UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Facultad de Educación

Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso

John Henry Durango Urrego
Autor

Walter Fernando Castro Gordillo
Orientador

Tesis para optar al Título de Doctor en Educación

Línea investigativa en Educación Matemática

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de Educación Avanzada

Doctorado en Educación

Medellín

Marzo

2017

Dedicatoria

A mi eterno padre, *Pancracio*, quien con sus consejos y locuras me enseñaba *las luchas de la vida.*

A mi madre, *María Ruth*, quien en su compromiso materno me ofreció una buena educación, y me enseñó a ofrecer y solicitar argumentos a las personas. A ella que será por siempre *mi compañera fiel.*

A mi hermana, *Erika*, y a mi sobrina *Valentina*, quienes me han ofrecido *suficientes alegrías* en los caminos recorridos.

A mis eternos abuelos maternos, *María de los Ángeles y Ricardo Antonio*, con quienes experimenté el mirar las luces de las claraboyas del techo de su casa, sembrar algunas plantas y exhalar el olor de las flores de su jardín, saborear el dulce de la caña y escuchar sus relatos e historias. A ellos, que me inspiran por siempre a deleitarme *con la belleza de la naturaleza*.

A mis primos y hermanos, *Alberto Urrego* y *Diego Quiroz*, por apoyarme en tantos momentos difíciles.

"Intentar escribir sobre el amor es hacer frente a la suciedad de la lengua: la región de histeria donde el lenguaje es a la vez demasiado y demasiado poco, excesivo y pobre"- Roland Barthes.

Agradecimientos

A mis padres, *Pancracio y María Ruth*, por cualificarme como ser humano entre reminiscencias y vicisitudes.

A mi maestro, el Doctor *Walter Fernando Castro Gordillo*, orientador de tesis, por su dedicación exclusiva a esta investigación. Asimismo, por su humanidad y por su rigor académico en mi formación postgraduada.

A mi maestro, el Doctor *Carlos Mario Jaramillo López*, quien me animó y apoyó de forma continua en el intrincado camino investigativo.

A los Doctores *Leonor Camargo Uribe*, *Eliécer Aldana Bermúdez* y *Lucía Zapata Cardona*, por dar luz verde a las versiones preliminares del proyecto que gestaron esta investigación ante los miembros del Comité de Doctorado de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia).

Al Doctor *Jorge Enrique Fiallo Leal*, por recibirme con amabilidad y compromiso académico en la pasantía doctoral en su Grupo Investigativo en Educación Matemática *(Edumat)* de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga, Colombia) y por aportarme aspectos teóricos y metodológicos diversos para documentar esta investigación.

A las Doctoras *Núria Planas Raig*, de la Universidad Autónoma de Barcelona; a *Leonor Camargo Uribe*, de la Universidad Pedagógica Nacional; y a *Berta Lucila Henao Sierra*, de la

Universidad de Antioquia, por fungir como jurados de la versión definitiva de la tesis, por sus recomendaciones de forma y contenido a la misma y por aprobar su propuesta teórica, metodológica y analítica, así como los resultados.

A mi amigo, *Argiro Velásquez Pérez,* quien durante más de dieciséis años me apoya y brinda su amistad incondicional.

A todos los maestros con quienes he compartido puntos de vista y construido algunos conocimientos durante su formación en la Maestría en Educación (Universidad de Antioquia, Universidad Pontificia Bolivariana y Universidad de Medellín) o en la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Universidad de Antioquia), especialmente a: *Gladys María Rivera, Jaime Antonio Castilla, Luz Helena Caraballo, Emilsen Cardona, Yuber Tapias, Martha Muñoz, Liliana Ríos, María Elena Viana, Mery Flórez, Edwar Macías, Jorge Andrés Toro, Mónica Parra, Deisy Cadavid, Juliana Zapata, Milena Vanegas, Lina Monsalve, Mónica Zapata, Liliana Marulanda, Sebastián Cuartas, Ana María Quintero, Leonardo Zabala, Hernán Restrepo, Jorge Mercado, Janeth Hurtado, Cindy Mendoza, Jorge López, Gustavo López, Marcela Vásquez, Erika Giraldo, Santiago Velásquez y Juan Gabriel Rave*, porque en discusiones con ustedes aprendí cada vez más sobre argumentación en Educación Matemática.

A los seminaristas: *Erika, Marcela, Santiago, Juliana y Alexander*, maestros en formación inicial y participantes del Seminario de Práctica Pedagógica en los semestres: 2014-02, 2015-01 y 2015-02, pertenecientes a la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). Ellos brindaron su experiencia y conocimiento para dotar alma a esta investigación.

A la maestra en formación inicial *Nataly Granda Tobón* por su colaboración permanente en las transcripciones de videograbaciones y audios de los diálogos llevados a cabo por los participantes en los auditorios considerados durante esta investigación.

A los compañeros y maestros del Seminario Permanente del Doctorado en la línea investigativa en Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia), por sus refutaciones de naturaleza teórica y práctica a los puntos de vista y conocimientos preliminares de la documentación de esta investigación, las cuales permitieron que los puntos de vista avanzaran y que los conocimientos se construyesen de manera social.

Al rector *Humberto Bermúdez Cardona* y al coordinador académico *Ramón Oquendo López* de la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño (Medellín, Colombia), por confiar en mi labor como maestro.

A mis colegas, *Alexandra María Giraldo y Fredy Fernández Márquez,* por sus consejos, por escucharme en tantos momentos de angustia y por sus aportes en nuestras conversaciones sobre la complejidad de las relaciones humanas.

A los correctores de estilo, *Carlos Mauricio Toro, Jorge Bañol Gutiérrez* y *Gabriel Rodríguez,* por sus recomendaciones a la redacción de la versión definitiva de esta memoria escrita para que sea más cercana a los lectores.

“Toda verdad atraviesa tres fases: primero, es ridiculizada; segundo, recibe violeta oposición; tercero, es aceptada como algo evidente”- Arthur Schopenhauer.

Tabla de contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Lista de transcripciones

Resumen

Esta investigación se desarrolla en el marco del programa de formación doctoral en la línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). Esta memoria escrita documenta e informa sobre la pregunta de investigación: ¿cómo argumentan, en geometría, los maestros en formación inicial en práctica pedagógica? Para ello, se propone a un Modelo Teórico 'Integral' de Argumentación que incluye el diálogo, recursos retóricos y componentes argumentativos que usaron tres maestros en formación inicial cuando discutieron tareas de geometría tanto con sus colegas en un auditorio de seminario de práctica pedagógica como con sus estudiantes en uno de aula de clase.

El método investigativo corresponde al estudio de caso bajo un enfoque fenomenológico-hermenéutico, mientras que este obedece a las particularidades de las argumentaciones de Carlos, de Helena y de María, participantes de la investigación que se desempeñaron como maestros en formación inicial. Finalmente, mediante el análisis y la interpretación de los datos, se propone un Modelo Teórico Integral de Argumentación que incluya las cualidades lógicas, dialécticas y retóricas, lo cual se logra mediante dos estrategias para conformar las particularidades de la argumentación de los tres participantes: interpretación directa de ejemplos individuales y suma categórica de ejemplos individuales. Los resultados más destacados permiten concluir que los argumentos que usan los tres maestros en formación inicial con sus colegas son, en algunas ocasiones, monológicos; mientras que los que emplean con sus estudiantes son dialógicos. Los

recursos retóricos que utilizan son modelos, ejemplos, ilustraciones y metáforas; y los componentes argumentativos que se destacan en los argumentos de los tres maestros en formación están relacionados con diversas garantías y cualificadores modales. Las garantías solicitadas tanto a sus colegas como a sus estudiantes son, respectivamente, a priori-epistemológicas, epistemológico-institucionales, a priori-epistemológicas y empírico-personales; y los cualificadores modales usados son provisionales o absolutos. Además, las intenciones de sus argumentos son: validar, justificar, refutar, defender explicar o persuadir con puntos de vista o conocimientos geométricos a los participantes de ambos auditorios.

Abstract

This research is conducted in the doctoral program in Mathematics Education, in the School of Education, Universidad de Antioquia (Medellin, Colombia). This doctoral dissertation memoire documents and informs the research question: ¿How argument, in geometry, preservice teachers during the teaching practice? A theoretical 'integral' model for argumentation is proposed in order to answer the question. This model includes dialog, rhetoric resources and argumentative features that were used by the three preservice teachers while discussing geometry tasks with both, colleagues and students. The discussions held with the auditorium of their colleagues took place in the Teaching Seminar, while those held with the auditorium of the students, took place in the classroom.

The research method corresponds to a case study, with a phenomelogical- hermeneutical approach, while it obeys to the argumentation particularities of Carlos, Helena and Maria, who were the preservice teachers who participated in the research. The analysis and the data interpretation, is carried out proposing by argumentative theoretic integral model that accounts for logic, dialectic and rhetoric features, which is achieve by two strategies put into play to investigate the singularities in the participants 'argumentations': direct interpretation of examples and categoric sum up of individual examples. The more outstanding results allow concluding that the arguments used by the preservice teachers with their colleagues are, sometimes, monologic; while those used with their students are dialogic. The rhetoric resources used are models,

examples, illustrations and metaphors; and the argumentative features that outstand in the arguments used by the three preservice teachers are related to diverse warrants and modals qualifiers. The requested warrants, both to their colleagues and to their students, are respectively: a priori-epistemic, epistemic-institutional and a priori-epistemic and empiric-personals; and the modal qualifiers are provisional or absolute. In addition, their arguments' intentions are: validate, justify, refute, defend, explain or persuade with viewpoints o with geometric knowledge to the participants in both auditoriums.

Resumo

Esta pesquisa se desenvolve no âmbito do programa de formação doutoral na linha de Educação Matemática da Universidad de Antioquia, Medellín, Colômbia. Esta memória escrita documenta e informa sobre a pergunta de pesquisa: como argumentam, em geometria, professores em formação inicial em prática pedagógica? Para isso se propõe a um Modelo Teórico 'Integral' de Argumentação que inclui o diálogo, recursos retóricos e componentes argumentativos que usaram três professores em formação inicial quando discutiram tarefas de geometria, tanto com seus colegas em um auditório de seminário de prática pedagógica, como com seus estudantes em sala de aula.

O método de pesquisa corresponde com o estudo de caso sob um enfoque fenomenológico-hermenêutico enquanto que obedece às particularidades dos argumentos de Carlos, Helena e María foram os participantes da pesquisa que se desempenharam como professores em formação inicial. Para análise e interpretação direta de exemplos individuais e soma categórica de exemplos individuais. Os resultados mais destacados permitem concluir que os argumentos que usam os três professores em formação inicial com seus colegas são, em algumas ocasiões, monológicos, enquanto que os que se empregam com os estudantes são dialógicos. Os recursos retóricos que utilizam são modelos, exemplos, ilustrações e metáforas; e os componentes argumentativos, que se destacam nos argumentos dos três professores em formação estão relacionados com diversas garantias e qualificadores modais. As garantias

solicitadas tanto aos seus colegas como aos seus estudantes são, respectivamente, a priori-epistemológicas, epistemológicas-institucionais, a priori-epistemológicas e empíricas-pessoais; e os qualificadores modais usados são provisionais ou absolutos. Além disso, as intenções dos seus argumentos são: validar, justificar, refutar, defender, explicar ou persuadir com pontos de vista ou conhecimentos geométricos aos participantes de ambos auditórios.

Usamos perversamente la razón cuando humillamos la vida, que la dignidad del ser humano es insultada todos los días por los poderosos de nuestro mundo, que la mentira universal ocupó el lugar de las verdades plurales, que el hombre dejó de respetarse a sí mismo cuando perdió el respeto que debía a su semejante. (Saramago, 1998)

Capítulo 1

---

1. Introducción

"Cada vez que enseñes, enseña también a dudar de aquello que enseñas"- José Ortega y Gasset

La argumentación se ha estudiado de forma vasta desde los puntos de vista filosófico (Bermejo, 2006), jurídico (Alexy, 1989; Habermas, 1999), lógico (Toulmin, 2003, 2007), retórico (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006), dialéctico (van Eemeren, Grootendorst y Henkemans, 2006; van Eemeren, Houtlosser y Snoeck-Henkemans, 2007), educativo de las ciencias (Jiménez Aleixandre y Díaz de Bustamante, 2003; Henao y Stipcich, 2008) y educativo de las matemáticas (Battista y Clements, 1995; Balacheff, 1999, 2007; Douek y Scali, 2000; Godino y Recio, 2001; Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Mariotti, 2006; Inglis, 2007; Knipping, 2008; McClain, 2009; Camargo, 2010; Arzarello y Sabena, 2011; Roig, Llinares y Penalva, 2011; Nardi, Biza y Zachariades, 2011; Goizueta y Planas, 2013a, 2013b). Sin embargo, no existe una propuesta teórica integral en Educación Matemática que permita analizar la argumentación por maestros en formación inicial durante su práctica pedagógica en la formación universitaria.

Por otra parte, a pesar del sinnúmero de estudios sobre argumentación desde la lógica a través de la formalización y la deducción, se ha reconocido su importancia en la actividad demostrativa durante la formación de maestros (Camargo, 2010) o en el uso de datos, garantías y conclusiones por maestros en formación inicial (Roig, Llinares y Penalva, 2011), solo por mencionar dos estudios.

La argumentación, y no solo la demostración o actividad demostrativa, es importante en la formación inicial de maestros y de escolares; aunque la demostración privilegia la deducción y la formalización y se usa de forma frecuente para validar enunciados matemáticos, también es cierto que la argumentación permite enmarcar la demostración o la actividad demostrativa en un panorama amplio donde se da prioridad a la comunicación, al diálogo y a la persuasión, y no solo a la validación de enunciados matemáticos.

En los siguientes apartados de este capítulo se presentan la perspectiva teórica y metodológica, la pregunta, los objetivos específicos y alcances investigativos y la estructura de la memoria.

1.1. Perspectiva teórica y metodológica

La perspectiva epistemológica de argumentación se enmarca en las propuestas pragmática de Toulmin y Perelman y dialéctica de van Eemeren. Por tal motivo, esta investigación articula una perspectiva racional y social de la argumentación en la formación inicial de maestros de matemáticas durante la práctica pedagógica. De manera específica, se relacionan las teorías de las propuestas: lógico-pragmática (Toulmin, 2003, 2007), retórica (Perelman, 1997, 2007; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006), dialéctica (van Eemeren et al., 2006; van Eemeren et al., 2007) con otros estudios desarrollados sobre la argumentación en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas tanto en la formación de escolares (McClain, 2009) como en la formación de maestros (Nardi, Biza y Zachariades, 2011).

En el Modelo Teórico Integral propuesto se sugiere la argumentación como un proceso, procedimiento y producto (Habermas, 1999), ya que, respectivamente, se estudian los recursos retóricos de la argumentación que los maestros en formación usan, tales como ejemplos, metáforas, ilustraciones y modelos; los argumentos monológicos y dialógicos; y los componentes argumentativos. Los argumentos se observan en el diálogo mediante indicadores de argumentación (van Eemeren et al., 2006; van Eemeren et al., 2007), los cuales sirven para identificar los componentes argumentativos y los recursos retóricos utilizados por los tres maestros en formación, participantes de la investigación.

De forma específica, se analiza la argumentación en geometría por tres maestros en formación inicial en dos auditorios particulares: un seminario de práctica pedagógica correspondiente a la formación universitaria y otro al aula de clase durante la formación de escolares en educación básica. Además, por argumentación en geometría, se entiende la que se vincula con el aprendizaje y la enseñanza de geometría euclidiana escolar, la cual se relaciona con la geometría natural (I) y la geometría axiomática natural (II)[1] (Houdement y Kuzniak, 2003; Kuzniak, 2008; Kuzniak y Rauscher, 2011). Para el aprendizaje y enseñanza de la geometría se propusieron nueve tareas a los tres maestros en formación inicial, participantes de la investigación. Seis de ellas fueron presentadas y discutidas en el auditorio del seminario de práctica pedagógica y las otras tres, en el auditorio del aula de clase.

La definición de auditorio se construye mediante la propuesta de Perelman (1997, 2007) y de Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006). El auditorio del seminario de práctica pedagógica estuvo conformado por los participantes Carlos, Helena, María, Colega 1, Colega 2[2] y el investigador, el aula de clase, por solo tres maestros en formación: Carlos, Helena, María, y sus estudiantes. Las estrategias de análisis aplicadas a los datos investigativos corresponden con la

[1] Estos paradigmas de enseñanza de la geometría se explicarán en el apartado 5.1.2.
[2] En esta memoria, se usa la mayúscula inicial para hacer referencia a sujetos identificables en la investigación. La Colega 1 y el Colega 2 fueron maestros en formación inicial. Además, se empleará simplemente *colega* para mencionarse a cualquiera de los participantes: Carlos, Helena, María, Colega 1 o Colega 2.

interpretación de ejemplos individuales y con la suma categórica de estos (Stake, 1999). Durante el análisis y la interpretación no se estudió la argumentación de la Colega 1, de la Colega 2, del investigador o de los estudiantes, ya que fueron participantes secundarios.

Al estudiar los datos investigativos, la unidad de análisis se conformó por un segmento locutivo compuesto por preguntas y respuestas que dieron indicios de argumentación; por medio de estas se solicitan y se ofrecen argumentos. Por otro lado, el estudio de caso indagó por las particularidades de las argumentaciones de cada uno de los tres maestros en formación inicial pertenecientes a la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia).

1.2. Pregunta, objetivos específicos y alcances investigativos

La pregunta investigativa que se formuló fue: ¿cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica? A continuación, se presentan las relaciones entre los objetivos y los alcances investigativos.

Un primer alcance investigativo se relaciona con el primer objetivo específico, el cual se orienta hacia la descripción del diálogo, que da cuenta de una cualidad dialéctica en la argumentación, y de los recursos retóricos usados por tres maestros en formación inicial cuando argumentan durante su práctica pedagógica en geometría. De manera especial, en esta investigación se estudió a través de segmentos locutivos en los cuales se consideraron indicadores de argumentación[3]. Además, se pudieron identificar preguntas y respuestas para solicitar y ofrecer argumentos por parte de los maestros en formación inicial. También se consideraron dos tipos de auditorios y cuatro tipos de recursos retóricos que manifiestan cualidades retóricas de la argumentación. El estudio de la solicitud y el ofrecimiento de

[3] En esta investigación se propone el constructo teórico de indicador de argumentación ya que en algunos de los estudios revisados en el capítulo 3, parece como si la argumentación ocurre de manera espontánea en los diálogos.

argumentos a través de preguntas y respuestas, los auditorios y los recursos retóricos considerados ameritan mayor investigación, ya que aquí solo se establecen unas pautas iniciales.

Otro alcance investigativo se relaciona con el segundo objetivo específico, el cual se orienta hacia la identificación de los componentes argumentativos presentes en la argumentación, en geometría, de tres maestros en formación inicial en práctica pedagógica. Cuando se habla de tal identificación se pretenden estudiar los datos, conclusiones, garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores en la argumentación de los tres maestros en la práctica; sin embargo, no se procura agregar otro componente a los que propone el Modelo Argumentativo de Toulmin (2007). De manera especial, en esta investigación se identificaron las garantías (Nardi, Biza y Zachariades, 2011) y los cualificadores modales de la argumentación, enmarcada en la razonabilidad, de los tres maestros. Además, se pudo agregar otro tipo de garantía no reportada en el estudio de Nardi, Biza y Zachariades (2011), que se vincula con el uso de medios. La presente investigación muestra unas pautas para continuar estudios en este sentido; por ejemplo, los indicadores de refutación en el diálogo para la construcción social de conocimiento en auditorios diversos.

Otro alcance investigativo se relaciona con el tercer objetivo específico, el cual se orienta hacia la caracterización de las intenciones de los argumentos usados por tres maestros en formación inicial cuando enseñan geometría; es decir, se caracterizaron no solo argumentos con la intención de validar, sino otras intenciones, tales como: justificar, refutar, defender, explicar o persuadir afirmaciones o puntos de vista. En futuras investigaciones, pueden estudiarse estas intenciones para establecerse relaciones con cualidades retóricas y con tipo de tareas que se usan al argumentar. En esta investigación, las tareas permiten que los participantes de ambos auditorios usen en sus argumentos no solo garantías a priori-epistemológicas, sino también garantías empírico-personales.

El último alcance investigativo se relaciona con el cuarto objetivo específico, el cual se orienta hacia la propuesta de un Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática que emerge del análisis y de la interpretación de la argumentación por maestros en formación inicial durante su práctica. Cuando se habla de integral, no se pretende agotar la teoría sobre argumentación, sino que hace referencia a la inclusión, en el modelo teórico, de algunas cualidades lógicas, retóricas y dialécticas (Bermejo, 2006). Este modelo se propone, de manera emergente, por primera vez en esta investigación y quedará a cargo de futuros investigadores mediante estudios empíricos validar y agregar otros elementos teóricos.

Finalmente, esta investigación tiene algunas limitaciones, ya que se centró en un método de estudio de caso de las particularidades de la argumentación en geometría de tres maestros en formación inicial mediante un enfoque fenomenológico-hermenéutico, por lo cual se propone a futuros investigadores estudiar datos investigativos con el Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática mediante otros métodos y enfoques ya sean empírico-analíticos o crítico-dialécticos (Sánchez, 1998).

1.3. Estructura de la memoria

La presente memoria documenta en ocho capítulos el proceso investigativo realizado.

El capítulo 1, *Introducción*, presenta la perspectiva teórica, la pregunta investigativa, los objetivos específicos, los alcances investigativos y la estructura de la memoria.

El capítulo 2, *Problema investigativo*, trata su planteamiento (preguntas y objetivos) y conclusiones de capítulo.

El capítulo 3, *Revisión de 'algunos' estudios en argumentación en Educación Matemática*, muestra una categorización de los estudios consultados, así: formación inicial de maestros, formación de escolares, y epistemología y lógica. Al finalizar el capítulo, se exponen hallazgos y conclusiones de la revisión.

En el capítulo 4, *Referente teórico*, aparecen los siguientes apartados: introducción del capítulo, Modelo Argumentativo de Toulmin (presentación, críticas y complementos), racionalidad y razonabilidad, argumentos sustantivos y analíticos, componentes argumentativos y conclusiones de capítulo.

El capítulo 5, *Diseño metodológico*, plantea los aspectos sobre el estudio de caso.

El capítulo 6, *Análisis e interpretación de datos investigativos*, explica el estudio de la argumentación de los participantes en los dos auditorios considerados en el diseño metodológico: seminario de práctica pedagógica y aula de clase, mientras que el capítulo 7, *El estudio de caso de las particularidades de la argumentación de tres participantes*, ofrece la respuesta a la pregunta investigativa.

Por último, el capítulo 8, *Conclusiones*, reúne algunas afirmaciones sobre la propuesta emergente del Modelo Teórico Integral, sobre el diseño metodológico, sobre el cumplimiento de los objetivos, y futuro investigativo.

Capítulo 2

2. Problema investigativo

> *De mi niñez recuerdo que:*
>
> *Preguntaba: ¿cómo era posible que, del proceso de incubación de un huevo, naciera un polluelo?, ¿qué enigma había allí?*
> *Palpaba en mis manos las lagartijas que habitaban los muros de mi casa, les quitaba la vida y las descuartizaba, con el fin de ver la estructura de sus cuerpecillos.*
> *Cuestionaba cómo armar el carro de juguete que me había regalado mi padre, el cual había desarmado.*
> *Interactuaba en mis juegos con construcciones diseñadas en alambre, las cuales en aquel entonces tenían gran significado para mí. (Durango, 2010)*

2.1. Planteamiento del problema

En este apartado se exponen dos justificaciones que dan cuenta del planteamiento del problema, una de orden teórico y otra de orden práctico. En primer lugar, la justificación de orden teórico demuestra que en la literatura actual en Educación Matemática falta un referente teórico 'integral' que permita analizar e interpretar la argumentación de maestros en formación inicial durante su práctica pedagógica[4]; es decir, no existe literatura en Educación Matemática que estudie la argumentación del maestro en formación inicial durante su práctica pedagógica enmarcada en la razonabilidad, pero sí abunda literatura en Educación Matemática que estudie la argumentación desde la logicidad o la racionalidad teórica. En segundo lugar, se expone una justificación de orden práctico sobre el escaso acento en la argumentación durante la formación inicial de maestros en la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la

[4] Esta justificación teórica se amplía en el capítulo 3, en el que se presentan evidencias de los estudios consultados.

Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia) y, de forma concreta, en los participantes de esta investigación.

En la justificación de orden teórico se exponen 'algunos' de los estudios que se consultaron sobre argumentación y, de manera específica, aquellos que estudian los componentes argumentativos (Toulmin, 2003, 2007), de los cuales se enfatizan, por ejemplo, las garantías vinculadas con el conocimiento matemático, pero no con conocimientos empíricos tratados y mencionados, de forma directa, en la práctica pedagógica (Nardi, Biza y Zachariades, 2011). También, se exponen, por otro lado, estudios sobre el uso de recursos retóricos en la argumentación, al tratar los ejemplos para persuadir mediante argumentos empíricos (Harel y Sowder, 1998; Ibañes, 2001), pero no sobre otros, tales como la metáfora y el modelo (Perelman, 1997, 2007; Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006); y por otro, los estudios que consideran las intenciones de los argumentos para validar afirmaciones (Harel y Sowder, 1998; Harel y Fuller, 2009; Herbst, 1999; Balacheff, 1999, 2000; Boero, 1999; Hoyles y Küchermann, 2002; Martin y McCrone, 2007; Weiss, Herbst y Chen, 2009; Camargo 2010; Echeverry, Molina, Samper, Perry y Camargo, 2012), pero se encuentran en la literatura escasos estudios que traten otras intenciones, por ejemplo, explicar o persuadir. De igual manera, se suma el hecho de que la argumentación se ha estudiado de forma vasta en escenarios que vinculan la fundamentación teórica en geometría con énfasis en la logicidad, pero no en la práctica pedagógica donde el énfasis se enmarca en la razonabilidad.

Desde un punto de vista teórico, no obstante, en algunos estudios investigativos en Educación Matemática (De Villiers, 1993; Harel y Sowder, 1998; Balacheff, 2000; Ibañes, 2001; McClain, 2009; Crespo, Farfán y Lezama, 2010, Goizueta, 2015) se informa que la argumentación tanto por maestros como por estudiantes en la escuela elemental se aleja de la logicidad y se acerca a la razonabilidad de conocimientos matemáticos; por ejemplo, De Villiers (1993) propone un modelo teórico en el cual la argumentación deductiva sirve no solo como medio para verificar, sino para explicar, sistematizar, descubrir y comunicar conocimientos matemáticos. Por su parte, Harel y Sowder (1998) e Ibañes (2001) plantean que los estudiantes usan esquemas de argumentación diversos que pueden ser externos, analíticos y empíricos. A su vez, Balacheff (2000) propone que los argumentos por estudiantes pueden ser pragmáticos, en los cuales se recurre a la acción, o intelectuales, en los que se acude a conocimientos matemáticos y reglas de la lógica formal. Entretanto, McClain (2009) concluye que la argumentación en el aula de clase puede caracterizarse mediante cuatro fases: argumentos para la defensa, argumentos para el desacuerdo, argumentos para la justificación y argumentos de refinamiento. Asimismo, Crespo et al. (2010) afirman que la argumentación en la enseñanza y en el aprendizaje de la geometría en la escuela adquiere una naturaleza diferente a la mera validez en asocio con la lógica formal; del mismo modo, estas afirmaciones son respaldadas por Goizueta (2015).

Por otra parte, en otros estudios investigativos se informa que no solo los estudiantes tienen dificultades para argumentar (Reiss, Heinze, Kessler, Rudolph-Albert y Renkl, 2007), sino también los maestros en formación inicial (Barkai, Tsamir, Tirosh y Dreyfus, 2002), de ahí que en el proceso de enseñanza y aprendizaje durante la formación inicial de maestros no solo sea importante enfatizar la formación de conocimientos de contenido matemático (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005), sino también conocimientos pedagógicos del contenido matemático (Schulman, 1986, 1987) que el maestro requiere para desempeñar de forma eficiente su trabajo. En este sentido, algunos estudios se han interesado por estudiar la argumentación desde la racionalidad práctica para la enseñanza de la geometría (Herbst y Chazan, 2003;

Miyakawa y Herbst, 2007; y Nardi, Biza y Zachariades, 2011). Sin embargo, estos estudios sobre argumentación no incluyen un Modelo Teórico Integral de Argumentación que permita estudiarla en maestros en formación inicial durante su educación universitaria, en forma directa con su práctica.

Las conclusiones de los estudios reportados arriba hacen suponer que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de maestros en formación inicial en la Licenciatura, la argumentación hace hincapié en aspectos formales y lógico-deductivos de la Geometría Euclidiana, sin considerar el diálogo y los recursos retóricos que usan los maestros al argumentar durante su práctica pedagógica.

Por otro lado, la justificación de orden práctico se refiere a la pertinencia de estudiar la argumentación de los participantes, maestros en formación inicial, debido a que permitirá proponer un 'posible' curso sobre argumentación que contenga elementos teóricos y metodológicos derivados del estudio. Esta investigación será un primer paso para tratar la problemática identificada en la Licenciatura, que no es ajena a otros escenarios de formación inicial de maestros en el ámbito internacional.

De manera específica, desde un punto de vista práctico en el plan de estudios de la formación inicial de maestros en la Licenciatura puede afirmarse que ellos cursan: *Fundamentos de Geometría*, *Profundización en Geometría y Seminario de Didáctica de la Geometría* (Figura 1). En estos cursos, ellos argumentan de forma frecuente en torno al conocimiento geométrico, donde apelan al convencimiento y a la argumentación analítica (Toulmin, 2007) y cuyos productos y usos se vinculan con la lógica formal, especialmente, con la verificación de certeza de enunciados o teoremas.

En un sentido, durante algunos de los seminarios que se vinculan de forma directa con la práctica pedagógica (Figura 1), se observa que en el proceso de formación inicial de los maestros deben tanto argumentar a otros colegas como a sus estudiantes de escuela elemental no solo con base en conocimientos teóricos y empíricos aprendidos en la Licenciatura. Tanto el uso del conocimiento matemático como el convencimiento, la persuasión y la refutación mediante el diálogo entra en escena, es decir, estos usos de la argumentación destacan la interacción social entre maestros en formación inicial y estudiantes de escuela primaria o secundaria.

En otro sentido, los maestros en formación inicial estudian la lógica formal en el curso: *Fundamentos de Lógica* (Figura 1), que hace énfasis sobre la logicidad en la argumentación (Andaluz, 1992), y en silogismos, reglas de inferencias lógico-deductivas, axiomas, teoremas y postulados (Trujillo y Vallejo, 2007). En este curso, la argumentación adquiere una naturaleza justificatoria de conjeturas, o incluso de repetición de demostraciones ya construidas en textos. De tal suerte que los maestros en formación no experimentan otras formas de argumentar fundadas en la razonabilidad (Toulmin, 2003). La argumentación parece esencial solo en los cursos de fundamentación en geometría mediante la validación de certeza de enunciados y teoremas, pero no en la práctica pedagógica, donde maestros en formación inicial al aprender y al enseñar geometría utilizan acciones comunicativas (Habermas, 1999), a través del diálogo para persuadir a sus colegas y estudiantes y no solo mediante la validación de certeza de enunciados geométricos. Por tanto, dada la complejidad de la argumentación en la práctica pedagógica que permite seguir no solo las reglas de deducción, sino también el diálogo y la persuasión, se plantea la pregunta:

¿Cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica?

El objeto investigativo es la argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica; por otra parte, el objetivo general es: analizar cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica, y los objetivos específicos son:

Primer objetivo específico

Describir la función del diálogo y de los recursos retóricos usados por tres maestros en formación inicial cuando argumentan durante su práctica pedagógica en geometría.

Segundo objetivo específico

Identificar los componentes argumentativos presentes en las argumentaciones, en geometría, de tres maestros en formación inicial en práctica pedagógica.

Tercer objetivo específico

Caracterizar la intención de los argumentos usados por tres maestros en formación inicial cuando enseñan geometría.

Cuarto objetivo específico

Proponer un modelo teórico emergente a partir del análisis y de la interpretación de la argumentación de maestros en formación inicial en práctica pedagógica.

2.2. Justificación

El presente apartado tiene como propósitos argüir: la conveniencia y el uso de resultados, el valor teórico y la utilidad metodológica de esta investigación.

En el contexto de la geometría escolar, los maestros en formación inicial presentan y discuten tareas ante colegas y estudiantes mediante la argumentación no deductiva. Estudiar y documentar la argumentación es un interés específico para la Licenciatura, debido a que en esta la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría ocurre mediante la argumentación deductiva de teoremas, pero se cuestiona si esta enseñanza y este aprendizaje faculta a los maestros en formación inicial para enseñar geometría mediante la argumentación. En consecuencia, interesa estudiar la argumentación a través del diálogo en la formación inicial de maestros, ya que pueden explorarse intenciones diversas de los argumentos usados durante la práctica pedagógica.

De la conveniencia y del uso de los resultados de esta investigación, la cual se orienta por un enfoque fenomenológico-hermenéutico, y se fundamenta en un estudio de caso, se espera tanto para la comunidad de maestros formadores matemáticos del país como para las facultades de educación, una documentación sobre las experiencias de argumentación en voces de los tres participantes sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la formación inicial de maestros durante la práctica pedagógica.

Del valor teórico de esta investigación puede afirmarse que el investigador propone un Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática a través del diálogo y de la inclusión de cualidades lógicas, retóricas y dialécticas. Además, de la utilidad metodológica de esta investigación a partir de sus conclusiones se podrían derivar diseños de cursos orientados hacia la argumentación tanto en auditorios pertenecientes a la formación inicial de maestros como en auditorios de aulas de clase en la formación de escolares. Estos diseños pudieran hacer énfasis en indicadores de argumentación en el dialogo, componentes argumentativos, recursos retóricos e intenciones en los argumentos que usen los participantes.

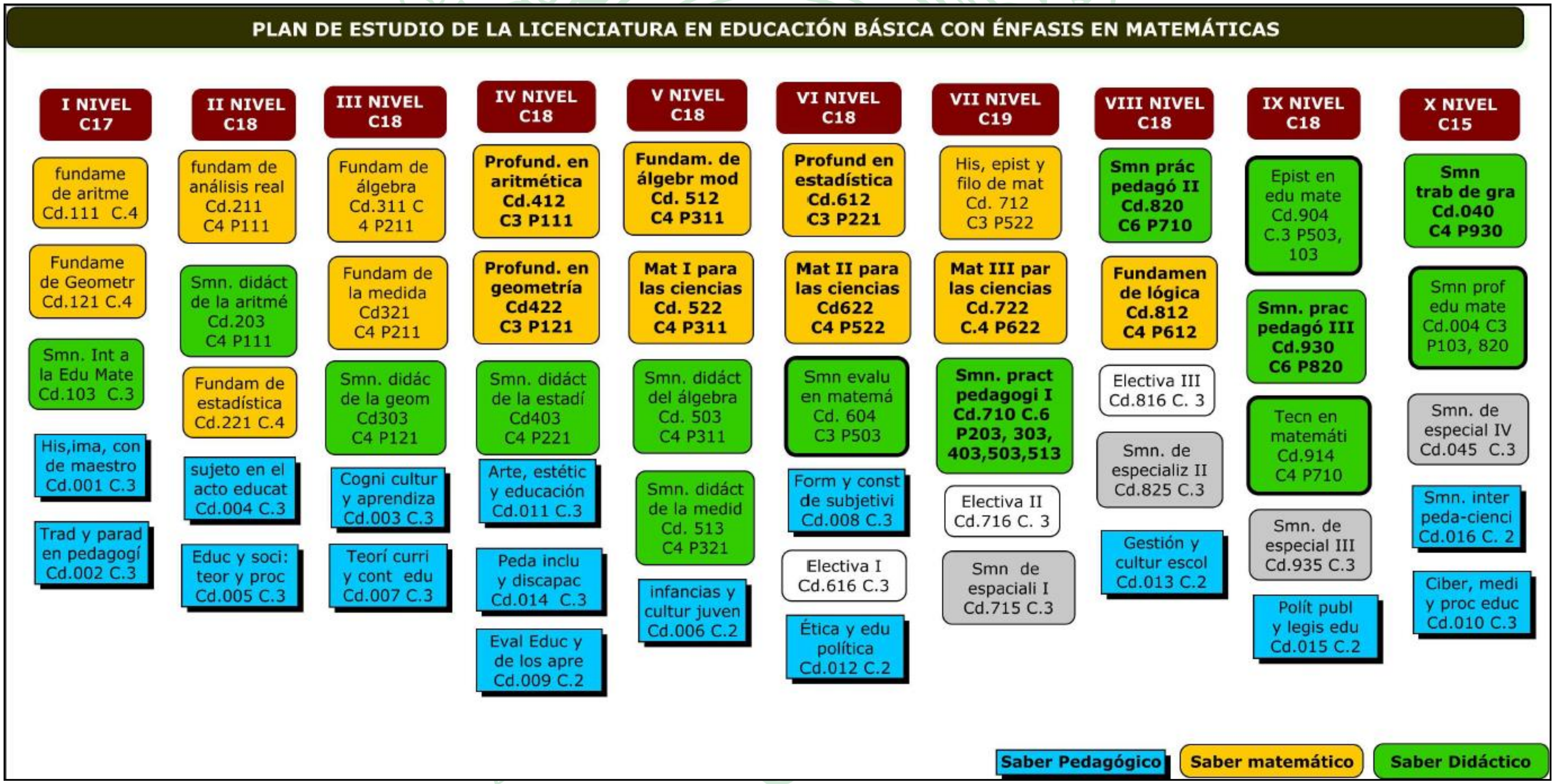


Figura 1: Plan de estudios de la Licenciatura, versión 2.
Fuente: Diseño elaborado por la Facultad de Educación, Universidad de Antioquia (2010)

2.3. Conclusiones de capítulo

En la Tabla 1 se presentan las conclusiones del capítulo 1.

Tabla 1: Planteamiento del problema investigativo.

Título	Pregunta	Objeto	Objetivo (s)	
			General	Específicos
Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso	¿Cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica?	Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica.	Analizar cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica.	Describir la función del diálogo y de los recursos retóricos usados por tres maestros en formación inicial cuando argumentan durante su práctica pedagógica en geometría. Identificar los componentes argumentativos presentes en las argumentaciones, en geometría, de tres maestros en formación inicial en práctica pedagógica. Caracterizar la intención de los argumentos usados por tres maestros en formación inicial cuando enseñan geometría. Proponer un modelo teórico emergente a partir del análisis y de la interpretación de la argumentación de maestros en formación inicial en práctica pedagógica.

Capítulo 3

3. Revisión de 'algunos' estudios sobre argumentación en Educación Matemática: formación inicial de maestros, formación de escolares, su epistemología y su lógica

Con mis ojos percibo:

Ese verde extenso en la montaña. Ese verde campestre en la llanura. Ese verde fuerte y silvestre en la hierba.
Ese azul mágico e infinito en el cielo.
Ese amarillo circular, rey, dueño, doble, juguetón y volátil en el sol.
Ese rojo de cinco pétalos: aromático y fresco en las flores.
Ese naranja en el suelo.
Ese café sustento y soporte en el tallo de los árboles.
Ese blanco imponente, poderoso, cristalino y ruidoso que baja por la cúspide de la montaña.
Esa naturaleza dinámica y colorida de la vida. (Durango, 2011)

Algunos estudios sobre la argumentación en Educación Matemática pueden enmarcarse en las categorías: formación de maestros, cognición, currículo, epistemología y lógica (Mariotti, 2006; Harel y Fuller, 2009; Fiallo, Camargo y Gutiérrez, 2013). De igual manera, estas han sido planteadas por el Duodécimo Congreso Internacional en Educación Matemática (2012)[5]. Harel y Fuller (2009) formulan algunas preguntas sobre el estudio de la argumentación en Educación Matemática, las cuales pueden agruparse siguiendo tales categorías; así por ejemplo, sobre la formación de maestros, pueden mencionarse: ¿cómo enseñar la argumentación?, ¿qué escenarios

[5] El acrónimo que se asocia al nombre de este evento es ICME 12.

de clase con estudiantes propician la argumentación?, ¿qué interacciones pueden establecerse entre estudiantes y maestros?, ¿qué actividades promueven la argumentación?, ¿qué herramientas y medios tecnológicos pueden emplearse para favorecerla?, ¿qué se enseña en la actualidad sobre ésta? y ¿qué deben saber los maestros para su enseñanza y su aprendizaje? Entre las preguntas sobre la cognición: ¿cuáles son las concepciones de los estudiantes sobre la argumentación? y ¿qué dificultades de aprendizaje presentan los estudiantes sobre la argumentación?, Finalmente, en cuanto a las preguntas sobre la epistemología: ¿qué es? y ¿cuáles son sus funciones en la escuela?, y ¿cuáles en la comunidad de matemáticos? Por su parte, Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013) afirman que han surgido algunas corrientes acerca de las concepciones de maestros sobre la argumentación. Sin embargo, en esta investigación se interesa por el cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica. De manera específica, para esta revisión, se consideran estudios sobre la argumentación mediante las siguientes categorías, en su orden: maestros en formación inicial o en ejercicio, formación de escolares, y epistemología y lógica[6]. Para ello, a continuación se exponen los propósitos, la metodología de búsqueda y los hallazgos de la revisión.

3.1. Propósitos de la revisión

Propósito uno

Identificar estudios sobre la argumentación en Educación Matemática en la formación inicial de maestros, o de maestros en ejercicio, en la formación de escolares, en la epistemología y lógica.

[6] Escoger estas categorías para presentar los hallazgos y conclusiones de la revisión de estudios no excluye que puedan ser caracterizados de otras formas. Es posible que los estudios que se reportan en este capítulo compartan características de otras categorías que no están incluidas. Su selección por parte del investigador corresponde al planteamiento del problema investigativo.

Propósito dos

Usar las conclusiones de algunos estudios para analizar e interpretar los datos investigativos recolectados en el trabajo de campo.

3.2. Metodología de búsqueda de estudios

Para la revisión de estudios se consideró la selección del tema, el uso de palabras clave en fuentes de búsqueda por títulos y las unidades de análisis.

