# EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS EN LOS GRADOS 2º, 3º, 4º Y 9º DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

PAOLA ANDREA BENJUMEA QUINTERO
DIANA CECILIA GALLEGO RAMIREZ
NATALIA ANDREA MIRANDA OSPINA
NIDIA MIRLEY MONTOYA VELÁSQUEZ
ARBEY OCAMPO PÉREZ

**TRABAJO DE GRADO**

**Asesores: Yolanda Beltrán y Guillermo Silva Restrepo**

DEPARTAMENTO DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLÍN
2007

# TABLA DE CONTENIDOS.

# INTRODUCCIÓN

La monografía que se presenta a continuación, hace énfasis en el desarrollo del pensamiento variacional y la formulación de problemas matemáticos; para tal fin, se retoman aspectos de las teorías del aprendizaje de Piaget, Vigotsky y Ausubel, al igual que la teoría de los campos conceptuales presentada par Gerard Vernaud con respecto al aprendizaje de las matemáticas.

Las teorías mencionadas anteriormente asociadas al método de investigación acción, fueron claves para la creación de la propuesta metodológica, la cual se basa en la indagación sobre los conocimientos previos de los estudiantes, la resolución de problemas y la formulación de los mismos.

La propuesta que se presenta se desarrolla en cuatro momentos: Observación, diagnóstico, intervención y final.

Seguidamente se realizó la sistematización de las producciones de los estudiantes, con el fin de identificar los avances, y las dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional y la formulación de problemas, y finalmente se plasmaron las conclusiones y recomendaciones al respecto.

# EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS EN LOS GRADOS 2º, 3º, 4º Y 9º DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1. JUSTIFICACIÓN

La matemática siempre ha sido la asignatura con mayores dificultades tanto para los alumnos como para los profesores, los primeros porque las ven muy difíciles y los segundos porque tienen que pensar en nuevas estrategias o alternativas que les permitan llegar a los alumnos y posibilitar en éstos la formación y adquisición de nuevos conceptos en sus estructuras cognitivas.

Al tener en cuenta las dificultades que se observan en los alumnos de las Instituciones Educativas Javiera Londoño (Sevilla) y Yermo y Parres con respecto al desarrollo del pensamiento Variacional, se hace necesario retomar de los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas los modelos matemáticos de tipo de variación, tales como la aditiva, la multiplicativa y de proporcionalidad, además, se pretende llevar a cabo un trabajo en el cuál se potencie el desarrollo de este pensamiento a través de una línea de continuidad, la cual parte de las estructuras aditivas y multiplicativas, continúa con la proporcionalidad directa y finaliza con el concepto de función lineal.

Según Carlos Eduardo Vasco, “el pensamiento Variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidad de la misma o de distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la relación"

En ésta misma línea, los lineamientos curriculares proponen la actividad de formular y resolver problemas como un elemento importante en el desarrollo de las Matemáticas y en el estudio del conocimiento Matemático.

Es por ello, que con el desarrollo del Pensamiento Variacional, se pretende superar la enseñanza de los contenidos Matemáticos fragmentados, y enseñar "conceptos y procedimientos Interestructurados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas"[1] de su actividad práctica.

Para lograr esto se implementarán herramientas y estrategias metodológicas que posibiliten en el estudiante "la habilidad para comunicarse matemáticamente, expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, utilizar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas"[2]; esto con el fin de que "den cuenta del cómo y por qué de los procesos que se siguen para llegar a las conclusiones, de que justifiquen las estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas, de que formulen hipótesis, hagan conjeturas y predicciones y que utilicen argumentos propios para exponer sus ideas"[3].

## 1.2. FORMULACIÓN

¿Cómo potenciar el desarrollo del Pensamiento Variacional y la formulación de problemas en los estudiantes de la Educación Básica de las Instituciones Educativas Javiera Londoño (Sevilla) y Yermo y Parres?

[1] Lineamientos curriculares de Matemáticas. Pág. 72
[2] Ibíd. Pág.76
[3] Ibíd. Pág.77

## 1.3. PREGUNTAS ORIENTADORAS

- ¿Qué elementos se deben tener en cuenta para analizar y clasificar los problemas que plantean los estudiantes de la educación básica?

- ¿Cómo incentivar a los estudiantes de educación básica a la resolución y formulación de problemas en el pensamiento variacional?

- ¿Qué estrategias tienen en cuenta los estudiantes de educación básica para formular y resolver problemas en cuanto al pensamiento variacional?

## 1.4. OBJETIVOS

### 1.4.1. GENERAL

Contribuir al desarrollo del pensamiento Variacional de los estudiantes de Básica por medio de estrategias pedagógico - didácticas en las Instituciones Educativas Javiera Londoño (Sevilla) y Yermo y Parres

### 1.4.2. ESPECIFICOS

- Elaborar e implementar situaciones de aprendizaje que movilicen los esquemas del Pensamiento en los estudiantes de básica primaria de las Instituciones Educativas Javiera Londoño (Sevilla) y Yermo y Parres en cuanto a conceptos relacionados con el pensamiento Variacional.

- Propiciar el acceso al aprendizaje de las matemáticas de manera activa, participativa y comprensiva, donde prime los procesos y la comprensión de los algoritmos antes que los resultados y la memorización de los mismos.

- Utilizar los conocimientos matemáticos y la capacidad de razonamiento en contextos reales para formular problemas de tipo aditivo y multiplicativo.

# 2. MARCO REFERENCIAL

## 2.1. ANTECEDENTES

Con respecto a la formulación de problemas es poca la información hallada, ya que al parecer es un tema nuevo de estudio y son pocas las personas que se han dedicado a ello. Los referentes teóricos y conceptúales que se han obtenido al respecto son artículos hallados en Internet, la mayoría de sus autores son cubanos y el trabajo está dirigido a la formulación de problemas en el campo de la geometría y para la básica secundaria.

Reinaldo Sanpedro (Cubano) retoma de Campistrous, que un problema no puede ser inventado de forma repentina, y sugiere algunos pasos que deben ser tenidos en cuenta a la hora de formularlos, estos son:

- Buscar un tema.
- Plantear una situación inicial.
- Asociar los componentes extraídos del objeto o situación de la cual se pretende partir.
- Buscar las relaciones existentes entre los elementos que se han clasificado.
- Plantear el problema.

Para realizar el trabajo fue necesario partir de la teoría sobre resolución de problemas, la cual permitió inferir algunas estrategias que pudieran posibilitar la formulación de los mismos.

## 2.2. MARCO TEORICO

Para hablar de un aprendizaje significativo en el aula es necesario antes de ello, retomar algunas teorías que permitan dar cuenta de los procesos mentales o cognoscitivos realizados por los sujetos, para ello se hará una breve referencia a la teoría Psico-genética de Jean Piaget, la interacción social y el desarrollo de las funciones psicológicas superiores de Vigotsky y la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.

A continuación se presenta un esbozo general de las posturas de los autores mencionados anteriormente.

### 2.2.1. **TEORÍA PSICOGENÉTICA** (Piaget)

Según la teoría de Piaget el conocimiento es "construcción" y por tanto el desarrollo cognitivo también es una larga y continua construcción de formas nuevas de conocimiento, éste autor defiende la hipótesis "de que el sujeto explora activamente su entorno, creando a partir de sus acciones, estructuras internas que le permiten ir conociendo el mundo de forma cada vez más estable y objetiva."[4]

Para abordar la aparición de conocimientos nuevos a partir de conocimientos anteriores, se basa en mecanismos funcionales (asimilación, acomodación, equilibración), que se van dando a lo largo del desarrollo biológico y mental. Dicho proceso se da por el desequilibrio que puede ser producido "por una coordinación deficiente de los propios esquemas, es decir por una falta de equilibrio entre la asimilación y la acomodación recíprocas de los esquemas del sujeto, o por una deficiente integración de los esquemas de totalidades organizadas que acaba provocando contradicciones."[5] Sin desequilibrio no puede haber desarrollo, pues siempre estamos en continuo aprendizaje, en la escuela, en la familia y hasta en

[4] Rodrigo, Maria José (compiladores), la construcción del conocimiento escolar. 1997 Paidós Pág. 219
[5] Coll, César. La contrucción de esquemas de conocimiento en el proceso de enseñanza - aprendizaje

la sociedad. Nos llega información por todos los medios, se leen imágenes en la televisión, se venden ideas, se aprende de errores; y es precisamente de todo lo anterior que el sujeto va adquiriendo nuevos conocimientos y en muchos casos renueva posturas que tenía erradas o simplemente las cambia por convicción. Es por esto que Cesar Coll afirma que "desde la perspectiva del aprendizaje escolar, el problema reside en saber cómo hay que movilizar las formas del pensamiento a disposición del alumno para que así pueda apropiarse de un objeto de conocimiento"[6].

Un fundamento de la epistemología genética es que "el conocimiento es acción" puesto que el invividuo lo construye transformando constantemente su relación con el mundo que lo rodea, a medida que el sujeto puede interrogarlo, va interaccionando con el mundo externo, donde cuentan las construcciones internas de éste dirigidas por mecanismos autorreguladores y donde se generan los procesos de interiorización y exteriorización.

Piaget y el funcionamiento cognoscitivo

Según Piaget, en todos los niveles de desarrollo se da una "adaptación cognoscitiva", estas hacen parte de los aspectos *funcionales* de la inteligencia, donde estos "aspectos funcionales forman el núcleo intelectual del cual surgen estructuras cognoscitivas a partir de las interacciones del organismo y el ambiente"[7], pero, ¿Qué es la inteligencia?

Piaget sostiene que "toda teoría de la inteligencia, debe comenzar con alguna concepción básica acerca de su objeto de estudio,… la búsqueda de las características definitorias y fundamentales de la inteligencia debe partir de la

[6] Coll, César. La contrucción de esquemas de conocimiento en el proceso de enseñanza - aprendizaje
[7] Flavell, Jhon. La psicología evolutiva de Jean Piaget "Tomado del capitulo, *Propiedades básicas del funcionamiento cognoscitivo*". P 61.

búsqueda de procesos mas fundamentales,…”[8], las cuales condicionan nuestras percepciones, pues las estructuras biológicas que heredamos limitan nuestra inteligencia.

Desde la biología, Piaget considera la inteligencia como una extensión de determinadas características biológicas, estas pueden ser transmitidas al sujeto por la “*herencia especifica*” o la “*herencia general*”. De la primera puede decirse que “las estructuras neurológicas y sensoriales que constituyen nuestra herencia especifica en tanto especie impiden o facilitan el funcionamiento intelectual, pero difícilmente puede decirse que ellas explican el funcionamiento mismo“[9], de la segunda, “nuestra dotación biológica no solo esta compuesta de estructuras innatas a las que puede considerarse como obstáculo para el progreso intelectual, sino también de eso que hace posible el progreso intelectual, ese algo que se halla detrás del logro intelectual”[10]

A medida que nos desarrollamos y vamos intercambiando con el ambiente van existiendo las estructuras cognoscitivas y el modo de funcionamiento permanece esencialmente constante durante toda nuestra vida. Existen dos atributos principales, la *organización* y la *adaptación*, dentro de este último se da la *asimilación* y la *acomodación*, estas “características, invariantes, que definen la esencia del funcionamiento intelectual, y así la esencia de la inteligencia, son también las mismas características que tienen validez para el funcionamiento biológico en general”[11]

---

[8] Flavell, Jhon. La psicología evolutiva de Jean Piaget. P 61.
[9] Ibíd. Pag. 62.
[10] Ibíd. Pag 62
[11] Ibíd. Pag 63.

### 2.2.2. **TEORÍA DE LA INTERACCIÓN SOCIAL** (Vigotsky)

La teoría de Vigotsky ha sido trabajada por las ciencias sociales y humanas en general como un instrumento básico, el cual considera el "contexto sociocultural" como aquello que llega a ser accesible para el sujeto por medio de la "interacción social" con otros miembros de la sociedad.

Este autor, aborda la comprensión del sentido y significado de la comunicación en el acto pedagógico y en la tarea formativa en general, donde, en el proceso de enseñanza aprendizaje, se incluye al que aprende, al que enseña y la relación entre ambos.

Según Armando Pérez (2001), Vigotsky considera que la "psiquis humana se construye a partir de las relaciones intersubjetivas adulto (otro) – niño, ya que toda subjetividad humana individual primero es intersubjetiva para luego ser intrasubjetiva; en su individualidad expresa lo general de una sociedad cultural dada (lo macrosocial), lo particular (cotidiano, microsocial, etc.) y lo singular (en tanto es sujeto en desarrollo)", donde la participación infantil en actividades culturales es fundamental, ya que bajo la guía de compañeros más capaces, este va interiorizando los instrumentos necesarios para pensar y acercarse a la resolución de problemas de un modo más maduro, puesto que, lo que el niño interioriza es lo que previamente ha realizado en el contexto social, donde el desarrollo individual esta mediatizado por la interacción con otras personas más hábiles en el uso de los instrumentos culturales.

Con respecto a los procesos de desarrollo y aprendizaje, la posición de Vigotsky es genetista, la cual se divide en los siguientes niveles:

- Filo genético: Desarrollo de la especie humana;
- Socio genético: Historia de los grupos sociales;
- Onto genético: Desarrollo del individuo;

- Micro genético: Desarrollo de los aspectos específicos del repertorio psicológico de los sujetos.

En el contexto de la Educación hay dos conceptos Vigotskyanos:

- La Situación Social de Desarrollo (SSD) y
- La Zona de Desarrollo Próximo (ZDP).

La primera es definida en algunos textos como:

- "La organización social del ambiente del niño;
- El punto de partida de todos los cambios dinámicos que ocurren en el desarrollo para un periodo;
- Formas y caminos que el niño sigue a partir de la actividad social, principal fuente del desarrollo" [12].

En la SSD, la relación mundo – niño se construye de la relación otro – niño, que mediatiza y crea significaciones entre estas relaciones. Básicamente, ésta en una relación dialéctica, en la cual el adulto asume la responsabilidad por la organización de ambientes sociales que sean significativos para el niño y se responsabiliza por crear una relación intersubjetiva que desarrolle. El constructor de Situaciones Sociales de Desarrollo significativas en las situaciones educativas, es el maestro.

La segunda esta es definida como "la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más

---

[12] Pérez Yera, Armando. 2000. Pág. 53

capaz”[13]. En este aspecto, el maestro tiene que trabajar junto con el niño mirando el futuro de su desarrollo integral e integrador.

La zona de desarrollo próximo, se pone de manifiesto ante un problema que el niño no puede solucionar por sí solo, pero que es capaz de resolver con ayuda de un adulto o un compañero más capaz. Esta conducta del niño no era considerada indicativa de su desarrollo mental, pero aquello que los niños hacen con ayuda de otro, puede ser en cierto sentido, más significativo que lo que pueden hacer por sí solos.

La zona de desarrollo real, puede definirse como el nivel de desarrollo de las funciones mentales de un niño, que resulta de ciertos ciclos evolutivos llevados a cabo. Dicho nivel se conoce cuando se mide (mediante test) el nivel mental de los niños. Desde este punto de vista se parte del supuesto de que únicamente aquellas actividades que ellos pueden realizar por sí solos, son indicadores de las capacidades mentales.

El concepto de enseñanza aprendizaje para Vigotsky incluye dos aspectos:

- “*La idea de un proceso que involucra tanto a quien enseña como a quien aprende no se refiere solo a situaciones en las que hay un educador físico presente. La presencia de un otro social puede manifestarse por medio de los objetos, de la organización del ambiente, de los significados que impregnan el mundo cultural que rodea al individuo*”[14]

- Si el aprendizaje es un resultado deseable de un proceso deliberado, explicito e intencional, la intervención pedagógica es un mecanismo privilegiado, y la escuela es el lugar por excelencia donde se realiza dicho proceso.

---

[13] Parra Rodríguez, Jaime. Pág. 56
[14] Piaget – Vigotsky, Pág. 48 - 49

### 2.2.3. **APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO** (Ausubel)

Ausubel define el aprendizaje significativo como un

> "*Proceso a través del cual una misma información se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva (no literal), con un aspecto relevante de la estructura cognitiva del individuo. Es decir, en este proceso la nueva información interacciona con una estructura de conocimiento específica.* "[15]

Sin embargo para que la información sea relacionada en las estructuras cognitivas del sujeto que aprende, es necesario que existan unos conceptos enlaces (subsumidores[16]), así de esta forma se puede hablar de un aprendizaje significativo ya que la nueva información se enlaza con los conceptos preexistentes.

Este tipo de aprendizaje se caracteriza por ser una

> "*interacción… entre aspectos específicos y relevantes de la estructura cognitiva y las nuevas informaciones, a través de la cual se adquieren significados y se integran a la estructura cognitiva de manera no arbitraria y no literal, contribuyendo a la diferenciación, elaboración y estabilidad de los subsumidores existentes*"[17]

En relación a lo que Ausubel plantea en su teoría del Aprendizaje significativo, se define el Aprendizaje Mecánico como aquel en el que las nuevas informaciones se aprenden sin interacción con los conceptos relevantes existentes en la estructura cognitiva, es decir, dichos conceptos no se ligan a los conceptos subsumidores

---

[15] MOREIRA, Marco Antonio. Pág. 10-11

[16] Idea o proposición ya existente en la estructura cognitiva capaz de servir de anclaje para la nueva información de modo que ésta adquiera, de ésta manera, significados para el individuo. MOREIRA, Marco Antonio. Pág.11

[17] Ibíd. Pág.12

específicos, por lo tanto solo se produce un almacenamiento de información desligada de la ya existente.

Ahora bien, David Ausubel, afirma que todo aprendizaje dentro el aula de clase puede ser situado a lo largo de las siguientes dimensiones: el aprendizaje por recepción y el aprendizaje por descubrimiento. A continuación se hace una breve descripción de cada una de estas dimensiones:

- *Aprendizaje por Recepción*: Es aquel en el cual lo que debe aprenderse es presentando al alumno en su forma final y el alumno, únicamente, necesita relacionarlo activa y significativamente con los aspectos relevantes de su estructura cognoscitiva.

  Este tipo de aprendizaje, no es obligatoriamente mecánico, puede ser tanto significativo como mecánico, todo depende de la forma en cómo sea almacenada la información en las estructuras cognitivas del sujeto.

- *El aprendizaje por Descubrimiento*: El contenido principal de lo que ha de *aprenderse se debe descubrir de manera independiente, es decir, el objeto de* aprendizaje debe se descubierto por el alumno.

Tanto para el aprendizaje por Recepción como por Descubrimiento, el aprendizaje resulta ser significativo, si el nuevo contenido se incorpora de forma no arbitraria y no literal, a la estructura cognitiva.

Dentro de la teoría del aprendizaje significativo pueden distinguirse tres tipos:

- *El aprendizaje representacional:* Ocurre cuando se asigna significado los símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos), y que significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aluden (atribuye significados a símbolos).

Es el más básico de todos y de él dependen los demás.

- *El aprendizaje proposicional:* Se diferencia del representacional ya que en éste se trata de aprender el significado de ideas en forma de proposición, debido a que las palabras combinadas en una oración representan conceptos (el aprendizaje representacional se convierte en un prerrequisito para el proposicional).

- *El aprendizaje de conceptos:* Es similar al representacional, ya que los conceptos también son representados por símbolos, pero en este caso son símbolos genéricos ó categóricos dado que representan regularidades en los objetos o eventos. Ausubel define como concepto aquellos

> "*objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos criteriales comunes y se designan, en una cultura dada, por algún signo o símbolo aceptado*"[18]

Así mismo, se debe tener en cuenta que para generar un aprendizaje significativo en los estudiantes no basta con que se enlace la nueva información con la existente en las estructuras cognitivas por medio de los subsumidores, sino que también es necesario cumplir con dos condiciones específicas para ello, las cuales son:

1. que el material que va a ser aprendido sea relacionable (o incorporable) a las estructuras cognitivas del aprendiz, es decir, el material debe ser potencialmente significativo.

---

[18] MOREIRA, Marco Antonio. Pág.21

Para que el material sea potencialmente significativo as u vez se debe tener en cuenta:

a. la naturaleza del material en sí, es decir, que éste tenga significado lógico.
b. La naturaleza de las estructuras cognitivas del que aprende, en ella deben estar disponibles los conceptos subsumidores específicos con los cuales el nuevo material se relaciona (significado psicológico).

2. la disposición del sujeto que aprende para establecer las relaciones pertinentes entre el material potencialmente significativo y los conceptos subsumidores.

Como se puede observar por lo anterior, generar en los estudiantes un aprendizaje significativo, aunque puede partir desde lo constructivista (el sujeto interacciona con el objeto de conocimiento), no se puede garantizar que el aprendizaje sea efectivamente significativo, es necesario tener en cuenta los múltiples factores que intervienen en él sobre todo partir de aquello que el aprendiz ya sabe (estructura cognitiva) y enseñarse de acuerdo con ello.

## 2.3. CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD SIMPLE DIRECTA

Para el desarrollo del proyecto de investigación, se tomó como línea de trabajo partir de las estructuras aditivas y multiplicativas que Gerard Vergnaud aborda en su teoría del aprendizaje de las matemáticas y dar paso a través de éstas a la proporcionalidad simple directa, la cual puede ser representada por medio de la función lineal debido a que ésta cumple con las dos propiedades básicas de las funciones lineales como son la propiedad de la homogeneidad con respecto a la suma y al producto.

A continuación se abordará cada uno de los aspectos anteriores:

### 2.3.1. ESTRUCTURAS ADITIVAS

#### 2.3.1.1. EL NÚMERO

El número ha tenido varios significados según el contexto en que se usan, entre ellos, como lo dicen los lineamientos, “en la vida real se utilizan de distintas maneras, entre las cuales están, como secuencia verbal, para contar, para expresar una cantidad de objetos o como cardinal, para medir, para marcar una posición o como ordinal, como código o símbolo o como una tecla para pulsar”[19].

Cuando el sujeto comprende la numeración y el principio del sistema de numeración decimal (agrupamientos), será viable que éste realice “procedimientos de comparación, ordenación, redondeo y manejo de números mayores”[20], así mismo, podrá ir construyendo los significados de las operaciones y relacionarlas con acciones o transformaciones que luego darán lugar a los conceptos de adición y sustracción y posteriormente al de multiplicación y división, pues, al describir los efectos de una acción, el joven esta abstrayendo relaciones que lo conducirán a la creación de modelos que le ayudaran a comprender mejor la situación a la que se enfrenta, pues, el comprender “el conteo operatorio, que es la operación fundamental de la aritmética, permite que de allí se deriven los significados y las formas de construir los algoritmos y las operaciones básicas”[21].

---

[19] Lineamientos Curriculares de Matemáticas. 1998 Página 45.
[20] Ibíd. Pagina 47.
[21] MESA BETANCUR, Orlando y URIBE VÉLEZ, Consuelo. 2001. página 53.

2.3.1.2. CONSTRUCCIÓN DE LOS ESQUEMAS MATEMÁTICOS ADITIVOS BÁSICOS.

Según Orlando Mesa, en la educación primaria deben orientarse actividades que lleven a la composición y descomposición de los números, por medio de "objetos concretos, de representaciones variadas, de objetos abstractos y llegar finalmente a los símbolos matemáticos"[22]. Lo anterior con el fin de que el sujeto comprenda el principio de sustitución y le de significación y sentido a las relaciones lógicas que se presentan entre las unidades.

El empleo del ábaco, como objeto concreto, permite la comprensión del principio de sustitución y posteriormente ayuda a comprender la representación simbólica de un número. Las relaciones de equivalencia permiten descomponer en unidades de diferente orden un número, lo cual será fundamental para la comprensión de los algoritmos básicos, según Mesa.

Este autor también recomienda emplear otras representaciones, como las imágenes (icónicas) o la realización de un dibujo donde representan los objetos y las acciones que realizan, pues estos ejercicios llevan a la reflexión sobre lo que se hace favoreciendo el pensamiento matemático y posteriormente mejorando sus procesos de comunicación al emplear signos para simbolizar estos pensamientos, pero estos no son los únicos medios de representación, pueden encontrarse también las representaciones gestuales y corporales, las matemáticas, las graficas, la oral y la escrita.

Cuando el niño esta en la capacidad de olvidar las características individuales de los objetos y comprende cual es la característica común que los reúne, éste esta "superando la abstracción perceptiva para pensar sólo en la propiedad aritmética

[22] MESA BETANCUR, Orlando y URIBE VÉLEZ, Consuelo. 2001. página 61.

(operación o relación) (…), y luego emplear cualquier símbolo numérico para hacer alusión a una colección cualquiera”[23]

Este recorrido requiere de un largo periodo de tiempo, y la comprensión de sus representaciones más sencillas (la suma y la resta) posibilitara más adelante, comprender el esquema multiplicativo. “Las situaciones de suma y resta, entre números, esta basada en la idea de que juntando elementos a una colección dada aumenta su número y separando elementos disminuye su número”[24]

Como lo explica Encarnación Castro cuando se “estudia un número en concreto deben tenerse en cuenta todas las sumas cuyos resultados son ese número, sus composiciones y también trabajar sus desarrollos” [25] ya que estas son las bases para comprender como solucionar problemas cuyo resultado se halla por medio de sumas y restas.

### 2.3.1.3. CATEGORÍAS DE RELACIONES ADITIVAS

Gerard Vergnaud expresa que la estructura aditiva es “el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas”[26]. Además dice que “las relaciones aditivas son relaciones ternarias, que se encadenan de diversas maneras ofreciendo gran variedad de estructuras aditivas, para efectos de este trabajo, se retomó la clasificación sobre los problemas aditivos simples realizada por Encarnación Castro, la cual se centra en el lugar de la incógnita en los problemas simbólicos:

---

[23] Ibíd. Página 68
[24] CASTRO, Encarnación, y otros. 1999. página 19.
[25] Ibíd. Página 23.
[26] VERGNAUD, Gerard. 1988

| Tipos de sentencias abiertas | |
|---|---|
| **Para la suma** | **Para la resta** |
| **a + b = ?** | **a - b = ?** |
| **a + ? = c** | **a - ? = c** |
| **? + b = c** | **? - b = c** |
| **? = a + b** | **? = a - b** |
| **c = ? + b** | **c = ? – b** |
| **c = a + ?** | **c = a - ?** |

Y la realizada por Nesher quien se enfocó en el aspecto semántico de los mismos:

| TIPO DE PROBLEMA | DESCRIPCIÓN |
|---|---|
| **COMBINACIÓN** | Relación entre una colección y dos colecciones disyuntas (parte - todo). |
| **CAMBIO** | Incremento o disminución de una cantidad inicial para crear una final. |
| **COMPARACIÓN** | Se establece entre dos colecciones utilizando términos como “más que” y “menos que”. |
| **IGUALACIÓN** | Se produce alguna acción relacionada con la comparación entre dos colecciones disyuntas. |

Las anteriores categorías fueron abordadas con el fin de que los estudiantes reconocieran y resolvieran diferentes tipos de problemas.

