

ESTIMACIÓN DE CURVATURAS Y DIRECCIONES PRINCIPALES EN NUBE DE PUNTOS NO ORGANIZADOS

ESTIMATION OF CURVATURES AND PRINCIPALS DIRECTIONS IN UNORGANIZED POINTS CLOUD

ESMEIDE A LEAL NARVÁEZ

Departamento de Ingeniería de Sistemas, Universidad de Antioquia, Medellín, eleal@udea.edu.co

JOHN WILLIAM BRANCH

Escuela de Sistemas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, jwbranch@unalmed.edu.co

OSCAR ORTEGA LOBO

Departamento de Ingeniería de Sistemas, Universidad de Antioquia, Medellín, oortega@udea.edu.co

Recibido para revisar noviembre 29 de 2006, aceptado febrero 12 de 2007, versión final abril 19 de 2007

RESUMEN: La estimación de las curvaturas y direcciones principales son de suma importancia en diferentes áreas como: la visión por computador, el reconocimiento de patrones, la reconstrucción de objetos 3D, entre otros. Las curvaturas y direcciones son propiedades que deben ser estimadas en forma discreta, debido a que las primitivas de renderizado son puntos sin ninguna conexión u orientación. En este artículo, se presenta un método para estimar las curvaturas y direcciones principales en nubes de puntos no organizados, los cuales han sido muestreados a partir de una superficie 3D. El método propuesto no requiere estimar estructuras intermedias globales como lo son las mallas triangulares, ni aproximaciones locales como regresiones de orden superior; solo es necesaria la estimación de un vecindario geodésico local alrededor de cada punto de la nube. Se presentan validaciones numéricas y gráficas las cuales muestran la eficacia del método.

PALABRAS CLAVE: Estimación de curvaturas y direcciones principales, Estimación de Normales, Ruido, vecindario geodésico, PCA.

ABSTRACT: The computation of principal curvatures and directions is important in different fields like computer vision, pattern recognition and 3D object reconstruction. Curvatures and directions are properties that must be estimated in discrete form, since the rendering primitives are data points that have neither interconnection nor orientation. This paper present a method to estimate principal curvatures and directions from an unorganized-points cloud sampled from 3D surfaces. The proposed method does not require estimation of intermediates global structures like triangular mesh or local approximation. Instead, the method estimates the local geodesic neighborhood around each point in the cloud. Numerical and graphical validations are presented, showing the efficacy of the method.

KEYWORDS: Principal curvatures and directions estimation, Normal estimation, noise, geodesic neighborhood, PCA.

1. INTRODUCCIÓN

La curvatura es una medida invariante de una superficie, que indica qué tanto esta curvada. Se dice que son invariantes ya que permanecen constantes ante traslaciones y rotaciones. Esta medida la cual tiene sus orígenes en la geometría

diferencial ha sido retomada y utilizada por comunidades como la de visión por computador, la reconstrucción de objetos 3D, la computación gráfica, el reconocimiento de patrones entre otras [16][17][6]. En la visión por computador y la reconstrucción de objetos 3D, son muchas las áreas y problemas vinculados a ellas en los

cuales la estimación y utilización de la curvatura, se han convertido en una etapa fundamental en la búsqueda de soluciones como lo son: el registro, la integración, la simplificación de puntos y la segmentación [16] [10].

En la reconstrucción y el reconocimiento de objetos 3D, la estimación de la curvatura ha llegado a ser de gran importancia, y aún más en tiempos recientes, con el incremento y desarrollo de modernos dispositivos de rango, estos realizan un detallado escaneo de objetos complejos, produciendo nubes de puntos no organizados, los cuales son una representación discreta del objeto en cuestión. Se dice que son no organizados, debido a que no se posee información adicional como topología, orientación o un punto de referencia; solo se conocen las coordenadas espaciales de los puntos. Es aquí donde la estimación de propiedades diferenciales entra a jugar un rol importante: se requiere la estimación de propiedades inherentes a la superficie como lo son las normales, los planos tangentes, las curvaturas y direcciones principales de forma discreta y con la mayor precisión posible; estas propiedades son usadas para poder inferir aspectos relacionados como la geometría y la topología de la superficie, así como su comportamiento y variación local de un punto a otro.

Como no se tiene una superficie continua, suave por pedazos, y solo se poseen puntos sin conexión, desde el punto de vista matemático, puntos individuales no ofrecen información acerca de dichas propiedades, es por ello que se hace necesario el estimar o llegar a una aproximación continua de superficie a partir de los puntos y así poder obtener una representación adecuada de ésta. En los últimos años, se ha realizado un gran esfuerzo en el desarrollo de algoritmos que estiman la curvatura y otras propiedades diferenciales a partir de nubes de puntos pero son pocos los que usan directamente la nube para extraer dichas propiedades. La mayoría de estos algoritmos realizar una etapa intermedia para obtener una aproximación de la topología de la superficie, a través de representaciones globales como lo son las mallas triangulares, o representaciones locales extremadamente costosas como lo son regresiones de orden superior. El problema de la

estimación de las propiedades diferenciales en forma discreta, en cada una de las comunidades en las cuales se utilizan, tienen un punto en común; todas ellas parten de la estimación o cálculo de vecindarios alrededor de cada uno de los puntos muestreados que conforman la nube, para de esta manera obtener una aproximación local de la superficie a través de dicho vecindario.

En este artículo se propone un método simple y fácil de implementar para la estimación de las curvaturas y direcciones principales, el cual es robusto al ruido y valores atípicos (outliers). El método propuesto no necesita la construcción de representaciones globales como las mallas triangulares, o locales como regresiones cuadráticas o de orden mayor; solo es necesario la construcción de un vecindario geodésico local a cada punto, el cual se adecua a la topología de la superficie subyacente en cuestión.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2, se hace una breve introducción a los conceptos matemáticos de curvaturas y direcciones principales. En la sección 3, se presentan los trabajos previos encontrados en la literatura. En la sección 4, se describe el método propuesto de estimación de las curvaturas y direcciones principales. En la sección 5, se presentan el análisis y los resultados. En la sección 6, se dan las conclusiones y trabajo futuro.