El tema seleccionado fue la argumentación tanto en la formación inicial de maestros o en ejercicio, como en la formación de escolares, su epistemología y su lógica en Educación Matemática. De igual forma, se valoraron combinaciones de palabras clave contenidas en el título de los estudios, tales como: argumentación, razonamiento, deducción, demostración, prueba[7], argumentación informal o sustantiva, formación inicial de maestros, formación de escolares, enseñanza y aprendizaje. Además, las unidades de análisis fueron las conclusiones de los estudios consultados.

A continuación, se presentan y comentan de forma sucinta los estudios que se consultaron. Al finalizar este capítulo, en el apartado de hallazgos y de conclusiones se expondrán aquellos estudios que ayudarán en la propuesta del referente teórico y del diseño metodológico.

[7] En la revisión de los estudios se consideró la palabra 'prueba' como sinónimo de argumentación. Esta decisión se apoya en Camargo (2010) cuando afirma que aún no hay consenso en la comunidad de educadores matemáticos sobre el uso de este término. Aunque se encontraron estudios que empleaban esta palabra, en esta revisión se entenderá 'prueba' como una argumentación reconocida y aceptada socialmente en un auditorio particular, sin ser necesariamente una demostración.

3.3. Estudios sobre la argumentación de maestros en formación inicial o en ejercicio

En esta categoría se revisaron algunos estudios sobre el contenido de conocimiento pedagógico y la preparación y el diseño de prácticas de enseñanza con la argumentación (Nardi, Biza y Zachariades, 2011; Roig et al., 2011; Goizueta y Planas, 2013a, 2013b; Camargo, 2010; Perry, Camargo, Molina y Echeverry, 2009; Echeverry, Molina, Samper, Perry y Camargo, 2012; Fernandes y Fonseca, 2004; Douek y Scali, 2000; Martin y McCrone, 2007; y Martin, McCrone, Bower y Dindyal, 2005).

En primer lugar, entre los estudios sobre el conocimiento pedagógico en la formación inicial de maestros o de maestros en ejercicio se reportan: Nardi et al. (2011), Roig et al. (2011), y Goizueta y Planas (2013a, 2013b).

El estudio de Nardi et al. (2011) investiga las garantías que ofrecen maestros a estudiantes durante la enseñanza de algunos conceptos matemáticos. Los autores proponen una clasificación de las garantías (Toulmin, 2007): a priori, pedagógicas, institucionales-curriculares, epistemológico-institucionales, empírico-profesionales, empírico-personales y evaluativas.

Las garantías a priori-epistemológicas se refieren al uso de definiciones o teoremas, mientras que las garantías epistemológico-institucionales se refieren al apoyo de argumentos derivados de la comunidad de matemáticos. Las garantías pedagógicas se refieren a la utilización de principios pedagógicos para el apoyo de argumentos; mientras que en las garantías institucionales-curriculares se utilizan justificaciones pedagógicas apoyadas, por ejemplo, en textos escolares. Además, las garantías empírico-profesionales se usan cuando el maestro recurre a sus experiencias de enseñanza; y las garantías empírico-personales se usan cuando el maestro recurre a sus experiencias personales de aprendizaje. Por último, las garantías evaluativas se usan cuando el maestro acude “a sus puntos de vista como apoyo de sus argumentos ante una opción pedagógica" (Nardi et al., 2011, p. 5). Esta clasificación de las garantías usadas en la argumentación por los maestros relaciona aspectos epistemológicos, pedagógicos y personales.

En el estudio de Roig et al. (2011) se reporta cómo maestros en formación inicial aprenden a analizar la enseñanza de las matemáticas a partir del Modelo Argumentativo de Toulmin (2007)[8]. Este análisis centra su atención en la comunicación como un rasgo característico de la enseñanza de las matemáticas. En este sentido, Roig et al. (2011) formulan dos preguntas: ¿cómo establecen los maestros la relación entre conclusiones y datos? y ¿cómo usan las garantías? En este estudio, la argumentación se entiende como una oportunidad para el aprendizaje en el auditorio del aula de clase. En definitiva, algunas de sus conclusiones fueron: el refinamiento de las garantías para apoyar una conclusión, la discusión sobre cómo establecer una conclusión para su admisibilidad y el cuestionamiento de las conclusiones.

Goizueta y Planas (2013a, 2013b) reportan sobre la argumentación que maestros en formación inicial llevan a cabo durante su práctica pedagógica en la educación secundaria. Estos autores adoptan una definición de estructura argumentativa que se relaciona con las propuestas de Toulmin (2007) y de Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007). En estos estudios de Goizueta y Planas (2013a, 2013b) se concibe un argumento como "una razón o razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición, mientras que la argumentación como el acto de producir razones" (p. 63). Para el análisis de la argumentación, Goizueta y Planas (2013b) usan la dimensión estructural, epistémica y comunicativa. La primera se usa para establecer argumentos completos e incompletos, distinguir cualificadores modales, y explicitar conectivos organizativos. La segunda se refiere a las garantías, a las conclusiones con distintos valores de verdad y a los registros de representación pertinentes y no pertinentes. Por último, la tercera se relaciona con el

[8] El Modelo Argumentativo de Toulmin se presenta en el capítulo 4. Este modelo describe los componentes argumentativos: datos, conclusiones, garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores.

análisis de contenidos matemáticos y extramatemáticos. Goizueta y Planas (2013b) concluyen que, en su mayoría, los maestros desatienden la dimensión epistémica de la argumentación.

En segundo lugar, se reportan algunos estudios sobre la formación inicial de maestros y la argumentación, tales como: Camargo (2010), Perry et al. (2009), Echeverry et al. (2012), y Fernandes y Fonseca (2004).

Camargo (2010) afirma que existen en Colombia pocos estudios que planteen la forma de enseñar a argumentar de manera deductiva durante la formación inicial de maestros, y con efectos positivos en su aprendizaje. En este estudio se propone como constructo teórico la actividad demostrativa mediante un diseño experimental de enseñanza de Geometría Plana en una comunidad de práctica[9] de futuros maestros. Este estudio adopta de forma particular el Modelo Argumentativo de Toulmin para el análisis de la argumentación deductiva.

Camargo (2010) define la actividad demostrativa por medio de la exploración, la conjeturación, la definición, la argumentación, la demostración y la sistematización. La exploración se interesa por la búsqueda de regularidades, propiedades o relaciones entre figuras geométricas. La conjeturación se relaciona con la búsqueda de enunciados geométricos susceptibles de comprobación. La definición se refiere a la formulación de propiedades necesarias y suficientes o al uso de definiciones en la producción de cadenas deductivas dentro de los argumentos. La argumentación se refiere a esgrimir razones o puntos de vista a favor o en contra, de una afirmación con el objeto de informar su plausibilidad o de buscar ideas que conformarán la argumentación deductiva. La demostración se asume como el producto de la argumentación deductiva; por último, la sistematización se vincula con la organización de enunciados ciertos, o que ya se han demostrado. Algunas de las conclusiones de Camargo (2010)

[9] Concepto de la teoría sobre la práctica social de Etienne Wenger. Las comunidades de práctica son grupos sociales constituidos con el fin de desarrollar un conocimiento especializado, que comparten aprendizajes basados en la reflexión de experiencias prácticas.

se expresan en los siguientes términos: la articulación entre la teoría de la práctica social con desarrollos en didáctica de la demostración, las finalidades y la evolución de la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa, y la evaluación de la posible constitución de una comunidad de práctica en el diseño experimental desarrollado.

En otro estudio, ya se había estudiado la demostración en la formación inicial de maestros, mediante la teoría de comunidad de práctica (Perry et al., 2009). Mientras que, en el estudio de Echeverry et al. (2012) se había estudiado el razonamiento deductivo por medio del uso del condicional lógico en la formulación y en la interpretación de teoremas de geometría.

Para concluir, en el estudio de Fernandes y Fonseca (2004) se recomienda el desarrollo de conocimientos y la reconstrucción de concepciones propias en formación inicial de maestros de matemáticas en actividades que se relacionen con la argumentación para cumplir con exigencias curriculares en las escuelas. Al respecto, afirman que

> La formación inicial puede y debe ser una oportunidad para la reflexión, el aprendizaje y el crecimiento personal y profesional de los futuros maestros, mediante el desarrollo de sus conocimientos y la reconstrucción de sus concepciones, pueden llegar a ser más capaces de satisfacer las demandas actuales curricular. (Fernandes y Fonseca, 2004, p. 2, traducción propia)

De igual forma, en este estudio se vincula la argumentación no solo con la validez y la certeza y con fines justificativos, sino con el convencimiento y la persuasión y con fines explicativos que sirvan al maestro tanto para justificar enunciados como para comunicarlos; y de forma especial, para persuadir y convencer a colegas y estudiantes.

En tercer lugar, se reportan los resultados de algunos estudios sobre el diseño de prácticas de enseñanza con estudiantes, tales como Douek y Scali (2000), Martin y McCrone (2007) y Martin, McCrone, Bower y Dindyal (2005).

Douek y Scali (2000) proponen un estudio que se basa en la teoría de campos conceptuales de Vergnaud y en el Modelo Argumentativo de Toulmin con el cual presentan un análisis de sus funciones diversas en la construcción de conceptos matemáticos en la escuela primaria durante la interacción del maestro con sus estudiantes.

Las funciones de la argumentación en la construcción de conceptos se centran en el diseño de actividades matemáticas que se fundamentan en el conocimiento disciplinar, las cuales deben ser sugeridas por el maestro. Este diseño consiste en proponer actividades para la conceptualización mediante argumentos adecuados en las interacciones con los estudiantes, y con gestiones pertinentes para las discusiones en la clase.

Por su parte, Martin y McCrone (2007) definen la argumentación deductiva –demostración– como la convención que los matemáticos usan para establecer la validez de enunciados en un sistema axiomático determinado. En la misma línea teórica, se reportan antes otros resultados, tal es el caso de Martin, McCrone, Bower y Dindyal (2005) en el cual se trata la interacción del maestro, las acciones de los estudiantes en la enseñanza y en el aprendizaje de la argumentación deductiva en Geometría.

Las conclusiones de los estudios que se reportan en la categoría de la argumentación y la formación inicial de maestros o de maestros en ejercicio pueden resumirse así: un estudio se interesa por el análisis de la enseñanza y el desarrollo de competencias pedagógicas con base en el Modelo Argumentativo de Toulmin (Roig et al., 2011); otro se interesa por las dimensiones: estructural, epistémica y comunicativa en la argumentación mediante la teoría de Toulmin (Goizueta y Planas, 2013b); otro propone un tratamiento de enseñanza experimental sobre la actividad demostrativa mediante la teoría de Toulmin para analizar la argumentación deductiva (Camargo, 2010); en otro, el interés se centra en las funciones de la argumentación en la construcción de conceptos, donde el maestro es el mediador (Douek y Scali, 2000); y, por último, existen al menos dos estudios sobre la interacción del maestro y las acciones de los estudiantes en la enseñanza y en el aprendizaje de la argumentación deductiva en Geometría (Martin et al., 2005; Martin y McCrone, 2007).

3.4. Estudios sobre la argumentación en la formación de escolares

En esta categoría, se presentan las conclusiones de algunos estudios sobre el razonamiento y la argumentación de estudiantes; en primer lugar, con el conocimiento matemático; en segundo lugar, con el aprendizaje de la deducción; y en tercer lugar, con la interpretación de los comportamientos argumentativos a partir de tareas (Herbst, 1999, 2007, 2009; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2007; Arzarello y Sabena, 2011; Balacheff, 1999, 2000, 2007; Weiss, Herbst y Chen, 2009; Reiss y Renkl, 2002; Reiss y Heinze, 2007; Reiss, 2007; y Harel y Sowder, 1998; Harel, 2007; Crespo, 2007a, 2007b, Fiallo, 2010).

En primer lugar, entre algunos de los estudios consultados sobre el conocimiento y la argumentación estudiantil que pueden citarse, se destacan: Herbst (2007, 2009), Arzarello et al. (2007), y Arzarello y Sabena (2011).

Herbst (2007), por un lado, estudia la actividad que produce algún tipo de conocimiento público en el auditorio del aula de clase, la función de la argumentación deductiva en el desarrollo de ese conocimiento, y la comprensión de diferentes argumentos que se obtienen. Por otro, Herbst (2009) describe la naturaleza de la argumentación en la clase de matemáticas, y propone que la validez lógica de los argumentos en la escuela se dé mediante la interacción social en el aula.

Por otra parte, Arzarello et al. (2007) estudian la continuidad de la argumentación informal a formal por medio del programa de geometría dinámica Cabri. Asimismo, Arzarello y Sabena (2011) presentan un modelo basado en la teoría de Toulmin para el análisis de la argumentación informal y formal de estudiantes de escuela primaria. Este estudio permite identificar una dialéctica entre ambas, mediante el reconocimiento de acciones semióticas y teóricas en el aprendizaje de los estudiantes (Arzarello y Sabena, 2011).

En segundo lugar, algunas conclusiones de estudios sobre el aprendizaje o dificultades de la argumentación deductiva en estudiantes se encuentran en: Balacheff (2000), Herbst (1999), y Weiss, Herbst y Chen (2009).

Balacheff (2000) estudia la argumentación entre parejas de estudiantes de grado cuarto y quinto de secundaria, para ello emplea una tarea de Geometría sobre las diagonales de polígonos. En este estudio, se reporta la argumentación vinculada con la validación, aspectos lingüísticos y cognitivos involucrados, la interacción social y las dificultades de los estudiantes.

En este sentido, Balacheff (2000) propone una tipología de argumentos[10], clasificados en pragmáticos e intelectuales. Los primeros se apoyan en la acción y la ostensión, mientras que los segundos se separan de la acción para basarse en relaciones y propiedades con carácter deductivo.

En los trabajos de Herbst (1999) y de Weiss et al. (2009) se propone el uso de argumentos a dos columnas en el auditorio del aula de clase. Este tipo de argumentos a dos columnas se define en Herbst (1999), al citar a Sekiguchi (1991), de la siguiente manera:

> Uno traza una línea horizontal y otra vertical desde el punto medio de la primera hacia abajo de tal manera que se forme una letra T, creando así dos columnas bajo la línea horizontal. En la columna de la izquierda, uno escribe una cadena deductiva de enunciados que converjan a la proposición a probar, asignándole un número de orden a cada enunciado. Para cada paso de la deducción, uno debe anotar la razón de la misma en la columna de la derecha bajo el correspondiente número de orden. (pp. 78-79)

[10] Balacheff (2000) entiende la explicación mediante la racionalidad de un sujeto locutor para garantizar la validez de una proposición arraigada en sus conocimientos y sus reglas de decisión de la verdad. Otros tipos de explicaciones son reconocidas y aceptadas por una comunidad, donde se destaca la interacción social, como las pruebas.

En tercer lugar, otros estudios informan sobre los comportamientos racionales de los estudiantes cuando argumentan, estos son: Pedemonte (2002), Reiss y Renkl (2002), Reiss y Heinze (2007), Reiss (2007), Stylianides (2007a, 2007b), Harel y Sowder (1998) y Harel (2007).

Pedemonte (2002) usa el Modelo Argumentativo de Toulmin para analizar razonamientos estudiantiles inductivos, deductivos y conjeturales. Este modelo permitió identificar la continuidad y la desviación en los sistemas de referencia empleados por los estudiantes. Otra conclusión afirma que la funcionalidad de la argumentación en matemáticas radica en la transmisión de conocimientos, de puntos de vista y de valores epistémicos.

Reiss y Renkl (2002) reportan que la argumentación deductiva en el aula desempeña una función sustancial en el currículo de matemáticas. Además, indican que los estudiantes tienen dificultades en su aprendizaje, pero para resolverlas se les propone el uso de ejemplos heurísticos en la resolución de problemas algorítmicos.

Por otra parte, Reiss y Heinze (2007) estudian la competencia demostrativa, su estructura y desarrollo en el aprendizaje de los estudiantes. En este estudio, dicha competencia se define como la capacidad que desarrolla un estudiante para aplicar diferentes formas de razonamiento, plantear argumentos y justificaciones.

Asimismo, Reiss (2007) propone cuatro categorías para los argumentos usados por los estudiantes en la actividad demostrativa. La primera trata los argumentos empíricos mediante el uso de casos particulares; la segunda, trata los argumentos circulares relacionados con el uso de la misma conclusión entre los datos; la tercera, trata los argumentos analíticos –formales– como una secuencia deductiva de argumentos, donde se recurre a teoremas o axiomas, enlazados mediante reglas de inferencia lógico-formales; y la cuarta, trata los argumentos narrativos en los que predominan las explicaciones; y se construyen sin aplicar de forma necesaria reglas de inferencia lógico-formales.

En otro estudio, Heinze y Reiss (2009) exponen que la competencia argumentativa de los participantes es baja; también, que para ellos se facilita comunicar argumentos, aunque presentan dificultades cuando unen varios. Heinze y Reiss (2009) concluyen que los participantes pueden manifestar dificultad al argumentar si no se asume una enseñanza longitudinal a lo largo de su formación escolar; con ese fin, plantean una pregunta abierta: ¿cómo mejorar la competencia argumentativa durante los años de escolaridad?

Por su parte, Stylianides (2007a, 2007b) propone cuatro características para cualquier argumento construido por estudiantes en el contexto de la escuela primaria, tales características son: la fundación, la formulación, la representación y la dimensión social. Stylianides (2007a) se interesa por prácticas de enseñanza enfocadas en la argumentación y por las maneras en que las trayectorias de prácticas exitosas apoyan el aprendizaje de los estudiantes.

Desde un punto de vista teórico y práctico, Stylianides (2007a) considera que para argumentar en la escuela debe recurrirse al principio de honestidad intelectual, que se asocia con la bondad argumentativa de quienes argumentan y al principio de continuidad, que se asocia con la evolución de la competencia argumentativa de los estudiantes.

Los estudios de Harel y Sowder (1998) y Harel (2007) sostienen que las preguntas formuladas en su programa investigativo responden a los esquemas de argumentación[11] asociados con la subjetividad, el convencimiento y la persuasión; en los que se consideran seis factores, a saber: matemático, histórico, epistemológico, cognitivo, instruccional y sociocultural.

[11] Harel toma distancia de Balacheff en su perspectiva teórica sobre los esquemas de argumentación al definirlos como aquello afirmativo y persuasivo para una persona, sin considerar el dominio disciplinar o conceptual (Balacheff, 2000). Harel y Sowder llaman ‘prueba’ al proceso empleado por un individuo para suprimir o apartar dudas sobre la verdad de una conjetura. (Godino y Recio, 2001, p. 411)

Los esquemas de argumentación se basan, en primer lugar, en convicciones y persuasiones externas, tales como: rituales, autoritarios y simbólicos; en segundo lugar, en esquemas empíricos: inductivos y perceptuales; en tercer lugar, en esquemas analíticos: transformacionales y axiomáticos (Harel y Sowder, 1998; Godino y Recio, 2001). Estos esquemas (Harel y Sowder, 1998) han sido ampliados por Ibañes (2001).

Blanton y Stylianou (2007) y Blanton, Stylianou y David (2009) se enfocan en una perspectiva sociocultural para estudiar la argumentación. Estos estudios profundizan en la comprensión del lenguaje y en las culturas de los estudiantes que asisten a una clase de matemáticas. Ellos destacan el aspecto social de la argumentación en el aula de clase, el discurso como lente para su comprensión y la zona del desarrollo próximo como apoyo al trabajo docente.

Los estudios de Ellis (2007a; 2007b) reconocen las culturas de los estudiantes que asisten al auditorio del aula de clase. En estos se considera la argumentación como una actividad relacionada con la interacción social y con los procesos culturales, donde el maestro debe trascender la cultura demostrativa formal de los matemáticos.

Por su parte, Fiallo (2010) diseña, experimenta y evalúa una unidad de enseñanza en un entorno de geometría dinámica, enfocada hacia el desarrollo de habilidades demostrativas. En el diseño de esta unidad, se usan las fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, y se promueven las funciones de la demostración (De Villiers, 1993). Además, usa el Modelo Argumentativo de Toulmin para esquematizar las demostraciones de los estudiantes de un curso de décimo grado en trigonometría, en el contexto escolar colombiano.

En síntesis, los estudios presentados bajo esta categoría (sobre la argumentación en la formación de escolares) pueden agruparse así: unos estudios documentan la argumentación matemática y las relaciones con la producción de conocimiento en el auditorio del aula de clase

(Herbst, 2007); otros se interesan por las acciones semióticas y los controles teóricos cuando los estudiantes argumentan en el auditorio del aula de clase (Herbst, 1999; Arzarello et al., 2007, Arzarello y Sabena 2011); otros relacionan la argumentación con la validación de enunciados matemáticos (Balacheff, 1999, 2000, 2007; Reiss, 2007; Harel y Sowder, 1998; Harel, 2007, Ibañes, 2001); otros proponen en la argumentación el uso de ejemplos heurísticos (Reiss y Renkl, 2002) y otros estudios tratan la competencia demostrativa (Reiss y Heinze, 2007; Reiss, 2007; Heinze y Reiss, 2009).

3.5. Estudios sobre la argumentación: su epistemología y su lógica

En esta categoría, se presentan algunos estudios sobre la argumentación a partir de su epistemología y su lógica. En relación con la epistemología, se encontraron usos diversos otorgados a la argumentación; en cuanto a la lógica, se encontraron algunos estudios que analizan la argumentación desde la lógica formal o la lógica sustantiva (De Villiers, 1993; Boero, 1999, 2007; Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Inglis, 2007; Crespo, 2007a, 2007b; Knipping, 2008; Crespo et al., 2010; McClain, 2009; Goizueta, 2015).

En una perspectiva epistemológica, por una parte, De Villiers (1993) considera la argumentación mediante usos diversos en Educación Matemática. Ha propuesto que estos usos no solo se limiten a verificar la certeza de enunciados matemáticos, sino también a: explicar la certeza de un enunciado, sistematizar la organización de resultados dentro de una teoría axiomática, descubrir y plantear conjeturas, y comunicar el conocimiento matemático, por ejemplo, entre maestro y estudiantes; es decir, estos usos enmarcan la argumentación en contextos socioculturales. Además, De Villiers (1993) considera que la argumentación formal no facilita el descubrimiento de enunciados matemáticos en escenarios educativos.

Por otra parte, la pregunta que fundamenta el estudio de Goizueta (2015) es: ¿cómo se construye la validez de la producción matemática cuando se resuelven problemas en aulas de matemáticas? Cuya conclusión es que los estudiantes usan conocimientos matemáticos, referencias extra-matemáticas y distintos tipos de argumentos en sus conversaciones. Otra conclusión se refiere a la función que ejerce el maestro como autoridad matemática en la clase para los estudiantes. Estas dos conclusiones evidencian la complejidad epistemológica de la argumentación en el auditorio del aula de clase entre el maestro y sus estudiantes.

Bajo los estudios alineados con una perspectiva lógica se destacan: Battista y Clements (1995), Hoyles y Küchermann (2002), Boero (1999; 2007), Inglis y Mejía-Ramos (2005), Crespo (2007a, 2007b), Knipping (2008), Crespo et al. (2010) y McClain (2009).

Sobre la pertinencia de la argumentación analítica[12] en la formación matemática de estudiantes escolares en educación secundaria, Battista y Clements (1995) afirman que debe evitarse en el currículo escolar durante los primeros años de la educación secundaria e ir motivando su necesidad a partir del uso de argumentos visuales y empíricos.

Hoyles y Küchermann (2002) estudian la argumentación analítica mediante la implicación lógica manifestada por estudiantes, *si P entonces Q*[13], su recíproco: *si Q entonces P*[14]; además, estudian la regla de inferencia: *Modus Ponendo Ponens*[15] y los significados conferidos por ellos. Estos autores concluyen que las explicaciones escritas de los estudiantes se limitan a ofrecer argumentos empíricos, y en algunos casos no distinguen el antecedente del consecuente; es decir, lo anterior conlleva a cuestionar el valor del uso de la lógica formal como

[12] La argumentación analítica se entiende como demostración.
[13] De forma simbólica: $P \rightarrow Q$.
[14] De forma simbólica: $Q \rightarrow P$.
[15] De forma simbólica: $[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$.

modelo para el estudio de la deducción de las matemáticas en la educación secundaria, aunque los autores sugieren que en la escuela se apoye su enseñanza y su aprendizaje.

Al estudiar el comportamiento racional en la argumentación estudiantil, Boero (2007) relaciona las teorías de Vygotsky y Habermas. Por ello, centra su estudio entre las racionalidades de otros campos de la experiencia en la cultura humana con la de las matemáticas, relaciones que asumen otras racionalidades diferentes a la logicidad de la matemática como teoría acabada. Además, en este estudio se propone la influencia del contexto sociocultural en la construcción del conocimiento matemático mediante la comunicación.

A través de la teoría de la acción comunicativa (Habermas, 1999), Boero (2007) investiga la relación entre conjeturas y razonamientos analíticos en la actividad matemática de estudiantes. Además, articula tal relación con algunas fases en la producción de teoremas, las cuales son: producción de una conjetura, formulación del enunciado de acuerdo con convenciones compartidas culturalmente, exploración del contenido de la conjetura, selección y vínculo coherente de argumentos teóricos con una cadena deductiva, organización de una secuencia de argumentos y aproximación a la argumentación analítica –demostración–. Boero (2007) estudia el progreso de los estudiantes hacia la argumentación deductiva en el aula mediante la continuidad entre los argumentos para plantear conjeturas y sus respectivas demostraciones, para validarlas de forma matemática.

Por otro lado, Inglis y Mejía-Ramos (2005) indagan la argumentación en relación con la lógica sustantiva (lógica informal). Ellos proponen procesos de evaluación de argumentos a partir del Modelo Argumentativo de Toulmin con el fin de estimar la convicción de los estudiantes. Igualmente, sostienen que los participantes de este estudio construyen argumentos con conclusiones no absolutas y que sus convicciones se fundamentan en el uso de cualificadores modales relativos.

Inglis y Mejía-Ramos (2005) e Inglis (2007) proponen cuatro tipos de análisis a partir de los componentes argumentativos según el Modelo Argumentativo de Toulmin:

El tipo uno, sobre el nivel de convicción del sujeto en la conclusión de un argumento. El tipo dos, sobre la consideración de datos, conclusiones, garantías, soportes y refutadores, y decisión por el tipo de cualificador modal pertinente para completar el argumento. El tipo tres, sobre la pertinencia del enlace entre la garantía y el cualificador modal por parte de quien argumenta. El tipo cuatro, sobre la admisibilidad del argumento en un contexto determinado.

Entre algunos de los estudios que se interesan por la argumentación desprovistas de la lógica formal pueden consultarse: Crespo (2007a, 2007b), Crespo et al. (2010) y Knipping (2008). Estos estudios concluyen que no solo se manifiesta la argumentación deductiva en el auditorio del aula de clase sino otras maneras. Para estos autores, la demostración no está restringida a la argumentación deductiva, que es característica en la comunidad matemática. Algunas de estas afirmaciones son apoyadas por Knipping (2008), quien usa el Modelo Argumentativo de Toulmin para proponer que la argumentación en el auditorio del aula de clase se fundamenta en una racionalidad particular.

En la misma línea argumentativa, Knipping (2008) afirma que la argumentación en las matemáticas sigue una lógica particular y que los argumentos analíticos según la propuesta de Toulmin favorecen una comprensión alternativa de ella en el aula. Por último, destaca que los maestros deben asumir cierta complejidad al involucrar a sus estudiantes en el aprendizaje bajo esta forma de argumentación.

En otra línea argumentativa, McClain (2009) emplea el Modelo Argumentativo de Toulmin para el análisis de la argumentación de escolares. Él está interesado por la evolución, a lo largo del tiempo, de la argumentación de estudiantes. En los argumentos analizados se explicitan los siguientes niveles de sofisticación: argumentos para la defensa, para el desacuerdo, para la justificación y para el refinamiento. En estos niveles se privilegian la comunicación y la refutación (Reid, Knipping y Crosby, 2011).

Para concluir las afirmaciones expuestas en esta última categoría, los estudios consultados refieren los usos de la argumentación en Educación Matemática (De Villiers, 1993; Boero, 2007, McClain, 2009), la importancia de la argumentación analítico-formal en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas en el auditorio del aula de clase y en el desarrollo a lo largo del currículo escolar, y en el estudio de la argumentación a partir de la lógica sustantiva (informal). La lógica sustantiva se asume con la razonabilidad y no con la logicidad, propia de las matemáticas (Boero, 1999; Crespo, 2007a, 2007b; Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Crespo et al., 2010). De esta categoría, se concluye que la argumentación en Educación Matemática no se restringe solo a la justificación y a la verificación de enunciados matemáticos.

3.6. Hallazgos

Un primer hallazgo consiste en que la mayoría de estudios que se presentan en esta revisión usan el Modelo Argumentativo de Toulmin para definir o analizar la argumentación (Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Knipping, 2008; McClain, 2009; Inglis 2007; Battista y Clements, 1995; Mariotti, 2006; Goizueta y Planas, 2013a, 2013b; Arzarello y Sabena, 2011; Balacheff, 1999, 2007; Godino y Recio, 2001; Roig et al., 2011; Camargo, 2010; Douek y Scali, 2000). Algunos documentan el uso de los componentes argumentativos: datos, conclusiones, garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores (Inglis y Mejía-Ramos 2005; Nardi et al., 2011;

Goizueta y Planas, 2013a). Otros confirman el Modelo Argumentativo de Toulmin como facilitador del análisis de la continuidad entre la argumentación y la demostración durante el proceso formativo a través del currículo escolar (Balacheff, 1999, 2007; Pedemonte, 2002; Fiallo, 2010). Y otros usan dicha perspectiva teórica para el análisis de la argumentación tanto en formación de estudiantes como en formación inicial de maestros (Knipping, 2008; McClain, 2009; Inglis 2007; Battista y Clements, 1995; Mariotti, 2006; Camargo, 2010; Arzarello y Sabena, 2011; Roig et al., 2011; Goizueta y Planas, 2013b; Douek y Scali, 2000; Godino y Recio, 2001).

Un segundo hallazgo refiere que algunos estudios afirman que la argumentación analítica no es apropiada para la enseñanza de las matemáticas en los inicios de la escuela. En sus conclusiones, se comenta el uso de argumentos sustantivos (empíricos, prágmaticos, entre otros) por parte de los estudiantes. Estos usos de la argumentación enriquecen el ofrecimiento y la solicitud de argumentos en contextos socioculturales, de forma concreta en la enseñanza y en el aprendizaje de la geometría en la formación inicial de maestros. Es común que durante la formación inicial de maestros se de preferencia a la práctica de la argumentación analítica, por encima de otros usos prácticos, que privilegian la validación y la verificación de la certeza de enunciados. Estas conclusiones admiten investigación, porque durante la formación inicial de maestros en matemáticas en la Licenciatura suele privilegiarse la enseñanza de conocimientos formales de las matemáticas. El formalismo pone en desventaja al maestro en formación cuando lleva a cabo su práctica pedagógica, dado que la argumentación en el auditorio del aula de clase recurre a otros recursos diferentes.

Un tercer hallazgo radica en que un análisis de la argumentación no solo debe considerar sus cualidades lógicas sino tambien sus cualidades retóricas y dialécticas que se vinculan con la comunicación de forma directa. La consideración de otras cualidades de la argumentación favorece un análisis integral (Bermejo, 2006), como se plantea en el capítulo 2.

Por último, de la revisión de estos estudios puede afirmarse que en algunas investigaciones en Educación Matemática que tratan la argumentación se ha estudiado, entre otros tipos, los argumentos manifestados por estudiantes de escuela elemental o maestros en formación; por ejemplo, los argumentos para validar[16] (Harel y Sowder, 1998; Harel y Fuller, 2009; Herbst, 1999; Balacheff, 1999, 2000; Boero, 1999; Hoyles y Küchermann, 2002; Martin y McCrone, 2007; Weiss et al., 2009; Camargo 2010; Echeverry et al., 2012); los argumentos para justificar (Battista y Clements, 1995; McClain, 2009); los argumentos para refutar (Balacheff, 1999, 2000; McClain, 2009; Reid et al., 2011); los argumentos para defender (McClain, 2009); los argumentos para explicar (De Villiers, 1993; Balacheff, 2000) y los argumentos para persuadir (De Villiers, 1993; Reiss y Renkl, 2002; Fernandes y Fonseca, 2004; Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Crespo, 2007a, 2007b; Reiss, 2007; Crespo et al., 2010; Arzarello y Sabena, 2011; Roig et al., 2011; Goizueta y planas, 2013a, 2013b).

3.7. Conclusiones de capítulo

A partir de esta revisión de estudios sobre argumentación en Educación Matemática se establecen cuatro conclusiones.

En primer lugar, una conclusión permite retomar aportes de las perspectivas epistemológicas y lógicas debido a que, por un lado, se asumen al menos dos funciones de la argumentación: justificar y explicar y, por otro, se sitúa la argumentación en una perspectiva de la lógica sustantiva (Toulmin, 2007) diferente a la lógica formal. En segundo lugar, otra conclusión permite comprender, de manera teórica, cómo argumentan tanto escolares como

[16] Formales-deductivos-analíticos-aristotélicos.

maestros en formación desde el punto de vista de la razonabilidad (Toulmin, 2007). En tercer lugar, otra conclusión posibilita considerar la argumentación en la formación inicial de maestros no solo para el aprendizaje, sino también para la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, el Modelo Argumentativo de Toulmin es referenciado por la mayoría de estudios que se consultaron para el análisis de la argumentación (Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Knipping, 2008; McClain, 2009; Inglis, 2007; Battista y Clements, 1995; Mariotti, 2006; Goizueta y Planas, 2013a; Arzarello y Sabena, 2011; Balacheff, 1999, 2007; Godino y Recio, 2001; Roig et al., 2011; Goizueta y Planas, 2013b; Camargo, 2010; Douek y Scali, 2000); no obstante, se privilegia el estudio de la argumentación a partir de la lógica formal mediante algunos componentes argumentativos. Además, se reconoce una tendencia en la literatura que estudia la argumentación en la formación de escolares y en la formación inicial de maestros con base en la lógica sustantiva (Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Knipping, 2008; McClain, 2009; Nardi et al., 2011). En cuarto lugar, otra conclusión permite reconocer una comunidad de investigadores en Educación Matemática en la cual no hay consenso sobre cómo entender el razonamiento, la argumentación, la prueba y la demostración (Herbst, 2000; Camargo, 2010; Goizueta y Planas, 2013a, 2013b). Lo anterior, resalta la importancia de proponer un referente teórico para el análisis de la argumentación por maestros en formación durante su práctica pedagógica.

Capítulo 4

---

4. Referente teórico

"La teoría es cuando se sabe todo y nada funciona. La práctica es cuando todo funciona y nadie sabe por qué. En este caso hemos combinado la teoría y la práctica: nada funciona… y nadie sabe por qué"- Albert Einstein

En este capítulo, se presentan los siguientes apartados: Introducción de capítulo, Modelo Argumentativo de Toulmin: Presentación, críticas y complementos, Racionalidad y razonabilidad, Argumentos sustantivos y analíticos, Componentes argumentativos y Conclusiones de capítulo.

4.1. Introducción del capítulo

En este apartado se describe la importancia de la lógica, la retórica y la dialéctica en 'ciertos episodios' de la construcción histórica de la teoría de la argumentación con el fin de encontrar una justificación inicial para la construcción, de manera emergente, del Modelo Teórico Integral que se propone en esta investigación.

La teoría de la argumentación evolucionó históricamente, en forma dicotómica, mediante la lógica formal o la lógica informal; es decir, en la lógica formal los discursos se reconocen en vínculo con una racionalidad teórica y epistémica, mientras que en la lógica informal los discursos se relacionan con una racionalidad práctica, teleológica y comunicativa, una lógica sustantiva, dialéctica y retórica. Por tal motivo, se reconoce un uso formal y otro informal, donde el segundo se usa en ambientes con carácter cotidiano para dirimir asuntos del día a día.

En el discurso dialéctico –vinculado con la lógica informal– se consideran preguntas y respuestas y aparecen roles entre protagonistas y antagonistas para establecer acuerdos entre puntos de vista o conocimientos. Por su parte, en el discurso retórico –asociado con la lógica informal– se vincula la persuasión o el convencimiento de un sujeto hacia un auditorio, ya sea particular o universal (Plantin, 1998; Bermejo, 2006). De igual forma, en el discurso retórico se destaca la racionalidad teleológica o comunicativa en la plausibilidad, aceptabilidad y razonabilidad de los enunciados, puntos de vista o afirmaciones (Habermas, 1999, 2002; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). En este sentido, la retórica estudia los discursos vinculados con la persuasión y el convencimiento; y la dialéctica y la lógica estudian, entre otros aspectos, la refutación y la validación, en su orden.

Los trabajos sobre lógica-silogística de Aristóteles tuvieron como propósito la búsqueda de una teoría; por ejemplo, en el Órganon se estudia la argumentación en afinidad con el lenguaje formal, es decir, mediante una teoría normativa de inferencias válidas (Aristóteles, 1993).

Por una parte, en la matemática griega prevalecían los argumentos informales –sustantivos–, y transitaban hacia los argumentos analíticos. Los argumentos analíticos se instaurarían en la sociedad griega de aquellas épocas a partir del problema de la irracionalidad del número asociado con la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide una unidad de longitud. Tanto este como otros problemas motivaron la transformación de la argumentación de las matemáticas basadas en prácticas sustantivas hasta la argumentación basada en un lenguaje lógico, deductivo y axiomático (Arsac, 1987).

Por otra parte, Descartes asume la argumentación vinculada con una racionalidad teórica, técnica y logicista. Confina la lógica al método de validación, y no considera la retórica y la dialéctica (Bermejo, 2006), lo cual dicotomiza la argumentación y demostración. A su vez, propone que dicha racionalidad y, la racionalidad práctica –razonabilidad– no tienen puntos de encuentro, por lo cual se impone la primera sobre la segunda.

Por consiguiente, en las matemáticas contemporáneas, la argumentación ha sido tratada como método de validez; por ejemplo, Lakatos (1978) asocia la argumentación con la refutación y con la validación. Esta propuesta tiene implicaciones en la Educación Matemática si se asume la refutación como procedimiento, y no sólo como componente de un argumento. Al respecto, Reid et al. (2011) han estudiado la refutación y la lógica en el auditorio del aula de clase a partir de la suficiencia y la pertinencia, y no de la falsedad de enunciados, proposiciones y puntos de vista.

Algunos autores han contrastado la argumentación con la demostración (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). Por ejemplo, se afirma que la argumentación está asociada con la intensidad de adhesión y persuasión entre seres humanos, mientras que la demostración está asociada con un lenguaje formal, con un sistema axiomático construido de manera a priori, y con la certeza de enunciados. Por tanto, en la demostración, el ser humano determina signos y reglas deductivas para operar con proposiciones bajo un sistema teórico-analítico. Así, la argumentación y la demostración se dicotomizan (Boenders, 1987-1990; Perelman, 2007).

En Educación Matemática, se establecen diferencias entre argumentación[17] y demostración. Por ejemplo, la argumentación entendida como *explicación*, se define en afinidad con las creencias y concepciones de un sujeto locutor, sin considerar un *auditorio particular*; y la argumentación entendida como *prueba*, se enmarca en un auditorio particular compuesto por

[17] Como sinónimo de explicar y probar (Balacheff, 2000).

seres humanos, con un sistema común de validación –definición que puede emplearse en el aula de clase de matemáticas–; mientras que la demostración se concibe a partir de una comunidad social de matemáticos, que podría llamarse *auditorio universal*, mediante sistemas formales y reglas de inferencias deductivas usadas para validar conocimientos (Balacheff, 2000). Estas definiciones muestran la dicotomía entre la argumentación y la demostración en las construcciones teóricas propias de la Educación Matemática. Por tal motivo, este referente es coherente con la propuesta de Toulmin (2007) y Habermas (1999), cuyo fin es resolver la dicotomía entre argumentar y demostrar.

En esta investigación solo se estudiará la *argumentación sustantiva* a partir de 'algunas' cualidades que dan cuenta de procesos, procedimientos y productos (Habermas, 1999; Harada, 2009; Bermejo, 2006, 2009; Posada, 2010; López, 2012). Por ejemplo, Habermas (1999) afirma que "la retórica se ocupa de la argumentación como *proceso;* la dialéctica, de los *procedimientos* pragmáticos de la argumentación, y la lógica, de los *productos* de la argumentación" (p. 48).

De la teoría de Toulmin (2007), se destaca la relación entre un argumento, sus usos y su contexto comunicativo. Esta relación propone una alternativa teórica a la lógica y al razonamiento formal, es decir, dicha teoría constituye una evolución del silogismo clásico aristotélico (Atienza y Jiménez, 1993) debido a que los argumentos que ofrecen los seres humanos en contextos comunicativos, en muchos casos, admiten escasamente el *Modus Ponendo Pones*[18] (Bur, 2007). A continuación, se expone el Modelo Argumentativo de Toulmin que servirá como base para el Modelo Teórico Integral.

[18] Esta regla de inferencia puede escribirse mediante una proposición molecular, así: $[(P \to Q) \wedge P] \Rightarrow Q$

4.2. Modelo Argumentativo de Toulmin

4.2.1. Presentación

En este apartado, el lector encuentra en su orden: una breve descripción del Modelo Argumentativo de Toulmin y algunas críticas y teorías que lo complementan, para establecer una propuesta definitiva de Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática.

Para estudiar la estructura lógica de un argumento según Toulmin (2007), se deben comprender sus componentes: datos, conclusiones, garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores. Este modelo propone *los datos* como conocimientos que son punto de partida, derivados del enunciado que va a argumentarse. *Las conclusiones* como afirmaciones o puntos de vista que defiende quien argumenta. *Las garantías* como justificaciones de la conexión entre los datos y la conclusión. *Los soportes* como apoyos a las garantías a través de la evidencia. *Los cualificadores modales* como matizadores del grado de certeza de las conclusiones, y *los refutadores* como excepciones a la conclusión, o desacuerdos frente a un conocimiento o punto de vista entre quienes argumentan.

El Modelo Argumentativo de Toulmin critica la clásica argumentación deductiva. Esta crítica ofrece como respuesta la propuesta de argumentación sustantiva, en donde ya no solo se analizan premisas y conclusiones, sino garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores. Así, Toulmin (2003, 2007) se distancia de la argumentación deductiva, y propone la estructura de los argumentos donde el conocimiento, los cualificadores modales y las refutaciones hacen parte de la validez, no solo ceñida a reglas a priori de inferencia lógica y a esquemas de silogismos (Trujillo y Vallejo, 2007).

