculo con centro en forma de óvalo o círculo y/o un rectángulo en su interior.

E9, E14, E15, E26, E31, E35

6 estudiantes: 15%

Forma circular que no se une en sus extremos.

E2, E16

2 estudiantes: 5%

Forma(s) circular(es).

E8, E17, E23, E27, E32, E34, E36 (2), E40

8 estudiantes: 20%

Otras.

E10, E20 (2), E22, E25 (2), E28 (2),

5 estudiantes: 12.5%

No describen.

E1, E5

2 estudiantes: 5%

Conclusiones de la Actividad Diagnóstica:

La Actividad diagnóstica nos arrojó los siguientes resultados:

Los estudiantes no tienen claro el concepto de lugar geométrico, pues lo definen como un lugar donde se hallan figuras geométricas (27.5%) o como el espacio que ocupa una figura (20%).

Tampoco parecen tener claro una relación entre dos conjuntos, pues mencionan que una relación sucede cuando los dos conjuntos tienen elementos en común o elementos similares (32.5%).

En cuanto a la ubicación de los puntos en el plano, el 80% ubicó correctamente mínimo 5 puntos (de los 6 que se pedían ubicar). Además, el 72.5% pudo elegir correctamente mínimo 3 puntos (de los 4 posibles) que pertenecían a la ecuación de la recta dada. Esto indica que no hay que retomar dichos conceptos para el trabajo con las secciones cónicas.

Lo que sí es preocupante es que muchos estudiantes (35%) no hallaron la distancia entre dos puntos en el plano, sabiendo que se les daba la expresión para calcularla. Aún así, el 42.5% hallaron la distancia mínimo en 3 de los ejercicios propuestos (de los cuatro posibles).

Las descripciones de las cuatro figuras, nos arrojaron en primera instancia que los estudiantes no describen con propiedad; en segunda instancia, que los estudiantes aún no conocen las secciones cónicas: elipse, parábola e hipérbola; y en tercera instancia, que se utilizan conceptos de una forma errada (confundir un óvalo con un círculo). Incluso hay una tendencia a confundir círculo y circunferencia o formas circulares con formas redondas.

La rueda se describió como una figura que tiene forma circular con radios que apuntan a un mismo centro (15%), como una figura circular (30%), como una figura en forma de circunferencia (30%) y como una figura redonda (12.5%).

La imagen con forma de hiperboloide, se describió como un cono con rayas horizontales y verticales (20%), como una figura en tercera dimensión (17.5%) o como una forma cilíndrica con centro angosto (10%).

El símbolo de McDonald's se describió como líneas curvas en forma de M y/o en una base rectangular (42.5%), como una forma ovalada con una base rectangular (17.5%) o como una figura formada por líneas curvas y/o rectas (22.5%).

Finalmente, el estadio se describió como una forma ovalada (45%) o como una forma circular (20%)

4.4.5. Análisis de la actividad sobre Algunas generalidades de las secciones cónicas y del doblado de papel

40 estudiantes entregaron el informe de lectura sobre los datos históricos y los dobleces de los postulados del doblado de papel. De ellos, 37 lo entregaron completo y los tres restantes entregaron sólo los dobleces.

A este informe no se le asignó una nota cualitativa.

En general, los dobleces de los postulados estuvieron bien elaborados. Parece ser que los estudiantes mostraron interés frente al trabajo, pues no hubo ninguna dificultad en su entrega. De hecho, no se esperaba que se entregaran tan bien realizados y presentados.

4.4.6. Análisis de la Intervención pedagógica general

Miércoles 18 de Octubre (2 horas de clase).

- Actividad diagnóstica.
- Entrega de la historia y de las generalidades del doblado de papel.
- Explicación del informe a entregar el jueves 19 de Octubre.

Desarrollo:

En este día, se realizó la actividad diagnóstica. Durante ella, los estudiantes preguntaron por la fórmula de distancia entre puntos y se les escribió en el tablero. Además, presentaron dificultades en justificar por qué un punto pertenecía o no a una recta. Se percibió también que no sabían la definición de lugar geométrico, teniendo en cuenta que esos temas se trabajaron en clase con una guía sobre Generalidades de la Geometría Analítica.

