MEDIADORES DIDÁCTICOS PARA UNA MEJOR COMPRENSIÓN DE LA FACTORIZACIÓN

OLGA INES MONSALVE PATIÑO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXÁCTAS
MEDELLIN
2008

MEDIADORES DIDÁCTICOS PARA UNA MEJOR COMPRENSIÓN DE LA FACTORIZACIÓN

OLGA INES MONSALVE PATIÑO

Monografía para optar al título de
Licenciada en Matemáticas - Física

Asesor
JAIRO ARENAS LADINO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXÁCTAS
MEDELLIN
2008

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todas aquellas personas que de una u otra manera hicieron parte de este trabajo, en especial a la Vicedecana Luz Estela Isaza Mesa, por brindarme la oportunidad de realizar este proyecto; al igual que al profesor Jairo Arenas Ladino asesor de este proyecto y a mi hermana Angela Ruth Monsalve Patiño, Rectora de la Normal de Sonsón por colaborarme con sus valiosos aportes y asesorías.

Muchas gracias. *"La gratitud es la memoria del Corazón"* (Anónimo).

CONTENIDO

ANEXOS

RESUMEN

A pesar de que el conocimiento algebraico es esencial por su aporte a la comunicación y expresión de las matemáticas, a la construcción de modelos y a la estructuración de formas de razonamiento, diversas investigaciones han permitido detectar una inadecuada apropiación de este conocimiento por parte de los estudiante; se han identificado en otros problemas relativos a la naturaleza y significado de los símbolos y las letras (interpretación de la variable), al uso inapropiado de fórmulas o procedimientos y a la traducción entre diferentes lenguajes , todo esto le impide al estudiante aplicar el álgebra al interior de las matemática misma y en otras disciplinas y en la búsqueda de la solución de problemas en la realidad.

El problema fundamental de los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la educación Básica, radica en el énfasis que se da a lo formal y deductivo dejando a un lado la demostración geométrica que se requiere para compresión, el conocimiento algebraico es presentado en forma árida, abstracta y descontextualizada lo que además de desmotivar a los estudiantes los lleva a limitarse a memorizar conceptos y procedimientos sin comprender su significado ni establecer relaciones entre ellos.

Con el ánimo de plantear una alternativa de solución a la problemática que se presenta con los estudiantes del grado 9° a la hora de factorizar expresiones algebraicas que lo requieran, se presenta una propuesta didáctica haciendo uso del álgebra geométrica como mediador didáctico, quienes a través del trabajo con la misma hallando áreas y perímetros permite en los estudiantes un aprendizaje significativo de la factorización, en la que se trabaja desde la modelación geométrica el paso de la Aritmética al álgebra, es un esquema que enriquece la significación, permitiendo aproximarse intuitivamente a los conceptos, propiedades y algoritmos del álgebra escolar.

La utilización de los mediadores didácticos en la educación son orientados para facilitar en los estudiantes los procesos de enseñanza aprendizaje, además deben ir de la mano con el mundo que en la actualidad los estudiante de esta generación requieren para su motivación para el trabajo de la matemática, ya que con el avance tecnológico los docentes debemos estar buscando nuevas y mejores estrategias que faciliten los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas

La inadecuada utilización de mediadores didácticos, en el trabajo con los estudiantes puede generar fobia por el aprendizaje de las matemáticas; por lo tanto debemos replantearnos dentro de nuestro quehacer pedagógico la importancia y necesidad de utilizar todos los mediadores de aprendizaje posibles para logra en nuestros estudiantes experiencias significativas en el trabajo con la matemática, permitiéndoles un

acercamiento verdadero al aprendizaje de la factorización y que además más adelante les permita acceder con éxito a los nuevos conocimiento que se les plantee.

La educación debe ser considerada como un reto, por lo tanto siempre se deben buscar las mejores estrategias, técnicas o métodos para poder alcanzar los propósitos planteados, debemos brindar herramientas a nuestros estudiantes que les permitan enfrentarse a las diferentes situaciones que se les presenten en la vida cotidiana.

Es necesario además que el docente conozca las necesidades que tienen los alumnos y no solo enfocarlos en terminar contenidos , sino enfocarlos para que aprendan y comprendan los contenidos educativos que les permitan solucionar problemas, así pues lograremos una parte importante del proceso educativo y contribuiremos a que el aprendizaje sea significativo.

INTRODUCCIÓN

Dentro de la enseñanza de las matemáticas, podemos valernos de las estrategias o mediadores didácticos de enseñanza aprendizaje para lograr obtener con los estudiantes un mejor resultado a la hora de evaluar los logros propuestos, es por esto que pretendo hacer análisis respecto a la dificultad que los estudiantes del grado 9º1 presentan a la hora de abordar el tema de la factorización; ya que en la mayoría de los estudiantes el manejo del lenguaje algebraico, aislado de la demostración geométrica que se debe tener; presentan mucha dificultad.

El álgebra geométrica (mediador y/o facilitador de aprendizaje) nos permiten en gran medida garantizar un mejor aprendizaje, pues le proporciona al estudiante la oportunidad de interpretar (a través de la demostración), argumentar y proponer cada uno de las temáticas que se les aborde.

En el trabajo que a diario realizamos con los estudiantes de los grados 9º vemos que muchos de ellos han dejado a un lado los saberes orientados en grados anteriores, por falta de una verdadera comprensión, ya que muchos de los trabajos realizados en el aula solo fueron orientados a la repetición y no a la mecanización a través de diferentes mediadores pedagógicos de aprendizaje.

Los facilitadores didácticos de aprendizaje deben ir de la mano con el mundo que en la actualidad los estudiantes de esta generación requieren para su motivación por el aprendizaje de las matemáticas ya que con el avance tecnológico (el mundo de los jóvenes de hoy), los maestros debemos estar un poco adelante o la par con ellos para lograr su atención y así poder generar espacios de aprendizaje significativos.

La inadecuada utilización de herramientas pedagógicas, en el trabajo con los estudiantes puede generar una fobia por el aprendizaje de las matemáticas, por lo tanto debemos ir replanteándonos dentro de nuestro quehacer pedagógico la importancia y necesidad utilizar todos los mediadores de aprendizajes posibles para lograr en nuestros estudiantes experiencias significativas en el trabajo del área y permitirles así que vivan un verdadero mundo matemático en este caso de los grados 9º un acercamiento con la factorización; a través de la utilización del álgebra geométrica, facilitador que le permitirá más adelante acceder con éxito los demás conocimientos que se les planteen.[1]

Se reconoce que la Educación Matemática es pues, un dominio de estructura compleja; Quienes nos desempeñamos en ella, tenemos el compromiso de contribuir con la construcción de conceptos teóricos que, además de integrar las perspectivas de las

---

[1] TOMADO DEL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1999.

diferentes disciplinas frente al acto educativo, sirvan para mejorar las prácticas de aula, desarrollando cada vez mejores propuestas de enseñanza que atiendan a las necesidades y realidades de los estudiantes y contribuyan con su aprendizaje.

Al realizar la intervención pedagógica se pretende alcanzar los objetivos planteados y brindar una nueva forma de enseñanza del álgebra en alumnos de secundaria. Es importante recordar que no todos los grupos tienen las mismas características y necesidades lo cual puede ser un factor importante para el desarrollo de las actividades planteadas.

1. DISEÑO TEÓRICO

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

En los procesos de enseñanza y de aprendizaje orientados dentro de la práctica pedagógica, muy a menudo nos encontramos con factores determinantes en la construcción del conocimiento, uno de ellos es el poco interés hacia el estudio de las matemáticas, provocando preocupaciones bastante grandes, más precisamente en la Institución Educativa Presbítero Bernardo Montoya Giraldo en la jornada de la mañana, en el grado 9º1, en donde la observación a los procesos de aprendizaje evidencian que los alumnos no logran un aprendizaje significativo del álgebra, específicamente en la factorización de expresiones algebraicas.

Dentro del quehacer pedagógico, es deber como docentes proponer alternativas que posibiliten el mejoramiento de los procesos de enseñanza y de aprendizaje que lleven al estudiante a despertar el interés por las matemáticas y apropiarse del conocimiento, ayudando al desarrollo de la memoria semántica, que conllevará a la adquisición de los nuevos conocimientos, convirtiéndolos en un aprendizaje significativo.

Todo lo anterior, me lleva a plantear al siguiente interrogante:

¿PERMITIRÁ LA UTILIZACIÓN DEL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA COMO ESTRATEGIA METODOLÓGICA, LOGRAR UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS?

1.2. OBJETO DE ESTUDIO

El aprendizaje de la factorización de expresiones algebraicas para el grado 9º 1 de la Institución Educativa Presbítero Bernardo Montoya Giraldo.

Esta investigación pretende que el alumno aprenda y comprenda los contenidos matemáticos de la factorización y que no sólo los ocupe una vez sino que los pueda relacionar con temas posteriores.

1.3 OBJETIVO GENERAL

- Contribuir al mejoramiento del aprendizaje de la factorización, a través de la utilización del álgebra geométrica como mediador didáctico con los estudiantes del grado 9º de la Institución Educativa Presbítero Bernardo Montoya Giraldo.

1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Utilizar los medios didácticos de aprendizaje para lograr que los estudiantes del grado 9º comprendan mejor la factorización.

- Desarrollar actividades didácticas en la enseñanza de la factorización.
- Replantear y utilizar estrategias metodológicas diferentes con los estudiantes a través de la utilización de mediadores de aprendizaje para una mejor comprensión de la factorización.
- Elaborar y aplicar guías reintervención pedagógica.

1.5 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Dentro del proyecto de investigación planteo las siguientes preguntas concretas para el desarrollo del mismo:

- ¿Qué son los mediadores didácticos?
- ¿Qué es el álgebra geométrica?
- ¿Se logrará un aprendizaje significativo de la factorización de expresiones algebraicas utilizando el álgebra geométrica?
- ¿Es posible que los estudiantes del grado 9º aprendan de una forma comprensiva la factorización a través de la utilización del algebra Geométrica Griega?

2. MARCO TEÓRICO

2.1. ALGEBRA

2.1.1 Historia: Para poder situamos en el comienzo de la historia del álgebra necesitamos considerar antes el significado del término. Si por álgebra entendemos la ciencia que permite resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$ expresada en estos términos simbólicos, entonces su historia comienza en el siglo XVII. Ahora bien, si aceptamos como álgebra la resolución de la ecuación dada, utilizando métodos geométricos y omitiendo todo símbolo algebraico de cualquier especie, estaremos refiriendo el inicio de su historia al establecimiento de la escuela de Alejandría o un poco antes (siglo IV a. C.). Por último, si podemos clasificar como álgebra el planteamiento y resolución de problemas que hoy día se resuelven por métodos algebraicos, entonces el comienzo del álgebra y de su historia puede remontarse hasta el año 1800 a. C., o antes todavía.

NESSELMANN (1842) propuso una división de la historia del álgebra en tres períodos, tomando como criterio la forma de lenguaje utilizada para expresar los conceptos y los desarrollos algebraicos. Estos períodos pueden denominarse:

- **Retórico:** Todo aparece escrito completamente en palabras del leguaje comente.
- **Sincopado:** Los autores utilizan abreviaturas, este período se inicia con la obra de **Diofanto** (c. 275)
- **Simbólico:** Las abreviaturas dan lugar a los símbolos convencionales actuales, pudiéndose escribir proposiciones tales como: $3x$ - $x2 = a\ 2$. Este período se inicia con **VIETA** (c.1590) y se consolida con **DESCARTES** (1637) y **WALLIS** (1693).

También debe hacerse notar que muchos de los primitivos autores matemáticos no griegos, 6 incluyen en sus trabajos una amplia variedad de tópicos. Por ejemplo, **AHMES** (c. 1550 a. C.) combina su álgebra con aritmética y medición, e incluso muestra alguna evidencia de un débil comienzo de trigonometría. No existe un tratado exclusivo de álgebra antes de la época de **DIOFANTO** (c. 275).[2]
Las civilizaciones antiguas desarrollaron en un principio la Geometría y la Aritmética. Este avance al principio fue lento, hasta que llegamos a la civilización Griega en el siglo VI aC., en donde aparecen dos hombres Tales de Mileto y Pitágoras de Samos.

2.1.1.1 Tales de Mileto. (624 - 548 aC.) estadista, comerciante, ingeniero, astrónomo, filósofo, y matemático, es uno de los siete sabios de la antigüedad. La historia nos cuenta que Tales midió la altura de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura.

---

[2] KLINE, Morris: El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días . Ed. Alianza.

2.1.1.2 Pitágoras. De Samos llamado el padre de las Matemáticas Griegas (ca 580 - 500 aC) Después de numerosos viajes volvió a su isla natal que se encontraba bajo la dominación del tirano Polícrates, decidió fijar su residencia en la Magna Grecia Sur de Italia, en Crotona, allí fundo una sexta que unía a tendencias aristocráticas un carácter místico y religioso. La escuela Pitágorica era una academia en donde además de practicar ritos secretos se estudiaba filosofía, matemática y ciencia naturales. El lema Pitagórico era: "Todo es número" Vamos a las matemáticas.

2.1.2 Naturaleza del Álgebra.

El término de álgebra geométrica fue utilizada por primera vez, por el matemático danés H. Gzeuthen, observó en las obras "secciones Cónicas" del geómetra griego Apolunio y "Los Elementos" de Euclides que las operaciones geométricas definidas sobre segmentos de ectas o áreas planas tienen las mismas propiedades de la adición y la multiplicación de números reales; segmentos de recta se adicionan o se restan.

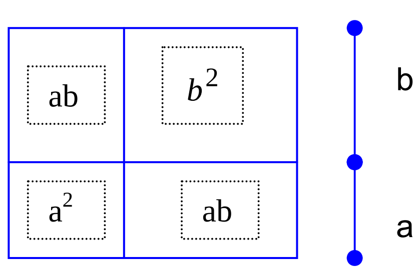
En el álgebra geométrica trabajada por Euclides y Apolunio la principal relación entre segmentos de rectas o entre áreas es la igualdad (dos polígonos son iguales si tienen áreas iguales); la noción de igualdad es un indefinido sujeto a los siguientes axiomas:

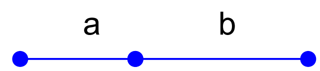
Axioma 1; Iguales a lo mismo son iguales entre sí.
Axioma 2: Si iguales se adicionan a iguales, totales son iguales.
Axioma 3: si iguales se sustraen de iguales, los restos son iguales.
Las tres operaciones fundamentales del álgebra geométrica están definidas de la siguiente manera:

- La suma de dos segmentos de recta a, b es un segmento de recta c que puede ser dividido en dos partes a´ y b´ que son iguales a a y a b respectivamente (Notación moderna a+ b = c).
- La suma de dos polígonos A, B es un polígono C que puede ser dividido en dos partes A´y B´que son iguales a A y B respectivamente (Notación moderna a+ b = c).
- El producto de dos segmentos de recta a, b es un rectángulo R.(Notación moderna a.b = R) este producto es un objeto geométrico, no el resultado de una multiplicación entre enteros.

En tiempos de Euclides las magnitudes se representaban por medio de segmentos de líneas rectas, obedeciendo a los postulados y teoremas de la geometría. Es la llamada álgebra geométrica de los Griegos.

Nosotros diríamos : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$





Veamos como expresaba Euclides :

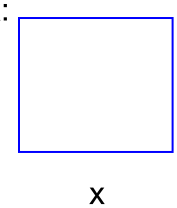
$$\left(a^2 - b^2\right) = a^2 - 2ab + b^2$$

“Si cortamos una línea recta en segmentos iguales y desiguales entonces el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del total junto con el cuadrado construido sobre la línea recta entre los puntos de corte es igual al cuadrado sobre la mitad”.

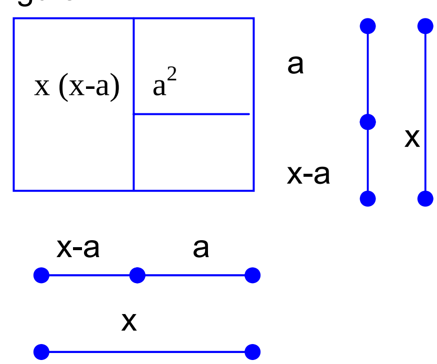
Los diagramas empleados por Euclides en este contexto jugó un papel clave en el álgebra Griega.

La igualdad $(x-a)x + (x-a)a = (x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

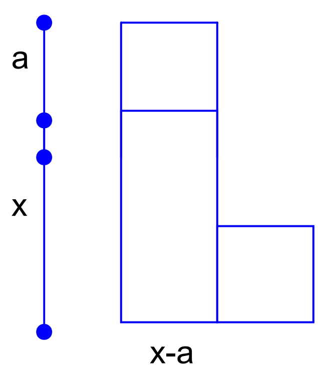
1) Dibujemos un cuadrado de lado x:



2) Dividamos al cuadrado según muestra la figura:



Si la misma figura la dibujamos del siguiente modo podemos inducir la igualdad planteada.



Además, en sus Elementos, Euclides resolvió problemas que equivalen a la solución de las ecuaciones $x^2 + ax = a$; $x^2 + ax = b^2$. Fundamentalmente completando cuadrados geométricos y no considerando las raíces negativas.[3]

Después de Euclides surge un periodo de transición del método geométrico al analítico, hacia el ocaso del esplendor de la era griega, muy pocos hombres de ciencia se interesaban por el álgebra la mayor parte de ellos se hallaban imbuidos de conocimientos geométricos, concurriendo a la universidad donde Hypatía dictaba sus conferencias. Sin embargo, cuando entra en escena un hombre singular, DIOFANTO (C;275), este sistematizó sus ideas con el empleo de símbolos creados por él mismo. Introduce una notación algebraica basada en abreviaturas que marca un paso hacia el lenguaje simbólico, dando nacimiento a lo que hoy se conoce como ecuaciones indeterminadas, se produce, así un avance significativo en el desarrollo del álgebra. Además añadió amplias perspectivas al objeto del álgebra tal y como existía entonces, tratando los problemas algebraicos por métodos exclusivamente analíticos. Su obra fue la primera dedicada totalmente al álgebra, por lo que a menudo se le designa como el padre de esta ciencia pero muchos le reniegan este título ya que a pesar de que en cuestiones de notación sin duda se lo merece, en términos de las motivaciones y los conceptos desarrollados esta pretensión resulta menos justificada. Su libro más importante es *Aritmética*, y sus tan variados problemas como hábiles soluciones se constituyeron en modelo para Fermat, Euler y Gauss.[4]

[3] PÉREZ DE DÍAZ, Maria Cristina. En: SERIE MATERIAL DIDÁCTICO, ALGEBRA DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA. Universidad Nacional de Colombia. Programa de fortalecimiento de la capacidad científica en la educación básica y media.
[4] BOURBAKI, Nicolás: Elementos de Historia de las Matemáticas.