2. CURVATURAS Y DIRECCIONES PRINCIPALES

La geometría diferencial estudia las variaciones y la descripción local de la forma de una superficie suave. Intuitivamente, se puede pensar en una superficie como un conjunto de puntos en el espacio, los cuales se asemejan a una porción de un plano en el vecindario de cada uno de sus puntos (Figura 1). Para cuantificar las variaciones de la superficie alrededor de un punto, se utiliza la métrica de las curvaturas direccionales; lo que en realidad mide esta métrica de segundo orden, es que tan rápido la superficie se separa del plano tangente en un punto a lo largo de cualquier dirección. Esto quiere decir que la superficie puede

separarse de su plano tangente con distinta rapidez. Así, la superficie de la Figura 1, se separa del plano más rápidamente en la dirección **OA** que en la dirección **OB**.

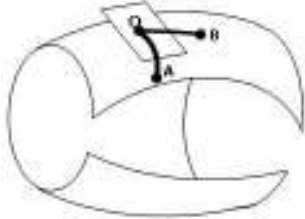


Figura 1. Variaciones de la superficie en diferentes direcciones del plano tangente a la superficie en **O**. [1]

Figure 1. Surface variations in different directions of the tangent plane on the surface at **O**. [1].

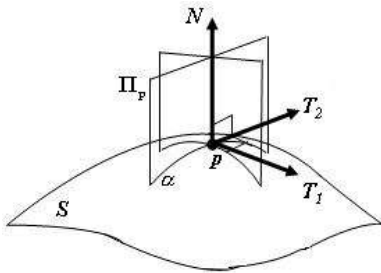


Figura 2. Curvatura normal en la superficie *S* en el punto *p*. El plano Π_{*p*}, contiene el vector normal *N* y

el vector tangente unitario *T*_{*i*}. Las direcciones principales *T*₁ y *T*₂ forman una base ortonormal para un conjunto infinito de curvaturas normales en *p* [18].

Figure 2. Normal curvature on the surface *S* at point *p*. The plane Π_{*p*} contains the normal vector *N* and the unitary tangent vector *T*_{*i*}. The principal directions *T*₁ and *T*₂ form an orthonormal base for an infinite set of normal curvatures at *p* [18].

En la figura 2. El punto *p* se encuentra en una superficie suave *S* y se especifica la orientación de *S* en *p* con un vector normal unitario *N*. Se define *S* como una variedad (manifold) embebida en *R*³. Ahora intersectemos la superficie *S* con un plano Π_{*p*} que contiene a *p* y

a *N*, la intersección de Π_{*p*} con *S* forma una curva α en *S*, la cual recibe el nombre de sección normal. Esta parametrización se escogió de tal forma que *T*_{*i*} es un vector tangente unitario en *p*. Con esta construcción se tiene ahora una curva parametrizada en *S* y de esta manera se puede encontrar la curvatura de la curva o sección normal [8] [18].

La curvatura de una sección normal está afectada por un signo, el cual es positivo si la sección es cóncava en la dirección de la normal, y negativo si es cóncava en el sentido opuesto. Así, en una superficie que tenga la forma de una silla de montar (Figura 3), donde la flecha indica el sentido de la normal a la superficie, la curvatura de la sección **OA** es positiva, mientras que la de la sección **OB** es negativa [1].

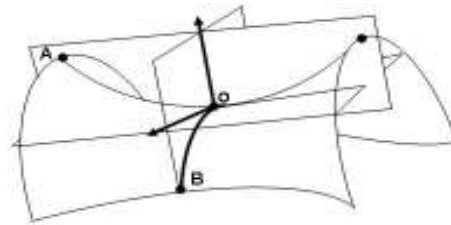


Figura 3. Curvatura de una superficie. El signo de las secciones normales depende de la orientación de la normal en el punto **O**. La sección **OA** es positiva y la sección **OB** es negativa [1].

Figure 3. Curvature of the surface. The sign of the normal sections depends on the direction of the normal in the point **O**. The section **OA** is positive and the section **OB** is negative [1].

Se define la curvatura normal *k*_{*p*}(*T*) de *S* en *p* en dirección de *T* como α''(0) = *k*_{*p*}(*T*)*N*. La curvatura normal es para una única sección normal en *S* que pasa a través de *p*.

La curvatura *k*_{*p*}(*T*) no especifica la curvatura de la superficie *S* en *p*. Para la curvatura de una superficie, se necesita de un concepto más elaborado, ya que Π_{*p*} no es el único plano que puede contener a *N* y a *p* al mismo tiempo.

Si se rota el plano Π_{*p*} alrededor de *N*, se forma una nueva sección normal en *S* con su propia curvatura normal (Figura 2). Se puede observar

que realmente existe un número infinito de planos que cortan la superficie formando secciones normales alrededor de p en todas direcciones. Afortunadamente, en este punto entra el concepto de las curvaturas a una superficie, el cual viene dada por el teorema de Euler. Intuitivamente se describe así, para un conjunto infinito de secciones normales, se puede construir una base ortonormal $\{T_1, T_2\}$, que completamente especifica el conjunto. Se escoge esta base ya que el vector unitario $T_\phi = \cos(\phi)T_1 + \text{sen}(\phi)T_2$ es tangente a la superficie y $\{T_1, T_2\}$ son vectores ortonormales asociados con las curvaturas normales máxima y mínima de la superficie en p , esto es, son las direcciones principales de la superficie S en p . Se puede demostrar que en cada punto de una superficie hay dos direcciones particulares las cuales son $\{T_1, T_2\}$ tales que:

1. Son mutuamente perpendiculares.
2. Las curvaturas $k_p^1 = k_p(T_1)$ y $k_p^2 = k_p(T_2)$ asociadas a las secciones normales en estas direcciones son el valor menor y mayor de las curvaturas de todas las secciones normales.
3. La relación entre las curvaturas y las direcciones perpendiculares, esta dada por la ecuación (1).

$$k_p(T_\phi) = k_p^1 \cos^2 \phi + k_p^2 \text{sen}^2 \phi \quad (1)$$

Donde $-\pi \leq \phi \leq \pi$ es el ángulo formado por el plano de la sección normal con uno de los vectores T que se encuentran en el plano tangente.