Cuando terminaron la actividad inicial, se les entregó un documento que contenía algunos datos históricos sobre la evolución de las Secciones cónicas y algunas generalidades sobre el doblado de papel. Se les propuso entregar un informe sobre la historia y los dobleces de algunos postulados del doblado de papel para el día siguiente.

Jueves 19 de Octubre (2 horas de clase).

- Entrega del informe.
- Introducción sobre la historia.
- Algunas mostraciones con conos.
- Primera parte de la guía sobre la Circunferencia.

Desarrollo:

Se recibió el informe de lectura sobre los datos históricos de las Secciones Cónicas, pero esto no se quedó ahí, sino que se comentó un poco a modo de introducción; además, se mostraron varios conos intersecados por planos para generar las distintas cónicas. Los estudiantes pudieron observar los cortes de los conos y nombrar las secciones.

Después se trabajó la primera parte de la guía de la circunferencia y sólo se alcanzó a realizar su construcción. Teníamos claro que esta última es la que más dificultad traía para el estudiante. Aún así, parece ser que ellos realizaron bien su construcción. Se notó que el docente tenía que estar pendiente de sus estudiantes; tal parece que no son capaces de trabajar solos una guía, necesitan siempre de la asesoría de otra persona.

Miércoles 25 de Octubre (2 horas de clase).

- Clase teórica sobre la ecuación de la circunferencia centrada en el origen.

Desarrollo:

Notamos que hubo un rompimiento con la intervención pedagógica, pues esta clase la tuvo que dar el profesor Fabián Brand, pues la practicante tuvo problemas para asistir al centro educativo. De todas formas, el profesor trabajó la ecuación de la circunferencia con centro en el origen e hizo algunos ejercicios prácticos con los estudiantes.

Jueves 26 de Octubre (2 horas de clase).

- Paso del la construcción en papel al plano.
- Dobleces elaborados.
- Ecuación de la circunferencia con centro diferente al origen.
- Ejercicios.

Desarrollo:
Para que no se notara tanto el rompimiento en la intervención, se retomaron los dobleces hechos en la hoja de papel y la formación de la circunferencia para poder definirla. Después se habló un poco sobre cómo pasar de la construcción en papel al plano cartesiano. Posteriormente, se explicó la ecuación de la circunferencia con centro en otro punto diferente al origen y se hizo un ejemplo, donde debían dibujar la circunferencia, encontrar la ecuación canónica y la ecuación general.

Lunes 30 de Octubre (1 hora de clase).

- Ecuación de la circunferencia dado el centro y un punto de ella.

Desarrollo:
Como la practicante debía viajar a Ibagué, entonces se programaron dos clases extras para esta semana. En esta hora de clase, se hizo un ejemplo que consistía en encontrar la ecuación de una circunferencia dado el centro y un punto de la misma.

Martes 31 de Octubre (1 hora de clase de 40').

- Paso de la ecuación general a la ecuación canónica.

Desarrollo:
En estos 40 minutos se explicó el paso de la ecuación general de la circunferencia a la ecuación canónica empleando los casos de factorización.
Fue un poco difícil pues los estudiantes están muy “flojos” en este tema.

Miércoles 1 de Noviembre (1 hora).

- Evaluación de la guía circunferencia.

Desarrollo:
Esta clase la dirigió el profesor Fabián Brand. Se hizo la evaluación de la guía circunferencia en parejas. Este trabajo arrojó los siguientes resultados:
La presentaron 35 estudiantes, de los cuales 1 sacó Excelente, 6 sacaron Sobresaliente, 14 sacaron Aceptable y 14 sacaron Insuficiente. Esto indica que la prueba la ganaron el 60% de los estudiantes.

Jueves 2 de Noviembre (2 horas de clase).

- Miniactividad sobre circunferencia.

Desarrollo:
En esta clase se hizo una pequeña actividad sobre Circunferencia, la cual fue dirigida y calificada por el profesor Fabián Brand.

Miércoles 8 de Noviembre (2 horas de clase).
No hubo clase por el proceso de matrícula.

Jueves 9 de Noviembre (2 horas de clase).

- Construcción de la elipse por medio del doblado de papel.
- Explicación de la constante.