2.2 LOS MEDIADORES DIDÁCTICOS

Durante muchos años se han identificado dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tales como: desmotivación hacia el aprendizaje, altas tasas de mortalidad académica, apatía, repitencia y deserción, entre otras. Además, existe la tendencia, de considerar la matemática como algo inalcanzable e incomprensible, limitándose por esto su estudio, a la mecanización y a la memoria, y no a la comprensión de los conceptos. Estas dificultades han generado diferentes estudios e investigaciones sobre lo que "debería" ser o sobre cómo hacer matemáticas en la escuela. La educación matemática se considera como una disciplina en permanente formación que pretende dar cuenta de los procesos que se dan en la escuela, desde y alrededor de la matemática.[5]

En lo que respecta al estudio de los conceptos matemáticos, se viene evidenciando poca motivación por parte de los estudiantes, al igual que la insuficiencia de estrategias metodológicas y didácticas por parte del maestro para afianzar los procesos de pensamiento en el área. Las dificultades que se presentan en el área se ven reflejadas en los resultados de las pruebas **saber e icfes** aplicadas en los diferentes municipios, en tales pruebas el mayor porcentaje de los alumnos se ubica en el nivel B (el que requiere el seguimiento de instrucciones sin implicar mayores procesos de pensamiento) en los distintos grados y en un promedio medio bajo respectivamente.[6]

Teniendo en cuenta el desempeño de nuestros estudiantes se hace importante la utilización de los diferentes medios didácticos en las aulas de matemáticas para así proporcionar un espacio lúdico – pedagógico que contribuya en forma significativa al mejoramiento de los procesos de aprendizaje.[7]

El aprendizaje y el conocimiento matemático no se adquieren de manera sencilla, ni en forma pasiva. Como diría Pablo Freiré "ni se recibe, ni se copia de la realidad, sino que es una construcción que hace el sujeto a partir de la acción". El conocimiento es construido por el propio sujeto

Teniendo en cuenta que cualquier material puede utilizarse, en determinadas circunstancias, como recurso para facilitar procesos de enseñanza y aprendizaje, pero considerando que no todos los materiales que se utilizan en educación han sido

---

[5] PÉREZ DE DÍAZ, Maria Cristina. En: SERIE MATERIAL DIDÁCTICO, ALGEBRA DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA. Universidad Nacional de Colombia. Programa de fortalecimiento de la capacidad científica en la educación básica y media.

[6] http://mineducacion.gov.co

[7] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario nacional de formación de docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. 2002.

creados con una intencionalidad didáctica, distinguimos los conceptos de medio didáctico y recurso educativo.

2.3 RECURSO EDUCATIVO

Es cualquier material que, en un contexto educativo determinado, sea utilizado con una finalidad didáctica o para facilitar el desarrollo de las actividades formativas. Los recursos educativos que se pueden utilizar en una situación de enseñanza y aprendizaje pueden ser o no medios didácticos.

2.4 MEDIO DIDÁCTICO

Es cualquier material elaborado con la intención de facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo un libro de texto o un programa multimedia que permite hacer prácticas de formulación química[8].

2.4.1 Componentes estructurales de los medios. En la intervención pedagógica a realizar es importante aclarar que solo se va a utilizar medio didáctico, ya que el álgebra geométrica es un medio didáctico utilizable para la factorización de expresiones algebraicas.

Al analizar los medios didácticos, y sin entrar en los aspectos pragmáticos y organizativos que configuran su utilización contextualizada en cada situación concreta, como lo plantea el MEN en muchos de sus escritos como por ejemplo en los estándares básicos para el área de matemáticas, como también varios autores en muchos de los proyectos planteados para la enseñanza de las matemáticas, podemos hacer referencia aquí al programa que adelanta la Secretaría de Educación Departamental con varios profesores de la Universidad de Antioquia como es el profesor Oscar Gallo, promotor en la capacitación de los maestros del departamento para la utilización de los laboratorios de matemáticas.

El álgebra geométrica como medio didáctico para la factorización de expresiones algebraicas, es un medio simbólico en su contenido, donde presenta al estudiante una serie de cuadrados y rectángulos para que a través de determinados sistemas de mediciones (áreas y perímetros) logre entender la factorización.

2.4.2 Ventajas asociadas a la utilización de recursos. Cada medio didáctico ofrece unas determinadas prestaciones y posibilidades de utilización en el desarrollo de las actividades de aprendizaje que, en función del contexto, le pueden permitir ofrecer ventajas significativas frente al uso de medios alternativos. Para poder determinar ventajas de un medio sobre otro, siempre debemos considerar el contexto de aplicación. Estas diferencias entre los distintos medios vienen determinadas por sus elementos estructurales:

---

[8] MORENO, Luis. Instrumentos Matemáticos computacionales.

- ✓ El sistema de simbólico que utiliza el álgebra geométrica para transmitir la información son los rectángulos y cuadrados que la conforman. La aplicación en el aula, tienen unas implicaciones pedagógicas, por ejemplo: proporciona al estudiante a través su representación geométrica, que los estudiantes capten mejor las informaciones concretas que las verbales abstractas.

- ✓ El contenido que presenta y la forma en que lo hace: la información que gestiona, su estructuración, permite que el estudiante con ejercicios de aplicación logren hacer una estructuración de la nueva información con los saberes previos que se tenían, Así, incluso tratando el mismo tema, este material puede estar más estructurado, o incluir muchos ejemplos proponiendo más ejercicios que permitan un mejor afianzamiento de los conceptos nuevos.

- ✓ El álgebra geométrica sirve de soporte y actúa como instrumento de mediación para acceder al conocimiento. No siempre se tiene disponible la infraestructura que requieren determinados medios, por lo tanto se deben utilizar materiales que permitan su elaboración con los estudiantes.

- ✓ El entorno de comunicación con el estudiante, que proporciona el álgebra geométrica en los sistemas de mediación de los procesos de enseñanza y aprendizaje es importante a la hora de poner en marcha las actividades planeadas para la utilización de este medio didáctico diseñado para la intervención en el aula. Por ejemplo, si este material didáctico está integrado en una "plataforma-entorno de aprendizaje" podrá aprovechar las funcionalidades que este le proporcione. [9]

2.4.3 Funciones que pueden realizar los medios. Según como se utilicen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, los medios didácticos y los recursos educativos en general pueden realizar diversas funciones; entre ellas destacamos como más habituales las siguientes:

- ✓ Proporcionar información. Prácticamente todos los medios didácticos proporcionan explícitamente información: libros, vídeos, programas informáticos.
- ✓ Guiar los aprendizajes de los estudiantes, instruir. Ayudan a organizar la información, a relacionar conocimientos, a crear nuevos conocimientos y aplicarlos. Es lo que hace un libro de texto por ejemplo.
- ✓ Ejercitar habilidades, entrenar. Por ejemplo un programa informático que exige una determinada respuesta psicomotriz a sus usuarios.
- ✓ Motivar, despertar y mantener el interés. Un buen material didáctico siempre debe resultar motivador para los estudiantes.
- ✓ Evaluar los conocimientos y las habilidades que se tienen, como lo hacen las preguntas de los libros de texto o los programas informáticos.
- ✓ La corrección de los errores de los estudiantes a veces se realiza de manera explícita (como en el caso de los materiales multimedia que tutorizan las actuaciones de los usuarios) y en otros casos resulta implícita ya que es el propio estudiante

[9] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1999

quien se da cuenta de sus errores (como pasa por ejemplo cuando interactúa con una simulación).
- ✓ Proporcionar simulaciones que ofrecen entornos para la observación, exploración y la experimentación. Por ejemplo un simulador de vuelo informático, que ayuda a entender cómo se pilotea un avión.
- ✓ Proporcionar entornos para la expresión y creación. Es el caso de los procesadores de textos o los editores gráficos informáticos. [10]

2.4.4 TIPOLOGÍAS DE LOS MEDIOS DIDÁCTICOS.

A partir de la consideración de la plataforma tecnológica en la que se sustenten, los medios didácticos, y por ende los recursos educativos en general, se suelen clasificar en tres grandes grupos, cada uno de los cuales incluye diversos subgrupos:

A. Materiales convencionales:
- ✓ Impresos (textos): libros, fotocopias, periódicos, documentos...
- ✓ Tableros didácticos: pizarra, franelograma...
- ✓ Materiales manipulativos: recortables, cartulinas...
- ✓ Juegos: arquitecturas, juegos de sobremesa...
- ✓ Materiales de laboratorio...
- ✓ Materiales audiovisuales:
- ✓ Imágenes fijas proyectables (fotos): diapositivas, fotografías...
- ✓ Materiales sonoros (audio): casetes, discos, programas de radio...
- ✓ Materiales audiovisuales (vídeo): montajes audiovisuales, películas, vídeos, programas de televisión...

B. Nuevas tecnologías:
- ✓ Programas informáticos educativos: videojuegos, lenguajes de autor, actividades de aprendizaje, presentaciones multimedia, enciclopedias, animaciones y simulaciones interactivas.
- ✓ Servicios telemáticos: páginas web, weblogs, tours virtuales, webquest, cazas del tesoro, correo electrónico, chats, foros, unidades didácticas y cursos on-line.
- ✓ TV y vídeo interactivos[11].

***C.* Materiales audiovisuales:**
- ✓ Imágenes fijas proyectables (fotos): diapositivas, fotografías...
- ✓ Materiales sonoros (audio): casetes, discos, programas de radio...
- ✓ Materiales audiovisuales (vídeo): montajes audiovisuales, películas, vídeos, programas de televisión.

[10] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario nacional de formación de docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. 2002.
[11] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Tecnologías computaciones en el currículo de matemáticas.

A partir de la consideración de la funcionalidad que tienen para los estudiantes presentar la información y guiar la atención y los aprendizajes:

  - ✓ Explicitación de los objetivos educativos que se persiguen.
  - ✓ Diversos códigos comunicativos: verbales (convencionales, exigen un esfuerzo de abstracción) e icónicos (representaciones intuitivas y cercanas a la realidad).
  - ✓ Señalizaciones diversas: subrayados, estilo de letra, destacados, uso de colores.
  - ✓ Adecuada integración de medias, al servicio del aprendizaje, sin sobrecargar. Las imágenes deben aportar también información relevante.

- ✓ Organizar la información:
  - ✓ Resúmenes, síntesis, mapas conceptuales.
  - ✓ Organizadores *gráficos*: esquemas, cuadros sinópticos, diagramas de flujo.

- ✓ Relacionar información, crear conocimiento y desarrollar habilidades.
  - ✓ Organizadores previos al introducir los temas.
  - ✓ Ejemplos, analogías.
  - ✓ Preguntas y ejercicios para orientar la relación de los nuevos conocimientos con los conocimientos anteriores de los estudiantes y su aplicación.
  - ✓ Simulaciones para la experimentación.
  - ✓ Entornos para *la expresión y creación*[12].

2.4.5 La evaluación de los medios. Evaluar significa estimar en que medida el elemento evaluado tiene unas características que se consideran deseables y que han sido especificadas a partir de la consideración de unos criterios. Por lo tanto toda evaluación exige una observación, una medición y un juicio.

Además, siempre que se realiza una evaluación hay una intencionalidad y unos destinatarios, la evaluación se hace para algo y para alguien, a partir de ella muchas veces se tomarán decisiones. Así, y centrándonos en la evaluación de medios didácticos, cuando se evalúan unos materiales se puede hacer para saber cuáles tienen más información sobre un tema, cuáles son los mejores desde un punto de vista técnico, cuáles son los más adecuados para unos estudiantes determinados, etc. Y por otra parte los destinatarios de esta evaluación pueden ser los docentes, los diseñadores de materiales didácticos, los administradores de las instituciones educativas.

En cualquier caso, los criterios que se utilicen deben estar de acuerdo con la intencionalidad de la evaluación y con los destinatarios de la misma.

Por otra parte, cuando consideramos la evaluación de los medios didácticos, uno de los criterios que siempre suele estar presente es el de la eficacia didáctica, Es decir, su funcionalidad como medio facilitador de aprendizajes.

---

[12] MORENO, Luis. Instrumentos Matemáticos computacionales. En seminario nacional de formación de docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. 2002.

Como la eficacia didáctica al utilizar estos materiales depende básicamente de dos factores, las características de los materiales y la forma en la que se han utilizado con los estudiantes, suelen considerarse dos tipos de evaluación:

- ✓ ***La evaluación objetiva.*** La evaluación objetiva se centra en valorar la calidad de los medios didácticos.

Generalmente la realiza un especialista a partir de un estudio exhaustivo de las características del material, sin que intervengan los destinatarios finales del medio didáctico. No obstante, en ocasiones, cuando las editoriales de materiales didácticos o determinadas administraciones públicas e instituciones académicas quieren hacer una evaluación en profundidad de un producto, los materiales son utilizados y valorados por diversos especialistas y destinatarios finales del producto.

En cualquier caso, la evaluación suele hacerse a partir de la consideración de unos criterios de calidad que se concretan en unos indicadores que se pueden identificar en mayor o menor medida en los materiales que se evalúan.

Los resultados de la evaluación se suelen recoger en unas plantillas (más o menos extensas según el objeto y destinatarios de la evaluación) que incluyen diversos apartados:

Identificación del producto, valoración de acuerdo con los indicadores, evaluación global y comentarios.

- ✓ ***La evaluación contextual.*** La evaluación contextual valora la manera en la que se han utilizado los medios en un contexto educativo determinado. La máxima eficacia didáctica con el uso de los medios en un determinado contexto educativo se conseguirá utilizando adecuadamente materiales didácticos de calidad[13].

La tecnología que aún domina en las clases de matemáticas, es la tecnología del papel y el lápiz. Dicha tecnología se ideó como una prolongación externa de la memoria, funcionando así durante siglos. La organización actual de las matemáticas escolares es el reflejo del conocimiento matemático generado dentro de la cultura escrita y por eso, el 85% de las tareas matemáticas en la educación básica y media consisten en hacer cálculos. Esto se evidencia en los resultados de los estudiantes al enfrentarse a las pruebas saber o ICFES. En consecuencia, es frecuente creer que las habilidades matemáticas escolares tienen que ver con la habilidad de realizar algoritmos y procedimientos, actividades que en realidad no pueden considerarse como el aspecto más importante de un pensamiento matemático genuino.

Como la tecnología del papel y el lápiz ha perdurado durante mucho tiempo, se ha tornado invisible (pues nos hemos acostumbrado a su presencia) y las actividades que se generan a partir de ella se conciben como actividades matemáticas por eso, las

---

[13] MORENO, Luis. Las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas y ciencias. Avances y perspectiva. Op. cit., Vol 17

destrezas con los cálculos algorítmicos se conciben como independientes de la herramienta y son confundidas con capacidades matemáticas puras. De esta confusión proviene el temor de usar calculadoras en la clase de matemáticas. Las calculadoras estarían haciendo el trabajo matemático que debe hacer el estudiante. Cada vez se hace más fácil tener a nuestra disposición tecnologías computacionales que auxilian nuestra mente en el uso de algoritmos y cálculos, dadas sus posibilidades de procesamiento de la información.

La presencia de la tecnología nos compromete más a fondo con la tarea de reformulación de diseños didácticos y con la búsqueda de una actividad matemática más poderosa que la realización de algoritmos. A su vez, el interés por nuevos diseños didácticos y la utilización de los existentes obliga a reflexionar sobre la visión del conocimiento matemático escolar y sobre el aprendizaje de las matemáticas mediado por las tecnologías computacionales[14].

2.5 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVOS

La teoría del aprendizaje significativo. Dentro de las práctica pedagógicas podemos observar en el desempeño de los estudiantes que el aprendizaje se efectúa por medio de una serie ordenada de etapas las cuales nos orientan y nos dan pautas continuas del avance o retroceso en el proceso de aprendizaje que se lleva a cabo; es por esto que en desarrollo de del proyecto que llevo a cabo de la utilización de mediadores didácticos voy a considerar varios aportes que AUSUBEL identifica al referirse a los aprendizajes significativos.

2.5.1. Aprendizaje significativo. Según AUSUBEL un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (AUSUBEL; 1983, 18). Esto quiere decir que en el proceso educativo, es importante considerar lo que el individuo ya sabe (ideas previas) de tal manera que establezca una relación con aquello que debe aprender.

Este proceso tiene lugar si el educando tiene en su estructura cognitiva conceptos, estos son: ideas, proposiciones estables y definidos, con los cuales la nueva información puede interactuar.

Podemos concluir entonces luego de analizar lo que AUSUBEL considera como aprendizaje significativo que el aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante preexistente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o

[14] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Tecnologías computaciones en el currículo de matemáticas. 2003.

proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras.[15]

2.5.2 Condiciones para que ocurran los aprendizajes significativos. La esencia del proceso de aprendizaje significativo es que las ideas simbólicamente expresadas sean relacionadas de manera sustantiva y no arbitraria con lo que el aprendiz ya sabe, o sea, con algún aspecto de su estructura cognitiva específicamente relevante para el aprendizaje de esas ideas.

Este aspecto específicamente relevante puede ser una imagen, un símbolo, un concepto, una proposición: Que el material a ser aprendido sea relacionable o incorporable a la estructura cognitiva del aprendiz de manera no arbitraria. Un material con esas características es potencialmente significativo. Que el aprendiz manifieste una disposición a relacionar de manera sustantiva y no arbitraria el nuevo material, potencialmente significativo en su estructura cognitiva.

2.5.3 Ausubel plantea que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información.

Debe entenderse por "estructura cognitiva" al conjunto de conceptos e ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

Consideramos el siguiente Principio en el aprendizaje significativo:

2.5.3.1 Principio de Asimilación. El Principio de asimilación se refiere a la interacción entre el nuevo material que será aprendido y la estructura cognoscitiva existente origina una reorganización de los nuevos y antiguos significados para formar una estructura cognoscitiva diferenciada, esta interacción de la información nueva con las ideas pertinentes que existen el la estructura cognitiva propician su asimilación.

Por asimilación entendemos el proceso mediante el cual " *la nueva información es vinculada con aspectos relevantes y preexistentes en la estructura cognoscitiva, proceso en que se modifica la información recientemente adquirida y la estructura preexistente*“(AUSUBEL; 1983:71) al respecto Ausubel recalca: “Este proceso de interacción modifica tanto el significado de la nueva información como el significado del concepto o proposición al cual está afianzada”. (AUSUBEL; 1983:120).[16]

2.5.4 Tipos de aprendizajes significativos.

2.5.4.1 Significativos representacional. Es el más básico y del que dependen los otros.

- Atribución de significados a determinados símbolos (palabras).
- Identificación de símbolos con sus referentes (objetos, conceptos).

[15] AUSUBEL, David. Teoría del aprendizaje significativo.
[16] AUSUBEL, David. Conceptos centrales de la teoría de. La teoría del aprendizaje significativo.

- Los símbolos pasan a significar para el individuo aquello que los referentes significa.

2.5.4.2 De conceptos.

- Constituye en cierta forma un aprendizaje representacional pues los conceptos son también representados por símbolos particulares
- Son genéricos o categóricos.
- Representan abstracciones de los atributos esenciales o regularidades en eventos u objetos.

2.5.4.3 Proposicional.

- Aprendizaje del significado de las ideas en forma de proposición.
- El significado de las ideas expresadas verbalmente a través de los conceptos bajo forma de proposición.

Durante el curso del aprendizaje significativo tienen lugar dos procesos relacionados de gran importancia:

2.5.4.4 La diferenciación progresiva. A medida que el aprendizaje significativo se desarrolla los conceptos incluso se modifican y desarrollan, haciéndose cada vez más diferenciados. Esto produce una estructura cognoscitiva organizada jerárquicamente en la dirección arriba –abajo, con el consiguiente refinamiento conceptual.