### 2.3.2. ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS

Con el aprendizaje de la multiplicación y la división se da inicio a la construcción de lo que conocemos como estructura multiplicativa, la cual, es pieza fundamental en la enseñanza de la matemática, para iniciar a trabajar en este proceso el niño debe tener un "nivel de uso y dominio de los números, que conozca su simbolización, todo ello en un grado más completo que en el caso de la suma y la resta"[27]

Para esto, se hace necesario conocer el concepto de cada operación, y tener una razón de tipo practico, es decir, el producto se presenta como una adición de sumandos iguales, en la cual se hace necesario tener un dominio de esta operación, para que se permita un calculo mas rápido en los productos, por ejemplo: "¿cuanto dinero necesita una abuela para dar $1500 a cada uno de sus 7 nietos?", en la que ciertos alumnos pueden recurrir a la adición 1500+1500+1500+1500+1500+1500+1500 y otros a la multiplicación 7×1500. Se dice que los dos procedimientos son buenos, pero el segundo demuestra un grado superior de aprendizaje en cuanto que el estudiante recurre a la estructura multiplicativa para resolver dicho problema.

#### 2.3.2.1. CAMPO CONCEPTUAL DE LAS ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS

En los últimos años, ha surgido gran interés en realizar análisis teóricos acerca de la estructura multiplicativa, para ello Vergnaud se ha encargado de dar un significado más extenso.

Como resultado de los análisis teóricos Vergnaud define como campo conceptual "un espacio de problemas o situaciones en los que el tratamiento implica

[27] VERGEL, Rodolfo 2000. Pág. 496

conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión"[28]. Por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas tiene que ver con todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones.

Por ello, en el análisis que hace Vergnaud acerca de los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y división, se habla de dos categorías de problemas, la primera de ellas es de tipo simple, allí se encuentra enmarcado el isomorfismo de medida y el producto de medida, la segunda categoría que considera Vergnaud es la de proporción múltiple, la cual hace referencia a los problemas de proporcionalidad en los que intervienen al menos tres magnitudes y que son por lo tanto problemas compuestos en los que para su resolución se debe emplear mas de una operación. Para efectos de este trabajo sólo se hará énfasis en el primer tipo de problemas, especialmente en aquellos donde se presenta un isomorfismo de medida, ya que estos son los que conducen a la proporcionalidad simple directa.

El Isomorfismo de medida es "una estructura que engloba a los problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes implicadas."[29]

Vergnaud (1983) identifica tres subclases de problemas dentro de este tipo de estructura, las cuales se resumen en el siguiente esquema:

[28] Ibíd. Pág. 497
[29] CASTRO, Encarnación. Pág 46

| TIPO DE PROBLEMA | ESQUEMA |
|---|---|
| **Multiplicación** | **1 → a**<br>**b → x** |
| **División: Búsqueda del valor unitario.** | **1 → x**<br>**b → c** |
| **División: Búsqueda de la cantidad de unidades.** | **1 → a**<br>**x → c** |

Cabe anotar que se hizo un gran énfasis en el primer tipo de problemas (multiplicación), ya que éste es un caso particular de la proporcionalidad simple directa, pues allí se conoce el valor de la unidad.

En cuanto al producto de medida, esta es "una estructura que engloba tres magnitudes, donde una de ellas es el producto cartesiano de las otras dos"[30], este tipo de esquema es el que presenta la multiplicación como una relación ternaria, y por tanto no deja entrever la multiplicación como una relación entre varias variables. Por lo cual se le restó importancia a la hora de la planeación y desarrollo de las actividades.

### 2.3.2.2. NOCIÓN DE COMPETENCIA MULTIPLICATIVA

La noción de competencia matemática es entendida como la capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas especificas. Para estudiar y comprender cómo los conceptos matemáticos se desarrollan en la mente de los niños(as) a través de sus experiencias en la escuela y fuera de ella, Vergnaud plantea que uno necesita considerar un concepto C como una terna de tres conjuntos:

[30] CASTRO, Encarnación. Pág. 48

$C = (S, I, R)$

S: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.

I: el conjunto de las invariantes operacionales que pueden ser usadas por los sujetos para significar dichas situaciones.

R: el conjunto de representaciones simbólicas, lingüísticas, graficas o gestuales que pueden ser usadas para representar invariantes, situaciones y procedimientos.

A partir de esta definición se vislumbra una complejidad para los conceptos inmersos en el Campo Conceptual de Matemáticas, en particular para el campo de la multiplicación, hecho que toma mayor fuerza si se comparte la tesis según la cual los conceptos se forman a lo largo de un gran periodo de tiempo. Una sola situación no basta para instalar un concepto, son necesarias varias situaciones para que éste funcione en sus diversos aspectos y para que aparezca la multitud de relaciones que tiene con otros. El nivel de complejidad de la multiplicación empieza a aumentar a partir del trabajo en distintos universos numéricos y por la experiencia de nuevos fenómenos.

De esta manera, es preciso extender el significado de "numero de veces" si se quiere dar sentido a la multiplicación de fracciones o de números decimales. De esta misma forma, una conceptualización completa de una operación como la multiplicación implica la comprensión del efecto de la operación sobre varios números incluyendo naturales y racionales, ello acompañado de los nuevos significados del numero que comporta la multiplicación, tal y como lo establece Lamon las estructuras multiplicativas combinan dos magnitudes con diferentes etiquetas, para producir una cantidad cuya etiqueta no es la misma como multiplicando o como multiplicador. Por ejemplo, 5 bolsas de dulces con 6 dulces por bolsa producen 30 dulces (no bolsas de dulces ni dulces por bolsa).En algún momento el resultado es una cantidad intensiva, una nueva unidad de medida, una relación especial entre dos cantidades extensivas. Esta nueva cantidad necesita ser conceptualizada como entidad en si misma, diferente de las medidas que la componen. Por ejemplo, si un carro viaja una distancia de 207 kilómetros en 3 horas el promedio es más o menos de 69 kilómetros por hora (no kilómetros, ni horas). Así, las estructuras involucran muchas capas de complejidad cognoscitiva.

Puede expresarse además, que el problema que plantea la multiplicación es un problema de cambio de unidades, como en el caso de encontrar el área de un rectángulo, en el sentido de que es difícil comprender como multiplicando la medida del largo cuya unidad se da en cm. por la medida del ancho también en cm., se obtiene una unidad dada en $cm^2$.

Para esto se hace necesario desarrollar un análisis sobre el trabajo que se hace con la multiplicación, por ejemplo:

Una libra de yuca cuesta $600, ¿Cuánto cuestan 5 libras de yuca?

Este tipo de situación, generalmente se ha abordado a partir de una relación ternaria que es generalmente como se ha enseñado en la escuela:

600 x 5 = 3000 ó 5 x 600 = 3000

A través de la cual se introduce la multiplicación como una suma de sumandos iguales, pero en este proceso se hace necesario saber porque el resultado de la multiplicación da en pesos y no en libras de yuca, es aquí donde Vergnaud plantea que este tipo de situaciones corresponde a una relación cuaternaria:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 600 \\ 5 & \longrightarrow & x \end{array}$$

En la cual dos de las cantidades son un espacio de medida (1 y 5 son medidas de peso) mientras que las otras dos son de otro espacio de medida (600 y x son las medidas en valor en pesos).

### 2.3.3. PROPORCIONALIDAD SIMPLE DIRECTA

Durante las diferentes etapas escolares se ha trabajado la proporcionalidad desde una perspectiva aritmética, donde ésta sólo es entendida como una simple regla de tres, provocando así que los estudiantes no identifiquen el carácter de variación que la proporcionalidad llevan en su interior, ya que se omite la relación existente entre elementos de diferente magnitud que varían en la misma medida.

La intención de este trabajo es abordar la proporcionalidad simple directa desde una perspectiva variacional en la cual se muestra como un caso particular de la estructura multiplicativa, - en la multiplicación uno de los cuatro términos corresponde a la unidad, mientras que en el esquema de la proporcionalidad simple directa ninguno de ellos corresponde a la unidad - la cual involucra relaciones entre dos proporciones y es a partir de éstas que se construye el concepto de razón considerado a su vez como constante de proporcionalidad.

Para ello se definirá el concepto de pensamiento proporcional y su incidencia en la construcción de los conceptos matemáticos subyacentes a él.

El razonamiento proporcional envuelve habilidades cognitivas que incluyen tanto la dimensión matemática como psicológica, además no solo es característico de la proporcionalidad establecer relaciones entre relaciones, sino que a su vez puede ser considerada como una relación lineal entre dos variables lo cual se conoce comúnmente como función lineal.

Así que la construcción de dicho concepto no debe ser desarrollado solo en los grados superiores sino por el contrario es un constructo que se puede forjar desde los grados inferiores de manera empírica o intuitiva y a medida que se avanza a los grados superiores se va teorizando hasta llegar al concepto formal de éste.

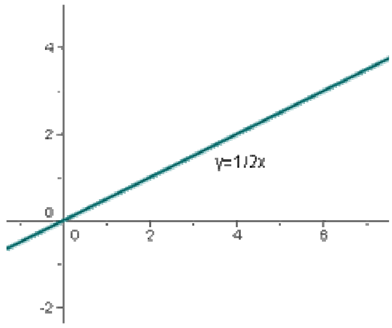
La pregunta es: ¿cómo desde la básica primaria puede construirse dicho concepto?
Desde el campo conceptual subyacente a la estructura multiplicativa hay un camino a seguir para lograr vincular los conceptos involucrados en la función lineal con los de la básica primaria, a continuación se hace una breve descripción al respecto:

Gerard Vernaud define la estructura multiplicativa como el "Conjunto de situaciones que pueden ser analizadas de manera simple o múltiple a través de una multiplicación o división"[31]; con respecto a esta estructura es indispensable retomar la categorización presentadas por este autor, concerniente a el isomorfismo de medida, la cual comprende los problemas en los cuales subyace la proporcionalidad simple directa entre las magnitudes empleadas. Esta presenta tres grandes subclases de problemas, de éstos se debe hacer énfasis en el tipo de problema multiplicativo, ya que éste permite ver la multiplicación como una relación cuaternaria, además de ser un caso particular de la proporcionalidad simple directa, pues en ella se reconoce el valor de la unidad, mientras que el caso general es aquel en el que ningún elemento corresponde a ella.

[31] Gerard Vergnaud,1988

De allí que la proporcionalidad simple directa se pueda representar por una función tal que:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ \mathbf{x} & \longrightarrow & \mathbf{f(x)} \end{array}$$




Donde f(x) = K.x con x,k Є $R^+$ y K constante de proporcionalidad.

Dicha función cumple con dos propiedades básicas: la homogeneidad con respecto a la suma (esquema 1) y homogeneidad con respecto a la multiplicación (esquema 2).

Cuando se hace referencia a un problema de proporcionalidad directa puede observarse que ambas cantidades varían en la misma proporción es decir, si la una aumenta la otra también, una de las características propia de esta función es que si se suman "los valores de la variable independiente, el valor de la variable dependiente que corresponde a dicha suma, es la suma de los valores que corresponden a los dos valores iniciales.

$$\begin{array}{lcl} A & \xrightarrow{f} & B \\ a & \longrightarrow & b = f(a) \\ c & \longrightarrow & d = f(c) \\ \hline a+c & \longrightarrow & f(a)+f(c) = f(a+c) \end{array}$$

Esquema 1

$$\begin{array}{rlcll} & A & \xrightarrow{f} & B & \\ \alpha\, a \Big\{ & \begin{array}{l} a \\ c \end{array} & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} & \begin{array}{l} b \\ d \end{array} & \Big\}\, \alpha\, b \\ \hline & a & \longrightarrow & b & \\ & c = \alpha\, a & \longrightarrow & \alpha\, b = d & \end{array}$$

$$d = f(c) = f(\alpha.a)\ ,\ \ f(\alpha.a) = \alpha\, f(a)$$

Esquema 2

Debido a que estas propiedades son características de las funciones lineales, se concluye entonces que la proporcionalidad simple directa puede representarse como una función lineal.

Al realizar un análisis funcional se encuentra que

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}} = \frac{\alpha\,\mathbf{b}}{\alpha\,\mathbf{a}} = K \in Q^{+}$$

De allí que b = K.a, luego f(a) = K.a

La función lineal es un problema de proporcionalidad simple directa, para su construcción es importante que el estudiante reconozca que las magnitudes varían según una constante, la cual en este caso es el factor de variación y que una función matemática es una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables.

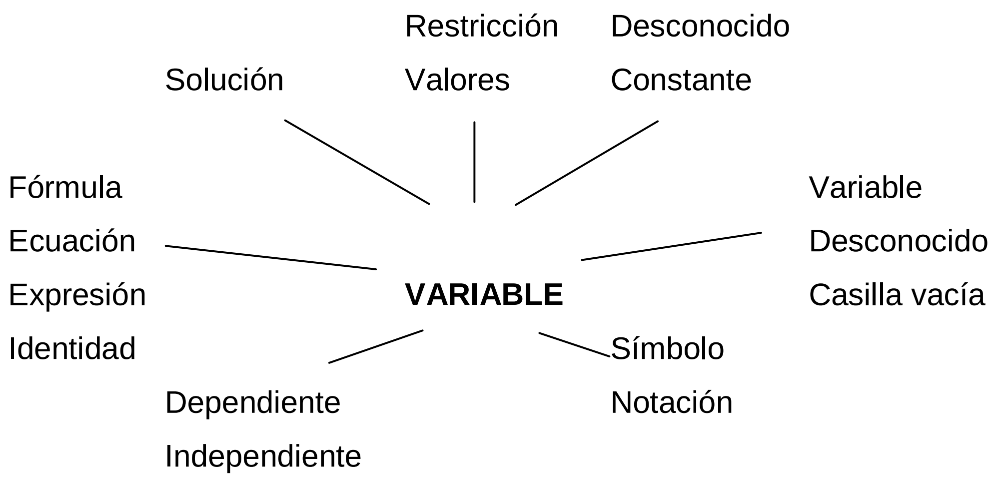
Así mismo para introducir el concepto de función, el lenguaje gráfico cobra gran importancia ya que por medio de él se trasmite la información, además son un excelente recurso para mostrar la relación de dependencia entre dos variables.

La forma más usual para representar una función es expresar la información por medio de tablas, a partir de ésta es posible la construcción de gráficos y el tratar de reconocer un modelo determinado permite hallar los valores o expresarlos de forma algebraica. Sin embargo la introducción al concepto depende mucho del lenguaje utilizado para expresar dichas relaciones.

### 2.3.4. CONCEPTO DE VARIABLE

La variable es uno de los conceptos claves a la hora del estudio del álgebra, pues el mal uso y el poco entendimiento del mismo ocasionan errores a nivel conceptual en los alumnos, por lo anteriormente dicho la variable será motivo de estudio, ya que a partir de la información rastreada se podrá tener más claridad de la metodología a llevar en la enseñanza del álgebra. A continuación se mostrarán dos posturas de autores que han trabajado dicho tema: Jhon Masón y Martín Manuel Socas en los textos “Raíces y Rutas hacia el Álgebra” e “Iniciación al Álgebra” respectivamente.

Masón por su parte lista un número de palabras que son usadas con frecuencia en relación con las variables: desconocido, fórmula, constante y dentro de cada una relaciona otros términos que a su vez hacen alusión al mismo concepto. El diagrama que se muestra a continuación muestra con cuales conceptos se relaciona la variable.




Según el autor las palabras fórmula, ecuación, expresión e identidad aplican a contextos en los cuales “X” es, con frecuencia usada como variable, para obtener soluciones de problemas una vez que el problema ha sido expresado en términos algebraicos.

Las palabras dependiente e independiente son adjetivos que describen usos particulares de la “X”, generalmente son usadas en las representaciones con funciones. Desconocido y constante describen diferentes formas de pensar sobre una letra que representa un número.

Posiblemente después de interpretar la tesis del autor queda evidente, que el concepto de variable es complejo de definir, así lo deja leer Masón cuando afirma: “Conocemos una variable por su alcance, por el rango de valores que ésta puede tomar. Su alcance puede ser todos los números reales, todos los enteros, todos los enteros pares, un conjunto finito de valores incluyendo los que más buscamos – un simple valor – o inclusive ningún valor. Todo lo que nosotros sabemos o descubrimos acerca de una variable actúa como una limitante del alcance de la variable. El proceso de solucionar una ecuación se puede ver como la búsqueda de una descripción sucinta y explícita de su alcance”[32]

Por otro lado para Martín Socas el uso del concepto de variable en Matemáticas es una práctica común, pero al estudiante se le dificulta mucho comprenderlo, obteniendo como consecuencia dificultades en el álgebra, en general Martín Socas le atribuye lo anterior en que en la escuela no se desarrolla suficientemente el sentido de variabilidad ligado a las letras,[33] para ello el autor referencia la clasificación utilizada por KUCHEMANN (1981), de los diferentes contextos en los que aparecen las letras en el álgebra. KUCHEMANN describe seis categorías diferentes de interpretación y uso de las letras:

- Letras evaluadas: Esta categoría es aplicada a las respuestas donde a las letras se les asigna un valor numérico desde el principio.

[32] Rutas y raíces del Álgebra pag. 118
[33] Iniciación al Álgebra pag. 28 - 29

- Letras ignoradas: Los alumnos ignoran las letras, o a lo mas reconocen su existencia, pero no le asignan ningún significado.

- Letras como objeto: Las letras son vistas como objetos concretos (frutas, lados de un polígono, etc) eliminando así el significado abstracto de la misma y reemplazándolo por algo más concreto (un significado físico) y real. En este uso de las letras se reduce su significado abstracto al objeto, pero esta reducción se hace con frecuencia donde no es adecuado. Es esencial distinguir entre los objetos mismos y su cantidad.

- Letras como incógnitas específicas: Los alumnos consideran las letras como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente.

- Letras generalizando números: Los alumnos ven a las letras como una representación, o al menos son capaces de deducirlo, de varios valores numéricos antes de que uno exactamente.

- Letras como variables: Las letras son consideradas como una representación de un conjunto de valores no especificados, y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

## 2.4. FORMULACION DE PROBLEMAS

Mucho es lo que se habla sobre resolución de problemas y es poco lo que se sabe sobre la formulación de los mismos, así como la resolución constituye una parte importante en el currículo de las matemáticas, la formulación no se queda atrás, ya que es gracias a ella, que los estudiantes adelantan procesos mentales que involucran no solo los conocimientos previos que se puedan tener con respecto a un tema específico, sino que a su vez en ellos está involucrada de forma implícita la creatividad, la imaginación, y los procesos cognoscitivos de seriación y de clasificación que permiten la movilización del pensamiento por parte del estudiante o de la persona que aprende.

Es así, como se proponen algunas estrategias para la resolución de problemas matemáticos en el aula de clase, también se puede hacer una aproximación al planteamiento de estrategias que puedan facilitar la formulación de los mismos.

Al indagar por una metodología para la formulación de problemas se puede encontrar que se presentan algunas sugerencias a seguir para cumplir con este objetivo, entre éstas se encuentra la importancia que hay, de que la persona que va a realizar dicho planteamiento conozca las características esenciales que componen un problema, es decir, que ya haya tenido acercamientos con la resolución de problemas y que reconozca en estos la estructura que lo compone, los datos que incluye y que son necesarios para su solución, las condiciones que establecen las diferentes relaciones que hay entre los datos y sobre todo saber que en todo problema hay una pregunta o incógnita, la cual se resuelve a partir de los datos y de las condiciones que establecen las relaciones entre ellos. Algunos autores incluso se atreven a afirmar que es más importante descubrir un problema que resolverlo.

Con respecto a la formulación de problemas algunos autores como Vladimir I Lenin, Miguel Cruz Ramírez, Carlos Suárez Méndez y Daniel González González, entre otros, señalan que un problema no puede ser inventado de forma repentina, éste debe partir de una situación inicial y con respecto a la metodología que proponen para ello, se puede observar que todos convergen en algunos pasos que deben ser tenidos en cuenta a la hora de formular.

Los pasos propuestos por estos autores son:

- Buscar un tema, es decir, sobre qué se va a realizar el problema, en este punto es necesario tener en cuenta que el tema para realizar el problema debe ser un objeto, contexto o una situación conocida por el alumno.

- Plantear una situación inicial, es decir, qué hay de conocido, y desmembrar el objeto de estudio en las partes que lo constituyen clasificando sus componentes.

- Asociar los componentes extraídos del objeto o situación de la cual se pretende partir, es decir, vincular a cada uno de los elementos una o más propiedades; mientras más propiedades se puedan enumerar mayor será la posibilidad de hallar más problemas.

- Buscar las relaciones existentes entre los elementos que se han clasificado.

- Plantear el problema, es decir, formular las preguntas, éstas deben ir dirigidas a qué se quiere saber de lo que se conoce en la situación que se ha elegido para ello.

Sin embargo para realizar este trabajo es necesario tener en cuenta que para elegir al situación de la cual se va a partir se debe adquirir información, interpretarla, comprenderla y establecer relaciones conceptúales entre ella.

Se pude entonces, concluir a partir de lo expresado en párrafos anteriores que la formulación de problemas es un proceso que debe realizarse de forma lenta, constante y sistemática, en la cual el alumno debe partir de la resolución de problemas ya que es a partir de ésta que se tiene un primer acercamiento con los problemas, y son estos los que le permitirán conocer cuales son los elementos que los componen y que más adelante se deben tener en cuenta en el momento de empezar a formular.

Además de tener en cuenta lo propuesto por los autores mencionados sobre la formulación de problemas, fue necesario recurrir a los Lineamientos Curriculares propuestos por el M.E.N para el área de Lengua Castellana, ya que los problemas matemáticos son un tipo de texto argumentativo pues en estos "*prima cierto tipo de conectores causales*"[34]que permiten relacionar los elementos que constituyen el problema.

Dentro de la producción escrita en los Lineamientos de Legua Castellana se encuentran unas categorías para la producción de textos, ésta fue tenida en cuenta para realizar la categorización y análisis de los problemas formulados por los estudiantes de acuerdo a nuestra línea de trabajo, estas categorías son:

> ***"Coherencia y cohesión local:*** *Esta categoría está referida al nivel interno de la proposición (por tanto, se requiere la producción de al menos una proposición) y es entendida como la realización adecuada de enunciados*
>
> *En esta categoría se evidencia la competencia para establecer las concordancias pertinentes entre sujeto/verbo, género/número y la competencia del estudiante para delimitar proposiciones desde el punto de vista del significado: segmentación*
>
> *Estas subcategorías se verifican mediante el cumplimiento de algunas condiciones mínimas:*
>
> - *Producir al menos una proposición.*
> - *Contar con concordancia sujeto/verbo.*

[34]M.E.N Lineamientos Curriculares. Lengua Castellana. Pág.36

- *Segmentar o delimitar debidamente la proposición.*
- *Evidenciar la segmentación a través de algún recurso: espacio en blanco, cambio de renglón, conector (uso sucesivo de y... y... y..., entonces... entonces... entonces..., pues... pues... pues... u otros recursos que, sin cumplir una función lógica - textual, sí constituyen marcas de segmentación), signo de puntuación."*[35]

*"**Coherencia global**: Se refiere al seguimiento de un núcleo temático a lo largo de la producción. Se considera que un texto responde a la subcategoría Progresión temática cuando cumple con las siguientes condiciones:*

- *Producir más de una proposición de manera coherente. Se puede tener un texto conformado por una sola proposición ya que la propiedad de la coherencia global no se refiere a la longitud del texto.*

- *Seguir un hilo temático a lo largo del texto. Es decir que, a pesar de las dificultades para lograr buenos niveles de coherencia, cohesión o producción de superestructuras textuales, se mantiene un eje temático a lo largo de la producción."*[36]

***"Coherencia y cohesión lineal***

*referida a la ilación de las proposiciones entre sí; es decir, al establecimiento de vínculos, relaciones y jerarquías entre las proposiciones para constituir una unidad mayor de significado*

*La coherencia lineal se garantiza con el empleo de recursos cohesivos como los conectores, señalizadores y los signos de puntuación, cumpliendo*

[35] M.E.N Lineamientos Curriculares. Lengua Castellana. Pág.39
[36] Ibíd. Pág.41

*una función lógica y estructural; es decir, estableciendo relaciones de manera explícita entre las proposiciones. Se considera que un texto responde a estas condiciones así:*

- *Establece algún tipo de relación estructural entre las proposiciones. Esta subcategoría da cuenta del uso de los conectores o frases conectivas que cumplen alguna función de cohesión entre las proposiciones. Es decir, a través del uso de estos recursos se explicitan las relaciones lógicas entre los enunciados.*

- *Evidencia las relaciones interproposicionales a través del uso de signos de puntuación con función lógica."*[37]

***"Pragmática:*** *Cuando se habla de elementos pragmáticos se hace referencia a la posibilidad de producir un texto atendiendo a una intencionalidad determinada, al uso de un registro de lenguaje pertinente al contexto comunicativo Para la evaluación se definieron dos subcategorías: pertinencia y tipo textual.*

> ***La intención:*** *Se refiere a la posibilidad de responder a un requerimiento, es decir, se refiere a la capacidad de describir a otro, a través de algún tipo de texto la intencionalidad del enunciado y responder al requerimiento pragmático de la pregunta.*
>
> *Como indicador de esta categoría se tuvo en cuenta la subcategoría Pertinencia, la cual se considera a partir de la siguiente condición:*
>
> *Se responde a la intencionalidad del enunciado presentado en la prueba: describir el juego a un desconocido.*

[37] M.E.N Lineamientos Curriculares. Lengua Castellana Pág.42

***Superestructura:*** *En este caso, en el que se responde de manera conveniente al requerimiento pragmático Es decir, el texto tiene tres momentos semánticamente diferenciados: un momento de introducción a la situación , un momento de descripción de aspectos centrales del juego y un momento de cierre Está referida a la posibilidad de seleccionar un tipo de texto y seguir un principio lógico de organización del mismo”*[38]

## 2.5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Hasta ahora se ha hablado de las diferentes formas en cómo se adquiere el conocimiento matemático, sin embargo no se ha trabajado la noción de problema, el cual retomando lo que plantea Luria, puede decirse que es el modelo más preciso y más completo del acto intelectual, que parte de un objetivo formulado en su pregunta final, Piaget por su parte afirma que solucionar un problema es romper un estado de equilibrio y comenzar un proceso de acomodación, para lograr nuevamente un estado de nivelación.