A las direcciones $\{T_1, T_2\}$ se les llama direcciones principales y a las curvaturas k_p^1 y k_p^2 se les llama curvaturas principales de la superficie S en el punto p .

El teorema anterior muestra que, a pesar de que existen una gran diversidad de superficies, la forma de éstas en el entorno de cada punto, solo puede ser una entre 8 tipos de superficies completamente definidos para mayor detalle ver [8] [1] [7]. Para la identificación de estos 8 tipos de superficies, se hace necesario de la combinación de las curvaturas principales, lo que

da como resultado, dos definiciones comunes de curvatura en una superficie. La primera y quizás la más común es la curvatura Gaussiana, esta es el producto de las curvaturas principales $K = k_p^1 k_p^2$. La segunda es la curvatura Media, esta es el promedio de las curvaturas principales $H = \frac{1}{2}(k_p^1 + k_p^2)$. Aunque ninguno de los dos tipos de curvaturas Gaussiana o Media especifican la orientación de la curva ellas son definiciones comúnmente usadas en la literatura de estimación. En la Figura 4. Se ilustra como la combinación de las curvaturas Gaussiana y Media, pueden identificar ocho formas fundamentales o tipos de superficies.

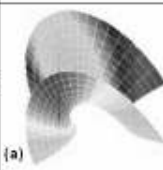
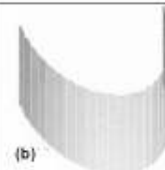
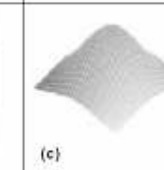
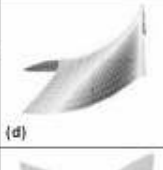
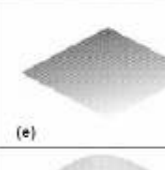
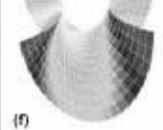

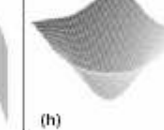
	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
$H < 0$			
$H = 0$			
$H > 0$			

Figura 4. Tipos de superficie según el valor de K y H . [7]

Figure 4. Types of surface according to the value of K and H . [7]

Ocho formas fundamentales (a) Hiperbólica Silla Valle, (b) Parabólica cóncava hacia arriba, (c) Elíptica cóncava hacia abajo, (d) Hiperbólica mínima, (e) Plana, (f) Hiperbólica Silla arista, (g) Parabólica cóncava hacia arriba, (h) Elíptica cóncava hacia arriba.

2.1 Formulación discreta de la Curvatura

En su trabajo, Taubin [21], plantea una definición de curvatura, la cual es dada por una fórmula integral (2). Este trabajo muestra que

para un punto p en una superficie S suave, se define la matriz simétrica

$$M_p = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} k_p(T_\phi) T_\phi T_\phi^t d\phi \quad (2)$$

Donde t , denota la transpuesta, y $T_\phi = \cos(\phi)T_1 + \text{sen}(\phi)T_2$ es un vector unitario tangente a la superficie. La matriz M_p posee un vector propio v_1 , el cual es el vector normal N , y tiene asociado un valor propio 0, los otros dos vectores propios v_2, v_3 , equivalen a las direcciones principales $\{T_1, T_2\}$ (los cuales son ortonormales), y sus valores propios están relacionados por la combinación lineal con las curvaturas principales por medio de la ecuación (3).

$$\begin{aligned} k_p^1 &= 3m_p^{11} + m_p^{22} \\ k_p^2 &= 3m_p^{22} + m_p^{11} \end{aligned} \quad (3)$$

Donde m_p^{11} y m_p^{22} son los valores propios de M_p asociados con $\{T_1, T_2\}$, respectivamente.

Taubin da una versión discreta de la ecuación (2), la cual se muestra a continuación

$$\tilde{M}_p = \frac{1}{2\pi} \sum w_i k_i T_i T_i^t \quad (4)$$

La ecuación anterior expresa una suma ponderada sobre el vecindario de un punto p .

Para un conjunto finito de direcciones, se define T_i como un vector tangente normalizado, y es la

proyección del vector $\vec{p_i p_j} = p_j - p_i$ en el plano tangente a la superficie en p (Figura 5); el

peso w_i es el paso de integración discreto, el cual tiene la siguiente restricción $\sum w_i = 2\pi$.

Esta restricción es necesaria, ya que mantiene la invarianza de traslación entre los pesos asignados a las longitudes entre el punto central, y sus vecinos. El algoritmo de Taubin, calcula

\tilde{M}_p para cada vértice en la malla, y descompone

la matriz con una transformación de Householder y una rotación de Givens. Los

vectores propios de la matriz \tilde{M}_p dejan las direcciones principales, y la combinación de los valores propios a través de la ecuación (3), deja las curvaturas principales. Ahora cabe preguntarse, como se hallan los términos T_i y k_i , Taubin recurre a la utilización de una serie truncada de Laurent, para encontrarlos. Pero como el mismo apunta en su trabajo, esta no es robusta al ruido, y hay que hacer un preprocesamiento para poder eliminar o atenuar el ruido.