2.5.4.5 La reconciliación integradora. En el aprendizaje supra ordenado o en el combinatorio las modificaciones producidas en la estructura cognoscitiva permiten el establecimiento de nuevas relaciones entre conceptos, evitando la compartimentalización excesiva.[17]

2.5.4.6 Tipos de aprendizaje significativo según la relación la jerárquica con la información existente:

SUBORDINADO.	**Subsunción derivativa**. Donde lo nuevo tiene carácter de ejemplo o ilustración de lo ya existente. **Subsunción correlativa**. Donde lo nuevo es una extensión, elaboración, modificación o cualificación de lo existente.
SUPRAORDENADO	Se da cuando el sujeto integra conceptos ya aprendidos anteriormente dentro de un nuevo concepto integrador más amplio e inclusivo
COMBINATORIO	Los nuevos conceptos no pueden ser ni sub ni supraordenadamente, estos nuevos conceptos se relacionan de una forma general con la estructura cognitiva ya existente

La función principal de los organizadores previos es:

[17] www.educacioninicial.com/ei/contenidos.

- Servir de puente entre lo que el individuo ya sabe y lo que debe llegar a saber, para que el conocimiento pueda ser aprendido de manera significativa.

- Los organizadores previos son útiles para facilitar los aprendizajes ya que actúan a manera de puentes cognitivos.

Gran parte de la psicología cognitiva hace referencia a los elementos que se relacionan con el proceso de enseñanza aprendizaje, HERBART hace referencia en este aspecto de cómo en los procesos de aprendizaje todos los procesos que allí intervienen proporcionan de manera más precisa un verdadero aprendizaje, es por eso que para el análisis de este trabajo de aprendizajes significativos tengo en cuenta los siguientes postulados:

Postulados centrales en la Psicología Cognitiva:
- Los procesos psicológicos superiores son de naturaleza socio –histórica y cultural.
- La inteligencia y el lenguaje son productos de contextos socio –culturales específicos.
- La conciencia humana se forma en contextos de relaciones socio –culturalmente organizados.
- La conciencia se desarrolla a través de la mediación cultural.
- Sin lenguaje no es posible alcanzar lo que nos caracteriza como humanos pues es fundamental para apropiarse de la cultura.
- La conciencia se forma y desarrolla a través de dos formas de mediación social con:
- *el contexto socio –cultural*
- *los productos -artefactos socio –culturales.*
- *La cultura es transformada por el sujeto a la misma vez que la interioriza en procesos simultáneos*.
- Existe una inteligencia potencial (una zona de desarrollo potencial) que posibilita la construcción y desarrollo de nuevas herramientas internas para aprender así como la elaboración de herramientas externas en la vida cotidiana.
- La inteligencia es en primer lugar, interindividual y en segundo lugar intra individual.
- El aprendizaje es fundamental para la inteligencia.
- El aprendizaje ocurre dentro de un contexto social y cultural determinado.
- El aprendizaje puede modificar la estructura cognitiva.[18]

[18] PÉREZ, Román y PÉREZ, Díez (2000) en su artículo "El Currículum como Desarrollo de Procesos Cognitivos y Afectivos".

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. PROPUESTA METODOLÓGICA

Esta investigación pretende que el alumno aprenda y comprenda los conceptos matemáticos y que no sólo los ocupe una vez sino que los pueda relacionar con temas posteriores.

La metodología a utilizar en un una primera etapa es la observación directa, mediante la cual se llevarán los registros de los alumnos y del profesor de matemáticas , con el fin de establecer posibles problemas que se estén presentando en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática; se realizarán entrevistas, para establecer falencias en los procesos de aprendizaje y enseñanza que no fueron observadas en la anterior etapa, en la segunda etapa se pondrán en marcha las actividades correspondientes al UNIDAD DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE FACTORIZACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS, al finalizar las actividades se realizara una evaluación del proceso con los diferentes componentes que participaron del proceso.

En el desarrollo del proyecto seguiré los siguientes posos:

- LA PREPARACIÓN: esta consiste en relacionar conocimientos previos con el tema nuevo a tratar (aplicación prueba diagnóstica).[19]

- LA PRESENTACIÓN: elaboración de material y aplicación de guías.[20]

- LA COMPARACIÓN O ABSTRACCIÓN: Resultados de las guías ya trabajadas, socialización con los estudiantes.

- LA APLICACIÓN: el estudiante pone en práctica sus conocimientos para poder lograr un aprendizaje significativo a través de la aplicación de prueba final.

El seguimiento de esta investigación se hará a través del Análisis de Experiencia Didáctica, es decir, mediante la socialización del trabajo realizado con las guías en un Plan de clase y teniendo en cuenta que es un trabajo experimental que se lleva a cabo con los estudiantes del grado 9°1.

El trabajo experimental se lleva a cabo con los estudiantes a través de guías didácticas que surgen de la recopilación de un trabajo experimental realizado por la profesora María Cristina Pérez de la Universidad Nacional, se considera importante resaltar que se hizo una selección de las más importantes para llevar a cabo la propuesta de

[19] Anexo A
[20] Ver anexo B

intervención pedagógica con los estudiantes, además es recomendable que siempre que se utilicen medios didáctico que faciliten el proceso de aprendizaje en los estudiantes se diseñe una guía didáctica que permita que los estudiantes paso a paso logren un aprendizaje significativo a través de sucesivas etapas.

La propuesta planteada para contribuir en la solución al problema detectado esta integrada por actividades didácticas, la utilización del álgebra geométrica como un medio didáctico de enseñanza.

El resolver actividades didácticas como agilidad mental en operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números con signo, ayuda a detectar si los alumnos aprendieron las reglas de los signos y si existe confusión para aplicarlos en el momento adecuado.

La identificación de términos semejantes mediante tarjetas, ayuda a que el alumno analice las características entre un término y otro. Así mismo, el planteamiento de situaciones que impliquen el uso del cálculo de perímetros y áreas despierta el interés en el adolescente, ya que el alumno de secundaria considera que álgebra es solamente letras y procedimientos tediosos, al manipular figuras geométricas para el cálculo de áreas y perímetros hacen que relacione la suma resta y multiplicación de monomios y polinomios lo cual es de gran ayuda, ya que el estudiante comprende más fácilmente el tema, porque se está demostrando lo planteado y aplica los conocimientos adquiridos en la solución de problemas.

Por último para abordar el tema de Productos Notables y Factorización se utiliza la geometría a través del álgebra geométrica donde los alumnos comprobaron que con el manejo de diferentes figuras y formando un cuadrado, al obtener su área da como resultado el cuadrado de un binomio $(a+b)^n$, y que posteriormente se desarrollará; lo que se pretende es que el alumno compruebe cómo se obtiene el cuadrado de un binomio partiendo del cálculo de áreas.

Algunas de las habilidades a desarrollar en los estudiantes son: la generalización, estimación de resultados, capacidad para encontrar relaciones y representaciones en forma geométrica, aptitud para el razonamiento lógico, agilidad mental en el cálculo y otras.

3.2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA METODOLÓGICA:

El trabajo a realizar en el proyecto: “Aplicación de los mediadores didácticos, para el aprendizaje de la factorización en el grado 91” de la INSTITUCIÓN EDUCATIVA PRESEBITERO BERNARDO MONTOYA GIRALDO, se llevará a cabo en varias etapas:

Se evidenció a través de la prueba semestral aplicada a los estudiantes del grado 8º1 en noviembre del 2007 que los estudiantes presentaban mucha dificultad para factorizar, por lo que se planteó el trabajo con este grupo aplicando un mediador didáctico, para mejorar el proceso de aprendizaje en los estudiantes.

Los estudiantes del grado 9º1 presentan dificultad en identificar reglas que caracterizan las expresiones para factorizar como tal, por lo tanto realizaban procedimientos inadecuados.

Se planteó la elaboración de guías para llevar a cabo la intervención pedagógica y así facilitar en los estudiantes la utilización del álgebra geométrica. El diseño de las guías fue tomado del modelo que planteó la profesora María Cristina Pérez de Díaz de la universidad nacional en el texto: "El álgebra desde una perspectiva geométrica".

Se inició el trabajo con los estudiantes el 29 de enero, en donde se planteó como primera actividad el conocimiento del material, a través de la construcción del mismo; los estudiantes elaboraron el álgebra geométrica en fomi y/o cartulina plana, se hizo la socialización del material a través de la construcción de cuadrados y rectángulos.

- Se trabaja en la obtención de perímetro y área.
- Se evidenció en el trabajo de los estudiantes que expresan correctamente áreas y perímetros, utilizando el álgebra geométrica.
- Concluyen productos expresando como área cuadrados perfectos.
- Identifican fácilmente material
- Representan cuadrados y hallan áreas con las inducciones dadas.
- Siguen orientaciones fácilmente.

Se pasó a la aplicación de las guías:

La guía N° 1 comprendía:[21]

1. Hallar áreas.
2. Efectuar productos y representación gráfica.
3. Representar áreas (gráficas)
4. Efectuar productos teniendo en cuenta lo anterior.
5. Factorizar y clasificar si son o no trinomios cuadrados perfectos,

La guía Nº 2 comprendía:

1. Hallar áreas.
2. Efectuar productos, representar gráficas.
3. Representar áreas, gráficas
4. Efectuar productos, teniendo en cuenta lo anterior.
5. Factorizar y clasificar si son o no trinomios cuadrados perfectos.

La guía Nº 3 comprendía: producto notable (x+a) (x+b), trinomio x2 + bx + c

1. Expresar áreas
2. Efectuar productos y representar gráficamente.
3. Armar rectángulos asociados a los trinomios $x^2 + bx + c$
4. Hallar áreas sombreadas
5. Resolver trinomios y graficar.
6. Representar gráficamente los trinomios planteados.

[21] Ver anexo B,Guías

7. Hallar área total, áreas sombreadas y áreas no sombreadas.
8. Hallar productos y representarlos gráficamente.
9. Representar trinomios.
10. Completar el trinomio y explicar procedimiento.
11. Hallar productos.
12. Factorizar trinomios $x^2 + bx + c$

La guía Nº 4 comprendía: Diferencia de cuadrados perfectos.

1. Áreas sombreadas.
2. Hallar productos y graficar suma por diferencia
3. Armar rectángulos con Diferencia de cuadrados.
4. Ejercicios de ejercitación.
5. Resolver productos y diferencia de cuadrados.

La guía Nº5 comprendía: cubos perfectos.

1. Hallar volumen de figura completa y de figura fraccionada.
2. Hallar arista y hallar volumen como suma de volúmenes parciales.
3. Hallar dimensión de aristas y expresar volúmenes en término de estas.
4. Hallar volumen del cubo, parte sombreada y enunciar conclusiones.
5. Hallar aristas y volúmenes.
6. Determinar si son o no volúmenes y clasificar.
7. Completar volúmenes.
8. Resolver productos.

La guía del taller Nº6 comprendía: Ejercitación talleres anteriores.

1. Productos notables suma y diferencia cantidades al cuadrado.
2. Trinomio cuadrado perfecto.
3. Producto suma por diferencia
   Trinomio $x^2 + bx + c$
   Producto suma por diferencia.
   Diferencia de cuadrados.
4. Cubos perfectos.
5. Completación método gráfico.
6. Completación de trinomios.

La intervención pedagógica finalizó con la aplicación de la prueba final donde se evidenció un buen desempeño y muy a la par con los resultados obtenidos en el trabajo de aplicación de guías.

En la parte conceptual y en la factorización de cubos perfectos menor desempeño.

La intervención pedagógica propuesta para los estudiantes del grado 9º1 en la dificultad observada, se tomo teniendo en cuenta los trabajos realizados desde la propuesta de aula talleres o laboratorios de matemáticas, planteadas por la universidad nacional y el ministerio de educación departamental en las mesas de trabajo realizadas a nivel departamental, este trabajo se viene desarrollando aproximadamente desde el año 1999 en el departamento de Antioquia.

En la licenciatura, matemáticas y física de la universidad de Antioquia en el curso de integración didáctica IV asesorada por el profesor Armando Bedoya, se plantea para los estudiantes la utilización de esta herramienta pedagógica (álgebra geométrica) para un acercamiento de los estudiantes con el álgebra.

3.3 MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN

El método de investigación utilizado para esta investigación fue el estudio de caso, ya que al observar la dificultad presentada por los estudiantes del grado de la I.E. Presbítero Bernardo Montoya Giraldo se hizo necesario presentar una propuesta pedagógica que permitiera en estos estudiantes superar la dificultad presentada a la hora de factorizar, por lo tanto se planteó la utilización del álgebra geométrica como mediador didáctico y la utilización de guía que permitan en el estudiante desarrollar paso a paso la aplicación de este mediador.

3.4 POBLACIÓN

La población objeto de estudio son los estudiantes de grado 9º1 de la jornada de la mañana, de la Institución Educativa Presbítero Bernardo Montoya Giraldo.

Muestra: La muestra son los estudiantes del grado 9º1 de la INSTITUCION EDUCATIVA PRESBITERO BERNARDO MONTOYA (40 ESTUDIANTES)

3.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Para evaluar el desempeño de los estudiantes se hizo uso de diferentes técnicas que permitan obtener información cuantitativa y cualitativa, así como los instrumentos más representativos de ellas.

Técnicas:

Técnica de resolución de prueba escrita:

- Al finalizar el año, se hizo prueba semestral a los estudiantes del grado 8º1 en el año 2007 donde se evidenció que los estudiantes presentaban dificultad al factorizar expresiones algebraicas.

Técnica de observación:

- Se observó en los estudiantes de la I.E. Presbítero Bernardo Montoya Giraldo, luego de observar los resultados de la prueba semestral aplicada, que presentaban dificultad al factorizar expresiones algebraicas, por lo tanto se hizo necesario plantear la utilización de mediadores didácticos para superar la dificultad que los estudiantes presentan.
- Aplicación del mediador didáctico: el álgebra geométrica y la utilización de guías para la aplicación de este mediador, se observó en los estudiantes un mejor desempeño a la hora de factorizar expresiones algebraicas, su ejercitación y demostración geométrica.

Instrumentos de investigación

Prueba de selección múltiple:

- Los enunciados presentados en la prueba inicial y final a los estudiantes del grado 9º1, fueron enunciados cortos que permitieron evaluar varios contenidos de la facorización de expresiones algebraicas, donde el alumno seleccionaba la respuesta correcta sin necesidad de justificar la respuesta a través de procedimientos.

- La opción de la respuesta debe responder totalmente a la pregunta.

Pruebas por temas:

- Se utilizaron guías por temas en los que el alumno debe construir las respuestas utilizando un estilo propio, considerando los resultados obtenidos al utilizar el álgebra geométrica y apoyándose en la información existente al respecto, siguiendo el orden de la presentación de la guía planteada.

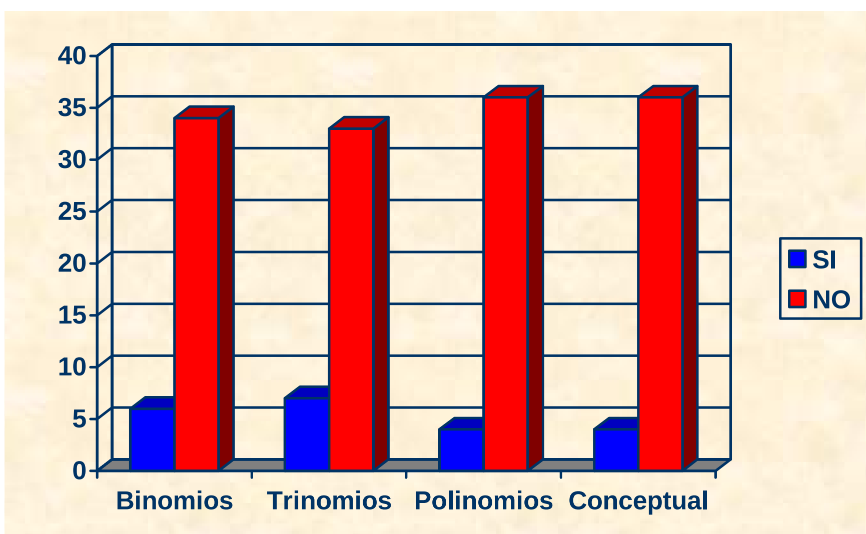
- A través de este instrumento se pudo evaluar objetivos relacionados con la factorización de expresiones algebraicas utilizando el álgebra geométrica como mediador didáctico para su aprendizaje, así como la forma en que el alumno analiza, organiza y presenta la información requerida.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

La aplicación de las diferentes pruebas y guías propuestas para el desarrollo del proyecto planteado, arrojó resultados significativos en los estudiantes, es importante resaltar que fue muy motivador el trabajo realizado con el álgebra geométrica, ya que los estudiantes presentaban una actitud motivadora en el trabajo a realizar, factor que influyó mucho en el resultado obtenido.

En los resultados presentados a continuación, se presentan los aspectos valorativos: **SI**, significa que los estudiantes realizaron correctamente la actividad planteado, oque factorizan correctamente las expresiones algebraicas planteadas.
NO, significa que los estudiantes realizaron en forma errónea la actividad planteada o no factorizaron correctamente las expresiones planteadas.

PRUEBA DIAGNÓSTICA



Valoración	Factorizac. Trinomio	Factorizac. Polinomio	Factorización Binomio	Conceptual	Ejercitación
SI	7	4	6	4	5
NO	33	36	34	36	35

Los estudiantes del grado 9º1 presentan dificultad; según los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, en cuanto a la identificación de reglas que caracterizan las expresiones para factorizarlos como tal, por lo tanto procedimientos inadecuados.

Mayor dificultad en la factorización de expresiones algebraicas que requieran el uso de factor común por agrupación y cubos perfectos, al igual que en la ejercitación y conceptualización de las expresiones algebraicas.

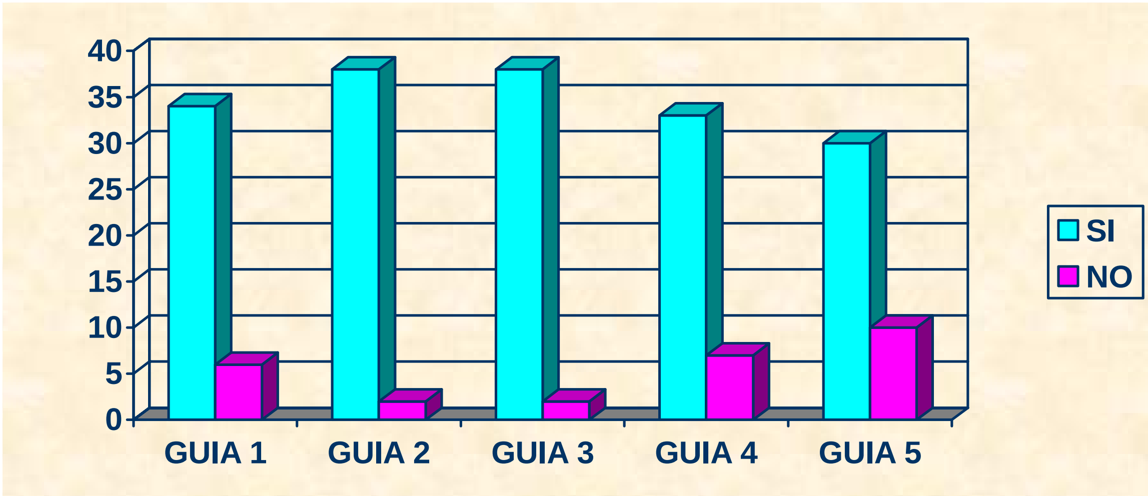
Resultados obtenidos luego de evaluar:

a. Parte conceptual: presentan dificultad en describir características de las expresiones, tales como: que son y como se identifican.
b. Binomios: presentan dificultad en la identificación de los mismos y en su factorización. (Diferencia de cuadrados y cubos perfectos, binomio factor común)
c. Trinomios: Trinomio cuadrado perfecto, trinomio $x^2 + bx + c$, trinomio $ax^2 + bx +c$. Presentan mucha dificultad en identificarlos y por lo tanto los factorizan en forma incorrecta.
d. Polinomios: Monomio factor común, factor común por agrupación de término, cubos perfectos. Presentan mucha dificultad en la factorización de los mismos, en especial de los cubos perfectos.
e. Ejercitación: presentan mucha dificultad en la factorización de expresiones algebraicas, ya que no las identifican correctamente y por lo tanto sus procedimientos son equivocados.