Desarrollo:
Se les había puesto como tarea hacer la construcción de la elipse. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no llevaron ni la guía ni mucho menos la construcción. Fue falta de comunicación, pues no sabían si seguían las clases con el profesor Fabián o con la practicante.
Por los anteriores inconvenientes, se hizo nuevamente la construcción de la elipse por medio del doblado de papel. Fue mucho más fácil de elaborar

que la construcción de la circunferencia. Luego se hizo un reconocimiento de la elipse en la hoja de papel y se procedió a definir el lugar geométrico, mostrando un punto que pertenecía a la curva y la suma constante a unos puntos fijos.

Miércoles 15 de Noviembre (1 hora de clase).

- Se retomaron las preliminares de la Geometría Analítica y Circunferencia.

Desarrollo:
Esta clase la dirigió el profesor Fabián Brand. Realizó algunos ejercicios sobre las preliminares de la geometría analítica (distancia entre puntos, punto medio…) y sobre circunferencia, como preparación para el examen final de periodo.

Jueves 16 de Noviembre (2 horas de clase).

- Definición del lugar geométrico Elipse.
- Paso de la construcción en la hoja al plano Cartesiano.
- Reconocimiento de algunos elementos de la elipse.

Desarrollo:
En esta clase se retomó la elipse hecha en papel. Se ubicó un punto que perteneciera a la curva y se mostró que la suma de las distancias a dos puntos fijos era constante. Luego, se definió el lugar geométrico elipse. Después se pasó de la hoja al plano y se definieron algunos de los elementos de la elipse como focos, eje mayor, eje menor, vértices… Se les pidió que ubicaran estos elementos en la construcción hecha en papel.

Miércoles 22 de Noviembre (1 hora de clase de 40')

- Ecuación de la elipse centrada en el origen.

Desarrollo:

Otra vez, la intervención se vio truncada. Esta clase la dio el profesor Fabián Brand. Se explicó la ecuación de la elipse con centro en el origen y se hicieron varios ejercicios de la guía.

Jueves 23 de Noviembre (2 horas de clase)

- No hubo clase. Promoción del grado décimo.

La practicante dio asesoría para la entrega del portafolio. Explicó algunos ejercicios sobre elipse.

FOTOS DEL PRIMER DÍA DE INTERVENCIÓN:




4.4.7. Análisis de los portafolios

Informe de la actividad evaluativa sobre la circunferencia

Esta actividad la presentaron 35 estudiantes.

5.0: 1 estudiante.

4.2: 6 estudiantes

3.9: 2 estudiantes

3.8: 2 estudiantes

3.3: 8 estudiantes

2.9: 2 estudiantes

2.5: 8 estudiantes

1.7: 2 estudiantes

1.3: 4 estudiantes

Promedio: 3.53

Informe de los portafolios en general:

36 estudiantes entregaron el portafolio. No se esperaba que lo entregaran tantos estudiantes, pues prácticamente la nota final ya estaba lista. Sin embargo el trabajo final tuvo muy buena acogida, algunos lo entregaron con una presentación excelente y unas construcciones muy bien elaboradas.

11 de estos portafolios no tienen la evaluación de la Guía de Circunferencia.

25 tienen ya sea completa o incompleta la evaluación de la Guía de Circunferencia.

37 no tienen la evaluación de la Guía de Elipse

Notas de la evaluación de la Guía Circunferencia:

5.0: 2 estudiantes

4.5: 2 estudiantes

4.3: 2 estudiantes

4.2: 1 estudiante

3.8: 1 estudiante

3.3: 15 estudiantes

2.3: 1 estudiante

1.8: 1 estudiante

Promedio: 3.39

Criterios para evaluar el portafolio

Para evaluar los portafolios realizados durante el trabajo se tuvieron los siguientes criterios de evaluación:

Presentación:
Que el material entregado en el portafolio esté ordenado, la hojas limpias y sin arrugar, sin tachones y con letra legible.

Guías de Estudio:
Las guías que se dieron deben estar completamente desarrolladas, con las construcciones que se le pidieron hechas, también las preguntas y ejercicios propuestos realizados correctamente.

Materiales elaborados por los estudiantes:
Aquí entran las construcciones hechas por medio del doblado de papel (la circunferencia y la elipse), que estén bien hechos los dobleces y que se perciba bien la figura a la cual se debía llegar.

4. Evaluación del aprendizaje y realimentación:
Las guías que se diseñaron tienen una parte evaluativa, ésta debe estar realizada por el estudiante de manera correcta.

Análisis de los portafolios.