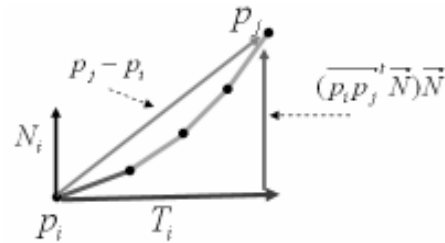


Figura 5. Relación entre el vecindario y los vectores normal y tangente.

Figure 5. Relation between the neighborhood and the normal and tangent vectors.

3. TRABAJOS PREVIOS

En muchos algoritmos relacionados con el procesamiento de superficies a partir de nubes de puntos, la estimación de la curvatura en cada uno de los puntos que conforman dicha superficie se ha convertido en un paso fundamental. Como es el caso de algoritmos de reconocimiento, de segmentación, de registro, entre otros, todos ellos necesitan de una aproximación a la curvatura que garantice que los errores en dicha estimación sean mínimos.

Existen diferentes aproximaciones al problema de la estimación de la curvatura en puntos muestreados; entre cuales se encuentran las basadas en geometría computacional (mallas triangulares, triangulación de Delaunay/Voronoi) y las basadas en aproximaciones numéricas (polinomios de regresión, regresiones cuadráticas y regresiones lineales).

Un primer paso de los métodos de estimación de curvaturas basados en geometría computacional

es la obtención de una aproximación a la topología de la superficie, más específicamente lo que se busca es una relación de interconectividad entre los puntos que brinde un estimativo global de la superficie, esta interconectividad, se realiza por medio de una malla triangular de la superficie o por triangulación de Delaunay/ Voronoi.

En los métodos basados en mallas la estimación de la curvatura en un vértice V_i , se realiza partiendo de la discretización de alguna de las definiciones de curvatura encontrada en la literatura de geometría diferencial [8], básicamente toman los triángulos adyacentes a un vértice, y a continuación aplican la definición discreta de curvatura, en esta dirección se encuentran los trabajos de [21][4] [12] [23][17][19].

El método de Taubin [21] es muy interesante (en este se apoyará el método propuesto en este artículo), este toma un vecindario de triángulos adyacentes a un vértice V_i , luego proyecta a un plano tangente a V_i los vectores que van de V_i a cada uno de los puntos extremos de las aristas de los triángulos adyacentes a V_i y a continuación estima los tensores de curvatura a partir de los valores y vectores propios de una matriz 3x3, definida por medio de una fórmula integral, obteniendo de esta manera las curvaturas y direcciones principales. La fortaleza de este método es su simplicidad y elegancia, su complejidad es lineal tanto en tiempo como en espacio de memoria. Page [18] retoma el trabajo de Taubin y extiende el concepto a un vecindario geodésico de triángulos.

Masuda [17] por su parte, encuentra las curvaturas y direcciones principales a cualquier tipo de representación de superficie (triangular, cuadrática, polinómica), partiendo de un paso previo el cual llama "Distance Field Orientation". En este trabajo se forma una matriz a partir del "Distance Field" y después se realiza un PCA sobre dicha matriz encontrando las curvaturas y direcciones principales de la superficie, en cualquiera de las anteriores representaciones.

El problema de estos métodos es que no son robustos al ruido, ya que utilizan las mallas o una regresión, lo cuales son sensibles al ruido y a

valores atípicos o outliers. El trabajo de Page [18] soluciona en cierta medida esta falencia, pero no así la sensibilidad a outliers.

El enfoque basado en aproximaciones numéricas, parte de la malla triangular o de los puntos muestreados de la superficie, y realizan a continuación un ajuste cuadrático, sobre las representaciones, en esta dirección se encuentran los trabajos de [22] [9] [3] [7]. Lo que hacen estos métodos es tomar un vecindario a un punto o vértice, y a continuación realizan una regresión cuadrática sobre dicho vecindario ajustando una de las formas cuadráticas fundamentales. Una vez obtenida la ecuación de la superficie por medio de la regresión, el siguiente paso es derivar numéricamente y aplicar una de las definiciones de curvatura.

El problema de estos métodos es que no son robustos a los valores atípicos, lo cual los hace sensibles al ruido, también poseen un alto costo computacional, ya que además de la regresión tienen que realizar derivaciones numéricas hasta de segundo orden, esto se hace para cada punto o vértice que conforma la superficie.

Tang y Medioni [20], presentan en su trabajo un dirección diferente a los anteriores, ellos realizan la estimación del signo de la curvatura y las direcciones principales sobre los puntos muestreados, ajustando una curva de longitud mínima entre el punto central y los puntos de su vecindario, este método tiene la ventaja de ser robusto al ruido, pero una de sus desventajas es que su definición de curvatura es incompleta, ya que no encuentra las curvaturas principales, y sólo se limita a su signo y direcciones principales. Otro inconveniente que tiene es la utilización de una función de tipo Gaussiana esta depende de parámetros los cuales controlan la curvatura, la longitud de la curva y el nivel de proximidad entre los puntos. Otro aspecto es que realiza pruebas para saber si la superficie es plana, hiperbólica o elíptica, para después inferir las direcciones y los signos de la curvatura; cuando se podría realizar en un solo paso, infiriendo de ante mano la topología local de la superficie con un grafo de vecinos más cercanos geodésico.

En general, las propuestas anteriores plantean soluciones adecuadas al problema de la estimación de la curvatura, aunque algunas requieren de un preprocesamiento de los datos

para la eliminación del ruido, aproximaciones de la superficie por medio de mallas triangulares o regresiones cuadráticas. Deberían tenerse en cuenta soluciones que operen única y exclusivamente sobre los puntos como en Tang y Medioni [20], pero con una definición completa de curvatura (signos, curvaturas y direcciones principales), además deben ser tolerantes al ruido y a los valores atípicos, así como no depender de muchos parámetros ingresados por el usuario, también debería tomarse en cuenta la topología local de la superficie utilizando vecindarios geodésicos.