En particular, un problema matemático puede definirse como aquello que obliga a una persona a poner en juego las habilidades mentales para dar respuesta a una situación que no tiene solución inmediata y que requiere del análisis y de un proceso. Como diría Joaquín García: “un problema es una situación que se caracteriza por el desconocimiento de algo, la búsqueda de estrategias y el planteamiento de una solución”[39]; lo cual podría verse como una estrategia metodológica para generar aprendizajes significativos en los estudiantes, por lo tanto en el aula de clase el docente está obligado a llevar un cierto proceso de enseñanza aprendizaje, el cual interese y motive al alumno en su participación,

---

[38] M.E.N Lineamientos Curriculares. Lengua Castellana. Pág.46
[39] GARCÍA GARCÍA, José Joaquín. Pág. 37

pues es allí donde este adquiere o desarrolla la capacidad intelectual que requiere para los conocimientos  más abstractos y el desenvolvimiento en la sociedad.

Esta búsqueda de nuevas estrategias didácticas para la enseñanza de los saberes específicos, invita al docente a recoger elementos que sean de reflexión y apoyo en la orientación de su área posibilitando la construcción y representación de herramientas  en los distintos niveles de formación, ya sea ésta inicial, básica ó media.

En el saber pedagógico, más específicamente de las matemáticas, el niño debe ser tomado con su mundo de representaciones, su lenguaje y la capacidad de construcción de su racionalidad, y es la comunicación el espacio más importante para trabajar con él, para llegar a la explicación del mundo.  Cuando un estudiante se enfrenta a un problema, se le está posibilitando todo lo anteriormente mencionado ya que se le está permitiendo que interactúe, que se comunique a través de su lenguaje (el cual luego será decodificado en lenguaje matemático), se le está permitiendo que construya estrategias para lo cual muy posiblemente se valdrá de su entorno  y sus contextos.

El acompañamiento en los problemas que se presentan es fundamental ya que para el niño es un misterio todo lo que lo rodea y su curiosidad lo lleva a resolverlo.

En cuanto a la resolución de problemas se sabe que es imposible enseñar a resolverlos pero  que a su vez es factible que el estudiante aprenda a hacerlo y esto se logra a través de la práctica, es decir,  relacionando diversos tipos de problema donde la dificultad para resolverlos no conlleve a dejar el problema sin respuesta, sino por el contrario sea un reto intelectual, donde se esté dispuesto a "malgastar" el tiempo, pensando en una posible estrategia de solución y sea dicha solución un resultado logrado a través del esfuerzo y la dedicación.

Los problemas matemáticos no solo poseen ciertas características que permiten asociarlos en grupos, formando a través de estos categorías que permiten realizar una clasificación, sino que también poseen al interior de sus estructuras (aditivas, multiplicativas) algunas características que permiten que para cada clasificación se puedan desarrollar estrategias diferentes para la solución de los mismos.

Todas la estrategias que el docente ha de implementar en el aula de clase, preferiblemente deben ser guiadas hacia un diseño curricular, es decir, inspiradas en las orientaciones que presenta el M.E.N, pues ante todo es fundamental como docentes, que la preparación para plantear situaciones problemas sea la más adecuada, que en ella se recurra a la creatividad, la utilización de conceptos, los problemas en sí y las actividades y ejercicios propuestos por diferentes autores a través del tiempo, los cuales permiten ser utilizados según las necesidades y posibilidades de cada alumno.

Teniendo en cuenta lo anterior se pueden distinguir dos tendencias: Una que enfatiza el proceso de resolución y otra que resalta el conocimiento base del individuo que resuelve el problema, particularmente la organización de ese conocimiento con ello se pretende dar a conocer en el proceso de resolución de problemas las posibles estrategias que utiliza un individuo a la hora de enfrentarse ante este tipo de situaciones, ya que estas son más enriquecedoras que la aplicación mecánica de un algoritmo, pues implica crear un contexto en el cual los datos guarden cierta coherencia.

A continuación se presenta una definición de que es una estrategia de resolución de problemas, la cual es retomada de la autora Lisette Poggioli en: métodos heurísticos, algorítmicos y pensamiento divergente; a su vez se retoman otros aportes realizados por el profesor Orlando Mesa B desde la decodificación del lenguaje lógico - gramatical en este proceso, los Lineamientos curriculares y Carlos Maza Gómez quien desde las estructuras aditivas multiplicativas hace referencia a los problemas de cambio, combinación y razón, ya que son pieza fundamental para adquisición de la noción de función.

¿Qué es entonces una estrategia de resolución de problemas?

Una estrategia de resolución de  problemas es aquella que se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos y obtener una solución. Las estrategias para la resolución de problemas incluyen los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente.

Es así como diferentes autores plantean algunas estrategias de solución desde diferentes puntos de vista y para casos y operaciones específicas.

Según Lisette Poggioli las estrategias para la solución de problemas incluyen:

- “Métodos heurísticos
  Los métodos heurísticos son estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas por los solucionadores de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican las vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución. los procedimientos heurísticos son acciones que comportan un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza la consecución de un resultado óptimo como, por ejemplo, reducir el espacio de un problema complejo a la identificación de sus principales elementos Los métodos heurísticos pueden variar en el grado de generalidad. Algunos son muy generales y se pueden aplicar a una gran variedad de dominios, otros pueden ser más específicos y se limitan a un área particular del conocimiento. La mayoría de los programas de entrenamiento en solución de problemas enfatizan procesos heurísticos generales como los planteados por Polya (1965) o Hayes (1981).

Los métodos heurísticos específicos están relacionados con el conocimiento de un área en particular. Este incluye estructuras cognoscitivas más amplias para reconocer los problemas, algoritmos más complejos y una gran variedad de procesos específicos.

En este sentido, estos autores coinciden en señalar que los tipos de conocimiento necesarios para resolver problemas incluyen:

Conocimiento declarativo: por ejemplo, saber que un kilómetro tiene mil metros.

Conocimiento lingüístico: conocimiento de palabras, frases, oraciones.

Conocimiento semántico: dominio del área relevante al problema, por ejemplo, saber que si Álvaro tiene 5 bolívares más que Javier, ésto implica que Javier tiene menos bolívares que Álvaro.

Conocimiento esquemático: conocimiento de los tipos de problema.

Conocimiento procedimental: conocimiento del o de los algoritmos necesarios para resolver el problema.

Conocimiento estratégico: conocimiento de los tipos de conocimiento y de los procedimientos heurísticos"[40]

- Métodos Algorítmicos

"Los algoritmos son procedimientos específicos que señalan paso a paso la solución de un problema y que garantizan el logro de una solución siempre y

[40] Lisette Poggioli. Enseñando a aprender

cuando sean relevantes al problema. Un procedimiento algorítmico es una sucesión de acciones que hay que realizar, completamente prefijada y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema como, por ejemplo, realizar una raíz cuadrada o coser un botón”[41].

- Pensamiento Divergente

  “Los procesos de pensamiento divergente permiten la generación de enfoques alternativos a la solución de un problema y están relacionados, principalmente, con la fase de inspiración y con la creatividad.

  La adquisición de habilidades para resolver problemas ha sido considerada como el aprendizaje de sistemas de producción que involucran tanto el conocimiento declarativo como el procedimental. Existen diversos procedimientos que pueden facilitar o inhibir la adquisición de habilidades para resolver problemas, entre los cuales se pueden mencionar:

  - Ofrecer a los estudiantes representaciones metafóricas.
  - Permitir la verbalización durante la solución del problema.
  - Hacer preguntas.
  - Ofrecer ejemplos.
  - Ofrecer descripciones verbales.
  - Trabajar en grupo.
  - Utilizar auto-explicaciones”[42].

Desde la perspectiva del profesor Orlando Mesa Betancur, quien retoma en el texto “Coloquio Regional de Matemáticas y Estadística, Antioquia-Chocó” autores como George Polya, J.E Azcoaga, Piaget, Luria, Teretkova, Ardila y otros, realiza valiosos aportes acerca de la resolución de problemas, basándose en la

---

[41] Lisette Poggioli. Enseñando a aprender
[42] Ibíd

importancia del lenguaje para la comprensión dentro del proceso de resolución de los mismos.

Desde la semiótica, las matemáticas al igual que todas las áreas del conocimiento, manejan una serie de representaciones lingüísticas encargadas de precisar cada uno de los códigos involucrados en ella. Entre ellos sobresalen:

a) El vocabulario especifico: Los significantes matemáticos (+, -, *, / etc.) evocan significados que deben ser diferenciados con precisión en cada problema.

b) El manejo de las estructuras gramaticales: es necesaria la comprensión global de los enunciados. Las relaciones entre las palabras determinan los sentidos de las oraciones.

c) La amplitud y las características semánticas adquiridas: estos elementos están fuertemente determinados por el medio socio-cultural del niño. La verdad, la riqueza o la pobreza de las connotaciones facilitan u obstaculizan la comprensión de los enunciados.

d) La precisión y concisión de los enunciados matemáticos: un enunciado matemático aún en lenguaje común se caracteriza por su esquematismo, llegar a la lectura sintética o a la lectura comprensiva de enunciados de enunciados sintéticos, es difícil y aparece como un resultado de un proceso lento pero de práctica permanente. Por otra parte y a un nivel más general sabemos que el niño es capaz de pensar y de hacer mucho más de lo que puede expresar verbalmente o por escrito. De ahí la necesidad de lograr una buena comunicación. Una metodología que busque tales objetivos debe incluir las conductas de relato, es decir, hacer que el niño cuente lo que esta pensando y haciendo, para tratar de resolver un problema. También que explique lo que acaba de hacer cuando dió una respuesta. Ayudar al niño a que anticipe (piense antes de actuar) y que sintetice (reflexione después de actuar) es facilitar el desarrollo del pensamiento matemático.

Consecuente con lo anterior, se puede afirmar que el proceso de la comprensión matemática requiere de la presencia y el acertado manejo del lenguaje como patrón regulador y el estudiante al enfrentarse con un problema matemático demanda, la realización de una serie de acciones especificas englobadas en procesos secuenciales

Por su parte, Carlos Maza Gómez para trabajar las estrategias de solución de problemas, aborda las estructuras aditivas y multiplicativas haciendo referencia a los problemas de cambio- combinación y razón.

Este autor propone que

> "*La metodología tradicional en la enseñanza de la suma y la resta se basa en los problemas de Cambio Aumentado y Combinación, para la primera, y el Cambio Desminuyendo, para la segunda. Los correspondientes a la suma, se resuelven inicialmente contando con los dedos todos los elementos en juego. Los problemas de resta también admiten una solución apoyada en el uso de los dedos.*
>
> *Tras un corto espacio de tiempo en el que se es consiente el uso de tales medios, se pasa inmediatamente a la representación a través de conjuntos (si es que no se ha iniciado con ella) y, por último a la escritura de sentencias numéricas. Es así como una de las principales estrategias empleadas en la solución de este tipo de problemas consiste en modelar con objetos las acciones implícitas en el problema*"[43].

[43] Maza Gómez, 1991. pág 27

A continuación, se presentan las estrategias para la solución de problemas que presenta este autor con respecto a la estructura aditiva (suma-resta), y multiplicativa (multiplicación - división) las cuales son construidas por los niños cuando se enfrentan con problemas de este tipo.

Con respecto a la Suma:

> “La primera forma que construye el niño para resolver problemas aditivos se ha mencionado ya. Consiste en formar el primer sumando (sea con materiales o con los dedos) posteriormente el segundo (de la misma forma) y por último contar todos los elementos presentes empezando por el primero. Es la estrategia de <contar todo>. Los problemas de *Cambio Aumentado* y *Combinación*, ambos de final desconocido, se resuelven por medio de este procedimiento en todo el periodo escolar.
> La forma más utilizada para resolver estos problemas es la de <Contar a partir del sumando mayor>. No aparece hasta el tercer curso de escolaridad pero si lleva a cabo una instrucción especifica y se puede aplicar a partir del primer curso. Es ésta última algo compleja desde el punto de vista psicológico. Requiere de un completo dominio de la secuencia numérica tradicional, en concreto de la destreza de contar progresivamente a partir de un número cualquiera. Pero esta estrategia que a nivel de conteo puede encontrarse incluso en el preescolar no es suficiente, es así mismo necesario que el alumno entienda el principio cardinal”[44].

Para la Resta plantea que:

> “Para los problemas resueltos con un procedimiento sustractivo se presentan inicialmente, tres estrategias: El *Emparejamiento*, la de *Quitar* y

[44] Maza Gómez, 1991. pág. 31

la de *Separar*, todas ella con la debida apoyadura en materiales o en los dedos.

La primera se aplica exclusivamente a los problemas de *Comparación* (diferencia desconocida). El *Emparejamiento* consiste en representar con material cada uno de los conjuntos a comparar, emparejar los elementos uno a uno entre ambas cantidades y contar los elementos sin la correspondiente pareja.

El emparejamiento es posible si se dispone de material para representar ambas cantidades.

La de *Quitar* permite resolver problemas de *Cambio Disminuyendo* (final desconocido) así como los de Combinación (parte desconocida) siempre que pueda representarse en este último la cantidad total.

Un procedimiento algo distinto, utilizado para resolver problemas de *Cambio Disminuyendo* (cambio desconocido) es el de *Separar.* Separar consiste en representar el conjunto inicial, representar sobre él el conjunto final y, por último, separar aquellos elementos que no se hayan superpuesto"[45].

Ya se ha hecho mención de las estrategias empleadas por este autor para resolver problemas que pertenezcan a la estructura aditiva, a continuación se hará mención de aquellas son empleadas para solucionar problemas de tipo multiplicativo.

En el caso de la multiplicación:

---

[45] Maza Gómez, 1991. pág. 31

“...se pueden observar en dos trabajos que coinciden con el interés por descubrir las estrategias infantiles que llevan al niño desde la resolución de problemas por medios aditivos hasta el procedimiento de medos multiplicativos.

En estos trabajos se pueden contar cuatro niveles de desarrollo progresivo de las estrategias que son los siguientes:

*RECUENTO UNITARIO*: inicialmente el niño necesita una representación directa de los elementos en juego que se desarrolla paralelamente a la estructura semántica del problema. Para entender mejor esta estrategia y las siguientes, considérese el problema siguiente: “Tenemos tres tazas de chocolate. En cada taza colocamos dos galletas. ¿Cuántas galletas habremos colocado en total?

El niño que utiliza esta estrategia necesita representar con material que se le proporcione o con dibujos figurativos la situación creada. Considérese primero las tres tazas y luego las dos galletas en cada una. Por último procederá a contar una a una todas las galletas presentes.

*DOBLE RECUENTO:* En esta estrategia sigue presente una dependencia del recuento unitario, en mayor grado. Sin embargo, se puede registrar una diferencia cualitativa con la primera estrategia: En ésta el niño percibe claramente la regularidad de los recuentos y la repetición de los grupos de palabras. En este sentido correspondería el segundo estadio piagetiano.

*RECUENTO TRANSACCIONAL:* La diferencia entre esta estrategia y la anterior consiste en el empleo de unidades abstractas antes que verbales (Steffe y otros, 1983), así como el reconocimiento progresivo de la importancia del número de grupos que se cuenta a la hora de prever el resultado final.

En el aspecto del comportamiento, esta estrategia se manifiesta, inicialmente, por un recuento subvocal de las palabras que no marcan al final de un grupo, para concluir con su interiorización, suprimiéndolas en su pronunciación.

En esta estrategia aparece completamente dominado el procedimiento de recuento de grupos hasta el punto de que se aplican distintas rutinas aditivas para calcular la suma resultante de la adición de grupos.

*RECUPERACIÓN DE HECHOS MULTIPLICATIVOS:* La rutina que se había aplicado recientemente en la estrategia anterior deviene, en ésta, en el almacenamiento y recuperación de los hechos multiplicativos básicos, siendo estos las multiplicaciones elementales de dos números, cada uno de los cuales no excede a 10. El problema presentado, entonces, se resuelve rápidamente sin más que apelar a la multiplicación"[46].

Y para el caso de la división se encuentra que

"Los escasos pero significativos estudios existentes sobre estrategias empleadas al resolver problemas de división se han centrado en la comparación de la partición y agrupamiento"[47].

El autor propone para la solución de estos problemas las siguientes estrategias:

---

[46] Maza Gómez, Carlos. 1991 Pág.34
[47] Ibíd. Pág. 36

RESTA REITERADA
REPARTO
ENSAYO Y ERROR
ADICIÓN
ADITICIÓN CON MÚLTIPLOS
ESTRATEGIA MULTIPLICATIVA

Enfrentados a problemas de división-combinación, estos autores encuentran que los niños consultados responden mayoritariamente con estrategias multiplicativas”[48].

Como ya se ha hecho mención al inicio del texto

“Es imposible enseñar a resolver problemas, pero si es posible que el estudiante aprenda a resolver problemas. El trabajo del alumno en la resolución de problemas no debe continuar hasta que tenga respuesta de las preguntas:

- Cual es la incógnita.
- Cual es la meta o el objetivo que se busca.
- Cuales son los datos.
- Cual es la condición. Cuales son las restricciones matemáticas o físicas que el enunciado nos impone

[48] Ibíd. Pág. 36

Por ello es necesario tener en cuenta las técnicas o procesos que nos ayudan a organizar los datos del problema y a responder las preguntas insustituibles, hacer un diseño, lista o tabla de datos, resumir el problema, caminar de la respuesta hacia atrás, construir un modelo, resolver un problema más simple, buscar y experimentar, utilizar transformaciones equivalentes del problema, dar lugar a la duda y hablar del problema.

Así mismo se consideran preliminares necesarias algunas oraciones que tienen como propósito mantener en la mente de los alumnos las partes mas importantes del problema.

- Utilizar adecuadamente la información.
- No inducir restricciones innecesarias.
- Dar una visión general del problema.
- Preguntar por la verdadera pregunta.

Por lo tanto hay que tener en cuenta que la estructura para resolver un problema es la siguiente:

1. Leer el problema.
2. Comprender el problema.
3. Construir el algoritmo.
4. Resolver el algoritmo”[49]

[49] msip.ice.org/jahumada/mrsg1010/unidad1/unisec1.htm

Estos pasos, sea cual sea el tipo de problema que se quiere resolver y el método que se emplee para ello, son los esenciales y necesarios para que cualquier estrategia utilizada sea efectiva en la resolución de problemas.

## 3. DISEÑO METODOLÓGICO

### 3.1. POBLACIÓN Y MUESTRA

Para el desarrollo de la investigación que se adelanta en la línea del proyecto del grupo de pensamiento variacional, se tomó como población los estudiantes de los grados 2º, 3º y 4º, de la Institución Educativa Javiera Londoño (Sevilla) y los grados 9º de la Institución Educativa Yermo y Parres del barrio Belén.

De la población nombrada anteriormente se han podido percibir algunas características comunes tales como:

- *Género*:
  Ambas instituciones educativas son de carácter público u oficial en ellas el alumnado es mixto.

- *Condiciones socioeconómicas*:
  Los factores sociales y económicos en los cuales se encuentran algunos de los alumnos de la institución Educativa Javiera Londoño (Sevilla) no son las más favorables, y de hecho algunos de estos estudiantes se ven en la necesidad o en la obligación de trabajar en horarios extra clase, lo cual hace que en ocasiones no le puedan dedicar suficiente tiempo al estudio, o que de acuerdo a las labores que desempeñen sean marginados por sus propios compañeros de clase, manifestándose esto en agresiones tanto físicas como verbales dirigidas a los compañeros que los agraden o a los profesores de la institución.

Opuesto a lo descrito en la primera institución, los estudiantes del Yermo y Parres no presentan problemas de tipo económico que los "obliguen" a trabajar en horarios extra clase de forma que esto afecte su parte académica.

- *Condiciones sociopolíticas*:

  La mayor afluencia de estudiantes del la Institución Educativa Javiera Londoño (Sevilla) proviene de sectores aledaños tales como Moravia, Santa Cruz, Sevilla, Lovaina, Barrio Miranda, Campo Valdés, Manrique y Acevedo, unos pocos provienen de barrios como Robledo y Doce de Octubre entre otros, los cuales se encuentran ubicados en su mayoría en estratos dos y tres. En el Yermo y Parres la mayoría de estudiantes proviene de sectores tales como Belén San Bernardo, Belén las Playas, Belén la Nubia, Belén Aliadas, Belén Rincón, Belén Altavista y Belén San Carlos entre otros, los cuales se encuentran ubicados en su mayoría en los estratos tres y cuatro.

- *Condiciones socioafectivas:*

  La problemática familiar a la cual se enfrentan la mayoría de los estudiantes de la Institución Educativa Javiera Londoño (Sevilla), los está perjudicando tanto afectiva como académicamente ya que muchos de éstos viven solamente con sus madres o con sus abuelos; se ha dado el caso de alumnos que solo viven con su papá, no conocen a sus madres o han sido abandonados por éstas, esto hace que dichos estudiantes mantengan el ánimo decaído, no sean participativos en las clases, no cumplan con sus tareas o sean niños demasiado indisciplinados que no reconocen la normatividad, la responsabilidad y en algunos casos el respeto por los otros y por lo otro.

  Contrario a lo descrito anteriormente, en la Institución Educativa Yermo y Parres, la situación del 80% estudiantes es en términos generales buena, los grupos familiares están conformados por "papá y mamá" y los jóvenes pueden dedicarse solamente al estudio, se puede observar que estos estudiantes tienen muchas oportunidades para salir adelante.

En general, se ha podido notar que en la mayoría de los casos los alumnos de ambas instituciones no se encuentran muy motivados por el estudio y suelen ser inconstantes en el trabajo académico, lo cual influye en el hecho de que en las actividades escolares realizadas en el aula de clase no arrojen los resultados esperados; con respecto a los estudiantes del Javiera Londoño se observa que sumado a lo anterior, en éstos el estado de ánimo sufre constates altibajos siendo éste uno de los motivos más frecuentes para la desmotivación hacia el trabajo académico.

## 3.2. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta que la escuela es un escenario en el cuál ocurren un sinnúmero de situaciones las cuales involucran tanto al personal no docente como docente, padres de familia y alumnos, en otras palabras, a la comunidad educativa en general, se ha podido deducir a partir del trabajo en el aula que todo lo que ocurre en la escuela afecta no sólo el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje sino que a su vez, condiciona el papel del maestro frente a su labor, es por ello que se ve la necesidad de preguntar cómo potenciar determinadas habilidades en los alumnos en su proceso de aprendizaje.

La respuesta a éste interrogante es buscada a través de un trabajo investigativo, el cual permite no sólo la aplicación de diferentes teorías sino la implementación de algunas propuestas metodológicas y por supuesto la reflexión sobre los resultados obtenidos, para ello la técnica a emplear de acuerdo a estos fines es la de la **observación** enmarcada dentro del método de investigación cualitativa de “**investigación—acción**” con la cual se espera no sólo dar solución al problema planteado sino ampliar la concepción sobre la educación y la práctica docente.

- **LA OBSERVACIÓN**: Es una técnica fundamentada científicamente y la cual sirve para estudiar un objeto formulado de investigación, que se planifica sistemáticamente, y que a su vez, se relaciona con proposiciones más generales y que está sujeta a comprobaciones y controles de validez y fiabilidad.

  Para fines educativos, es necesario “saber observar, valorar e interpretar el comportamiento de los niños, las variantes del medio y la relación educativa. Hay que observar y analizar la realidad para contribuir a la evolución de los niños,”[50] sin embargo, hay que tener en cuenta que para realizar dichas observaciones se deben definir unos objetivos, un tema, la metodología para su aprendizaje y las situaciones que parten de las características de los niños; por consiguiente es necesario la utilización de algunos medios que permiten llevar un registro fiable de lo que sucede al interior del aula o espacio de observación y de los sujetos que se observan, tales como:

  - ***EL DIARIO:*** En el se consigna el relato escrito cotidianamente como fruto de la observación.

  - ***EL CUADERNO DE NOTAS:*** Es la libreta en la cual se registran las observaciones tal y como sucedieron en ese momento, este sirve como soporte al relato escrito en el diario.

[50] Molina Lourdes. Pag. 4

- ***LOS CUADERNOS DE TRABAJO:*** Son las planillas diseñadas por el observador y en las cuales se registran los datos específicos de los ítems o aspectos observados.
- ***LOS DISPOSITIVOS MECÁNICOS:*** Son las cámaras filmadoras o fotográficas que permiten recoger una evidencia más exacta de lo sucedido en la observación.

Para finalizar y teniendo en cuenta todo lo anterior hay que recordar que para realizar una observación es indispensable:

- Concretar el aspecto a observar y la finalidad de la observación.

- Explicitar las hipótesis de trabajo que hagan falta ¿Qué se espera encontrar? ¿Qué se intuye?

- Prever la metodología y los procedimientos a emplear.

- Elegir el momento concreto de observación y la técnica de registro de datos.

- Prever la actitud del observador (neutra, participativa, tradicional, entre otras).