En total presentaron treinta y seis (36) portafolios de los cuales no se puede concluir o inferir mucho, pues se nota que muy pocos hicieron a conciencia este trabajo (se ve que tres o cuatro estudiantes lo realizaron y el resto lo copiaron).

Si miramos el primer criterio de evaluación, es decir la presentación, se puede deducir que todos (100%) respondieron adecuadamente, ya que ninguno de los que entregaron tiene tachones, hojas arrugadas y/o sucias, además todos tienen una letra legible.
En cuanto al segundo criterio (guías de estudio), también se presentó que la mayoría tenía todas las actividades desarrolladas; tan solo 6 de 36 portafolios, es decir, 16.67% están incompletos y les faltaron algunos ejercicios y el desarrollo de la evaluación. Lo más irónico es que a estos estudiantes les faltan los mismos ejercicios. Otros cuantos les faltaba el desarrollo de la evaluación, en total 7 de 36, es decir 19.44%. Vale aclarar que estos educandos tienen resueltas las actividades propuestas en la guía de la misma manera, con los mismos errores y con una redacción muy similar al resto de estudiantes. 23 de 36, o sea 63.89% tienen el portafolio completo con todas las actividades resueltas, pero con los mismos errores de los demás y con la misma manera de resolver los ejercicios. Lo anterior nos lleva a concluir que hubo copia de la solución de este portafolio.

Es pertinente tener en cuenta que en general, todos los estudiantes tienen en el portafolio las construcciones de la circunferencia y la elipse por medio del doblado de papel bien desarrolladas. Cosa que no se ve en algunos estudiantes cuando dibujan una circunferencia en el plano cartesiano, pues algunos no utilizaron compás y les quedaba el dibujo un poco torcido, lo mismo se notaba en el dibujo de la elipse.

Que los estudiantes hayan copiado el portafolio de muestra, no nos permite hacer muchas inferencias, porque nos impide mirar la efectividad de la propuesta; por lo tanto, como se nos dificulta hacer un análisis más detallado de estos portafolios entonces no podemos concluir si la mayoría de estudiantes aprendieron por medio de la propuesta.

4.4.8. Análisis de la actividad para validar la propuesta

En vista de que la propuesta no se pudo realizar totalmente y de que la evaluación del portafolio no nos arrojó una información adecuada para concluir, vimos pertinente realizar otra actividad que nos condujera a la validación de la propuesta. Para ello, se eligieron 5 estudiantes al azar del grado 11C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado, que hicieron parte de la intervención pedagógica el año anterior.

Estos estudiantes presentaron una última actividad en la que había que construir nuevamente la circunferencia y la elipse con doblado de papel, había que encontrar algunas ecuaciones canónicas y generales, había que describir algunas imágenes y por último, había que responder a un test que diera cuenta de la apropiación y aplicación de los conceptos de las secciones cónicas.

A las preguntas que tenían que ver con dibujar las secciones cónicas y encontrar las ecuaciones canónicas y generales, los cinco estudiantes acertaron.

Parece ser que los cinco estudiantes concluyeron el carácter continuo de las dos secciones cónicas construidas. Se puede percibir el paso de lo discreto a lo continuo y de lo concreto a lo abstracto.

Descripción de imágenes:

1. Juego de tiro al blanco:

   E1: Está compuesta por muchas circunferencias, algunas anchas y otras delgadas con colores blanco y negro en forma de rectángulo.

   E2: Forma de circunferencia. Las circunferencias sin huecos. Juego de dardos.

E3: En esta figura podemos observar una rueda de la fortuna, la cual está compuesta de varias circunferencias.

E4: Corresponde a una circunferencia cuyos puntos equidistan del centro.

E5: Es una circunferencia que en su centro se derivan otras tres circunferencias de distintos radios.

2. Universo:

E1: Está formado por varias elipses que van en aumento (unas más grandes que las otras). El centro es el sol. Hay una elipse en diagonal.

E2: Forma elíptica, que puede asumir diferentes posiciones horizontal, vertical, diagonal. Sistema solar.

E3: En esta figura podemos observar una representación del universo, el cual está compuesto de órbitas elípticas, o sea que se observan elipses.

E4: Ejemplo de la elipse.

E5: son un conjunto de elipses que conforman una sola y en diagonal se encuentra otra elipse atravesando la principal.