4. MÉTODO PROPUESTO

4.1 Análisis de Componentes Principales (PCA)

A partir de un conjunto de puntos $P = \{p_i\}$ posiblemente con ruido muestreados a partir de una superficie S , el objetivo es determinar las propiedades diferenciales como lo son las normales y las curvaturas y direcciones principales. Como se dijo al inicio de la sección 2, la geometría diferencial emplea para el estudio de dichas propiedades un plano tangente a la superficie en un punto dado de esta. Para aproximar dicho plano utilizaremos una versión robusta del Análisis de Componentes Principales PCA, la cual permite obtener un plano de ajuste local, lo más cercanamente posible de la superficie a un vecindario $N(p)$ de puntos, alrededor de un punto p dado. A continuación se dará una corta descripción del método, para un mayor detalle ver [14]. El PCA también proporciona un vector normal a dicho plano, el cual es un estimativo de la normal real a la superficie en el vecindario $N(p)$.

Para estimar el plano tangente o de ajuste a la superficie en un punto dado, conformamos un vecindario $N(p) = \{p_1, \dots, p_k\}$ con los k -vecinos más cercanos a un punto p_i que conforma la nube. Una vez obtenido el vecindario, conformamos una matriz de covarianza pesada MC_w de $N(p)$ (por medio de las formulas 5 y 6).

$$\bar{p}_w = \frac{\sum w_i p_i}{\sum w_i} \quad (5)$$

$$MC_w = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p}_w)(p_i - \bar{p}_w)^T W \quad (6)$$

Donde $W = \{\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_n}\}$, son pesos asociados a cada punto p_i del vecindario $N_i(p)$. Se puede observar que MC_w es una matriz de 3×3 simétrica, semi-positiva definida. La descomposición de MC_w en sus valores y vectores propios producen los componentes principales, los vectores propios se designan por v_1, v_2, v_3 y los tres valores propios reales asociados a estos se designan por $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Los valores propios miden la variación de los puntos en el vecindario $N_i(p)$, a lo largo de las direcciones de sus correspondientes vectores propios. Los vectores ortogonales v_2, v_3 definen las direcciones de mayor y menor variación de los puntos y expanden el plano de ajuste al vecindario $N_i(p)$. El vector propio v_1 aproxima el vector normal en p_i .

En el área visión por computador y reconstrucción tridimensional, existen objetos que no poseen superficies completamente suaves, dichos objetos tienen discontinuidades, esto es: esquinas, bordes etc. Es por ello que en estas discontinuidades, no es posible calcular planos tangentes, y mucho menos vectores normales a la superficie en los puntos que están en dichas discontinuidades, debido a lo anterior hay que realizar un paso previo, el cual es la identificación de dichos puntos para evitar el cálculo de las propiedades diferenciales. Para ello se remite al lector a las siguientes fuentes [15] [11] [2], debido a que el espacio es limitado para la descripción de este proceso.

4.2 Estimación del Vecindario Geodésico Local

Como se mencionó en la sección 3, los métodos de estimación de curvatura deberían operar sobre los puntos, sin realizar un enmallado previo de la superficie, o una regresión local de orden superior, esto con el fin de evitar pasos

intermedios innecesarios, ya que si nuestros datos son única y exclusivamente puntos, deberíamos utilizarlos para extraer la mayor cantidad de información de ellos hasta donde nos sea posible; sin necesidad de recurrir a dichas representaciones. Es por ello que se hace necesario buscar una representación que brinde una interconexión topológica entre los puntos muestreados, sin necesidad de utilizar estructuras globales o locales muy complejas.

La solución planteada en este apartado es la construcción de un vecindario geodésico local representado por un grafo de distancias mínimas, el cual brinda la interconexión necesaria para estimar las curvaturas y direcciones principales a cada punto de la superficie. Se escoge geodésico (curva de mínima longitud entre dos puntos), ya que este nos brinda una mejor descripción topológica de la superficie alrededor de un punto, siguiendo la forma de esta.

Para construir el grafo, se parte de la obtención de un vecindario $N(p) = \{p_1, \dots, p_k\}$ local alrededor de un determinado punto; la distancia geodésica entre el punto central y cualquiera del vecindario, será aproximada por la ruta o camino mínimo entre los puntos. Esta ruta puede ser calculada por el algoritmo de Dijkstra [5]. Sin embargo este es ineficiente para aproximar la distancia geodésica entre todo el conjunto $P = \{p_i\}$ de puntos, ya que el algoritmo sólo asegura la ruta mínima entre dos puntos cualesquiera, más no así la distancia geodésica, pero como estamos operando localmente, esta falencia es mitigada, ya que la distancia más corta, puede ser utilizada para estimar la geodésica, con una aproximación aceptable (Figura 6).

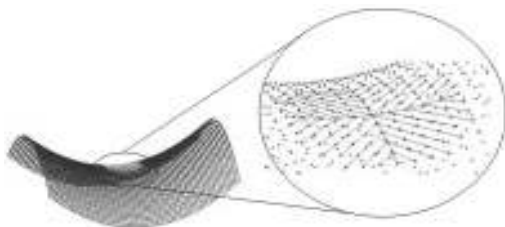


Figura 6. Estimación del vecindario Geodésico local, representado como un grafo.

Figure 6. Estimation of the local Geodesic neighborhood represented like a graph.