➢ **LA INVESTIGACIÓN—ACCIÓN**: "La investigación cualitativa se deriva y ha sido estimulada por escuelas que son considerablemente diferentes a lo que propone la investigación cuantitativa. La principal característica de ésta es su interés por captar la realidad social a través de los ojos de la población que está siendo estudiada."[51]

Dentro de los métodos de investigación cualitativa se encuentra el de "**investigación—acción"** el cual puede ser considerado como "una alternativa metodológica que permite la producción de resultados como efecto de la interacción continua entre procesos de reflexión, observación, diseño, puestas en escena, análisis y teorización de los eventos educativos."[52]

La "**investigación—acción"** al ser una actividad que se aplica a grupos o comunidades, refuerza y mantiene el sentido de comunidad y búsqueda del bien común, no se confunde con un proceso solitario o búsqueda del bien individual, además relaciona estrechamente la práctica docente con la investigación y plantea que las estrategias empleadas por el educador suponen la existencia de teorías plasmadas en situaciones concretas que cuando se realizan de forma reflexiva constituyen una forma de "**Investigación—Acción**."

Kurt Lewin plantea que éste método "se sitúa en paralelo con la aplicación del método científico y su modelo especifica un espiral de actividades en ésta secuencia:

- Aclaración y diagnóstico de una situación problemática en la práctica.
- Formulación de estrategias de acción para resolver el problema.
- Implantación y evaluación de las estrategias de acción.
- Aclaración y diagnóstico posteriores de la situación problemática."[53]

---

[51] Bonilla Castro, Eloy y Rodríguez senk, Penélope Pág. 47
[52] León, Olga Lucía y Calderón, Dora Inés Pág. 90
[53] Elliot, Jhon. Pág. 97

Ahora bien, los métodos descritos anteriormente permiten en nuestra línea de trabajo, que no sólo se halle una solución al problema de investigación, sino que, por medio de la intervención y reflexión en el aula con los sujetos de estudio, posiblemente surjan nuevas estrategias o alternativas que promuevan el aprendizaje significativo en la escuela.

## 3.3. FASES DEL PROYECTO

El proyecto se llevó a cabo en cuatro etapas, cada una de ellas con una duración aproximada de tres meses; durante éstas se realizaron actividades que permitieron la interacción entre los alumnos, la aprehensión de conceptos y la evaluación de los mismos.

### 3.3.1. OBSERVACIÓN

Esta primera fase fue desarrollada entre los meses de agosto y noviembre de 2004, meses en los cuales se visitó la institución una jornada completa cada semana y en la que se observó el contexto escolar tanto dentro del aula como en la institución, además se estudiaron los documentos rectores como el PEI, los planes de área, el manual de convivencia y los diarios de campo.

### 3.3.2. DIAGNÓSTICO

Esta etapa se desarrolló en el período de Febrero a Abril de 2005, en ella se realizaron y aplicaron algunas pruebas informales, que permitieron establecer el nivel cognitivo de los estudiantes con relación a sus conocimientos previos y al desarrollo del pensamiento variacional, así mismo, con relación a la solución y formulación de problemas tanto de forma libre como orientada

### 3.3.3. INTERVENCIÓN

En ésta se hizo más énfasis en la resolución de problemas y en la identificación de los elementos que los constituyen, de igual manera, se siguió trabajando en el desarrollo del pensamiento variacional y la formulación de problemas a partir de instrucciones o de temas libres, trabajados en las diferentes situaciones de aprendizaje, que permitieron además, adquirir nuevos conceptos matemáticos y movilizar las estructuras de pensamiento de modo que los estudiantes trabajaran de una forma más dinámica. Esta etapa se desarrolló durante el período de Mayo a Agosto.

### 3.3.4. FINAL

La etapa final se desarrollo entre los meses de Septiembre a Noviembre, en ésta se siguió abordando los temas mencionados anteriormente, potenciando más la formulación de problemas a partir de lo que conocían los estudiantes. En ésta se formularon problemas de tipo libre a partir de los conocimientos adquiridos, notándose un mayor desarrollo del pensamiento variacional y mayor seguridad en la formulación de problemas, pues eran más concientes de los elementos que debían tenerse presentes para escribirlos.

Durante el desarrollo de las cuatro fases de la práctica, se recolecto información valiosa que se registro en el diario pedagógico por cada uno de los integrantes del equipo de trabajo, en el cual se consignó lo observado en cada uno de los encuentros a lo largo de ésta; para recolectar mejor la información fue necesario poner en practica algunas técnicas e instrumentos para recolectarla,

## 3.4. TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Las técnicas empleadas para la recolección de la información durante el proyecto de investigación fueron:

### 3.4.1 OBSERVACIÓN DIRECTA

Fue la realizada durante las diferentes fases del proyecto, ésta se llevó a cabo tanto dentro del aula de clase como en el espacio escolar en general. La observación en los diferentes espacios del colegio permitió interactuar con los estudiantes conocer cuales eran sus necesidades para poder plantear situaciones de aprendizaje que ayudaran a mejorar esos aspectos.

### 3.4.2 EL TRABAJO DE CAMPO

Consistió en el planteamiento, ejecución e implementación de las diferentes actividades que permitieron el desarrollo de la investigación.

## 3.5. INSTRUMENTOS

A continuación se hace una breve descripción de los instrumentos utilizados para realizar el trabajo dentro del aula de clase con los estudiantes:

### 3.5.1 EL DIARIO PEDAGÓGICO[54]

Por medio de éste se ha permitido recoger la información necesaria para llegar a los análisis correspondientes al trabajo realizado con los estudiantes y que dan cuenta del avance que se ha obtenido con respecto al desarrollo del proyecto.

### 3.5.2 PRUEBAS INFORMALES

Estas fueron aplicadas con la finalidad de conocer el estado inicial en el cual se encontraban los estudiantes antes de iniciar con la formulación de problemas (eje central de la línea de investigación) y el desarrollo del pensamiento variacional.

[54] En el diario pedagógico se sistematizó la información escrita en el cuadro de registro, por tal motivo sigue esta misma estructura. El cuadro de registro de la información puede verse en los anexos.

Se aplicó un total de cuatro pruebas, una en cada grupo de práctica (grados 2º, 3º, 4º y 9º), las cuales pueden ser consultadas en los anexos.

3.5.3 SITUACIONES DE APRENDIZAJE:

Estas son empleadas con la finalidad de enseñar a los alumnos los conceptos necesarios a trabajar en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional, en ellas se retoma algunos de los elementos propuestos en las situaciones problema del M.E.N. y de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.

3.5.4 TALLERES ORIENTADOS POR EL PROFESOR:

En ellos se les presenta a los estudiantes actividades que deben desarrollar, para ello se debe tener en cuenta lo aprendido en sesiones anteriores, sean estas trabajadas con el profesor de la institución o con el practicante.

Cuadros de trabajo: Son las planillas diseñadas por el observador y en la cual se registran los datos específicos de los ítems o aspectos observados. (Ver anexo 1)

*3.5.5* DISPOSITIVOS MECÁNICOS:

Son las cámaras filmadoras o fotográficas que permiten recoger una evidencia más exacta de lo sucedido en la observación.

3.5.6 CUADERNO DE NOTAS:

Es la libreta en la cual se registran las observaciones tal y como sucedieron en ese momento, éste sirve como soporte al relato escrito en los cuadros de trabajo y en el diario.

## 4. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

La intervención se realizó a partir de actividades con material concreto y modelos dinámicos interactivos, los cuales por medio de la lúdica y la manipulación, posibilitaron el descubrimiento de conocimientos y la adquisición de conceptos matemáticos. Para ello se tuvo en cuenta una estrategia general (ver anexo 4) que posibilito el diseño de cada una de las situaciones de aprendizaje en las diferentes fases, teniendo en cuenta tres aspectos:

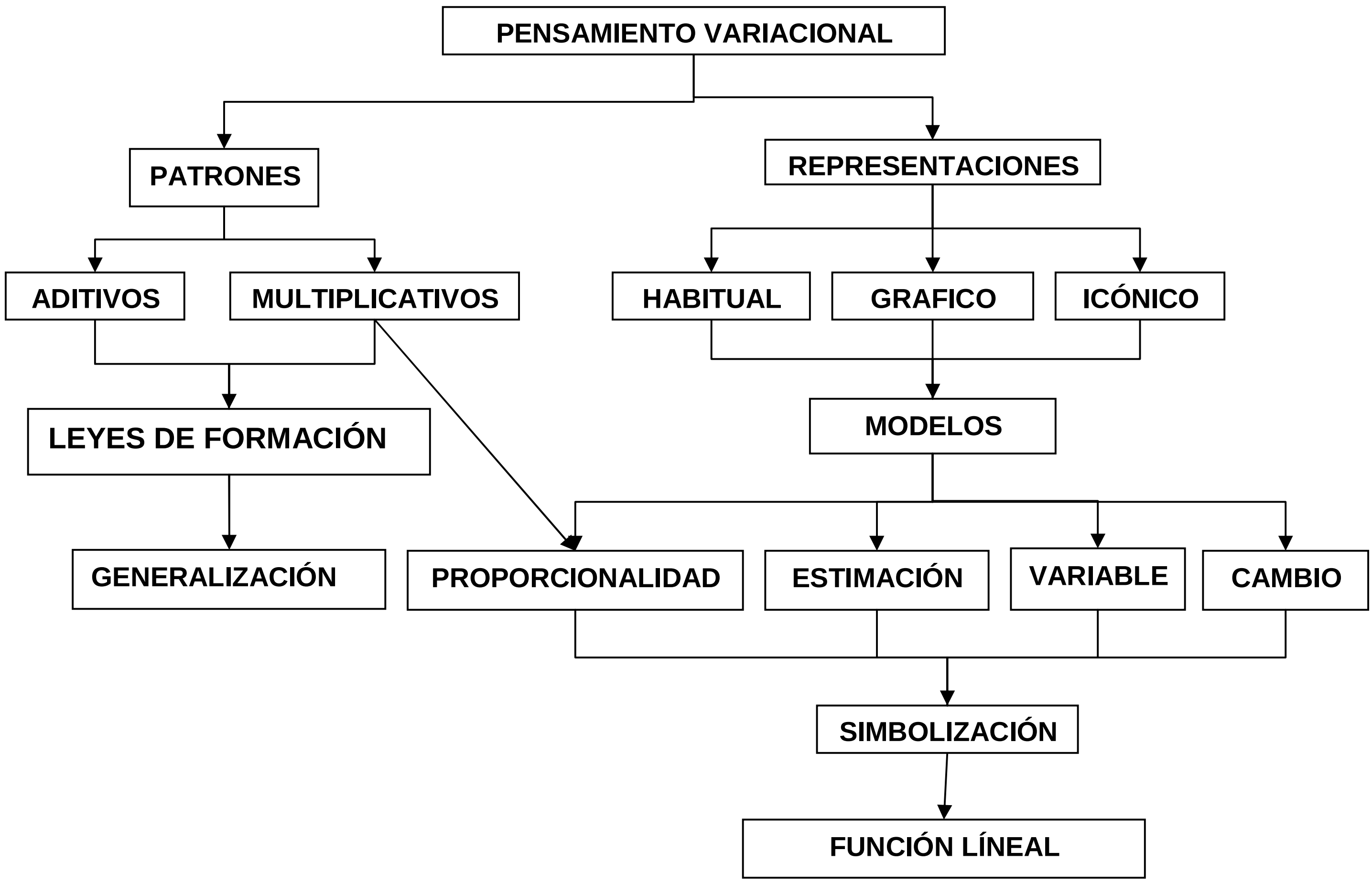
- El primero se ellos se fundamenta en la indagación de los conocimientos previos de los estudiantes, para formarnos una idea más general de la apropiación que ellos tenían sobre los conocimientos matemáticos a abordar durante el desarrollo de la investigación, esto permitió diseñar e implementar situaciones que posibilitaran el afianzamiento o adquisición de los conceptos desarrollados.

- El segundo aspecto de esta estrategia se centró en la resolución y formulación de problemas ya que se pretendió que a partir del reconocimiento de los elementos que los constituyen y la reflexión sobre los mismos, los estudiantes estuvieran en capacidad de formularlos, es decir, para que un estudiante pueda formular problemas primero debe saber resolverlos ya que así se familiariza con los componentes que contienen los problemas. Esto se trabajó a partir de situaciones contextualizadas como: tablas de datos, ecuaciones sencillas, listados de acciones, catálogos de productos, gráficos entre otros.

- Y como último aspecto se tiene el trabajo con formulación de problemas empleando contextos establecidos por el maestro en formación o temas libres, es decir, los estudiantes eran quienes proponían sus propios contextos y trabajaban de acuerdo a ello.

**4.1. MAPA CONCEPTUAL:**

A continuación se presenta el mapa  con los conceptos que se retomaron para el trabajo sobre el desarrollo del pensamiento variacional, estos han sido extraídos de los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, específicamente en lo concerniente a este pensamiento.



## 4.2. ENFOQUE TEÓRICO

Pretendiendo crear aprendizajes significativos en cada una de las sesiones de trabajo, la metodología implementada, estuvo basada inicialmente en dos aspectos, el primero, las teorías de Piaget, Vigotsky y Ausubel, y el segundo, la parte concerniente a la didáctica de las matemáticas, donde se retoman autores como Maria Luisa Fiol, Orlando Mesa, Consuelo Azcarate, entre otros.
A continuación se explicará brevemente los aspectos que se retoman en cada uno de ellos.

De Piaget se retoman las etapas del desarrollo evolutivo del niño, esto con el fin de reconocer qué conceptos están en capacidad de adquirir los alumnos, y cómo éstos pueden ser impartidos de forma tal que sean comprendidos significativamente; de este mismo autor se hace alusión al trabajo con clases y seriaciones, ya que éstas son las que dan paso a la construcción del concepto de número y por ende al trabajo con secuencias numéricas o arreglos con números a partir de material concreto.

En cuanto a Vigotsky, se retoma de su teoría de la Interacción social, lo que se refiere a las SSD (Situación Social de Desarrollo), ya que el trabajo en grupo y la interacción maestro – niño es primordial para la construcción de los diferentes conceptos matemáticos, siempre y cuando el objetivo sea generar situaciones sociales de desarrollo, significativas dentro del aula de clase.

Es por ello que además de los autores anteriormente mencionados, se retoma la teoría de Ausubel, ya que es él quien define lo que puede considerarse como aprendizaje significativo y cuándo se genera.

Para el segundo aspecto se rastrearon algunas propuestas didácticas que apuntan hacia el desarrollo de la estructura aditiva y multiplicativa, la proporcionalidad directa y el concepto de función lineal; por medio de éstas se busca consolidar algunas actividades que puedan ser llevadas al aula y que a su vez sirvan como modelo de trabajo; es decir, que se pueda retomar de ellas su estructura para luego crear actividades que pueden ser más pertinentes para un propósito en particular.

Es por ello que desde Luís Puig se retoma el conteo y los diferentes usos del número de acuerdo al contexto en el cual es empleado y los problemas aritméticos que pueden ser resueltos por medio de las cuatro operaciones básicas, además estas operaciones también fueron utilizadas para realizar combinaciones entre diferentes números, de tal forma que produjeran como resultado un mismo número, permitiendo así, la identificación de las diferentes formas en cómo pueden ser expresados y representados.

De Jhon Maison, Cecilia Agudelo y Martín Socas, se retoma la importancia de los procesos de generalización en la educación básica y los aspectos que hacen alusión a la modelación de situaciones matemáticas y a la construcción del pensamiento matemático ligado al trabajo aritmético y geométrico que se inicia en los primeros grados, así mismo se retoma el acercamiento al álgebra desde diferentes aspectos del lenguaje tales como: el habitual (enunciados verbales), el algebraico (ecuaciones), el aritmético (los algoritmos), el geométrico (áreas y representaciones cartesianas) y los modelos (herramientas empleadas para producir conceptos) ya que éstos facilitan la actividad matemática como un proceso reversible de generalización y particularización que estimulan y favorecen el desarrollo del conocimiento algebraico.

Para facilitar la adquisición de los nuevos conceptos y que ésta fuera realmente significativa para el alumno, se realizaron diferentes actividades, las cuales fueron desarrolladas con la ayuda de material concreto y modelos dinámicos interactivos que permitieran producir conceptos; las cuales por medio de la lúdica y la manipulación, posibilitaron el descubrimiento de conocimientos y la adquisición de conceptos matemáticos.

## 4.3. DESARROLLO DE LA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN.

El trabajo que se realizó con los estudiantes de básica en las instituciones educativas Javiera Londoño y Yermo y Parres, aborda los diferentes tipos de conteos, a través de los cuales se llega a la construcción de la estructura aditiva, la multiplicativa y la proporcionalidad directa.
EL CONTEO: "*El siguiente de…*" (n+1)

Desde la matemática formal, Peano propone ciertos axiomas para la construcción de los números naturales los cuales están mediados por la operación "siguiente de…", es así como éstos se forman a partir del conteo, y llevan implícito la acción de sumar, la cual genera una secuencia numérica que establece una posición (ordinal) y un que indica el número de elementos que representa (cardinal), este proceso de conteo es la vía de acceso a las operaciones aditivas ya que "*sumar es seguir contando… y restar es contar hacia atrás*"[55]o en otras palabras descontarse.

Lo anterior permite que el conteo no solo ayude a pasar a las operaciones elementales como la suma y la resta, sino que a su vez al realizar una suma reiterada de sumandos iguales, se puedan formar series numéricas en las cuales "el siguiente de…" estaría dada no por un n+1 sino  por un n+n+n+n+… Es así como esta acción de conteo (suma), en la cual se forman series dadas por la suma de un mismo número, permite avanzar hacia la multiplicación ya que ésta al ser vista como una suma de sumandos iguales permite contar no de uno en uno

[55] PUIG, Luís. Pág. 61. 1995

sino de dos en dos o de tres en tres, *"o lo que es lo mismo en la práctica, multiplicar es contar a saltos"*[56].

Con el fín de llevar una línea de continuidad desde la estructura aditiva hasta el concepto de función lineal, se indagó sobre cual sería la posible ruta a seguir, fue así como a partir de la suma de sumando iguales se abrió paso a la multiplicación, y aunque dicho proceso no fue suficiente para lo que se pretendía enseñar, ya que bajo este esquema solo se observaba una relación ternaria, éste fue indispensable a la hora de darle continuidad al esquema aditivo. Para tal fin se propusieron actividades en las cuales los estudiantes (de segundo grado), debían:

1. A partir del material concreto, sumar formando grupos de determinados números en particular, ejemplo: Con 20 tapas sumar formando grupos de a 2, 4, 5 … ¿Cuántos grupos obtuviste?

2. Realizar tablas de doble entrada en las cuales a partir de la construcción de rectángulos se lograra identificar el resultado de multiplicar un número por otro, ejemplo: 4 veces 2 es igual a 8 cuadrados.

| Veces | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 |

[56] Ibíd. Pág.62

3. Realizar sumas de sumandos iguales, para que luego trataran de descubrir una operación que minimizara dicho proceso, ejemplo: 5 + 5 + 5 = 15, es decir, 3 veces 5 es igual a 15.

4. Resolución de problemas que involucraran la utilización de sumas reiteradas para su solución, ejemplo: el lunes gasté $200, el martes y el miércoles también. ¿Cuánto dinero gasté?

En cuanto a la formulación de problemas, se realizaron actividades en las cuales a partir de la lectura de afiches que contenían artículos, enseres y datos numéricos, los estudiantes inventaban un problema.
En otras ocasiones se les permitía la formulación de problemas de forma libre, sin embargo estos debían estar relacionados con la temática abordada en clase.

Debido a que el tipo de actividades mencionadas anteriormente no permiten identificar la relación cuaternaria que se encuentra inmersa en la multiplicación, se hizo necesario trabajar situaciones que involucraran dos magnitudes como por ejemplo: ¿Si una bolsa de leche cuesta $1.000, cuánto cuestan 4 bolsas?

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1.000 \\ 4 & \longrightarrow & X \end{array}$$

Ya que este tipo de problemas explícita la relación entre la unidad y el precio de la unidad, lo cual es clave para su solución.

Se trabajó además actividades con el origami y el tangram chino con ellas se posibilitaba en los estudiantes la construcción del concepto de fracción como parte todo, a demás de que encontraban relaciones como un medio de…, un cuarto de…, entre otras

Una vez aclarado dicho concepto, se comenzó la construcción del concepto de fracción como operador, esto con el fin de hallar fracciones equivalentes, lo cual permite establecer una equivalencia entre dos fracciones, abriendo pasó así al concepto de proporcionalidad. Éste a su vez fue reforzado con la construcción de las familias de fracciones irreducibles, a través de la amplificación de las mismas, lo cual permitía encontrar más fácilmente el termino faltante en una proporción, por ejemplo:

$$3:5 \ :: \ 12:x$$

Seguidamente se trabajo utilizando el tangram, la construcción del concepto de fracción como razón, en la medida en que se establecían relaciones entre parte-parte ó todo-todo, un ejemplo de ello es la siguiente afirmación:

“El triángulo pequeño es la mitad (1/2) del paralelogramo”

Éste tipo de actividades también fueron abarcadas en contextos reales, donde los estudiantes comparaban las magnitudes que ellos más reconocían, como: barras de chocolate, arroz, mantequilla, queso, entre otros.

A pesar de que el concepto de proporcionalidad como tal, no pudo ser desarrollado en su totalidad ya que el grado cuarto sólo se alcanzo a realizar el proceso de aprestamiento para el mismo; en el grado noveno se comenzó la construcción del concepto de función lineal; para ello se partió de problemas de la cotidianidad donde se involucraban magnitudes directamente proporcionales, como por ejemplo: cantidad de compras realizadas vs dinero gastado, altura de un árbol vs longitud de su sombra, entre otros. Para el desarrollo de dichos problemas se realizaron tablas de doble entrada donde debía modelarse su solución a través del plano cartesiano.

En una primera etapa se realizaron problemas cuya solución dependía de las relaciones establecidas entre las diferentes magnitudes, analizando aspectos como: que sucedía con una magnitud cuando se incrementaba la otra, y viceversa, lo cual más adelante se reconocería con el término de variable, posteriormente se estudiaron las variables dependientes e independientes; definiéndolas y dando algunos ejemplos, uno de ellos fue el siguiente: dada las magnitudes “años de educación” y “salario”, (suponiendo que al aumentar los años de educación correlativamente aumentan los salarios de las personas), “años de educación” representaría la variable independiente y el salario la variable dependiente.

En una segunda etapa de la intervención se trabajó las graficas cartesianas de los problemas abordados, y se introdujo el concepto de pendiente de una recta a partir de lo geométrico, respecto a ésta se observaron las diferencias entre las ordenadas y las abscisas desde pares de coordenadas de una misma recta y se observó que siempre daba un mismo valor al cual se le llamaría la pendiente.

Respecto a la formulación de problemas los estudiantes comenzaron a formular de manera libre (no teniendo mucho éxito), lo cual conllevo en una etapa posterior a trabajar la resolución de los mismos con el fin de que los estudiantes trataran de extraer los datos necesarios para resolverlos y a su vez infirieran que estos también son imprescindibles para formularlos. Seguidamente se realizaron actividades donde a partir de la lectura de afiches que contenían artículos, enseres y datos numéricos, los estudiantes formulaban problemas.

Luego de este proceso se trabajó nuevamente la formulación de problemas de forma libre, sin embargo estos debían estar relacionados con la temática abordada en clase

## 4.4. ESTRUCTURA DE LAS ACTIVIDADES DE INTERVENCIÓN

Para desarrollar los objetivos propuestos en cuanto a la formulación de problemas en el pensamiento variacional y teniendo en cuenta las condiciones ya mencionadas de la población, la metodología que se implementó para el desarrollo de las temáticas abordadas fue la siguiente:

- Talleres dirigidos por el profesor
- Clases expositivas y explicativas sobre las temáticas abordadas en los talleres.
- Socializaciones grupales
- Situaciones de aprendizaje

Las situaciones de aprendizaje desarrolladas dentro del aula de clase tuvieron como que parámetros los siguientes componentes:

- *Objetivos*: Lo que se pretende alcanzar con el desarrollo de la actividad.

- *Justificación*: Es el por qué y para qué de la actividad, donde se explica la importancia de desarrollar estas actividades dando cuenta de una base teórica que orienta el trabajo. Ésta se hace con base en los documentos rectores tales como los lineamientos curriculares y los estándares de calidad para el área de matemáticas y otros que se consideren necesarios para ellos.

- *Metodología*: Describe la forma en cómo se desarrolla la actividad, el tiempo requerido para ello y los materiales o recursos que se necesitan y su utilización.

- *Desarrollo de la actividad*: Es la actividad como tal, la situación momentos o ejercicios que deben ser resueltos por el estudiante.

- *Evaluación*: Es de tipo cualitativo, se hace con base en los procesos y procedimientos desarrollados por los estudiantes.

Éstas fueron implementadas con la finalidad de desarrollar el pensamiento variacional, empezando desde los esquemas aditivos y dando paso a través de estos a la multiplicación y por ende a la proporcionalidad.

## 4.5. ACTIVIDAD (MODELO)

### FORMEMOS SERIES NUMÉRICAS

| | |
|---|---|
| TEMA: | Esquema aditivo |
| | Progresiones aritméticas y series numéricas. |
| ACTIVIDAD: | Juego "*Pista Numérica*". |
| MATERIALES: | Cinta de papel con los números del 1 al 100 |
| | Dados. |
| | Lápiz. |
| OBJETIVOS: | Calcular mentalmente sumas y restas de dígitos |
| | Identificar las variaciones en una serie numérica |
| | Establecer el patrón de variación en una serie. |
| | Predecir el siguiente de… |

METODOLOGIA:
La actividad se realizará de la siguiente manera:

- Teniendo en cuenta que los alumnos llegan de las vacaciones, se propone una actividad lúdica por medio de la cual, estos utilicen sus conocimientos básicos, es decir, apliquen las operaciones conocidas de acuerdo a los parámetros que se les dé para el desarrollo de la actividad.

- Durante la primera sesión se realizará un juego, éste se hará en parejas, para ello cada alumno dispone de una “Pista Numérica” y un dado por parejas.

- Se dará una serie de instrucciones para realizar el juego correctamente.

- Se formará una serie numérica con los números que se tachan en la pista.

- Se socializarán los resultados y se buscará formar otras series diferentes y solucionar un problema de tipo aditivo.

DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD:

- Para realizar la actividad se deben seguir los siguientes instructivos:

1. Formar grupos de dos alumnos, cada equipo tendrá un dado, y una pista numérica para cada uno.
2. Se echan los dados a suerte y comienza quien saque el puntaje más alto. Cada estudiante respeta el turno del otro y espera el suyo.
3. Cada jugador lanza el dado y avanza en su pista de la siguiente manera:

   a. Si sale 1, 3 o 5 le suma el número tres a esta puntuación y avanza tantos lugares como lo indica la suma.
   b. Si sale 2, 4 o 6, resta esa puntuación al número ocho y avanza tantos lugares como lo indica la resta.

4. Gana el primer alumno que llegue al número cien, o que quede más cerca de él.

- Cuando termines tu juego responde las siguientes preguntas:

1. Con qué números estábamos trabajando. Qué nombre se le puede dar a esos números.
2. De cuánto en cuánto se avanzaba en la pista. Siempre se contaba el mismo número para avanzar?
3. qué números salían al realizar la operación de la suma o la resta?
4. si organizamos los números que sacamos en la pista numérica y los organizamos, como queda esa secuencia?
5. Inventa tres series numéricas, escoge una forma de organizar los números que vas a utilizar en la serie y explica porque los organizaste así.

- Socialización (Síntesis y conclusiones).

1. ¿Qué es una serie numérica?
2. ¿Con que otras cosas podemos formar una serie?
3. Inventemos series entre todos y escribámoslas en el tablero

    a. ¿Cual es el número que sigue en cada una de las series?
    b. ¿Cómo lo descubriste?
    c. Cual es el “criterio que se emplearon para formar cada una de las series”
    d. Formemos otras diferentes:
        - Qué tal si empezamos en el 10,
        - Y si empezamos en el 13
        - Empecemos en el 6
    e. ¿Qué necesitamos para formar una serie?

4. Resolvamos el siguiente problema:

   Juan estaba jugando con Santiago a las Bolitas. Cuando comenzó el juego, Juan tenía 225 bolitas y Santiago tenía 173. Cuando terminó el juego Juan quedó con 135 bolitas.

   Piensa y responde:
   - ¿Quién fue el ganador del juego?
   - ¿Cuántas bolitas perdió Juan?
   - ¿Con cuántas bolitas quedó al final Santiago?
   - Juan Contó las bolitas que le quedaron después del juego de la siguiente manera:

     **1, 7 , 13 , 19 , ? , 31 , ? , 43 , …**

     - Cuales son los números que faltan en la serie?
     - Explica en qué pensó Juan que organizo los números de esa forma.

5. Inventa tres problemas en los cuales uses series numéricas.

## 5. ANALISIS

Teniendo en cuenta que el modelo de investigación en el cual se inscribe nuestra práctica pedagógica es el de **investigación-acción**, los análisis que se presentan de los diferentes grupos de ambas instituciones se basan en éste modelo, el cual se utilizó durante toda la práctica pedagógica, ya que ésta siempre estuvo apoyada en la interacción entre los procesos de reflexión realizados tanto desde lo observado y realizado con los estudiantes, como en las teorías que aportan a la práctica componentes no solo pedagógicos sino didácticos, a demás queda consignado en los diarios pedagógicos de los integrantes de este proyecto los logros y dificultades que se obtuvieron a lo largo de la implementación de las situaciones propuestas desarrolladas de forma cooperativa, siendo ésta entre los alumnos o entre el docente y el alumno; para ello el docente como observador y autor de las actividades planteadas tomó una actitud participativa.

Los elementos que se tuvieron en cuenta para realizar el análisis correspondiente al trabajo desarrollado fueron:

1. Las características de la población.[57]
2. Los documentos rectores de la institución: Se realizó el estudio de los documentos que poseían las instituciones Javiera Londoño y Yermo y Parres tales como Proyecto Educativo Institucional (PEI), Manual de convivencia, diarios pedagógicos de los profesores y planeación de los mismos.
3. El desarrollo cognitivo de los estudiantes en cuanto al pensamiento variacional con respecto al nivel de escolaridad.
4. El trabajo realizado con los estudiantes tanto desde el pensamiento variacional como en la resolución y formulación de problemas.
5. La resolución de problemas como estrategia para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes.
6. El diario pedagógico del docente en formación.

Para realizar el análisis de los trabajos realizados por los estudiantes en cuanto a la formulación de problemas correspondientes al pensamiento variacional, se crea una tabla de doble entrada en la cual se presenta desde la matemática, específicamente en este pensamiento, los ejes temáticos de estructura aditiva,

[57] Ver población y muestra pág…

estructura multiplicativa, proporcionalidad directa y función lineal propuestos por los lineamientos curriculares para esta área. Desde el área de Lengua castellana se retoma de los lineamientos curriculares lo concerniente a la producción de textos, para ello se aborda desde la lingüística la parte que alude a la coherencia y cohesión (Local, global y lineal) y pragmática (intención y superestructura) en la producción textual.

A partir de los componentes mencionados anteriormente y para realizar la clasificación de las producciones textuales (formulaciones) realizadas por los estudiantes, se creo una tabla que permitiera tabular los trabajos realizados por éstos en cada una de las fases del proyecto y por medio de la cual se pudiera dar a conocer los avances obtenidos tanto desde el componente matemático como lingüístico, sin embargo para efectos del análisis se retomó solo la parte matemática. Se hace necesario aclarar que para la elaboración de los análisis se hizo necesario separar la estructura multiplicativa de la proporcionalidad simple directa ya que, aunque la segunda es un caso particular de la primera, se clasificaron dentro de la estructura multiplicativa aquellas formulaciones que hacían uso del producto de medidas para su solución y como problemas pertenecientes a la proporcionalidad simple directa aquellos que establecían un isomorfismo de medidas para la solución de los mismos.

La tabla en mención se encuentra construida de la siguiente forma:

En la parte horizontal se encuentran los ejes temáticos correspondientes al pensamiento variacional como son: Estructura aditiva, Estructura multiplicativa, Proporcionalidad y función lineal; verticalmente se presenta lo relativo a la producción textual, la cual está dividida en dos grandes ejes, el primero hace alusión a la coherencia y cohesión (Local, Global y Lineal) y el segundo a la pragmática (Intención y Superestructura).

Cada uno de los diferentes problemas se analizó en las fases de diagnóstico (**D**), Intervención (**I**) y final (**F**). Así mismo cada una de las evidencias fue clasificada de acuerdo a las fases, es decir, teniendo en cuenta la fecha de su realización; seguidamente se determinó, según la forma en que se solucionaba el problema formulado a qué eje temático del pensamiento variacional pertenecía, luego se analizaba desde la coherencia y cohesión si éste era Local, Global o Lineal, finalmente se consideró si dicho problema presentó o no intención y superestructura, es decir, el aspecto concerniente a la pragmática del texto.

A continuación se presenta la tabla descrita anteriormente y las categorías establecidas acordes a los aspectos mencionados desde la lingüística (Producción textual) y la matemática (Pensamiento variacional).

# FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

## - CRITERIOS PARA SU CLASIFICACIÓN –

<table>
<tr><th colspan="2">PENSAMIENTO VARIACIONAL<br>PRODUCCIÓN TEXTUAL</th><th>ESTRUCTURA ADITIVA</th><th>ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA</th><th>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL</th></tr>
<tr><td rowspan="6">COHERENCIA<br>Y<br>COHESIÓN</td><td rowspan="2">LOCAL</td><td colspan="3">Produce al menos una proposición y establece concordancias pertinentes entre sujeto/ verbo, género/ número y se evidencia la segmentación al intentar formular un problema, en el cual su solución se halla a través de</td></tr>
<tr><td>sumas y/o restas</td><td>Multiplicaciones y/o divisiones.</td><td>Proporcionalidad simple directa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">GLOBAL</td><td colspan="3">Produce una o más proposiciones de forma coherente y sigue un hilo temático a lo largo del problema, cuya solución se halla a través de</td></tr>
<tr><td>sumas y/o restas</td><td>Multiplicaciones y/o divisiones.</td><td>Proporcionalidad simple directa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">LINEAL</td><td colspan="3">Establece vínculos, relaciones y jerarquías entre las proposiciones, emplea conectores y signos de puntuación que explicitan relaciones lógicas entre los enunciados al formular problemas, los cuales se solucionan a través de</td></tr>
<tr><td>sumas y/o restas</td><td>Multiplicaciones y/o divisiones</td><td>Proporcionalidad simple directa.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">PENSAMIENTO VARIACIONAL<br>PRODUCCIÓN TEXTUAL</th><th>ESTRUCTURA ADITIVA</th><th>ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA</th><th>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL</th></tr>
<tr><td rowspan="4">PRAGMÁTICA</td><td rowspan="2">INTENCIÓN</td><td colspan="3">Produce problemas matemáticos en los cuales responde a la intencionalidad del enunciado y su solución es a través de</td></tr>
<tr><td>Sumas y/o restas.</td><td>Multiplicaciones y/o divisiones.</td><td>Relaciones de proporcionalidad simple directa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SUPER ESTRUCTURA</td><td colspan="3">Produce problemas matemáticos en los cuales hay unos datos (apertura), una condición (conflicto) y una pregunta (cierre); y cuya solución se realiza a través de.</td></tr>
<tr><td>Sumas y/o restas</td><td>Multiplicaciones y/o divisiones.</td><td>Relaciones de proporcionalidad simple directa.</td></tr>
</table>

## 5.1. ANÁLISIS POR GRADOS

Los hallazgos obtenidos en cuanto a la formulación de problemas tanto desde el desarrollo del pensamiento variacional como desde la producción textual realizados durante las diferentes fases (diagnóstica, intervención y final) pueden se consultados en los anexos.

### 5.1.1. ANÁLISIS DEL GRADO SEGUNDO INSTITUCIÓN EDUCATIVA JAVIERA LONDOÑO (SEVILLA)

- **FASE DE OBSERVACIÓN**

Durante la observación se pudo percibir que la enseñanza estaba encaminada a la memorización de algoritmos, no permitiendo al estudiante analizar y entender que es lo que ocurre con cada una de las operaciones (suma, resta y multiplicación), se trabajó un poco con la resolución de problemas, mas no con la formulación ni se evidenció la implementación de actividades y situaciones que contribuyeran al desarrollo del pensamiento variacional.

- **FASE DE DIAGNÓSTICO**

En esta segunda fase se realizó un análisis acerca de cómo se encontraban los estudiantes en cuanto al pensamiento variacional y la resolución de problemas, para ello se aplicaron pruebas informales que permitieron realizar un primer intento de formulación.

En primer lugar, para observar las fortalezas y dificultades que tenían los alumnos en cuanto al pensamiento variacional se trabajaron algunas actividades referentes a éste, una de ellas fue el trabajo con secuencias numéricas y geométricas, en las cuales al tratar de identificar el siguiente de…, permitieron evidenciar que los estudiantes de segundo grado no estaban familiarizados con este tipo de actividades; por ejemplo, cuando a un niño se le pedía organizar la serie de los números pares, no identificaban qué era un número par, ni sabían las reglas que se deben tener en cuenta para realizar dicha organización (contar de dos en dos…).

En segundo lugar se tiene el trabajo sobre resolución de problemas. En este aspecto se pudo evidenciar el poco trabajo que se había realizado con los alumnos, ya que se presentaron dificultades a la hora de resolver problemas propuestos por el docente en formación.

Y en tercer lugar se realizó un primer intento de formulación de problemas, para ello se presentó una actividad relacionada con una tienda, en ella se les pidió formular problemas, en este trabajo se pudo observar que los alumnos tienen muy enmarcado modelos de problemas antes trabajados en clase o en textos y no identifican la estructura que debe llevar un problema[58].

Desde el componente matemático se pudo dar cuenta de que el 100% de los estudiantes se encuentran en la estructura aditiva ya que en sus formulaciones solo son empleadas las sumas y las restas para hallar la solución del problema que se plantea. (Ver anexo 3)

A continuación se presentan dos ejemplos de los problemas formulados en esta fase:

> *"Un dia mi mama me mando a comprar con 3000 pesos una libra de arros que valio 800 pesos un quilo de papa que valio 1200 pesos Cuanto dinero me sobro?"*

Estudiante grado 2º

[58] Ver formulación de problemas según □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ en la pág 22

Este problema esta bien formulado ya que contiene una superestructura (datos, condición y pregunta) por lo tanto tiene una coherencia y cohesión lineal[59], también se puede apreciar que según lo mencionado anteriormente en la situación que se plantea para esta fase, el estudiante hace referencia al contexto en particular (la tienda), además de ello la condición de este se encuentra encaminada a que su solución este dada por las operaciones suma y resta que también es una pretensión de la actividad.

> *"Adriana fue a comprar a la tienda de don pedro unas papitas una cocacola con $2000. cuanto dinero le sobro?"*
>
> Estudiante grado 2º

El anterior problema no ofrece unos datos numéricos que permitan relacionar los productos mencionados para poder hallar una solución, es decir, cuando el estudiante hace mención de "unas papitas una cocacola" no les asigna un respectivo precio o valor numérico, por lo tanto el problema resulta poco comprensible para el lector y sin solución.

- **FASE DE INTERVENCIÓN**

En esta tercera fase se hizo énfasis en la resolución de problemas y en los elementos que los constituyen (datos, condición y pregunta), se continuó trabajando con el desarrollo del pensamiento variacional y la formulación de problemas a partir de instrucciones o temas libres.

En cuanto al trabajo con la formulación de problemas se realizó una situación relacionada con productos de revista como ropa, lociones, cosméticos…, en esta fase también se trabajo con las estructuras aditivas logrando en los niños gran avance, ya que los porcentajes comparados con los de la primera fase fueron

[59] Ver Formulación de problemas: Criterios para su clasificación. Pág.16

positivos ya que se presentó un avance significativo; es decir; si en la fase de diagnóstico el 100% (35 e) de las formulaciones correspondieron a la estructura aditiva, en ésta solo el 72% (25 e) de las formulaciones se encuentran dentro de esta estructura mientras que hubo un aumento del 28% (10 e) en las formulaciones correspondientes a la estructura multiplicativa con relación a la etapa anterior.

A continuación se presentan dos ejemplos de los problemas formulados en esta fase:

> *“Mi tia se fue para el centro a comprar una locion que valia 34100 pesos una falda que valia 17800 pesos y un brillo que valia 8200 pesos. Cuanto dinero se gasto en total?”*
>
> Estudiante grado 2º

Como se puede observar este es un problema que presenta superestructura, es decir, se puede evidenciar los datos, la condición y la pregunta, el estudiante tomo en cuenta el contexto en particular con el cual se estaba trabajando (productos de revista), además es comprensible a la hora de leerlo y esto hace que para el lector se haga más fácil encontrar una solución, la cual esta relacionada con la estructura aditiva, la cual era el concepto a tratar en esta situación.

> *“mi tia fue al almacen a comprar un barniz pero no le le ancanso la plata por que balia $5500 y mi tia tenia $3000. Cuanta plata le falta?”*
>
> Estudiante grado 2º

Así mismo, este es un problema que contiene estructura completa, en el que su solución se realiza por medio de las estructuras aditivas (resta) que es lo que se plantea en la actividad, igual al anterior está dentro del contexto particular en el cual se esta trabajando.

- **FASE FINAL**

En esta fase se hizo más énfasis en el trabajo sobre formulación de problemas, para tal fin se realizaron algunas actividades en las que se les brindó a los estudiantes diferentes datos para que ellos formularan problemas a partir de éstos, en esta última etapa se trabajó con la estructura multiplicativa.

Para potenciar el trabajo sobre formulación de problemas se diseñó una actividad relacionada con el fútbol, allí se plantea una serie de preguntas en las cuales los estudiantes debían formular y también resolver problemas aplicando el algoritmo de la multiplicación.

Desde el pensamiento variacional hubo un gran avance ya que el 100% de las formulaciones presentadas se encuentran enmarcadas dentro de la estructura multiplicativa, muestra de ello es que los estudiantes emplearon la multiplicación para hallar la solución a las formulaciones planteadas.

A continuación se presentan un ejemplo de los problemas formulados en esta fase:

> *"si el utilero de nacional aregla dos uniformes por fugador y son 11 fugadores. cuantos uniformes aregla?"*
>
> Pedro Daniel Gómez

El anterior problema cuenta con una superestructura, lleva un hilo conductor lo que hace que sea comprensible, además el camino a seguir para su solución requiere de una multiplicación que fue lo que se planteo inicialmente y se encuentra dentro del contexto particular trabajado.

## 5.1.2. ANÁLISIS DEL GRADO TERCERO INSTITUCIÓN EDUCATIVA JAVIERA LONDOÑO (SEVILLA)

- **FASE DE OBSERVACIÓN**

Esta fase consistió en la observación directa en el aula pero sin intervención, durante ella fue posible estar al tanto de los conocimientos que poseían los estudiantes y su relación con las matemáticas lo cual permitió inferir los posibles temas a trabajar, su motivación hacia esta materia y los intereses particulares de algunos de ellos; de esta fase surge el problema de investigación a tratar durante las fases siguientes.

Por medio de la observación directa en el aula, se percibió que los alumnos realizaron trabajos únicamente a partir del pensamiento numérico y además en éste predominó la estructura aditiva, razón por la cual el trabajo realizado por la docente titular se enfocó a la realización de sumas o restas y al final de año estos estudiantes tocaron la multiplicación pero solamente como una suma de sumandos repetidos, esta labor que desarrolló en el aula con la multiplicación fue uno de los motivos que impulso a tomar como línea de trabajo el desarrollo del *Pensamiento Variacional* abordado desde la estructura aditiva, la estructura multiplicativa y la proporcionalidad directa.

A partir de esto se intentó hacer énfasis en el trabajo sobre la estructura multiplicativa teniendo en cuenta que al interior de ésta subyace un problema de variación entre dos cantidades que covarían simultáneamente y que no solo es una suma de sumandos iguales o suma reiterada, luego esto daría la posibilidad de pasar a la proporcionalidad simple directa y en grados superiores al concepto de función lineal.

- **FASE DE DIÁGNÓSTICO**

La fase de diagnóstico se desarrolló con grupos diferentes a los de la fase de observación, en ellos se aplicaron algunas pruebas informales por medio de las cuales fue posible determinar, a partir de lo conocido por los estudiantes, las temáticas a abordar para intentar dar solución al problema de investigación surgido en el semestre anterior, de forma tal que los alumnos por medio de la orientación del maestro y la aplicación de conocimientos previos permitieran trazar con más acierto la línea de trabajo a seguir[60].

La intervención se realizó con una población de 110 estudiantes, de los cuales se escogió como muestra para realizar los análisis, el grado de 3º6 (con 35 niños) ya que debido a las diferentes actividades que se presentaron en la institución, en este grado fue en el cual se realizó mayor acompañamiento e intervención.

Durante el desarrollo de la fase de diagnóstico como tal, se inició con los estudiantes el trabajo a partir de series y secuencias tanto numéricas como figúrales, ambas con material concreto, que posibilitaron en ellos ver las relaciones que se establecían al interior no solo del material en sí sino de los arreglos (secuencias) organizados con él; durante ésta, la actividad del estudiante se centró más en el observar y el decir, que en el registrar o buscar un patrón que determinara la variación de una secuencia en determinada posición.

Cabe destacar que el trabajo realizado con los estudiantes no solo estuvo enfocado al desarrollo del pensamiento variacional sino que, paralelo a éste se hizo énfasis en la resolución y formulación de problemas, en cuanto a la resolución de problemas los presentados a los alumnos pertenecían a la estructura aditiva simple en su mayoría, pasando luego a ser compuestos o en cadena.

---

[60] Ver planteamiento del problema, Pág.5

Con respecto a la formulación de problemas, ésta se realizó a partir del trabajo de resolución, fue así como se hizo un primer intento de formulación, en el cual los estudiantes (100%) mostraron encontrarse en la estructura aditiva, además las formulaciones hechas no presentaron la estructura de problema abordada desde el inicio de trabajo (datos, condición y pregunta) y la coherencia y cohesión entre los mismos no fue adecuada[61] ya que en ellos la pregunta que se realizó no estuvo acorde a los datos que suministraba el problema o a la condición que se planteaba.

Un ejemplo de estos problemas es el que sigue:

> "*Yo tengo 8 empanadas y las 5 que vendo. ¿Cuánta plata me quedo?*
> *Rta: me quedan 3*"

Estudiante grado 3º6.

Ó "*Mi papi me ba aconprar la ropa para diciembre y tiene 100.000 mil y me ba aconprar una chaqueta y bale 30.000. La chaqueta me queda divina*"

Estudiante grado 3º6

De esta muestra se pudo observar que en el primer intento de formulación de problemas matemáticos hecho con los estudiantes, el 100% de la muestra (35 e) trabajó desde el pensamiento variacional sobre la estructura aditiva y aunque se venia trabajando con ellos la multiplicación por una cifra y el algoritmo de la misma, todos los problemas presentados respondieron a la estructura mencionada, así mismo se pudo observar que en el primer ejemplo, el estudiante tiene en cuenta tanto los datos como la condición y la pregunta mientras que en el segundo ejemplo no hay una concordancia entre estos.

[61] Ver sobre formulación de problemas Pág. 34

## ➢ FASE DE INTERVENCIÓN

Durante la fase de intervención se realizaron con los estudiantes actividades[62] que potenciaban tanto el desarrollo del pensamiento variacional como la resolución y formulación de problemas.

En cuanto al desarrollo del pensamiento variacional se siguió trabajando a partir de secuencias numéricas en las cuales los estudiantes debían centrar su atención no solo en la observación de el patrón que daba origen a ellas, sino en el registro de las mismas y la búsqueda del "siguiente de…", así mismo se continuó con la resolución de problemas aritméticos simples y en cadena.

Con respecto a la formulación de problemas, los estudiantes tuvieron la oportunidad de realizarlas a partir de datos suministrados por el profesor o a partir de algún tema de su elección. En este segundo intento de producción textual se pudo encontrar que el 68% (24 e) de las formulaciones se encontraban en la estructura aditiva, lo cual muestra una reducción del 32% (11 e) con respecto a la anterior; Del 32% de las formulaciones restantes, se halló que el 28% (10 e) pertenecía a la estructura multiplicativa y el 4% (1 estudiante) empleó la proporcionalidad directa.

Algunas formulaciones realizadas por los estudiantes que permiten evidenciar lo anterior son:

> "*Juan compro un metro de lazo y carlos compró 4 cuartos de metro de lazo ¿cuál de los dos tienen el lazo mas largo?*"
> *Rta: son iguales*
>
> Estudiante de 3º6.

[62] Ver estructura de las actividades de intervención Pág.73

*“2 arboles de naranja dieron una cosecha de 3.500 naranjas pedro su dueño vendio la cosecha de un arbol que tenia 975 naranjas a $120 cada una.*

*Responde*

1. *¿cuánto dinero gano pedro?” 117.000*
2. *¿cuántas naranjas dio el otro arbol? 2.525*

*Solución*

*Arbol #1 a 975*

| | |
|---|---|
| *975 x* | *3.500 -* |
| *120* | *975* |
| *000* | *2.525* |
| *1.950* | |
| *9 75 +* | |
| *117.000* | |

*-Cosecha del otro arbol 2.525*

*-Pedro gano de 1 arbol 117.000”*

Estudiante de 3º6.

Como se puede observar estos problemas tienen estructura completa, es decir, presentan unos datos, una condición y pregunta, además para su solución se utiliza no solo la suma sino también la multiplicación. Estos estudiantes relacionan muy bien los datos tanto para hallar una solución como para formular el problema.

- **FASE FINAL**

Durante el desarrollo de esta fase se continúo el trabajo tanto desde el pensamiento variacional como de la formulación de problemas. El pensamiento variacional fue abordado no solo desde la estructura multiplicativa, también se realizaron trabajos con ecuaciones y criptogramas que permitieron que los estudiantes razonaran tanto sobre el significado de los números como de las operaciones.

En cuanto a las formulaciones realizadas durante esta fase se obtuvieron los siguientes resultados: el 83% (29 e) de las formulaciones realizadas correspondieron a la estructura aditiva, el 10% (4 e) a la estructura multiplicativa y el 7% (2 e) a la de proporcionalidad y función lineal.

Con respecto a la fase anterior (Intervención) se puede observar que en cuanto a las estructuras presentadas en las formulaciones hubo un incremento del 15% (5 e) en la estructura aditiva, en la multiplicativa disminuyó de un 28% (10 e) a un 10% (4 e) y en la multiplicativa pasó de un 4% (1 e) a un 7%(2 e).

Ejemplos de las formulaciones realizadas por los estudiantes durante el desarrollo de esta etapa son:

> *"yo tenia una bufanda de 150 metros de largo y 100 metros de ancho mi prima le corto 50 metros de largo y 49 metros de ancho ¿de cuantos metros de ancho y largo me queda la bufanda?*
>
> *R/= 150- 100-*
> *50" 49*
> *100 51*
> *Me da de largo 100 metros y de ancha 51 metros"*

Estudiante de 3º6.

*"Problema*

*Tengo 20 bolsas de leche cada bolsa tra 1.000 cm cubicos y cuestan 1.0000*

*Preguntas*

*¿Cuántos cm hay en total? R: 20.000 CM Cubicos*

*¿si boy a vender 4.000 cm cuantas bolsas vendo? R: vendo 4 Bolsas*

*¿Cuánta plata gano conlas 20 bolsas de leche? R: gano 20.000"*

Estudiante de 3º6.

Puede observarse en estas formulaciones que aunque en algunas ocasiones se presentan datos un poco descontextualizados, ambas tienen una estructura completa de acuerdo a lo trabajado con los estudiantes durante la resolución de problemas, además los datos están correctamente relacionados lo cual permite establecer fácilmente las operaciones a realizar para hallar su solución (Ver anexo 4).

### 5.1.3. ANÁLISIS DEL GRADO CUARTO INSTITUCIÓN EDUCATIVA JAVIERA LONDOÑO (SEVILLA) SECCIÓN SOFÍA OSPINA DE NAVARRO

- **FASE DE OBSERVACIÓN**

En esta primera fase se indagó tanto sobre los documentos rectores de la institución como por el saber específico de los estudiantes en el área de matemáticas, esto permitió observar de que el pensamiento numérico es el más abordado por los docentes en sus clases y que en éstas prima la mecanización de algoritmos, dejando de lado la reflexión sobre los diferentes significados que el número puede tener, éste fue visto solo como secuencia verbal, cardinal, código o símbolo, dejando de lado el número para medir, como ordinal o como tecla para pulsar. Esto condujo a que los estudiantes presentaran dificultades al enfrentarse con un algoritmo que ellos mismos debían construir, al trabajar con números y a la diferenciación entre el valor posicional o relativo de un número; es decir, aún se presentaban dificultades para diferenciar las unidades de las decenas y las decenas de las centenas.