Test.

1. ¿Te parece que el doblado de papel es una buena herramienta para la enseñanza de las matemáticas?

Si: 5 estudiantes

No: 0 estudiantes.

¿Por qué?

E1: Es una forma práctica y didáctica de aprender las matemáticas.

E2: Permite generar conceptos y esto como producto del acercamiento del tema con la realidad y la experiencia, la cual al mezclarse con lógica facilita la comprensión.

E3: Porque se logra una mejor comprensión al tener un acercamiento con las figuras.

E4: Es un recurso didáctico que facilita un aprendizaje significativo, es decir, un aprendizaje que el alumno verdaderamente entiende.

E5: Es porque las matemáticas tienen un grado alto de dificultad, por eso una clase monótona no motiva al aprendizaje de ésta y el doblado de papel puede ser una manera diferente y lúdica. Algo distinto.

2. ¿Te parece que el doblado de papel es una buena herramienta para la enseñanza de las secciones cónicas?

   Si: 5 estudiantes.

   No: 0 Estudiantes.

   ¿Por qué?

   E1: Se hace más entendido el tema.

   E2: Nos permite entender con mayor facilidad sus orígenes, teorías y leyes.

   E3: Porque al nosotros hacerlas, entendemos de dónde salen las cosas y cómo las nombramos.

   E4: Qué mejor forma de estudiar estas figuras si no es en la práctica.

   E5: Por lo anterior.

3. ¿Crees que existió (eron) algún(os) inconveniente(s) para la enseñanza de las secciones cónicas utilizando el doblado de papel?

   Si: 2 estudiantes.

   No: 3 estudiantes.

   ¿Cuál (es)?

   E1: No menciona.

   E2: Pero hace falta más compromiso de los estudiantes.

   E3: No menciona.

E4: Considero que dichos errores se debieron más a la agilidad y motricidad de los alumnos en el manejo del papel.

E5: En algunos compañeros se les dificulta encontrar un punto P con un punto Q para encontrar R. La construcción del doblado de la elipse.

4. ¿Te sirvió la técnica del doblado de papel para el aprendizaje de las secciones cónicas?

   Si: 5 estudiantes.

   No: 0 estudiantes.

   ¿Por qué?

   E1: Practicando se hace mucho más fácil el aprendizaje (Acción - aprendizaje).

   E2: Me permitió hacerme un concepto más claro y global de las temáticas, formación, teorías y aplicación.

   E3: Porque me permitieron un contacto directo con las figuras y pude entender mejor de dónde salen las componentes de éstas.

   E4: Además de aprender fórmulas para hallar algunos de sus datos, pude entender de dónde provenían dichos postulados.

   E5: Porque llama más el aprendizaje algo relacionado con el arte, que una clase magistral, dictando y monótona.

5. Las actividades que se hicieron para la enseñanza de las secciones cónicas doblando papel, las consideras:

   Muy adecuadas: 5 estudiantes.

   Adecuadas: 0 estudiantes.

   Ni adecuadas, ni inadecuadas: 0 estudiantes.

   Inadecuadas: 0 estudiantes.

   Muy inadecuadas: 0 estudiantes.

La validación de la propuesta nos arroja que los cinco estudiantes describieron de una forma adecuada las dos imágenes presentadas, pues reconocieron las secciones cónicas implícitas en ellas: circunferencias y elipses.

Estos estudiantes dibujaron correctamente los lugares geométricos y encontraron sus respectivas ecuaciones canónicas y generales.

En cuanto al test sobre el uso del doblado de papel, afirmaron que era una buena técnica para la enseñanza de las matemáticas y en especial de las secciones cónicas, y que les había servido para su aprendizaje.

5. CONCLUSIONES

Indiscutiblemente se tuvieron muchos inconvenientes de tiempo y espacio para validar completamente la propuesta. Básicamente se pusieron en marcha dos de las cuatro guías diseñadas (circunferencia y elipse), aunque los demás instrumentos fueron aplicados (encuestas, actividad diagnóstica y el documento sobre las generalidades de las secciones cónicas y del doblado de papel). Se tuvo que diseñar una última actividad para validar la propuesta, que no se tenía programada, porque los portafolios entregados no nos aportaban información precisa puesto que la mayoría de los estudiantes transcribieron completamente el taller de un compañero (copia de portafolios).