Es así como el Modelo Argumentativo de Toulmin se convierte en una crítica radical a las inferencias deductivas caracterizadas por el enfoque analítico de la lógica formal asociadas a la objetividad, debido a que "se trata de un complejo modelo de análisis en el que subyace una concepción de la estructura del raciocinio y los usos de la racionalidad humana. Es una concepción sobre la aplicación de la lógica en contextos específicos" (Trujillo, 2007, p. 161).

Asimismo, el Modelo Argumentativo de Toulmin brinda un terreno fértil para el análisis de *argumentos sustantivos*. Estos pueden identificarse cuando se usan garantías, tales como: puntos de vista o conocimientos. En contraposición, al referirse a los lógicos matemáticos, Toulmin (2007) afirma que ellos: "han tomado los argumentos analíticos como paradigma, han elaborado su sistema de lógica formal sobre estos cimientos y se han tomado la libertad de aplicar las categorías construidas de esta manera a argumentos de otros campos" (p. 216).

Toulmin (2003) afirma, además, que la base de los argumentos sustantivos es *la razonabilidad,* que dependen de las experiencias de quienes argumentan en un contexto y en un tiempo particular. De manera específica, Toulmin (2003) define los argumentos sustantivos como "históricamente situados y dependen de la experiencia en cuestión: a lo más que pueden aspirar es a colocar una conclusión más allá de una duda razonable y a establecer la mayor presunción posible a su favor" (p. 42).

En Educación Matemática, Krummeheuer usó, por primera vez en 1995, el Modelo Argumentativo de Toulmin para analizar argumentos que surgen en la clase (Inglis y Mejía-Ramos, 2005). Con el fin de aportar otras afirmaciones sobre la diferencia entre *argumentos analíticos y sustantivos,* Godino y Recio (2001) afirman que

> Una distinción importante es la que hace Krummeheuer (1995), siguiendo a Toulmin, entre argumentos analíticos y sustanciales. Los primeros son característicos de las deducciones lógicas correctas, siendo tautológicos, esto es, un aspecto latente de las premisas se elabora visiblemente, pero no añaden nada a la conclusión que no fuera ya una parte potencial de las premisas. Los argumentos sustanciales, por el contrario, expanden el significado de las proposiciones en la medida en que relacionan apropiadamente un caso específico a éstas por actualización, modificación o aplicación. (p. 406)

4.2.2. Críticas y complementos[19]

En la teoría sobre la argumentación, pueden encontrarse algunos estudios que formulan críticas al Modelo Argumentativo de Toulmin (2007), que coinciden en mantenerlo como base para extenderlo. Estas críticas afirman que esta propuesta limita el análisis de los argumentos a sus componentes; por ejemplo, que no considera cualidades retóricas (van Eemeren et al., 2006) o que no incluye cualidades dialécticas (Nielsen, 2011). Aunque la propuesta brinda elementos teóricos para el análisis de los refutadores, no brinda elementos teóricos para el análisis de procedimientos entre los sujetos que expresan el refutador. En el mismo orden de ideas, es preciso afirmar que el análisis de cualidades dialécticas sería un requisito para el análisis estructural de los argumentos en un contexto comunicativo donde predomina el diálogo (Simpson, 2015; Nielsen, 2011).

Como reacción a las críticas del Modelo Argumentativo de Toulmin, se declaran tres justificaciones teóricas que ayudan a complementar este modelo y buscan favorecer el análisis del objeto investigativo que se plantea. Estas justificaciones se realizan mediante propuestas teóricas complementarias (Habermas 1999, 2002; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006; Perelman, 2007; Herrero, 2006; Bermejo, 2006; van Eemeren et al., 2006; van Eemeren et al., 2007; Harada, 2009; Rigo, 2014). Esta idea de articular el Modelo Argumentativo de Toulmin con otras teorías se apoya en las conclusiones de Harada (2009) cuando afirma que

> Es que partiendo del modelo de Toulmin, pero, también, de otras propuestas teóricas (como las de Perelman, van Eemeren y Ducrot), deberíamos tratar de elaborar algo que se aproxime aún más a la argumentación real, claro está, sin descuidar los aspectos normativos, pues no sólo nos debe interesar saber argumentar, sino también hacerlo bien. (p. 55)

---

[19] Al tratar de buscar complementos en otras teorías de la argumentación para el Modelo Teórico Integral de Argumentación, se consideró la base epistemológica pragmática propuesta por Toulmin.

Pero mantener como base la teoría de Toulmin, en este referente teórico, podría facilitar el análisis de la continuidad entre la argumentación y la demostración. Esta idea deja entrever la complementariedad entre la racionalidad teórica y práctica. Al respecto, Balacheff (1999) afirma:

> Si uno se alinea con Toulmin parecería posible imaginar una solución de continuidad de la argumentación a la demostración; y por qué no considerar a la demostración como un género argumentativo particular […]. Como contrapartida, la existencia de tal solución de continuidad parece dudosa si uno se alinea con las proposiciones de Perelman o Ducrot. (párr. 15)

A continuación, se exponen las tres justificaciones mencionadas arriba. Una primera justificación refiere el complemento teórico de cualidades retóricas para la distinción entre la argumentación y la demostración que establecen algunos autores (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). La distinción, que no es declarada por Toulmin de forma expresa, radica en lograr la persuasión o el convencimiento de un sujeto mediante enunciados dirigidos a un auditorio.

La propuesta teórica de Toulmin (2007) permite analizar la argumentación mediante sus cualidades estructurales analítico-sustantivas (Simpson, 2015). Sin embargo, al enfatizar el análisis de los cualificadores modales se encuentra que estos pueden relacionarse con cualidades retóricas (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006) como indicadores de persuasión entre los participantes de una argumentación (Inglis y Mejía-Ramos, 2005), aunque no sean suficientes cualidades retóricas para un análisis integral.

Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006) afirman que cuando se argumenta un enunciado se aumenta "la intensidad de adhesión de manera que desencade en los oyentes la acción prevista (acción positiva o abstención), o, al menos, que cree, en ellos, una predisposición, que se manifestará en el momento oportuno" (p. 91); mientras que cuando se demuestra una proposición "basta con indicar qué procedimientos permiten que ésta sea la última expresión de una serie deductiva cuyos primeros elementos los proporciona quien ha construido el sistema axiomático"

(p. 48). Esta intensidad de adhesión de un auditorio se logra mediante el refinamiento de los cualificadores para lograr fuerza en los argumentos (Apostel, 2007).

En Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006) y en Perelman (2007), la lógica formal se asocia con la demostración, cuya validez es binaria, correcta o incorrecta; y la lógica informal o sustantiva, con la argumentación, cuya validez es pertinente, persuasiva, convincente o razonable. Al respecto Perelman (2007) afirma que “en la argumentación no se trata de mostrar, como en la demostración, que una cualidad objetiva, como la verdad, pase de las premisas a la conclusión, sino si es permitido admitir el carácter razonable, aceptable de una decisión” (p. 141).

No obstante, en este referente teórico, para erigir diferencias entre *persuadir y convencer* se recurre a Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006) cuando afirman: “Nos proponemos llamar *persuasiva* a la argumentación que sólo pretende servir para un auditorio particular, y nominar *convincente* a la que se supone que obtiene la adhesión de todo ente de razón” (p. 67), esto es un auditorio universal. Asimismo, los auditorios que se consideran en esta investigación corresponden con el del seminario de práctica pedagógica y el del aula de clase, ambos *auditorios naturales y particulares*. Cuando se habla de auditorio natural, se hace referencia a que los participantes no se prepararon previamente para que expresen ciertos puntos de vista; y cuando se habla de auditorio particular, se refiere a que los participantes buscaron argumentos particulares y contextuales, es decir, argumentos sustantivos y no analíticos.

Aunque Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006) consideran que no hay puntos de encuentro entre la argumentación y la demostración, el Modelo Argumentativo de Toulmin (2007) puede complementarse con esta propuesta, ya que pueden encontrarse relaciones entre la argumentación y la demostración a partir de la racionalidad teórica y práctica. Al respecto, Harada (2009) afirma que Toulmin reconoció que “la lógica misma es una parte de la teoría de la razón, la cual no sólo incluiría a la racionalidad teórica o lógica sino, igualmente, a la razonabilidad práctica o retórica” (p. 50).

Una segunda justificación fundamenta el complemento teórico de otras cualidades retóricas al Modelo Argumentativo de Toulmin, la cual se relaciona con la teoría de Anscombre y Ducrot citados por Herrero (2006); al respecto, afirma que no solo interesa estudiar los enunciados en sí mismos sino “el valor que un enunciado asume mediante el encadenamiento argumentativo con otro enunciado en el discurso” (pp. 71-72).

Para esta investigación, el análisis de la argumentación no se ciñe solo al uso de conectores ni a la pertinencia de enunciados y proposiciones. Esta propuesta de Ducrot aporta al Modelo Argumentativo de Toulmin porque en este se desatiende el análisis de conectores y unidades de enlace que se usan entre argumentos. De forma concreta, *los indicadores de argumentación* se consideran como cualidades retóricas vinculadas con la persuasión y el convencimiento en el diálogo.

En la argumentación se usan también algunos recursos retóricos, tales como *el ejemplo, la ilustración, el modelo y la metáfora* (Perelman, 1997). Al ofrecer o solicitar *ejemplos* se fundamenta una regla y se supone “la existencia de algunas regularidades de las que los ejemplos darán una concreción. Lo que podrá ser discutido, cuando se recurre a ejemplos, es el alcance de la regla, el grado de generalización que justifica el caso particular, pero no el principio mismo de la generalización” (Perelman, 1997, p. 143). Ofrecer o solicitar una *ilustración* en una argumentación “tiene como función el reforzar la adhesión a una regla conocida y admitida, proporcionando casos particulares que esclarecen el enunciado general, muestran el interés de éste por la variedad de las aplicaciones posibles, aumentan su presencia en la conciencia”

(Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006, p. 546). De otro lado, al argumentar a través del ofrecimiento o de la solicitud de un *modelo*, "el caso particular en vez de servir de ejemplo o de ilustración puede presentarse como modelo para imitar; pero no es una acción cualquiera la que es digna de imitarse: se imita sólo a quienes se admira, a quienes tienen autoridad y un prestigio social, sea debido a su competencia, a sus funciones o al rango que ocupan en la sociedad" (Perelman, 1997, p. 148), y se argumenta mediante el ofrecimiento o la solicitud de la *metáfora* cuando hay "un acertado cambio de significación de una palabra o de una locución" (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006, p. 610).

Por último, se han desarrollado algunas propuestas teóricas sobre la argumentación mediante consideraciones logicistas (Toulmin, 2007), retóricas (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006), o dialécticas (van Eemeren et al., 2006; van Eemeren et al., 2007). En las teorías logicistas, no se considera el sujeto que argumenta; mientras que, en la retórica y la dialéctica se considera un contexto comunicativo donde un emisor y un receptor, que pertenecen a un auditorio, asumen roles de protagonistas y antagonistas. En esta investigación, estas últimas consideraciones atienden, de forma especial, a dos preguntas: ¿para quienes argumentan los maestros en formación inicial cuando están en una clase de geometría? y ¿cuándo el maestro en formación asume el rol de antagonista en una argumentación?

Una tercera justificación que se plantea está relacionada con el complemento teórico de cualidades dialécticas, debido a que su inclusión en el referente teórico favorece la interpretación de la argumentación entre protagonistas y antagonistas. En este sentido, para van Eemeren et al. (2006), la argumentación "siempre es un intento de justificar o de refutar algo" (p.46). Además, afirman que

> La argumentación es una actividad verbal que puede desempeñarse en forma oral o en forma escrita. Es también una actividad social: en el avance argumentativo, uno se dirige

> por definición hacia los otros. Además, es una actividad racional que se orienta a defender un punto de vista de modo que se vuelva aceptable a un crítico que toma una actitud razonable. (p. 17)

Conceder cualidades dialécticas a la argumentación permite mayor riqueza analítica en virtud de que en el Modelo Argumentativo de Toulmin se consideran, de forma exigua, los refutadores como cualidades estructurales de un argumento. Sin embargo, los procedimientos de los sujetos que usan estos refutadores no son considerados en dicho modelo. Estas teorías que complementan el Modelo Argumentativo de Toulmin son consecuentes con una teoría integral de la argumentación que incluya la lógica, la retórica y la dialéctica (Bermejo, 2006; Harada, 2009).

En este referente teórico, convocar finalmente la teoría de Habermas, tiene como propósito reaccionar a las críticas que algunos investigadores hacen contra el Modelo Argumentativo de Toulmin; es decir, la teoría de la argumentación propuesta por Habermas vincula procesos, procedimientos y productos (Habermas, 1999; Posada, 2010). De igual manera, los procesos se vinculan con indicadores y recursos retóricos usados por los sujetos cuando argumentan, los procedimientos se conectan con cualidades dialécticas relativas al diálogo y la refutación, y los productos se articulan con la validez y forma interna de los argumentos. Esta propuesta coincide con la definición de argumentos propuesta por Toulmin; al respecto, Habermas (1999) afirma:

> Los argumentos poseen una estructura general que Toulmin, como es sabido, caracteriza de la siguiente forma. Un argumento se compone de una emisión problemática *(conclusion)* la cual lleva aneja una pretensión de validez, y de la razón o fundamento *(ground)* con que ha de decidirse acerca de esa pretensión. La razón o fundamento obtiene su carácter de tal de una regla, una regla de inferencia, un principio, una ley, etc. *(warrant).* La regla se apoya en evidencias de tipo diverso *(backing).* Llegado el caso, habrá que modificar o recortar la pretensión de validez *(modifyer).* (p. 47)

Habermas (2002) considera que en la argumentación, la racionalidad se encamina por tres vías: una epistémica, una teleológica y una comunicativa. En esta investigación, la argumentación que usa la racionalidad epistémica busca la consecución de la verdad de proposiciones. En la segunda, la argumentación se fundamenta por intenciones; y, en la tercera, por el entendimiento entre seres humanos que se comunican. En este referente teórico, los argumentos para validar se consideran con una racionalidad epistémica; los argumentos para justificar, refutar y defender, con una racionalidad teleológica y, los argumentos para explicar y persuadir, con una racionalidad comunicativa.

El complemento de esta propuesta teórica de Habermas (1999) con el Modelo Argumentativo de Toulmin (2007) permitirá un análisis integral entre el uso de las racionalidades teórica y práctica en la argumentación. Los siguientes apartados brindan evidencias teóricas de indicadores sobre ellas.

4.3. Racionalidad y razonabilidad

En este apartado se expone lo que se entenderá por racionalidad y razonabilidad en consonancia con la perspectiva teórica de Toulmin. En esta investigación tratar un objeto que reconozca la razonabilidad más allá de la racionalidad vinculada con la "logicidad" (Andaluz, 1992) implica asumir, de manera teórica, la argumentación a través de condiciones personales, temporales y contextuales.

Por un lado, en esta investigación se define *la racionalidad* como la capacidad para argumentar fundamentada en la necesidad, eficiencia, certeza o economía de la lógica (Toulmin, 2003). Esta definición pone en primer plano la logicidad y los argumentos analíticos enmarcados en razonamientos deductivos. Además, bajo esta racionalidad, se construyen sistemas axiomáticos en la ciencia, de forma concreta en las matemáticas, y se argumenta mediante procesos lógico-normativos.

Toulmin (2003, 2007) critica a la racionalidad teórica; en consonancia con él, Trujillo (2007) expresa que: "estamos dominados por una racionalidad restringida, abstracta y vacía de contenido, constreñidos por cierta forma lógico-matemática o geométrica de razonamiento que tiene como fin último la búsqueda de certezas absolutas e indubitables de tipo empírico o racional" (p. 159). Esta crítica tiene validez si se estudia la argumentación afín con el aprendizaje y la enseñanza de la geometría por maestros en formación inicial, debido a que durante sus clases con estudiantes no pretenden replicar sus resultados teóricos-axiomáticos; por el contrario, pretenden construir conocimiento social mediante su aprendizaje y su enseñanza.

Por último, algunos indicadores para hacer operativa la racionalidad en vínculo con la logicidad en los argumentos manifestados por un ser humano se dan por las cualidades lógico-analíticas a partir de los usos de las reglas de inferencia lógico-deductivas y de la "economía de la lógica" (Balacheff, 2000).

Por otro lado, la palabra *razonabilidad* corresponde con la traducción al español que se le confiere a la palabra del inglés *reasonableness* (Toulmin, 2003). En la presente investigación, se usa para referirse a argumentos razonables, personales, temporales y contextuales en consistencia teórica con Toulmin y en complemento con la racionalidad teórica. De forma precisa, Harada (2009) afirma que Toulmin indicó que "la lógica misma es una parte de la teoría de la razón, la cual no sólo incluiría a la racionalidad teórica o lógica sino, igualmente, a la razonabilidad práctica o retórica" (p. 50).

En esta investigación, la razonabilidad se hace operativa al analizar e interpretar los argumentos manifestados por maestros en formación inicial mediante cualidades lógicas, retóricas y dialécticas. Dentro de las cualidades lógicas, se resaltan, por ejemplo, el uso de garantías empíricas, mientras que las cualidades retóricas y dialécticas quedarían a un lado si se considera solo la racionalidad teórica o lógica.

La argumentación, entonces, se entenderá como una manifestación externa que servirá como indicadora de la razonabilidad de los maestros en formación inicial, y como una condición que posibilita el razonamiento de manera explícita (Toulmin, 2007; Henao, 2010; Bermejo, 2006). La presente investigación se fundamenta en la perspectiva teórica de Toulmin (2007), la cual se funda en la razonabilidad que trasciende la logicidad y propone que

> La racionalidad supone concentrarse restringidamente en asuntos de contenido, y la razonabilidad ser sensible a las mil maneras en que una situación puede modificar tanto el contenido como el estilo de los argumentos. (Toulmin, 2003, p. 45)

Ahora bien, al asumir la razonabilidad en la argumentación según Toulmin (2007), se pretende posicionar una postura epistemológica que va más allá de la lógica deductiva y de los simples argumentos analíticos con el fin de recuperar los argumentos sustantivos.

Asimismo, las conclusiones de Bermejo (2006) y Toulmin (2007) son importantes para esta investigación cuando afirman que la lógica formal no posibilita otros usos de la argumentación en el marco de interacciones comunicativas cotidianas; de manera específica, las que ocurren en una clase de geometría cuando estudiantes de escuela y maestros en formación inicial explican y justifican, debido a que no es común que se usen silogismos o reglas de inferencias deductivas, y en las cuales la intención no es la búsqueda del convencimiento de la veracidad de un enunciado. Al respecto, Toulmin (2007) afirma:

> Si un agrimensor presenta medidas de un campo en las cuales parece que un triángulo tiene uno de sus lados más largo que los otros dos juntos, podemos preguntarle "¿Qué le ha pasado a usted con el teodolito?". Pero en la clase de matemáticas de la escuela, donde estudiamos geometría como una ciencia formal, no se puede hablar de un triángulo que tiene un lado más largo que los otros dos juntos, porque es absurdo e incoherente con los axiomas de Euclides. Un geómetra matemático que se encontrara con un triángulo tal que aparentemente mostrara esta propiedad podría decir "¡Vaya manera de hacer agrimensura!" sólo si estuviera bromeando. Nosotros consideraríamos que su trabajo consiste en *probar*,

> partiendo sólo de los axiomas de Euclides, que tal triángulo tiene que ser rechazado simplemente por razones matemáticas. En cualquier rama de las matemáticas, las proposiciones estudiadas empiezan siendo condiciones, normas o reglas a las que se apela en el curso de alguna actividad práctica, ya sea el remo de competición o la agrimensura. (p. 257)

A partir de la razonabilidad como una propuesta que enmarca la argumentación más allá de la logicidad, se entiende el razonamiento como una actividad central del pensamiento donde interviene la interacción social, la cual consiste en usar símbolos para presentar argumentos, sostener o criticar una interpretación, un punto de vista o un planteamiento entre seres humanos (Bermejo, 2006; Trujillo, 2007; Toulmin, 2007). De esta manera, el razonamiento es explícito, y no implícito en la mente de los seres humanos, tal como se propone clásicamente en la lógica formal.

La perspectiva de Toulmin no tiene como propósito que la razonabilidad se imponga sobre la logicidad, o que los argumentos centrados en la experiencia sustituyan los argumentos formales; más bien, pretende reconocer los aciertos de las posturas formales del razonamiento con el fin de defender las lecciones de la práctica real de la argumentación (Andaluz, 1992; Toulmin, 2003; Henao, 2010).

En esta investigación, asumir una postura teórica alineada con Toulmin que privilegie los argumentos sustantivos, sin abandonar los argumentos analíticos, conlleva tomar una postura epistemológica de la lógica que estudie la argumentación de una manera integral y que no se restrinja solo a la lógica formal. Así, los argumentos analíticos se inscriben en una epistemología de la lógica formal, enmarcados en la logicidad; y los argumentos sustantivos, en la razonabilidad. Esta inscripción de argumentos sustantivos permite la posibilidad de establecer diálogos con una postura epistemológica diferente de la lógica formal. La logicidad atiende a argumentos deductivos, estáticos y acabados; en cambio la razonabilidad responde a argumentos sustantivos que se fundamentan en conocimientos que pueden perdurar por corto tiempo en un contexto determinado (Andaluz, 1992), como suele ocurrir en las prácticas argumentativas en un auditorio de aula de clase de geometría, donde los estudiantes y el maestro van en búsqueda de la comprensión y construcción social de conocimientos.

4.4. Argumentos sustantivos y analíticos

En este apartado, se describen algunos indicadores de los argumentos analíticos y sustantivos que permiten reconocer cualidades lógicas y retóricas en la argumentación con características dialógicas, ya que las cualidades dialécticas pueden observarse tanto en las analíticas como en las sustantivas por intermedio de refutadores y de roles de quienes adelantan los argumentos o protagonistas, y quienes los retrasan o antagonistas.

En *los argumentos analíticos,* se emplean razonamientos para convencer a alguien a partir de una objeción que se relaciona con el conocimiento geométrico. Además, en este tipo de argumentos puede identificarse el uso de reglas analítico-teóricas (soportes y garantías) por parte de quienes lo hacen. La argumentación analítica se instaura cuando se expresa en forma verbal la solicitud o el ofrecimiento de argumentos frente a una diferencia de conocimiento establecida entre la resolución de la veracidad o falsedad de una conjetura o de la afirmación de una proposición que se vincule con el campo argumentativo de la geometría.

En *la argumentación sustantiva,* se emplean argumentos para persuadir a alguien a partir de una objeción que se relaciona con un conocimiento o un punto de vista sobre el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Estos conocimientos o puntos de vista se identifican en el uso lógico de reglas sustantivas (soportes y garantías) por parte de quienes argumentan, en este caso, los tres maestros en formación inicial. La argumentación sustantiva se establece cuando se expresa en forma verbal una solicitud o un ofrecimiento de argumentos frente a una diferencia de conocimiento o punto de vista en el campo del aprendizaje o de la enseñanza de la geometría en la escuela.

4.5. Componentes argumentativos

Cualquier argumento, sea analítico o sustantivo, está compuesto por datos, conclusión, garantías, soportes, cualificadores modales y refutador. A continuación, se define cada componente de manera operativa.

Por *dato*, se entenderá la evidencia empírica o teórica ofrecida de antemano en preguntas o respuestas entre quienes argumentan, que sirve como fundamento para apoyar cierta conclusión. *Los datos* pueden acompañar tanto un argumento sustantivo como analítico. De manera directa, pueden vincularse con la geometría, con su aprendizaje o con su enseñanza.

Las conclusiones pueden ser de naturaleza sustantiva o analítica. Se relacionan con la geometría, con su aprendizaje o su enseñanza y pueden establecerse en la argumentación por medio de la inducción, deducción o abducción; es decir, que la conclusión no necesariamente se presenta al finalizar el argumento expuesto por los participantes.

Las garantías pueden atender a conocimientos geométricos o puntos de vista vinculados con su aprendizaje o su enseñanza. Estas garantías se clasifican como a priori, empíricas, institucionales y evaluativas (Nardi et al., 2011), las cuales se explicaron en el apartado 3.3.

Los soportes pueden relacionarse con la teoría de la geometría euclidiana, con conocimientos en el aprendizaje o en la enseñanza de la geometría.

Los cualificadores modales se entienden como expresiones lingüísticas usadas por los maestros en formación inicial para matizar un punto de vista o una afirmación ofrecida en un argumento.

Y *los refutadores* son aquellos conocimientos o puntos de vista sobre la enseñanza o el aprendizaje de la geometría escolar. Pueden identificarse por intermedio de los protagonistas o los antagonistas para adelantar o retrasar argumentos, respectivamente.

4.6. Conclusiones de capítulo

Este capítulo inició con una presentación de algunos episodios históricos que aportaron a la teoría de la argumentación a través de sus cualidades lógicas, retóricas y dialécticas. Posteriormente se expuso el Modelo Argumentativo de Toulmin con el fin de asumir una postura epistemológica en esta investigación sobre la base de los argumentos sustantivos; además, se mostraron algunas críticas y complementos al Modelo Argumentativo de Toulmin que pueden facilitar un referente teórico para analizar e interpretar los datos investigativos que se obtenga durante el trabajo de campo. Luego, se introdujo lo que se entenderá por racionalidad y razonabilidad, donde se indicó la importancia de la razonabilidad como complemento de la racionalidad vinculada con la logicidad y deducción. Por último, se definieron los argumentos sustantivos y analíticos, así como también sus componentes argumentativos de acuerdo con Toulmin (2007).

Capítulo 5

5. Diseño metodológico

Parecía que habíamos llegado al final del camino y resulta que era sólo una curva abierta a otro paisaje y a nuevas curiosidades. (Saramago, 1995)

En este capítulo, se presenta el diseño que está compuesto por el enfoque fenomenológico-hermenéutico y el estudio de caso.

Esta investigación se centra en un estudio de caso mediante un proceso colaborativo que acontece en la argumentación (Duschl y Osborne, 2002; Muller et al., 2009); de forma específica, durante la práctica pedagógica de tres maestros en formación inicial (Erduran, Ardac y Yakmaci-Guzel, 2006). La argumentación se estudió cuando estos maestros compartieron experiencias sobre la preparación y presentación de clases con sus colegas en el auditorio del seminario de práctica pedagógica, o cuando enseñaron y discutieron conocimientos geométricos con sus estudiantes en el auditorio del aula de clase[20]. Además, se estudió el objeto investigativo mediante un referente teórico propuesto en el capítulo 4, el cual permitió la inclusión de algunas cualidades (lógicas, retóricas y dialécticas).

El enfoque fenomenológico-hermenéutico (Sánchez, 1998) se eligió en este diseño puesto que la pregunta que orientó esta investigación fue: ¿cómo argumentan, en geometría, maestros en

[20] En este contexto, se identifica como 'maestros en formación inicial' a los estudiantes inscritos en la Licenciatura, quienes se desempeñan, además, como maestros de educación básica primaria o secundaria. Los estudiantes de escuela elemental serán referidos como escolares o estudiantes.

formación inicial en práctica pedagógica?; lo cual coincide con el propósito de la fenomenología, que es "estudiar y describir la esencia de la experiencia humana vivida" (Mayan, 2001, p. 9) en el proceso formativo sobre el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Esta esencia se reconstruyó a través de transcripciones de las voces de los participantes en ambos auditorios para lograr "comprensión mediante la experiencia" (Stake, 1999, p. 42).

Bajo el enfoque fenomenológico-hermenéutico se considera, para esta investigación, la causalidad, la historia y el conocimiento en los siguientes términos: la causalidad entendida entre la argumentación, sus componentes, sus cualidades y sus intenciones (Sánchez, 1998; Stake, 1999); la historia diacrónica que considera la evolución de la argumentación de tres maestros en formación inicial en ambos auditorios; y, por último, el conocimiento entendido como una construcción social mediante la argumentación a través del intercambio de experiencias vividas de los tres participantes con los dos auditorios.

5.1. Método de estudio de caso

En el estudio de caso, "el conocimiento es algo que se construye, más que algo que se descubre" (Stake, 1999, p. 89). Asimismo, ya que la pregunta investigativa versa sobre la argumentación de tres maestros en formación inicial, se considera estudiar sus particularidades. De manera específica, se propone el estudio de caso para estudiar las particularidades de la argumentación de los tres participantes de la investigación, como se aprecia en el capítulo 7.

5.1.1. Interés, criterios y elección

El estudio de caso (Stake, 1999; Erduran et al., 2006) se eligió ante la problemática planteada en el capítulo 2, puesto que interesa documentar e informar sobre unas particularidades. Además, porque no es claro el papel que juega la argumentación en la enseñanza y en el aprendizaje de la geometría en la Licenciatura. De manera precisa, Montoya-Delgadillo (2014) afirma que "la enseñanza-aprendizaje de la demostración [y argumentación] suele aparecer como objetivo explícito del currículo en la escuela elemental; sin embargo, no ocurre lo mismo en el currículo universitario de formación de maestros" (p. 227). No obstante, el estudio de caso también tiene un carácter general, en tanto que la práctica docente es una actividad que ocurre en casi todos los programas de formación inicial de maestros, en cuyos casos esta documentación e información puede resultar interesante.

A su vez, la argumentación se analiza e interpreta mediante una descripción densa y fiel de los datos investigativos (Álvarez y Moroto, 2012). Esta descripción se logra mediante el referente teórico que se propone al final del capítulo 4 al definir la argumentación desde algunas de sus cualidades lógicas, retóricas y dialécticas.

El interés se orientó por un estudio intrínseco de caso. "En un estudio intrínseco, el caso está preseleccionado" (Stake, 1999, p. 17). Es decir, un estudio en el que el problema investigativo refirió la argumentación de tres maestros en formación inicial de la Licenciatura, en el cual se argumenta que la lógica formal no es suficiente para argumentar en el ámbito del auditorio del aula de clase cuando presentan tareas tanto con sus colegas como cuando enseñan y discuten conocimientos geométricos con sus estudiantes. Al respecto, sobre el estudio de caso intrínseco, Stake (1999) afirma que

> Nos encontraremos con una cuestión que se debe investigar, una situación paradójica, una necesidad de comprensión general, y consideraremos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular.
> No nos interesa porque con su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema general, sino porque necesitamos aprender sobre ese caso particular. Tenemos un interés intrínseco en el caso, y podemos llamar a nuestro trabajo *estudio intrínseco de casos*. (p. 16)

Para esta investigación, el estudio intrínseco de caso cumple dos criterios (Stake, 1999). El primero se vincula con la máxima rentabilidad de aquello que se aprende. Por un lado, el análisis de las particularidades de la argumentación de los tres participantes. Por otro, la pregunta investigativa se responderá mediante una construcción teórica de razonamiento inductivo sobre los datos cualitativos que se recolectaron a partir de la presentación y discusión de las tareas propuestas por los tres participantes a sus colegas, a sus estudiantes de escuela y al investigador.

El segundo se refiere al corto tiempo que se dispone para el trabajo de campo y la posibilidad de acceso al mismo. Por la naturaleza del diseño del estudio de caso, los tres maestros en formación inicial inscritos en el seminario de práctica pedagógica deben preparar sus clases con sus colegas y discutirlas con sus estudiantes de escuela primaria o secundaria durante dos años, pero el trabajo de campo se realizó durante dos semestres académicos, correspondientes a un año.

Por último, con el fin de establecer un diseño metodológico del estudio intrínseco de caso, se consideraron los siguientes aspectos: pregunta[21], formación inicial de maestros[22], práctica pedagógica, enseñanza-aprendizaje de la geometría, auditorios, participantes, rol del investigador, fuentes y recolección de datos, procedimientos para el análisis de datos, criterios de rigor y limitaciones del estudio.

5.1.2. Formación inicial de maestros, práctica pedagógica y enseñanza-aprendizaje de la geometría

La formación inicial de maestros ha sido un tema de estudio en investigaciones internacionales diversas (Shulman, 1986, 1987; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Jaworski y

[21] La cual se presentó en el apartado 1.2. de la presente memoria.
[22] En la investigación, no se consideró como propósito formar a los participantes para que aprendieran a argumentar, sino que en el contexto formativo de maestros se estudia su argumentación; por esta razón, este apartado se presenta en este capítulo y no en el capítulo 4.

Gellert, 2003; Ball, Hill, y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008). Uno de los temas de estudio se refiere a la teoría-practica (Dewey, 1928; Schön, 1993, 1998; Arnaus, 1999). Por ejemplo, Arnaus (1999) concibe que la formación inicial de maestros debe orientarse hacia la práctica, y no con la simple "transmisión de conocimientos teóricos sobre la enseñanza" (p. 607). Además, se concibe la formación inicial de maestros como un encuentro comprometido con la complejidad educativa (Arnaus, 1999) y fundamentada tanto por una racionalidad práctica como por una racionalidad técnica propia de la matemática.

De manera específica, la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia) no es ajena a estos estudios, por cuanto en la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas se propone que la formación inicial de maestros

> Contribuya a la construcción de una sociedad ética, tolerante, solidaria y respetuosa de la diversidad cultural, mediante la promoción de ciudadanos íntegros, y reconocida a nivel regional y nacional por liderar procesos de formación de maestros con capacidad crítica y reflexiva en el contexto de la matemática escolar. (Facultad de Educación, 2016)

Es decir, en la Licenciatura, la práctica del maestro en formación inicial se trata en cuatro cursos pertenecientes al plan de estudios de la Licenciatura en su versión dos: tres Seminarios de Práctica Pedagógica, y un cuarto curso de Trabajo de Grado. De esta manera, la práctica pedagógica se inscribe en la reflexión, en la sistematización y en la investigación de experiencias de práctica con estudiantes de escuela primaria o secundaria[23], y se asocia con la teoría: "la práctica, dada su propia textura social, requiere de teorías comprensivas que nos iluminen en la resolución práctica de nuestra acción educativa y en el desarrollo teórico de nuestras concepciones y, también, requiere de actuaciones legítimas y valorativamente defendibles" (Angulo, Barquín, Ruiz y Pérez, 1999, p. 8).

[23] De manera particular para esta investigación.

Los seminarios de práctica pedagógica se fundamentan en algunos principios que propone la Facultad de Educación (2012). De ellos, se destacan la formación personal e investigativa de los maestros en formación inicial, su interacción sociocultural y la transformación de la realidad educativa de la institución donde estos maestros realizan la práctica. Estos principios están en coherencia con la concepción de práctica pedagógica de la Licenciatura; propiamente, el documento que la establece expresa que "constituye un eje fundamental y transversal en la formación de los maestros, en su carácter teórico y práctico, se apoya en la pedagogía como disciplina fundante y en las didácticas específicas para contribuir a la producción de conocimiento" (Facultad de Educación, 2012, p. 2).

En coherencia con estos principios, el investigador ofrece, ante el comité de carrera de la Licenciatura, la propuesta denominada: *Formación de Maestros y Geometría* para el seminario de práctica pedagógica a un grupo de maestros[24] en formación inicial que comenzaban este proceso, que abarca cuatro semestres: tres seminarios, y el trabajo de grado. Los maestros en formación inicial aprenden geometría en algunos cursos que ofrece el plan de estudios[25] de la Licenciatura, tales como: *Fundamentos de Geometría* (Nivel II), *Seminario de Didáctica de la Geometría* (Nivel III) y *Profundización de la Geometría* (Nivel IV); pero en los tres *Seminarios de Práctica Pedagógica* (Nivel VII, Nivel VIII y Nivel IX) los tres participantes fundamentan el aprendizaje, y, de forma concreta, la enseñanza de la geometría en la escuela primaria o secundaria.

En Colombia, la enseñanza y el aprendizaje se orientan por los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional, que reconocen el pensamiento espacial vinculado con la geometría escolar (MEN, 1998); para esta investigación, entre estudios diversos sobre la

[24] Quienes fueron finalmente los participantes de esta investigación.
[25] Se recomienda al lector acudir a la Figura 1.

enseñanza de la geometría en el contexto internacional, se optó por relacionar esta propuesta de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) con la propuesta teórica de paradigmas de enseñanza de la geometría (Houdement y Kuzniak, 2003; Kuzniak, 2008; Kuzniak y Rauscher, 2011) para proponer tareas a los maestros en formación inicial.

En el mismo orden de ideas, los Lineamientos Curriculares responden, entre otras preguntas: ¿qué geometría enseñar en la escuela primaria o secundaria? Asimismo, proponen que la investigación sobre el pensamiento espacial debe enfocarse en la geometría activa. En los Lineamientos, se afirma que

> La moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela. (MEN, 1998, p. 38)

Esta propuesta de geometría (MEN, 1998) puede relacionarse con los tres paradigmas para su enseñanza en el currículo escolar: Geometría natural (I), geometría axiomática natural (II) y geometría formalista axiomática (III) (Houdement y Kuzniak, 2003; Kuzniak, 2008; Kuzniak y Rauscher, 2011). No obstante, la enseñanza de la geometría en el currículo escolar colombiano, de forma específica en la escuela primaria o secundaria, puede ubicarse en los dos primeros.

En esta investigación, el primer paradigma se adecua al uso de percepciones e intuiciones. En él se establece una relación con el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. En el diseño metodológico de esta investigación, las tareas que se vinculan con este paradigma en la formación inicial de maestros permiten estudiar la geometría a través de experiencias empíricas. Esto corresponde con la propuesta de los Lineamientos Curriculares, debido a que la geometría activa insinúa un uso de la argumentación sustantiva que destaca las experiencias y los procesos empíricos en su enseñanza y su aprendizaje, contrario a las propuestas clásicas de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria o secundaria que promueven el uso de la argumentación analítica, por ejemplo, mediante argumentos a dos columnas (Herbst, 1999) que se comunican en algunas clases por apelación a la autoridad del maestro, en los cuales se ejercita la racionalidad teórica. Al respecto, el MEN (1998) afirma:

> La propuesta de geometría activa, que parte del juego con sistemas concretos, de la experiencia inmediata del espacio y el movimiento, que lleva a la construcción de sistemas conceptuales para la codificación y el dominio de espacio, y a la expresión externa de esos sistemas conceptuales a través de múltiples sistemas simbólicos, no coincide con la descripción de van Hiele más orientada a la didáctica clásica de la geometría euclidiana y al ejercicio de las demostraciones en T o a doble columna. (p. 39)

Esta afirmación coincide con el segundo paradigma, en el cual se usan teorías y reglas deductivas dentro de un sistema axiomático, como en la Geometría Euclidiana. En el diseño metodológico de esta investigación, las tareas que se vinculan con este paradigma permiten estudiar la geometría a través de la deducción bajo sistemas axiomáticos no completos y, donde los axiomas son interpretados mediante una realidad práctica para la enseñanza.

En el tercer paradigma, la enseñanza se asocia con el estudio de axiomas de la geometría, los cuales están alejados de la realidad, excluyen contradicciones para mantener la consistencia lógica formal (Houdement y Kuzniak, 2003). A pesar de reformas curriculares diversas que afectaron la enseñanza de la geometría en Colombia (León, 2012), aún persiste la enseñanza de la geometría escolar planteada en un contexto lógico formal y axiomático, que propone una enseñanza de la geometría que se vincula con la validación mediante la argumentación deductiva.

Por último, es importante mencionar que, en esta investigación, el oficio del maestro está asociado a la presentación de una tarea sobre geometría que sea motivo de estudio en la escuela primaria o secundaria o con la enseñanza de la geometría tanto en el auditorio del aula de clase como en el del seminario.

5.1.3. Auditorios: el seminario de práctica pedagógica y el aula de clase

La práctica pedagógica que propone la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia) a los maestros en formación inicial tiene una duración de cuatro semestres. Durante el primer semestre realizan observaciones participantes y no participantes de problemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en el auditorio del aula de clase con estudiantes de educación primaria o secundaria. Además, el maestro en formación es acompañado por un maestro cooperador[26] quien labora en la institución educativa, enseña a los escolares, y ayuda en la orientación de la práctica pedagógica. En el segundo semestre, comienzan el proceso de enseñanza de la geometría a sus estudiantes en el auditorio del aula de clase y también, preparan, diseñan y presentan sus clases en el auditorio del seminario. En el tercer semestre, continúan el proceso de enseñanza de la geometría con sus estudiantes de escuela primaria o secundaria. Durante el cuarto semestre, documentan una respuesta a una problemática detectada en el proceso de su práctica pedagógica.

El seminario de práctica pedagógica fue el primer auditorio en el que aconteció la presentación de tareas; además, dada la naturaleza de la propuesta de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia que supone que los maestros en formación inicial además deben dictar clases a estudiantes de una institución educativa en el aula de clase, este fue el segundo auditorio. Ambos auditorios se consideran como particulares (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006), ya que los argumentos que se tratan son de naturaleza personal, contextual y temporal, es decir, son transitorios. Un participante realizó su práctica pedagógica con estudiantes de educación primaria, en los grados tercero y cuarto; y los otros dos participantes con estudiantes de educación secundaria, en grado noveno. Tanto el seminario de

[26] Este maestro cooperador no participó en las clases que llevaron a cabo los tres participantes de la investigación.

práctica pedagógica como el aula de clase se adecúan a la definición de auditorio usada por Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006, p. 55), según la cual son "aquellos en quienes el orador quiere influir con su argumentación".

Por una parte, el auditorio del seminario estuvo conformado por los tres maestros en formación como oradores, y el investigador. En algunas ocasiones, participaron otros dos maestros en formación inicial, nombrados en las transcripciones como Colega 1 y Colega 2. Estos dos colegas fueron estudiantes del curso del seminario, pero no matricularon la continuación del seminario; por tal motivo, se decide no estudiar las particularidades de sus argumentaciones. Por otra parte, el auditorio del aula de clase lo conformaron estudiantes de educación primaria o secundaria. En las transcripciones de los diálogos, los estudiantes de Carlos y Helena fueron nombrados simplemente como Estudiante, o Estudiante 1, Estudiante 2, Estudiante 3 y Estudiante 4 y los estudiantes de María como Estudiante 1*, Estudiante 2*, Estudiante 3* y Estudiante 4*; y los maestros en formación como Carlos, Helena y María.

Los encuentros en el auditorio del seminario de práctica pedagógica se llevaron a cabo los viernes[27] con una duración de cuatro horas, de 10:00 a.m. a 2:00 p.m., durante tres semestres[28]. Estos brindaron oportunidades al investigador para organizar la recolección de datos en dos fases, las cuales se explicarán posteriormente en el apartado 5.1.6. Por otro lado, los encuentros en el auditorio del aula de clase se realizaron cada semana durante un semestre y medio, con una hora de duración, acordes con la clase de matemáticas y con el horario propuesto por la institución educativa.