En las siguientes tres fases se intervino pedagógicamente con 6 grupos de estudiantes del grado cuarto de primaria (230 alumnos), de ellos se tomó una muestra de 70 estudiantes, la cual se corresponde a 2 de los grupos (4º-5 y 4º-6) donde se logro una mayor intervención. Los trabajos de estos estudiantes fueron observados tanto en la fase diagnóstica como en la fase de intervención y en la fase final.

- **FASE DE DIAGNÓSTICO**

Durante esta fase se implementaron situaciones donde los estudiantes recordaran los conceptos vistos en el grado anterior, como múltiplos de un número, significado y términos de la multiplicación, resolución de problemas que involucraran las estructuras aditivas y multiplicativas, entre otros; esto con el fin de afianzar los conceptos previos y así mejorar la comprensión de las nuevas temáticas a abordar tales como, resolución y formulación de problemas que involucraran las operaciones reversibles de las estructuras aditivas y multiplicativas, y el descubrimiento y construcción de patrones a través de series numéricas y gráficas elementales.

Después del proceso anterior y por medio de pruebas informales, se les propuso a los estudiantes formular problemas libremente, lo cual arrojó los siguientes resultados:

Del 100% de las formulaciones el 94% (65 e) pertenecían a la estructura aditiva, y el 6% (5 e) restante a la estructura multiplicativa, no se presentó ningún caso que hiciera alusión a la proporcionalidad simple directa.

A continuación se presentan dos ejemplos de los problemas formulados en esta fase:

> *"Había una vez un señor muy rico que cuando murió dejó de erencia $106.790.450 y le los hijos y a los pobres ¿Cuánto les tocan a cada uno?"*

Estudiante grado 4º

```
106.790.450  |2
 06
   07          53395225
     19
       10
         04
           05
             18
```

Este problema requiere para su solución de la estructura multiplicativa; sin embargo no presenta superestructura, ya que no se da la condición entre los datos y la pregunta, pues él piensa que al mencionar "le los hijos y a los pobres" está hablando sólo de dos "cantidades o personas", pero en realidad no es específico dentro del problema a cuántos hijos y a cuántos pobres se les va a repartir el dinero.

> *"Mi papa le compro una camisa a mi abuelo porque estaba de cumpleaños que le costo $21200 y a mi mama le compro unos zapatoz que le costaron $60000 ¿Cuánto dinero gasto?"*

Estudiante grado 4º

| | | |
|---|---|---|
| *Camisas:* | *$21200* | *R: se gasto $81200* |
| *Zapatos:* | *<u>$60000</u>* | |
| | *$81200* | |

Este estudiante contextualizó su problema a partir de las compras, utilizando precios reales y relacionando estos datos de forma coherente con la pregunta, además muestra una solución a su problema donde presenta una relación entre el producto que compra y su costo, a pesar de que no utilizó el signo de la adición, realiza la suma de las cantidades y da la respuesta a la pregunta planteada por él en el problema; éste fue clasificado dentro de la coherencia y cohesión lineal, cuya solución se halla a través de la estructura aditiva; con respecto a la pragmática, presenta una intención clara y una superestructura (datos – condición – pregunta).

- **FASE DE INTERVENCIÓN**

En esta fase se continuaron desarrollando conceptos concernientes al desarrollo del pensamiento variacional como ecuaciones sencillas con una incógnita, reescritura de números a partir de las 4 operaciones básicas, secuencias (series), la construcción del concepto de fracción como parte - todo y como operador. En cuanto a la formulación de problemas se realizó una intervención pedagógica con la cual se pretendía que los estudiantes identificaran los elementos básicos que deben contener un problema y de acuerdo a lo planteado en el marco teórico con respecto a la metodología a seguir, se realizaron una serie de situaciones de las cuales se pudo percibir lo siguiente:

Los problemas de tipo aditivo disminuyeron en un 11% (8 e) en relación con la fase de diagnóstico, ya que en la primera se presentó un 94% (65 e) de formulaciones en esta estructura mientras que en la fase de intervención se presentaron un 83% (58 e) de formulaciones que utilizaran la suma o la resta para hallar una solución a los planteamientos hechos. En cuanto a la estructura multiplicativa hubo un incremento del 11% con respecto a la fase anterior, pasando así de un 6% (5 e) a un 17% (12 e) , en ningún momento se encontraron problemas en los cuales los estudiantes involucraran la proporcionalidad simple directa para hallar su respuesta.

A continuación se presentan dos de los problemas más significativos en esta fase:

> *"Un señor va a dejar de erencia $577.705.600 y como tiene unos primos muy lejanos y quiere repartirlos entre ellos y si ellos son 25 ¿Cuántos de toca a cada uno de erencia?"*

Estudiante grado 4º

```
577.705.600 |_25
077          24902240
  777
    520
      56
      060
        100
          00
```

En la fase de diagnostico este estudiante realizo una formulación contextualizada de manera similar, ahora en este nuevo problema él sigue en la línea de estructura multiplicativa ya que hace uso de la división para hallar una solución y su nivel escritural ha avanzado hasta llegar a una producción textual en la cual logra identificar que es necesario especificar la cantidad de personas entre las cuales se repartiría la herencia, aspecto que no tuvo en cuenta en la fase anterior.

> *"Santiago fue a la feria de las flores y estaba bendiendo flores el señor tenia 10 y se compro 2 cuantas flores le quedaron al señor"*

Estudiante grado 4º

$$\begin{array}{r} 10 \\ -\ 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

R:/ Al señor le quedo 8 flores

En el problema anterior se puede observarse que el estudiante contextualiza su problema de una manera adecuada pero presenta dificultades al tratar de redactar lo que el quiere expresar dando como resultado un problema de estructura aditiva en la cual identifica la cantidad de flores que el vendedor aún conserva, pero al no tener signos de puntuación ni conectores que permitan darle una secuencialidad al problema, este no presenta una superestructura.

- **FASE FINAL**

En esta última fase los estudiantes debían dar cuenta de lo aprendido en el año lectivo en cuanto a la formulación de problemas y al pensamiento variacional, las actividades propuestas para tal fin fueron las siguientes: simplificación y complificación de fracciones, ecuaciones fraccionarias, construcción de series, secuencias numéricas e icónicas y resolución y formulación de problemas a partir de datos precisos, situaciones preestablecidas y contextualizadas ó libremente.

En cuanto a la producción obtenida de los problemas formulados por los estudiantes se pudo observar que:

Se presenta una disminución significativa del 29% con respecto a la estructura aditiva ya que solo el 54% de las formulaciones pertenecen a ésta; en cuanto a la estructura multiplicativa, ésta aumentó en un 23% ya que pasó de un 17% alcanzado en la fase de intervención a un 40% en la fase fina; además un 6% de las formulaciones hicieron uso de la proporcionalidad simple directa para hallar la solución.

A continuación se presentan un ejemplo de los problemas formulados en esta fase:

> *"En una empresa contrataron a un señor su pago fue $50.480.000, entonces decidió dejar de herencia $30.000.000 a sus 5 hijos y 3 nietos y el resto lo pagó en deudas, ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno de ellos? ¿Cuánto dinero pagó en deudas?"*

Estudiante grado 4º

300000000 | 8      5+3=8      R: A cada uno le corresponde $3750000
60      3.750.000
40
00000

50480000 –
30000000      R: pago en deudas $20480000
20480000

En este problema el estudiante contextualiza de manera adecuada los datos que presenta, además relaciona varias operaciones para hallar una solución a su problema, ya que al decir que la herencia va a ser repartida entre sus "5 hijos y sus 3 nietos" el realiza una suma cuyo resultado será el divisor que determina la cantidad de dinero que les corresponde de la herencia y cuando dice que el resto lo paga en "deudas", este dato permite identificar que la segunda pregunta se soluciona con una diferencia entre el dinero que recibió de la empresa y el dinero que le dejo a sus hijos. Los datos que presenta en el problema le permiten relacionarlos y formular más de una pregunta, donde hace uso tanto de la estructura multiplicativa como de la estructura aditivita; esto hace pensar que el estudiante ha dado un gran avance tanto en la producción textual como en la adquisición de conceptos relacionados con el pensamiento variacional.

El producto de las clasificaciones realizadas a partir de las formulaciones producidas por los estudiantes puede ser consultada en los anexos (Ver anexo 5).

### 5.1.4. ANÁLISIS DEL GRADO NOVENO INSTITUCIÓN EDUCATIVA YERMO Y PARRES (BELÉN)

- **FASE DE OBSERVACIÓN:**

En ésta primera fase se tuvo la oportunidad de interactuar tanto dentro del aula de clase en el área de Matemáticas con estudiantes, como dentro del ambiente escolar en general de la Institución educativa y del personal que allí labora (Rector, coordinador, profesores y trabajadores que desempeñan oficios varios), además se realizó un estudio acerca de los documentos rectores de la Institución.
Así mismo se observó que el conocimiento que debían tener los estudiantes con respecto al grado en que se encontraban era poco, aspecto que se evidenció en una actividad programada por el docente titular acerca de ecuaciones de primer grado con una incógnita, de ella se pudo afirmar que los estudiantes no tenían la noción de que era una ecuación; una de las mayores dificultades que se presento fue la de manipular las expresiones algebraicas: suma y resta de términos semejantes, multiplicación de signos, operaciones entre fraccionarios; además de no manejar las propiedades básicas de la potenciación y radicación.

- **FASE DE DIAGNÓSTICO:**

Los estudiantes de grado noveno de la Institución educativa Yermo Y Parres comienzan un proceso orientado por el docente en formación, donde la prioridad es indagar cómo se encuentran en la escritura respecto a la formulación de problemas Matemáticos; para después realizar una intervención donde se de la oportunidad de mejorar procesos que motiven a una buena formulación, como es el caso de movilizar esquemas de pensamiento donde los estudiantes piensen de una manera no lineal como lo han hecho en su gran mayoría de veces hasta ahora.

En un primer momento se les pidió a los estudiantes que formularan problemas matemáticos libremente, y son características generales de la producción obtenida: Respecto a la escritura de problemas el 45% (16 e) perteneció a la estructura aditiva, el 55% (19 e) a la estructura multiplicativa y no se presentaron formulaciones pertenecientes a la proporcionalidad simple directa y función lineal.

Ejemplos de dichas producciones son:

> "*Marcela en el transcurso de la semana vende boletas para una rifa, el balance fue: Lunes vendió 5 boletas, el Martes 10 boletas, el Miércoles 15, el Jueves 10 y el Viernes 20.*
>
> *Preguntas:*
> *¿Cuántas boletas ha vendido Marcela al finalizar la semana?*
> *¿Cuál fue el día que menos vendió?*
> *De Miércoles a Viernes ¿Cuántas boletas vendió? "*

Estudiante grado 9º

"*Mario fue a la tienda de don Pedro y realiza las siguientes compras: 4 chocorramos a 600 cada uno, 3 paquetes de detodito a 800 pesos cada uno y tres bombombunes a 400 pesos cada uno.*
*Preguntas:*
*¿Cuánto cuestan los chocorramos?*
*¿Cuánto cuestan los detoditos?*
*¿Cuánto cuestan los bombombunes?*
*¿Cuánto se gastó Mario en la tienda?"*

Estudiante grado 9º

Los problemas están bien redactados ya que presentan unos datos, una condición y una pregunta pero la dificultad se halla en que para su solución solo se debe saber sumar y multiplicar de manera sencilla números naturales, de lo cual se concluye que son problemas que pudieron ser formulados por un niño de primaria y resueltos por el mismo.

- **FASE DE INTERVENCIÓN:**

En un segundo momento se les solicitó a los estudiantes que formularan problemas matemáticos, con la diferencia, de que ya se había realizado una intervención previa, fundamentada desde los teóricos[63] que trabajaron al respecto.

De la producción obtenida en las formulaciones de problemas lo que se encontró fue que hubo más esfuerzo por parte de los estudiantes de tener en cuenta los parámetros que debían seguir a la hora de enfrentarse a formular un problema matemático; es así como disminuyeron en un 16% (5 e) las formulaciones pertenecientes a la estructura aditiva, ya que ésta pasó de un 45% (16 e) a un 29% (10 e), también se presentó una disminución del 4% (1 e) en cuanto a las producciones referentes a la estructura multiplicativa, ésta pasó de un 55% (19 e) a un 51% (17 e) y hubo un aumento del 20% (7 e) en las formulaciones que hacían uso de la proporcionalidad simple directa y función lineal, la cual fue de 0% en la fase anterior.

Ejemplo de estas formulaciones es el siguiente:

> *"En una receta para una docenas de galletas María necesita 2 libras de mantequilla ¿Cuánta mantequilla necesitara para 72 galletas?"*

Estudiante grado 9º

[63] Ver formulación de problemas, Pág.34

Este problema tiene una estructura adecuada, además es un problema de proporcionalidad simple directa, lo cual significa que el nivel de complejidad en cuanto a la temática aumento, pues como ya se dijo en la mayoría de las ocasiones formulaban problemas de tipo aditivo y multiplicativo.

La solución que dieron a este problema fue por medio de una tabla de doble entrada, Esta solución aunque se presenta a partir del conteo permite realizar relaciones entre las magnitudes galletas y libras de mantequilla de la siguiente manera:

| GALLETAS | MANTEQUILLA |
|---|---|
| 12 | 2 |
| 24 | 4 |
| 36 | 6 |
| 48 | 8 |
| 60 | 10 |
| 72 | 12 |

Al final se concluye que para 72 galletas se necesitan 12 libras de mantequilla.

- **FASE FINAL:**

En un tercer y último momento, llamado etapa final de la intervención se les pidió a los estudiantes que formularan problemas matemáticos de manera libre, de esta última producción académica se encontró que un 9% (3 e) formularon problemas de estructura aditiva l, en la fase final rebajo en un 20% (7 e) las formulaciones de problemas de tipo aditivo respecto a la etapa de intervención, un 17 % (6 e) formularon problemas de estructura multiplicativa lo cual muestra que disminuyó en un 34% (12 e) las producciones de tipo multiplicativo con respecto a la etapa de intervención, un 75% (26 e) de las formulaciones pertenecieron a la proporcionalidad simple directa y a la función lineal lo cual muestra un incremento del 55% (19 e) con respecto a la etapa de intervención; en éste nivel los estudiantes formularon problemas más acordes tanto al Pensamiento Variacional como al nivel en que se encontraban.

Ejemplo de ello es:

> ”*Adriana le pidió al cajero de un banco que le cambiara un cheque de 200.000 pesos en billetes de 5.000 y 20.000 si el cajero le da en total 19 billetes ¿Cuántos billetes de cada uno recibió Adriana*?”
>
> Estudiante grado 9º

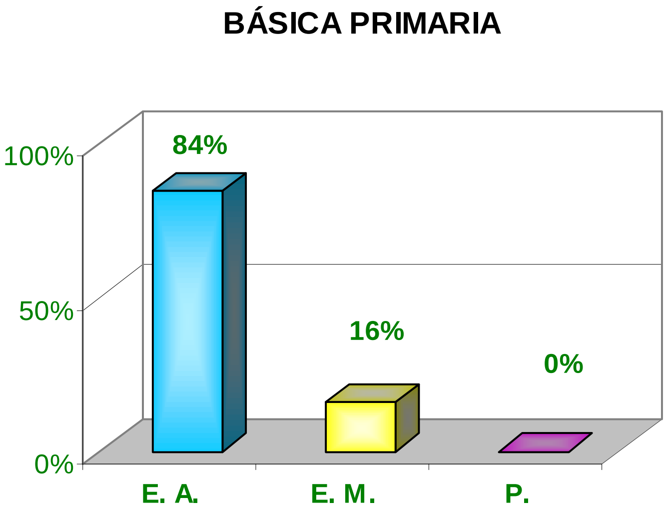
El problema anterior fue realizado en el momento en que se estaba trabajando problemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, es un problema que se encuentra bien redactado, posee una intención y superestructura que lo hace se un problema “ideal” para un estudiante de grado noveno.

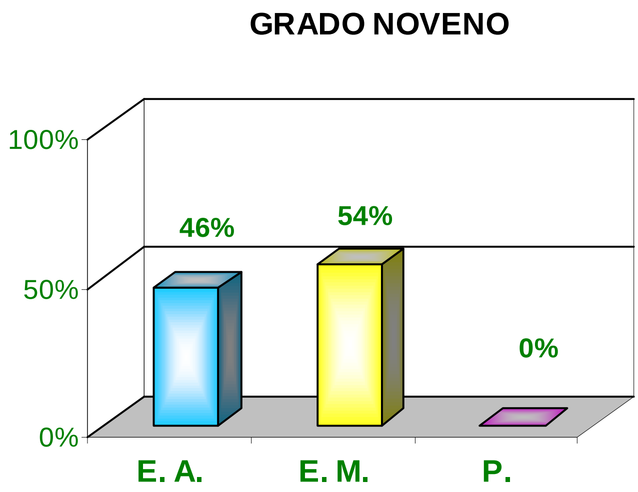
Las clasificaciones realizadas a partir de las formulaciones producidas por los estudiantes pueden ser consultadas en los anexos (Ver anexo 9)

## 5.2. ANALISIS GENERALES

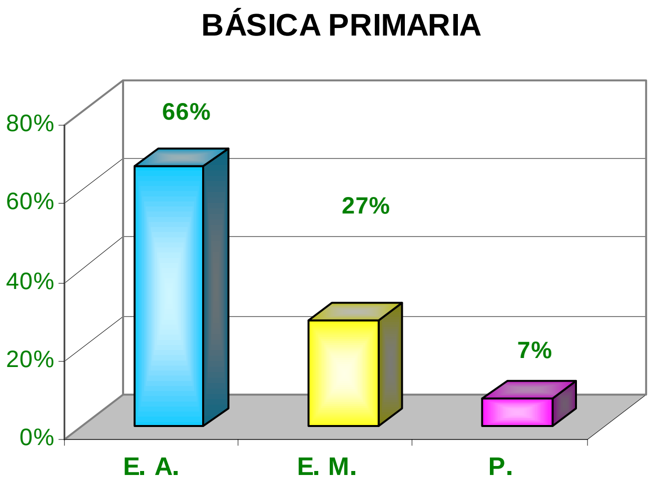
Los diferentes análisis realizados en cada uno de los grados en las diferentes fases del proyecto permitieron llegar a las siguientes conclusiones:

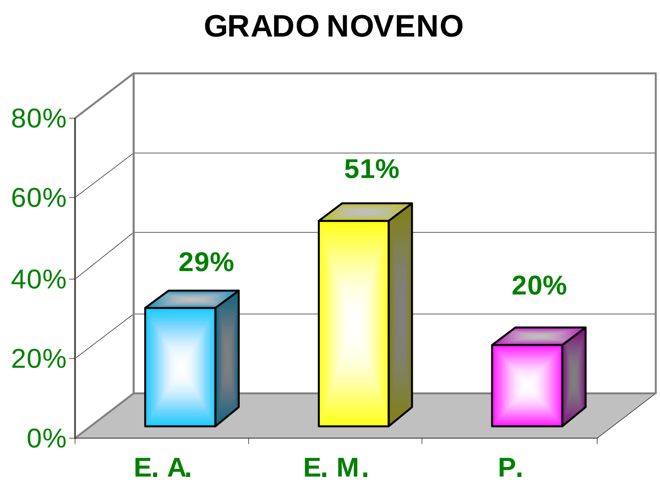
- Del trabajo realizado por los estudiantes tanto de la básica primaria como del grado noveno, se pudo observar que la estructura matemática predominante en la fase de diagnóstico fue la aditiva para los grados de 2º, 3º y 4º y la multiplicativa para el grado 9º, en ambas no se evidenciaron producciones concernientes a la proporcionalidad y la función lineal durante esta fase.



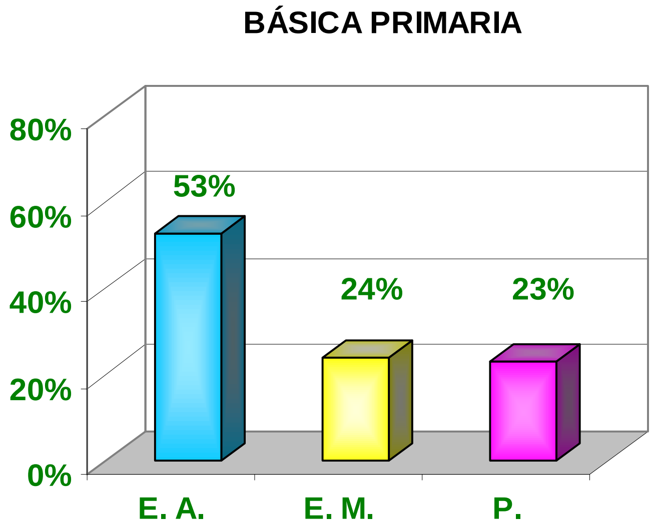



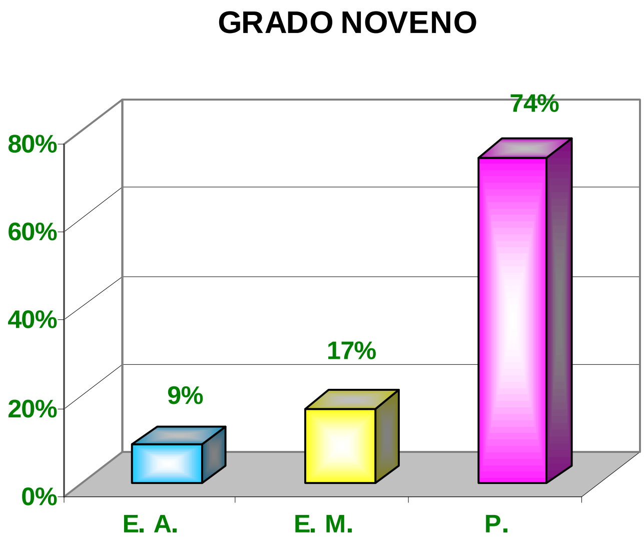

- En la fase de intervención se visualiza un pequeño incremento en cuanto a la estructura multiplicativa y la proporcionalidad simple directa en todos los grados y se presenta una disminución en las formulaciones pertenecientes a la estructura aditiva.



- En la fase final se obtienen resultados significativos en todos los grupos en lo concerniente a la estructura multiplicativa y de proporcionalidad simple directa y para el caso del grado 9º las producciones textuales pertenecientes a la estructura aditiva merman considerablemente.




## 6. CONCLUSIONES

- Con respecto a la formulación de problemas, se pudo evidenciar la poca familiarización que los estudiantes tenían con este tipo de actividad, ya que al hablarles de "inventar un problema" tomaban como referencia los abordados en los grados anteriores, los cuales eran de estructura aditiva simple, donde se hacía referencia al todo- parte-todo; debido a esto se presentó una gran incapacidad por parte de los alumnos para formular problemas por sí solos, ya que no reconocían los elementos que constituyen un problema tales como los datos, la condición y la pregunta.

  En las primeras formulaciones realizadas por los estudiantes se pudo observar que éstos no tienen claridad sobre el cómo realizar las preguntas, relacionarlas con los datos y responder adecuadamente a los planteamientos hechos por ellos mismos, además también se presentaron dificultades al extraer los datos de un problema, el relacionarlos de forma significativa para llegar a un resultado y algunos estudiantes de primaria tienen dificultades en cuanto al valor posicional del sistema de numeración decimal.

En las formulaciones hechas por los estudiantes, ninguno empleó el esquema multiplicativo puesto que la mayoría de ellos no han interiorizado las tablas de multiplicar, razón por lo cual predominó el esquema aditivo, mientras que en el grado noveno las formulaciones en su gran mayoría pertenecieron a las estructuras aditivas y multiplicativas, lo cual no se esperaba para este grado de escolaridad.

Al finalizar la intervención con los alumnos, se pudo observar que éstos en su gran mayoría se encuentran en capacidad de contextualizar un problema, y aunque no todos lo hacen, por lo menos la mitad de ellos es capaz de establecer una relación entre los datos que presentan y la pregunta que plantean al final de los mismos.

- Con respecto al desarrollo del Pensamiento Variacional, durante todo el año escolar, los niños aprendieron a buscar los patrones que hacían posible las variaciones o cambios en una secuencia fuera ésta de tipo gráfico o numérico, descubrieron que un número puede ser reescrito de diferentes formas utilizando para ellos las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y también diferentes estrategias para resolver ecuaciones sencillas, en las cuales se tenía que descubrir el número que hacía falta o que se encontraba oculto; desarrollando más fácilmente aquellas que involucraban operaciones como la suma o la multiplicación, pero los procesos reversibles como la resta y la división, eran más complejos de desarrollar por ellos, confundiendo en muchos casos la división con la resta.

En cuanto al trabajo con las secuencias, los estudiantes trabajan con mayor facilidad aquellas que contienen gráficas ya que en ellas se evidencia más fácilmente el patrón de variación de la misma, caso opuesto a lo que sucede cuando la secuencia es numérica, debido a que los estudiante no encuentran relaciones entre los números que la componen, por lo cual tratan de acomodarlos sin ningún patrón de cambio, sólo contando de uno en uno.

Los estudiantes presentaron dificultades a la hora de registrar por escrito lo que observaban en las secuencias, ya que así hubiesen descubierto “el siguiente de” y pudieran expresar su razonamiento verbalmente, no encontraban la forma de pasar del lenguaje natural al simbólico (matemático).

- Algunos de los contratiempos que se presentaron durante el inicio de la actividad de formulación de problemas tanto en la básica primaria como en el grado noveno como durante su desarrollo fueron:

  - Al inicio los alumnos no sabían que se les estaba pidiendo al decirles “formule un problema”.

  - Los estudiantes no saben leer gráficos, por lo cual no fueron capaces de inventar ni siquiera una pregunta, ya que no entendían que era lo que se estaba representando en la Gráfica (ver anexos), de allí se deduce que en su gran mayoría, éstos no tienen capacidad de abstracción, uno de los tantos elementos que se tienen en cuenta en los Lineamientos Curriculares en cuanto al Pensamiento Variacional.