Aplicación De Guías

Para el desarrollo de la intervención pedagógica planteada se planteó a los estudiantes el trabajo orientado a través de 6 guías, cinco de las cuales tenían que ver con la factorización de expresiones a través de la demostración geométrica con la utilización del álgebra geométrica y la sexta guía con el desempeño general recogiendo el trabajo de las primeras cinco guías.
El trabajo con las guías se realizó durante 6 semanas consecutivas a partir del 4 de febrero, 2 horas semanales de 6º minutos cada intervención.

La totalidad de estudiantes del grado 9°1 es de 40 .



Valoración	GUIA Nº 1	GUIA Nº 2	GUIA Nº 3	GUIA Nº 4	GUIA Nº 5
SI	34	38	38	33	30
NO	6	2	2	7	10

Las guías 1 y 2 hacen referencia a la misma temática solo se diferencian en el signo ($x^2 + 2x + 1$) ($x^2-2x +1$)[22]

Los estudiantes del grado 9º1 durante la aplicación de guías mostraron el siguiente desempeño:

Guía 1: Cuadrado de un binomio y trinomio cuadrado perfecto
Los estudiantes presentan mejor nivel de comprensión en la factorización del trinomio cuadrado perfecto, además identifican claramente las características que tiene este trinomio para que sea cuadrado perfecto.

La guía Nº 1 comprendía:

a. Hallar áreas. Se observó en el trabajo de los alumnos hallaban con facilidad las áreas especialmente como producto de las dimensiones de sus lados.
b. Efectuar productos y representación gráfica. En general la mayoría de los estudiantes, realizaron correctamente la actividad planteada en la guía, al principio un poco de dificultad para representar gráficamente, ya que los estudiantes sumaban los rectángulos alrededor de todo el cuadrado, o a un solo lado del cuadrado.
c. Representar áreas (gráficas). Muy motivados con los resultados obtenidos.
d. Efectuar productos teniendo en cuenta lo anterior. Con mayor agilidad y comprensión presentan los ejercicios planteados.
e. Factorizar y clasificar si son o no trinomios cuadrados perfectos, se observó en los alumnos muy buen desempeño en las actividades planteadas, desarrollaron con facilidad la actividad propuesta, preocupante el resultado de los estudiantes que no

[22] Ver anexo B, guías 1 y 2.

lograron factorizar correctamente, que no es por falta de buena didáctica sino por actitud de los estudiantes.

Los estudiantes al enunciar regularidades (comparación de los resultados obtenidos para deducir lo observado, planteamiento de características comunes observadas y/o resultados iguales), presentan buen desempeño 31 estudiantes, 5 en forma regular y 4 lo hacen mal.

VALORACIÓN	ÁREAS	EFEC. PROD	REPR. ÁREA	FACT.Y CLA
SI	32	33	36	36
NO	8	7	4	4

La guía Nº 2 comprendía:

a. Hallar áreas. Se observó en el trabajo de los alumnos, hallan con facilidad las áreas especialmente como producto de las dimensiones de sus lados
b. Efectuar productos, representar gráficas.
c. Representar áreas, gráficas
d. Efectuar productos, teniendo en cuenta lo anterior.
e. Factorizar y clasificar si son o no trinomios cuadrados perfectos. se observó que los alumnos en las actividades planteadas, desarrollan con facilidad la actividad propuesta.

Valoración	Hallar áreas	Efectuar Productos	Representar áreas	Efectuar productos	Factorizar y Clasificar
Si	32	33	36	36	36
No	8	7	4	4	4

La guía Nº 3 comprendía: producto notable (x+a) (x+b), trinomio $x^2 + bx + c$

a. Expresar áreas. Con mayor agilidad, deducen que aquí el resultado ya no es un cuadrado sino un rectángulo.
b. Efectuar productos y representar gráficamente. Lo realizan satisfactoriamente
c. Armar rectángulos asociados a los trinomios $x^2 + bx + c$. con mucha claridad y buen desempeño.
d. Hallar áreas sombreadas. Les da dificultad el restar la parte no sombreada del total de la longitud del lado, con la respectiva explicación, comprendieron y presentaron buenos resultados.
e. Resolver los trinomios y hacen correctamente la representación geométrica a través del álgebra geométrica.
f. Representar gráficamente los trinomios planteados. Lo realizaron ágilmente y en forma correcta.
g. Hallar área total, áreas sombreadas y áreas no sombreadas. La mayoría de los estudiantes en forma comprensiva hallan en forma correcta áreas, sombreadas y no sombreadas.
h. Hallar productos y representarlos gráficamente. Lo realizaron en forma correcta la mayoría de los estudiantes.

i. Representar trinomios. Fue una de las actividades que mejor trabajaron los estudiantes pues ya comprendían muy bien cada procedimiento a realizar.
j. Completar el trinomio y explicar procedimiento.
k. Hallar productos.
l. Factorizar trinomios $x^2 + bx + c$. Lo realizaron bien es decir, en forma comprensiva con ayuda del álgebra geométrica identifican bien y lo factorizan en forma correcta

En conclusión en el desarrollo de esta guía, se observó que los alumnos, ya con mayor agilidad y con menos explicación por parte del educador, realizaron las actividades planteas obteniéndose la factorización correcta de las expresiones, es de anotar que los alumnos a la hora de escribir explicaciones requeridas son poco expresivos.

Valoración	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Si	34	34	36	32	34	36	32	33	36	30	35	37
No	6	6	4	8	6	4	8	7	4	10	5	3

La guía Nº 4 comprendía: Diferencia de cuadrados perfectos.

a. Áreas sombreadas.
b. Hallar productos y graficar suma por diferencia
c. Armar rectángulos con Diferencia de cuadrados.
d. Ejercicios de ejercitación.
e. Resolver productos y diferencia de cuadrados.

En términos generales, se evidenció en el desarrollo de esta guía un buen nivel de comprensión al realizar las tres primeras actividades de la guía, en la cuarta actividad un poco de confusión, pero en la socialización del desarrollo de la guía se con las explicaciones correspondientes se aclararon dudas y se corrigieron errores presentados. Esto se evidenció en el desarrollo y resultado obtenido el la actividad Nº 5 planteada en esta guía.

Valoración	Áreas sombreadas	Productos y gráfica	Armar rectángulos con D. C	Ejercitación	Productos y D.C
SI	33	36	32	25	34
NO	7	4	8	15	6

La guía Nº 5 comprendía: cubos perfectos.
a. Hallar volumen de figura completa y de figura fraccionada.
b. Hallar arista y hallar volumen como suma de volúmenes parciales.
c. Hallar dimensión de aristas y expresar volúmenes en término de estas.
d. Hallar volumen del cubo, parte sombreada y enunciar conclusiones.
e. Hallar aristas y volúmenes.
f. Determinar si son o no volúmenes y clasificar.
g. Completar volúmenes.
h. Resolver productos.

Podemos concluir del trabajo realizado en la guía # 5, que los estudiantes presentaban mucha dificultad en el trabajo con figuras tridimensionales pues desconocían términos propios de estas figuras geométricas, no identificaban las aristas.
Mejoró el nivel de comprensión y ejercitación al realizar los ejercicios propuestos en la guía, luego del trabajo de la cuarta actividad cuando ya tenían más conocimiento de la temática y luego de la manipulación del material utilizado.

Valoración	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Si	26	29	27	30	31	28	30	32
No	14	11	13	10	9	12	10	8

La guía del taller Nº 6 comprendía:
Ejercitación talleres anteriores.

a. Productos notables suma y diferencia cantidades al cuadrado.

b. Trinomio cuadrado perfecto.

c. Producto suma por diferencia
   - Trinomio x^2 + bx +c
   - Producto suma por diferencia.
   - Diferencia de cuadrados.

d. Cubos perfectos.

e. Completación método gráfico.

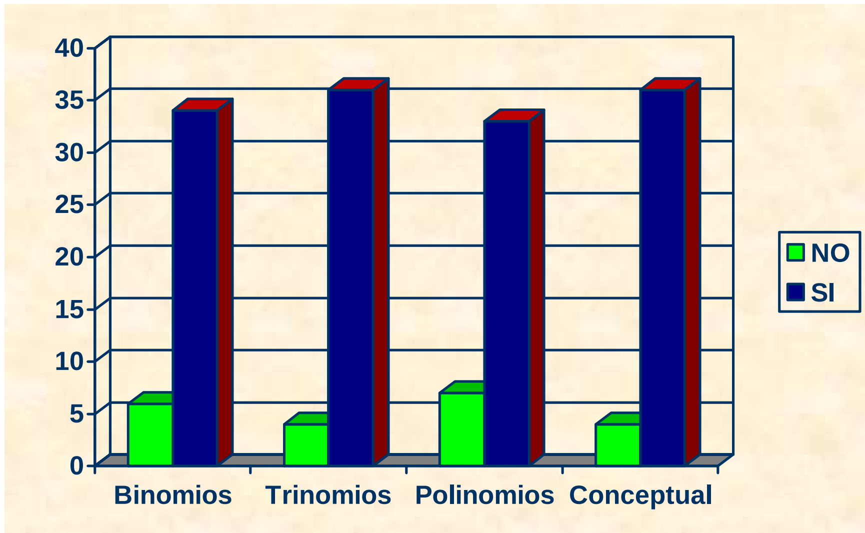
f. Completación de trinomios.

En la aplicación de esta guía se observó buen desempeño de los estuantes a la hora de factorizar cada expresión, ya que la utilización del álgebra geométrica les permitió la identificación de cada expresión, obteniendo así un buen resultado a la hora de factorizar, se superó notablemente la dificultad presentada en la factorización de los cubos.

Valoración	SumX Difer.	T.C.P	S X D X^2+bx+c	Cubos perfectos	Completaci- Método gráfico	Completación Trinomio
Si	34	37	37	32	30	31
No	6	3	3	8	10	9

PRUEBA FINAL

Finalizado el trabajo con la guías, se aplicó a los estudiantes la prueba final en dos horas de clase para determinar con mayor certeza si los estudiantes del grado 9º1 lograron un mejor aprendizaje de la factorización de expresiones algebraicas, se utilizó la misma técnica de la prueba diagnóstica.



Valoración	Binomios	Trinomios	Polinomios	Conceptual
Si	34	36	33	36
No	6	4	7	4

En la aplicación de la prueba final se tuvo en cuenta lo siguiente:

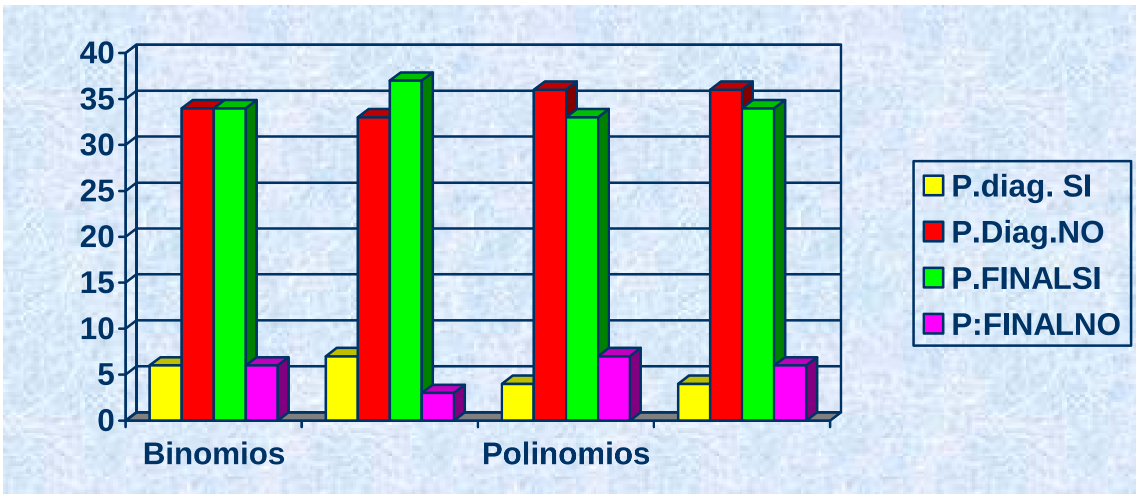
- ***Binomios:***
  - Diferencia de cuadrados: donde 34 de los 40 estudiantes lo realizaron correctamente.
  - Cubos perfectos: donde 31 de los 40 estudiantes factorizaron correctamente, se evidenció que superaron muchas dificultades que presentaban, ya que el trabajo con figuras tridimensionales como el cubo les daba dificultad.

- ***Trinomios:***
  - Trinomio cuadrado perfecto, 38 de los 40 estudiantes factorizan correctamente estas expresiones
  - Trinomio de la forma Xº + bx + c 35 d los 40 estudiantes lo realizaron correctamente, se noto en los estuantes muy y buen nivel de desempeño.
  - Trinomio de la forma axº+bx+c, 34 de los estudiantes factorizaron correctamente las expresiones dadas.
  - Completación de trinomios, 30 de los 40 estudiantes factorizaron correctamente.

- ***Polinomios***:
  - Factor común por agrupación de términos, 32 de los 40 estudiantes lo factorizaron correctamente.
  - Cubos perfectos, 30 de los 40 estudiantes factorizaron correctamente, se superó un tanto la dificultad en la factorización de estas expresiones presentadas en la prueba inicial.

Su desempeño en general fue bueno, es importante tener en cuenta que la gran mayoría de los estudiantes estuvieron muy dinámicos y atentos en el trabajo con el álgebra geométrica, al igual que la presentación de la prueba final, era notorio el dominio que tenían de la temática que se les evalúa.

COMPARACIÓN
PRUEBA DIAGNOSTICA Y PRUEBA FINAL



PRUEBA INICIAL

Valoración	Factorizac. Trinomio	Factorizaci. Polinomio	Factorización Binomio	Conceptual	Ejercitación
SI	7	4	6	4	5
NO	33	36	34	36	35

PRUEBA FINAL

Valoración	Binomios	Trinomios	Polinomios	Conceptual
Si	34	37	33	34
No	6	3	7	6

Haciendo la comparación de la prueba inicial y la prueba final presentada por los estudiantes en la factorización de expresiones algebraicas, vemos como en la prueba final se obtuvo un nivel alto de dominio en la factorización de expresiones algebraicas , se observa casi el resultado opuesto, es decir el número de estudiantes que presentaban dificultad en la comprensión de la factorización y en su ejercitación antes de la intervención utilizando el álgebra geométrica como medio didáctico y las guías didácticas planteadas, lograron en su mayoría superar la dificultad ya que el álgebra geométrica les facilitó la comprensión ,a través de su demostración geométrica hallando áreas de cuadrados y rectángulos lo que les permitió identificar y aplicar los procedimientos adecuados al factorizar las expresiones.

Es importante en el trabajo con los estudiantes del grado 9º1 profundizar en lo espacial ya que presentaron en el desarrollo de esta intervención mucha dificultad en el trabajo con lo tridimencional.

A pesar del poco tiempo trabajado en el desarrollo de cada guía los estudiantes se apersonaron con mucha motivación del trabajo que estaban realizando.

El aprendizaje fue muy significativo en especial en aspectos en los que AUSUBEL hace referencia:

Aprendizaje de representaciones: los estudiantes a través de la representación geométrica de las expresiones algebraicas propuestas, era más claro y evidente para los alumnos que esas expresiones algebraicas son el producto del área de cuadrados o de rectángulos.

Aprendizaje de conceptos: los estudiantes a través de las representaciones, es decir a través de la experiencia directa, como lo plantea AUSUBEL, en sucesivas etapas de formulación e hipótesis, lograron adquirir un significado más claro de la clasificación de las expresiones algebraicas y sus procesos correctos para factorizarlos.

Aprendizaje de proposiciones: se logró en los estudiantes al evaluar conjuntamente la representación geométrica de las expresiones y la ejercitación que demostraron los estudiantes al factorizar las expresiones planteadas.

La utilización del medio didáctico en la intervención pedagógica realizada, permitió en los estudiantes un aprendizaje motivador, eliminando muchas de las actitudes de fobia hacia la matemática que los estudiantes mostraban a la hora de factorizar.

El resultado obtenido, comparando el desempeño inicial de los estudiantes y el desempeño final, es muy bueno, en un 90% los estudiantes presentan un mejor desempeño, acompañado no solo de la ejercitación sino del trabajo concreto con material que le permite un acercamiento de las matemáticas con la realidad, logrando así que en los estudiantes el conocimiento perdure por más tiempo, ya que lo simbólico es muy importante en la construcción y apropiación del conocimiento.

5. CONCLUSIONES

- Con el ánimo de plantear una alternativa de solución a la problemática observada en los estudiantes del grado 9º1, se diseñó una propuesta metodológica en la que se utilizó un mediador didáctico para la enseñanza de la factorización, es evidente que la utilización del medio didáctico permitió a los estudiantes un mejor acercamiento a las matemáticas, ya que los estudiantes demostraron buen desempeño general al factorizar expresiones algebraicas.

- La utilización del álgebra geométrica como mediador didáctico, permitió que los estudiantes comprendieran mejor la factorización.

- Las guías didácticas planteadas para el desarrollo de la intervención pedagógica permitieron en los estudiantes un trabajo eficaz y que los estudiantes comprendieran utilizando el álgebra geométrica la factorización de expresiones algebraicas.

- Para dar solución a la problemática observada en los estudiantes del grado 9º1, fuera muy acertada el replanteamiento de las estrategias metodológicas de trabajo dentro del aula con los estudiantes, es importante que nosotros los maestros hagamos uso de nuevas tecnologías e innovemos nuevos métodos para que logremos un mejor aprendizaje de las matemáticas y por ende eliminar la fobia que muchos de los estudiantes tienen hacia las mismas.

- La utilización del álgebra geométrica para la factorización de expresiones algebraicas permitió que se enriqueciera el esquema de la significación, a través de una aproximación intuitiva de los conceptos, propiedades y algoritmos del álgebra.