[27] En el calendario académico propuesto por la Facultad de Educación.
[28] En el segundo semestre del año 2014; y, en el primer y segundo semestre del 2015.

5.1.4. Participantes

Los participantes fueron tres maestros en formación inicial: Carlos, Helena, y María, quienes matricularon el curso: Seminario de Práctica Pedagógica durante tres semestres académicos: 2014-2, 2015-01 y 2015-02, propuestos en el cronograma de actividades por la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). A dicho seminario asistieron adicionalmente dos maestros en formación inicial: Colega 1 y Colega 2. Sus argumentaciones no fueron motivo de análisis e interpretación en esta investigación, pero participaron y sirvieron como oyentes en los argumentos de Carlos, Helena y María.

5.1.5. Rol del investigador

El rol del investigador fue el de maestro formador de los tres maestros en formación inicial. Como maestro formador en el auditorio del seminario de práctica pedagógica, compartió documentos diversos para su lectura y convocó a los participantes en los encuentros con tareas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Este rol fue motivo de preocupación ética durante el desarrollo de la investigación. Por tal motivo, el investigador brindó confianza e informó de manera oportuna sobre el proceso de consentimiento informado a medida que los tres participantes compartían datos investigativos y asumió la función de maestro cuando ofreció oportunidades de aprendizaje a los participantes. Además, juntos optaron, en la recolección de datos, por el trabajo colaborativo que implicó asumir la imprevisibilidad, la negociación de diferencias y la comprensión de puntos de vista diversos (Boavida y Ponte, 2011). Cabe informar que el investigador no asistió al auditorio del aula de clase.

El doble rol de maestro formador e investigador suele evocar conflictos éticos que deben asumirse; sin embargo, el investigador fue cuidadoso a la hora de mantener su rol de maestro en los tiempos de orientación sobre el diseño de las tareas, pero actuó como investigador al formular preguntas durante los encuentros de presentación y discusión. Aunque se intentó conservar una clara distinción entre los dos roles, hay que admitir que hubo instantes donde un rol interfirió con el otro. Además, ni la solicitud ni el ofrecimiento de argumentos por parte del investigador al participar en algunas presentaciones y discusiones de los tres participantes se analizaron en esta investigación.

5.1.6. Fuentes y recolección de datos

Las fuentes de datos investigativos provienen tanto del auditorio del seminario como del auditorio del aula de clase, donde se llevaron a cabo el diálogo y discusión entre los participantes, los cuales se grabaron en video o en audio y después fueron transcritos.

La recolección de los datos investigativos se organizó en dos fases. En ellas se consideró el consentimiento informado (Clifford, 2005). Con ello, se hizo énfasis en la oposición al engaño a los participantes durante la investigación, a la protección de sus identidades (solo se presentaron los datos con seudónimos de los tres participantes) y a la precisión en los datos investigativos en los que se evitaron fraudes, omisiones o artificios en su posterior transcripción, análisis e interpretación.

Las dos fases de recolección de datos investigativos se describen a continuación.

5.1.6.1.Primera fase

La primera fase se llevó a cabo en el primer y segundo semestre del curso de Seminario de Práctica Pedagógica. Durante el primero, el curso transcurrió de manera natural con sus temáticas; sin embargo, para esta investigación se recogieron tres autobiografías, tres ideogramas y seis tareas. Esta fase permitió al investigador un primer contacto con los tres participantes en el auditorio del seminario.

El 2 de agosto de 2014, los participantes construyeron una autobiografía y un ideograma. En la autobiografía, respondieron la pregunta: ¿cómo fue su formación en el hogar, en la primaria, en la secundaria y en la Universidad? Y en el ideograma, ¿cómo te ves como maestro en formación? Estos dos primeros documentos permitieron al investigador describir algunas de las características de los participantes[29], así como identificar puntos de vista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estas autobiografías e ideogramas no se consideraron datos investigativos, solo se usaron para la descripción de los participantes (Capítulo 7).

El 10 de noviembre de 2014, los participantes compartieron, en el auditorio del seminario, planteamientos del problema investigativo relacionado con su práctica pedagógica. Estos se construyeron de acuerdo con la observación que efectuaron en el auditorio del aula de clase cuando los estudiantes de grado tercero, cuarto o noveno aprendían geometría. A partir de estos planteamientos, que no fueron motivo de análisis, pero cuya construcción evidencia cómo argumentaron los participantes con sus estudiantes, se conformaron dos grupos de trabajo: Helena y Carlos realizaron su práctica pedagógica con estudiantes de grado noveno; y María, con estudiantes de tercero y cuarto de primaria.

Durante el segundo semestre, los tres participantes realizaron seis presentaciones sobre preparaciones de clases relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el auditorio del seminario e iniciaron su práctica con estudiantes de escuela primaria o secundaria, donde se recolectaron datos cualitativos para analizar e interpretar la problemática planteada en el primer semestre como exigencia de las condiciones de formación en la Facultad: seis grabaciones en video de las clases en el auditorio del seminario de práctica pedagógica con los tres participantes. En este auditorio, los tres participantes expusieron la preparación de tareas sobre geometría ante sus colegas (Colega 1 y Colega 2) e investigador. Las presentaciones

[29] La descripción se documenta en el capítulo 7.

estuvieron relacionadas con el Teorema de Pitágoras, con la construcción geométrica de un paralelogramo y con el trazo de las diagonales de un hexágono.

En el mes de febrero de 2015, se grabaron en video un encuentro de la presentación de la tarea sobre el Teorema de Pitágoras y otro en el cual se discutió la construcción geométrica de un paralelogramo. En el mes de marzo de 2015, se grabó en video el encuentro sobre el trazo de diagonales de ciertos polígonos.

En la Tabla 2 se muestran los datos recolectados durante la primera fase; además, se usa una ‘marca de verificación’ (✔) para cotejar la participación de los tres maestros en formación inicial, de los colegas o del investigador en los seis encuentros llevados a cabo durante la presentación de las tareas propuestas.

Tabla 2: Datos investigativos recolectados en la primera fase.

Tarea	Nominación del video	Investigador	Helena	Carlos	María	Colega 1	Colega 2
Tarea 1	**Video 1:** Presentación de la preparación de clase de la Colega 1 con Carlos sobre el Teorema de Pitágoras	✔		✔		✔	
Tarea 2	**Video 2:** Presentación de preparación de clase de Helena sobre el Teorema de Pitágoras	✔	✔	✔			
Tarea 3	**Video 3:** Presentación de preparación de clase de María sobre el Teorema de Pitágoras	✔	✔	✔	✔		
Tarea 4	**Video 4:** Presentación de preparación de clase de Carlos sobre el Teorema de Pitágoras	✔	✔	✔	✔		
Tarea 5	**Video 5:** Discusión de la construcción de un paralelogramo por parte de Carlos y María	✔		✔	✔		✔
Tarea 6	**Video 6:** Discusión del número de diagonales de algunos polígonos por parte de Helena y Carlos	✔	✔	✔			✔

5.1.6.2.Segunda fase

Se realizó en el tercer semestre del curso del Seminario. En esta, los participantes asistieron a las clases de geometría en el aula con estudiantes de escuela primaria o secundaria. De igual forma, se grabaron tres encuentros de clases, uno en video y dos en audio. El video corresponde a las clases que efectuaron Helena y Carlos; y los dos audios, a las desarrolladas por María. A continuación, en la Tabla 3 se presenta la totalidad de tareas recolectadas para el análisis durante esta fase.

Tabla 3: Datos investigativos recolectados en la segunda fase.

Tarea	Nominación del video o audio	Participantes	Transcripciones de grabaciones en video o audio de encuentros en el auditorio del aula de clase
Tarea 7	**Video 7:** Discusión del concepto de diagonal por Carlos, Helena y sus estudiantes	Helena y sus estudiantes Carlos y sus estudiantes	1
Tarea 8	**Audio 1:** Solicitud de argumentos de María a sus estudiantes	María y sus estudiantes	2
Tarea 9	**Audio 2:** Discusión del concepto de diagonal por María con sus estudiantes	María y sus estudiantes	
	Total		3

5.1.7. Procedimientos para el análisis de datos investigativos

Para el análisis de datos, se consideraron dos auditorios, unidades, estrategias y triangulación. En los siguientes apartados, se describe cada uno de ellos.

5.1.7.1. Auditorios

El análisis de datos provino de dos auditorios. La primera parte correspondió con el análisis de argumentos, en el diálogo que los participantes ofrecían en el auditorio del seminario a sus colegas por medio de respuestas cuando el investigador les realizaba algunas preguntas propuestas al presentar las tareas de la primera fase en relación con *los paradigmas de enseñanza de la geometría I y II* (Kuzniak y Rauscher, 2011).

La segunda parte del análisis correspondió a la solicitud de argumentos de los participantes a sus estudiantes en el auditorio del aula de clase, el cual se relaciona con las tareas de la segunda fase. La solicitud se realizó a partir de preguntas propuestas en tareas que atañen al *paradigma de enseñanza de la geometría I* (Kuzniak y Rauscher, 2011). La Tabla 4 presenta la totalidad de tareas, su nominación y el paradigma de enseñanza de la geometría al que corresponde cada una.

Tabla 4: Tareas y su correspondencia con un paradigma de enseñanza de geometría.

Tarea	Auditorio	Nominación de la tarea	Paradigma de enseñanza de la geometría
Tarea 1	Seminario de práctica pedagógica	Presentación de preparación de clase de la Colega 1 con Carlos sobre el Teorema de Pitágoras	Geometría axiomática natural
Tarea 2		Presentación de preparación de clase de Helena sobre el Teorema de Pitágoras	Geometría axiomática natural
Tarea 3		Presentación de preparación de clase de María sobre el Teorema de Pitágoras	Geometría axiomática natural
Tarea 4		Presentación de preparación de clase de Carlos sobre el Teorema de Pitágoras	Geometría axiomática natural
Tarea 5		Discusión de la construcción de un paralelogramo por parte de Carlos y María	Geometría axiomática natural
Tarea 6		Discusión del número de diagonales de algunos polígonos por Helena y Carlos	Geometría axiomática natural
Tarea 7	Aula de clase	Discusión del concepto de diagonal por Carlos, Helena y sus estudiantes	Geometría natural
Tarea 8		Solicitud de argumentos sobre geometría entre María con sus estudiantes	Geometría natural
Tarea 9		Discusión del concepto de diagonal por María con sus estudiantes	Geometría natural

5.1.7.2. Unidad de análisis

Como unidad de análisis, se consideró el segmento locutivo compuesto por preguntas y respuestas que dieron indicios de argumentación. Por medio de las preguntas se solicitaron argumentos; y por medio de las respuestas, se ofrecieron.

En la presentación del análisis e interpretación de datos investigativos (capítulo 6), los segmentos locutivos evidencian parte de la argumentación de los tres maestros en formación inicial en su diálogo con los participantes en ambos auditorios. En total, son nueve segmentos que se presentan entre sucesivas transcripciones del diálogo, que se enumeran de la uno a la setenta y cinco, contienen los turnos de participación, que se enumerarán empleando números entre corchetes, por ejemplo: [1], [2], [3], etc.

5.1.7.3. Estrategias para el análisis

Como estrategias para el análisis y la interpretación de los datos investigativos recolectados en los dos auditorios se emplearon: la interpretación directa de los ejemplos individuales y suma categórica de los ejemplos (Stake, 1999). La interpretación directa de los ejemplos individuales se usó en el desarrollo del capítulo 6 cuando se identificaron indicadores de argumentación, componentes argumentativos, recursos retóricos e intención de los argumentos en los segmentos locutivos. Además, se sistematiza en dicho capítulo mediante el uso de dos tipos de tablas: unas de interpretación de ejemplos individuales por cada transcripción, excepto para las transcripciones 1, 4, 29 y 56, y otras tablas de recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales para cada tarea. En el capítulo 7, se usa la suma categórica de los ejemplos para concluir sobre las particularidades de la argumentación de cada uno de los tres participantes: Carlos, Helena y María.

Durante la suma categórica de los ejemplos en el estudio de caso, se realizó un proceso de triangulación (Denzin, 1984, 1989) mediante fuentes de datos, investigadores y teorías.

La primera se dio mediante uso de fuentes, tales como los encuentros tanto en el auditorio del seminario como en el auditorio del aula de clase y los documentos. La segunda se estableció con el orientador de la presente tesis, quien observaba (video) o escuchaba (audio) la misma escena del fenómeno con el fin de complementar el análisis y la interpretación a partir de los auditorios y circunstancias en los cuales se produjeron. La triangulación teórica se produjo cuando la documentación preliminar de esta investigación fue compartida con otros investigadores para que revisaran y contrastaran la validez de los avances teóricos y prácticos.

5.1.8. Criterios de rigor

Los criterios de rigor considerados fueron: credibilidad, auditabilidad y transferibilidad (Guba y Lincoln, 1981; Lincoln y Guba, 1985; Castillo y Vásquez, 2003). A continuación, se presenta cómo se usaron en esta investigación bajo el enfoque de un estudio de caso.

El criterio de credibilidad fue considerado por el investigador al ser consciente de sus roles[30] en el análisis e interpretación de datos investigativos. Registró la argumentación entre los participantes por medio de videos y audios y luego con sus respectivas transcripciones. Además, promovió el diálogo al ser facilitador o refutador y no validador de los argumentos que comunicaban los tres participantes y no impuso sus conocimientos o punto de vista a través de la autoridad (Harel y Sowder, 1998). Asimismo, discutió los análisis y las interpretaciones parciales de los datos con otros investigadores.

El criterio de auditabilidad se estimó a partir de la grabación en video o en audio de la argumentación de los maestros en formación inicial en ambos auditorios. El investigador describió las características de los participantes y discutió circunstancias de los auditorios en los que se realizó la recolección de los datos. Los argumentos comunicados por los colegas, los estudiantes de escuela primaria o secundaria o el investigador no fueron analizados.

El criterio de transferibilidad o aplicabilidad da cuenta de la posibilidad de ampliar los resultados del estudio a otras poblaciones. Guba y Lincoln (1981) indican que se trata de examinar qué tanto se ajustan los resultados a otro contexto. De manera específica, los maestros en formación inicial y sus maneras de comunicar conocimientos o puntos de vista a sus colegas y a sus estudiantes evidencian características contextuales, epistemológicas y curriculares que son

[30] Como se expuso antes en este capítulo.

compartidas en las instituciones educativas; de tal suerte que se examinaron tanto las características de las maneras de argumentar como la representatividad de los datos en un todo.

5.2. Conclusiones de capítulo

Esta investigación se desarrolla bajo un estudio de caso, el cual consistió en el análisis e interpretación de las particularidades de la argumentación de los tres participantes pertenecientes a la Licenciatura. Los auditorios considerados son el seminario de práctica pedagógica entre maestros en formación inicial, colegas e investigador y el aula de clase entre maestros en formación inicial y sus estudiantes. En la Tabla 5 se indican las fuentes y fases del trabajo de campo.

Tabla 5: Descripción de la recolección de datos investigativos en dos fases.

Fuentes de recolección de datos / Fase		Encuentros en el auditorio del seminario o en el auditorio del aula de clase
Primera fase	**Semestre 2015-01**	Grabaciones en video de presentación y discusión de tareas por parte de los tres participantes con sus colegas y con el investigador en el auditorio del seminario.
Segunda fase	**Semestre 2015-02**	Grabación en audio de clases de los tres participantes con sus estudiantes de escuela elemental.

Capítulo 6

---

6. Análisis e interpretación de datos investigativos

Quisiera poder conjeturar, justificar y comprender el tiempo cósmico en comparación con el tiempo de vida de una mariposa, de una flor o de un amor. (Durango, 2009)

Este capítulo presenta el análisis de los datos investigativos recolectados, la estrategia empleada fue la interpretación directa de los ejemplos individuales (Stake, 1999). Con este fin, a medida que se presentan los segmentos locutivos a través de sucesivas transcripciones numeradas se usan dos tipos de tablas: interpretación de ejemplos individuales para cada transcripción y recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación por cada tarea. Además, en el análisis e interpretación de los datos investigativos se utiliza el referente teórico discutido en el capítulo 4. De forma específica, en el primer apartado, se presenta el análisis de seis encuentros que ocurrieron en el auditorio del seminario de práctica pedagógica, los cuales pertenecen a las presentaciones de las preparaciones de clases para la enseñanza de la geometría en el aula de clase. En el segundo apartado, se presenta el análisis de tres encuentros que ocurrieron en el auditorio del aula de clase.

6.1. Análisis de datos investigativos recolectados en el auditorio del seminario de práctica pedagógica

El segmento locutivo que se documenta en este apartado se registra entre las transcripciones uno y treinta y ocho, y corresponde, en su orden, con los diálogos de los tres participantes (Carlos, Helena y María) durante la presentación de la preparación de clases o de la discusión de algunos temas de geometría en el auditorio del seminario de práctica pedagógica. Además, se unieron la Colega 1, el Colega 2 y el investigador. A continuación, se inician el análisis y la interpretación de la argumentación llevada a cabo por Carlos y la Colega 1; después, se detallan las otras partes del análisis.

6.1.1. Tarea 1: Presentación de preparación de clase de la Colega 1 con Carlos sobre el Teorema de Pitágoras

El primer segmento locutivo se documenta entre las transcripciones uno y siete, el cual evidencia la presentación de la preparación de clase del Teorema de Pitágoras para estudiantes de noveno grado. Esta tarea se llevó a cabo en el auditorio compuesto por dos maestros en formación inicial –Carlos y su Colega 1– y el investigador, quienes discutieron sobre la construcción de un triángulo rectángulo de longitud: tres, cuatro y cinco unidades, realizado mediante el uso del Geogebra y proyectado en una pantalla. La tarea que presenta la Colega 1 se enmarca dentro del paradigma de enseñanza de la geometría axiomática natural, porque durante los argumentos se usan con frecuencia garantías teóricas.

Carlos inicia la construcción del triángulo rectángulo; sin embargo, su Colega 1 expresa que ella presentará a los estudiantes de noveno grado, el teorema mediante un triángulo rectángulo realizado en Geogebra a partir del ángulo recto preestablecido en el sistema de coordenadas del Geogebra [1] (Figura 2). En este momento, el investigador interroga tanto a

Carlos como a la Colega 1 por la construcción del triángulo y por el uso del ángulo recto preestablecido del plano coordenado del Geogebra; pregunta si construirán el ángulo recto y el triángulo rectángulo y si luego, comprobarían el teorema [2]. Con esto, el investigador intenta que tanto Carlos como su Colega 1 consideren el auditorio para el cual se dirige la preparación de la clase [2].

La Colega 1 expresa un punto de vista que se relaciona con la posibilidad de que sus estudiantes durante la enseñanza del teorema, construyan el triángulo rectángulo mediante el ángulo recto preestablecido en el sistema de coordenadas del Geogebra [1], lo cual facilita tanto la construcción del triángulo como la comprensión de sus estudiantes. En este punto de vista se usa una garantía evaluativa (Nardi et al., 2011). Sin embargo, Carlos no se adhiere al argumento de su Colega 1, en la construcción del triángulo, y vence la 'apelación a la autoridad' (Harel y Sowder, 1998) de su Colega 1 –quien presenta–. Ante la pregunta del investigador, la Colega 1 responde que sería apropiada la construcción que realizó Carlos [5], con lo cual se evidencia su adhesión a esta afirmación, lo que confiere fuerza al argumento de Carlos (Apostel, 2007).

Transcripción 1: Colega 1 e investigador, video 1

1	Colega 1:	¡Yo pensé como si fuera un estudiante! Como tengo un plano cartesiano, ***entonces***[31] es más fácil ubicarlo desde el plano, ¡desde cero! ***Entonces*** yo sé que es un triángulo rectángulo de catetos tres, cuatro ***y*** cinco [unidades de medida].
2	Investigador:	¿Ustedes qué creen que un estudiante de noveno haría ahí?
3	Investigador:	¿Piensan más fácil en el ángulo recto que hay en los ejes coordenados (Figura 2) ***o*** construyen todo el triángulo como lo hizo Carlos?
4	Investigador:	¿***Pueden*** aparecer diferentes formas?
5	Colega 1:	Yo pienso que más como Carlos.

[31] En cada una de las trascripciones, los indicadores de argumentación se resaltan a través del uso de letra negrilla y cursiva.

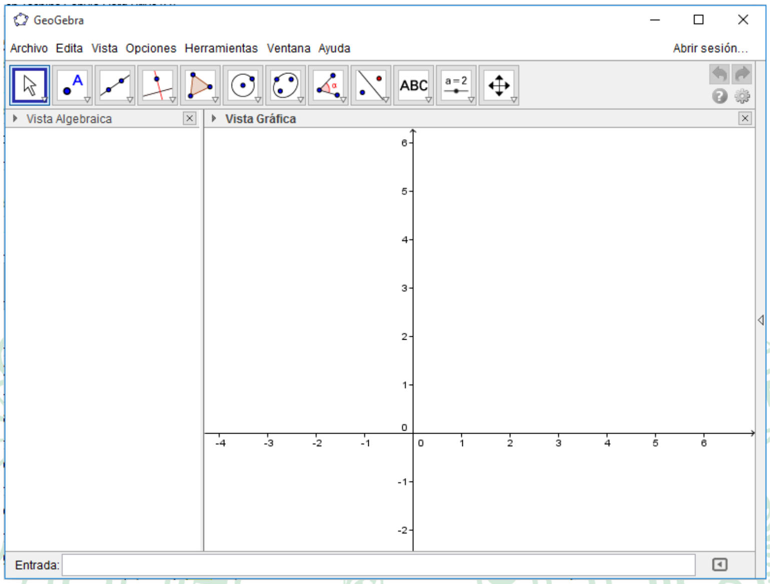


Figura 2: Sistema de coordenadas del Geogebra.
Fuente: Diseño elaborado por Carlos.

Carlos inicia la argumentación de características dialógicas entre su Colega 1 y el investigador al refutar la propuesta de su compañera diciendo que deben considerarse formas diversas de construcción del triángulo rectángulo y que no deben ceñirse de manera exclusiva al uso del ángulo recto preestablecido en el sistema coordenado del Geogebra. En este sentido, la argumentación se evidencia cuando Carlos usa la expresión ‘¿sí o no? ¡Así!’ [6]; durante esta respuesta, Carlos emplea el cualificador modal ‘pueden aparecer’ [6], es decir, la construcción no se reduce solo a su propuesta o a la de ella. Después, Carlos utiliza el indicador de argumentación ‘no’ para afirmar que ella no explicitó que usará el ángulo recto del sistema de coordenadas del Geogebra [6]. Al final, la Colega 1 apoya esta afirmación al indicar la importancia de permitir formas diversas de construcción del triángulo [9].

Transcripción 2: Carlos, Colega 1 e investigador, video 1

6 **Carlos**[32]: ¿Sí ***o no?*** ¡Así! ***Pueden aparecer*** diferentes formas, ¿***o no?*** ¡Así!, de para un lado, para abajo, ***o*** hacia el lado de allá, ***o ni siquiera*** como yo [lo hice] en el plano cartesiano. ***No*** para nada, ni siquiera lo estaba viendo. Me estaban diciendo vaya a polígono [refiriéndose a la herramienta del Geogebra], ***pero no*** me han

[32] Durante las transcripciones, se usará la letra negrilla para resaltar los nombres de los tres participantes: Carlos, Helena y María.

		dicho vaya a plano cartesiano ***y*** ubique su centro en el origen ***y*** trace el [ángulo] recto.
7	Colega 1:	Cuando yo estaba haciendo la guía[33], inmediatamente lo hice así. Si ***no*** que son dos maneras diferentes de razonar. Dos maneras diferentes de ver. Yo vi el plano cartesiano y dije: me están pidiendo tres ***y*** cuatro ***y***, ***de pronto,*** es por la formación.
8	Investigador:	A mí me parece interesante como se construye, ***porque*** das la posibilidad de dejarlo abierto desde que se puedan ver otras formas. No es una forma que emplea los ejes coordenados ***sino*** otra forma. ¡Carlos tomó una forma diferente!
9	Colega 1:	Yo pensé que lo iba hacer así [haciendo referencia al triángulo de Carlos], ***pero*** es bueno lo que se ve ahí. ¡Hay varias formas!

Tabla 6: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 2.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
6	Cualificador modal	Pueden aparecer.
6	Indicadores de argumentación	O, no, pero, y.

Carlos confiere después fuerza a sus argumentos por medio de su pertinencia (Apostel, 2007), al proponer que se construya tanto el ángulo recto como el triángulo rectángulo (Figura 3). La expresión ‘yo lo hubiera hecho’ denota una acción posible; incluso, usa algunas definiciones sobre perpendicular, radio e intersecciones que corresponden con garantías a priori-epistemológicas [10].

Transcripción 3: Carlos e investigador, video 1

10	**Carlos**:	Yo lo hubiera hecho con segmentos. Hubiera trazado un segmento, ***luego*** le trazo la perpendicular, trazo un radio tres, ***luego*** un radio cuatro ***y*** uno las intersecciones.
11	Investigador:	¿Lo podríamos hacer? [refiriéndose a la construcción del triángulo].
12	**Carlos**:	Sí.
13	Investigador:	¡Hagámoslo, Carlos!

Tabla 7: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 3.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
10	Garantía a priori-epistemológica	Uso de definiciones sobre perpendicular, radio e intersecciones.
10	Indicadores de argumentación	Luego, y.

[33] En esta guía, la Colega 1 mediante el uso del *software* Geogebra propone los siguientes pasos: dibujen un triángulo rectángulo cuyos catetos sean de tres y de cuatro unidades, y cuya hipotenusa sea de cinco unidades; utilicen el *software* para dibujar un cuadrado sobre cada lado del triángulo anterior, calculen las áreas de los cuadrados dibujados, luego respondan: ¿cuál es la relación entre la suma de las áreas de los cuadrados dibujados en cada cateto y el área del cuadrado dibujado sobre la hipotenusa? Verifiquen si la relación hallada cumple para triángulos rectángulos y para triángulos no rectángulos; finalmente, escriban una fórmula o expresión matemática que les permita expresar la relación hallada para un triángulo rectángulo cuyos catetos sean a y b y cuya hipotenusa sea h.

Mediante la construcción, Carlos realiza su comprobación a partir del uso de algunas herramientas del Geogebra a solicitud de su Colega 1 [14], por medio del cálculo de las áreas de los tres cuadrados que se han construido (Figura 3), dos sobre los catetos y uno sobre la hipotenusa [15].

Transcripción 4: Colega 1, video 1

14	Colega 1:	¡En esa construcción que hiciste, en ***cada*** cateto, construir un cuadrado!
15	Colega 1:	Ahora calcule el área de cada uno de los cuadrados.

Cuando Carlos calcula las áreas de los cuadrados, el investigador pregunta [16] tanto a él como a la Colega 1 por las unidades de medida de tales áreas. Cuando Carlos responde que no sabe en qué unidades se está midiendo el área de los tres cuadrados, usa el indicador de argumentación 'no' [17]. Al investigador insistir con la pregunta [18], Carlos responde que el área se mide en milímetros, pero reconoce de inmediato que se ha equivocado, y afirma que el área se está midiendo en unidades cuadradas. Esta equivocación se evidencia cuando emplea de nuevo el indicador de argumentación 'no' [23]; luego, utiliza el indicador de argumentación 'no' para indicar que el área de los cuadrados se mide en unidades cuadradas y afirma que no estaba equivocado, sino que se refería a las unidades de la longitud de los lados de los tres cuadrados [25]. Por último, Carlos usa el indicador de argumentación 'ni' para denotar que en la medición del área no empleó unidades lineales sino cuadradas [27]. Al final, Carlos emplea una expresión exclamativa para indicar al auditorio que las dudas han sido resueltas [28].

Transcripción 5: Investigador, Carlos y Colega 1, video 1

16	Investigador:	¿***Y*** en qué unidades? ¡El estudiante podría preguntar! ¿Centímetros?
17	**Carlos**:	¡***No*** sé! ¡En deditos! ¡En metros! ¡En kilómetros! ¡***No*** estamos mencionando centímetros o metros!
18	Investigador:	¿Qué unidades…?
19	Investigador:	¿Veinticinco qué…?
20	**Carlos**:	Milímetros.
21	Investigador:	¿Milímetros?
22	Colega 1:	¿Centímetros?
23	**Carlos**:	¡***No, no, menos!***

24	Investigador:	¿Serían 9 milímetros, 16 milímetros, 25 milímetros? (Figura 3).
25	**Carlos**:	***No, no, no.*** Áreas cuadradas, ***pero*** yo me refería a los lados.
26	Colega 1:	¡Ah! 9 unidades cuadradas, 16 unidades cuadradas, 25 unidades cuadradas.
27	**Carlos**:	***Ni*** centímetros, ***ni*** metros, ***ni*** milímetros, ¡nada!, ¡unidades cuadradas!, ***pero*** me refería a los lados.
28	**Carlos**:	¡Listo, Colega 1!

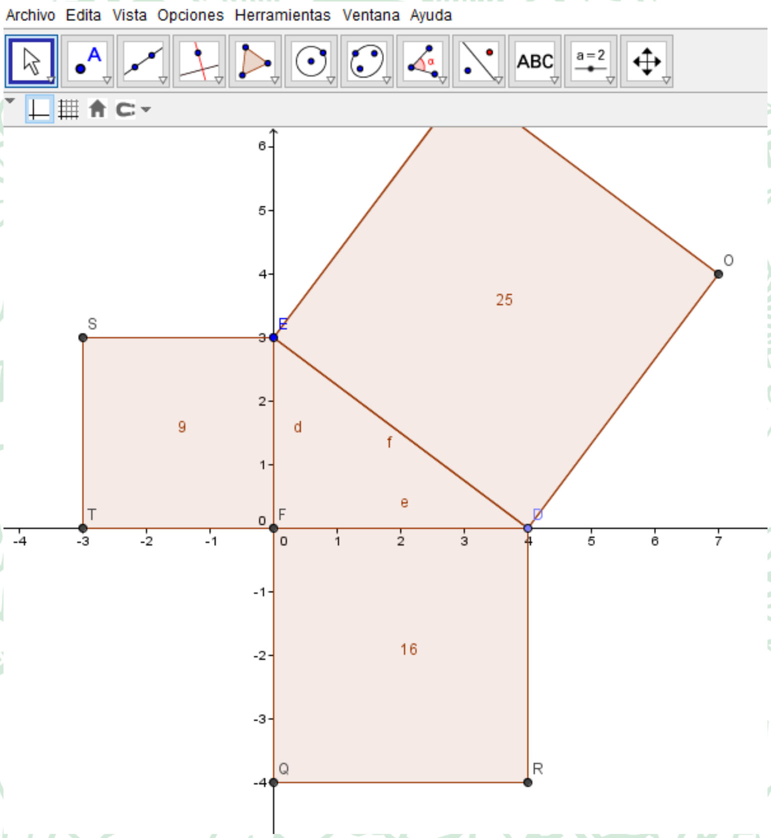


Figura 3: Teorema de Pitágoras por Carlos.
Fuente: Diseño elaborado por Carlos.

Tabla 8: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 5.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
17, 23 y 27	Indicadores de argumentación	No, ni, pero.

A continuación, la Colega 1 pregunta a Carlos por la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. Carlos responde por la relación numérica del teorema; aquí usa el indicador de argumentación ‘pues’ [30], el cual evidencia un argumento con la intención de explicar (De Villiers, 1993; Reiss, 2007). Esta relación numérica corresponde con la suma de los cuadrados de la longitud de los catetos [30], o como la resta entre el cuadrado de la longitud de la hipotenusa y el cuadrado de la longitud de uno de los catetos [30] (Figura 3). Además, para indicar las dos posibles restas, Carlos usa el indicador de argumentación 'o' [30].

Transcripción 6: Colega 1 y Carlos, video 1

29	Colega 1:	¿Cuál es la relación entre la suma de las áreas de los cuadrados dibujados en ***cada*** cateto ***y*** el área del cuadrado dibujado sobre la hipotenusa?
30	**Carlos**:	***Pues*** 16+9 es igual a 25. ¡Igual que el grande! Esa sería la relación, ***o*** si revisto este con este. Esto es: 25−9 me da 16 ***o*** 25−16 me da 9. (Figura 3).

Tabla 9: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 6.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
30	Indicadores de argumentación	Pues, o.
30	Argumento con intención de explicar	Carlos ofrece otras afirmaciones sobre el Teorema de Pitágoras.

De esta manera, la Colega 1 propone a Carlos verificar si el teorema se cumple [31], tanto para la suma de las áreas entre los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos que son rectángulos, como para la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos que no son rectángulos. Es decir, esta verificación permite que él conjeture sobre relaciones numéricas que pueden existir entre la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo que no es rectángulo. Además, la verificación se hace por medio de un sistema dinámico de geometría como es el Geogebra, mediante un *argumento instrumentado* (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010).

Cuando Carlos ofrece su argumento explicativo, usa el indicador de argumentación 'es decir' [32]. Asimismo, Carlos usa una garantía a priori con el uso de medios, con la intención de persuadir el auditorio a partir del Geogebra, de la calculadora, y de la figura construida para el teorema. Para ello, utiliza el indicador de argumentación 'no', que indica que el no observa ninguna conjetura [34]; también emplea el cualificador modal 'puede' para mostrar la posibilidad de existencia de algunas conjeturas. Al conjeturar, usa el cualificador modal 'siempre' [40]; sin embargo, tal conjetura no es validada.

Transcripción 7: Colega 1, Carlos e investigador, video 1

31	Colega 1:	¡Verificar para triángulos que ***no*** son rectángulos! (Figura 4).
32	**Carlos**:	***Es decir***, ¿trazo un triángulo ***cualquiera***?
33	**Carlos**:	¿Qué relación puedo sacar de aquí?, ¿empleando la calculadora?
34	**Carlos**:	6,51 – 6,45 es igual a 0, 06. ***No*** da igual, ***no*** corresponde, es distinto. 1,63 + 6,45, claramente ***no*** va a dar 6,51. ***No*** observo ***ninguna*** relación. ***Puede*** que haya, ***pero no*** observo ***ninguna.***
35	Investigador:	¿Habría qué…?
36	**Carlos**:	Habría que entrar a mover… Podríamos entrar a mover… ***No*** sé… Si subo más…
37	Colega 1:	¡Ahí sí ***puedes*** concluir algo!
38	**Carlos**:	Digamos que el ángulo del triángulo ***no*** es recto, ***mientras*** lo voy tornando recto, los dos catetos se van acercando a la suma de la hipotenusa.
39	**Carlos**:	Quiero ver algo [Él experimenta con varios triángulos].
40	**Carlos**:	***Siempre*** el área de los lados de ***cualquier*** triángulo de los dos catetos es mayor al del lado mayor. ¡Pensaríamos! ¡***No*** lo tengo a ciencia cierta!

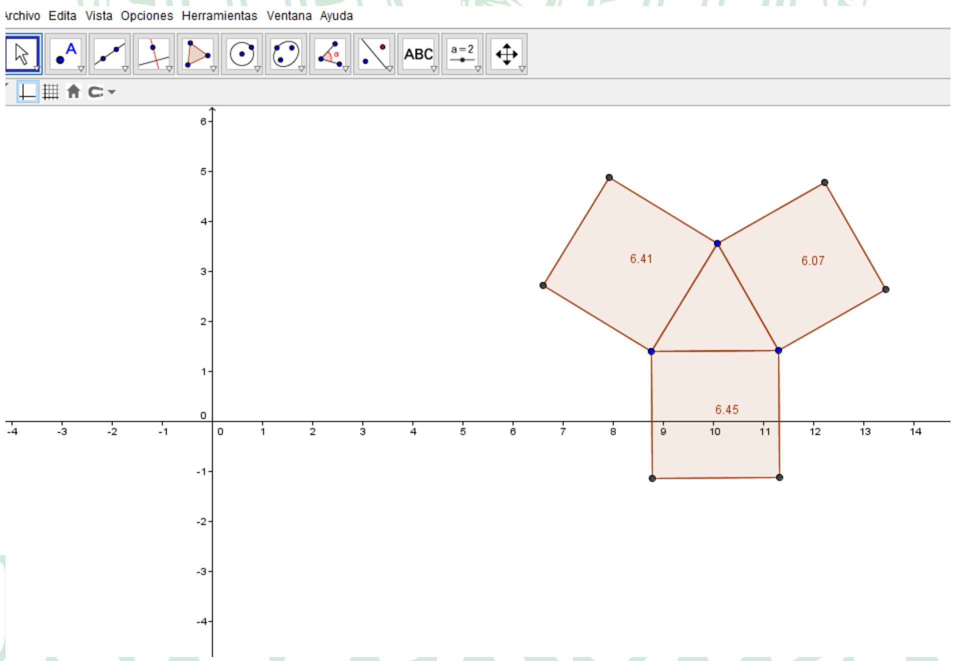


Figura 4: Verificación del teorema para triángulos no rectángulos por Carlos.
Fuente: Diseño elaborado por Carlos.

Tabla 10: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 7.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
32	Indicador de argumentación	Es decir.
32	Cualificador modal	Cualquiera.
34	Indicadores de argumentación	No, pero no.
34	Cualificadores modales	Ninguna, puede.
32-34	Argumento con intención de explicar	Carlos ofrece otras afirmaciones sobre triángulos que no contienen un ángulo recto al aplicar el Teorema de Pitágoras.
36	Indicador de argumentación	Mientras.
40	Cualificadores modales	Siempre, cualquier.
40	Indicador de argumentación	No.

La Tabla 11 muestra un resumen de la interpretación de los ejemplos individuales propuestos en esta tarea.

Tabla 11: Recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación de la Tarea 1.

Diálogo/Monólogo	Argumento con carácter dialógico	Transcripciones 1 a 7, excepto la 1 y la 4.	
	Argumento con carácter monológico	Transcripciones 1 y 4.	
Indicadores de argumentación		Transcripción 1	Entonces, o.
		Transcripción 2	O, no, pero, porque, sino.
		Transcripción 3	Luego.
		Transcripción 5	Y, no, pero.
		Transcripción 6	Pues, o.
		Transcripción 7	No, es decir, pero no, mientras.
Componentes argumentativos	Garantía evaluativa	Transcripción 1	
	Garantía a priori-epistemológica	Transcripción 3	
	Cualificador modal	Transcripción 1	Puede.
		Transcripción 2	Ni siquiera, de pronto.
		Transcripción 4	Cada.
		Transcripción 7	Cualquiera, ninguna, puedes, siempre.
Intención de los argumentos	Para explicar	Transcripción 6	

6.1.2. Tarea 2: Presentación de preparación de clase de Helena sobre el Teorema de Pitágoras

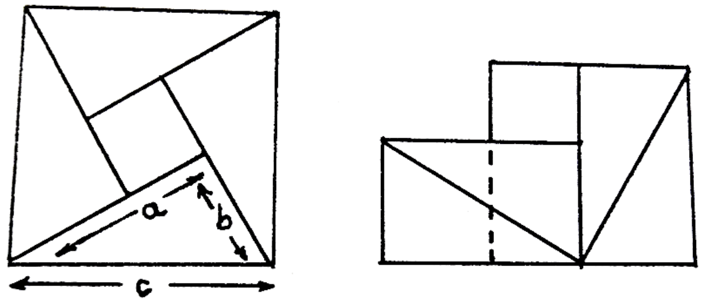
La tarea que presenta Helena se enmarca dentro del paradigma de enseñanza de la geometría axiomática natural, porque durante los argumentos se usan con frecuencia garantías teóricas. El segundo segmento locutivo se muestra entre las transcripciones ocho y trece, el cual evidencia la presentación de la preparación de la clase del Teorema de Pitágoras que Helena realizó en el auditorio del seminario ante Carlos y el investigador.

Para su preparación de clase, ella comunica que usó conocimientos construidos culturalmente sobre el teorema, lo cual evidencia el uso de una garantía epistemológico-institucional, referida al *Rompecabezas de Bhaskara* (Figura 5), para respaldar el argumento que ofrece ante la pregunta formulada por el investigador [1 y 2]. Además, usa una garantía a priori-epistemológica sobre la definición de triángulo rectángulo [2].

En la transcripción ocho, pueden evidenciarse los usos de algunos indicadores de argumentación [2], tales como 'entonces', 'y' y 'también'. Asimismo, usa la expresión 'es decir' [2], la cual significa que ofrecerá argumentos explicativos ante la pregunta que formula el investigador.

Transcripción 8: Investigador y Helena, video 2

1	Investigador:	¿Cómo enseñarías el Teorema de Pitágoras a estudiantes de noveno grado?
2	**Helena**:	A mí me gustaría hacer esta explicación desde el *Rompecabezas de Bhaskara*, un matemático hindú que, para introducir el Teorema de Pitágoras, lo que hizo fue un rompecabezas. En su demostración, ***entonces*** él partió de un triángulo rectángulo. ***Es decir***, [con] un triángulo que tenga un ángulo recto, [se] tiene la posibilidad de demostrar que el cuadrado que se forma con este cateto [Refiriéndose al cateto a y b del triángulo rectángulo de la Figura 5], que así lo llamamos a este lado ***y*** a este lado ***también***: cateto; la suma de este cuadrado más este cuadrado me va a dar el cuadrado que se forma aquí, que es lo que vamos a ver en la plantilla, ***entonces*** lo que él hizo fue un rompecabezas con el cuadrado que se forma acá ***y*** con este cuadrado que se forma acá, para demostrar que la suma de estos dos cuadrados me va a dar este cuadrado. (Figura 5).



$$c^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

Figura 5: Teorema de Pitágoras según Bhaskara.
Fuente: Diseño elaborado por el autor de esta investigación.

Tabla 12: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 8.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
2	Indicadores de argumentación	Entonces, es decir, y, también.
2	Garantía epistemológico-institucional	Uso del Rompecabezas de Bhaskara.
2	Garantía a priori-epistemológica	Definición de triángulo rectángulo.

Por consiguiente, propone usar hojas de papel para presentar el teorema mediante la comprobación de Bhaskara (Figura 5); esto corresponde con una garantía a priori con el uso de medios. Al responder la pregunta que ella se plantea [3 y 4], Helena utiliza indicadores de argumentación diversos, entre ellos ‘pero’, el cual refiere a que si bien existen otras comprobaciones del teorema (e.g., el de Perigal), empleará la comprobación de Bhaskara. Otro indicador de argumentación que usa es ‘entonces’, para indicar avances en su argumento monológico. De igual manera, procede a la comprobación del teorema, a partir del acoplamiento de los triángulos que resultan según Bhaskara. En otro orden de ideas, en la transcripción nueve, puede evidenciarse un ejemplo de un argumento con carácter monológico porque la participante se pregunta y se responde; es decir, que por unos instantes ella se solicita y se ofrece argumentos ante el auditorio del seminario.