La última actividad la hicieron sólo cinco estudiantes elegidos al azar. Ellos realizaron de una forma correcta las actividades que se les propusieron. Aunque la muestra es demasiado pequeña, esto no impide concluir que el doblado de papel sí favorece los procesos de visualización y justificación. Además, por proveer un material gráfico que guía la construcción e identificación de las características más relevantes de las secciones cónicas, se puede utilizar como mediador para promover procesos de visualización más elevados en diferentes contextos.

También fue posible hacer un acercamiento de lo *discreto a lo continuo* en las gráficas elaboradas, haciendo la transición de las construcciones en la hoja de papel al estudio de las mismas en un plano cartesiano, y de lo *concreto a lo abstracto* mediante la imposibilidad del papel para doblarse infinitamente y la consideración de lugar geométrico con infinitos puntos. Esto fue logrado mediante unas preguntas claves que los estudiantes resolvieron en el desarrollo de las guías y que derivaron hacia una discusión grupal donde el docente cumplió su función de orientador.

Es importante tener en cuenta los problemas que pueden surgir al usar el doblado de papel como una técnica para la enseñanza de las secciones cónicas. En primer lugar, las instrucciones para doblar deben ser muy precisas si se desea llegar a las figuras deseadas (cualquier instrucción mal interpretada trae como consecuencia una construcción mal elaborada); en segundo lugar, el doblado de papel podría convertirse en una mera actividad lúdica o un juego, generando un distractor en el proceso de aprendizaje; y en tercer lugar, es posible que los conceptos sólo se interpreten en la hoja de papel impidiendo hacer estudios de la geometría analítica en otros escenarios o contextos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 2003, pp. 215 – 241.

[2] CALVO, C. “Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral”. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona. 2001

[3] CLEMENS, D. y BATTISTA, M. *Geometry and Spatial Reasoning.* En: GROUWS, DOUGLAS (ed.). Handbook of Research on Mathematics teaching and learning: a Project of the Nacional Council of Teachers of Mathematics. NCTM, New York, 1992.

[4] CRUZ, Lisset y MARIÑO, Manuel. Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. En: Revista Educación, Nº 97, (Mayo – agosto, 1999). Cuba: Pueblo y Educación, pp. 14 – 21.

[5] DE GUZMÁN, M. El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. España: Pirámide, 1996.

[6] DE GUZMÁN, Miguel. Enseñanza de las ciencias y de las matemáticas. Madrid: Popular, 1993. p. 111.

[7] DÍAZ BARRIGA, Frida y HERNÁNDEZ ROJAS, Gerardo. Docente del siglo XXI: Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Bogotá: Nomos, 2001. p. 13 – 14.

[8] DREYFUS, T. Imagery and reasoning in mathematics and mathematics education, en Robitaille, D., Wheeler. D. y Kieran C. *Selected lectures from the 7th ICME.* Québec: Universitè Laval. 1994

[9] FIGUEIRAS, Lourdes y DEULOFEU, Jordi. "Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización". En: Revista Enseñanza de las Ciencias, Barcelona, 2005, 23(2), 217 – 226.

[10] GERETSCHLÄGER, Robert. "*Euclidean Constructions and the Geometry of Origami*". En: *Mathematics Magazine*, vol. 68, no. 5, Washington: December, 1995, pp. 357–371.

[11] JOHNSON, Donovan. "Matemáticas más fáciles doblando papel". España: Distein. 1975. p. 113.

[12] KAUTSCHITSCH, H. "Neue" Anschaulichkeit durch "neue" Medien. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematic,* 94(3), 1994. pp. 79 – 82.

[13] KNEISSLER, Irmgard. Cómo hacer Origami. Plegado de papel. España: Ediciones Ceac S.A, 1976. p. 49.

[14] LACUEVA, Aurora. "Actividades para un aula investigativa y de interacción constructivista". REVISTA DE TECNOLOGÍA EDUCATIVA, vol.XII – Nº3; Santiago de Chile: OEI, 1995.

[15] MEIRIEU, PH. *Frankenstein educador.* Barcelona: Alertes, 1998.

[16] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos curriculares en Matemáticas.* Santa Fe de Bogotá D.C , julio de 1998.

[17] **--------** Serie Documentos: "Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales". Bogotá: Enlace Editores, 2004, p. 94.