  - La motivación por parte de los estudiantes al realizar la actividad fue poca, los alumnos no se vieron comprometidos con el trabajo, lo realizaron solo por cumplir con la nota que se le asignaba, aspecto que es determinante en los resultados que se obtuvieron.

De lo anterior pueden evidenciarse los siguientes aspectos:

- *La formación matemática de los estudiantes durante todo su proceso académico*: a los alumnos de noveno se les dificulta leer el plano cartesiano, el significado de una coordenada y el análisis de lecturas, además se nota poca comprensión de los conocimientos matemáticos lo cual incide en que no sean capaces de formular un problema por su parte a los estudiantes de primaria se les dificulta extraer información a partir de gráficas o contextos no numéricos.

- *La motivación y la disposición hacia y para el trabajo*: el estudiante de ambas instituciones no manifiestan deseos por aprender, no muestra interés por el trabajo lo cual se evidencia en un aprendizaje no significativo de tipo mecanicista, que deja ver vacíos conceptuales a nivel del área de matemáticas en general, y como afirma Ausubel una de

> "*las condiciones para que un aprendizaje sea significativo es que el aprendiz manifieste disposición para relacionar, de manera sustantiva y no arbitraria el nuevo material, potencialmente significativo con su estructura cognitiva. Esta condición implica que, independientemente de cuan potencialmente significativo pueda ser el material que se va a aprender, si la intención del aprendiz fuera simplemente la de memorizarlo arbitraria y literalmente, tanto su proceso de aprendizaje como su producto serían mecánicos.*"[64]

- Los estudiantes en las pruebas finales de formulación, presentaron un avance significativo tanto en la estructura como en la forma, ya que tuvieron para ello

[64] MOREIRA, Marco Antonio. 2000.

en cuenta aspectos como: realizar problemas contextualizados, con coherencia, con estructura enunciado-pregunta (s), con buena ortografía, aspectos que reflejan un proceso que empezó de cero y que va mejorando cada vez más.

Lo anterior sumado a otro tipo de actividades inmersas en los diferentes pensamientos (espacial, estadístico, numérico) hicieron posible que los estudiantes conocieran no solo otra faceta de las matemáticas sino que por medio de las actividades propuestas pudieran desarrollar el pensamiento variacional de una forma amena y lúdica, cabe anotar que antes de iniciar la intervención con ellos, los estudiantes no sabían nada sobre los temas trabajados a excepción de la resolución de problemas, que es una de las actividades que se retoman en la escuela aunque en menor medida.

- Así mismo se pudo evidenciar que el implementar el método de investigación acción, permitió captar la realidad social de los estudiantes y los conocimientos previos de los mismos, logrando así generar situaciones contextualizadas acordes a ella.
- La ejecución de actividades con material concreto en diferentes contextos, permitió a los estudiantes la adquisición de los conceptos matemáticos involucrados en ellas de manera activa y significativa.

- La intervención realizada con los estudiantes durante el año escolar, facilitó el reconocimiento de los patrones que hacían posible las variaciones o cambios en una secuencia, fuera ésta de tipo gráfico o numérico, además reconocieron que un número puede ser escrito de diferentes formas utilizando para ello las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y manejando diferentes estrategias para resolver ecuaciones sencillas.

## 7. RECOMENDACIONES

- Continuar desarrollando situaciones de aprendizaje por medio de material concreto de manera que se motive a los estudiantes a participar en la construcción de su conocimiento significativamente.

- Integrar los diferentes pensamientos matemáticos durante la educación básica, de forma tal que en grados posteriores los estudiantes se enfrenten con mayor facilidad con los conceptos acordes al nivel de escolaridad como es el caso del álgebra.

- Incentivar la formulación de problemas a partir de contextos conocidos por los estudiantes, esto con la finalidad de que ellos no solo demuestren seguridad en el momento de realizar sus planteamientos si no que a su vez trabajen con elementos conocidos que les permitan establecer las relaciones pertinentes y necesarias para la formulación.

- Contextualizar los elementos empleados en la formulación de problemas de acuerdo a la época, es decir, acontecimientos que sean reales para ellos y de aplicabilidad a la vida cotidiana.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

AGUDELO VALDERRAMA, Cecilia. Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático. EN: Aula Urbana. Bogotá. Instituto para la investigación educativa y desarrollo pedagógico. IDEP. No.37. Noviembre de 2002, Pág. 18-19.

ALONSO, Fernando; BARBERO, Carmen; et al. Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid, Síntesis, 1999.

AUSUBEL, David P; NOVAK, Joseph D y HANEISIAN, Helen. Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Editorial trillas. México, 1991

CASTRO, Encarnación et al. Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Universidad de los Andes, Bogotá, 1999.

ELLIOTT, John. La Investigación — Acción en educación. Ediciones Morata. Madrid, 1997.

FIOL, María Luisa y FORTUNY, Joseph. Proporcionalidad directa, la forma y el número. Madrid, Síntesis, 1990.

GARCÍA GARCÍA, José Joaquín. Didáctica de las ciencias, resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Medellín, 1998. Grupo impresor. 368

GODINO, Juan D y FONT, Vicenç. Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Departamento de didáctica de las matemáticas. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor. EN: Cuadernos de matemática Educativa. Asocolme. 1999.

LLINARES CISCAR, Salvador y SÁNCHEZ GARCÍA, María Victoria. Fracciones. Madrid, Síntesis, 1997.

MASON, John. Rutas hacia, raíces del Álgebra. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.1998.

MAZA GÓMEZ, Carlos. Enseñanza de la Suma y la Resta. Serie Matemáticas Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis, Madrid, 1991, Vol.24

MAZA GÓMEZ, Carlos. La enseñanza de la multiplicación y la división. Serie Matemáticas Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis, Madrid, 1991, Vol.25

MAZA GÓMEZ, Carlos. Multiplicar y dividir. A través de la resolución de problemas. Madrid. 1991. Editorial Aprendizaje Visor.

Ministerio de Educación Nacional. (M.E.N). Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas. Bogotá. Editorial Magisterio. 1998

Ministerio de Educación Nacional. Estándares para la excelencia en la educación. Editorial Magisterio, Bogotá, D.C. Julio de 2002.

Ministerio de Educación Nacional. (M.E.N). Lineamientos Curriculares para el área de lengua castellana. Bogotá. Editorial Magisterio. 1998

MOSALVE POSADA, Orlando. Una brisa refrescante para la iniciación matemática: proporciones, factorización, volúmenes, geometría. Aula Abierta. Medellín. 1999.

OBANDO ZAPATA, Gilberto. De la multiplicación a la proporcionalidad: un largo camino por recorrer. Facultad de Educación. Universidad de Antioquia.

SOCAS M, Manuel, et al. Iniciación al Álgebra. Madrid. Editorial Síntesis. 1989

VERGNAUD, Gerard. El niño, las matemáticas y la realidad. Editorial Trillas. Cuarta reimpresión 1997.

VERGNAUD, Gerard. Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds). Nacional Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erbaum associates. 1988.

Vigotsky, Lev S. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Ed. Critica. Barcelona. 1996.

## 9. ANEXOS

# ANEXO 1

# CUADROS DE TRABAJO

| **ASPECTOS GENERALES** | |
|---|---|
| FECHA | |
| TEMA | |
| | |
| | |
| ACTIVIDAD | |
| | |
| | |
| PROPÓSITO | |
| | |
| | |
| | |
| METODOLOGÍA (Descripción) | |
| | |
| | |
| | |
| | |

| | |
|---|---|
| ANÁLISIS | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| DIFICULTADES | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| LOGROS | |
| | |
| | |
| | |
| OBSERVACIONES | |
| | |
| | |
| | |
| CONCEPTOS<br>DEL PROYECTO | |
| | |

| | |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| EVALUACIÓN | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| AUTOEVALUACIÓN | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| CONCLUSIONES | |
| | |
| | |
| | |
| | |

# ANEXO 2
# SITUACIONES DE INDAGACIÓN

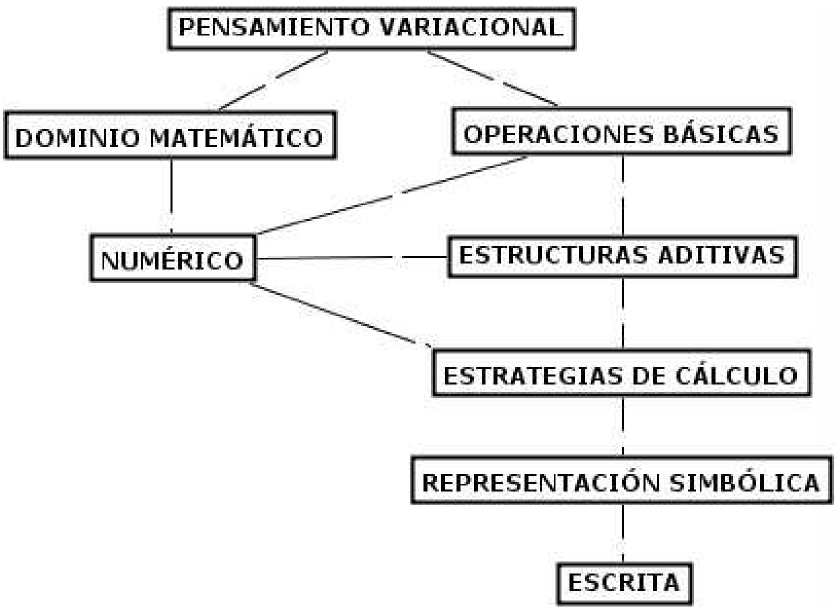
**Grado 2º**

- **Red conceptual**

  En la situación de indagación sobre formulación de problemas se evalúo primordialmente la estructura aditiva (Suma y Resta): en ella los estudiantes debieron realizar cálculos, es decir, dar solución a los problemas, tomando como aspecto relevante las estrategias de cálculo empleadas por los éstos.

  Aunque el pensamiento numérico es el que predomina en esta actividad, éste se encuentra estrechamente relacionado con el pensamiento variacional, dando así la posibilidad de trabajar la comprensión sobre las operaciones y las relaciones que se pueden desarrollar con los números.

  A continuación se presenta el mapa conceptual que ilustra mejor lo descrito anteriormente:



**SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: LA TIENDA DE DON PEDRO**

1. Observa la siguiente ilustración y contesta:

- Menciona 5 productos que vendan en el lugar que acabas de observar.
- A cada uno de los productos mencionados anteriormente asignarle un precio.

2. Según la ilustración que observaste, realiza preguntas referentes a ella.
3. Inventa dos problemas que concuerden con la ilustración. (uno de suma y otro de resta).

**Grado 3º**

- **Red conceptual (**descriptiva**)**

El pensamiento variacional parte de las estructuras aditivas y multiplicativas, pero no se puede olvidar que es a partir de las primeras (aditivas) que se llega a las segundas (multiplicativas), las cuales permiten la iniciación hacia el álgebra en los primeros grados de escolaridad por medio de la manipulación y reordenamiento de expresiones aritméticas.

Así mismo, el otro concepto fundamental en el estudio del álgebra, el concepto de variable, puede ser explorado a partir de las variaciones que se encuentran inmersas en el esquema aditivo y multiplicativo y que se alcanzan a hacer más evidentes por medio de la búsqueda de patrones hallados en secuencias (series) que pueden ser representados tanto desde lo gráfico como desde lo numérico, lo cual permite potenciar en el alumno habilidades como:

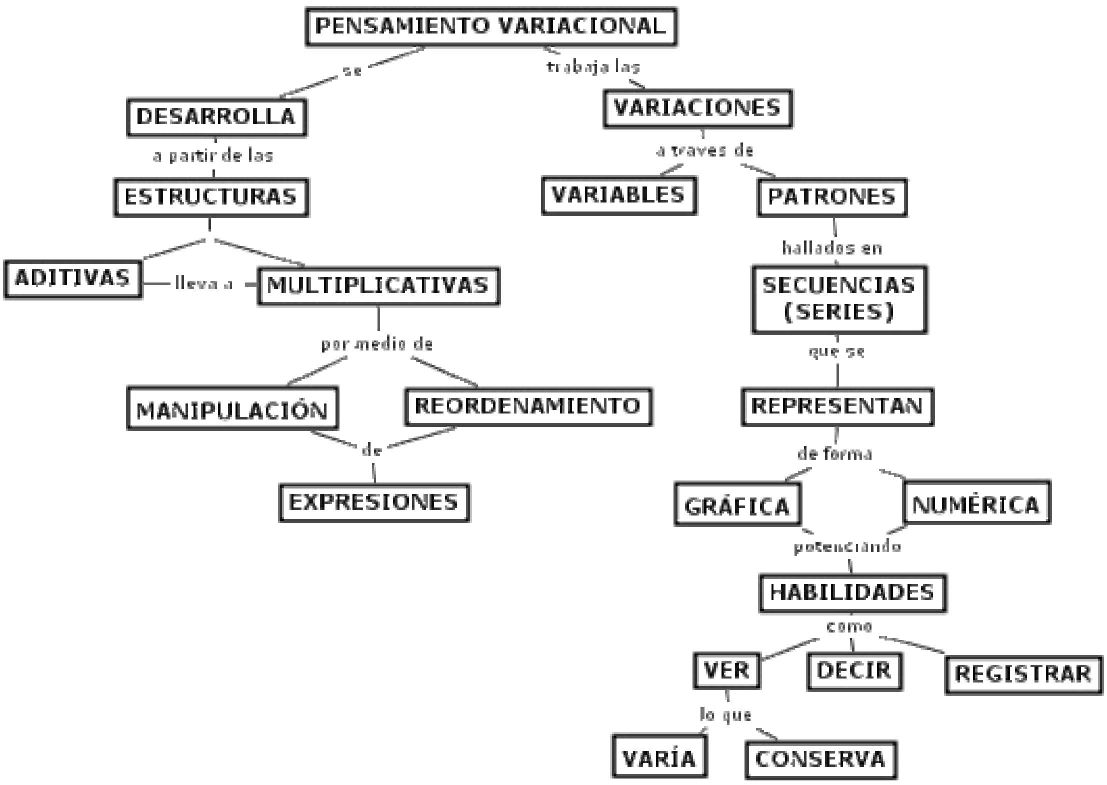
- Ver lo que cambia y lo que se conserva,

- Decir por medio de argumentos propios, como son esas variaciones y sobre todo predecir cual sería el siguiente cambio en una secuencia dada y

- Registrar  lo que se observa, por medio de un lenguaje lógico y universal empleando para ello los signos o algoritmos adecuados para ello.

Todo  lo anterior permite que un alumno se acerque a los procesos de generalización inmersos dentro del estudio y aprendizaje del álgebra.

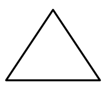
A continuación se presenta el mapa conceptual que se acaba de describir:

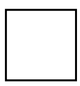


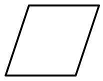

**SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: CARRUSEL MATEMÁTICO**

**BASE No. 1:** ***Conozcamos el tangram.***

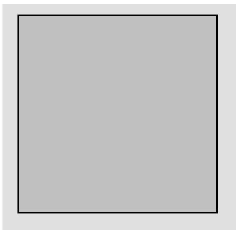
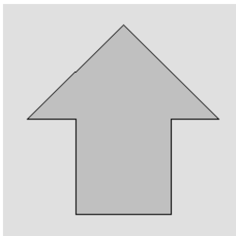
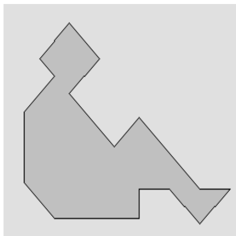
El tangram es un rompecabezas formado por figuras geométricas tales como:

☑ El triángulo 

☑ El cuadrado 

☑ El paralelogramo. 

Ahora intenta formar en el menor tiempo posible las figuras que se te muestran a continuación, para ello coloca sobre la figura grande cada una de las figuras pequeñas hasta que la tapes completamente, recuerda que no te puede sobrar ninguna ficha.

Cuando termines dibuja en tu hoja la forma en como pegaste las figuras pequeñas sobre la grande y recuerda que tienes que hacer figura por figura, es decir, de a una.

Para terminar responde.

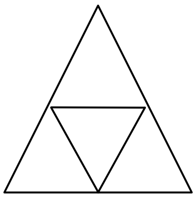
① De las cuatro figuras cual es la más grande?

② Serán todas iguales?

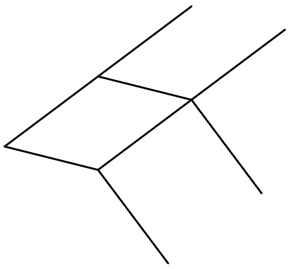
③ Qué estrategia utilizaste para formar cada una de las figuras?

**BASE No. 2:** ***Armemos figuras con palillos.***

☑ Forma el triángulo que se muestra con 6 palillos y agrega 3 más para construir cuatro triángulos dentro de él.



- ☑ Ahora moviendo tres palillos solamente tienes que conseguir que el pez nade en dirección contraria, es decir, que quede mirando hacia el lado contrario.



- ☑ Con doce palillos forma una cruz. Recuerda que debes dibujar tus resultados en tu hoja.

**BASE No. 3:** ***Resolvamos problemas: la Salida al Parque Norte.***

Los estudiantes de tercer grado están organizando una salida al Parque Norte. La lista de precios ofrecidos en la cafetería son los siguientes:

Teniendo en cuenta el costo de los productos que venden en el parque, contesta las siguientes preguntas:


☑ Para saber cuánto cuestan cinco perros y tres gaseosas, ¿qué necesitas saber?

| | Si | No |
|---|---|---|
| El nombre de la cafetería | | |
| Lo que cuestan los perros | | |
| La edad del dueño de la cafetería | | |
| El precio de cada gaseosa | | |
| La plata que llevan para pagar | | |
| El número de asistentes al paseo | | |

☑ Un grupo de niños juntó $15.000 y todos quieren comer lo mismo. Escoge la información que necesitan para saber si les alcanza el dinero. ¿Son suficientes los datos que se proporcionan?

| | Si | No |
|---|---|---|
| La hora del día | | |
| El precio de cada producto que quieren comer | | |
| El valor de la entrada al parque | | |
| El valor total de la compra | | |
| La plata que llevan para pagar | | |
| La cantidad de dinero que aportó cada niño del grupo | | |

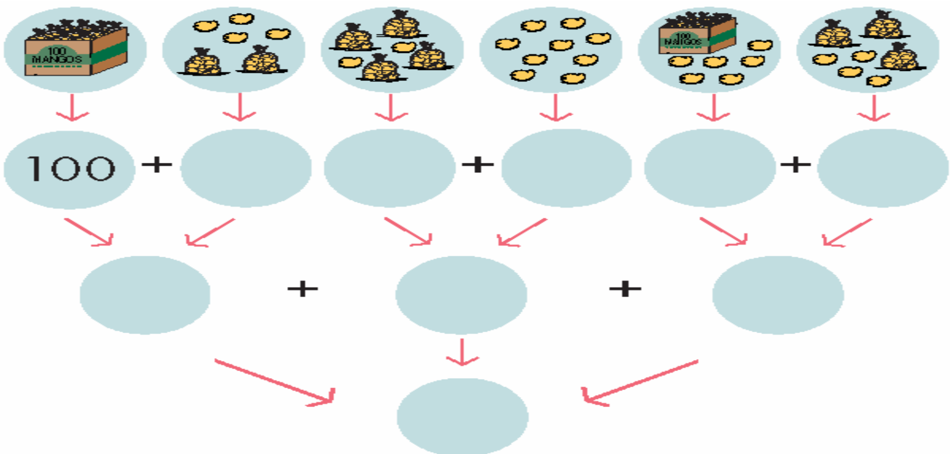
☑ Andrés compró 4 arepas y dos gaseosas para compartir con sus amigos. Elige la cuenta que le sirve para saber cuánto pagó.

**a. 500 + 800 y 1300 × 4**
**b. 500 × 4 y 800 × 2**
**c. 500 × 4 ; 800 + 800 y 2000 + 1600**

¿Existen otras formas para saber cuánto pagó Andrés?

☑ En el parque recreativo había un puesto de venta de mango. Completa la red para encontrar cuántos mangos en total compró el dueño.

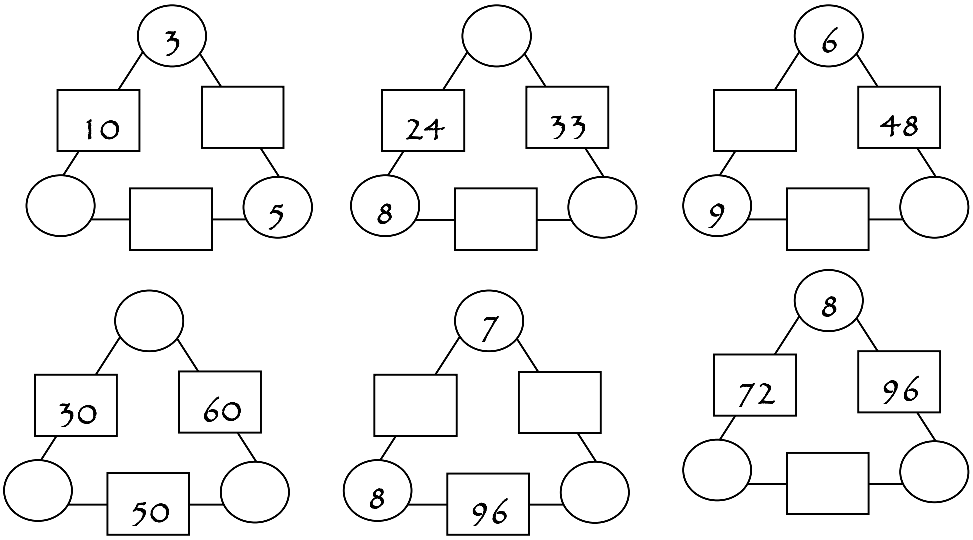
**Nota: La caja contiene 10 bolsas de mangos y cada bolsa contiene 10 mangos**




**BASE No.4:** ***Completemos los triángulos***

☑ Observa los triángulos que se presentan a continuación, y encuentra las relaciones que existen entre los números que están dentro de los círculos y los números que están dentro de los cuadrados

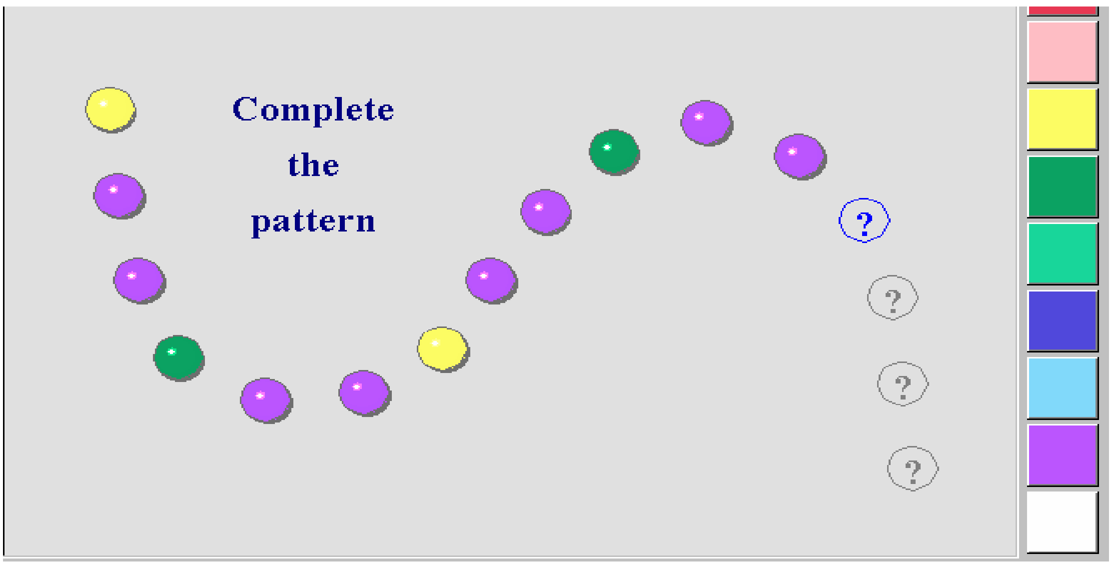
☑ Ahora, de acuerdo con lo observado, completa los siguientes triángulos:




**BASE No. 5:**

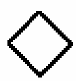
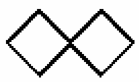
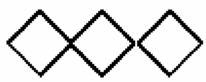
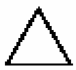
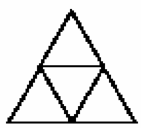
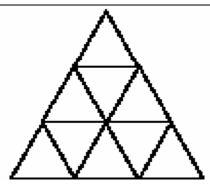
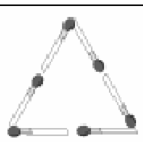
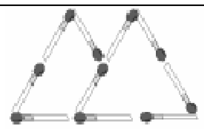
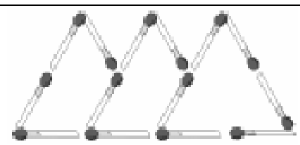
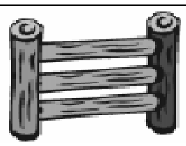
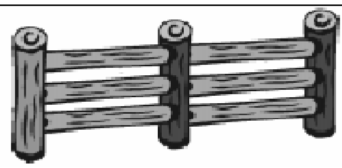
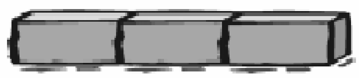
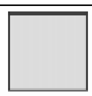
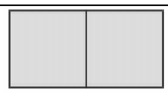
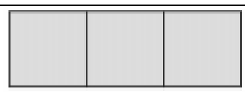
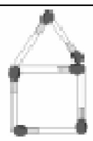
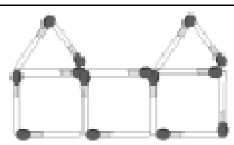
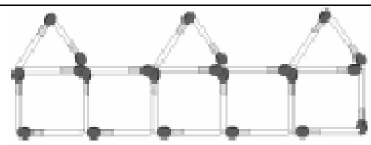
***Construyamos series siguiendo un patrón.***

☑ Observa bien los dibujos que se muestran a continuación y encuentra cual es la figura que sigue en la serie, recuerda tener en cuenta los colores y las formas.