Transcripción 9: Helena, video 2

3 **Helena**: ¿Cómo lo demostró él? [Ella se pregunta en el turno 3, y se responde en el turno

		4]
4	**Helena**:	Haciendo [acoplando] esta parte más esta parte [se compone] un rompecabezas que forma el cuadrado. ***Entonces*** para esto, hay varios, está el de Perigal, ***pero*** hoy vamos a demostrar el de Bhaskara. ***Entonces*** para ustedes [refiriéndose al auditorio] yo tengo una plantilla en blanco que sería la que vamos a utilizar. En este momento, vamos a utilizar esta para que nos dé la misma medida. ***Entonces*** tendríamos el triángulo del centro que es un triángulo rectángulo con los cuadrados del lado como les estaba mostrando que es un triángulo rectángulo ***y*** forma los tres cuadrados. (Figura 5)
5	**Helena**:	¿Qué haríamos?
6	**Helena**:	La idea es que cada uno tenga su plantilla ***y*** armamos el cuadrado mayor […]
7	**Helena**:	¿Listo?
8	**Helena**:	Para formar el grande, ***entonces,*** digamos que del cuadrado del medio buscamos el punto medio de este segmento que viene siendo este, ***y*** buscamos el punto medio aquí ***y*** la idea es unir este vértice de aquí con este punto de acá, y este punto con este vértice. ***No*** es así, este punto con este. Si es así, ***pero*** primero para formar éste. ¿Qué tenemos aquí? cuatro triángulos congruentes rectángulos (Figura 5).
9	**Helena**:	¿Cierto?

Tabla 13: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 9.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
3-4	Argumento con carácter monológico	Ella se pregunta y luego se responde.
4	Indicadores de argumentación	Entonces, pero, y.
4	Garantía a priori con el uso de medios	Comprobación de Bhaskara.
6	Indicador de argumentación	Y.
8	Indicadores de argumentación	Entonces, y, no, pero.

Después de cierto tiempo, Helena usa el cualificador modal ‘todos’ [10], en cuatro ocasiones para referirse a los ángulos rectos de los triángulos que están relacionados con la comprobación del teorema (Figura 5). Usa de manera continua algunos indicadores de argumentación, tales como ‘y’, ‘ya luego’, ‘de ahí’ y ‘así es’; y luego, el cualificador ‘más o menos’, que evidencia la provisionalidad y la relatividad de su preparación de clase; asimismo el uso de la racionalidad práctica en sus argumentos (Habermas, 1999, 2002).

Transcripción 10: Helena, video 2

10	**Helena**:	Tienen ***todos*** sus ángulos rectos ***y todos*** son iguales. ***Y*** este cuadrado de aquí lo dejamos como está. ***Ya luego*** la idea es que con sus tijeras recortemos ***todos*** estos triangulitos, estos cuatro triángulos más este cuadrado pequeño. ***De ahí,*** al recortarlos la idea es que con el rompecabezas formemos el cuadrado grande, que viene siendo el que se forma con el lado de la hipotenusa. Así es ***más o menos*** el bosquejo que Bhaskara, el hindú matemático, nos muestra para hacer toda esta

		demostración, esta es la forma como yo lo hice, ***pero*** en realidad la forma, de los triángulos queda así. (Figura 5).
11	**Helena**:	¿Listo?
12	**Helena**:	Mira ***de todas maneras*** los triángulos así, ***pero*** en otra dirección.

Tabla 14: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 10.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
10	Cualificadores modales	Todos, más o menos.
10	Indicadores de argumentación	Y, ya luego, de ahí, pero.
12	Cualificador modal	De todas maneras.
12	Indicador de argumentación	Pero.

A continuación, el investigador [13] antagoniza los argumentos de Helena al proponer que un estudiante puede preguntarle por las posiciones del trazo del dibujo de un triángulo rectángulo. Este antagonismo surge a partir de una pregunta [13] por medio de la cual se solicita a Helena un argumento para la defensa (McClain, 2009). Por su parte, Carlos apela a Helena mediante una pregunta, en la que usa el indicador de argumentación ‘o sea’ [16]. Ella defiende sus acciones con el ofrecimiento de su argumento ante el auditorio con el uso de una garantía empírico-profesional que se relaciona con las posiciones de un triángulo rectángulo[34] [17] (Figura 5). Por último, Helena usa una interrogación con el fin de que el auditorio apruebe el argumento que ha ofrecido [18].

Transcripción 11: Investigador, Helena y Carlos, video 2

13	Investigador:	¡Helena! un estudiante le podría decir: ¡Profesora se equivocó!, ¿mira qué allá lo estás presentando en esa posición, ***y*** aquí de esta forma? [En relación con la posición del triángulo rectángulo] (Figura 5).
14	Investigador:	¿Qué responderías?
15	**Helena**:	¡Ah!, yo le diría que esos cuatro triángulos siguen siendo congruentes ***y*** son los mismos; solo que, desde otras direcciones, desde el centro del cuadrado.
16	**Carlos**:	***O sea,*** ¿cuando usted obtenga la mitad ahí le va a trazar?
17	**Helena**:	Lo que pasa es que el alumno ***tiende mucho*** a decir que si yo le hago esto [mueve el triángulo rectángulo], ya este ***no*** es un triángulo rectángulo.
18	**Helena**:	***¿Cierto?***

[34] Los maestros dibujan usualmente solo una posición del triángulo rectángulo en el tablero para sus estudiantes en la que el ángulo recto se ubica sobre el lado izquierdo o derecho de la horizontal del estudiante que se ubica enfrente del tablero.

Tabla 15: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 11.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
14-15	Argumento	Intención de defensa.
15	Indicador de argumentación	Y.
17	Cualificador modal	Tiende mucho.
17	Indicador de argumentación	No.
17	Garantía empírico-profesional	Experiencia de Helena sobre la presentación de posiciones de triángulos rectángulos a sus estudiantes.

Asimismo, Helena continúa explicando su preparación de clase con el rompecabezas que se obtiene de la comprobación según Bhaskara. Para ello, usa una garantía a priori-epistemológica para indicar que los cuatro triángulos rectángulos que contiene el rompecabezas son congruentes [19] (Figura 5). Además, usa el indicador de argumentación 'entonces', que indica un avance en el ofrecimiento de sus argumentos [19].

No obstante, Helena propone que los estudiantes tengan hojas en blanco para construir y recortar las figuras del rompecabezas [19] y usa el indicador de argumentación 'también', para señalar que los estudiantes explorarían algunas relaciones que se aproximen a las del teorema mediante la construcción de la figura recortada del papel [19].

Transcripción 12: Helena, video 2

19 **Helena**: Que ya le estoy dando la forma así, ***pero*** que desde cualquier ángulo que lo mueva siempre va a ser un triángulo rectángulo. ***Entonces en este caso***, este o este vienen siendo iguales, son congruentes totalmente; en este caso lo haríamos así. La idea es que ellos tengan la plantilla en blanco ***y*** construyan ellos mismos desde el cuadrado del medio ***pues*** cuatro triángulos. Al recortar los cuatro triángulos ***y*** al recortar el cuadrado del medio les queda el cuadro: ¡este!, con el cuadrado del medio y los cuatro triángulos. Esa sería la construcción a la que ellos llegarían. La idea es que ***también*** se pregunten: ¿qué es lo que sucede ahí?, ¿qué pasa?, ¿qué se está demostrando en este caso?, ¿cuál es la idea ***y*** para qué llegar a esto?

20 **Helena**: ¿Cierto?

Tabla 16: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 12.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
19	Garantía a priori-epistemológica	Cuatro triángulos que componen la comprobación de Bhaskara son congruentes.
19	Indicadores de argumentación	Pero, entonces, y, pues, ya que, y también.

Al continuar el diálogo, Helena propone la formalización del teorema y emplea las definiciones de cateto e hipotenusa, lo cual se relaciona con el uso de garantías a priori-epistemológicas [21]. Además, usa una garantía empírico-personal, con la intención de que no tenga que experimentar con sus estudiantes otros rompecabezas, sino que solo a partir de este puedan construir los significados del teorema. Este argumento corresponde con una generalización mediante el uso del recurso retórico ejemplo (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). Según Helena, el uso de este recurso permitirá que los estudiantes generalicen significados del teorema a partir de un caso particular [21].

Transcripción 13: Helena, video 2

21 **Helena**: ***Entonces*** la idea es formalizar [con] la parte algebraica, ya ***podríamos decir*** que el triángulo de lado 'a' el largo ***y*** lado 'b' sería el otro cateto ***y*** la hipotenusa que digamos, ¡no sé!, lado 'c', ***entonces*** como se llegará a abstraer esto, ***pues*** como llegarían a ese algoritmo ***como tal*** para demostrar que en ***cualquier*** triángulo ***puede suceder*** eso para ya ***no*** tener que construir desde varios rompecabezas, ***sino*** que ya sé que en un triángulo rectángulo pasa eso. (Figura 5).

22 **Helena**: ¿Cierto?

23 **Helena**: ***Entonces*** la idea es que ellos digan: en este triángulo, ***como tal,*** de lado 'a', este cateto; ***y*** de lado 'b' este otro, ***y*** la hipotenusa 'h' ***entonces puedo decir*** que ellos ***pueden*** llegar a la conclusión: que 'c' al cuadrado es igual a este cateto al cuadrado, más este otro cateto al cuadrado [Refiriéndose al triangulo rectángulo de la Figura 5].

24 **Helena**: ¿Listo?

25 **Helena**: ***Esto es como*** más que todo, esa es la conclusión de la clase. Se vería en video con unos ejemplos más contextualizados sobre cómo se pueden ver alrededor de lo que vivimos en nuestro contexto.

Tabla 17: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 13.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
21	Garantía a priori-epistemológica	Definición de cateto e hipotenusa.
21	Garantía empírico-personal	Realizar una sola experiencia del Teorema con sus estudiantes.
21	Recurso retórico ejemplo	Generalizar significados del Teorema de Pitágoras.
21	Indicadores de argumentación	Entonces, podríamos decir, y, entonces, pues, como tal, no, sino.
21	Cualificadores modales	Cualquier, puede suceder.
23	Indicadores de argumentación	Entonces, como tal, y, entonces, puedo decir.
25	Indicador de argumentación	Esto es como.

La Tabla 18 expone un resumen de la interpretación de los ejemplos individuales propuestos en la presentación de esta tarea.

Tabla 18: Recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación de la Tarea 2.

Diálogo/Monólogo	Argumento con carácter monológico	Transcripciones 9, 10 y 12.	
	Argumento con carácter dialógico	Transcripciones 8, 11 y 13.	
Indicadores de argumentación		Transcripción 8	Entonces, es decir, también.
		Transcripción 9	Entonces, pero, entonces, no.
		Transcripción 10	Ya luego, de ahí, pero.
		Transcripción 11	O sea, no.
		Transcripción 12	Entonces en este caso, pues.
		Transcripción 13	Entonces, pues, no, sino, como tal, esto es como.
Componentes argumentativos	Garantía epistemológico-institucional	Transcripción 8	
	Garantía a priori-epistemológica	Transcripción 8 Transcripción 12 Transcripción 13	
	Garantía a priori con el uso de medios	Transcripción 9	
	Garantía empírico-profesional	Transcripción 11	
	Garantía empírico-personal	Transcripción 13	
	Cualificador modal	Transcripción 10	Todos, más o menos, de todas maneras.
		Transcripción 11	Tiende mucho.
		Transcripción 13	Podríamos decir, cualquier, puede, puedo decir, pueden.
Intención de los argumentos	Para explicar	Transcripción 8	
		Transcripción 12	

6.1.3. Tarea 3: Preparación de clase de María sobre el Teorema de Pitágoras

La tarea que María presenta se enmarca dentro del paradigma de enseñanza de la geometría axiomática natural debido a que durante los argumentos se usan con frecuencia garantías teóricas. En este tercer segmento locutivo se muestra el desarrollo de esta tarea, que se registra entre las transcripciones catorce y veintiuno, el cual corresponde a la presentación de la preparación de la clase del Teorema de Pitágoras de María ante Carlos, Helena y el investigador en el auditorio del seminario.

María declara al principio la conclusión de su argumentación, que versa sobre enseñar el Teorema de Pitágoras a estudiantes de noveno grado mediante un rompecabezas [2] (Figura 5). Al responder la pregunta que le formula el investigador [1], usa una sentencia [2] en primera persona, la cual supone un entendimiento comunicativo y una acción (Habermas, 1999). Asimismo, usa el cualificador modal 'más o menos' [2], que significa que su propuesta de enseñanza es provisional y relativa, lo que evidencia el uso de la racionalidad práctica en sus argumentos (Habermas, 1999, 2002).

Transcripción 14: Investigador y María, video 3

1 Investigador: ¿Cómo enseñarías el Teorema de Pitágoras a estudiantes de noveno grado?
2 **María**: Lo que entendí del trabajo era hacer ***más o menos*** un esbozo de una actividad con estudiantes de grado noveno para enseñarles el Teorema de Pitágoras, ***entonces*** mi objetivo es que, mediante un rompecabezas, [se] llegue a lo formal del Teorema de Pitágoras (Figura 6).

Tabla 19: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 14.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
1	Conclusión	Enseñar el Teorema de Pitágoras a estudiantes de noveno grado.
2	Cualificador modal	Más o menos.
2	Indicadores de argumentación	Entonces, y.

Al continuar con sus argumentos, María afirma que consideró la propuesta de Carlos [3], lo cual demuestra el uso del recurso retórico modelo (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). Este sirve como evidencia de la intersubjetividad, que se refiere a la negociación de significados entre los participantes [3]. Además, en relación con el uso de la racionalidad práctica con arreglo a fines para la enseñanza (Herbst y Chazan, 2003, Rigotti y Greco, 2009; Nardi et al., 2011), María utiliza tanto una garantía epistemológico-institucional (Nardi et al.,

2011) sobre la historia del teorema, como el cualificador modal ‘aunque’ que refiere a la probabilidad de realizar un cuento para trabajar con sus estudiantes [3].

Transcripción 15: María, video 3

3 **María**: ***Inicialmente,*** como lo hizo Carlos, empezaría con algo de historia, aunque [como los estudiantes] están en noveno se les ***puede hacer*** un cuento acerca de la historia del Teorema de Pitágoras, ***porque*** se cree que lo inventó Pitágoras desde el inicio de la historia de las matemáticas. En las civilizaciones de Babilonia ***y*** de Egipto, ***también*** tenían ideas de las Ternas Pitagóricas haciendo aproximaciones con raíces cuadradas ***y*** con medidas aritméticas.

Tabla 20: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 15.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
3	Recurso retórico modelo	María considera la propuesta, que Carlos había presentado antes en el auditorio.
3	Cualificador modal	Aunque, puede hacer.
3	Indicadores de argumentación	Inicialmente, porque, también, y.

Durante la transcripción dieciséis, puede evidenciarse, por una parte, que María usa una garantía a priori-epistemológica (Nardi et al., 2011) cuando recurre al enunciado del teorema y a la definición de triángulo rectángulo [4]; por otra parte, que María usa el cualificador modal ‘exactamente’ [4] debido a que tiene la certeza de lo que afirma al auditorio. En este sentido, María ofrece una evidencia [4] del uso de la racionalidad teórica en la argumentación con características dialógicas (Habermas, 1999), la cual complementa la racionalidad práctica (Rigotti y Greco, 2009), y vincula sus acciones epistémicas, teleológicas y comunicativas (Habermas, 1999; Arzarello y Sabena, 2011).

Transcripción 16: María, video 3

4 **María**: Un hombre llamado Pitágoras descubrió un hecho asombroso sobre triángulos, ***si*** el triángulo tiene un ángulo recto; ***es decir,*** de 90° ***y*** [se] pone un cuadrado sobre cada uno de sus lados [del triángulo], ***entonces*** el cuadrado más grande [haciendo referencia al cuadrado construido sobre la hipotenusa] tiene ***exactamente*** la misma área de los otros dos cuadrados juntos. El lado más largo del triángulo se llama hipotenusa.

Tabla 21: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 16.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
4	Garantía a priori-epistemológica	María recurre al enunciado del Teorema de Pitágoras y a la definición de triángulo rectángulo.
4	Cualificador modal	Exactamente.
4	Indicadores de argumentación	Es decir, si…entonces…

María inicia su presentación de la propuesta de enseñanza del teorema con el uso del rompecabezas para conformar los cuadrados sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo [5]. Con esto pone en juego la racionalidad práctica y logra persuadir a los interlocutores (Perelman, 1997). Además, María utiliza una garantía a priori-epistemológica (Nardi et al., 2011) mediante la cual relaciona la actividad del rompecabezas con el enunciado del teorema. Luego, emplea casos particulares para verificar el teorema [5], que refieren la utilización del recurso retórico ejemplo [7] para persuadir a sus estudiantes y para que puedan generalizar sus afirmaciones (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006).

Transcripción 17: María, video 3

5 **María**: ***Así que*** iniciaría con un rompecabezas, ***más o menos*** que [los estudiantes] las recorten ***y puedan comprobar*** que si uno [el área de] los dos cuadrados que se forman sobre los catetos me daría como resultado el área [del cuadrado construido] sobre la hipotenusa. (Figura 5).

6 **María**: ***Ya después*** de hacer el trabajo acerca de lo que acabé de decir, ¿cómo lo ***puedo formar?*** Llegaría a la definición formal mostrándoles: El triángulo, ***entonces*** el cuadrado [de la medida] de un cateto más el cuadrado [de la medida] del otro cateto es igual al cuadrado [de la medida] de la hipotenusa.

7 **María**: Yo haría unas verificaciones, si funciona con un ejemplo básico, se haría de forma algebraica poniéndole numeritos [valores] a las longitudes de los lados para que calculen con una operación sencillita el área, **entonces** se miden tres [unidades de medida], el otro cuatro [unidades de medida], el resultado sería cinco [unidades de medida] al cuadrado. ¡Ahí mostramos la solución!

Tabla 22: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 17.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
5	Garantía a priori-epistemológica	Relación entre el *rompecabezas de Bhaskara* y el Teorema de Pitágoras.
6-7	Recurso retórico ejemplo	Generalizar significados del Teorema de Pitágoras.
5	Cualificadores modales	Más o menos, puedan comprobar.
6	Indicadores de argumentación	Así que, ya después, entonces.
7	Indicador de argumentación	Entonces.

Enseguida, María se pregunta y se responde, lo que evidencia el uso de un argumento con carácter monológico, aunque considera al auditorio en su argumento con la intención de explicar la utilidad del teorema.

Transcripción 18: María, video 3

8	**María**:	¿Por qué sería útil?
9	**María**:	***Si*** sabemos las longitudes de dos lados de un triángulo con un ángulo recto, el Teorema de Pitágoras nos ayuda a encontrar la longitud del tercer lado, ***pero*** les haría la anotación [a los estudiantes] de que ***solo funciona*** [únicamente] en triángulos rectángulos, que ***no*** funciona para todos los triángulos, ***entonces*** escribiría en forma de ecuación ***y*** ahí implementaríamos el álgebra por medio de ecuaciones (como se muestra en la Figura 6).

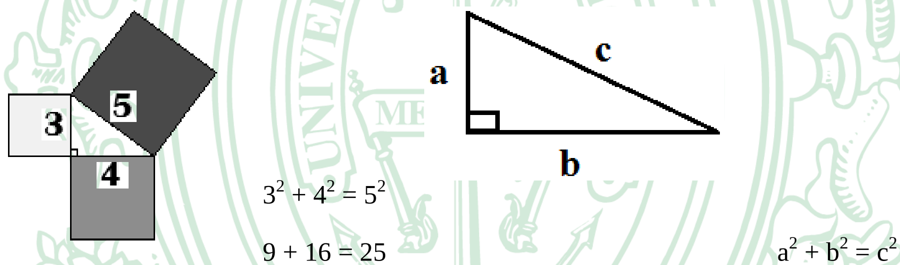


Figura 6: Comprobación de María con un ejemplo del Teorema de Pitágoras
Fuente: Diseño elaborado por María.

Tabla 23: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 18.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
8-9	Argumento con carácter monológico	María se pregunta y se responde.
9	Argumento con intención para explicar	La utilidad del Teorema de Pitágoras.
9	Indicadores de argumentación	Pero, no, entonces, y.
9	Cualificador modal	Solo funciona.

Al continuar el argumento con carácter dialógico en el auditorio, Carlos participa diciendo que tanto su propuesta como la de María se complementan y resalta el uso del ejemplo como recurso retórico que ella usó, así como también el uso de la aritmética en la presentación del teorema (Figura 6).

El investigador concede finalmente la participación a María, quien afirma que no considera ‘siempre dar una clase desde lo formal’ [13]. Aquí ella usa el indicador de argumentación ‘no’ acompañado del cualificador modal ‘siempre’ [13], el cual indica que reconoce la importancia de no usar, en todas las ocasiones, conceptos formales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Es decir, el uso de ese indicador y de ese cualificador modal por parte de María se relaciona con una garantía a priori-pedagógica. Asimismo, el uso del indicador como del cualificador dan cuenta de la provisionalidad de sus afirmaciones y acciones en su enseñanza.

Transcripción 19: Carlos, investigador y María, video 3

10 **Carlos**: Pienso en algo bueno para María, en esa parte geométrica que estaba olvidando ***no*** se ***puede dejar*** de lado; es más, desde ahí nace ***y*** ella mostró varios ejercicios, vi tres o cuatro ejercicios de la parte aritmética de la demostración ***y*** llega a la solución. Yo lo estaba olvidando dentro de la ejemplificación, ***pero*** esa [parte aritmética] me parece importante.
11 Investigador: ¿Y María?
12 **María**: ¿Qué pienso?
13 **María**: No sé, mi práctica como docente, la que me visiono, es ***no*** llegar a dar una clase ***siempre*** desde lo formal, como lo he dicho, poder llegar a construcciones, poder llegar con los mismos estudiantes por medio de actividades de la vida cotidiana, de lo que uno conoce, pues, llegar a lo que es formal ***y*** a lo que es el concepto de manera natural. Para eso, uno puede utilizar, muchísimos medios y pienso que a veces [el estudiante] aprende más de lo que hace, de lo tangible, de lo que ve, que cuando llegan y dicen: ¡Esto es así y ya!

Tabla 24: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 19.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
10	Indicadores de argumentación	No, y, pero.
13	Cualificador modal	Siempre.
13	Indicadores de argumentación	No, y.

Ahora, el investigador indaga si los participantes del auditorio tienen preguntas para los argumentos que María ha compartido sobre su preparación de la clase del teorema, a lo que Carlos responde diciendo que no tiene; sin embargo, respalda su propuesta sobre el uso del rompecabezas para la enseñanza y el aprendizaje del teorema.

Transcripción 20: Investigador, María y Carlos, video 3

14 Investigador: ¿Tenemos alguna pregunta para María?
15 **María**: ¡Esa era mi idea!
16 **Carlos**: ¿Pregunta? ¡Nooo!, sugerencias, ***pero*** pregunta ***no***. Ese rompecabezas que María mencionaba es interesante ***y*** no se demora [hacer su construcción], con cuatro hojas de papel se podría hacer, ***y*** es interesante ***y*** podría dejarse una enseñanza con esa hojita ***y*** mostrando geométricamente el Teorema de Pitágoras.

Tabla 25: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 20.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
16	Indicadores de argumentación	Pero, no, y.

Después, el investigador concede la participación a Helena [17], quien dice que no tiene preguntas. No obstante, antagoniza con los argumentos expuestos por María debido a que no consideró la construcción del rompecabezas en el papel (Figura 5); esta afirmación de Helena [18] forma parte de un argumento para refutar (McClain, 2009) la propuesta de María, ya que le permite que se percate de lo que hizo falta en la preparación de su clase.

Transcripción 21: Investigador y Helena, video 3

17 Investigador: ¿Helena?
18 **Helena**: ***¡Nooo!***, si vamos a construir de cierta manera, lo que pasa es que lo haría con la construcción.
19 **Helena:** **¿Cierto?**
20 **Helena:** Me pareció un bosquejo interesante de la idea como tal, que ***siempre*** va a ser más interesante algo práctico, algo que construya, que el joven [refiriéndose a sus estudiantes en el auditorio del aula de clase] tenga la oportunidad de llegar a ese conocimiento formal. ¡sí, interesante!

Tabla 26: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 21.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
18	Indicador de argumentación	¡Nooo!
18	Argumento con la intención de refutar	Helena refuta la propuesta de María ya que no realizó la construcción.
19	Indicadores de argumentación	Más que.
19	Cualificador modal	Siempre.

La Tabla 27 presenta un resumen de la interpretación de los ejemplos individuales propuestos en la preparación de esta tarea.

Tabla 27: Recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación de la Tarea 3.

Diálogo/Monólogo	Argumento con carácter monológico	Transcripción 18	
	Argumento con carácter dialógico	Transcripciones 14 a 21, excepto la 14.	
Indicadores de argumentación		Transcripción 14	Entonces, y.
		Transcripción 15	Inicialmente, porque, también.
		Transcripción 16	Es decir, entonces.
		Transcripción 17	Ya después, entonces.
		Transcripción 18	Pero, no, entonces, y.
		Transcripción 19	No, y, pero.
		Transcripción 20	Pero, no, y.
		Transcripción 21	No, y.
Recurso retórico	Modelo	Transcripción 15	
	Ejemplo	Transcripción 17	
		Transcripción 19	
Componentes argumentativos	Garantía epistemológico-institucional	Transcripción 15	
	Garantía a priori-epistemológica	Transcripción 16	
		Transcripción 17	
	Garantía a priori-pedagógica	Transcripción 19	
	Cualificador modal	Transcripción 14	Más o menos.
		Transcripción 15	Puede hacer.
		Transcripción 16	Exactamente.
		Transcripción 17	Más o menos, puedan comprobar, puedo formar.
		Transcripción 18	Solo funciona.
		Transcripción 19	Puede dejar, no siempre, poder llegar, muchísimos, solamente.
Intención de los argumentos	Intención para explicar	Transcripciones 19 y 21.	
	Intención para refutar	Transcripción 21	

6.1.4. Tarea 4: Presentación de preparación de clase de Carlos sobre el Teorema de Pitágoras

La tarea que Carlos comparte con el auditorio del seminario en el cual se encuentran María, Helena y el investigador, se enmarca dentro del paradigma de enseñanza de la geometría axiomática natural, porque durante los argumentos se usan con frecuencia garantías teóricas. De esta tarea se presenta evidencia entre el segmento locutivo que se registra entre las transcripciones veintidós y veintisiete.

En este segmento locutivo, Carlos presenta la preparación del clase del Teorema de Pitágoras con un ejemplo que involucra el volumen de un líquido (Figura 7); esto constituye una garantía a priori con el uso de medios porque busca persuadir a sus posibles estudiantes por medio del volumen del líquido al introducirlo en un prisma de base cuadrangular, construido sobre la hipotenusa, y luego repartirlo en dos prismas de bases cuadrangulares, los cuales son construidos sobre los catetos. Los siguientes turnos muestran un argumento con carácter monológico en el cual Carlos se pregunta y se responde [1, 2, 3 y 4]; no obstante, considera persuadir al auditorio con la intención de explicar a partir de su argumento.

Transcripción 22: Carlos, video 4

1	**Carlos**:	¿Cómo haríamos?
2	**Carlos**:	Si tenemos que preparar la clase del Teorema de Pitágoras, pensé en vasos cuadrados para llenarlos con líquido, para demostrar lo que significa en cuanto a las áreas [de los cuadrados construidos sobre] los dos catetos y la hipotenusa, ***no*** sé ***por qué*** lo pensé, lo imaginé rápidamente, ***pero*** me encontré un video con eso mismo, es similar, jamás lo había visto, simplemente lo encontré, me pareció pertinente ***y*** quiero mostrar una forma de demostrarlo a partir de agua [a continuación se presenta el video…] (Figura 7).
3	**Carlos**:	¿Te acuerdas que te mencioné lo de los vasos? [Refiriéndose al investigador]
4	**Carlos**:	***Exactamente***, ***no*** sé ***por qué*** me surgió, se ve claramente, ***entonces*** el área de los dos cuadrados… ¡cristalina, se ve eso!

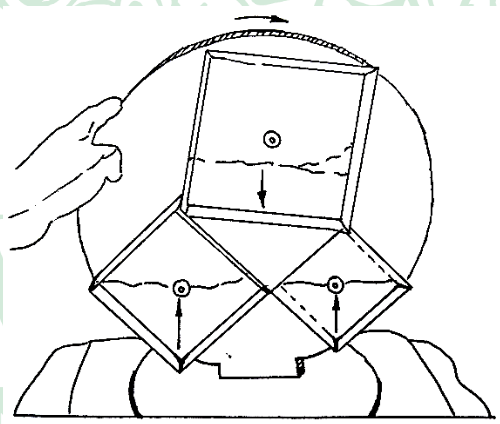


Figura 7: Teorema de Pitágoras mediante el llenado y vaciado de líquido según Carlos.
Fuente: Diseño elaborado por el autor de esta investigación.

Tabla 28: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 22.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
1, 2, 3 y 4	Argumento con carácter monológico	Carlos se pregunta y se responde.
2	Indicadores de argumentación	No, pero, y.
2	Garantía a priori con el uso de medios	Carlos usa un medio para mostrar el Teorema de Pitágoras a partir del volumen de un líquido.
2	Argumento con la intención de explicar	Explica cómo funciona el medio que emplea para mostrar el teorema.
4	Cualificador modal	Exactamente.
4	Indicadores de argumentación	No, y, entonces.

Para seguir con la presentación de la preparación de su clase al auditorio, Carlos utiliza el *software* Geogebra; luego, continúa el argumento con carácter monológico (el auditorio no le plantea preguntas). Aquí utiliza una garantía a priori con el uso de medios durante el uso de dicho *software* y la presentación de la construcción (Figura 4) realizada previamente en la tarea 1 [5]; además, emplea algunas garantías a priori-epistemológicas sobre las definiciones de ángulo recto, catetos, hipotenusa, cuadrados construidos sobre los catetos y sobre la hipotenusa [6].

Transcripción 23: Carlos, video 4

5 **Carlos**: Yo traje el *software* Geogebra para observarla [refiriéndose a la construcción del Teorema de Pitágoras previamente presentado en la Figura 4], para manipularlo, para moverlo. Vemos que ya existe, es una construcción que había realizado antes, para ***no*** tener que construirla [a continuación procede a la construcción].

6 **Carlos**: ***Entonces*** aquí la quise recrear a partir del triángulo rectángulo en Geogebra, aquí se puede mostrar. Miren cómo el ángulo recto [permanece] intacto, lo único que se ***puede mover*** son los dos catetos para ampliarlo, ***porque*** si moviera [la hipotenusa] el ángulo recto se perdería, ***y*** ahí ya ***no*** sería demostrable a través del Teorema de Pitágoras […]. Quisiera mostrarlo de esta forma, es lo que tenía planeado para la clase, partiendo de que ustedes ya tienen una teoría [sobre el teorema].

Tabla 29: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 23.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
5-6	Argumento con carácter monológico	Carlos se pregunta y se responde.
5-6	Garantía a priori con el uso de medios	Uso de Geogebra.
6	Garantía a priori-epistemológica	Uso de definiciones sobre ángulo recto, catetos e hipotenusa.
5	Indicadores de argumentación	No, y.
6	Indicadores de argumentación	Entonces, porque, pero, y, no, o.
6	Cualificador modal	Solamente.

Carlos prosigue su argumento con carácter monológico, en el cual se pregunta por su preparación de clase; en su respuesta, menciona el uso de la historia, de la teoría, y de la demostración geométrica del teorema. En suma, esta respuesta contiene la conclusión de la argumentación [7 y 8].

Transcripción 24: Carlos, video 4

7 **Carlos**: ¿Cómo lo mostrarías?
8 **Carlos**: Yo lo mostraría partiendo ***primero*** de una historia para antojarlos, ***porque*** es una forma chévere de llamar la atención del estudiante, ***luego*** contaría una teoría simple… una demostración geométrica que realmente es lo que nos interesa en el curso. [refiriéndose a los estudiantes de noveno grado].

Tabla 30: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 24.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
7-8	Argumento con carácter monológico	Carlos se pregunta y se responde.
8	Indicadores de argumentación	Porque, luego.

Carlos usa el *software* Geogebra cuando retoma argumentos con características dialógicas en el auditorio. Con este fin, emplea una garantía a priori-epistemológica sobre la construcción de un ángulo recto para construir posteriormente un triángulo rectángulo. En cierto instante, el argumento con carácter dialógico pasa a ser monológico: aunque, sigue considerando la presentación de sus argumentos al auditorio, durante algunos instantes se pregunta y se responde. Allí utiliza de forma implícita conceptos sobre el teorema que corresponden a garantías a priori-epistemológicas, tales como segmento, unidad de medida, perpendicular, ángulo recto, triángulo rectángulo, triángulo rectángulo isósceles, cuadrado y lados congruentes de un triángulo [14]; esto muestra que Carlos usa conceptos diversos de manera explícita durante su presentación de la preparación de la clase sobre el teorema.

Transcripción 25: Carlos, video 4

9 Investigador: ¡Vamos Carlos explícanos! ¿Trabajarías sobre la misma plantilla?
10 **Carlos**: ¿Trabajaría? Sí.
11 Investigador: ¿Cierto?
12 **Carlos**: ¡Listo! Vamos a ubicar un segmento. Este va a ser nuestra unidad de medida,

necesitaríamos tomar una perpendicular.

13 **Carlos**: ¿Para qué?

14 **Carlos**: Necesitamos tomar el ángulo recto que estaba mencionando del triángulo para ***poder adaptar*** el Teorema de Pitágoras. Recta perpendicular a esta que pase por este punto; ***luego*** unirlos para poder adoptar el triángulo rectángulo, ***pero*** tenemos que sacar esa recta. Tenemos el triángulo rectángulo, en este mostramos el ángulo para ***poder verlo*** fácilmente. ***Casualmente*** este es de 45°, podríamos ***también*** mostrar donde el triángulo es isósceles, ***también*** tiene dos de los lados congruentes y ***casualmente*** este es uno de ellos.

Tabla 31: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 25.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
12, 14	Garantía a priori-epistemológica	Construcción de un ángulo recto para luego construir un triángulo rectángulo.
12-13-14	Argumento con carácter monológico	Carlos se pregunta y se responde.
14	Garantía a priori-epistemológica	Definición de segmento, unidad de medida, perpendicular, ángulo recto, triángulo rectángulo, triángulo rectángulo isósceles, cuadrado y lados congruentes de un triángulo.
14	Indicadores de argumentación	Luego, pero, casualmente, también.

Carlos continúa con su argumento monológico [15, 16, 17 y 18], en el cual se pregunta por la construcción de la recta perpendicular y por la elección de cierto punto para construir los cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles que considera para explicar sus acciones a los participantes del auditorio.

Transcripción 26: Carlos, video 4

15 **Carlos**: ¿***Por qué*** tomo esta recta perpendicular a esta **y** ***por qué*** tomo este punto?

16 **Carlos**: Quiero mostrar el rectángulo, [para ello construye una] perpendicular a esta recta que pase por este punto, quiero mostrar el cuadrado [construidos sobre] ***todos*** los catetos, perpendicular a este punto para [que] pase por este punto obtengo […] perpendicular a este punto que pase por este punto. Necesitaría tomar equis distancia. ***Y*** me falta una con este punto que pase por este punto.

17 **Carlos**: ¿Cómo construiría el cuadrado de la manera más sencilla?

18 **Carlos**: Me falta un segmento para que cierre los cuadrados.

Tabla 32: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 26.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
15-18	Argumento con carácter monológico	Carlos se pregunta y se responde.
16-18	Argumento con intención de explicar	Explica la construcción geométrica que realiza.
15	Indicadores de argumentación	Por qué, y.
16	Indicador de argumentación	Y.
16	Cualificador modal	Todos.

Carlos cambia su argumento con carácter monológico al incluir a María [19], pero como ella no le ofrece los argumentos que solicita, entonces recurre a Helena [24 y 28]. Carlos formula enseguida otra pregunta al auditorio sobre su construcción, a lo cual responde María que sí, en apoyo a su decisión [29]. El investigador solicita a Helena un argumento explicativo [30], al que ella responde [31]. En la transcripción veintisiete, se evidencia cómo Carlos discute la construcción de un cuadrado mediante el *software* Geogebra con el auditorio, la cual demuestra cómo la argumentación sirve para la construcción social del conocimiento entre los participantes del auditorio (Leitão, 2011).

Transcripción 27: Carlos, video 4

19	**Carlos**:	¡María!, ¿cómo cerraría el cuadrado?
20	Investigador:	La idea sería construir el cuadrado aquí.
21	**Investigador**:	***¿Cierto?***
22	**Carlos**:	***Exactamente***, creería yo…
23	Investigador:	A ver, ¡Helena!, por ejemplo…
24	**Carlos**:	¡Helena!, ¿cómo lo harías?
25	**María**:	Poniendo las rectas en la parte donde se cortan las…
26	**Carlos**:	¿Cuál es? ¿Acá?
27	**Helena**:	Ahí, la de arriba.
28	**Carlos**:	¿***O sea*** una paralela a esta que está aquí, que pase por este punto?
29	**María**:	***Sí***, pensaría que así se ***podría hacer***.
30	Investigador:	Porque otra opción sería… ¡Helena!, ¿cómo podríamos tomar esta medida, por ejemplo, aquí en este segmento?
31	**Helena**:	Con un triángulo isósceles.

Tabla 33: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 27.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
22	Cualificador modal	Exactamente.
28	Indicador de argumentación	O sea.
30-31	Solicitud de argumento con la intención de explicar	Explica la construcción geométrica que realiza.

La Tabla 34 expone un resumen de la interpretación de los ejemplos individuales propuestos en la presentación de esta tarea.

Tabla 34: Recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación de la Tarea 4.

Diálogo/Monólogo	Argumento con carácter monológico	Transcripciones 22, 23, 24, 25, 26.	
	Argumento con carácter dialógico	Transcripción 27	
Indicadores de argumentación		Transcripción 22	No, porque, y, entonces.
		Transcripción 23	Sino, entonces, porque, y, o.
		Transcripción 24	Primero, porque, luego.
		Transcripción 25	Luego, pero, también, entonces.
		Transcripción 26	Y.
		Transcripción 27	O sea.
Componentes argumentativos	Garantía a priori-epistemológica	Transcripción 23	
		Transcripción 25	
	Garantía a priori con el uso de medios	Transcripción 22	
	Garantía a priori-pedagógica	Transcripción 23	
	Cualificador modal	Transcripción 22	Exactamente.
		Transcripción 23	Solamente.
		Transcripción 25	Poder adaptar, poderlo ver, casualmente.
		Transcripción 26	Todos.
Intención de los Argumentos	Para explicar	Transcripciones 22, 26 y 27.	

6.1.5. Tarea 5: Discusión de la construcción de un paralelogramo por parte de Carlos y María

Esta tarea se enmarca dentro del paradigma de enseñanza de la geometría axiomática natural porque durante los argumentos se usan en su mayoría garantías a priori-epistemológicas. El quinto segmento locutivo se registra entre las transcripciones veintiocho y treinta y dos, donde se documenta la presentación de una tarea en el auditorio del seminario conformado por Carlos, María, Colega 2 e Investigador, la cual inicia con dos preguntas formuladas por el investigador al auditorio: ¿qué posibles conjeturas pueden establecerse de la Figura 8? y ¿cómo argumentar su validez con el fin de persuadir y convencer a sus colegas?

Para la solución de la tarea, los maestros en formación inicial expresaron sus argumentos sobre la construcción geométrica de la Figura 8 por medio del *software* Geogebra. Además, la pregunta aportó datos a la argumentación mediante dicha figura. Durante el diálogo, los participantes recurrieron al uso de la ilustración como recurso retórico para apoyar sus argumentos.

Los turnos que se presentan a continuación informan el inicio del ofrecimiento y de la solicitud de argumentos mediante preguntas y respuestas entre los participantes, sus colegas y el investigador [1, 2 y 3]. Aquí, la conclusión refiere la construcción de un paralelogramo (Figura 8); con ese fin, los participantes optaron por usar dos medios: el *Video Beam*, para visualizar la construcción de la Figura 8, y el *software* Geogebra, para la construcción de la figura; los cuales facultaron el uso de garantías a priori con el uso de medios. Al respecto, Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006) expresan que

> En la práctica, existe una interacción entre los objetivos perseguidos y los medios empleados para realizarlos. Los objetivos se constituyen, se precisan y se transforman, con arreglo a la evolución de la situación de la que forman parte los medios disponibles y aceptados. (p. 422)

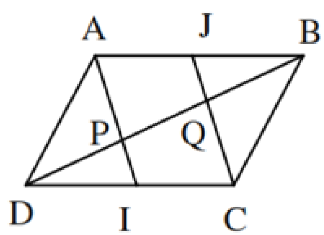


Figura 8: Construcción de un paralelogramo.
Fuente: Diseño elaborado por Gal y Linchevski (2010, p. 173).

Transcripción 28: Investigador, Carlos y María, video 5

1	Investigador:	¿Cómo construir el paralelogramo que aparece en el papel?[35] (Figura 8).
2	**Carlos**:	¿Qué tenemos que construir?
3	**María**:	Un Paralelogramo.

[35] Esta pregunta se acompañó de la Figura 8.

Tabla 35: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 28.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
1	Datos y conclusión	Se presentan en la pregunta y en la figura 8 que el investigador comparte con los participantes.

Carlos pregunta de nuevo al auditorio, pero se responde de inmediato [4 y 5]; este hecho evidencia un argumento con carácter monológico. Después, usa dos garantías a priori-epistemológicas sobre la definición de paralelogramo y de segmento. Más adelante, traza el segmento AB [4] y procede con su argumento de forma explícita (Figura 9), así:

Transcripción 29: Carlos, Video 5

4 **Carlos**: Segmento, el segmento… ¿Qué trazamos? ¿El segmento AB?