[18] MONSALVE, Orlando. *Actividades sobre una hoja de papel.* En: Cuadernos Pedagógicos. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Número 16 (agosto), 2001. pp. 69 – 74.

[19] MONSALVE, Orlando y JARAMILLO, Carlos. *El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas.* En: Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, Nº 35, (enero - abril), 2003. pp. 11 - 25

[20] PETERS, V. et al. Analysis: Visualization in mathematics and didactics of mathematics, part 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 26, 1992. pp. 77 – 92.

[21] PETERS, V. et al. Analysis: Visualization in mathematics and didactics of mathematics, part 2. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 26, 1992 II. pp. 109 – 132.

[22] RODRÍGUEZ, Rosa María. "Reaprender a enseñar: una experiencia de formación para la mejora continua de la docencia universitaria". En: Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 17 (2), España: 2003, p. 79 – 94.

[23] ROYO PRIETO, José Ignacio. *Matemáticas y papiroflexia.* En: Sigma: Revista de Matemáticas. Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco/Eusko Jaurlaritza. Nº 21, España: 2002. pp. 175 – 192.

[24] ROW, Sundara. *Geometric Exercises in Paper Folding.* New York: Dover Publications. 1966. p. 148.

[25] ZIMMERMANN, W. y CUNNINGHAM, S. (eds) *Visualization in teaching and learning mathematics.* Mathematical Association of America, Notes, 19, 1991.

PÁGINAS CONSULTADAS EN INTERNET

[26] GALLO, Óscar y LÓPEZ, Ana Teresa. Proyecto Educativo del programa Licenciatura en Matemáticas y física. Mayo de 2004. Fecha de búsqueda: 4 de junio de 2006. Página de Internet:
http://ayura.udea.edu.co/autoevaluacion/matemafisica/proyecto_educativo.doc

[27] GALLO, Patricia. *Origami.* La Plata – Argentina. Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. Página de Internet:
http://www.netverk.com.ar/~halgall/origami1.htm

[28] GONZÁLEZ CAMPOS, Maribel. Diseños experimentales de investigación; preexperimentos, experimentos "verdaderos" y cuasiexperimentos. Fecha de búsqueda: 15 de octubre de 2006. Página de Internet: http://www.monografias.com/trabajos10/cuasi/cuasi.shtml.

[29] LANG, Robert. *Origami and Geometric Constructions.* 1996 – 2003. Fecha de búsqueda: 4 de junio de 2006. Página de Internet:
http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf

[30] LARIOS OSORIO, Víctor. *Taller Polígonos con papel.* II Congreso Regional del Noroeste de la Enseñanza de las Matemáticas A.N.P.M., La Paz, B.C.S., 1º-3 de junio de 2001. Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. http://www.uaq.mx/matematicas/origami/taller1.html

[31] Origami y Educación. El Origami como recurso pedagógico. Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. Página de Internet: http://gabrielc.galeon.com/myfav3.htm#_ftnref1

[32] PÉREZ, María Teresa y ARRATIA, Óscar. Cónicas. Página de Internet: http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Conicas/conicas.htm. Fecha de búsqueda: 7 de octubre de 2006.

[33] QUAAS FERMANDOIS, Cecilia. *Nuevos Enfoques en la Evaluación de los Aprendizajes.* Fecha de búsqueda: 20 de mayo de 2007. http://www.umce.cl/~vicerrector/centro_documentacion/COMPETENCIAS/material_ponencia/evaluacion_aprendizajes.htm

[34] RUBIO, Luis Alexander. *Ciencia y Medicina. Origami Colombiano.* Fecha de búsqueda: 15 de mayo de 2006. http://www.fortunecity.com/westwood/fashoinave/291/page4.html

[35] YUKAVETSKY, Gloria J. La Elaboración de un Módulo Instruccional. Preparado para el Centro de Competencias de la Comunicación. Universidad de Puerto Rico en Humacao. Proyecto de Título V. Fecha de búsqueda: 4 de noviembre de 2006. En: http://www.ccc.uprh.edu/download/modulos/CCC_LEDUMI.pdf. 30p.