- La utilización del álgebra geométrica como medio didáctico para la factorización de expresiones algebraicas logró despertar en los estudiantes un alto nivel de motivación hacia el trabajo de las matemáticas, eliminó en muchos la fobia que tenían en el trabajo con expresiones algebraicas

6. RECOMENDACIONES

- Para los educadores que tienen a cargo la orientación de los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, es importante que tengan a la mano para el trabajo con los estudiantes, suficientes herramientas didácticas para que les faciliten una mejor comprensión de la temática y se logre un mejor acercamiento con los temas nuevos que se les planteen.

- Aprovechar en la enseñanza de las matemáticas, todas las herramientas tecnológicas que en la actualidad se tienen, permitiendo que el aprendizaje para los estudiantes sea más significativo y motivante, aprovechando todas las habilidades y destrezas que los estudiantes poseen.

- Dejar a un lado las técnicas tradicionales, de tiza y tablero a la que estamos tan apegados todavía muchos maestros.

- Tener en cuenta los resultados obtenidos luego de aplicar un medio didáctico para en un futuro mejor los procesos con los estudiantes.

- Es importante darnos cuenta que en la actualidad se poseen muchos medios didácticos inutilizados, por lo tanto es necesario mejor día a día nuestro quehacer pedagógico haciendo uso de los mismos.

7 IMPORTANCIA DEL PROYECTO

Se reconoce que la Educación Matemática es pues, un dominio de estructura compleja. Quienes nos desempeñamos en ella, tenemos el compromiso de contribuir con la construcción de conceptos teóricos que, además de integrar las perspectivas de las diferentes disciplinas frente al acto educativo, sirvan para mejorar las prácticas de aula, desarrollando cada vez mejores propuestas de enseñanza que atiendan a las necesidades y realidades de los estudiantes y contribuyan con su aprendizaje.

Se hace necesario entonces la presentación de un trabajo metodológico diferente orientado a través de mediadores didácticos y/o facilitadores didácticos que permitan una mejor comprensión de la factorización a la hora de abordarlo con los estudiantes de los grados 9º.

A la luz de los avances en las matemáticas, las aula talleres o laboratorios de matemáticas impactan y juegan un papel muy importante, ya que en actualmente vivimos en una sociedad cambiante que demanda una educación actualizada; el maestro ya no es simplemente el emisor sino que aprende con los alumnos nuevas cosas y el alumno no solamente es receptor ya que encuentra un porqué de las situaciones que se le plantean y las cuestiona, es por eso que se hace necesario la utilización de diferentes medios didácticos para la práctica del docente dentro del aula.

El álgebra geométrica es tomada en esta investigación como un medio didáctico y un instrumento que se podrá utilizar en el proceso enseñanza-aprendizaje en diferentes momentos en acercamiento con el trabajo con expresiones algebraicas

En nuestro desempeño como maestros la educación debe ser considerada como un reto, el profesor debe buscar las mejores estrategias, técnicas o métodos para poder alcanzar los propósitos planteados, brindando herramientas a nuestros estudiantes que le ayuden a enfrentarse a las diferentes situaciones que se le presentan en la vida cotidiana.

Para poder llevar a cabo esto, debemos conocer las necesidades y exigencias que tienen los alumnos y no solamente enfocarnos en terminar los contenidos porque así lo marca un programa, sino esforzarnos para que los alumnos aprendan y comprendan los contenidos educativos que le ayudan a resolver problemas. Lograremos una parte importante del proceso educativo y contribuiremos a que el aprendizaje sea significativo.

7. LIMITACIONES DEL PROYECTO

En la realización del proyecto de investigación fueron pocas las limitantes, ya que conté con la asesoría y orientación del profesor Jairo Arenas, quien siempre con su mejor disposición, conocimientos y experiencia facilitó la realización del mismo.

La actitud y disponibilidad de los estudiantes y mía, también me facilitó mucho el trabajo.

Podría decir que la única limitante fue el tiempo ya que mi condición especial en esta carrera, no me ha favorecido mucho, ya que por haber sido de otra cohorte debí realizar el trabajo que los estudiantes realizan en tres semestres en uno solo, es decir, el trabajo realizado en las integraciones VIII, IX y X.

BIBLOGRAFIA

AUSUBEL, David. Teoría del aprendizaje significativo.

________. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.

________. Fundamento pedagógico para la rotación. Aprendizaje significativo.

BOURBAKI, Nicolás : Elementos de Historia de las Matemáticas. Versión española Jesús Hernández. Ed. Alianza.

BOYER, Carl B. : Historia de la matemática. Ed. Alianza

CONSTRUCTIVISMO Y APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS - Monografias.com. www.monografias.com/trabajos7/aprend/aprend.shtml.

GRATTAN-GUINNES : Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630 - 1910. Versión española Mariano Martínez Pérez. Ed. Alianza.

KAPUT, James. Technology and mathematics educations. Handbook of Research on Mathematics. Grouws D, (eds). Maxwell Macmillian International. p. 515-555. 1992.

KLINE, Morris : El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días . Ed. Alianza.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares básicos de matemáticas.

________. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1998, p 131.

________. Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1999, p 81.

________. Seminario nacional de formación de docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. 2002

________. Tecnologías computaciones en el currículo de matemáticas. 2003.

________. Instrumentos Matemáticos computacionales. En seminario nacional de formación de docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. p. 81-86. 2002 b.

MORENO, Luis. Las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas y ciencias. Avances y perspectiva. Vol 17, p 175-181. 1998.

***Anexo A.* Prueba diagnóstica**
I. E Presbítero Bernardo Montoya Giraldo
Evaluación Semestral de Matemáticas
Grados: 8º

1. La diferencia de dos cuadrados perfectos es igual a:
   a. Una diferencia elevada al cuadrado
   b. Una suma elevada al cuadrado
   c. Suma de cada raíz al cuadrado por la diferencia de cada raíz
   d. Diferencia de las raíces cuadradas

2. Factorizar un polinomio significa:
   a. Escribirlo entre paréntesis
   b. Presentarlo en una forma equivalente mas sencilla
   c. Presentarlo en una forma equivalente mas compleja
   d. Expresarlo como un producto de cierto número de factores.

3. Una sola de las siguientes afirmaciones es verdadera:
   a. Una suma al cubo equivalente a la suma de los cubos
   b. Un factor coman siempre es un monomio ó un binomio
   c. Una diferencia de cubo equivale al cubo de una diferencia
   d. Una diferencia de cuadrados se puede representar como: $x^2 – y^2$

4. En la expresión $x^{2n} + bx^n + c$, el exponente del primer termino es:
   a. Siempre un numero par
   b. Siempre un numero impar
   c. Puede ser par ó impar
   d. Nada se puede afirmar hacer del exponente

5. Si multiplicamos la suma de las raíces cuadradas de dos exponentes algebraicas por la diferencia de las mismas obtendremos:
   a. Un trinomio cuadrado perfecto.

b. Una diferencia al cuadrado.
c. Una suma al cuadrado.
d. Una diferencia al cuadrado.

6. Los términos de una diferencia de cuadrados.
   a. Debe de ser monomio.
   b. Pueden ser dos polinomios cualquiera.
   c. Deben ser un monomio y un binomio.
   d. Deben ser dos binomios.

7. Acerca de la expresión $a^6 – b^6$ podemos afirmar que.
   a. Solo es factorizable como diferencia de cuadrados.
   b. Solo es factorizable como diferencia de cubos.
   c. No es factorizable.
   d. Es factorizable como diferencia de cuadrados ó de cubos.

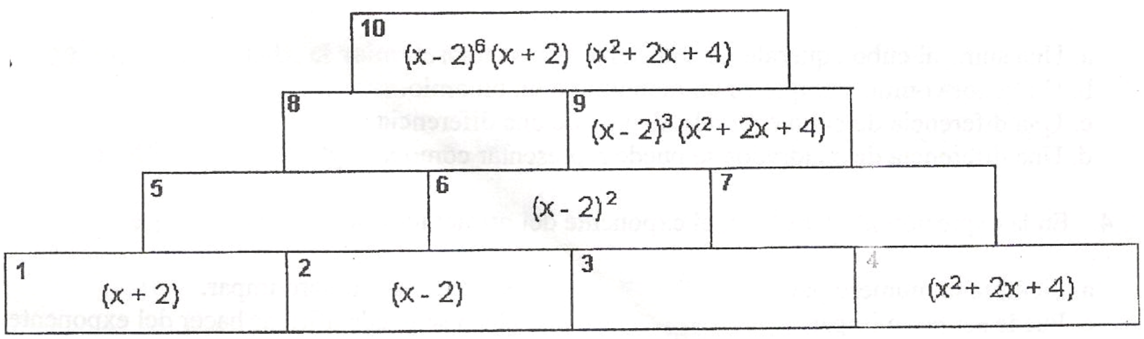
8. En una diferencia de cuadrados los exponentes:
   a. Deben de ser pares.
   b. Deben ser impares.
   c. Pueden ser pares ó impares.
   d. Ninguna de las anteriores.

9. Las expresión correcta de $3x^2 + 7x + 2$ es:
   a. $(3x + 2) (x - 1)$
   b. $(x + 2)(3x + 1)$
   c. $(3x +2)(x + 1)$
   d. $(x + 2)(3x - 1)$

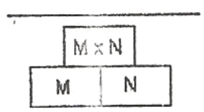
10. La expresión $(7x – 2y)^2$ es:
    a. $49x^2 + 28xy – 4y2$
    b. 7x2 +14xy + 2y2
    c. 49x2+28xy + 4y2
    d. $(7x^2 +2y^2)$

11. La expresión que observa $x^2 - 2x + xy - 2y$ es:
   a. Factor común.
   b. Diferencia de cuadrados.
   c. Trinomio cuadrado perfecto.
   d. Factor por agrupación de términos.

12. El pasatiempo creado por equipo Pitágoras se baso en una pirámide dividida en pequeños rectángulos. En algunos de ellos se encuentran expresiones algebraicas



La regla que pusieron para llenar las casillas vacías fue:



13. La expresión que se debe escribir en la casilla numero 3 es:

a. $(x + 2)$ **b.** $(x + 1)$ **c.** $(x - c)$ **d.** $(x - 2)^2$

14. La expresión algebraica que debe ubicarse en la casilla 5 es:

a. $(x^2 + 4)$ **b.** $(x^2 - 2)$ **c.** $(X^2 - 4)$ **d.** $(x^2 - 16)$

15. La expresión algebraica que debe escribirse en la casilla 7 es:

a. $x^2 - 4$ **b.** $x^3 - 8$ **c.** $x^3 + 8$ **d.** $x - 2$

16. En la casilla numero 8 se debe ubicar la expresión algebraica:

a. $(x^2 - 4)(x + 2)$ **b.** $(x^2 + 4)(x - 2)$ **c.** $(x - 2)^3 (x + 2)$ **d.** $(x + 4)(x - 2)$

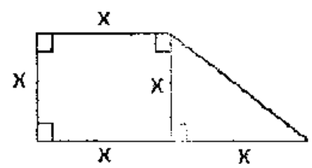
17 la suma de dos números es 9 y su producto 20, el número menor es:

a. 7 **b.**5 **c.**4 **d.** 1

18. El perímetro de un rectángulo es 10m y su área es 6m2, su lado mayor mide:

a. 2m **b.**3m **c.**5m **d.** 6m

19. El área de la figura es de 24 cm2, el triangulo es isósceles y el cuadrado tiene de lado x. El valor de x es:



a. 3 **b.** 4 **c.** 5 **d.** 6

20. La Factorización de x3 – 16x es:

a. (x-4) (x+4) **b.** x (x-4) (x-4) **c.** x (x-4) (x+4) **d.** x $(x+4)^{2}$

21. Al factorizar $X^2 + 6x - 7$, los factores son:

a. (x+7) (x-1) **b.** (x-7) (x+1) **c.** (x+7) (x+1) **d.** (x-7) (x-1)

22. La factorización $x^2 – 9$ es:

a. (x-3) (x+3) **b.** (x-3) (x-3) **c.** (x+3) (x+3) **d.** (x-9) (x+1)

23. La suma de la tercera parte de un número con la quinta parte del mismo número es igual a 8. El número es:

a. -15 **b.** 17 **c.** 15 **d.** -17

24. El producto de la expresión $(5x^2 -3)(5x^2 -20)$ es:

a. $(5x^4 -115a^{2} + 60)$

b. $(25x^2 +115^{a} + 20)$

c. $(25x^4 -115x^{2} + 60)$

d. $(25x^2 +115x - 60)$

25. El desarrollo de $(x-2)^3$ es:

a. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

b. $x^3 - 3x^2 - 23$

c. $x^3 - 8x^2 - 4x - 2$

d. $x^3 - 6x^2 + 6x - 8$

26. Dos lados que tienen el mismo vértice y un lado común son:

a. complementarios

b. consecutivos

c. Llanos

d. Rectos

27. Dos ángulos consecutivos y complementarios son:

a. adyacentes

b. agudos

c. suplementarios

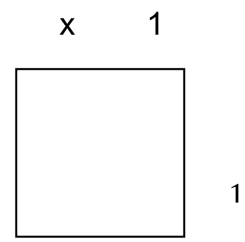
d. correspondientes

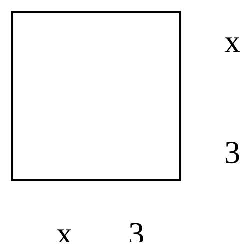
Anexo B. Guías Didácticas[23]
Taller Nº 1. Factorización

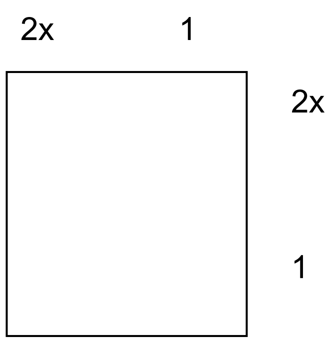
Exprese el área de las siguientes figuras como:

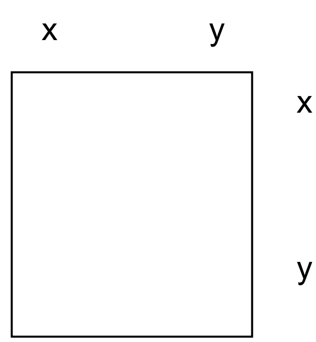
a. Producto de las dimensiones de los lados.

b. Suma de las áreas de las regiones parciales.









c. Observa los resultados obtenidos, busque la regularidad, enuncie una conclusión.

2. Efectúe los siguientes productos y represente gráficamente los señalados con"*"

$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ $(2x + 1)^2$

* $(4 + y)^2$ *$(2 + 3^a)^2$

* $(a + 5)^2$ * $(3x + 2)^2$

3. a Con las piezas de su rompecabezas arme cuadrados cuyas áreas sean.

$X^2 + 6x + 9$ $4 + 12x + 9x^2$

$X^2 + 8x + 16$ $4x^2 + 12 + 9$

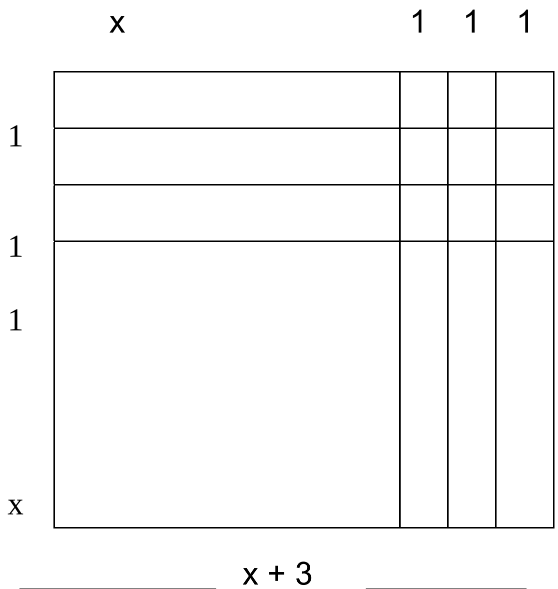
$4X^2 + 4x + 1$ $1 + 4x + 4x^2$

---

[23] PÉREZ DE DÍAZ, Maria Cristina. <u>En</u>: Serie Material Didáctico. Algebra desde una perspectiva geométrica.

b. Dibuje ahora las anteriores regiones, identifique las dimensiones de sus lados y exprese el área como producto de estas.

Ejemplo: Exploramos si el trinomio $x^2 + 6x + 9$ puede asociarse al área de un rectángulo, para ello seleccionamos adecuadamente las piezas del rompecabezas e intentamos armar dicho rectángulo. En este caso hay muchas opciones, una es la que representamos en el siguiente dibujo:



Observamos que este que este rectángulo es un Cuadrado, la dimensión de Su Lado es: $x + 3$

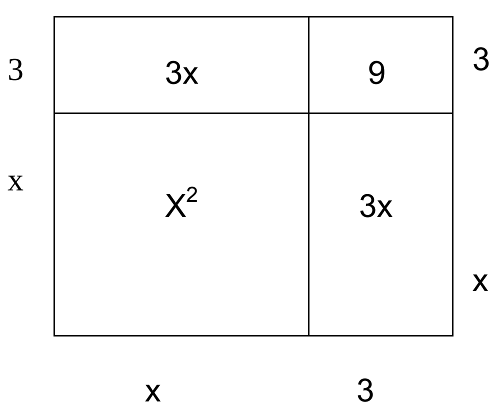
Entonces el área expresada Como Producto de las dimensiones de sus Lados es: $A = (x + 3)(x + 3)$

Las expresiones $x^2 + 6x + 9$, $(x + 3)(x + 3)$ son equivalentes Porque representan el área de la misma figura es decir:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$$

El trinomio $x^2 + 6x + 9$ ha sido factorizado.

Observemos en la grafica las regiones parciales cuyas áreas se asocian al trinomio $x^2 + 6x + 9$ x 3



Un cuadrado de lado x

Área del cuadrado x^2

Dos rectángulos de lados 3, x

Área de cada uno de ellos: 3, x

Área total de los dos rectángulos

2. 3x = 6x

Un cuadrado de lado 3

Área del cuadrado:

$3.3 = 3^2$

Si analizamos los términos del trinomio vemos que:

X^2, y, 9 son cuadrados perfectos pues $x^2 = x.\ x$

$9 = 3.\ 3$

El termino 6x puede expresarse como 2. 3x, o sea como el doble producto de las raíces de los otros términos.

Todos los trinomios que tienen las características observadas en x2 + 6x + 9, es decir que pueden asociarse al área de un cuadrado y en las que dos de los términos son cuadrados perfectos y el otro es el doble producto de las raíces de los anteriores reciben el nombre de Trinomios cuadrados perfectos.

Son trinomios cuadrados perfectos por ejemplo:
X2 + 2x + 1, x2 + 6x + 9, 4x2 + 4x + 1.

No son trinomios cuadrados perfectos:
X2 + 4x + 1, 4x2 + 9x + 3
Explique por qué.

Construya usted, tres ejemplos de expresiones que sean Trinomios cuadrados perfectos, y tres que no loo sean; apóyese en la representación grafica.

4. Efectué los siguientes productos, puede hacerlo aplicando las observaciones ó resultados de anteriores ejercicios, ó si lo requiere desarrolle completamente y apóyese en una grafica cuando sea posible.