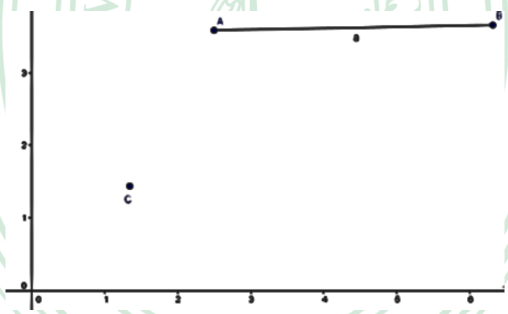


Figura 9: Construcción de Carlos del segmento AB mediante Geogebra.
Fuente: Diseño elaborado por Carlos.

Posteriormente, Carlos realiza utiliza algunas herramientas para trazar un segmento paralelo al ya construido [5] y grafica el paralelogramo ABCD (Figura 10). Por una parte, usa de nuevo dos garantías a priori-epistemológicas sobre la definición de segmentos paralelos y de paralelogramo; por otra parte, traza el segmento paralelo al segmento AB y dibuja el paralelogramo mediante Geogebra, aquí emplea una garantía a priori con el uso de medios mediante la herramienta 'mediatriz'. Al proseguir, Carlos solicita argumentos a María.

Transcripción 30: Carlos, video 5

5 **Carlos**: ¡El segmento AB! ¿Qué le trazamos? ¡La paralela a ese segmento! Paralela a esta que pase por acá (C) ***y*** para aprovechar ese punto, trazo el segmento AC, a ese segmento trazo paralela a este que pase por B, ¡ahí tengo el paralelogramo!; ***entonces*** empiezo a unir los segmentos para quitar esas líneas rectas, esas rectas, ¡perdón!

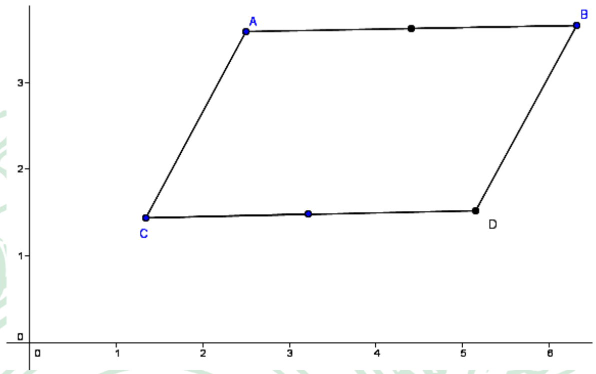


Figura 10: Construcción por el auditorio del paralelogramo ABCD.
Fuente: Diseño elaborado por los participantes del auditorio.

Tabla 36: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 30.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
5	Argumento con carácter monológico	Carlos se pregunta y se responde.
5	Garantía a priori-epistemológica	Definición de segmentos paralelos y de paralelogramo.
5	Garantía a priori con el uso de medios	Carlos usa herramientas del *software* Geogebra para construir la figura.
5	Indicador de argumentación	Entonces.

La argumentación con característica dialógica se establece entre Carlos, María y el Colega 2 [6-18]. Al trazar los puntos medios de los lados del paralelogramo, Carlos usa una garantía a priori con el uso de medios, que se vincula con la herramienta de la mediatriz del *software* Geogebra debido a que, en ese instante, no encuentra una herramienta que le permita trazar los puntos medios de los segmentos [10 y 11]. En los argumentos con características dialógicas se evidencia, de manera simultánea, dos tipos de garantías: una a priori-epistemológica que se relaciona con la mediatriz y otra a priori con el uso de medios que se corresponde con el uso del *software* Geogebra [10, 11 y 12].

Transcripción 31: Carlos, María e investigador, video 5

6 **Carlos**: María, ¿qué sigue?
7 **María**: Sigue la diagonal.
8 **Carlos**: BC.
9 **Colega 2**: Ahora trazamos los puntos medios del segmento AB y CD.
10 **María**: ¿La mediatriz?
11 **Carlos**: ¡Ah!, ***pero*** es que ***no*** encontré ***ninguna*** función [herramienta] que me permita

		poner los puntos medios, ***entonces*** que hice: la mediatriz que, por definición, aquí [señalando el dibujo] hay un punto medio [trazándola en el dibujo] ya lo tengo, este es un punto medio.
12	Investigador:	Mediante la herramienta mediatriz nos dice que […]
13	**Carlos**:	¡Me basé en esa!, ***porque no*** encontré ***ninguna*** que dijera: punto medio.
14	Investigador:	Mediante la función mediatriz que nos dice que […]
15	**Carlos**:	¿Garantía?, sí.
16	**María**:	Traza DE.
17	**María**:	***Y*** ahora la mediatriz del segmento CD.
18	**Carlos**:	Esta. ¡Véala ahí!

Tabla 37: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 31.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
6-18	Argumento con carácter dialógico	Diálogo entre Carlos, María y Colega 2.
10 y 11	Garantía a priori con el uso de medios	Carlos usa herramientas del Geogebra para construir la figura.
11	Garantía a priori-epistemológica	Definición de mediatriz.
11	Indicadores de argumentación	Pero, no, entonces.
11	Cualificador modal	Ninguna.
13	Indicador de argumentación	Porque no.
13	Cualificador modal	Ninguna.
17	Indicador de argumentación	Y.

Por último, al trazar los segmentos que unen los puntos medios de los dos lados paralelos (AB y CD) con los vértices opuestos (D y A) del paralelogramo (Figura 11), Carlos busca que los trazos sean aprobados tanto por María como por el investigador [24 y 26]. Finalmente, compara la figura construida por el auditorio con la que se encuentra dibujada en el papel, la cual sirvió como dato [24 y 26].

Transcripción 32: María, investigador y Carlos, video 5

19	**María**:	¡Ajá!
20	Investigador:	¡Ajá!
21	**Carlos**:	¡Ah!
22	**María**:	***Luego*** traza AF.
23	Investigador:	¿***Todavía*** nos queda faltando algo de la Figura 11?
24	**Carlos**:	¿Se parece ***o no*** se parece? [Hablando de la figura que se propone en el papel]
25	**María**:	Eso, ¡ahí!
26	**Carlos**:	[Procede a nombrar los puntos G (corte de DE con BC) y H (corte entre HF y BC)]

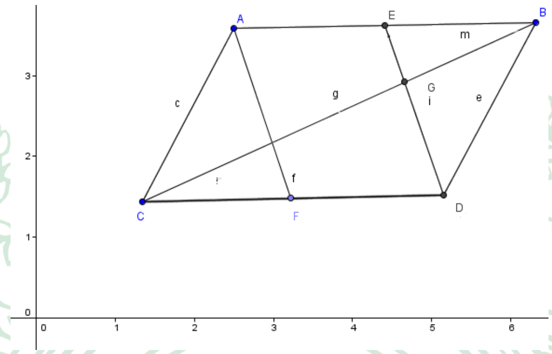


Figura 11: Construcción del paralelogramo con las indicaciones ofrecidas en los datos.
Fuente: Diseño elaborado por los participantes del auditorio.

Tabla 38: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 32.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
22	Indicador de argumentación	Luego.
24	Indicador de argumentación	No.

La Tabla 39 presenta un resumen de la interpretación de los ejemplos individuales propuestos en la presentación y discusión de esta tarea.

Tabla 39: Recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación de la Tarea 5.

Diálogo/Monólogo	Argumento con carácter dialógico	Transcripciones 28, 31 y 32.	
	Argumento con carácter monológico	Transcripciones 29 y 30.	
Indicadores de argumentación		Transcripción 30	Y, entonces.
		Transcripción 31	Pero, no, entonces, porque no, y.
		Transcripción 32	Luego, o, no.
Recurso retórico	Ilustración	Transcripción 28	
Componentes argumentativos	Garantía a priori con el uso de medios	Transcripción 28	
		Transcripción 29	
		Transcripción 30	
		Transcripción 31	
		Transcripción 32	
	Garantía a priori-epistemológica	Transcripción 29	
		Transcripción 30	
		Transcripción 31	
	Conclusión	Transcripción 28	

6.1.6. Tarea 6: Discusión del número de diagonales de algunos polígonos por Helena y Carlos

La tarea que presentan Helena y Carlos se enmarca dentro del paradigma de enseñanza de la geometría axiomática natural porque durante los argumentos se usan, en su mayoría, garantías a priori-epistemológicas. En el sexto segmento locutivo que se documenta desde las transcripciones treinta y tres hasta la treinta y ocho, se solicitaron argumentos al auditorio para responder la pregunta: ¿cómo explicarías cuántas diagonales tiene un hexágono, a colegas y estudiantes de grado tercero de educación primaria?

Este segmento locutivo evidencia de forma directa una argumentación con características dialógicas como proceso social y colaborativo (Duschl y Osborne, 2002) debido a que la participación se da entre el investigador, Helena, Carlos y el Colega 2 mediante una construcción social del conocimiento (Leitão, 2011).

El Colega 2 traza las diagonales desde uno de los vértices de un hexágono [1] dibujado con marcador en el tablero (Figura 12); con este fin, usa una ilustración como recurso retórico (Perelman, 1997) y también el indicador de argumentación 'entonces' [1], el cual refiere a que la argumentación progresa (van Eemeren et al., 2006). Utiliza enseguida el cualificador modal 'obviamente' para indicar que sin duda conoce la definición de lado de un polígono, lo que evidencia una garantía a priori-epistemológica (Nardi et al., 2011). Además, el Colega 2 se refiere a los vértices del hexágono como 'este' [1], para apelar otra vez a la ilustración dibujada en el tablero (Figura 13).

Transcripción 33: Colega 2, video 6

1	Colega 2:	Tomemos este para iniciar [refiriéndose al vértice], ***entonces*** estos ***obviamente*** son los lados, ***inmediatamente*** arrancamos, esta me quedó cortica [refiriéndose a la regla para trazar la diagonal], torcida [la diagonal que dibuja a mano alzada en el tablero], ¿cierto? ***Y*** esta ***no*** se pone, ¿cuántas diagonales marcamos desde este vértice?

2 **Helena**: Tres.

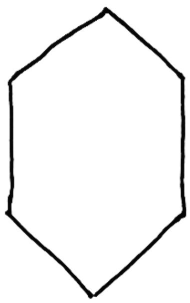


Figura 12: Hexágono dibujado por el investigador.

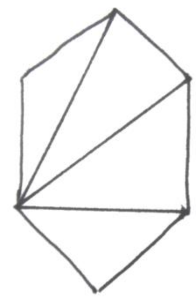


Figura 13: Trazo de las diagonales desde el primer vértice.

Fuente: Diseños elaborados por el autor de esta investigación.

Tabla 40: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 33.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
1	Indicadores de argumentación	Entonces, inmediatamente, y, no.
1	Cualificador modal	Obviamente.
1-2	Recurso retórico	Ilustración (Figura 12-Figura 13).

El Colega 2 traza después las diagonales desde el segundo vértice (Figura 14); con este fin, apela de nuevo al recurso retórico ilustración (Perelman, 1997); luego usa tanto la expresión ‘lo mismo’, por medio del recurso retórico ejemplo, para indicar que el proceso se repite como los indicadores de argumentación ‘*y*’ [3], y ‘entonces’ [3] para señalar que la argumentación progresa (van Eemeren et al., 2006; van Eemeren et al., 2007). Este fragmento finaliza con la pregunta que dirige el Colega 2 al auditorio: ¿cuántos marcamos de ahí? A lo que responde Helena: tres [4]; en esta respuesta, emplea el indicador de argumentación ‘también’ para indicar el anterior vértice.

Transcripción 34: Colega 2 y Helena, video 6

3 Colega 2: Continuamos con este, lo mismo este ***y*** este [señalando desde los tres primeros vértices las diagonales con las manos], ¿cierto? ***Entonce***s, me voy a este, me voy a este ***y*** me voy a este ¿Cuántos marcamos de ahí?

4 **Helena**: Tres, ***¡también!***

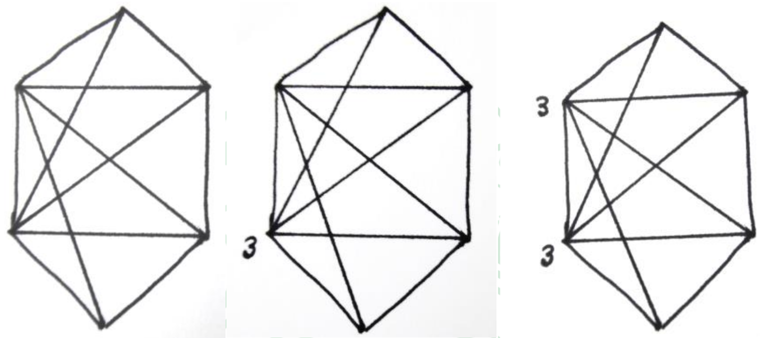


Figura 14: Trazo de las tres diagonales desde el segundo vértice.
Fuente: Diseño elaborado por el autor de esta investigación.

Tabla 41: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 34.

Turno	Elemento teórico	Descripción
3	Indicadores de argumentación	Y, entonces, y.
4	Indicador de argumentación	También.
3-4	Recurso retórico	Ilustración (Figura 14).

El Colega 2 afirma que tanto del primer vértice como del segundo se trazan tres diagonales, pero del tercero no, esto se infiere del uso de palabras, tales como: ‘presumiría’ y ‘también’ que significan, en su orden: ‘conjeturar o sospechar’ *y* ‘asimismo o igualmente’ [5]. El uso de ‘presumiría’ advierte al auditorio que ocurrirá un cambio en el conteo de las diagonales que se trazan del tercer vértice. Así, ante la pregunta que plantea el Colega 2 al auditorio, Helena responde que se trazan solo dos diagonales [8]. De nuevo, el Colega 2 acude al recurso retórico ilustración (Figura 15), que se dibuja en el tablero como mecanismo de persuasión (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006; Manghi, 2010).

Transcripción 35: Colega 2 y Helena, video 6

5	Colega 2:	Este tiene tres ***y*** este tres, se presumiría que al llegar a este ***también*** se marcarían tres, igual a este, igual a este e igual a este. ¿Qué pasa cuando llego acá?
6	**Helena**:	Que ya teníamos una diagonal…
7	Colega 2:	***Entonces,*** ¿qué me falta unir? [Acción de señalar el tercer vértice].
8	**Helena**:	Dos diagonales.
9	Colega 2:	Este, ***y*** me falta unir este, ***entonces,*** ¿cuántos hice? Dos.

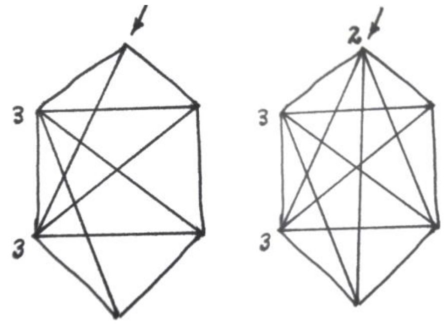


Figura 15: Trazo de las diagonales desde el tercer vértice.
Fuente: Diseño elaborado por el autor de esta investigación.

Tabla 42: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 35.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
5	Indicadores de argumentación	Y, también.
7	Indicador de argumentación	Entonces.
9	Indicadores de argumentación	Y, entonces.
5-9	Recurso retórico	Ilustración (Figura 15).

Al llegar al cuarto vértice [10], el Colega 2 pregunta al auditorio: ¿cuántas diagonales salen desde este vértice? A lo cual Helena responde ‘una sola diagonal’ [12]. El Colega 2 usa el cualificador modal ‘solamente’ para referirse a que tiene que trazar una diagonal desde el cuarto vértice; además, sigue apelando a la ilustración dibujada en el tablero (Figura 16).

Transcripción 36: Colega 2, Carlos y Helena, video 6

10	Colega 2:	¿Qué pasa cuando llego acá? [Refiriéndose al cuarto vértice].
11	**Carlos**:	Ya tiene dos diagonales.
12	**Helena**:	¿Qué me falta? Ahí, una sola diagonal.
13	Colega 2:	Una sola que sería de este; o sea, que aquí ***solamente*** marque una. ¿Qué pasa cuando llego acá? [Refiriéndose al quinto vértice].

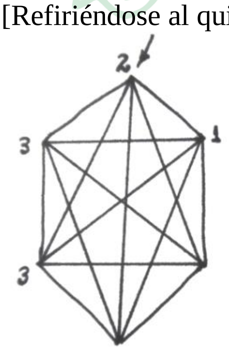


Figura 16: Trazo de las diagonales por el Colega 2 desde el cuarto vértice.
Fuente: Diseño elaborado por el autor de esta investigación.

Tabla 43: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 36.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
13	Cualificador modal	Solamente.
10-13	Recurso retórico	Ilustración (Figura 16).

Helena afirma que no hay diagonales en el quinto y sexto vértice porque se contaron en los vértices anteriores [13-16]. La Figura 16 evidencia tal afirmación.

Transcripción 37: Helena, Colega 2 y Carlos, video 6

14 **Helena**: Ya ***no*** tengo diagonales.
15 Colega 2: Ya ***todas*** están marcadas, ¿cierto?
16 **Carlos**: ¿***Y*** en el que sigue? [Refiriéndose al sexto vértice].
17 Colega 2: ***Aquí sería*** cero, ¿***y*** qué pasa acá?
18 **Helena**: Da cero.

Tabla 44: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 37.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
14	Indicador de argumentación	No.
15	Cualificador modal	Todas.
16	Indicador de argumentación	Y.
17	Indicadores de argumentación	Aquí sería, y.
14-18	Recurso retórico	Ilustración (Figura 16).

El Colega 2 pregunta al auditorio por la cantidad de diagonales del hexágono [19], a lo que Helena responde que son nueve en total [20]. Carlos usa además el indicador de argumentación ‘entonces’ para indicar el proceso que sigue en sus argumentos y el recurso retórico ejemplo para generalizar acerca de las observaciones que ha realizado sobre la figura; en consecuencia, Helena plantea una generalización que expresa de forma numérica [29].

El Colega 2 usa la racionalidad práctica para la enseñanza (Habermas, 1999, 2002; Herbst y Chazan, 2003; Toulmin, 2003, 2007; Rigotti y Greco, 2009; Nardi et al., 2011) cuando afirma que este tipo de argumentación no persuade necesariamente a estudiantes de grado tercero, lo cual evidencia el uso de una garantía empírico-profesional (Nardi et al., 2011). Esta afirmación aparece acompañada tanto del cualificador ‘obviamente’ como de la refutación ‘no sería para niños de tercero de primaria’ [30]. Asimismo, el Colega 2 usa el indicador de argumentación 'pero' con lo cual reconoce que los argumentos compartidos ante la pregunta inicial, ¿cómo explicarías cuántas diagonales tiene un hexágono, a colegas y estudiantes de grado tercero de educación primaria?, son válidos para otros auditorios, pero no necesariamente para uno conformado por estudiantes de tercero de educación básica primaria.

Transcripción 38: Colega 2, Helena y Carlos, video 6

19	Colega 2:	Cero, ¡bueno!, ***entonces*** en total: ¿cuántas diagonales tenemos?
20	**Helena**:	Nueve.
21	Colega 2:	Nueve diagonales, ***pero*** teóricamente de esta ***también*** se obtienen otras tres diagonales.
22	**Carlos**:	¡Ajá!
23	Colega 2:	De este: otras tres.
24	**Carlos**:	¡Ajá!
25	Colega 2:	De este: Tres.
26	**Carlos**:	¡Aja!
27	Colega 2:	***Y*** de éste: Tres.
28	Colega 2:	***Pero no*** se ***pueden marcar porque*** ya están marcadas entre sí.
29	**Helena**:	¡Ah! ***Entonces*** ahí hay algo interesante ***porque*** ahí sería: tienen que salir tres de cada una, ***entonces*** sería: tres por seis dividido dos (3*6/2) que son los vértices, dieciocho, divido… ***pero entonces si no*** hago la figura ***como tal***, ***no*** sabría de dónde estoy diciendo tres, uno aquí, otro acá… ***entonces*** ¿cómo saco…?
30	Colega 2:	¿…Esa relación? ***Pero*** para este mundo práctico, se pensó en esa forma, ***obviamente no*** sería para niños de tercero de primaria, ya ***de pronto*** sería pensar cómo se podría mostrar ***y*** demostrar en otro tipo de cursos [Refiriéndose a los auditorios].

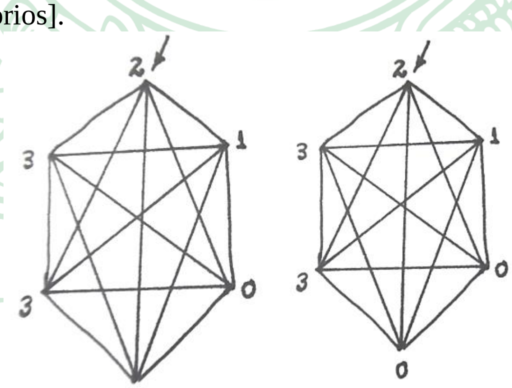


Figura 17: Conteo de las diagonales por el Colega 2 desde el quinto y sexto vértice.
Fuente: Diseño elaborado por el autor de esta investigación.

Tabla 45: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 38.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
19	Indicador de argumentación	Entonces.
21	Indicadores de argumentación	Pero, también.
27	Indicador de argumentación	Y.
28	Indicadores de argumentación	Pero no, pueden marcar.
29	Indicadores de argumentación	Entonces, pero, no, como tal.
29	Recurso retórico	Ejemplo.
30	Indicadores de argumentación	No, de pronto.
30	Cualificador modal	Obviamente.
19-30	Recurso retórico	Ilustración (Figura 17).

La Tabla 46 muestra un resumen de la interpretación de los ejemplos individuales propuestos en la presentación y discusión de esta tarea.

Tabla 46: Recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación de la Tarea 6.

Diálogo	Argumento con carácter dialógico	Transcripciones 33 a 38.	
Indicadores de argumentación		Transcripción 33	Entonces, y, no.
		Transcripción 34	También.
		Transcripción 35	También, entonces.
		Transcripción 37	No, y.
		Transcripción 38	Entonces, pero, también, y, no, porque, como tal, de pronto.
Recurso retórico	Ilustración	Transcripción 33	
		Transcripción 34	
		Transcripción 35	
		Transcripción 36	
	Ejemplo	Transcripción 34	
		Transcripción 38	
Componentes argumentativos	Garantía a priori-epistemológica	Transcripción 33	
	Garantía empírico-profesional	Transcripción 38	
	Cualificador modal	Transcripción 33	Obviamente.
		Transcripción 38	Puede marcar.
		Transcripción 37	Todas.
Intención del argumento	Para refutar	Transcripción 38	

6.2. Análisis de datos investigativos recolectados en el auditorio del aula de clase

El segmento locutivo que se documenta en este apartado se registra entre las transcripciones treinta y nueve y setenta y cinco. En su orden, este segmento locutivo documentado corresponde con el diálogo de los tres participantes de la investigación: Carlos, Helena y María durante la enseñanza de algunos conceptos de geometría a sus estudiantes en el auditorio del aula de clase. La argumentación de Carlos y Helena se realizó con estudiantes de noveno grado de educación básica secundaria; mientras que la argumentación de María se realizó con estudiantes de tercero y cuarto grado de educación básica primaria. A continuación, se presentan el análisis y la interpretación de la argumentación llevada a cabo por Carlos y Helena y luego, el análisis e interpretación de la argumentación de María.

6.2.1. Tarea 7: Discusión del concepto diagonal por Carlos, Helena y sus estudiantes

6.2.1.1.Primera parte: exploración del concepto diagonal

La tarea de Carlos y Helena se enmarca dentro del paradigma de enseñanza de la geometría natural, porque durante sus argumentos usan de forma frecuente garantías empíricas. Además, en el segmento locutivo puede evidenciarse que los participantes no apelaron a los recursos retóricos: modelo, ilustración y metáfora, sino que apelaron a los ejemplos. Asimismo, se muestra el trabajo conjunto con estudiantes de noveno grado, con quienes discutieron el concepto de diagonal. Estos estudiantes fueron nombrados en las transcripciones como Estudiante, Estudiante 1, Estudiante 2, Estudiante 3 y Estudiante 4.

Durante los diálogos, los estudiantes expresaron cuatro usos del concepto de diagonal: el primero, en asocio con informar una dirección de un lugar a una persona; el segundo, con una figura geométrica; el tercero, con la ubicación de un objeto en forma diagonal; y el cuarto, con el cruce del balón de un lugar a otro en una cancha de fútbol –‘oblicuar’–. Tanto estos usos diversos de diagonal por parte de los estudiantes como la solicitud de argumentos por parte de Carlos dan cuenta de la construcción social del conocimiento en el auditorio del aula de clase, donde no solo se utilizan conocimientos matemáticos, sino también conocimientos extramatemáticos (Goizueta, 2015).

Carlos empieza el diálogo con sus estudiantes mediante la pregunta: ¿en qué momento de tu vida has empleado la palabra diagonal? [1]. Esta pregunta; en primer lugar, indaga por garantías empírico-personales sobre el uso de dicha palabra; y en segundo lugar, ofrece a los estudiantes algunas conclusiones.

Durante la argumentación, Carlos usó preguntas diversas, las cuales se relacionan con la solicitud a sus estudiantes de argumentos con la intención de explicar [1] o la solicitud de argumentos con la intención de ser persuadido [3]. Ante la pregunta inicial [1], los estudiantes emplearon garantías empírico-personales en sus argumentos; a su vez, Carlos usó dos expresiones que sirven de indicadores de validación (León y Calderón, 2001) para las afirmaciones de sus estudiantes [10 y 16].

De la respuesta que da uno de sus estudiantes [2], Carlos les solicita otros usos del concepto de diagonal [3]; y luego, solicita un argumento con la intención de persuadir [6]. Según se infiere, ni se ha persuadido ni se ha convencido sobre lo que le expresan [3]. Si se enfatizan en las preguntas que Carlos les formula [1 y 10] puede afirmarse que estas se relacionan con el paradigma de enseñanza de la geometría I (Kuzniak y Rauscher, 2011), porque refieren usos y conceptos que se vinculan con la vida cotidiana de los estudiantes. Tales hechos son evidenciados en la transcripción treinta y nueve.

Transcripción 39: Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	¿En qué momento de tu vida has empleado la palabra diagonal?
2	Estudiante 1:	Cuando damos una dirección. (Figura 18).
3	**Carlos**:	¿Qué más?

4 Estudiante 2: ¡Espere que estoy pensando!
5 Estudiante 3: ¡Ey! ¿Dónde queda eso? ¡Diagonal!
6 **Carlos**: ¿***Pero*** eso es?
7 Estudiante 4: Figura.
8 Estudiante 2: Una línea, así como una línea.
9 Estudiante 1: ¡Ah!, la estrategia de fútbol, ¿no? Cuando hacen una diagonal.
10 **Carlos**: ¡Epa! ¡Esa es! Cuando usted dice así [señala con la mano] ***eso es*** indicativo, ***como*** para dar indicaciones.
11 Estudiante 1: ¿Cuál?
12 **Carlos**: Cuando te pregunto a vos: ¡Ey!, ¿dónde está Natalia? Allá diagonal.
13 Estudiante 1: ¿Cómo ponemos?
14 **Carlos**: ¿Cómo lo escribimos?
15 Estudiante 1: Ubicando algo o una persona, ¿no?
16 **Carlos**: ¡Hágale!

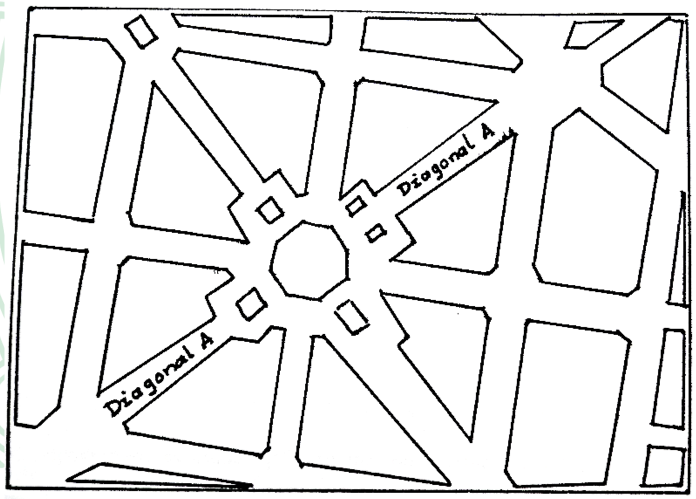


Figura 18: Diseño de diagonales en direcciones.
Fuente: Diseño elaborado por el autor de esta investigación.

Tabla 47: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 39.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
1	Solicitud de garantía	Empírico-personal.
1	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
3	Solicitud de argumento	Intención para persuadir.
6	Indicador de argumentación	Pero.
10	Indicador de argumentación	Como.

Carlos insta a otros estudiantes por medio de preguntas sobre la importancia de las diagonales en la vida cotidiana [1]. Asimismo, usa el recurso retórico ejemplo con ellos [1]. En esta transcripción puede evidenciarse que utiliza tres preguntas que se relacionan con la solicitud de argumentos con la intención de explicar [1, 4 y 8]. En la respuesta de uno de sus estudiantes, se destaca la autoridad que manifiestan algunas personas para validar un enunciado; por ejemplo, el estudiante 2 apela a un criterio de autoridad de lo dicho por su papá, en tanto que es profesor de matemáticas [5].

Transcripción 40: Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	¿Cómo vamos?, ¿cuáles tenemos?, ¿qué dice por ahí?, ¿en la calle?, ¿en la casa?, ¿cuando está dando una dirección? ¿Sí?
2	**Carlos**:	¡Ah!, ¡sí! ¿Cuándo?
3	Estudiante 1:	Cuando lo mandan a uno por una cosa.
4	**Carlos**:	¿***Y*** uno qué dice?
5	Estudiante 2:	Mi papá me habla mucho de eso, ***porque como*** él fue profesor me va diciendo…
6	Investigador:	¿Profesor de qué?
7	Estudiante 2:	De matemáticas en un seminario.
8	**Carlos**:	¿***Y*** qué te explicó de diagonales?
9	Estudiante 2:	Que eso lo utilizamos mucho; por ejemplo, para matemáticas y más cosas.

Tabla 48: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 40.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
1	Recurso retórico	Ejemplo.
1, 4 y 8	Solicitud de argumentos	Intención de explicar.
4 y 8	Indicador de argumentación	Y.

La argumentación continúa entre Carlos, Helena y sus estudiantes. Ellos les preguntan si las diagonales pueden ser verticales u horizontales, lo cual indica un refinamiento en la forma de solicitar argumentos. Uno de los estudiantes relaciona la diagonal con el trazo que se hace con una regla [2 y 3], porque la entiende como una línea vertical u horizontal, pero de esquina a esquina (refiriéndose posiblemente a los vértices de una figura geométrica). Estas afirmaciones son indicios de usos de garantías empírico-personales. No obstante, Carlos y Helena formulan dos preguntas para solicitarles argumentos con la intención de explicar [1 y 8] y argumentos con la intención de validar y construir la definición de diagonal [4].

Transcripción 41: Carlos, Helena y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	¿Qué más…?
2	Estudiante 1:	Cuando cogen una regla ***y*** le dicen…
3	Estudiante 2:	Le dicen trace una línea, vertical, horizontal, diagonal.
4	**Carlos**:	¿***O sea*** que una diagonal ***puede ser*** vertical u horizontal?
5	Estudiante 2:	Es de esquina a esquina, es como así [indica con la mano].

6	**Helena**:	Por eso es que ellas hacían con la manito así [indica con la mano] ¿Cómo era que hacían ustedes?
7	Estudiante 2:	Diagonal, aquí diagonal llega a la iglesia, diagonal a …
8	**Helena**:	¿***O sea*** que es cómo qué?
9	Estudiante 2:	Como que gira.
10	**Helena**:	Coloquen ***entonces*** acá lo que están diciendo [señala la hoja].

Tabla 49: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 41.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
1-3	Solicitud de garantías	Empírico-personales.
1 y 8	Solicitud de argumentos	Intención de explicar.
4	Solicitud de argumentos	Intención de validar.
4, 8 y 10	Indicadores de argumentación	O sea, entonces.

Carlos prosigue la argumentación con sus estudiantes mediante una pregunta [1] que está relacionada con explicar un punto de vista; de inmediato, un estudiante responde que en el diálogo con sus compañeros se ha afirmado que la diagonal se usa cuando se transportan en el taxi o cuando construyen una figura geométrica. El estudiante usa indicadores de argumentación, tales como ‘entonces’, ‘o’, ‘y’, ‘también’ y ‘cuando’ [1-2]. Este último hace referencia a su explicación. Para matizar su afirmación, el estudiante emplea un cualificador modal no absoluto para complementar cuando afirma que ‘se puede hacer’. Por medio de una pregunta [3], Carlos solicita después un argumento para que el estudiante explique su punto de vista sobre el uso de la diagonal cuando se transporta en un taxi [2]; de inmediato, responde que se utiliza cuando busca una dirección [4].

Transcripción 42: Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	¿Me muestran?
2	Estudiante 1:	Estábamos dialogando que cuando decimos que se puede hacer una diagonal, entonces dijimos que la hemos empleado cuando vamos en un taxi, o cuando estamos entrenando y nos dicen que tracemos una diagonal, también cuando hacemos una figura.
3	**Carlos**:	Cuando vas en el taxi, ¿en qué momento?
4	Estudiante 1:	Cuando estamos buscando una dirección.
5	**Carlos**:	¿[Para] indicar a otra persona una dirección?
6	Estudiante 1:	***Sí.***

Tabla 50: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 42.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
1-2	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
3-6	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
5	Indicador de argumentación	Cuando.

Carlos les solicita argumentos otra vez [1], pero uno de los estudiantes repite la pregunta que había formulado al iniciar la clase '¿en qué momentos de tu vida has empleado la palabra diagonal?' [2], mientras que Carlos insiste por la respuesta [3]. En este sentido, la respuesta que ofrece un estudiante se asocia con las direcciones de lugares o con las figuras en geometría. En esta ocasión, el usa el indicador de argumentación 'o'. Después, Carlos le solicita que dé un ejemplo [4], pero reacciona respondiendo que cuando se resuelve una sopa de letras se utilizan las diagonales. En este momento, el maestro solicita un ejemplo [5] como recurso retórico para que sus estudiantes expliquen en qué momentos de la vida han empleado las diagonales.

En la transcripción cuarenta y tres, Carlos plantea, por una parte, dos preguntas para solicitar a sus estudiantes argumentos con la intención de explicar [1] y persuadir [5]. En una de ellas, solicita al estudiante un ejemplo [5], que sirve como recurso retórico para entender su punto de vista. Helena, por otra parte, formula dos preguntas que dan continuidad a la argumentación que adelanta Carlos, con las cuales solicita argumentos con la intención de justificar [8] o refutar el punto de vista de uno de sus estudiantes [11].

Transcripción 43: Carlos, Helena y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	¿Qué dice?
2	Estudiante 1:	¿En qué momento de tu vida has empleado la palabra diagonal?
3	**Carlos**:	¡Respuesta!
4	Estudiante 1:	***Algunas veces*** para dar alguna dirección o en geometría.
5	**Carlos**:	¿Por ejemplo…?
6	**Helena**:	¿Alguno de ustedes dijo algo diferente a una dirección? ***No***, ***no*** pensé en dirección, ***sino*** que pensé en…
7	Estudiante 2:	***Sí***, cuando uno está haciendo una sopa de letras ***y*** le dicen esta es diagonal.
8	**Helena**:	¿La palabra está cómo…? ¿Cómo hiciste la mano?
9	Estudiante 2:	[Señala con la mano una diagonal]

10 **Helena**: Como torcidita.
11 **Helena**: ¿Alguno de ustedes puso algo diferente?
12 Estudiantes: ***¡No!***

Tabla 51: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 43.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
1-2	Solicitud de garantías	Empírico-personales.
1-4	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
5-12	Solicitud de argumento	Intención de persuadir.
5	Recurso retórico	Ejemplo.
6	Indicadores de argumentación	No, sino.
8	Solicitud de argumento	Intención de justificar.
11	Solicitud de argumento	Intención de refutar.

Al continuar la argumentación con característica dialógica en la clase, Carlos emplea una expresión exclamativa [1] e insiste con una pregunta [2]; luego, usa de nuevo una exclamación [3]. En consecuencia, un estudiante responde que se utiliza en clases diversas para ofrecer direcciones y trazar mapas. Sin embargo, Carlos insiste en el trazo de mapas, pero el estudiante responde con un argumento no convincente y usa indicadores de argumentación para ofrecer sus respuestas: ‘y’ y ‘no’.

En la argumentación con característica dialógica, Carlos usa tres preguntas: en una solicita argumentos con la intención de persuadir [1] ante el punto de vista que el estudiante expone; en otra solicita argumentos con la intención de refutar [5]; y en una última, solicita argumentos con la intención de explicar [9].

Transcripción 44: Carlos y sus estudiantes, video 7

1 **Carlos**: ¿¡Cuéntenme ustedes!? [Refiriéndose a la pregunta].
2 **Carlos**: ¿Quién tiene más?
3 **Carlos**: ¡Muéstreme…!
4 Estudiante 1: Puse que sirve para clase de artística, tecnología, dando direcciones y trazando mapas.
5 **Carlos**: ¡Sí señor! ¿Alguno de ustedes tiene algo distinto?
6 Estudiantes: ¡No!
7 **Carlos**: ¿Cómo se emplea trazando mapas? ¡Eso si no me la sé!
8 Estudiante 1: ¡Claro! ¡Con un compás!, ¡Eh! ¡No! ¡Con un compás no! Con un…
9 **Carlos**: ¿En qué momento la utilizas cuando está en el mapa?
10 Estudiante 1: Cuando tiene que trazar algún ángulo, ***supongamos*** que es un ángulo obtuso, se

		tendría que trazar una línea diagonal, desde el punto del medio a ese ángulo.
11	**Carlos**:	¿En ese momento es una diagonal?

Tabla 52: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 44.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
1	Solicitud de argumento	Intención de persuadir.
5	Solicitud de argumento	Intención de refutar.
9	Solicitud de argumentos	Intención de explicar.

La argumentación con características dialógicas continúa con una exclamación por parte de Carlos [1], mediante la cual solicita un argumento explicativo a sus estudiantes. Uno de ellos apela de inmediato a Carlos preguntándole si nunca le han dicho: yo vivo por la diagonal… [2]; más adelante, el estudiante afirma que las diagonales se usan en matemáticas cuando se traza una línea [7]. Además, los estudiantes usan algunos indicadores de argumentación, por ejemplo: ‘cuando’, ‘y’ y ‘obvio’ (este último indicador para denotar que es un uso frecuente entre sus compañeros). En las preguntas, Carlos solicita argumentos con la intención de explicar [1, 2 y 6] y con la intención de defender el punto de vista que han propuesto otros estudiantes [10].

Transcripción 45: Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	¡Muéstrenme qué han hecho!
2	Estudiante 1:	En las direcciones, cuando a uno le dicen: yo vivo por la diagonal a la tienda. ¿A usted nunca le han dicho así?
3	**Carlos**:	¡Yo vivo diagonal a un parqueadero!
4	Estudiante 2:	Yo vivo diagonal a la iglesia.
5	Estudiante 1:	Yo vivo diagonal a una curvita.
6	**Carlos**:	¿Qué más?
7	Estudiante 1:	En matemáticas cuando le dicen a uno que trace una línea.
8	Estudiante 2:	***Y*** cuando van a medir algo para unas cortinas o cuadros.
9	Estudiante 1:	***Síí***, cuando a uno le dicen póngalo diagonal a esa cocina, diagonal a la puerta, cuando va a poner algún objeto.
10	**Carlos**:	¿¡Por allí pensaron en la sopa de letras!? [Refiriéndose a otro grupo de compañeros].
11	Estudiante 1:	¿En las sopas?
12	Estudiante 2:	***¡Obvio!*** Cuando usted está buscando algo, ***y*** le dicen: ¡vea, está diagonal!

Tabla 53: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 45.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
1, 2 y 6	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
10	Solicitud de argumento	Intención de defender.

Otros estudiantes responden a la pregunta que formula Carlos sobre los posibles usos de las diagonales en contextos cotidianos [2]. No obstante, solicita argumentos, con una pregunta, por el uso de las diagonales en el fútbol para que ellos expresen un argumento explicativo [3]. En la transcripción cuarenta y seis, también se evidencia el uso de una garantía empírico-personal por parte de los estudiantes, que se asocia con su entendimiento en el fútbol [5-10]. Por medio de las preguntas, por una parte, Carlos solicita argumentos con la intención de defender el punto de vista sobre el uso de las diagonales en el fútbol [3]; pero, por otra parte, solicita argumentos con la intención de explicar el movimiento diagonal del balón en la cancha [7].

Transcripción 46: Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	¡La primera!
2	Estudiante 1:	Cuando nos preguntan por una dirección y respondemos que se vaya diagonalmente, ***o*** cuando estamos jugando un partido de fútbol ***y*** nos dicen que la tiremos diagonal.
3	**Carlos**:	¿Sí? ¿Qué dice el fútbol… diagonal…?
4	Estudiante 1:	¡Ah! ***no*** sé, ¡él me dijo!
5	Estudiante 2:	De banda, ¿no?
6	Estudiante 3:	***O sea***, el compañero está allá y yo se la tiro.
7	**Carlos**:	Si yo soy el central, soy el volante, ¿a quién le tiro el balón en forma diagonal?
8	Estudiante 2:	Al lateral.
9	**Carlos**:	¿***O*** a un delantero?
10	Estudiante 2:	Dependiendo dónde esté.

Tabla 54: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 46.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
3	Solicitud de argumento	Intención de defender.
7	Solicitud de argumento	Intención de explicar.

Durante la clase sobre el uso del concepto de diagonal en la vida cotidiana, al cabo de varias preguntas realizadas por Carlos y Helena, y del uso por parte de los estudiantes de diversas garantías empírico-personales para apoyar sus argumentos, Carlos solicita que presenten la construcción que realizaron del concepto de diagonal. Aunque la pregunta que plantea Carlos se enmarca en la construcción de una definición de diagonal, los estudiantes insisten en definirla a partir del uso de garantías empírico-personales [2 y 4]. Pero de acuerdo con la afirmación que expresa un estudiante [1], Carlos hace una exclamación interrogativa para indicar que para él sigue siendo dudosa la definición de diagonal como una señal. Carlos le recuerda que no ha realizado una construcción del concepto y le expresa que aún sus respuestas se corresponden con la pregunta formulada al inicio de la clase. En este sentido, Carlos le comunica no estar de acuerdo con su respuesta frente a dicha pregunta [5].