ANEXOS

A. CRONOGRAMA

Responsables	Actividades	Fecha
Zaida Santa Óscar Jiménez Diego Bedoya	Consulta del marco teórico: Aspectos pedagógicos (Geometría Activa, Procesos de visualización y procesos de justificación), Saber disciplinar (Generalidades del doblado de papel, Resolución de problemas, Construcción de las secciones cónicas utilizando el doblado de papel), Aspectos psicológicos (Aprendizaje significativo), Aspectos legales (Lineamientos curriculares, estándares básicos), Aspectos pedagógicos (Uso de guías y módulos instruccionales).	Del 1 de abril de 2006 al 20 de mayo de 2007.
Óscar Jiménez	Elaboración de los parámetros a tener en cuenta para la elaboración de las guías.	Del 8 al 12 de agosto.
Zaida Santa	Elaboración de la encuesta y de la entrevista.	Del 8 al 12 de agosto
Óscar Jiménez	Diseño de la Actividad Diagnóstica.	Del 8 al 12 de agosto.
Zaida Santa Óscar Jiménez	Preparación de la Socialización 1.	Del 14 al 29 de agosto.
Óscar Jiménez Diego Bedoya	Diseño de guía: Parábola.	Del 18 al 29 de septiembre

Óscar Jiménez Diego Bedoya	Diseño de guía: Elipse.	Del 18 al 29 de septiembre
Óscar Jiménez Diego Bedoya	Diseño de Guía: Circunferencia.	Del 2 al 6 de octubre.
Óscar Jiménez Diego Bedoya	Diseño de Guía: Hipérbola.	Del 2 al 6 de octubre.
Zaida Santa Óscar Jiménez Diego Bedoya	Revisión de las Actividades programadas.	Del 2 al 20 de octubre.
Zaida Santa Óscar Jiménez Diego Bedoya	Ajustes y correcciones de las guías.	Del 2 al 20 de octubre.
Zaida Santa Óscar Jiménez Diego Bedoya	Revisión de la encuesta y de la entrevista.	Del 25 de septiembre al 6 de octubre.
Zaida Santa	Pilotaje de la encuesta y de la entrevista.	Del 2 al 6 de octubre.
Zaida Santa	Implementación de la encuesta en la Institución.	Del 2 al 6 de octubre.
Zaida Santa Óscar Jiménez Diego Bedoya	Implementación de la entrevista.	Del 2 al 6 de octubre.
Zaida Santa Óscar Jiménez Diego Bedoya	Análisis de la encuesta y de la entrevista.	Del 6 al 10 de octubre.
Zaida Santa	Diseño de documento “Algunas generalidades de las secciones cónicas y del doblado de papel”	Del 6 al 10 de octubre.
Zaida Santa	Actividad diagnóstica en la Institución Educativa.	Del 17 al 20

		de octubre.
Zaida Santa Óscar Jiménez	Actividad 1: Circunferencia en la Institución Educativa.	Del 17 al 27 de octubre.
Zaida Santa Óscar Jiménez	Actividad 2: Elipse en la Institución Educativa.	Del 7 al 22 de noviembre.
Zaida Santa	Entrega del Portafolio	Del 20 al 24 de noviembre.
Zaida Santa Óscar Jiménez Diego Bedoya	Análisis de la intervención pedagógica.	Del 20 al 28 de noviembre.
Zaida Santa Óscar Jiménez Diego Bedoya	Preparación de la Exposición Final de Integración Didáctica IX.	Del 20 al 28 de noviembre.
Zaida Santa	Análisis por contenidos de las encuestas, las entrevistas y la actividad diagnóstica.	Del 28 de noviembre de 2006 al 20 de abril de 2007.
Diego Bedoya	Análisis detallado de los Portafolios	Del 10 de enero al 20 de mayo.
Zaida Santa	Recopilación de la información y organización del trabajo escrito final.	Del 1 de abril de 2006 al 20 de mayo de 2007.
Zaida Santa Óscar Jiménez Diego Bedoya	Organización de la Exposición Final de la tesis de grado.	Del 21 al 31 de mayo.

B. ENCUESTA SOCIO – AFECTIVA.

C. ENCUESTA ACADÉMICA.

D. ENTREVISTAS.

E. ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA.

F. MINIACTIVIDAD SOBRE CIRCUNFERENCIA.

G. INFORMES SOBRE DOCUMENTO "ALGUNAS GENERALIDADES DE LAS SECCIONES CÓNICAS Y DEL DOBLADO DE PAPEL"

H. PORTAFOLIOS.