(1 + 5x2)2	(4m5 + 5m6)2
(x + 2y2)2	(3a2 + 8b4)2
(2x + 5y2)2	(x10 + 10y2)2
(2a + 3b2)2	

5.
a. Analice las siguientes expresiones y determine si son ó no son trinomios cuadrados perfectos.

b. Factorice ó descomponga en dos factores cuando sea posible.

X2 + 10x + 25	4 + 12x + x2	4x2 + 20xy +25y2
m2 +2m + 1	1 + 14a + 49a2	36 + 12m2 + m4
36 + 12x + x2	x2 + 2xy + y2	
M2 + 18m + 9	x2 + 4xy + 4y2	
4x2 + 4x +1	9x2 + 6xy + y2	

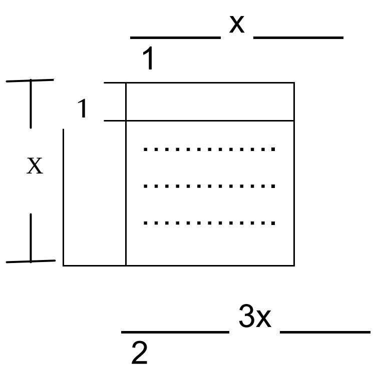
Taller Nº 2

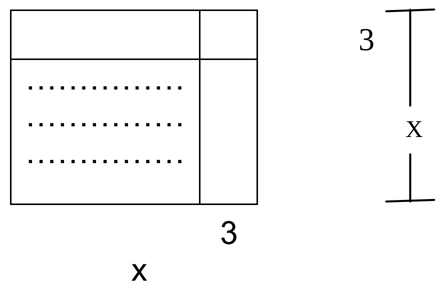
Factorización

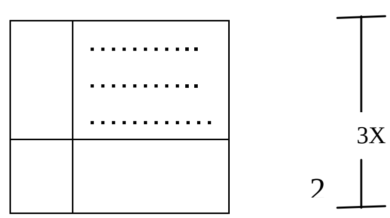
Halle el área de la región sombreada

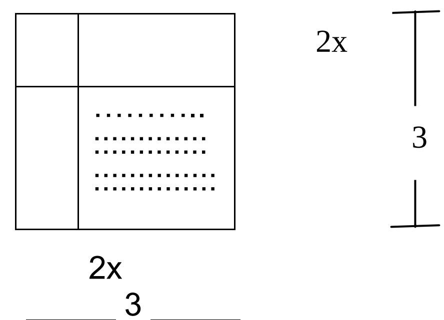
a. Como producto de las dimensiones de su lado

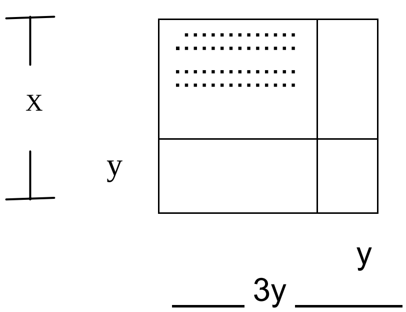
b. Restando del área total el área de las regiones no sombreadas

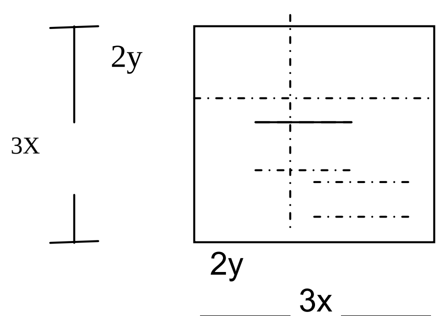












c. Observe los resultados obtenidos, busque la regularidad, enuncie una conclusión.

2. Efectué los siguientes productos y represente gráficamente los señalados con (*)

$(x - 2)^2$	* $(a - 5)^2$	$(2 - 3a)^2$
* $(3 - X)^2$	$(3x - 1)^2$	* $(2x - 3)^2$

3. a. Con las piezas de su rompecabezas arme rectángulos cuyas áreas puedan asociarse a las siguientes expresiones. Recuerde que las piezas que representan los términos precedidos del signo menos (-) se superponen (ponen encima) a las que representan los términos precedidos por el signo mas (+)

$x^2 – 6x + 9$

$x^2 – 8x + 16$

$4x^2 - 4x + 1$

$9 – 12x + 4x^2$

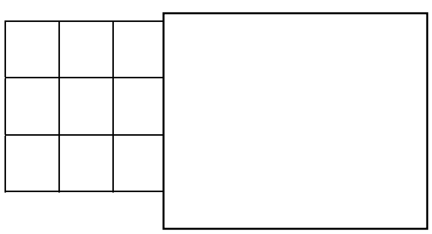
$1 – 6x + 9x^2$

$9x^2 – 12x + 4$

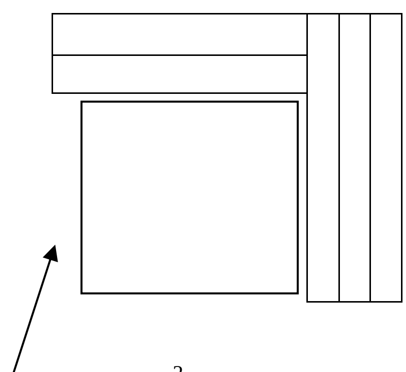
b. Dibuje las anteriores regiones, identifique las dimensiones de sus lados y exprese en cada caso el área como producto de estas dimensiones.

Analice antes el ejemplo que aparece a continuación:

Para la expresión $x^2 – 6x + 9$ si se seleccionan y ubican adecuadamente las piezas del rompecabezas puede armarse un rectángulo.



X^2 -6x +9



X^2+9

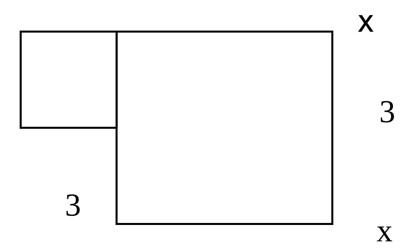
Región no recubierta

Observando esta construcción afirmamos que cada uno de los lados del rectángulo obtenido (región no recubierta) es x – 3; luego su área expresada como producto de las dimensiones de los lados es: (x -3)

Las expresiones $x^2 – 6x + 9$, y, (x -3) (x -3) son equivalentes porque representan el área de la misma figura es decir, $x^2 – 6x + 9 = (x -3) (x -3)$.

El trinomio $x^2 – 6x + 9$ ha sido factorizado.

Observemos las regiones cuyas áreas se asocian al trinomio

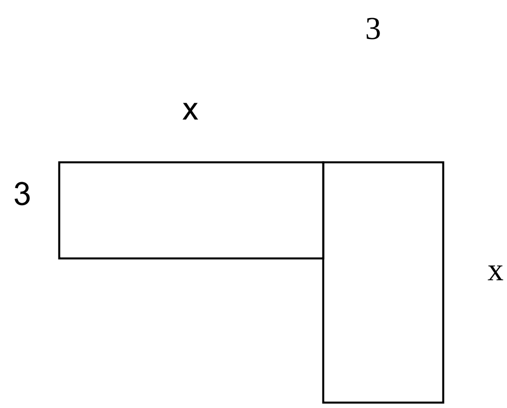


Un cuadrado de lado x

Área del cuadrado x^2

Un cuadrado de lado 3

Área del cuadrado 9



Dos rectángulos de lados x , y, 3 que han sido superpuestos pues en la expresión estos términos estaban precedidos del signo menos.

Área de cada uno de setos rectángulos: 3. x

Área total de los dos rectángulos

2. 3x = 6x

Si analizamos los términos del trinomio $x^2 – 6x + 9$, vemos que x^2, y, 9 son cuadrados perfectos pues $x^2 = x\,.x$

$$9 = 3.\ 3$$

El termino 6x puede expresarse como 2(3x), o sea como el doble producto de las raíces de los otros términos;

$(X^2 + 9) – 6x = (x^2 + 9); - 2\ (3x) = x^2 – 2(3x) + 3^2$

Observamos que este trinomio tiene las mismas características que los trinomios trabajados en el taller Nº 1, o sea pueden asociarse al área de un cuadrado, dos de los términos son cuadrados y el otro es el doble producto de las raíces de los anteriores; la única diferencia en este caso es que en lugar de aparecer el doble producto de las raíces de los términos precedidos del signo (+) aparece precedido del signo (-).

Trinomios tales como:

$X^2 – 6x + 9$, $x^2 -8x + 16$, $9x^2 – 12x + 4$ son entonces trinomios cuadrados perfectos.

No son trinomios cuadrados perfectos

$X^2 – 16x + 9$, $x^2 - 12x + 4$, $9x^2 – 2x + 4$

Explique por qué

Construya tres ejemplos de trinomio cuadrado perfecto en los cuales el termino que es doble producto de las raíces de los otros dos este precedido del signo menos, apóyese en la representación grafica.

4. Efectué los productos. Puede hacerlo aplicando las generalizaciones establecidas en los anteriores ejercicios, o si lo prefiere desarrollando completamente y apoyándose en la construcción de una grafica cuando sea posible

$(x – 5)^2$ $(2a – 3b)^2$

$(2– y)^2$ $(2x – y^3)$

$(3x – 2)^2$ $(x^5 – 3a)^2$

$(1 – 5x)^2$ $(a^7– b^7)^2$

$(x – 2y)^2$ $(10x^3 – 9xy^5)^2$

5. Analice cada una de las siguientes expresiones.

a. Determine si son ó no trinomios cuadrados perfectos

b. Factorice ó descomponga en dos factores cuando sea posible.

$X^2 – 10x +25$ $X^2 – 4xy +4y^2$

$4 – 4y + y^2$ $1 – 2a^3 + a^6$

$9x^2- 12x + 4$ $4x^2 – 20xy + 25y^2$

$X^2 – 2xy +y^2$ $9b^2 – 30a^2b + 25a^2$

$1+ a^{10} – 2a^5$

Compare los tres primeros ejercicios de los numerales 4 y 5. ¿Que concluya?

Taller Nº 3

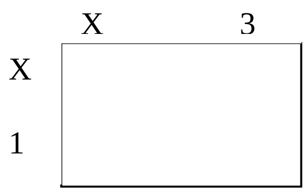
Producto Notable (CX+A) (CX + B)

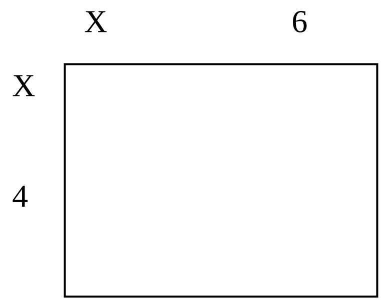
Factorización

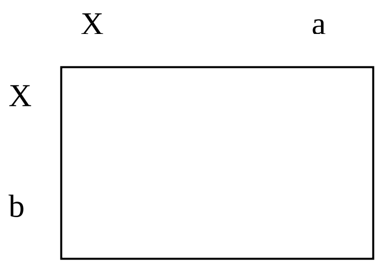
1. Exprese el área de las siguientes figuras como

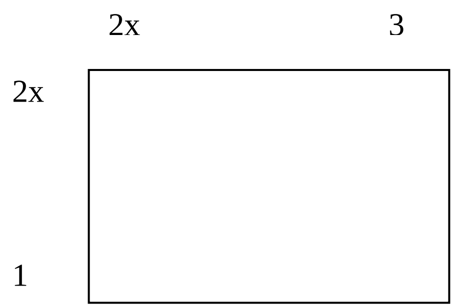
a. Producto de las dimensiones de sus lados

b. Suma de áreas de regiones parciales que la componen









c. Observe las expresiones obtenidas en cada uno de los ejemplos.

Encuentra usted alguna regularidad? Explique.

2. Efectué los siguientes productos y represente gráficamente los señalados con (*):

(x+3) (x+8)

(x+5) (x+8)

(x+2) (x+1)

(3x+1) (3x+2)

(2x+3) (2x+1)

3. a. Con las piezas de su rompecabezas arme rectángulos cuyas áreas puedan asociarse a las siguientes expresiones.

$X^2 + 7x + 12$

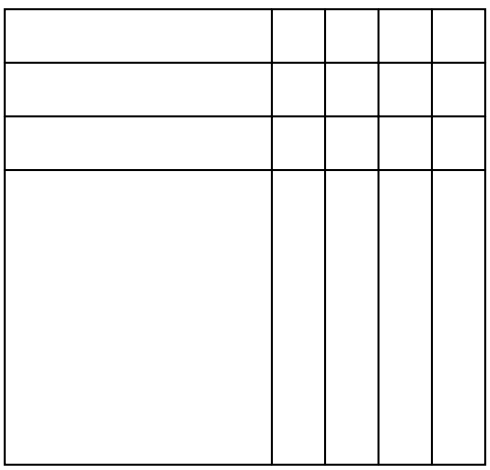
$X^2 + 6x + 5$

$4x^2 + 8x + 3$

$25x^2 + 20x + 3$

b. Dibuje ahora las regiones rectangulares que construyo en los ejercicios anteriores, identifique las dimensiones de sus lados y exprese su área como producto d estas dimensiones.

Ejemplo: Para armar un rectángulo cuya área pueda asociarse al trinomio $x^2 + 7x + 12$, usted seleccionó y ubico adecuadamente las piezas del rompecabezas.
Posiblemente usted armo un rectángulo como el que aparece en el siguiente dibujo

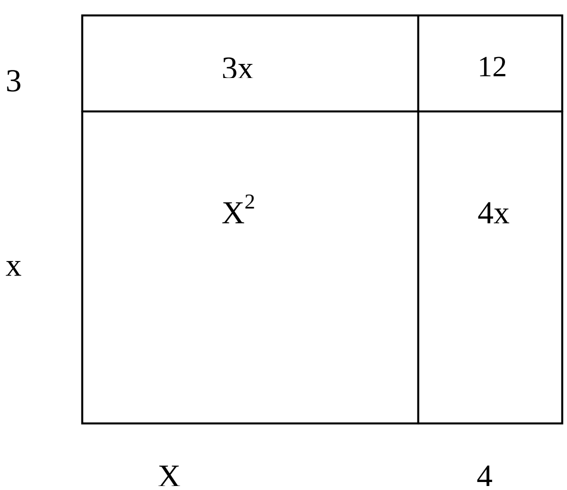


Se observa que las dimensiones de los lados de este rectángulo son: (x+3) y (x+4); por lo tanto el área expresada como producto de estas dimensiones es: A = (x+3). (x+4).

Las expresiones $x^2 + 7x + 12$ y (x+3) (x+4) son equivalentes por representar el área de la misma región, es decir: $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$.

El trinomio $x^2 + 7x + 12$ se ha entonces factorizado.

Observemos en la siguiente grafica las regiones cuyas áreas se asocian al trinomio anterior.



Un cuadrado de lado X
Área del cuadrado x^2

Un rectángulo de lados x,4
Área del rectángulo 4x
Un rectángulo de lados x,3
Área del rectángulo 3x

Área total de los dos anteriores rectángulos:
$4x + 3x = (4+3)x = 7x$

Un rectángulo de lados 4,3
Área del rectángulo 4 . 3 = 12

Podemos concluir que el trinomio $x^2 + 7x + 12$

$$= x^2 + 4x + 3x + 4.3$$

$$= x^2 + (4+3)x + 4.3$$

Nótese que los números 3 y 4 sumados dan 7 (coeficiente de x en el trinomio original) y multiplicados dan 12 (termino independiente en el trinomio original).

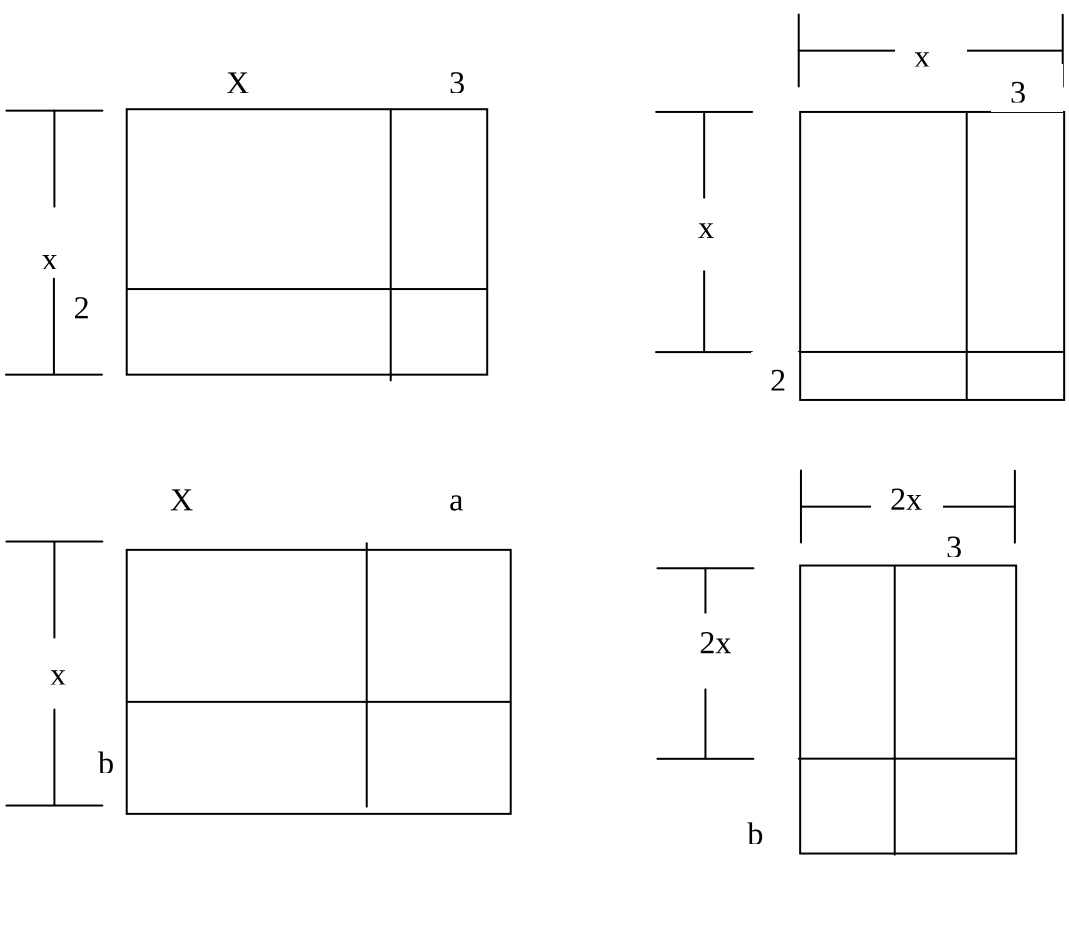
Construya ahora usted tres trinomios cuadrados que tengan las características observadas en el trinomio anterior.

4. Encuentre en cada uno de los siguientes casos el área de región sombreada:

a. Identificando las dimensiones de los lados y expresando el área como producto de estas dimensiones.

b. Restando del área total el área de las regiones no sombreadas.

c. Sumando las áreas de las regiones sombreadas.



d. Determine ahora en b y c el trinomio cuadrado asociado.
Busque regularidades. Enuncie una conclusión.