Carlos usa luego dos preguntas mediante un argumento con carácter dialógico, como puede evidenciarse en la transcripción cuarenta y siete. En una de ellas, solicita a sus estudiantes argumentos con la intención de defender el punto de vista que expone uno de ellos [3]; en la otra, solicita argumentos con la intención de explicar a su estudiante a partir de lo que les expone [5]. Asimismo, Carlos emplea un argumento con la intención de refutar el uso exclusivo de las diagonales con las direcciones [5]. En ese momento utiliza el indicador de argumentación ‘entonces’ y el cualificador modal ‘no necesariamente’ [5]. La transcripción cuarenta y siete de argumentación con característica dialógica evidencia la construcción social del conocimiento en el auditorio del aula de clase (Leitão, 2011), en el cual es fundamental que el maestro refine los cualificadores que expresan sus estudiantes para ofrecer intentos de definiciones de los conceptos tratados.

Transcripción 47: Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	¿Qué dice en la segunda? [Discute con tus compañeros y construye grupalmente una definición de diagonal]
2	Estudiante:	Es una señal que se utiliza para dar direcciones.
3	**Carlos**:	¿¡Una señal!? …
4	Estudiante: está	En la casa, cuando llega una visita ***y*** pide permiso para ir a un lugar, cuando se dando una dirección.
5	**Carlos**:	Esa definición que me estás dando [remite] a la primera pregunta; ***es decir***, en la primera me hablas de dirección ***y*** en la segunda me dices que se utiliza para dar unas direcciones, vamos a volvernos locos ***y*** vamos a pensar en una dirección distinta que no sea una diagonal: yo vivo al frente, yo vivo al lado de la tienda, yo vivo al frente de la iglesia; ***entonces no necesariamente*** se utiliza para dar direcciones. ***Pero no*** la borremos, déjenla ahí porque también sirve.
6	**Carlos:**	¿Cuál es el punto?

7	**Carlos:**	El punto es el siguiente: piensa o descríbeme, si te pregunto ¿cómo se ve una diagonal?
8	**Carlos:**	Usted me estaba diciendo ahorita con la mano: allí diagonalsito a la iglesia.
9	**Carlos:**	¿Yo cómo lo represento? ¿Cómo lo describo? [Dirige las preguntas al estudiante].
10	Estudiante:	A mano derecha ***o*** mano izquierda ***o*** doblando.
11	**Carlos**:	***Y*** si lo pudiéramos poner en palabras, eso que estamos haciendo, ¿cómo sería?
12	Estudiante:	Volteando a la izquierda.

Tabla 55: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 47.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
3	Solicitud de argumento	Intención de defender.
5	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
5	Ofrecimiento de argumento	Intención de refutar.
5	Indicadores de argumentación	Es decir, y, entonces, pero no.
5	Cualificador modal	No necesariamente.
11	Indicador de argumentación	Y.

Carlos formula la pregunta a otros estudiantes sobre la construcción de la definición de diagonal. Uno de ellos reacciona con una respuesta en la cual afirma que la diagonal es una línea recta [4], lo que evidencia de nuevo la posibilidad de que la argumentación con características dialógicas sirve para la construcción de conocimientos matemáticos (Leitão, 2011). Después, Carlos interroga a un estudiante si la diagonal siempre corresponde a una línea recta, pero el estudiante responde que no [6]. En esta ocasión, indaga sobre un cualificador modal 'siempre' para refinar la definición con sus estudiantes [5].

Carlos usa una pregunta mediante la cual solicita argumentos con la intención de explicar la definición de diagonal que han ofrecido algunos de sus estudiantes [3], quienes afirman que la diagonal es una línea recta que se traza. Sin embargo, Carlos reacciona usando una refutación donde emplea el indicador de argumentación 'no' y el cualificador modal 'siempre'. Después, utiliza una exclamación interrogativa para solicitar un argumento con la intención de validar la afirmación 'una diagonal es una línea imaginaria' [9].

Transcripción 48: Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	¿La segunda dice? [Refiriéndose a una pregunta]
2	Estudiante:	Discute con tus compañeros ***y luego*** construye grupalmente una definición de diagonal.
3	**Carlos**:	¡Listo! ¿Qué dijimos?
4	Estudiante:	Nosotros dijimos es una línea recta que trazamos cuando vamos a hacer algo.
5	**Carlos**:	¿***Siempre***?
6	Estudiante:	***No siempre*** tiene que ser recta.
7	**Carlos**:	***No***, yo refiero a: "***siempre***…"
8	Estudiante:	¿La trazamos? ***No***, ***también*** cuando usted va caminando diagonal.
9	**Carlos**:	¿¡Una línea imaginaria!?
10	Estudiante:	***¡Sí!, ¡también!***

Tabla 56: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 48.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
5	Cualificador modal	Siempre.
5	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
9	Ofrecimiento de argumento	Intención de refutar.
7	Indicador de argumentación	No.

Al continuar la argumentación con características dialógicas en el auditorio del aula de clase, Carlos pregunta por la construcción de la definición de diagonal y sus estudiantes reaccionan respondiendo que 'es una línea recta' [12]. Carlos los insta a que incluyan en su definición el concepto de vértice de una figura, cuando pregunta: '¿desde dónde?, ¿hacia dónde?' [20]. Carlos aprueba la definición de diagonal asociada con una línea recta, pero afirma que aún falta incluir el concepto de un punto inicial y de uno punto final desde los cuales se traza. Ante este cuestionamiento, el estudiante intenta responder [27], y luego expresa la respuesta con otras palabras [31].

Ante la definición de diagonal, Carlos plantea una pregunta para solicitar argumentos con la intención de validar la definición [18]. Luego, de la respuesta que ofrece el estudiante, Carlos le pregunta para solicitar argumentos con la intención de que defienda su punto de vista [22]. Durante la respuesta, el estudiante propone un ejemplo como recurso retórico sobre las diagonales en el fútbol; no obstante, Carlos insiste en la definición de diagonal en la geometría y no a partir del lenguaje pragmático del fútbol [24 y 31], esto confirma la importancia que tiene el maestro al orientar la argumentación con preguntas, de manera específica, cuando se construyen definiciones.

Transcripción 49: Carlos y sus estudiantes, video 7

11	**Carlos**:	La segunda qué dice: construye grupalmente una definición de diagonal.
12	Estudiante:	Es una línea recta…
13	**Carlos**:	¡Listo!
14	Estudiante:	Una dirección, una salida de fútbol.
15	**Carlos**:	***Pero*** te están diciendo que construyas una definición. Si dijimos jugando fútbol […]
16	**Carlos**:	Bueno, ***entonces***, dice: construye la definición. Si en la primera dijimos que para el fútbol, para direcciones, para indicar hacia dónde vamos. ¿cómo describirías eso que estás diciendo? Diagonal a la iglesia, ***o*** el lateral le tiró una diagonal al delantero e hizo gol. ¿Qué se describe cuando decimos diagonal?
17	Estudiante:	Es una línea recta…
18	**Carlos**:	¿Línea recta?
19	Estudiante:	Una línea diagonal, un ángulo.
20	**Carlos**:	¿Cruzada? ¿Desde dónde?, ¿Hacia dónde?
21	Estudiante:	Desde un ángulo hacia otro ángulo. Una línea cruzada desde un ángulo recto.
22	**Carlos**:	¡Sí!, cuando estamos en la cancha el lateral le tira en diagonal al delantero. ¿Está cruzando ese balón?
23	Estudiante:	Sí.
24	**Carlos**:	En palabras, ¿cómo se dice?, ¡no en teoría de fútbol! Es una línea recta, dijimos. ¿Qué más?
25	Estudiante:	Cruzada.
26	**Carlos**:	¿Puede ser cruzada?
27	Estudiante:	De un lado a otro.
28	**Carlos**:	¡Vale!
29	**Carlos**:	¿***Qué quiere decir*** de un lado a otro?
30	**Carlos**:	Cuando nosotros hablábamos de un lado a otro, lo pusimos en términos de fútbol, cruza el balón diagonalmente hacia el delantero, ¡ah! ¿Eso queríamos decir?
31	Estudiante:	Sería de un ángulo a otro. ***Debes tener en cuenta*** el concepto de diagonal en geometría.

Tabla 57: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 49.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
18	Solicitud de argumento	Intención de validar.
22	Solicitud de argumento	Intención de defender.
24 y 31	Solicitud de uso de recurso retórico	Ejemplo.
15	Indicadores de argumentación	Pero, entonces, o.
29	Indicador de argumentación	¿Qué quiere decir…?
31	Indicador de argumentación	Debes tener en cuenta.

Carlos refiriéndose a los vértices de una figura, propone que la diagonal va desde una esquina hasta la otra. Antes, en la argumentación con características dialógicas, los estudiantes consideraban que una línea horizontal no podía ser diagonal, evidencia de ello es la pregunta que Carlos les plantea '¿en qué difiere? Si digo horizontal, diagonal ¿cuál es la diferencia?' El asunto de la línea horizontal fue conflictivo cuando quiso definirse qué era una diagonal. Carlos mediante una pregunta apela al punto de vista sobre la línea horizontal cuyo fin es que los estudiantes expresen argumentos para que lo defiendan [2] y enriquezcan así su definición. Al respecto, uno de ellos propone que una diagonal es una línea recta entre dos puntos específicos que difiere en su dirección.

Carlos pregunta a otro estudiante sobre la construcción de la definición de diagonal buscando resaltar la relación entre una línea diagonal y una línea horizontal, para ello le formula una pregunta [2] en la cual solicita argumentos con la intención de validar la afirmación [1]. Asimismo, plantea otra, en la que refiere la diferencia entre una línea horizontal y una diagonal; esta se caracteriza porque se solicitan argumentos con la intención de que los estudiantes defiendan tal diferencia.

Transcripción 50: Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Carlos**:	Es una recta que une dos puntos específicos.
2	**Carlos**:	¿***Pero*** podría ser horizontal?
3	**Carlos**:	Qué hay de diferencia entre horizontal… usted ahorita me dijo, ***puede ser*** horizontal, ***puede ser*** vertical, ***puede ser*** diagonal.
4	**Carlos**:	¡Listo!
5	**Carlos**:	***Entonces***, una línea horizontal también es una línea recta ***y*** va de un punto a otro punto específico.
6	**Carlos**:	¿[En] qué difiere?
7	**Carlos**:	Si lo digo horizontal, diagonal.
8	**Carlos**:	¿Cuál es la diferencia?
9	Estudiante:	Es hacia dónde va la recta.
10	**Carlos**:	¿***Entonces*** la dirección?
11	Estudiante:	***Entonces*** es la dirección que puede ir de una esquina a la otra, de un lado a otro, de arriba hacia abajo.
12	**Carlos**:	***Pero*** de arriba hacia abajo sería vertical. ¿***Entonces*** la importancia de la diagonal vendría a ser la dirección?

13 Estudiante: Sí, de todas, eso no las diferencia porque de una recta… vertical… hacia la dirección.
14 **Carlos**: ***Entonces*** es una recta con dos puntos específicos…
15 Estudiante: Que difiere [en] su dirección.

Tabla 58: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 50.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
2	Solicitud de argumento	Intención de defensa.
1	Solicitud de argumento	Intención de validar.
8	solicitud de argumento	Intención de defender.
2	Indicador de argumentación	Pero.
3	Indicador de argumentación	Puede ser.
5	Indicadores de argumentación	Entonces, y.
10	Indicador de argumentación	Entonces.
12	Indicadores de argumentación	Pero, entonces.
14	Indicador de argumentación	Entonces.

Por último, Carlos solicita a otros estudiantes un argumento con la intención de explicar mediante algunas preguntas [6, 8 y 10]. Otro tipo de preguntas solicitan argumentos con la intención de defender sus puntos de vista: ‘Y cuando hablo de diagonales, ¿[en] qué pensamos?’ [12] y ‘¿solamente líneas?’ [14].

Transcripción 51: Carlos y sus estudiantes, video 7

1 **Carlos**: ¿La segunda? [¿Qué definición de diagonal construyeron?]
2 Estudiante: Entre ***todos*** dijimos que era sentido de ubicación ***o*** de dirección.
3 Estudiante: ¿La dejamos ahí?
4 **Carlos**: Si, dejémosla en la tercera por el momento. ¿Qué dice la tercera?
5 Estudiante: ¿Qué relación encuentran entre el concepto de diagonal ***y*** geometría?
6 **Carlos**: ¿Qué relación tenemos…?
7 Estudiante: Que [en] la geometría se trabaja [con] diferentes tipos de líneas, incluyendo las diagonales.
8 **Carlos**: ¿Qué en la geometría se trabajan diferentes tipos de líneas incluyendo diagonales?,
Cuando les pregunto [sobre] geometría, ¿ustedes en qué piensan?
9 Estudiante: Figuras geométricas…
10 **Carlos**: ¿Qué más?
11 Estudiante: En líneas, figuras, ángulos, números…
12 **Carlos**: ***Y*** cuando hablo de diagonales, ¿[en] qué pensamos?
13 Estudiante: Líneas.
14 **Carlos**: ¿***Solamente*** líneas?
15 Estudiante: ***Y*** en direcciones.
16 **Carlos**: ***O sea***, tienen en común las líneas, ¡listo! La geometría ***y*** las diagonales tienen en común las líneas. ¿***Y*** en qué difieren? ¿Qué diferencia hay?
17 Estudiante: En que las líneas en geometría se unen para formar figuras…

18 Estudiante: ***Y*** las líneas son solas.

Tabla 59: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 51.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
6, 8 y 10	Solicitud de argumento con la intención de explicar	Intención de explicar.
12 y 14	Solicitud de argumento con la intención de defender	Intención de defender.
2	Indicador de argumentación	O.
12	Indicador de argumentación	Y.
16	Indicadores de argumentación	O sea, y.

6.2.1.2. Segunda parte: exploración del concepto diagonal

Durante este diálogo, Carlos, Helena y sus estudiantes se disponen en el auditorio del aula de clase en forma de mesa redonda[36]. En esta ocasión, Helena indaga de nuevo entre sus estudiantes sobre el uso de la diagonal en la vida cotidiana. Uno de ellos responde que ha empleado la diagonal en el uso de direcciones, y en clases diversas que ha tenido en la escuela. Helena insiste al estudiante por una explicación sobre el uso de las diagonales en las direcciones [3]. En esta pregunta que plantea a su estudiante, solicita un argumento con la intención de explicar. Más adelante, durante la explicación que ofrece el estudiante, recurre en su diálogo, al trazado de mapas por medio del transportador de ángulos, afirmación que plantea cuando trata de buscar los puntos cardinales de ciertos lugares en un mismo mapa. Con lo que al responderle recurre al uso de garantías empírico-personales. Sin embargo, Helena no parece haber sido persuadida con la respuesta, y solicita argumentos, a otros estudiantes para que refuten lo que el anterior afirmó [5, 6 y 7].

A modo de conclusión, la siguiente transcripción evidencia la solicitud de Helena de argumentos con la intención de explicar un punto de vista, y la solicitud de argumentos con la intención de refutar. No obstante, con los demás estudiantes, usa preguntas diversas para discutir la explicación que ha ofrecido a uno de ellos; pero, los demás no refutan el punto de vista

[36] Aquí los estudiantes en el auditorio del aula de clase discuten con sus maestros: Carlos y Helena.

expresado por su compañero; por el contrario, al unísono responden que sí ante la última pregunta que formula la maestra respecto a los ángulos y las diagonales [10].

Transcripción 52: Helena y sus estudiantes, video 7

1 **Helena**: ¿En qué momento de tu vida has empleado la palabra diagonal?
2 Estudiante: Para indicar direcciones, en clase de artística, de geometría, trazado de mapas, inclusive en el Origami.
3 **Helena**: ¡Bueno!, vamos por parte, ¿ahí mismo pensaste en direcciones?, ¿***en qué*** momento uno la usa en direcciones?, porque uno usa carreras, calles…
4 Estudiante: Pero antes ***no*** se usaba así, antes la gente tenía que trazar los mapas a mano ***y*** para eso se usaba el transportador, el transportador nos ***puede dar*** ángulos, ***y*** si ponemos un ángulo ***ya sea*** agudo u obtuso tiene diagonales ***y*** se traza una línea del centro al ángulo.
5 **Helena**: ¿Alguien quiere debatirle?
6 **Helena**: ¿Están de acuerdo?
7 **Helena**: ¿***No*** están de acuerdo?
8 **Helena**: ¿Sí les parece?
9 **Helena**: ¿Sí será que sirve para los ángulos? ¿Será que sí?
10 Grupo: ¡Sí!

Tabla 60: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 52.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
3	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
5, 6 y 7	Solicitud de argumento	Intención de refutar.
7	Indicador de argumentación	No.

Ante las preguntas relacionadas con argumentos con la intención de refutar el punto de vista de uno de sus estudiantes [1], otro estudiante comunica que tiene un punto de vista diferente al de sus compañeros en cuanto al uso de las diagonales en la vida cotidiana: menciona las diagonales en un partido de fútbol. Como puede evidenciarse, en la transcripción cincuenta y tres, Helena plantea varias preguntas al estudiante, relativas a la solicitud de argumentos con la intención de explicar. En algunas, Helena utiliza exclamaciones interrogativas [3]; en otras, usa indicadores de argumentación diversos, entre ellos ‘o sea’. Transcurrido un tiempo entre la argumentación con característica dialógica de Helena con su estudiante, Carlos solicita argumentos que expliquen cómo se usan las diagonales en el fútbol [4].

Transcripción 53: Helena, Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Helena**:	¿Quién tiene algo diferente?
2	Estudiante:	Cuando estamos jugando un partido de fútbol ***y*** nos dicen que la tiremos diagonal.
3	**Helena**:	¿¡Que la tiren diagonal!? ***O sea,*** ¿cómo?
4	**Carlos**:	¿Quién me explica cómo es una diagonal en el fútbol?
5	Estudiante:	Un jugador está en esta banda ***y*** se la pasa a otro que está en el otro lado, ***pero*** se la pasa así cruzada [señala con la mano].
6	**Carlos**:	Si yo soy delantero derecho ***y*** usted me la tiró del lado izquierdo, ¿hacia dónde va diagonal?
7	Estudiante:	Hacia el delantero derecho.
8	**Carlos**:	¿***Y*** si solo es defensa? ¿Dependiendo donde esté el defensor?
9	Estudiante:	¡Sí!
10	**Carlos**:	Si el defensor está en la parte derecha, ¿hacia dónde se dirige la…?
11	**Helena**:	¿***Y*** si me quedo, digamos con la cancha? ***No*** con los jugadores ***ni*** como tiran la pelota, ¿será que puedo ver una cancha… diagonal?
12	Grupo:	¡Sí!
13	**Helena**:	¿Cómo la puedo ver?
14	Estudiante:	***De acuerdo*** al ángulo en el que se vea la cancha.
15	**Helena**:	¿Sí?
16	Grupo:	¡Sí!
17	Estudiante:	De la esquina.
18	**Helena**:	¿O sea que de la esquina se ve diagonal? ¿Sí?
19	Estudiante:	Pero es que…
20	Carlos:	Cuando estamos en la parte sur, pegadito de oriental, suroriental ahí se está viendo… ¿Cómo se ve la cancha?
21	Grupo:	Diagonal.
22	**Helena**:	Ahora, veo que todos los grupos colocaron esto de las direcciones. ¿Cierto que sí?
23	Grupo:	¡Sí!
24	**Helena**:	¿***Y*** dónde se ven las diagonales en las direcciones?
25	Estudiante:	Cuando dicen que va para algún lado y dicen que diagonal a la izquierda, que allá está lo que está buscando.
26	Estudiante:	Cuando dicen que yo vivo diagonal a la tienda.
27	Estudiante:	***O*** diagonal al semáforo, y así.
28	**Helena**:	Yo siempre digo: la carrera 35 con la calle no sé qué; ***y*** si le meto por ahí una diagonal, ***entonces*** ¿qué pasó? ¿Se perdió?
29	Grupo:	***No.***
30	**Helena**:	***Hay algo,*** ¿cierto que sí? ¿Qué movimiento?
31	Estudiante:	Una diagonal.
32	**Helena**:	¿Las calles ***y*** las carreras cómo son?
33	Grupo:	Derechas.
34	Estudiante:	La diagonal es como una curva.

Tabla 61: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 53.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
1	Solicitud de argumento	Intención de refutar.
3	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
4	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
3	Indicador de argumentación	O sea.
8	Indicador de argumentación	Y.
11	Indicadores de argumentación	Y, no, ni.
24	Indicador de argumentación	Y.
28	Indicadores de argumentación	Y, entonces.

Al avanzar con sus estudiantes en la construcción de la definición de diagonal, Helena propone en la argumentación con características dialógicas la pregunta '¿qué puso de definición de diagonal?' [35]; en consecuencia, algunos responden que está relacionada con una línea recta que se cruza de un lado a otro; pero uno recomienda a otro de sus compañeros para que continúe explicando estos puntos de vista a Helena, porque fue quien promovió la participación y el diálogo entre ellos.

Después, Helena aporta un punto de vista a su estudiante, en particular, sobre las diagonales y la geometría; las respuestas que han ofrecido parecen no convencerla con la definición de diagonal [38]. En el inicio de la transcripción cincuenta y cuatro se evidencia un argumento con la intención de explicar por parte de los estudiantes [35].

Al insistir en la construcción de la definición de diagonal, les plantea una pregunta: '¿quién más me puede dar una definición de diagonal?' [42]. A lo que responden que puede ser una línea que se traza o se imagina [43]. Helena profundiza en esta afirmación solicitando a este estudiante que use un ejemplo para que respalde su argumento [46]. Luego, Helena formula algunas preguntas [48], a las que uno de ellos responde con un ejemplo [49]. Por último, Helena indica que la definición que han mencionado aún sigue siendo general, y procede a desafiarlos mediante otras preguntas [50].

Transcripción 54: Helena y sus estudiantes, video 7

35 **Helena**: ¿Qué puso de definición de diagonal?
36 Estudiante: Es una línea recta que cruza de un lado a otro.
37 Estudiante: Sentido de ubicación o de dirección.
38 **Helena**: ***Y*** si te digo que eso es una matemática espacial, que manejo ***porque*** me ubico fácil ¿eso es diagonal? ¿Tú lo entiendes por ese lado?
39 Estudiante: ¡Espere! Él le explica más, él fue el que nos dio la idea.
40 Estudiante: Discute con tus compañeros y luego construye una definición de diagonal [el estudiante lee]. Sentido de ubicación o de dirección.
41 Estudiante: Por ejemplo, si vamos hacia allá, vamos en una sola dirección.
42 **Helena**: ¡Chicos!, ¿quién más me ***puede dar*** una definición de diagonal?
43 Estudiante: ¡Yo! Una diagonal es una línea recta que trazamos cuando vamos a hacer algo o ***también puede ser*** una línea imaginaria.
44 **Helena**: Una línea recta que trazamos…
45 Estudiante: ***Pues***, cuando vamos a hacer algo.
46 **Helena**: ¿Cuándo vamos a hacer algo? ***O sea que***… muéstrame un ejemplo de diagonal, con tu definición. ¿Dónde hay una diagonal?
47 Estudiante: Por ejemplo con los ángulos, cuando uno tiene que sacar un ángulo o algo así, trazar una línea o algo ¿no?
48 **Helena**: Una línea recta ¿que va de dónde a dónde? ¿Dónde la ves? ¿Dónde la puedes reconocer?
49 Estudiante: Allá arriba en esas cosas, en el techo.
50 **Helena**: Sigue siendo general, ¿ustedes que opinan? Es una línea recta que trazamos cuando vamos a hacer algo ***o también puede ser*** una línea imaginaria ¿es una definición general ***o*** para ustedes sí puede ser una diagonal? ¿Ustedes qué creen? ¿Qué escribieron ustedes?

Tabla 62: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 54.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
35	Solicitud de argumento	Intención de explicar.
46	Solicitud de uso de recurso retórico	Ejemplo.
38	Indicadores de argumentación	Y, porque.
46	Indicador de argumentación	O sea que…
50	Indicador de argumentación	O.
50	Cualificador modal	También puede ser.

A continuación, Carlos interviene en el diálogo con una pregunta sobre la relación entre geometría y diagonales [51]; así mismo, lo hace Helena [53]. Ante esta pregunta, los estudiantes responden que las diagonales se relacionan con la geometría porque se utilizan en figuras y líneas; pero a través de la solicitud de un argumento con la intención de refutar, Helena les pregunta si están de acuerdo con lo que afirma su compañero [55]. El grupo responde al unísono que sí [56]; no obstante, otro estudiante afirma que algunas figuras tienen diagonales; aquí usa el cualificador modal ‘algunas’. Esto provoca de inmediato que Helena pregunte por las figuras geométricas que no tienen diagonales [61]; con este propósito, uno de sus estudiantes responde que el cuadrado no tiene diagonales [62], pero Helena replica sobre la veracidad de su enunciado [63] y en seguida el estudiante se corrige al afirmar que el triángulo es el que no tiene diagonales [64].

Aunque la definición de diagonal no se ha expresado todavía de manera geométrica, sí ha acontecido una construcción del conocimiento a través de la participación, de modo que tanto la participación de Carlos, Helena y los estudiantes permite que se vaya refinando dicha definición. De manera específica, este refinamiento se ha construido a partir del uso de diversas garantías empírico-personales expuestas por los estudiantes y de las preguntas de Carlos y Helena que van orientando los argumentos de sus estudiantes.

Transcripción 55: Carlos, Helena y sus estudiantes, video 7

51	**Carlos**:	¿Cuál es esa, la tercera? [Refiriéndose a una pregunta]
52	Estudiante:	Una diagonal hace parte de la geometría, porque en la geometría marcan ***todo*** lo que tiene que ver con figuras ***y*** líneas.
53	**Helena**:	¿***Y*** qué? ***O sea***, hace parte de la geometría, ¿***Por que*** la geometría tiene qué? Miren acá esta definición, vuelve y léela por favor. ¿Qué relación tiene con la geometría?
54	Estudiante:	Una diagonal hace parte de la geometría, porque en la geometría marcan ***todo*** lo que tiene que ver con figuras ***y*** líneas.
55	**Helena**:	¿Están de acuerdo?
56	Grupo:	¡Sí!
57	**Helena**:	La geometría marca ***todo*** lo que tiene que ver con figuras ***y*** líneas, ***entonces*** las diagonales hacen parte de la geometría por esta razón ¿sí está bien?
58	Grupo:	¡Sí!
59	**Helena**:	¿Quién más dice algo?
60	Estudiante:	¡Que algunas figuras geométricas tienen diagonales!
61	**Helena**:	Miren que interesante aquí, miren un momentico: algunas figuras geométricas tienen diagonales, ***entonces*** si ***algunas*** tienen, te pregunto: ¿cuáles no?
62	Estudiante:	El cuadrado.
63	**Helena**:	¿El cuadrado ***no*** tiene diagonales?
64	Estudiante:	El triángulo [El estudiante corrige su error en lo que dice].
65	**Helena**:	¿El triángulo por qué ***no*** tiene diagonales?
66	Estudiante:	¡El triángulo si tiene diagonales!
67	**Helena**:	¿Cuál ***no*** tiene diagonales?
68	Estudiante:	¡El círculo!, el cuadrado, ***si*** uno quiere partirlo le saca [le traza la] diagonal.

Tabla 63: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 55.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
55	Solicitud de argumento	Intención de refutar.
53	Indicadores de argumentación	Y, o sea, por que.
57	Indicador de argumentación	Entonces.
61	Indicador de argumentación	Entonces.
61	Cualificador modal	Algunas.
63	Indicador de argumentación	No.
65	Indicador de argumentación	No.
67	Indicador de argumentación	No.

6.2.1.3. Tercera parte: exploración y solicitud de garantías a priori-epistemológicas del concepto diagonal entre Carlos, Helena y sus estudiantes

Después de que se construye la definición de diagonal en el auditorio del aula de clase, en otro momento de la argumentación con características dialógicas, Helena indaga en sus estudiantes sobre las fuentes de consulta [1]. Al respecto, estas interesan porque son los lugares donde los estudiantes averiguan las garantías a priori-epistemológicas sobre las diagonales de figuras geométricas. Por lo tanto, afirman que tal definición la han buscado en fuentes diversas, entre ellas internet y bibliotecas, pero de manera específica en libros y diccionarios [10, 11, 12 y 16]. Otro estudiante afirma que la definición de diagonal puede consultarse preguntándosela a algunos profesores [19] o incluso a sus papás [22].

Transcripción 56: Helena, Carlos y sus estudiantes, video 7

1	**Helena**:	¿En qué tipo de fuentes ***pueden buscar*** ustedes el concepto de diagonal?
2	**Helena**:	Ustedes construyeron entre los grupos de acuerdo a lo que ustedes entienden, a lo que han vivido, a su contexto, a la relación que han tenido, digamos, con el concepto de diagonal.
3	**Helena**:	***¿Cierto?***
4	**Helena**:	***No*** sabemos si es cierta ***o no***, simplemente es que ese es el contacto que hemos tenido.
5	**Helena**:	¿Qué vamos a hacer ahora?
6	**Helena**:	Me van a decir qué colocaron, qué escribieron en la parte donde dice ¿dónde ***puedo encontrar*** la definición de diagonal?
7	**Helena**:	¿En qué tipos de fuentes podemos encontrar el concepto de diagonales?
8	**Helena**:	¿Dónde lo puedo encontrar?
9	**Helena**:	Este grupo de acá, ¿qué dice?
10	Estudiante:	Wikipedia, Yahoo.
11	Estudiante:	En libros.

12 **Helena**: Puedo ir a la biblioteca ***y*** buscarlos
13 Helena: ¿Qué más?
14 Helena: Esos son recursos importantes que ***hay que tener en cuenta***, ***porque*** cuando quieren buscar algo ***o*** investigar algo, adónde acuden. Por ejemplo, un chico aquí dice que, al Rincón del vago; ***o sea,*** que si te digo: investiga para mañana la palabra diagonal,
15 Helena: ¿Tú vas y te metes ahí?, ¿cierto?
16 Estudiante: Normalmente en Google sale ese.
17 **Helena**: ¿¡Diccionario!?
18 **Carlos**: ¿Cuándo [lo] necesitan…?
19 Estudiante: También lo podemos escuchar cuando los profesores hablan.
20 **Carlos**: ¡A eso quería ir!
21 **Helena**: ¿Tú a quien le preguntas, por ejemplo?
22 Estudiante: Por ejemplo, a la profesora ***o*** a mis papás, ***pues*** a las personas que sepan de matemáticas.

6.2.1.4. Cuarta parte: conclusiones del concepto diagonal

Al finalizar la clase, Helena pregunta a sus estudiantes por la conclusión de las discusiones. Uno de ellos afirma que se exploraron los puntos de vista que sabían y que se compartieron conocimientos. La transcripción cincuenta y siete presenta evidencias de tales hechos.

Transcripción 57: Helena, Carlos y sus estudiantes, video 7

1 Estudiante: ¿La conclusión de lo que es diagonal?
2 **Helena**: ¡De todo!
3 Estudiante: ¿La conclusión de todo?
4 **Helena**: Yo puedo decir: nunca había escuchado sobre esto y aprendí tal cosa o me pareció… lo que quieras, lo que te venga en mente.
5 Estudiante 1: La conclusión de todo esto sería: aprendimos nuevos…. de diagonal, … ***y*** exploramos lo que sabemos y lo que compartimos.
6 **Carlos**: ¡Es fácil!
7 Estudiante 2: Sí, es fácil.

Tabla 64: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 57.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
1 y 2	Conclusión	Definición de diagonal que se construyó.

Para finalizar, ante la pregunta que formula Carlos [8], otro estudiante responde que la conclusión refiere a que las diagonales son importantes en la geometría, en las artes, en las direcciones y en el fútbol [9], puntos de vista que fueron discutidos en los diálogos de Carlos y Helena con sus estudiantes.

Transcripción 58: Carlos y sus estudiantes, video 7

8	**Carlos**:	Si te preguntan conclusión, listo, algo que ***no*** hayas hecho hoy ***o*** distinto de todos los días, una conclusión, ¿qué aprendiste hoy?
9	Estudiante 2:	Conclusión: la diagonal es una línea útil, ***no todos*** la usamos ***porque*** hay que aceptarlo, normalmente se usan rectas bien sean horizontales o verticales; ***pero*** la línea diagonal es importante ***aunque casi no*** la usemos ***porque*** sin ella ***no*** se ***podrían haber*** diseñado tantas cosas que últimamente hemos ***podido tener***; ***además*** de eso, ***también*** aprendí que las líneas en diagonal ***no*** son ni inútiles para todo, ***ni*** útiles para todo, pero son demasiado importantes para lo que es la geometría, el arte, para dar direcciones, para el fútbol; aunque ***no*** soy partidario del fútbol, ***pero*** es importante también.

Tabla 65: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 58.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
8 y 9	Conclusión	Definición construida de diagonal.
9	Indicadores de argumentación	No, o, porque, además, también, pero.
9	Cualificador modal	No todos, aunque casi no.

La Tabla 66 muestra un resumen de la interpretación de los ejemplos individuales propuestos en la presentación y discusión de esta tarea.

Tabla 66: Recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación de la Tarea 7.

Diálogo	Argumento con carácter dialógico	Transcripciones 39 a 58.	
Indicadores de argumentación		Transcripción 39	Pero, eso es.
		Transcripción 40	Y, porque.
		Transcripción 41	O sea.
		Transcripción 43	No, si, sino.
		Transcripción 44	Supongamos.
		Transcripción 45	Y, sí.
		Transcripción 46	O sea, no, o.
		Transcripción 47	Es decir, entonces, pero.
		Transcripción 48	Y luego, no, también, sí.
		Transcripción 49	Pero, entonces, qué quiere decir, debes tener en cuenta.
		Transcripción 50	Pero, entonces.
		Transcripción 51	O, y, o sea.
		Transcripción 52	En qué, no, y.
		Transcripción 53	O sea, y, no, ni, hay algo.
		Transcripción 54	Y, porque, también, pues, o sea que, o.
		Transcripción 55	Y, o sea, entonces, no.
		Transcripción 56	No, hay que tener en cuenta, porque, o, pues.
		Transcripción 58	O, porque, no, además, también, pero.
Recurso retórico	Ejemplo	Transcripciones 40, 43, 45, 49, 54, 56.	
Componentes Argumentativos	Garantía empírico-personal	Transcripción 38	
		Transcripción 41	
		Transcripción 46	
		Transcripción 47	
		Transcripción 52	
		Transcripción 55	
	Cualificador modal	Transcripción 41	Puede ser.
		Transcripción 43	Algunas veces.
		Transcripción 48	Siempre.
		Transcripción 51	Todos, solamente.
		Transcripción 52	Puede dar.
		Transcripción 54	Puede ser.
		Transcripción 55	Algunas.
		Transcripción 56	Pueden buscar, puedo encontrar.
		Transcripción 58	Todos, podrían haber, aunque, podido tener.
	Conclusión	Transcripción 57	
		Transcripción 58	
Intención de los argumentos	Para explicar	Transcripción 39 a 41, 43 a 47, 51 a 54.	
	Para validar	Transcripción 39, 41, 48, 49 y 50	
	Para justificar	Transcripción	
	Para refutar	Transcripciones 43, 44, 47, 52, 53 y 55.	
	Para persuadir	Transcripción	
	Para defender	Transcripciones 39, 43, 44, 52.	

6.2.2. Tarea 8: Solicitud de argumentos de María a sus estudiantes

La tarea que presenta María se enmarca dentro del paradigma de enseñanza de la geometría natural porque durante los argumentos se usan garantías empíricas. Para las evidencias de la argumentación de María con sus estudiantes en el auditorio del aula de clase, se grabaron en audio dos sesiones de sus clases, en las cuales se trató el uso de la geometría en la vida cotidiana de los estudiantes y el uso de las diagonales en las figuras geométricas. A continuación, se analiza e interpreta la argumentación ocurrida en la primera sesión de clase.

El siguiente segmento locutivo se registra entre las transcripciones cincuenta y nueve y sesenta y ocho, donde aparece documentada la argumentación con características dialógicas sobre el uso de la geometría en la vida cotidiana. Los estudiantes que participaron se nombraron: Estudiante 1*, Estudiante 2*, Estudiante 3* y Estudiante 4*, quienes cursaban cuarto grado de educación básica primaria. En tal argumentación, las preguntas que les formuló María se orientaron en dos sentidos: Unas solicitaban conocimientos geométricos, de manera concreta sobre figuras bidimensionales y tridimensionales, largo, ancho, alto, vértice y aristas, perímetro y área; y otras solicitaban el uso y la importancia de la geometría en sus experiencias personales.

Los argumentos con características dialógicas que se presentan son evidencias de una concepción amplia de validación del conocimiento, no se restringen solo a ofrecer fuerza teórica a los argumentos, y de manera específica, por el uso de garantías a priori-epistemológicas de la geometría, sino también para apoyar negociaciones de significados de conceptos de la geometría desde las experiencias personales de María con sus estudiantes.

El tipo de preguntas de María durante este segmento, manifiesta la complejidad cuando se discute sobre conocimientos geométricos. Estas preguntas sirvieron para mantener la argumentación con características dialógicas mediante estructuras como ¿por qué?, ¿qué es?, y

¿qué? En unas, los estudiantes usan garantías a priori-epistemológicas al responder; en otras, usan garantías empírico-personales.

Para iniciar, María solicita argumentos a un estudiante mediante la pregunta: '¿dime qué es la geometría?' A lo cual responde recurriendo al recurso retórico ejemplo [2]; esto puede confirmarse cuando usa la palabra 'como' [2], la cual atenúa el grado de certeza de lo que afirma. Asimismo, el estudiante usa una garantía a priori-epistemológica [2]. Luego, otra estudiante responde, respaldada en una garantía empírico-personal que refiere la importancia de la geometría desde sus experiencias cotidianas [4].

La manera de argumentar de María con sus estudiantes parte de una pregunta que permite la aceptación de puntos de vista diversos entre ellos; es decir, conllevan a que los estudiantes usen garantías diversas a priori-epistemológicas y empírico-personales.

Transcripción 59: María y sus estudiantes, audio 1

1	**María**:	¡Estudiante 1*!, ¿dime qué es la geometría?
2	Estudiante 1*:	La geometría son las distintas partes de las figuras; como, por ejemplo: los vértices, los lados ***y*** las aristas.
3	**María**:	¡Estudiante 2*!
4	Estudiante 2*:	¡Mmm!, la geometría para mí son las variedades de figuras que hay en nuestro mundo ***y*** las figuras geométricas son importantes para nuestra vida.
5	**María**:	¿Por qué son importantes?
6	Estudiante 2*:	***Porque*** ellas nos ayudan a reconocer si, si, si… ¡Se me olvidó!
7	**María**:	¡Listo!, ¿Estudiante 3*?
8	Estudiante 3*:	Para mí las figuras geométricas son las figuras tridimensionales ***y*** bidimensionales.

Tabla 67: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 59.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
1 y 2	Solicitud de uso de recurso retórico	Ejemplo.
3 y 4	Solicitud de garantía	Empírico-personal.

La respuesta ofrecida por la estudiante [8] provoca que María gire su argumento hacia dos preguntas: '¿qué es bidimensional? y ¿qué es tridimensional?' [9]; estas tiene como intención solicitar garantías a priori-epistemológicas.

Las respuestas tanto de un estudiante [10] como de otro [13] evidencian el uso de dichas garantías, las cuales tratan las relaciones de una figura bidimensional y tridimensional con su largo, ancho y alto [10]; y con las aristas, vértices y lados [13]. Luego, María aprueba la afirmación de la estudiante [9].

Transcripción 60: María y sus estudiantes, audio 1

9	**María**:	¿Qué es bidimensional? ***y*** ¿qué es tridimensional?
10	Estudiante 3*:	Una figura bidimensional es que ***solo*** tiene ancho ***y*** alto, ***y*** una figura tridimensional tiene largo, ancho ***y*** alto.
11	**María**:	¿Largo, ancho ***y*** alto? ¡Bien!
12	**María**:	¿Estudiante 4*?
13	Estudiante 4*:	Para mí la geometría son ***todas*** las figuras que hay ***y*** lo que lo representa: las aristas, los vértices, los lados.

Tabla 68: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 60.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
9	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
9	Indicador de argumentación	Y.

En otro argumento con carácter dialógico, los estudiantes utilizan el recurso retórico metáfora, que se explicita cuando uno de ellos compara las figuras geométricas con objetos de su vida cotidiana [15]. Después, el Estudiante 1* explica por qué tales objetos, que menciona son figuras geométricas [17]; usa garantías a priori-epistemológicas que se relacionan con las comparaciones entre los objetos de su cotidianidad y las figuras geométicas [17]; lo anterior evidencia la importancia del valor epistémico de los conocimientos geométricos cuando María enseña a sus estudiantes.

En este mismo orden de ideas, el estudiante utiliza el cualificador modal ‘ciertamente’ por medio del cual demuestra seguridad en la veracidad de lo que afirma en el diálogo [15] cuando relaciona objetos de la vida cotidiana con el concepto de tridimensional, vértices y aristas [17]. A su vez, el estudiante usa indicadores de argumentación diversos, entre ellos: ‘primero que todo’, ‘no más’, ‘también’, ‘y’; y ‘y eso es’ [17], que aparecen después de que María pregunta

'¿Y por qué en esas… *[cosas]*? y ¿En esos electrodomésticos?' [16]. Al responder, el estudiante usa argumentos con la intención de explicar sus puntos de vista [17].

Transcripción 61: María y sus estudiantes, audio 1

14	**María**:	En las cosas de la vida cotidiana, ¿dónde encontramos geometría?
15	Estudiante 1*:	En el televisor, en la lavadora, en el computador ciertamente.
16	**María**:	¿***Y por qué*** en esas… [cosas]? ¿En esos electrodomésticos?
17	Estudiante 1*:	¡Bueno!, primero que todo son las figuras geométricas tridimensionales, ***no más***, ***también*** tiene los vértices ***y*** las aristas ***y*** eso es lo que los hace figuras geométricas.

Tabla 69: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 61.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
14 y 15	Solicitud de uso de recurso retórico	Metáfora.
16 y 17	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
16	Indicadores de argumentación	Y, por qué.

A continuación, María pregunta a sus estudiantes: '¿tener vértice y arista la hace figura geométrica?' [18], esto motiva a que ellos usen tanto garantías a priori-epistemológicas como empírico-personales en sus argumentos; de un modo, esto se evidencia en la respuesta de uno de ellos, cuando afirma que 'las figuras planas no tienen ni masa ni volumen siempre' [20]; De otro, un estudiante usa una garantía empírico-personal al afirmar que mediante las figuras geométricas se reconoce la clase del objeto [22]. Además, utiliza algunos indicadores de argumentación al reaccionar a la pregunta de María, tales como 'porque', 'ni… ni…', 'y' y 'también' [20].