☑ Para completar cada una de las series, coloca la figura o las figuras que hacen falta en ellas.

☑ Ahora observa las siguientes figuras y analiza cómo van cambiando.

| **Posición de la figura** / **Patrón #** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** |  |  |  | **…** | **…** |
| **2** |  |  |  | **…** | **…** |
| **3** |  |  |  | **…** | |
| **4** |  |  |  | | |
| **5** |  |  |  | | |
| **6** |  |  |  | | |
| **7** |  |  |  | | |

☑ Llena la tabla que sigue y en ella coloca la información que hace falta de los cambios de cada figura (patrón)

| Posición de la figura / Patrón # | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1rombo | 2rombos | 3rombos | | | | |
| 2 | 1triángulo | 4triángulos | | | | | |
| 3 | 6 fósforos | 10 fósforos | | | | | |
| 4 | 1 poste | 5 postes | | 13 postes | | | |
| 5 | 1 bloque | | | | 5 bloques | | |
| 6 | 1 líneas en los cuadrados | | 10 líneas en los cuadrados | | | | |
| 7 | 6 fósforos | | | | | 46 fósforos | |

**BASE No. 6:** ***La pista Numérica.***

| |
|---|
| **1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 . . . . . 93 94 95 96 97 98 99 100** |

☑ Cada uno de los integrantes del equipo tiene una tira con los números escritos del 1 al 100

☑ Cada jugador tira un dado e inicia el juego quien obtenga el mayor puntaje.

- ☑ El primer jugador tira los dados, suma los puntos obtenidos y tacha sobre su tira todos los números que sean múltiplos del puntaje obtenido. Luego, juega el otro participante de igual forma (Sobre su tira).

- ☑ El juego termina cuando uno de los participantes no pueda tachar números y gana quien tenga la menor cantidad de números sin tachar  o quien los tache todos.

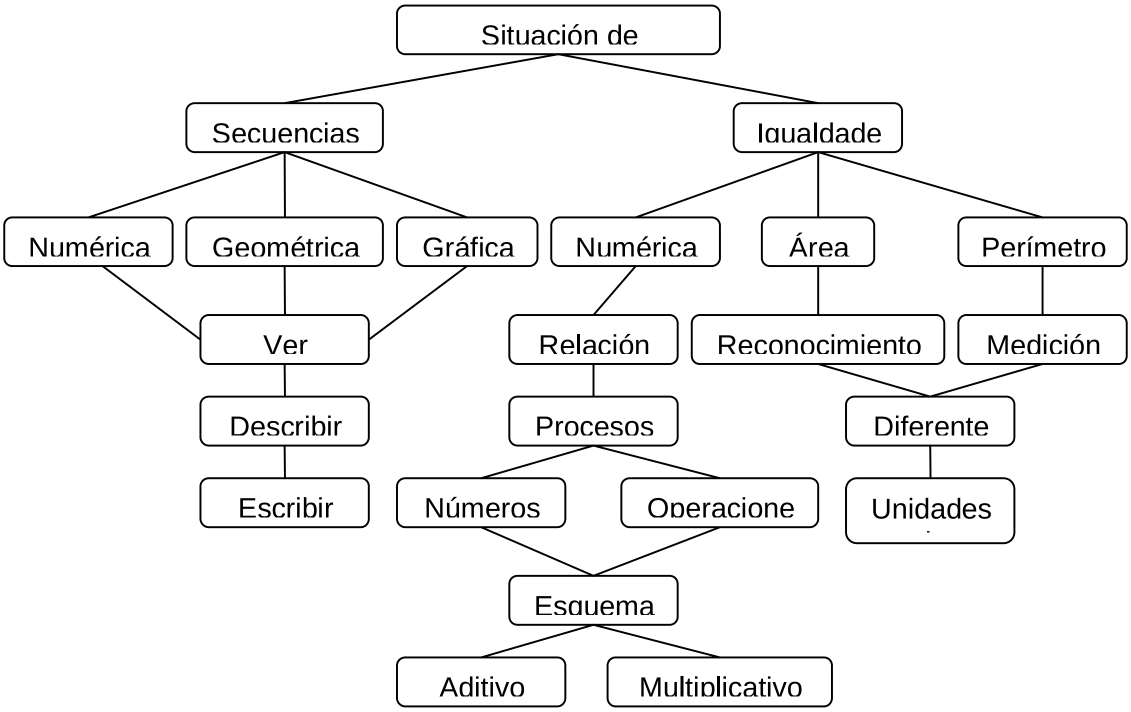
**Grado 4º**

- **Red Conceptual**

  La situación de indagación consta de ocho puntos, con los que se pretendía evaluar los conocimientos previos de los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Javiera Londoño (Sevilla), sede Sofía Ospina de Navarro, en cuanto a la **percepción de secuencias** y la noción de **"posibilidad restringida"** a partir de la completación de igualdades, aspectos que son de gran importancia al construir la noción de variable.

  En el primer aspecto (**percepción de secuencias)** se propusieron secuencias numéricas, graficas y geométricas, en las cuales los estudiantes debían ver, describir y escribir la relación que encontraban en dichas secuencias.

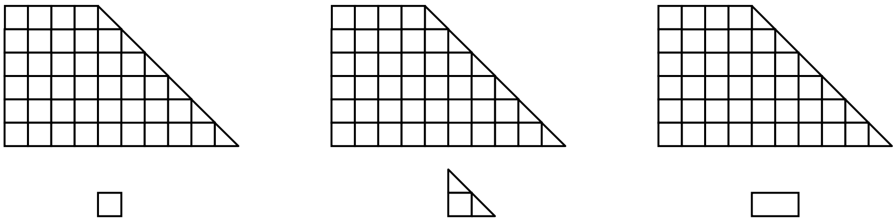
  En el segundo aspecto (**"posibilidad restringida"**), se consideraban preguntas que involucraban igualdades numéricas, donde se relacionaban números y operaciones con el fin de utilizar el signo "igual" para relacionar procesos que conducirán al mismo resultado, en este caso se relacionaban diferentes operaciones con un mismo numero y viceversa, para así, identificar el dominio que tienen con respecto a las estructuras aditivas y multiplicativas. En este mismo aspecto se indago además sobre como hallan y reconocen áreas y perímetros  a partir de diferentes unidades de medida. Los conceptos a desarrollar en la prueba de indagación:




## SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

A continuación se presenta cada pregunta con el porcentaje de estudiantes que respondieron acertada o erróneamente, y al final se realizará un análisis al respecto:

1. Halla el área de las siguientes figuras utilizando las unidades indicadas en la parte inferior como patrón de medida.  Y escribe sobre la línea de cada figura, el valor numérico que representa dicha medición.



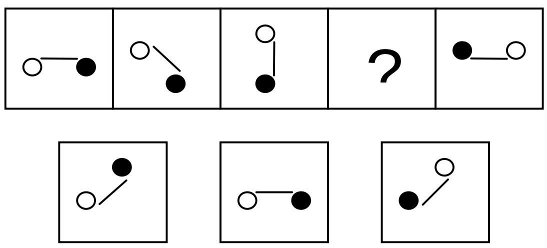
2. Observa la siguiente serie numérica y determina cuál es el número que sigue en la casilla vacía.

1, 3, 4, 7, 11, 18, $\boxed{\phantom{00}}$ , 47, 76, …

¿Cómo crees que se formaron estos números?

¿Encuentras alguna relación entre ellos?

3. Observa la serie, en el signo de interrogación va una figura de las expuestas en la parte inferior (a.), (b.), (c.); elige la figuras que la completa.




a. b. c.

Justifica tu respuesta

4. Escribe el número que falta para completar la igualdad:

36 = $\square$ x $\square$ 

36 = $\square$ + $\square$ + $\square$

36 = $\square$ – $\square$

36 = $\square$ ÷ $\square$

5. Escribe la operación que falta para completar la igualdad:

36 = 28 $\square$ 8

36 = 72 $\square$ 2

36 = 45 $\square$ 9

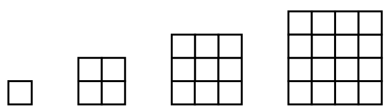
36 = 18 $\square$ 2

6. Completa la siguiente secuencia numérica donde el número siguiente, sea el doble del anterior.

1, ___, ___, 8, ___, ___, 64, ___, …

7. Observa la secuencia y construye el siguiente, luego responde: ¿Qué figuras componen la serie?_____________________.

¿Cuántas de esas figuras hay en cada una? Pon tu respuesta sobre la línea bajo la figura.

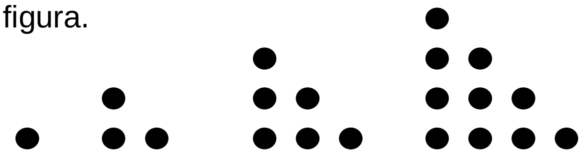


?

___ _____ _____ ______ ______

8. Observa la siguiente secuencia y construye el siguiente, responde: ¿Qué figuras componen la serie?_____________________.

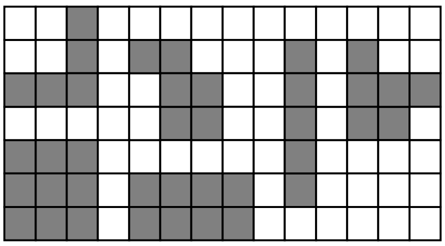
   ¿Cuántas de esas figuras hay en cada una? Pon tu respuesta sobre la línea bajo la figura.



?

___ ____ ____ _____ _____

9. Observa cada una de las figuras de la cuadricula:



   ¿Cuántos cuadrados caben en cada una de las figuras?

   ¿Cuánto mide el contorno de cada figura?

   ¿Qué observas?

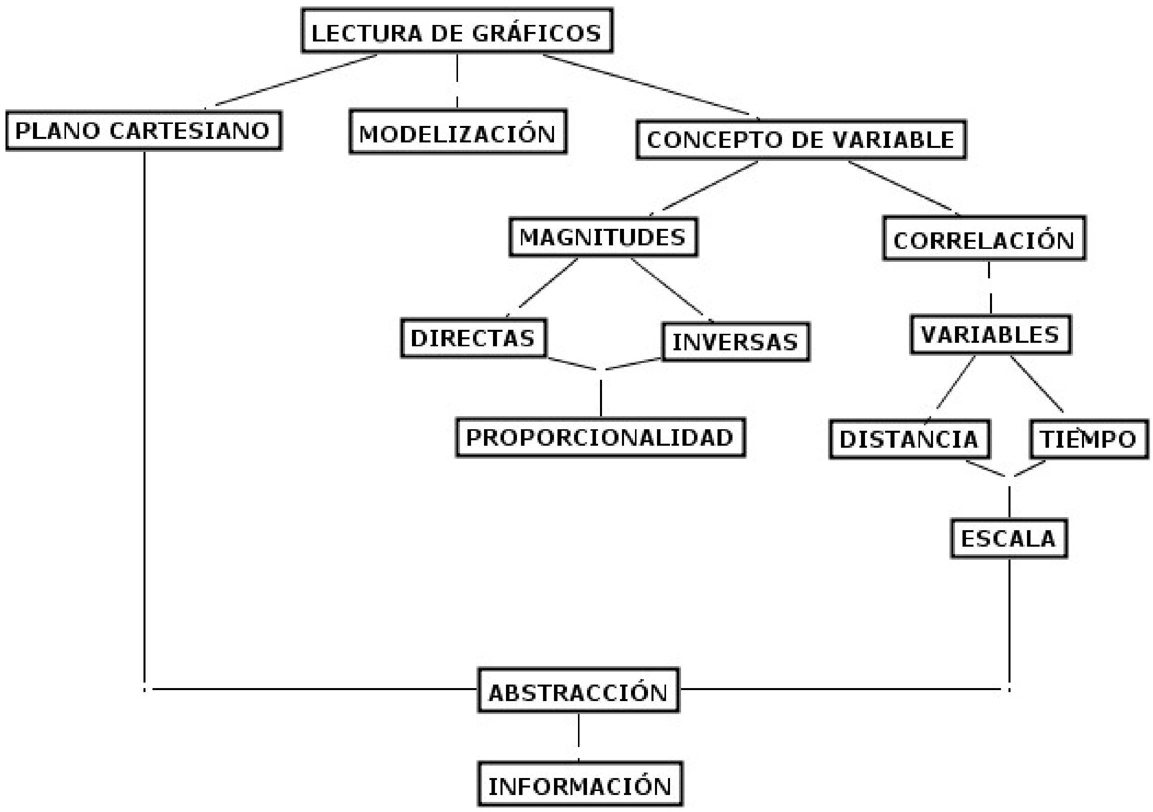
**Grado 9º**

- **Red Conceptual**

  En la situación de indagación se pretendía básicamente que el estudiante leyera y comprendiera una gráfica, con el fin de que formulara un enunciado, lo cual significa que el estudiante modelice situaciones de la cotidianidad, para ello él debe de tener claro como se manipula el plano cartesiano y la ubicación de los puntos en el mismo.

De la misma forma el estudiante debe comprender el concepto de variable, y para ello tener en cuenta que existe una correlación entre magnitudes ya sean estas directas o inversas.

Las variables es otro aspecto importante, que para el caso serían la distancia y el tiempo, de éstas se deben manejar las unidades de medida y la escala en la que se presentan, para finalmente tener una comprensión de lo que se tiene y lograr realizar las formulaciones pedidas.



## DISEÑO DE LA SITUACIÓN DE INDAGACIÓN.

**JUSTIFICACIÓN:**

La actividad está diseñada con el fin de diagnosticar algunos elementos conceptuales que deben de tener los alumnos de grado noveno del Instituto Yermo y Parres; enfocados al Pensamiento Variacional.

La actividad es amena, propicia la discusión y participación en clase de los estudiantes, permitiéndole al docente darse cuenta con que vacíos conceptuales llegaron los alumnos de años anteriores y así desarrollar buenas actividades en pro de trabajar el Pensamiento Variacional.

La situación está diseñada para estudiantes que apenas comienzan el grado noveno de la educación Básica Secundaria, para ser desarrollada en una sesión de clase, es decir en un bloque (un bloque equivale a noventa minutos aproximadamente).

La situación está basada en la lectura e interpretación de una gráfica cartesiana que representa una situación en particular; de la cuál se elabora una serie de preguntas que apunta a ver como el estudiante durante su formación académica a lo largo de su Básica Primaria y parte de la Secundaria a desarrollado en cuanto el Pensamiento Variacional.

- **PROPÓSITO:** Desarrollar con el estudiante de grado noveno la actividad de indagación, con el fin de observar algunos conocimientos básicos que se tienen acerca del trabajo realizado en su formación académica, enfocado al Pensamiento Variacional.

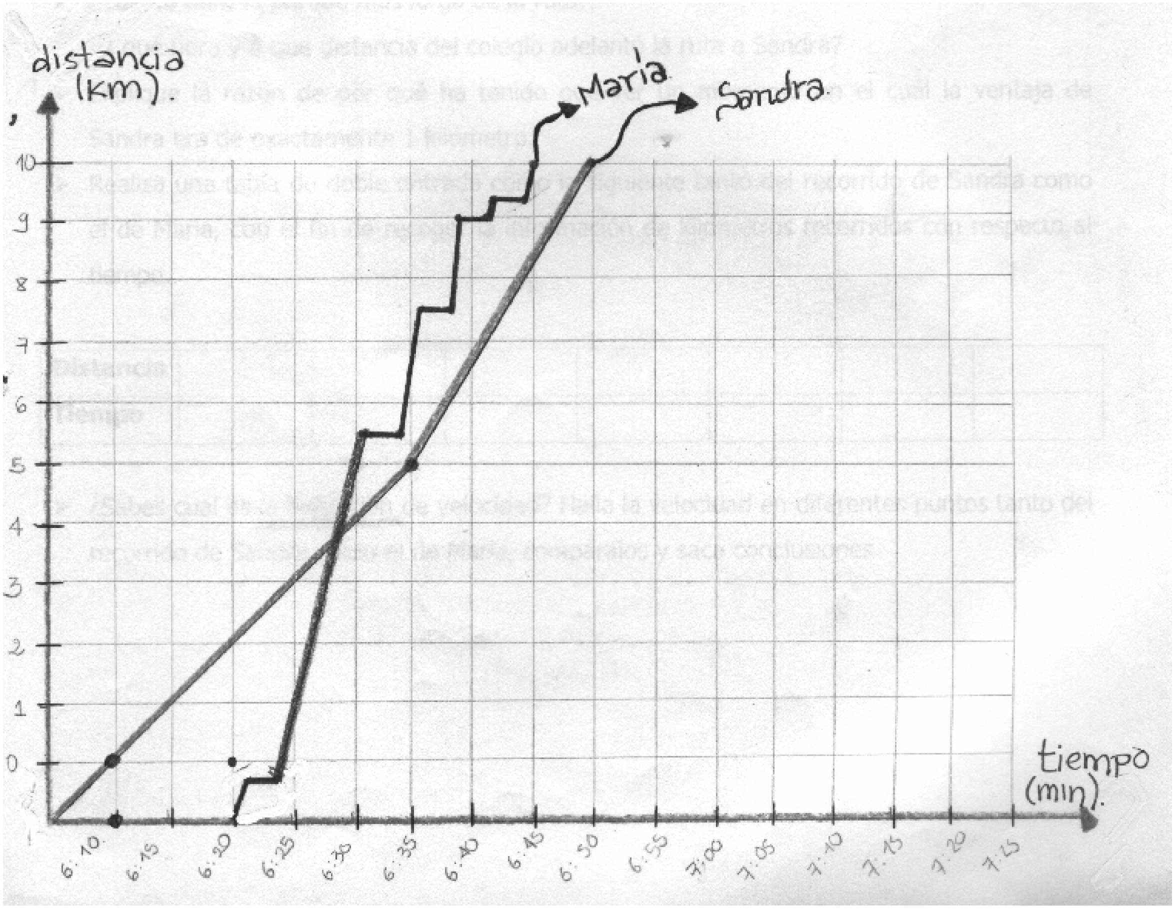
- **METODOLOGIA:** La metodología es de trabajo en parejas, pensando la solución de las preguntas planteadas a la actividad propuesta. El profesor servirá de mediador guiando el trabajo o interviniendo en el caso que lo requiera y observando procesos para poder diagnosticar, con el fin de que se cumpla el propósito ya enunciado.

- **EVALUACIÓN:** La evaluación como parte fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje se hará como seguimiento del desarrollo de la actividad teniendo en cuenta tanto el proceso como los resultados de los problemas propuestos. Básicamente será una evaluación cualitativa.

- **MATERIALES:** Regla, lápiz, cuaderno, borrador y sacapuntas.

**INTERPRETANDO LA SIGUIENTE SITUACIÓN.**

María y Sandra viven en el mismo barrio, y las dos estudian en el mismo colegio, la diferencia es que Sandra se desplaza en bicicleta de la casa al colegio mientras María lo hace en un transporte de un bus que sus padres le pagan. Dicha ruta recoge a María todos los días frente a su casa a las 6:20 a.m, para llegar al colegio a las 6:45. Sandra sale todos los días de su casa hacia el colegio en bicicleta a las 6:10 a.m. La entrada al colegio para ambas es a las 6:55 am.
La siguiente gráfica muestra el recorrido de María y Sandra hacia el colegio:




**PREGUNTAS:**

- ¿Cuántos kilómetros había recorrido Sandra a las 6:25? ¿Cuántos minutos tardó Sandra en la primera mitad del recorrido? ¿Cuántos kilómetros pedaleó entre las 6:20 y las 6:40?
- ¿Cómo puedes saber que Sandra ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos?
- Si Sandra hubiera seguido a la misma velocidad, ¿habría llegado a tiempo al colegio?
- ¿Entre qué horas aproximadamente se logró la mayor velocidad? ¿Cómo lo puedes saber? .
- ¿Iba la ruta por María puntual?

- ¿La ruta del bus ha parado varias veces? ¿Cómo lo puedes ver en la gráfica? ¿Cuántas veces paró?
- ¿Cuánto duró la parada más larga de la ruta?
- ¿A qué hora y a qué distancia del colegio adelantó la ruta a Sandra?
- Explique la razón de por qué ha tenido que ver un momento en el cuál la ventaja de Sandra era de exactamente 1 kilómetro.
- Realiza una tabla de doble entrada como la siguiente tanto del recorrido de Sandra como el de María, con el fin de recoger la información de kilómetros recorridos con respecto al tiempo.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Distancia** | | | | | | | |
| **Tiempo** | | | | | | | |

- ¿Sabes cual es la definición de velocidad? Halla la velocidad en diferentes puntos tanto del recorrido de Sandra como el de María, compáralos y saca conclusiones

# ANEXO 3

## CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS GRADO SEGUNDO

| PRODUCCIÓN TEXTUAL / PENSAMIENTO VARIACIONAL | | ESTRUCTURA ADITIVA | | | ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA | | | PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | FASES | | | | | | | | |
| | | D | I | F | D | I | F | D | I | F |
| COHERENCIA Y COHESIÓN | LOCAL | 51% | 17% | 0% | 0% | 18% | 20% | 0% | 0% | 0% |
| | GLOBAL | 37% | 40% | 0% | 0% | 10% | 40% | 0% | 0% | 0% |
| | LINEAL | 11% | 15% | 0% | 0% | 0% | 40% | 0% | 0% | 0% |

| PENSAMIENTO VARIACIONAL / PRODUCCIÓN TEXTUAL | | | ESTRUCTURA ADITIVA | | | ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA | | | PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | FASES | | | | | | | | |
| | | | D | I | F | D | I | F | D | I | F |
| PRAGMÁTICA | INTENCIÓN | SI | 20% | 40% | 0% | 0% | 0% | 80% | 0% | 0% | 0% |
| | | NO | 80% | 60% | 0% | 0% | 0% | 20% | 0% | 0% | 0% |
| | SUPER ESTRUCTURA | SI | 20% | 34% | 0% | 0% | 0% | 71% | 0% | 0% | 0% |
| | | NO | 80% | 66% | 0% | 0% | 0% | 29% | 0% | 0% | 0% |

## ANEXO 4

## CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS GRADO TERCERO

| PENSAMIENTO VARIACIONAL / PRODUCCIÓN TEXTUAL | | ESTRUCTURA ADITIVA | | | ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA | | | PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | FASES | | | | | | | | |
| | | D | I | F | D | I | F | D | I | F |
| COHERENCIA Y COHESIÓN | LOCAL | 100% | 49% | 27% | 0% | 18% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| | GLOBAL | 0% | 19% | 56% | 0% | 10% | 5% | 0% | 4% | 4% |
| | LINEAL | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 5% | 0% | 0% | 3% |

| PENSAMIENTO VARIACIONAL / PRODUCCIÓN TEXTUAL | | | ESTRUCTURA ADITIVA | | | ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA | | | PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | FASES | | | | | | | | |
| | | | **D** | **I** | **F** | **D** | **I** | **F** | **D** | **I** | **F** |
| **PRAGMÁTICA** | **INTENCIÓN** | SI | 0% | 19% | 52% | 0% | 10% | 10% | 0% | 4% | 7% |
| | | NO | 100% | 49% | 31% | 0% | 18% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| | **SUPER ESTRUCTURA** | SI | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 5% | 0% | 0% | 7% |
| | | NO | 100% | 68% | 83% | 0% | 28% | 5% | 0% | 4% | 0% |

# ANEXO 5

## CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS GRADO CUARTO

| PENSAMIENTO VARIACIONAL / PRODUCCIÓN TEXTUAL | | ESTRUCTURA ADITIVA | | | ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA | | | PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | FASES | | | | | | | | |
| | | D | I | F | D | I | F | D | I | F |
| COHERENCIA Y COHESIÓN | LOCAL | 40% | 6% | 0% | 6% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| | GLOBAL | 28% | 25% | 9% | 0% | 3% | 6% | 0% | 0% | 0% |
| | LINEAL | 26% | 52% | 45% | 0% | 14% | 34% | 0% | 0% | 6% |

| PENSAMIENTO VARIACIONAL / PRODUCCIÓN TEXTUAL | | | ESTRUCTURA ADITIVA | | | ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA | | | PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | FASES | | | | | | | | |
| | | | **D** | **I** | **F** | **D** | **I** | **F** | **D** | **I** | **F** |
| **PRAGMÁTICA** | **INTENCIÓN** | SI | 34% | 71% | 54% | 6% | 17% | 40% | 0% | 0% | 4% |
| | | NO | 60% | 12% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| | **SUPER ESTRUCTURA** | SI | 26% | 52% | 45% | 0% | 14% | 34% | 0% | 0% | 4% |
| | | NO | 68% | 31% | 9% | 6% | 3% | 6% | 0% | 0% | 0% |

# ANEXO 6

## CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS GRADO NOVENO

| PENSAMIENTO VARIACIONAL / PRODUCCIÓN TEXTUAL | | ESTRUCTURA ADITIVA | | | ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA | | | PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | FASES | | | | | | | | |
| | | **D** | **I** | **F** | **D** | **I** | **F** | **D** | **I** | **F** |
| **COHERENCIA Y COHESIÓN** | **LOCAL** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| | **GLOBAL** | 11% | 6% | 0% | 26% | 17% | 0% | 0% | 17% | 6% |
| | **LINEAL** | 34% | 23% | 9% | 29% | 34% | 17% | 0% | 3% | 69% |

| PRODUCCIÓN TEXTUAL / PENSAMIENTO VARIACIONAL | | | ESTRUCTURA ADITIVA | | | ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA | | | PROPORCIONALIDAD Y FUNCIÓN LINEAL | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | FASES | | | | | | | | |
| | | | **D** | **I** | **F** | **D** | **I** | **F** | **D** | **I** | **F** |
| **PRAGMÁTICA** | **INTENCIÓN** | SI | 40% | 29% | 9% | 43% | 51% | 17% | 0% | 20% | 74% |
| | | NO | 6% | 0% | 0% | 11% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| | **SUPER ESTRUCTURA** | SI | 37% | 26% | 9% | 43% | 51% | 34% | 0% | 17% | 74% |
| | | NO | 9% | 3% | 0% | 11% | 0% | 0% | 0% | 3% | 0% |