4.3 Estimación de las Curvaturas y Direcciones Principales

En esta sección, se presenta el método para la estimación de curvaturas y direcciones principales a partir de puntos muestreados. Este método extiende las ideas de Taubin [21], el cual presenta un método de estimación de curvaturas sobre mallas triangulares; la diferencia radica en que el método propuesto en este artículo es robusto al ruido, a diferencia del método de Taubin, y no se limita a utilizar un vecindario adyacente (Figura 7a), al punto (vértice en Taubin), sino que extiende la definición a un vecindario geodésico local expresado por un grafo (Figura 7b), el cual fue descrito en la sección anterior. Apoyándonos en la aproximación de la normal y el plano de ajuste de la sección 4.1, vamos a estimar las curvaturas y direcciones principales a cada uno de los puntos de la superficie.

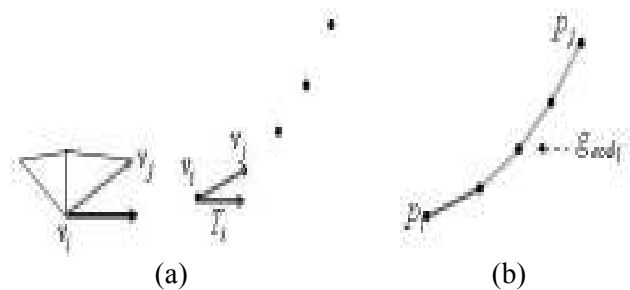


Figura 7. Comparación entre el vecindario de Taubin y el propuesto (a) Vecindario adyacente al vértice v_i (polígonos) (b) Vecindario geodésico local (Grafo).

Figure 7. Comparison between the neighborhood of Taubin and the proposed one (a) adjacent neighborhood to the vertex (polygons) (b) local geodesic neighborhood (Graph).

Como un primer paso, se usa el vecindario geodésico $geoQ(p_i)$ al rededor de un punto p_i , luego en cada punto de vecindario se estiman las direcciones tangentes T_i , las curvaturas normales k_i , y los pesos w_i , para formar la

matriz \tilde{M}_p . Esta matriz se descompone con PCA, y sus correspondientes vectores propios son usados para estimar las direcciones T_1 y T_2 , sus valores propios estiman las curvaturas principales $k_{p_i}^1$ y $k_{p_i}^2$ en p_i , por medio de la transformación lineal dada por la ecuación (3). Ahora se mostrará como se hallan los valores T_i , k_i y w_i .

Para calcular los w_i , debemos utilizar una función o ecuación que asigne mayor peso a los puntos más cercanos y menos peso a los puntos más alejados, esto con el fin de no permitir mucha influencia de los puntos que están distantes en un sentido geodésico del punto central del vecindario. Esto puede hacerse asignando los pesos con una repartición inversa (ecuación 7).

$$w_i = \frac{1}{2\pi \cdot g_{eod_i} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{g_{eod_i}}} \quad (7)$$

Donde g_{eod_i} , es la distancia geodésica entre p_i y los puntos p_j , de su vecindario (Figura 7b). Como se mencionó los pesos deben cumplir la restricción $\sum w_i = 2\pi$.

Las direcciones tangentes T_i , se hallan en cada punto p_i , proyectando los vectores $\overrightarrow{p_i p_j} = p_j - p_i$, en el plano tangente a p_i , y normalizando el resultado (Figura 5), en la ecuación (8), se muestra lo anterior.

$$T_i = \frac{\overrightarrow{p_i p_j} - (\overrightarrow{p_i p_j} \cdot \overrightarrow{N}) \overrightarrow{N}}{\left\| \overrightarrow{p_i p_j} - (\overrightarrow{p_i p_j} \cdot \overrightarrow{N}) \overrightarrow{N} \right\|} \quad (8)$$

Donde \overrightarrow{N} , es el vector normal presentado en la sección 4.1. El involucrar la normal (la cual fue

estimada de manera robusta) en nuestra definición de curvatura, hace que esta sea también robusta al ruido y a los valores atípicos. El último término que nos queda es el concerniente a las curvaturas k_i , para ello se utiliza una de las definiciones de curvatura, la cual es dada en términos de la longitud de arco S entre dos puntos p_i, p_j y el ángulo θ que forman los vectores tangentes o los normales a ellos [1]. Las siguientes ecuaciones resumen lo anterior.

$$k_i = \frac{\theta}{S} \quad (9)$$

$$\cos \theta = \frac{N \cdot n_i}{\|n_i\|} \quad (10)$$

$$S = g_{eodi} \quad (11)$$

Donde n_i , son cada una de las normales de los p_j , pertenecientes a $geoQ(p_i)$.

Ahora que todos los términos han sido encontradas, procedemos a armar la matriz \tilde{M}_p , por medio de la ecuación (4), realizando una descomposición por medio del PCA, obteniendo las direcciones principales T_1, T_2 , y por medio de la transformación lineal dada por la ecuación (3), obtenemos las curvaturas principales $k_{p_i}^1$ y $k_{p_i}^2$.

De esta manera hemos alcanzado nuestra meta, de establecer las curvaturas a cada uno de los puntos de una superficie a partir de datos muestreados, sin la necesidad de recurrir a mallas triangulares, ni regresiones cuadráticas. Ahora se puede llegar a clasificar cada punto de la superficie, dentro de las ocho formas fundamentales (Figura 4), para su posterior utilización en algún problema de visión o reconstrucción 3D.

5. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Las pruebas se realizaron en un PC con procesador AMD de 1.5 GHZ y 512MB de memoria RAM. Los aplicativos de prueba se desarrollaron en Microsoft Visual C++ 6.0 y MATLAB 6.5. En la evaluación de las curvaturas principales, lo que interesa probar es la aproximación de las curvaturas con respecto a las curvaturas reales, para ello se dispuso de una superficie analítica, dado que en ella se conocen exactamente los valores y el signo de las curvaturas principales. Se evaluará los signos de la curvatura, ya que con base en ellos, se llega a la identificación los tipos fundamentales de superficies. La estimación de los valores se hará por medio del análisis del tamaño del vecindario con respecto al error de aproximación. La evaluación de los signos de las curvaturas se realizará evaluando ante diferentes tamaños de vecindario y con ruido Gaussiano del 10% de la separación entre los datos en una superficie analítica, para verificar si se afectan los signos y por consiguiente la identificación inequívoca de la superficie.