5. Efectué los siguientes productos y represente gráficamente los señalados con (*).

(x+3) (x-2)	(2x-2) (2x-3)
(x+4) (x-1)	*(2x-3) (2x+5)
(x+1) (x-4)	(3x-3) (3x+2)
*(x-8) (x+2)	(5x+2) (5x-10)
(x-3) (x+5)	

6.

a. Con las piezas de su rompecabezas arme rectángulos cuyas áreas pueden asociarse a:

$x^2 – x – 6$	$x^2 – 3x – 4$
$x^2 + x – 2$	$x^2 + x – 12$
$x^2 +2x – 8$	$x^2 + 3x – 10$

Para facilitar la construcción de estos rectángulos construya en todos los ejercicios expresiones equivalentes como las sugeridas a continuación para los dos primeros ejemplos.

$$x^2 – x – 6 = x^2 +2x – 3x – 6$$
$$x^2 + x – 2 = x^2 +2x – x – 2$$

Si analizamos una de las anteriores sugerencias

$$x^2 – x – 6 = x^2 +2x – 3x – 6$$

Vemos que $-x = 2x + (-3x)$

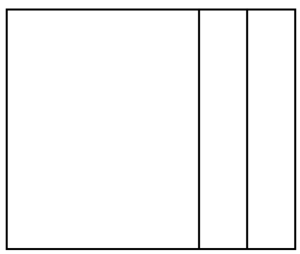
$= (2-3)\ x$

$-6 = 2\ -3$

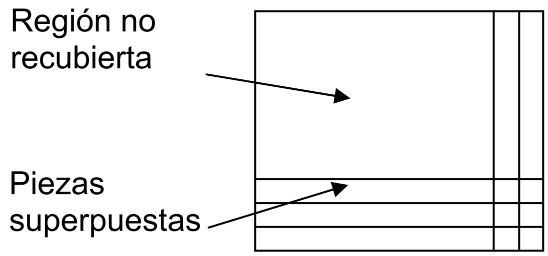
Es decir, hemos encontrado dos números 2 y -3 que sumados dan el coeficiente de X; (-1) y multiplicados el término independiente (-6).

b. Dibuje los rectángulos construidos con su rompecabezas, identifique las dimensiones de sus lados y exprese el área como producto de estas.

Ejemplo: Para representar la expresión $x^2 - x - 6 = x^2 + 2x - 3x - 6$ usted selecciono y ubico las piezas del rompecabezas. En el dibujo aparece la ilustración de una de las posibles construcciones.



$X^2 + 2x$



$X^2 + 2x - 3x - 6$

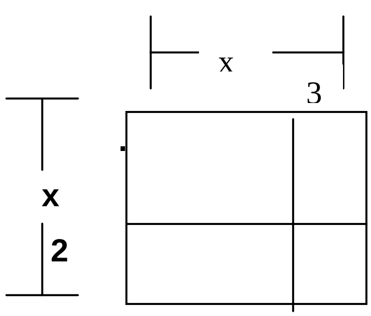
Si observamos la construcción realizada podemos determinar que las dimensiones de los lados de los rectángulos resultante (región no recubierta) son (x+2) y (x-3), luego su área expresada como producto de estas dimensiones es (x+2) (x-3).

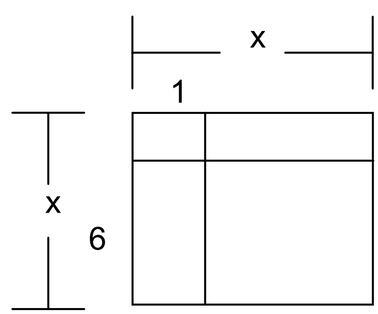
Sabemos, además, que las expresiones que representan el área de la misma región son equivalentes, utilizamos este argumento geométrico para afirmar que $x^2 - x - 6 = (x+2)\ (x-3)$, es decir para factorizas el trinomio $x^2 - x - 6$.

7. Observe cada una de las siguientes regiones sombreadas:

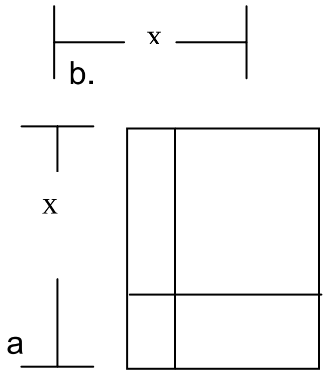
a. Exprese el área de estas como producto de las dimensiones de sus lados.

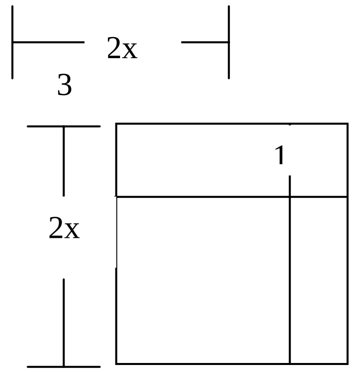
b. Halle su área restando del área total el área d las regiones no sombreadas.





b.





c. Analice las expresiones obtenidas para cada región. Encuentra alguna regularidad ¿Cuál? Explique

8. Efectué los siguientes productos. Puede apoyarse en la representación grafica.

(X – 8) (x – 3) (3x - 2) (3x – 4)

(a – 5) (a – 4) (5b – 6) (5b – 1)

9.

a) Con las piezas de su rompecabezas arme rectángulos cuyas áreas puedan asociarse a:

X^2 -6x +5 X^2 -5x + 4

X^2 – 4x +3 X^2 – 5x + 6

X^2 – 6x +8 X^2 – 7x + 10

Para facilitar la construcción de los rectángulos construya expresiones equivalentes como las sugeridas a continuación para los dos primeros ejemplos:

$X^2 – 6x +5 = X^2 -5x –x +5$

$X^2 – 4x +3 = x^2 – 3x – x +3$

b. Dibuje los anteriores rectángulos, identifique las dimensiones de sus lados y exprese el área como producto de estas dimensiones.

10.

a) En cada uno de los siguientes ejercicios usted debe escribir los términos que faltan para que los trinomios puedan ser factorizados en la forma (cx +a) (cx +b)

$X^2 + 8x +$ _____	$9x^2 +$ _____ + ______
$X^2 +$ ____ $+12$	____ + $14x + 12$
	_____ + _____ 6

b. Explique el procedimiento que empleó para completar cada uno de los trinomios. ¿Cuantas soluciones encontró en cada caso?

11. Efectué los siguientes productos:

$(x + 5)(x - 12)$	$(2a + 3)(2a - 4)$
$(x + 12)(x - 5)$	$(y + 4)(y + 10)$
$(2a - 3)(2a - 4)$	$(3x + 5)(3x - 2)$

12. Factorice ó descomponga en dos factores cada uno de los trinomios:

$X^2 - 7x - 60$	$X^2 + 2x - 15$
$X^2 + 7x - 60$	$X^2 - 5x - 14$
$y^2 + 14y + 40$	$a^2 + 7a + 10$
$X^2 - 8x - 10$	$m^2 - 11m + 12$
$X^2 + 5x + 6$	$a^2 + 4a + 3$
$X^2 - 7x + 12$	$y^2 - 4y + 3$
$a^2 - 13^a + 40$	$n^2 + 28n - 29$
	$a^2 - 2a - 35$

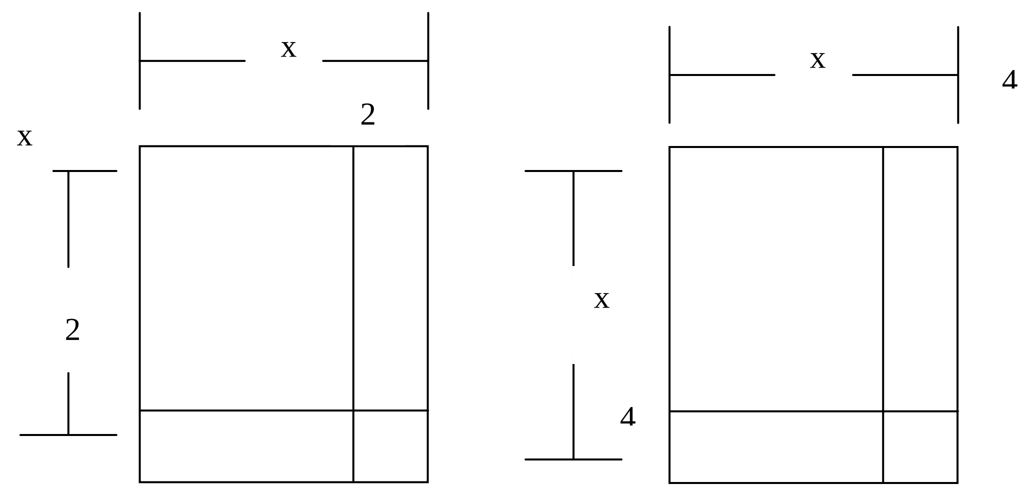
Taller Nº 4
Factorización

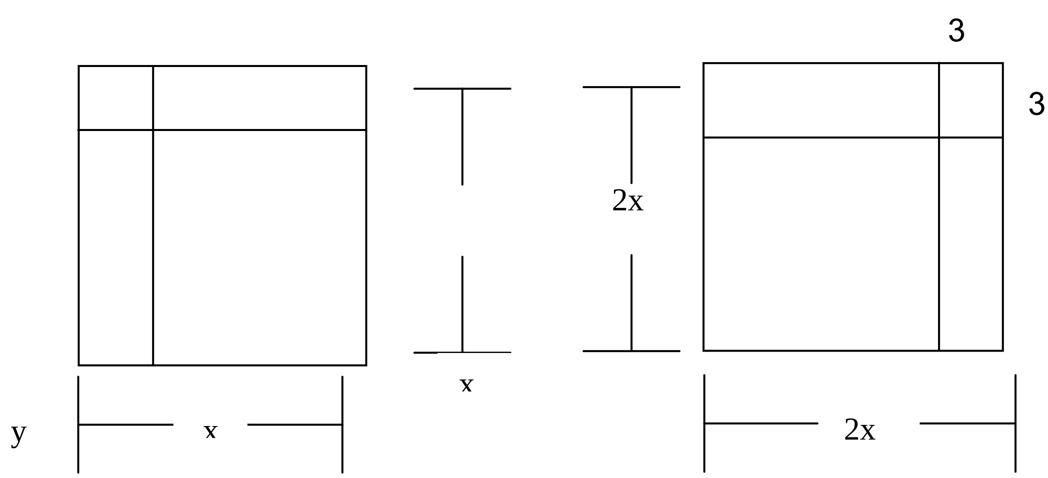
1. Encuentre en cada uno de los siguientes casos el área de la región sombreada:

a. Identificando las dimensiones de los lados y expresando el área como producto de estas dimensiones

b. Restando del área total el área de las regiones no sombreadas

c. Sumando las áreas de las regiones sombreadas.





d. Determine ahora en b) y en c) la expresión que se asocia al área de las regiones sombreadas. Busque regularidades. Enuncie una conclusión.

2. Efectué los siguientes productos y represente gráficamente los señalados con (*)

* $(x+3)(x-3)$

* $(4x-5)(4x+5)$

$(2x+4y)(2x-4y)$

$(2a-7)(2a+7)$

3.

a. Con las piezas de su rompecabezas arme rectángulos cuyas áreas puedan asociarse a:

$x^2 - 9$

$x^2 - 1$

$x^2 - 25$

$9x^2 - 4$

$x^2 - 16$

$4x^2 - 9$

Para facilitar la construcción de los rectángulas considere en todos los ejercicios expresiones equivalentes tales como las sugeridas a continuación para los dos primeros ejemplos.

$$x^2 - 9 = x^2 + 3x - 3x - 9$$

$$x^2 - 25 = x^2 + 5x - 5x - 25$$

b. Dibuje los anteriores rectángulos, identifique las dimensiones de sus lados y exprese el área como producto de estas dimensiones.

4. ¡Adivine usted!

a. Si la diferencia entre los cuadrados de dos números es 16, cuales son los números?

b. Si dos números sumados dan 7 y restados dan 3, cual es la diferencia de sus cuadrados?

c. La diferencia entre el cuadrado del duplo de un numero y el cuadrado de triplo de otro es 7, cuales son los números?

d. Si la diferencia entre las áreas de dos cuadrados es 20 unidades cuadradas, cual es el lado de cada uno de los cuadrados?

5.

a. Efectué los siguientes productos; puede hacerlo aplicando las generalizaciones establecidas en el primer ejercicio desarrollando completamente o apoyándose en una grafica cuando sea posible.

$(2x + 8)(2x - 8)$

$(6x^2 - 5y)(6x^2 + 5y)$

$(2x - y)(2x + y)$

$(x - 3y)(x + 3y)$

$(3 + x^2)(3 - x^2)$

b. Factorice

$4x^2 - 64$

$4b^2 - a^2$

$4x^2 - y^2$

$16x^4 - 81$

$49 - y^2$

$36x^2 - 25y^2$

Taller Nº 5

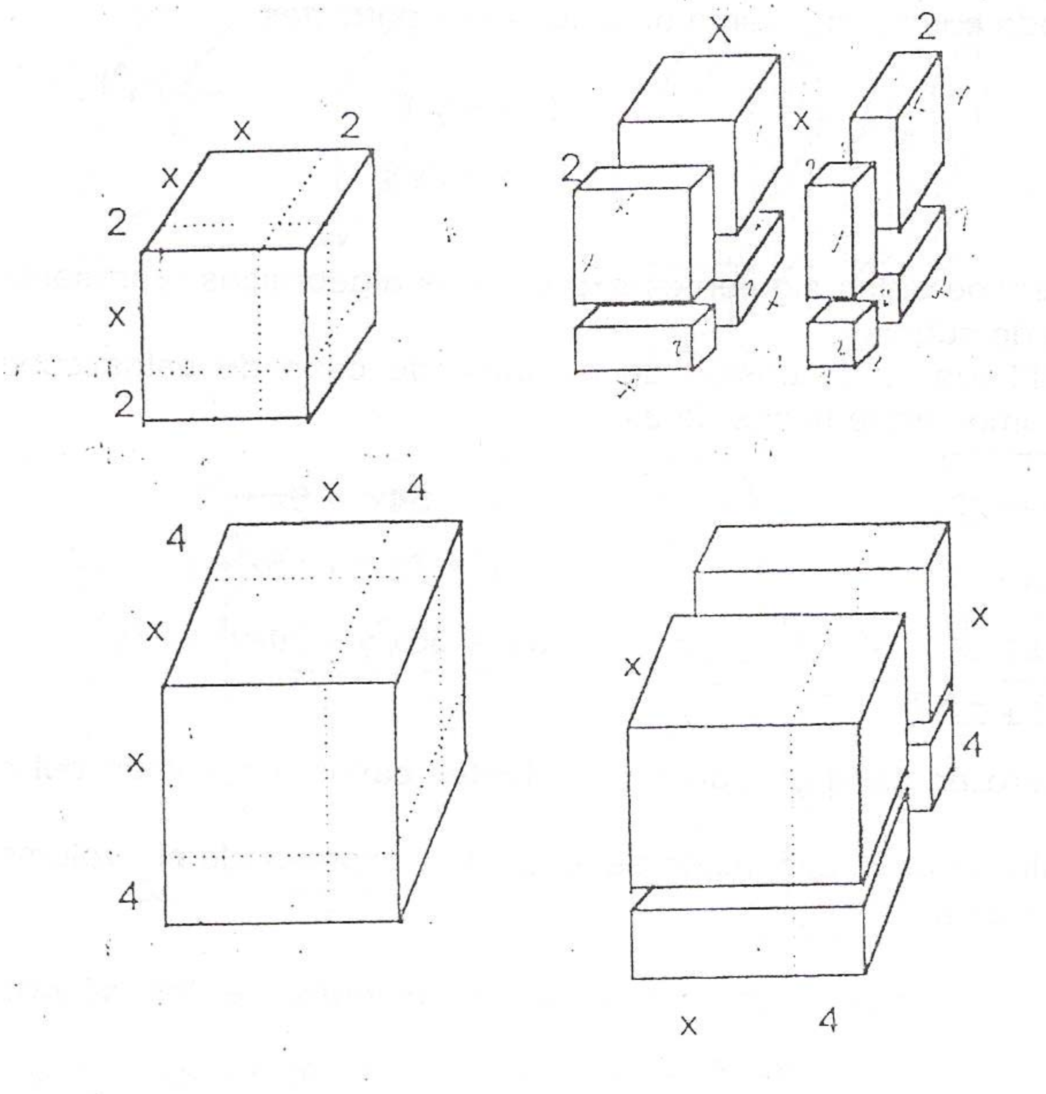
Factorización

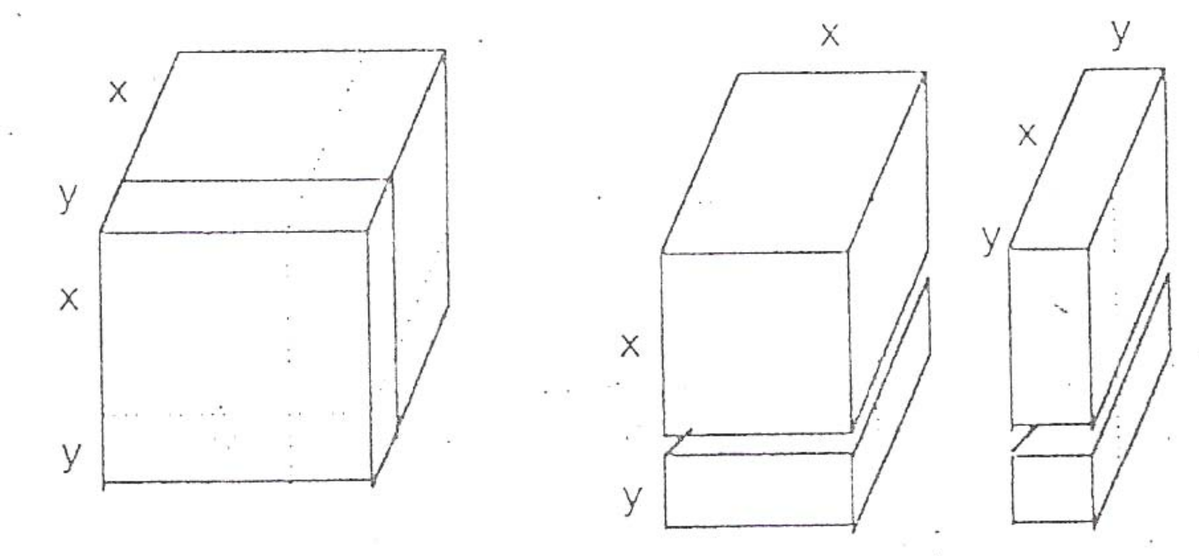
1. En el presente ejercicio, teniendo en cuenta la dimensión de la arista de cada cubo se ilustra una posible descomposición de este en sólidos.

Observe cuidadosamente las ilustraciones y halle el volumen de cada cubo:

a. Determinando su arista y expresando el volumen en términos de ella

b. Sumando volúmenes de los sólidos que lo componen.





Observe las expresiones obtenidas en cada caso. Encuentra usted alguna regularidad? Explique.

2. Cada una de las siguientes expresiones pueden asociarse a volúmenes de cubos; identifique la arista de cada uno de ellos y exprese el volumen de cada cubo como suma de volúmenes parciales.

$(x+3)^3$	$(3x+y)^3$
$(2x+1)^3$	$(2x+3y)^3$

3.

a. Determine si las siguientes expresiones algebraicas representan o no volúmenes de cubos.

b. Identifique la dimensión de la arista de cada de estos cubos y exprese el volumen en términos de esta.

$X^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$8X^3 + 12x^2 + 6x + 1$

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

$8+ 36x + 54x^2 + 27X^3$

$27X^3 + 54x^2 + 9x + 8$

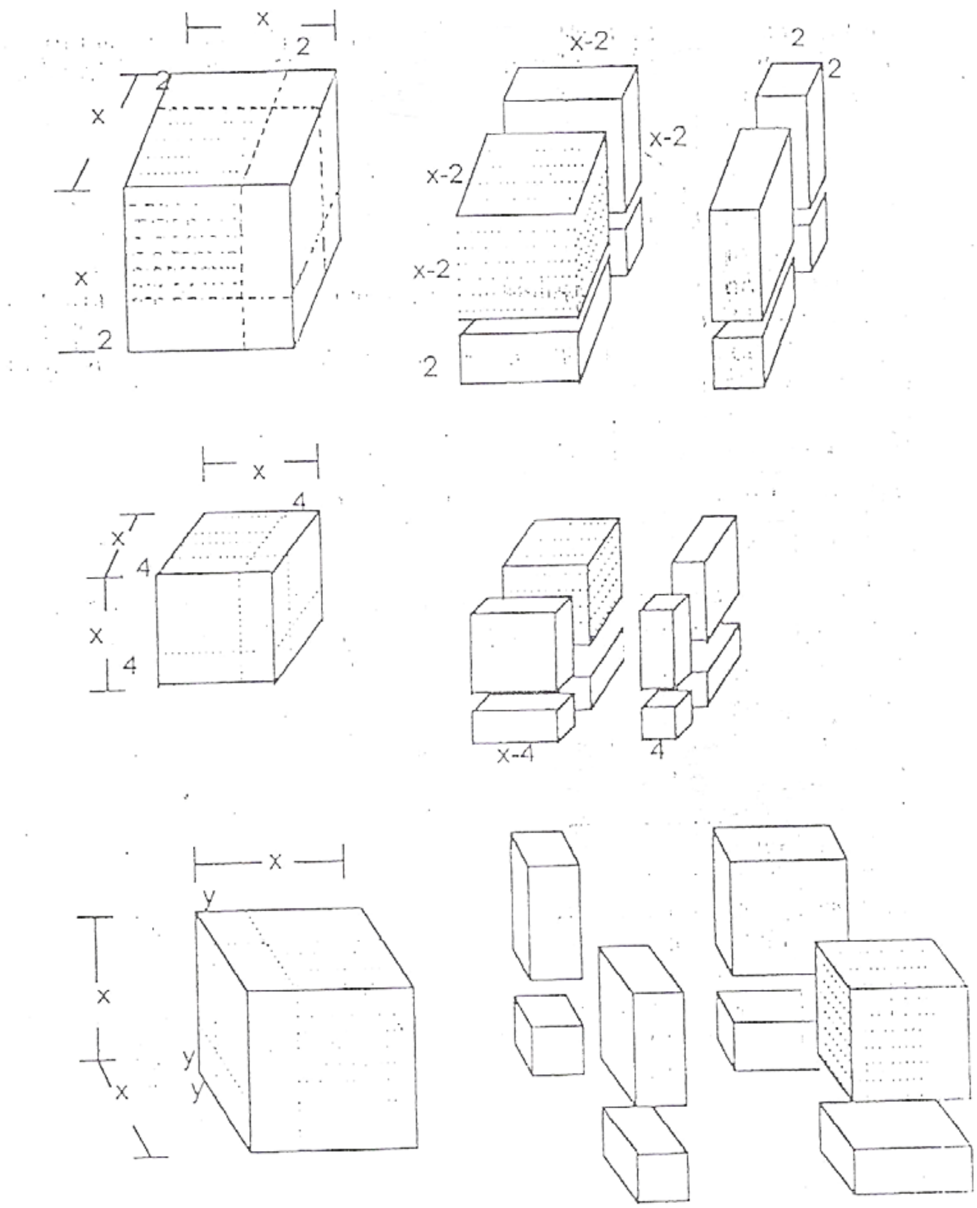
$25X^3 + 75x^2 + 15x + 1$

$8X^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

4. Encuentre en cada uno de los siguientes casos el volumen del cubo sombreado.

a. Identificando la dimensión de su arista y expresando el volumen en términos de esta.

b. Restando del volumen total los volúmenes de los sólidos no sombreados.



Observe las expresiones obtenidas, busque regularidades. Enuncia una conclusión.

5. Cada una de las siguientes expresiones pueden asociarse a volúmenes de cubos; identifique la arista de cada uno de ellos y exprese el volumen de cada cubo en términos de volúmenes parciales.

$(x -2)^3 =$

$(2x -1)^3 =$

$(3x – y)^3 =$

$(2x – 3y)^3 =$

6. a. Determine si las siguientes expresiones algebraicas pueden asociarse o no a volúmenes de cubos.

b. Identifique la dimensión de la arista de cada cubo y exprese el volumen en términos de esta.

$X^3 -6x^2 + 12x – 8 =$

$8X^3 -12x^2 + 6x – 1 =$

$X^3 -9x^2 + 27x – 27 =$

$27X^3 -54x^2 + 36x – 8 =$

$125X^3 -75x^2 + 15x – 1 =$

7.

a. Escriba en los espacios los términos necesarios para que cada una de las expresiones resultantes puedan asociarse al volumen de un cubo.

X^3 ____ ____ 27

$9y^3$ ____ ____ x^3

____ 12x + ____ ____

$8x^3$ ____ _____ ____

____ _____ _____ 8

b. Explique el procedimiento que empleo para completar las expresiones. Cuantas soluciones encontró usted en cada caso?

8. a. Efectué los siguientes productos. Puede hacerlo aplicando las generalizaciones anteriormente establecidas, desarrollando completamente o apoyándose en la construcción de una grafica cuando sea posible.

(x2 + 1)3 =

(x2 - 1)3 =

(2x2 + 1)3 =

(2x2 - 1)3 =

(x4 + y4)3 =

(3x2 + 2y2)3 =

b. Factorice las siguientes expresiones algebraicas.

X6 -3x4 + x2 – 1 =

8X6 -12x4 +6x2 – 1 =

X12 +3x8y4 + 3x4y8 + y12 =

TALLER Nº 6
REFUERZO, MANIPULACION ALGORITMICA,
PRODUCTOS NOTABLES -FACTORIZACIÓN

1. a. efectué los siguientes productos:

$(x + 5)^2$ $\quad$ $(2x^2 + 3)^2$
$(x - 3)^2$ $\quad$ $(7x^2 + {}^{y3})^2$
$(5x + y)^2$

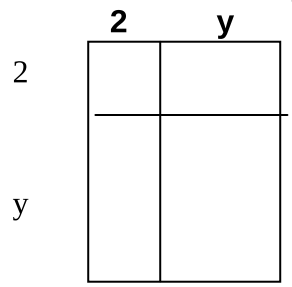
b. Factorice las siguientes expresiones algebraicas:

$x^2 + 10x + 25$ $\quad$ $1+ 49a^2 – 14a$
$n^2 +2n + 1$ $\quad$ $y^4 + 4y^2 + 1$
$a^2 + 2ab +b^2$ $\quad$ $a^8 +18a +81$
$a^2 + 10a +25$

c. los ejercicios señalados con (*) represente gráficamente las expresiones dadas y sus equivalentes cuando esto sea posible.

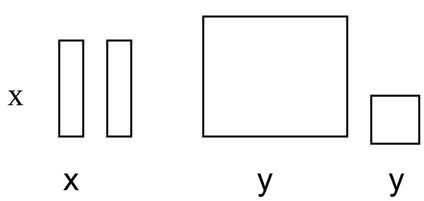
d. En la primera columna aparecen diferentes regiones planas y en la segunda expresiones algebraicas. Asocie la región con la expresión algebraica que corresponde a su área escribiendo en el paréntesis el número de la expresión.

( )



(1) $y^2 – 4y + 4$

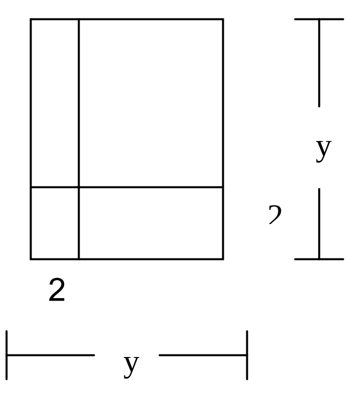
(2) $(x + y)$

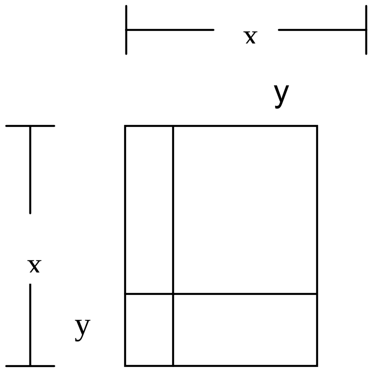


(3) y^2 $4y + 4$

(4) $(x + 2)(x – 2)$

( )





(5) $x^2 - 2xy + y^2$

Efectué los siguientes productos:

$(a + 1)(a + 2)$

$(x - 7)(x - 6)$

$(3x - 1)(3x - 3)$

$(2x - 7)(2x + 1)$

$(2a + 1)(2a + 3)$

$(x^2 - 1)(x^2 - 3)$

$(a^6 + 7)(a^6 - 3)$

b. Factorice las siguientes expresiones algebraicas:

$y^2 + 5y + 6$

$x^2 + 12x + 35$

$x^2 - 12x + 35$

$y^2 - 4y + 3$

$x^2 + 2x - 15$

$m^2 + 5m - 14$

$x^2 - 4x - 12$

$x^2 - x - 6$

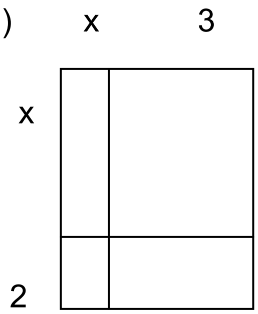
$a^{10} - 49b^{12}$

$25x^2y^4 - 121$

c. En los ejercicios señalados con (*) represente gráficamente las expresiones dada y sus equivalentes cuando esto sea posible.

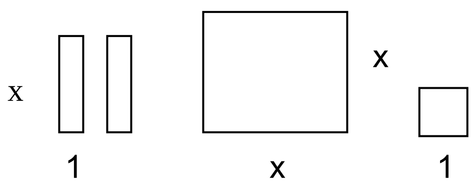
d. En la primera columna aparecen diferentes regiones planas y en la segunda expresiones algebraicas que corresponde a su área escribiendo en el paréntesis el número de la expresión.

( )

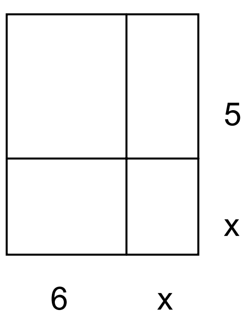


(1) $x^2 + 11x + 30$

(2) $(x + 1)(x + 2)$

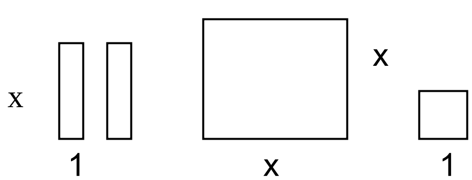


(3) $(x + 1)(x + 1)$



(4) $x^2 + 5x + 6$

(5) $x^2 + 3x + 1$



3.

a. Efectué los siguientes productos:

*$(3a + 5)(3a - 5)$

$(2x – 3y)(2x + 3y)$

$[(x + 5) + 3][(x + 5) – 3]$

* $(x^2 + y)(x^2 – y)$

$(2x^3 + 3y^2)(2x^3 – 3y^{2)}$

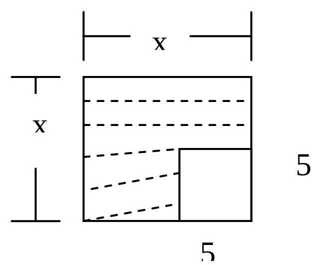
b. Factorice las siguientes expresiones:

$9a^2 – 25$	$36x^6 – 25y^4$
$81 – 9x^4$	$(x + 5)^2 - 36$
$X2 -16y^2$	$9 – (x + y)^2$

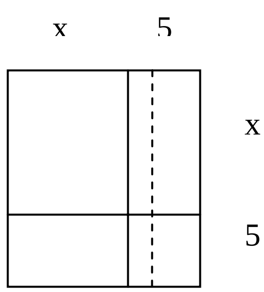
c. En los ejercicios señalados con (*) represente gráficamente las expresiones dadas y sus equivalentes cuando esto sea posible.

d. Seleccione y escriba en el paréntesis el numeral de la región sombreada cuya expresión algebraica asociada al área sea equivalente a la que representa el área de la figura dada:

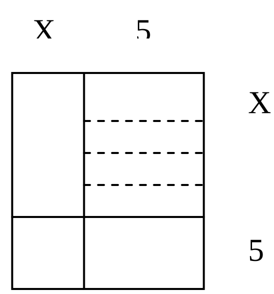
( )



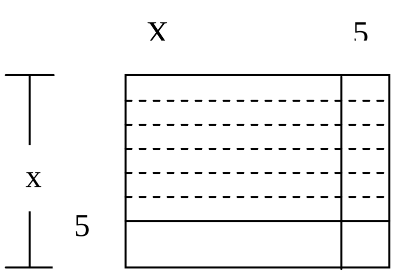
(1)



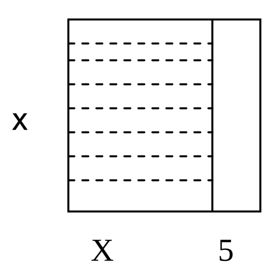
(2)



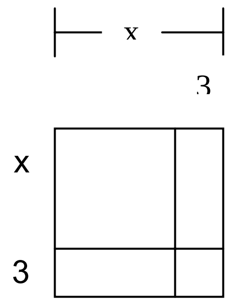
(3)



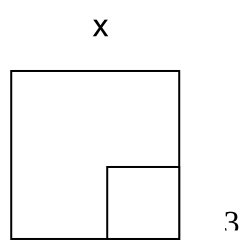
(4)



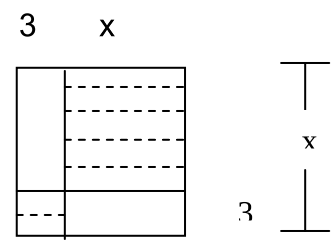
(   )



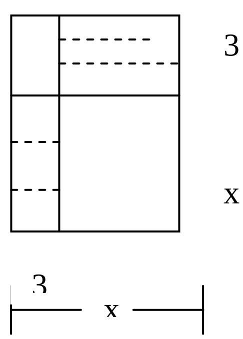
(1)



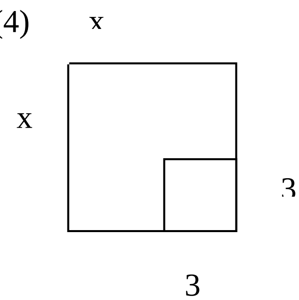
(2)



(3)



(4)



4.

a. Efectué los siguientes productos:

$(a + 5)^3$ $(2x^2 – 3y^4)$

$(2a - 3b)$ $(5x^3 - 2y^2)^3$

b. Factorice las siguientes expresiones:

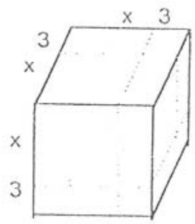
* $a^3 + 15a^2 + 75a + 125$ $a^6 + 3a^4b^3 + 3a^2 b^6 + b^6$

* $27 – 27x + 9x^2 – x^3$ $8 + 36x\ 54x^2 + 27x^3$

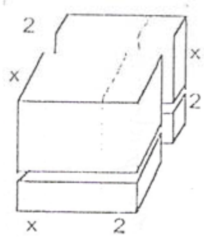
$1 + 12a^2 b – 6ab^2 – 8a^3b^3$

c. En los ejercicios señalados con (*) represente gráficamente las expresiones dadas y sus equivalentes cuando esto sea posible.

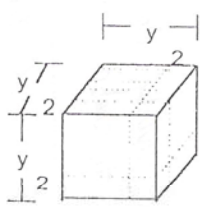
d. Escriba en el espacio la expresión asociada al volumen de cada uno de los sólidos representados



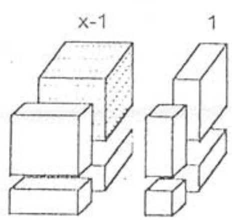
____



____



____



____

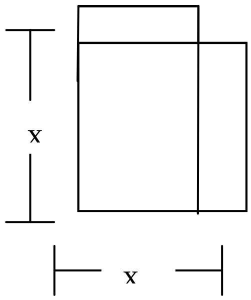
5. A continuación aparecen regiones planas (armadas con piezas de rompecabezas) y expresiones algebraicas que pueden asociarse con sus áreas.

Apoyándose en la ilustración factorice las expresiones:

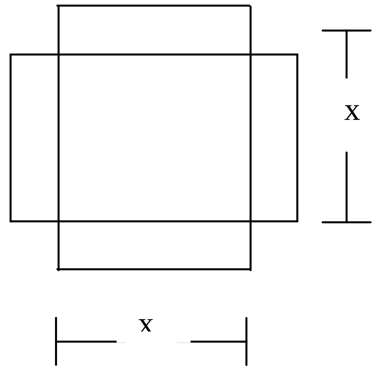
a. Completando el cuadro

b. transformando la región cuya área es puede asociarse a la expresión

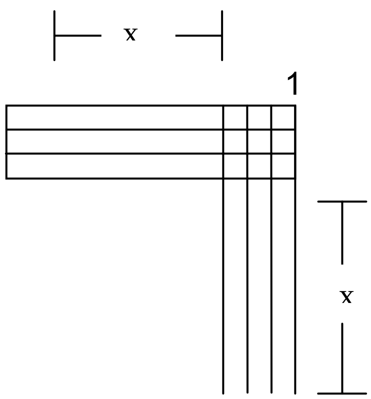
$X^2 + 2x$



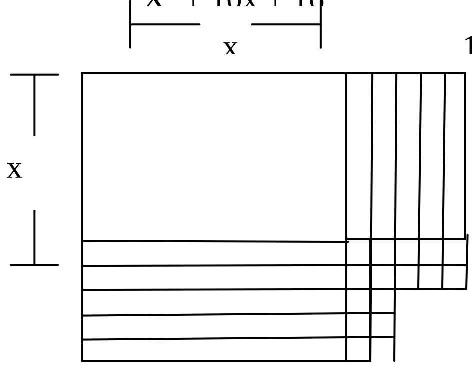
$X^2 + 4x$



$6x + 9$



$X^2 + 10x + 16$



6. Intente usted, sin referente geométrico completar las siguientes expresiones de manera que aparezca en ellas un trinomio cuadrado perfecto que le permita factorizar la expresión.

$X^2 + 26x + 144$

$a^4 + a^2 + 1$

$a^4 + 4b^2$