Para la estimación de las curvaturas principales, se realizó el siguiente experimento, se tomó la superficie dada por la ecuación $z = x^2 - y^2$ en el intervalo $[-1.5 \text{ y } 1.5]$; la Figura 8, tiene curvaturas principales con valores de 2 y -2. Se estimó la curvatura, agregándole ruido Gaussiano como se dijo anteriormente

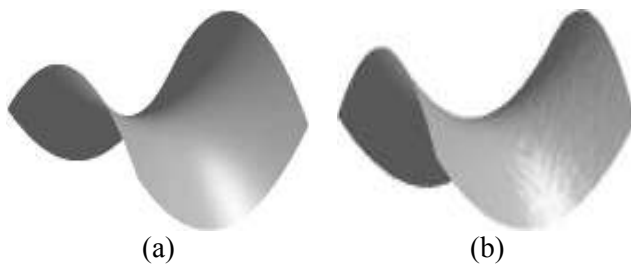


Figura 8. Punto silla, estimación de las curvaturas principales. (a) Superficie sin ruido, (b) superficie con ruido Gaussiano del 10% del promedio de separación entre los puntos.

Figure 8. Saddle point, estimation of the principal curvatures. (a) surface without noise, (b) surface with Gaussian noise of 10% of the average of separation between the points.

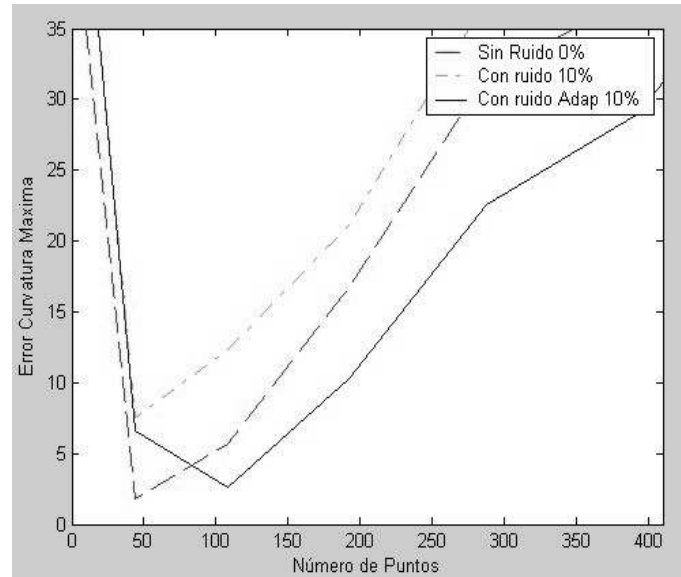


Figura 9. Gráfica del error de la curvatura máxima, en función del tamaño del vecindario.

Figure 9. Plot of the error of the Maxima curvature based on the size of the neighborhood.

En la Figura 9, se puede apreciar como al utilizar el PCA robusto (línea azul), en presencia de ruido, mejora la estimación de la curvatura, a diferencia del error producido sin la utilización de este (línea verde). La línea roja es la estimación del vecindario sin ruido y sin PCA Robusto.

La tabla 1 muestra como al ir aumentando el tamaño del vecindario, la precisión en la estimación de las curvaturas principales disminuye, pero se mantienen los signos de la curvatura, lo cual es de suma importancia ya que la identificación de las ocho superficies fundamentales, se puede realizar a pesar del ruido y de la variación del tamaño del vecindario. Se puede observar que el error de la estimación en los valores de las curvaturas disminuye en el tamaño del vecindario entre 35 y 44, y aumenta por encima y por de bajo de este. Lo que da a entender que existe un intervalo adecuado para que el error en la estimación sea mínimo.

Tabla 1. Valores de la curvatura para diferentes tamaños de vecindario con ruido Gaussiano del 10% del promedio de la separación de los puntos.

Table 1. Curvature values for different sizes of the neighborhood, whit Gaussian noise of 10% of the average of separation between the points.

Número de Vecinos	Curvatura Mínima (K1)	Curvatura Máxima (K2)
8	1.465	-1.465
44	2.036	-2.036
108	1.892	-1.892
192	1.713	-1.713
288	1.519	-1.519
392	1.455	-1.454
508	1.280	-1.278
672	1.182	-1.171
808	1.152	-1.133
940	1.084	-1.058
1124	0.988	-0.952

En la Figura 10, puede apreciarse como el método propuesto para el cálculo de curvaturas es aplicado en un proceso de segmentación [15], en general tiene un buen comportamiento al segmentar un objeto compuesto de diversos tipos de superficies, como lo es el FanDisk. El algoritmo de segmentación pudo detectar las la separación de partes de la superficie en las cuales a una transición suave entre una parte de la superficie y otra (Región azul y Amarilla).

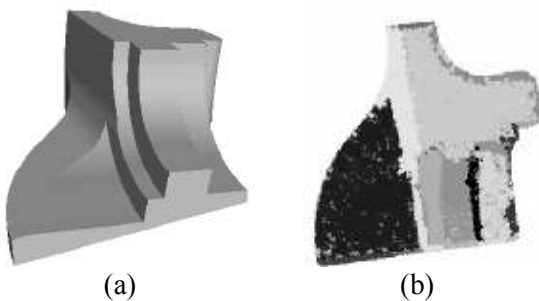


Figura 10. Modelo FanDisk (a) Original, (b) Segmentado utilizando la clasificación de los ocho tipos de superficies, por la combinación de la curvaturas Media y Gaussiana. [15]

Figure 10. FanDisk Model (a) Original, (b) Segmented using the classification the eight types of surfaces, by combination of the Mean and Gaussian curvatures. [15]

6. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un método para estimar las curvaturas y direcciones principales a partir de un conjunto de puntos ruidosos, el cual es una variante al método propuesto por G. Taubin. A diferencia de otros métodos, este no necesita de estructuras globales como mallas, o aproximaciones locales como regresiones de orden superior, para poder estimar las curvaturas y direcciones principales. El método propuesto, muestra ser robusto al ruido y a los valores atípicos (outliers), ya que se apoya en la utilización de una variante robusta del PCA. El método es simple y fácil de implementar, y es efectivo al momento de hallar los valores y signos de las curvaturas y direcciones principales en una nube de puntos. Queda abierto el problema de estimar el tamaño adecuado del vecindario para el cálculo de las curvaturas y direcciones principales, ya que a pesar de utilizarse un vecindario geodésico, que sigue la topología de la superficie para dicha estimación, su tamaño es un parámetro ingresado por el usuario. También debería tomarse en cuenta la no utilización de todos los puntos del vecindario para hallar las curvaturas y direcciones principales, bastaría solo con los puntos de la periferia, pero no es sencillo determinar con exactitud que puntos pertenecen a la periferia del vecindario y cuales no. Una aproximación podría ser proyectar los puntos del vecindario sobre el plano de regresión, y tomar el convexhull del conjunto y de esta forma se obtendría una aproximación.

REFERENCIAS

- [1] ALEKSANDROV, A.D. et al. La matemática: su contenido, métodos y significado, volumen 2. Alianza Editorial, Madrid 1974.
- [2] ATMOSUKARTO, I. ZHOU, L. LEOW, W. K and HUANG, Z. Poly. Polygonizing Non-uniformly Distributed 3D Points by Advancing Mesh Frontiers. In Proc. CGI'01, 2001.
- [3] BELS, P. and JAIN, R.C. Segmentation through Variable Order Surface Fitting. IEEE PAMI 1988.

- [4] CHUNG, T.T and LIAO, C.Y. An Automatic Data Segmentation Method for 3D Measure Data Points. 2002.
- [5] CORMEN, T. H. LEISERSON, C. E. RIVEST, R. L and STEIN, C. Introduction to Algorithms. MIT Press, 2001.
- [6] DeCARLO, D., FINKELSTEIN, A., RUSINKIEWICZ, S. and SANTELLA, A. Suggestive Contours for Conveying Shape. In SIGGRAPH 03. Conference 2003.
- [7] DJEBALI, M., MELKEMI, M. And SAPIDIS, N. Range-Image Segmentation and Model Reconstruction Based on a Fit-and-Merge Strategy. 2002.
- [8] DoCARMO, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1976.
- [9] DOUROS, I and BUXTON, B. Three-dimensional Surface Curvature Estimation Using Quadric Surface Patches. Scanning 2002 Proceedings, Paris, May 2002.
- [10] GUEST, E., BERRY, E., BALDOCK, R. A., FIDRICH, M., and Smith, M. A. Robust point correspondence applied to two- and three-dimensional image registration. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., 23(2):165–179, Feb. 2001.
- [11] GUMHOLD Stefan, XINLONG Wang and MACLEOD Rob. Feature Extraction From Point Clouds. 2001.
- [12] HUANG, J and MENQ, C.H. Automatic Data Segmentation for Geometric Feature Extraction from Unorganized 3D Coordinate Point. IEEE Transactions On Robotics And Automation Vol 17, No.3, June 2001.
- [13] KLEIN, J and ZACHMANN G. Point Cloud Surfaces using Geometric Proximity Graphs. Computer & Graphics, Vol. 28, no. 6, 2004.
- [14] LEAL, E and LEAL, N. Point Cloud Denoising Using Robust Principal Component Analysis. International Conference on Computer Graphics Theory and Applications. Setúbal, Portugal. 2006.
- [15] LEAL, E. Método de Segmentación Para Superficies de Forma Libre a Partir de Imágenes de Rango Empleando Cálculo de Vecindarios Adaptativos. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. 2005.
- [16] LIAO, C.W. and MEDIONI, G. Simultaneous Surface Approximation and Segmentation of Complex Objects. Computer Vision and Image Understanding Vol. 73, No. 1, January, pp. 43–63, 1999.
- [17] MASUDA, T. and IBARAKI, T. Surface Curvature Estimation from the Signed Distance Field. Proceedings of the Fourth International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM'03), 2003.
- [18] PAGE, D. L., SUN, Y. KOSCHAN, A. F. PAIK, J. and ABIDI, M. A. Normal Vector Voting: Crease Detection and Curvature Estimation on Large, Noisy Meshes. Elsevier. 2002.
- [19] SRINARK, T and KAMBHAMETTU, C. A Novel Method for 3d Surface Mesh Segmentation. In 6th IASTED International Conference on Computers, Graphics, and Imaging, 2003.
- [20] TANG C. K and MEDIONI, G. Robust Estimation of Curvature Information From Noisy 3D Data for Shape Description, in Proceedings of the Seventh International Conference on Computer Vision, Kerkyra, Greece, September 1999, pp. 426–433.
- [21] TAUBIN, G. 1995. Estimating the Tensor of Curvature of a Surface from a Polyhedral Approximation. In Proc. International Conference on Computer Vision, 1995, pp. 902–907.
- [22] VANCO, M. A Direct Approach for the Segmentación of Unorganized Points and Recongnition of Simple Algebraic Surfaces. PhD Thesis. University of Technology Chemnitz 2002.
- [23] WOO, H., KANG, E. WANG, Semyung. KWAN H. Lee. A New Segmentation Method for Point Cloud Data. International Jurnal of Machine Tools & Manufacture. Pergamon, Elseivier Science. 2002.