Transcripción 62: María y sus estudiantes, audio 1

18	**María**:	¿Tener vértice ***y*** arista la hace figura geométrica?
19	Estudiante 1*:	Bueno.
20	Estudiante 2*:	***Porque*** las figuras planas ***no*** tienen ***ni*** masa ***ni*** volumen ***y*** ellas también son figuras geométricas.
21	**María**:	¡Muy bien, Estudiante 2*!
22	Estudiante 2*:	Las figuras geométricas nos ayudan a reconocer si un objeto es un computador ***o*** si es una lavadora ***o*** si es una casa.

Tabla 70: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 62.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
18 y 20	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
18	Indicador de argumentación	Y.
22	Garantía empírico-personal	Usada por los estudiantes.

En otro instante de la clase, María retoma la pregunta formulada al comienzo [23] solicitando el uso del recurso retórico metáfora [23], a lo que el estudiante responde que la geometría se encuentra en un colchón, en una puerta, en una nevera y que estas figuras son prismas rectangulares [24]. Otro estudiante también utiliza usa este recurso en sus argumentos para comparar objetos cotidianos con figuras geométricas [26] y concluye, debido a la solicitud de una garantía a priori-epistemológica por parte de María [25], que son prismas rectangulares y figuras tridimensionales [26].

Transcripción 63: María y sus estudiantes, audio 1

23 **María**: ¡Estudiante 3*!, ¿Dónde encontramos geometría?
24 Estudiante 3*: En un colchón, en una puerta, en una nevera, que son figuras prismas rectangulares.
25 **María**: ¿Son prismas rectangulares? ¿***Y por qué*** son prismas rectangulares?
26 Estudiante 3*: ***Porque*** son un rectángulo, ***pero*** son figuras tridimensionales.

Tabla 71: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 63.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
23 y 24	Solicitud de uso de recurso retórico	Metáfora.
25 y 26	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
26	Indicadores de argumentación	Y, por qué.

María formula después la misma pregunta a otros de sus estudiantes. Uno de ellos responde que en algunos objetos particulares [28]. Enseguida, María la cambia: '¿En qué comida encontramos figuras?' [29] para solicitar el uso del recurso retórico metáfora, a lo que responde uno de sus estudiantes que en la naranja [30] porque es una esfera [32]. Otro responde que en las galletas porque son figuras cuadradas [34]; entonces la maestra en formación inicial pregunta: '¿Las galletas son unas figuras cuadradas?' [35] 'No, rectangulares' [36] y María le pregunta de nuevo: '¿son planas o son tridimensionales?'; a lo que ella responde que son tridimensionales [38] por medio de una garantía empírico-personal [40]. Lo anterior evidencia la importancia de las preguntas por parte de la maestra en la construcción social del conocimiento en el auditorio del aula de clase.

Transcripción 64: María y sus estudiantes, audio 1

27	**María**:	¡Estudiante 4*!
28	Estudiante 4*:	En la mesa, en la máquina expendedora, en la pirámide, en el cuaderno, en la casa, ¡jumm!, ¡en todo!
29	**María**:	¿***En qué*** comida encontramos figuras?
30	Estudiante 1*:	En la naranja
31	**María**:	¡En la naranja!, ¿***por qué***?
32	Estudiante 1*:	***Porque*** la naranja es una esfera.
33	**María**:	¡Estudiante 2*!
34	Estudiante 2*:	En las… en las galletas porque son unas figuras cuadradas.
35	**María**:	¿Las galletas son unas figuras cuadradas?
36	Estudiante 2*:	***No***, rectangulares.
37	**María**:	¿Son planas ***o*** son tridimensionales?
38	Estudiante 2*:	Tridimensionales.
39	**María**:	***¿Por qué?***
40	Estudiante 2*:	***Porque*** así sean delgaditas, ellas se juntan una cara con la otra.
41	Estudiante 1*:	Como el papel higiénico.
42	Estudiante 2*:	De altura, de largo ***y*** de ancho.

Tabla 72: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 64.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
28	Solicitud de uso de recurso retórico	Metáfora.
37	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
40	Garantía empírico-personal	Usada por los estudiantes.
29	Indicador de argumentación	En qué.
31	Indicador de argumentación	Por qué.
37	Indicador de argumentación	O.
39	Indicador de argumentación	Por qué.

Al continuar la clase, María insiste en preguntar por la importancia de la geometría a uno de sus estudiantes [43] para solicitar puntos de vista personales. Este menciona la importancia de la geometría desde su punto de vista de experiencias personales al usar los recursos retóricos ejemplo y metáfora [46] cuando señala la columna que puede sostener una casa y la compara con una figura geométrica cilíndrica [46].

Transcripción 65: María y sus estudiantes, audio 1

43 **María**: ¿***Y*** la geometría es importante o no?
44 Estudiante 1*: Bueno, desde mi punto de vista sí es importante.
45 **María**: ***¿Por qué?***
46 Estudiante 1*: ¡Eh!, ***porque*** la geometría es la que forma a las figuras geométricas, que permiten hacer las cosas; por ejemplo, ¡eh! digamos que un cilindro, ¡eh! digamos que estoy construyendo una casa ***y*** necesito una varilla como columna, gracias al cilindro tengo esa varilla para sostener la casa.

Tabla 73: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 65.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
43	Solicitud de uso de recurso retórico	Ejemplo y metáfora.
43	Indicador de argumentación	Y.
45	Indicador de argumentación	Por qué.

Cuando María solicita argumentos a otro estudiante, expresa la importancia de la geometría porque le permite reconocer objetos que lo circundan. Como en el caso anterior, el estudiante usa una garantía empírico-personal [47- 48].

En la respuesta del Estudiante 3* también se destaca la importancia de la geometría no solo a partir del uso o reconocimiento de figuras, como lo expresan antes el estudiante 1* y el Estudiante 2*, respectivamente, sino también a partir de la cantidad de longitud o de superficie que puede asignarse en cierto lugar a través del perímetro y del área de figuras geométricas. En esta ocasión, el estudiante usa otra garantía empírico-personal [49].

Transcripción 66: María y sus estudiantes, audio 1

47 **María**: Sí, ¿qué más?
48 Estudiante 2*: Desde mi gusto ***y*** mi punto de vista sí es importante la geometría ***porque*** sin ella ***no*** podemos reconocer si una figura es plana, tridimensional ***o*** si es un televisor ***o*** un lápiz.
49 Estudiante 3*: Las figuras geométricas son importantes ***porque*** de ahí se puede sacar el perímetro, el área ***y*** eso nos ayuda [a saber] cuánto podemos poner en un lugar.

Tabla 74: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 66.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
47-48	Solicitud de garantía	Empírico-personal.
49	Garantía empírico-personal	Usada por los estudiantes.

María ahora le pregunta por el perímetro a su estudiante [50], quien da de forma exacta su significado por medio del uso de una garantía a priori-epistemológica [51]. Además, cuando María lo interroga por el área [52], contesta que es la multiplicación de los lados de una figura por medio de otra garantía a priori-epistemológica [53].

Transcripción 67: María y sus estudiantes, audio 1

50	**María**:	¡Estudiante 3*!, ¿qué es perímetro?
51	Estudiante 3*:	El perímetro es la suma [de la medida] de ***todos*** los lados.
52	**María**:	¿***Y*** [el] área?
53	Estudiante 3*:	El área es la multiplicación de un lado por el otro
54	**María**:	La multiplicación de un lado por el otro.

Tabla 75: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 67.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
50-51	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
52-54	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
52	Indicador de argumentación	Y.

Un estudiante responde la pregunta de María [55] cuando dice reconocer la importancia de la geometría por las formas que tienen los objetos y usa el recurso retórico ejemplo para explicarle este asunto. Otro utiliza una garantía a priori-epistemológica como reacción ante la pregunta de su maestra [59].

Transcripción 68: María y sus estudiantes, audio 1

55	Estudiante 4*:	Sí son importantes ***porque*** con la geometría se ***puede reconocer*** cómo son las cosas ***y*** en dónde las encuentra porque digamos uno dice: ¡se me perdió una vela! ***y*** el otro le pregunta: ¿de qué forma es? ***y*** uno no sabría de qué forma es pues hay velas cuadradas, triangulares, circulares, ***entonces*** uno no encontraría la cosa, pero con la geometría uno dice: ¡se me perdió la vela! ***y*** el otro le pregunta: ¿de qué forma es? ***y*** uno dice: circular ***y*** ahí la va a buscar ***y*** la encuentra.
56	**María**:	¿Qué estabas diciendo Estudiante 2*?
57	Estudiante 1*:	Es la identificación de las cosas, la geometría.
58	**María**:	¡Estudiante 3*!
59	Estudiante 2*:	Que el área es la suma de un lado por el otro, el ancho por el alto; ve la multiplicación de un lado por el otro para que el resultado dé toda el área del círculo de esa figura.
60	Estudiante 1*:	El área es la multiplicación del ancho ***y*** del alto.
61	**María**:	¿Del qué, Estudiante 1*?
62	Estudiante 1*:	Del ancho ***y*** del alto.
63	**María**:	Del ancho ***y*** del alto, ¿***y*** eso me da normal en plano, me da en cuadrados ***o*** qué?
64	Estudiante 2*:	¡Eh! En figuras tridimensionales.

65 **María**: ¿En figuras tridimensionales?
66 Estudiante 3*: ***No,*** cuenta el alto, ***no*** el ancho ***y*** el largo.

Tabla 76: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 68.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
55	Uso del recurso retórico	Ejemplo.
61	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
63	Indicadores de argumentación	Y, o.

La Tabla 77 presenta un resumen de la interpretación de los ejemplos individuales propuestos en esta tarea.

Tabla 77: Recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación de la Tarea 8.

Diálogo	Argumento dialógico	Transcripciones 59 a 68.	
Indicadores de argumentación		Transcripción 59	Porque, y.
		Transcripción 60	Y.
		Transcripción 61	Y, por qué, no más, también.
		Transcripción 62	Y, porque, ni.
		Transcripción 63	Y, porque, pero.
		Transcripción 64	O.
		Transcripción 65	Y.
		Transcripción 67	Y.
		Transcripción 68	Y.
Recurso retórico	Ejemplo	Transcripciones 59, 65 y 68.	
	Metáfora	Transcripciones 61, 63 y 65.	
Componentes Argumentativos	Garantía a priori-epistemológica	Transcripciones 59, 60, 61, 62 y 67.	
	Garantía empírico-personal	Transcripciones 59, 62, 64, 66, 68.	
	Cualificador modal	Transcripción 60	Todas.
		Transcripción 67	Todos.

6.2.3. Tarea 9: Discusión del concepto de diagonal por María con sus estudiantes

Esta tarea se enmarca dentro del paradigma de enseñanza de la geometría natural debido a que durante los argumentos se usan garantías empíricas. El segmento locutivo que se presenta a continuación se registra entre las transcripciones sesenta y nueve y setenta y cinco, en el cual se documenta la argumentación con características dialógicas entre María y sus estudiantes en una segunda sesión acontecida en al auditorio del aula de clase.

En esta sesión, María pregunta al principio por el concepto de diagonal; aunque, la maestra tiene la intención de que sus estudiantes usen una garantía a priori-epistemológica [1], no lo hacen. Por ejemplo, el Estudiante 1* usa una garantía empírico-personal que trata la diagonal como una raya que asciende o desciende [2]. Este significado no considera el punto de vista de diagonal como una línea vertical u horizontal.

Al continuar argumentando dialógicamente con sus estudiantes, María formula una pregunta que genera antagonismo entre ellos [3]. Uno usa el indicador de argumentación 'o', que significa que al menos tiene dos significados de lo que es una diagonal [7]; otro usa el recurso retórico ejemplo para mostrar en qué sentido no sería diagonal, a lo que afirma el Estudiante 1*. Otro más afirma que la diagonal se refiere a dos tipos de giros: uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda.

Transcripción 69: María y sus estudiantes, audio 2

1	**María**:	¿***Qué es*** una diagonal?
2	Estudiante 1*:	Una diagonal es un punto de raya que se baja en picada o se sube en picada.
3	**María**:	¿Ustedes ***están de acuerdo*** con lo que dice el Estudiante 1*?
4	Estudiante 2*:	***¡No!***
5	**María**:	Estudiante 2*, ***¿por qué no***?
6	Estudiante 1*:	¿Esto ***no*** es una diagonal?
7	Estudiante 2*:	Una diagonal es una línea que indica cuándo hay que girar a la derecha ***o*** a la izquierda.

Tabla 78: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 69.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
1	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
2	Garantía empírico-personal	Usada por los estudiantes.
1	Indicador de argumentación	¿Qué es…?
3	Indicador de argumentación	Están de acuerdo.
5	Indicador de argumentación	¿Por qué no?

Cuando María insiste en los giros a la derecha o a la izquierda; una estudiante responde usando una garantía empírico-personal con lo que relaciona la diagonal con la circulación de vehículos por las vías con semáforos [8-9]. Además, menciona las normas que se imponen para los vehículos al circular por una vía; con este fin, usa el cualificador modal no absoluto 'casi siempre'. Este tipo de garantía está vinculado con el contexto sociocultural donde vive. Luego, usa el indicador de argumentación 'o sea' que significa que iniciará su explicación de su punto de vista. Otro estudiante afirma: 'estamos en clase de matemáticas, no de conducción' [10]. En conclusión, este punto de vista de diagonal considera la importancia de la geometría en la vida cotidiana.

Transcripción 70: María y sus estudiantes, audio 2

8	**María**:	¿Cuándo hay que girar a la derecha ***o*** a la izquierda?, ***¿por qué?***
9	Estudiante 2*:	***Porque casi siempre*** en los semáforos hay una diagonal o que va para la derecha ***o*** para la izquierda, ***o sea que eso significa*** que en el semáforo ***todos*** los carros que están parados ahí ***o*** que están avanzando ***solo pueden girar*** a ese lado.
10	Estudiante 1*:	¡Estudiante 2*! ¡Estamos en clase de matemáticas, ***no*** de conducción!
11	**María**:	¿***Pero*** las matemáticas nos sirven para la vida?
12	Estudiante 4*:	En esas imágenes ***no*** aparecen diagonales, aparecen son líneas rectas.

Tabla 79: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 70.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
8	Solicitud de garantía	Empírico-personal.
9	Argumento con intención	Explicativa.
8	Indicadores de argumentación	O, por qué.
11	Indicador de argumentación	Pero.

Ante la apelación que plantea uno de los estudiantes a su compañera [12], María retoma la argumentación con característica dialógica mediante una pregunta y antagoniza la afirmación [13] al solicitar una garantía a priori-epistemológica [13]. Otro estudiante afirma que en la conducción de vehículos por las vías no aparecen diagonales sino líneas rectas. En esta ocasión, uno de ellos usa el indicador de argumentación 'no', con la intención de refutar.

Transcripción 71: María y sus estudiantes, audio 2

13	**María**:	Líneas rectas, e***ntonces***: ¿qué es una diagonal para ti?
14	Estudiante 4*:	Para mí son dos puntos que se unen y forman una línea, ¡como dijo el Estudiante 1*! y esas líneas pueden subir en picada o bajar en picada.

Tabla 80: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 71.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
13	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
13	Indicador de argumentación	Entonces.

Cuando María insiste en el punto de vista de las líneas rectas, uno de los estudiantes empieza a construir la definición de diagonal a partir de dos puntos y de su unión mediante una línea [15].

Transcripción 72: María y sus estudiantes, audio 2

15 **María**: ¿Son dos puntos que unen una línea recta?, ¿qué piensan ustedes de eso?
16 Estudiante 3*: Es una línea atravesada, como las dos de un cuadrado.

Tabla 81: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 72.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
15	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.

En la transcripción setenta y tres, cuando María les pregunta otra vez por la unión de dos puntos mediante una línea recta, retoma el punto de vista de uno de ellos y pregunta a los demás si están de acuerdo [17]. Uno de los estudiantes responde que una diagonal va de un punto a otro. Otro estudiante responde que una diagonal es una línea atravesada, con este fin usa el recurso retórico ejemplo, cuando expresa la palabra 'como', para denotar que las dos diagonales del cuadrado van atravesadas y no derechas. Este punto de vista sobre la diagonal va de la mano con la recurrencia visual del cuadrado, en el cual uno de sus lados descansa sobre la horizontal. Después, al preguntar si están de acuerdo, uno de ellos responde que la diagonal va de un punto a otro, pero de una forma ya hecha, y emplea el indicador de argumentación 'pues' que indica causa.

Transcripción 73: María y sus estudiantes, audio 2

17 **María**: ¿Estamos ***de acuerdo con*** lo que dice el Estudiante 4*? ¿Que una diagonal es una línea que va de un punto a otro?
18 Estudiante 4*: Pues de un punto a otro, pero de una forma ya hecha, ***pues no*** es, digamos vamos a poner una diagonal de aquí, eso tiene que ser un punto aquí ***o*** aquí, ***o*** aquí ***y*** aquí [señala con un lápiz cómo lo haría]

Tabla 82: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 73.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
18	Uso del recurso retórico	Ejemplo.
17	Indicador de argumentación	De acuerdo con.

Al profundizar en la definición de diagonal con sus estudiantes, María pregunta por el nombre de esos puntos en relación con una figura geométrica, a lo cual responden que se llaman vértices. Esto provoca que usen una definición por medio de una garantía a priori-epistemológica [19-20]. Ahora, la transcripción setenta y cuatro es indicio de la construcción conjunta de significados, ya que se realiza con todos los participantes mediante el diálogo; prueba de ello es cuando María afirma y pregunta a sus estudiantes: '¡Vértices!, ¿están de acuerdo?' [21].

Transcripción 74: María y sus estudiantes, audio 2

19 **María**: ¿Esos puntos cómo se llaman?
20 Estudiante 2*: Vértices.
21 **María**: ¡Vértices!, ***¿están de acuerdo?***
22 Todos: ***Síí.***

Tabla 83: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 74.

Turno	***Elemento teórico***	***Descripción***
19-20	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
21	Indicador de argumentación	Están de acuerdo.

María pregunta finalmente qué es una diagonal y un estudiante responde que es una línea que une dos vértices [23-24]. María insiste de nuevo en si pueden unirse los vértices de cualquier manera [25], a lo que responde que no, que debe ser en línea recta [26]. María usa el indicador de argumentación 'entonces' no como la implicación de una afirmación, sino como las implicaciones de las afirmaciones diversas que ya se habían presentado sobre la diagonal en el auditorio.

Transcripción 75: María y sus estudiantes, audio 2

23 **María**: ***Entonces***, ¿qué es una diagonal?
24 Estudiante 3*: Es una línea que une dos vértices.
25 **María**: Una línea que une dos vértices, ***¿de cualquier manera?***
26 Estudiante 3*: ***No***, recta ***no*** ¡diagonal!

Tabla 84: Interpretación de los ejemplos individuales en la transcripción 75.

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
23-24	Solicitud de garantía	A priori-epistemológica.
23	Indicador de argumentación	Entonces.
25	Indicador de argumentación	De cualquier manera.

La Tabla 85 expone un resumen de la interpretación de los ejemplos individuales propuestos en esta tarea.

Tabla 85: Recopilación de la interpretación directa de los ejemplos individuales en la argumentación de la Tarea 9.

Diálogo	Argumento con carácter dialógico	Transcripciones 69 a 75.	
Indicadores de argumentación		Transcripción 69	No.
		Transcripción 70	Porque, pero.
		Transcripción 73	De acuerdo con.
		Transcripción 74	De acuerdo.
		Transcripción 75	Entonces.
Recurso retórico	Ejemplo	Transcripciones 69, 70 y 73.	
Componentes Argumentativos	Garantía a priori-epistemológica	Transcripción 74	
	Garantía empírico-personal	Transcripciones 69 y 70.	
	Cualificador modal	Transcripción 70	Casi siempre, solo, puede.
		Transcripción 75	De cualquier manera.
Intención del argumento	Para refutar	Transcripción 71	

Capítulo 7

7. El estudio de la argumentación de tres participantes

> *En mi análisis, no pretendo describir el mundo, ni siquiera describir el caso por completo. Busco dar sentido a determinadas observaciones del caso, mediante el estudio más atento y la reflexión más profunda de que soy capaz. Es algo muy subjetivo. Lo defiendo porque no conozco otra forma de dar sentido a las complejidades de mi caso. Reconozco que mi forma de actuar no es la forma correcta [...]. Mediante la experiencia y la reflexión, cada investigador debe encontrar las formas de análisis que a él le sean de utilidad. (Stake, 1999, p. 71)*

Este capítulo expone el estudio de caso tratado en esta investigación que se orientó por la pregunta: ¿cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica? y por los cuatro objetivos planteados en el capítulo 2: primero, describir la función del diálogo y de los recursos retóricos usados por tres maestros en formación inicial cuando argumentan durante su práctica pedagógica en geometría; segundo, identificar los componentes argumentativos presentes en las argumentaciones, en geometría, de tres maestros en formación inicial en práctica pedagógica; tercero, caracterizar la intención de los argumentos usados por tres maestros en formación inicial cuando enseñan geometría; y cuarto, proponer un modelo teórico emergente a partir del análisis y de la interpretación de la argumentación de maestros en formación inicial en práctica pedagógica. La suma categórica de los ejemplos fue la estrategia empleada para presentar las conclusiones del análisis y de la interpretación de cada una de las particularidades de la argumentación de los tres participantes, la cual se sistematiza mediante sendas tablas al finalizar los apartados. A continuación, se presentan en su orden: la argumentación de Carlos, la argumentación de Helena y la argumentación de María.

7.1. La argumentación de Carlos

A manera de presentación, Carlos se forma para maestro en el programa de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, versión dos. Su edad se ubica entre los 27 y 30 años de edad. Eligió la Licenciatura en primera opción, entre las dos que brinda el Sistema de Admisiones de la Universidad de Antioquia. Es un estudiante con buenos resultados académicos en el transcurso del programa formativo.

Carlos resalta la fundamentación y el conocimiento matemático construido con sus maestros formadores durante la Licenciatura (Ideograma, agosto 02 de 2014). A continuación, se presenta parte de su autobiografía en la cual relata cómo llegó a estudiar en la Licenciatura.

> Pensé en no dejar de estudiar y me presenté a la Universidad de Antioquia para Licenciatura en Matemáticas [como primera opción] y Física, [como la segunda]. Es lo que me gustaba. A los días me enteré de la buena noticia con una llamada o, mejor, una grabación donde decía que era aceptado [en la Universidad de Antioquia], inclusive entre los primeros puestos de la carrera. (Autobiografía, 8 de agosto de 2014)

A partir del referente teórico propuesto en el capítulo 4, la argumentación se estudió en el dialógo informal, constructo teórico que apoyó algunos de los argumentos con características dialógicas propuestos por Carlos, lo que permitió comprender su ofrecimiento y su solicitud mediante preguntas y respuestas durante su participación en ambos auditorios; sin embargo, también se halló el uso de argumentos con características monológicas (e.g., Tarea 4: Transcripciones: 22 a 26; y Tarea 5: Transcripciones: 28 y 29); esto significa que, en algunos instantes de su argumentación, Carlos se formulaba preguntas y se respondía ante sus interlocutores. Por otro lado, en los argumentos con características diálogicas se evidenció el uso de ciertos indicadores de argumentación, entre ellos: ‘no’ (e.g., Tarea 1: Transcripciones: 2 y 5; y

Tarea 7: Transcripción 48), 'ni' (e.g., Tarea 1: Transcripción 5), 'pues' (e.g., Tarea 1: Transcripcion 6), 'o' (e.g., Tarea 1: Transcripción 6), 'o sea' (e.g., Tarea 2: Transcripción 11) y 'entonces' (e.g., Tarea 7: Transcripción 47).

Carlos usó dos tipos de recursos retóricos en sus argumentos: el ejemplo y la ilustración (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). El primero, tanto en su ofrecimiento como en su solicitud de argumentos a sus interlocutores (e.g., Tarea 3: Transcripción 19, y Tarea 7: Transcripciones: 40 y 43). Y el segundo, para persuadir o persuadirse por los argumentos presentados en el auditorio del seminario de práctica pedagógica (e.g., Tarea: 1: Transcripciones: 1 a 7, y Tarea 5: Transcripciones: 28 a 32).

Entre los componentes argumentativos que Carlos utilizó en el auditorio del seminario de práctica pedagógica y en el auditorio del aula de clase se encuentran: datos, conclusiones, garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores (Toulmin, 2007). Por ejemplo, al usar argumentos con características dialógicas en el auditorio del seminario de práctica pedagógica empleó datos diversos que acompañaban de forma implícita las preguntas formuladas tanto por el investigador como por sus colegas.

Asimismo, entre las garantías que Carlos usó en ambos auditorios, se identificaron las a priori-epistemológicas que corresponden al uso de definiciones y teoremas relacionados con conceptos geométricos (e.g., Tarea 1: Transcripción 3, Tarea 4: Transcripciones: 23 y 25, y Tarea 5: Transcripción 30). Por ejemplo, una evidencia del uso de racionalidad teórica (Habermas, 1999, 2002; Rigotti y Greco, 2009) se reconoce de manera precisa cuando usó garantías a priori-epistemológicas. Otro tipo de garantías que Carlos usó fueron las a priori con el uso de medios (e.g., Tarea 1: Transcripción 7, Tarea 4: Transcripciones: 22 y 23, y Tarea 5: Transcripción: 30 y 31); aunque este tipo de garantía no fue reportada inicialmente en el estudio de Nardi et al. (2011), en esta investigación se reporta como un hallazgo entre los datos investigativos analizados. Este tipo de garantías fueron usadas por Carlos cuando empleó medios diversos para persuadir a sus colegas en el auditorio del seminario de práctica pedagógica, de forma implícita mediante sus argumentos con características dialógicas.

Entre los cualificadores modales usados por Carlos, se destacan: ‘puede aparecer’ (e.g., Tarea 1: Transcripción 2), ‘puede’ (e.g., Tarea 1: Transcripción 7), ‘no necesariamente’ (e.g., Tarea 7: Transcripción 47), y ‘siempre’ (e.g., Tarea 1: Transcripción 7, y Tarea 7: Transcripción 48). El uso de estos cualificadores fue un indicador de racionalidad práctica (Habermas, 1999, 2002; Rigotti y Greco, 2009), en el cual el conocimiento se construye en conjunto con los participantes del auditorio. Estos cualificadores fueron usados por Carlos cuando proponía construir la definición de algunos conceptos geométricos o refinar definiciones en argumentos con características monológicas o dialógicas. Esta última inferencia coincide con los resultados de Inglis y Mejía-Ramos (2005) cuando expresan la importancia del refinamiento de los cualificadores modales en los argumentos para la construcción del conocimiento matemático, aunque desde otro contexto investigativo.

Los soportes que Carlos empleó en sus argumentos fueron de dos tipos: soportes teóricos y empíricos, en los cuales vinculó, respectivamente, garantías a priori-epistemológicas y garantías a priori al usar medios para persuadir a los participantes de ambos auditorios.

La refutación pudo evidenciarse tanto al solicitar como al ofrecer argumentos para impugnar afirmaciones o puntos de vista de sus interlocutores (e.g., Tarea 7: Transcripción 44, Tarea 7: Transcripción 47). El uso de la refutación apareció en relación simultánea con el uso de cualificadores modales al refinar con sus estudiantes, en el auditorio del aula de clase, algunas definiciones de conceptos geométricos. Asimismo, esto demostró la posibilidad de la argumentación para construir socialmente conocimientos en dicho auditorio (Leitão, 2011).

En el auditorio del aula de clase, Carlos ofreció algunas intenciones en sus argumentos, con el fin de validar (e.g., Tarea 7: Transcripciones: 41, 49 y 50) defender (e.g., Tarea 7: Transcripción 43), refutar (e.g., Tarea 7: Transcripción 44), explicar (e.g., Tarea 7: Transcripciones: 39, 41, 43 a 47, 51 y 53) y persuadirse (e.g., Tarea 7: Transcripciones: 39, 43 y 44) sobre definiciones, afirmaciones o puntos de vista relativos a conceptos geométricos. A continuación, la Tabla 86 muestra la suma categórica de ejemplos de argumentación por parte de Carlos.

Tabla 86: Suma categórica de los ejemplos para la argumentación de Carlos

Diálogo/monólogo	Argumento con carácter dialógico	Carlos usa estos conocimientos para la construcción social de conocimiento con ambos auditorios: seminario de práctica pedagógica y aula de clase.	
	Argumento con carácter monológico	Carlos se pregunta y se responde por argumentos explicativos.	
Algunos indicadores de argumentación		No, ni, pues, o, entonces.	
Recursos retóricos	Ejemplo	Carlos usa casos particulares tanto al ofrecer como al solicitar argumentos en ambos auditorios.	
	Ilustración	Carlos usa gráfica en el auditorio conformado por sus colegas.	
Componentes Argumentativos	Datos	Implícitos en preguntas y respuestas y relacionados con conocimientos geométricos.	
	Conclusiones	Implícitas en respuestas.	
	Garantías	A priori-epistemológicas	Usadas en el auditorio del seminario de práctica pedagógica.
		A priori con el uso de medios	
	Cualificadores modales	Pueden aparecer, puede, no necesariamente.	Racionalidad práctica
		Siempre	Racionalidad teórica
	Soportes	Teóricos.	
	Refutadores	Refinamiento de definición.	
Intención de los argumentos	Para validar	Refinamiento de definiciones o afirmaciones de sus estudiantes en el auditorio del aula de clase.	
	Para defender	Solicitud de defensa de argumentos sobre puntos de vista entre sus estudiantes de sus puntos.	
	Para refutar	Refinamiento de definiciones.	
	Para explicar	Uso de ejemplos e ilustraciones en ambos auditorios.	
	Para persuadir	Uso de recursos retóricos de ejemplos en el auditorio del aula de clase.	

7.2. La argumentación de Helena

Helena se forma para maestra en el programa de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, versión dos. Su edad se ubica entre los 25 y 30 años de edad. Eligió la Licenciatura en primera opción, entre las dos que brinda el Sistema de Admisiones de la Universidad de Antioquia. Además, es una estudiante con buenos resultados académicos en el transcurso del programa formativo.

En alguna ocasión, durante el seminario, Helena expresó que los maestros dejan huella en la formación de los estudiantes. Para ella, la formación de los estudiantes depende de la autonomía y pretende, como maestra, observar fenómenos educativos desde una perspectiva diferente a la tradicional (Ideograma, agosto 02 de 2014). Los siguientes párrafos informan algunas de las decisiones que la llevaron a ser maestra de matemáticas:

> Dentro de muchas reflexiones, llegué a darme cuenta de la respuesta que buscaba. En una de las vivencias recordaba a mi profesora de matemáticas Lucía, cuando ella llegaba y daba sus clases, nos conquistaba con su discurso, el tiempo pasaba rápido. También pensaba en mi infancia, aunque dentro de las instituciones no fue buena, dentro de mi casa jugaba a ser maestra con los muñecos y cada que nos cambiábamos de casa, mi mamá destinaba una parte de mi habitación para el tablero con el que di clase por mucho tiempo.
> Me presenté a la Universidad de Antioquia y emprendí mi carrera de Licenciatura en Matemáticas. En el segundo semestre tuve la oportunidad de participar en el proyecto de Alianza con Aula taller en el Carmen de Viboral, esto hizo que yo me afianzara más y reafirmara mi decisión de ser maestra de matemáticas, pude compartir con estudiantes de las instituciones de cuarto a séptimo y fue una experiencia inolvidable, en medio de este proceso me he podido encontrar con mis habilidades y también con muchas falencias que he venido trabajando a lo largo del proceso. (Autobiografía, 8 de agosto de 2014)

En la argumentación de Helena tanto con sus colegas como con sus estudiantes se destacó la construcción social del conocimiento geométrico por medio del diálogo informal. Asimismo, se evidenciaron argumentos con características monológicas (e.g., Tarea 2: Transcripción 9) con los que ofreció explicaciones a los colegas pertenecientes al auditorio del seminario de práctica pedagógica. En estos argumentos, ella se preguntó y se respondió. Por su parte, en cuanto a los indicadores de argumentación usados, se destacaron: 'entonces' (e.g., Tarea 2: Transcripciones: 8, 9 y 12), 'también' (e.g., Tarea 2: Transcripciones: 8 y 12), 'es decir' (e.g., Tarea 2: Transcripción 8), 'pero' (e.g., Tarea 2: Transcripción 8), 'y' (e.g., Tarea 2: Transcripción 10), 'ya luego' (e.g., Tarea 2: Transcripción 10), 'de ahí' (e.g., Tarea 2: Transcripción 10), y 'es así' (e.g., Tarea 2: Transcripción 10).

Durante su argumentación con colegas, usó recursos retóricos diversos, entre ellos: el modelo (e.g., Tarea 2: Transcripción 13; Tarea 6: Transcripción 38) y la ilustración (e.g., Tarea 6: Transcripción 38), mientras que solicitó ejemplos a sus estudiantes para que persuadieran con sus argumentos a los demás participantes del auditorio del aula de clase (e.g., Tarea 7: Transcripción 54).

En su argumentación, utilizó componentes argumentativos diversos; de manera concreta, datos al ir acompañados implícitamente en preguntas que ofreció el investigador, o en preguntas y respuestas que comunicó a sus colegas o a sus estudiantes. Ella enfatizó en la solicitud de conclusiones de forma explícita, por medio de preguntas, cuando argumentó con sus estudiantes en el auditorio del aula de clase (e.g., Tarea 6: Transcripción 38).

Entre las garantías, se resaltaron las a priori-epistemológicas (Nardi et al., 2011) al usar definiciones o teoremas de la geometría (e.g., Tarea 2: Transcripciones: 8, 12 y 13). Además, empleó garantías empírico-personales (Nardi et al., 2011) para apoyar argumentos sobre su preparación de clase (e.g., Tarea 2: Transcripción 11) y garantías a priori con el uso de medios para persuadir a sus colegas en su preparación de clase del Teorema de Pitagóras (e.g., Tarea 2: Transcripción 9). Asimismo, utilizó una garantía epistemológico-institucional (Nardi et al., 2011) que sirvió para apoyar su preparación de clase sobre una comprobación reconocida del Teorema de Pitágoras en la comunidad de matemáticos (e.g., Tarea 2: Transcripción 8).

Además, usó dos tipos de cualificadores modales: uno correspondió con: 'todos', por medio del cual expresó una propiedad de los triángulos (e.g., Tarea 2: Transcripción 10), y otro correspondió con 'más o menos' que refirió a la provisionalidad de una de sus preparaciones de clase (e.g., Tarea 2: Transcripción 10).

De manera adicional, utilizó soportes diversos para respaldar sus argumentos, entre ellos algunos teóricos y otros empíricos relativos al uso de garantías a priori-epistemológicas, empírico-personales o epistemológico-institucionales.

La refutación fue usada por Helena tanto en contra de las afirmaciones de sus colegas por medio de respuestas a preguntas en el auditorio del seminario de práctica pedagógica (e.g., Tarea 3: Transcricpción 21), como para solicitar argumentos para refutar afirmaciones o puntos de vista mediante preguntas a sus estudiantes en el auditorio del aula de clase (e.g., Tarea 7: Transcripciones: 43, 52 y 55).

Helena manifestó, de manera implícita, interés por la intención de los argumentos solicitados a sus estudiantes en el auditorio del aula de clase, mediante algunas de sus preguntas para justificar (e.g., Tarea 7: Transcripción 43), refutar (e.g., Tarea 3: Transcripción 21; Tarea 7: Transcripciones: 43, 52 y 55), y explicar afirmaciones o puntos de vista por parte de sus colegas y de sus estudiantes (e.g., Tarea 7: Transcripciones: 52 y 53). Cabe señalar que el investigador no pudo identificar intenciones para validar, defender, explicar o persuadir; esto se debió a la complejidad de algunos de sus argumentos. La Tabla 87 muestra la suma categórica de ejemplos de argumentación por parte de Helena.

Tabla 87: Suma categórica de los ejemplos para la argumentación de Helena

Diálogo/monólogo	Argumento con carácter dialógico	Helena usa estos argumentos para la construcción social de conocimiento con ambos auditorios: seminario de práctica pedagógica y aula de clase.	
	Argumento con carácter monológico	Helena se pregunta y se responde en argumentos con la intención de explicar.	
Algunos indicadores de argumentación		Entonces, es decir, pero, y, ya luego, de ahí, es así.	
Recursos retóricos	Modelo	Helena apela a la afirmación propuesta por un colega.	
	Ilustración	Helena usa ilustraciones en el auditorio del seminario de práctica pedagógica.	
	Ejemplo	Helena solicita casos particulares a sus estudiantes en el auditorio del aula de clase.	
Componentes argumentativos	Datos	Implícitos en preguntas y respuestas sobre conocimientos geométricos.	
	Conclusiones	Explícitas en respuestas.	
	Garantías	A priori-epistemológicas	usadas en el auditorio del seminario de práctica pedagógica.
		Empírico-personales	
		Epistemológico-institucional	
	Cualificadores modales	Todos	Racionalidad teórica.
		Mas o menos	Racionalidad práctica.
	Soportes	Teóricos y empíricos.	
	Refutadores	Solicitud de argumentos por medio de preguntas.	
Intención de los Argumentos	Para justificar	Solicitud de argumentos convincentes.	
	Para refutar	Refutación de puntos de vista de sus colegas o de sus estudiantes.	

7.3. La argumentación de María

María se forma para maestra en el programa de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, versión dos. Su edad se ubica entre los 25 y 27 años de edad. Eligió la Licenciatura en primera opción, entre las dos que brinda el Sistema de Admisiones de la Universidad de Antioquia. Es una estudiante con buenos resultados académicos en el transcurso del programa formativo y consideró desde infante ser maestra.

Como maestra en formación, quiere servir a la comunidad infantil, no solo a partir de la formación en conocimientos, sino también de la formación personal de seres humanos aptos para la vida en sociedad; ella afirma que será una maestra que no solo enseñe un concepto a sus estudiantes, sino que sea capaz de formarlos para la vida (Ideograma, agosto 02 de 2014). De manera concreta, en su autobiografía relata cómo eligió ser maestra de matemáticas.

> Cuando estaba en 11° [undécimo grado de educación media] y me preguntaban qué quería hacer con mi vida, siempre pensaba en la contaduría o en la docencia, aunque recuerdo un consejo que me dio una profesora quien me decía que la docencia era la peor profesión y la más desagradecida que existía. Pese a este comentario que me hizo pensar por un rato, pudieron más mis ganas de servir a la comunidad y decidí estudiar una Licenciatura.
> Al presentarme a la universidad elegí las matemáticas por mi amor a los números y lo de ser maestra sí lo tenía claro desde hacía algún tiempo. (Autobiografía, 8 de agosto de 2014)

La argumentación de María se basó en argumentos con características dialógicas; que utilizó tanto con sus colegas (e.g., Tarea 4: Transcripción 27) como con sus estudiantes (e.g., Tarea 9: Transcripción 74), y permitió la construcción social del conocimiento geométrico en ambos auditorios; sin embargo, solo en una ocasión con sus colegas usó un argumento con carácter monológico (e.g., Tarea 3: Transcripción 18), este tipo de argumentos no fueron utilizados por ella cuando se comunicó con sus estudiantes.

A propósito de los indicadores de argumentación en el diálogo informal, el investigador detectó una vez el uso, por parte de ella, del indicador ‘entonces’, el cual significó avance en los argumentos que sus estudiantes le habían ofrecido (e.g., Tarea 9: Transcripción 75).

María ofreció algunos recursos retóricos a los participantes de ambos auditorios, entre los que se destacaron: el modelo (e.g., Tarea 3: Transcripción 15) y el ejemplo (e.g., Tarea 3: Transcripción 17, Tarea 8: Transcripciones: 65 y 68; y Tarea 9: Transcripciones: 69 y 73). Además, solicitó mediante preguntas a sus estudiantes el uso del recurso retórico metáfora; para esta ocasión, los estudiantes realizaron comparaciones entre conceptos geométricos y objetos presentes en sus vidas cotidianas (e.g., Tarea 8: Transcripciones: 60, 63 y 65).

María usó tanto datos como conclusiones que no se explicitan, pero que se encuentraron en las preguntas que propuso y en las respuestas que ofreció.

En el análisis y la interpretación de la argumentación, se destacó la solicitud de María por el uso de ciertas garantías por parte de sus estudiantes, según la clasificación propuesta por Nardi et al. (2011); entre ellas: las garantías a priori-epistemológicas al usar definiciones o teoremas de la geometría (e.g., Tarea 3: Transcripciones: 15, 16 y 17), y mediante preguntas a sus estudiantes sobre definiciones de algunos conceptos geométricos (e.g., Tarea 8: Transcripciones: 60, 62, 67, 69 y 74). Además, utilizó una garantía a priori-pedagógica (e.g., Tarea 3: Transcripción 19) y una garantía epistemológico-institucional para apoyar su preparación de clase del Teorema de Pitágoras (e.g., Tarea 3: Transcripción 15). No usó garantías empírico-personales; sin embargo, sí las solicitó a sus estudiantes para que explicaran algunos conceptos geométricos mediante sus experiencias personales (e.g., Tarea 8: Transcripciones: 60, 64, 66, 68, 69 y 70).

El investigador pudo identificar en sus argumentos al menos cuatro cualificadores modales: dos con un carácter de provisionalidad (‘más o menos’ y ‘aunque’), que refirieron a una racionalidad práctica vinculada de forma directa con la tarea de preparación de clase del Teorema de Pitagóras (e.g., Tarea 3: Transcripciones: 14 y 15). Los otros dos con un carácter absoluto (‘exactamente’ y ‘siempre’) por intermedio de garantías a priori-epistemológicas, que refirieron al uso de una racionalidad teórica.

María no usó refutadores en sus argumentos; sin embargo, sí los usó cuando solicitó argumentos con la intención de refutar las afirmaciones o los puntos de vista de sus estudiantes (e.g., Tarea 9: Transcripción 71).

En los argumentos solicitados por María, se reconocieron algunas intenciones con el fin de validar mediante la solicitud a sus estudiantes de garantías a priori-epistemológicas (e.g., Tarea 8: Transcripciones: 60, 62, 67 y 69), persuadir a través de metáforas (e.g., Tarea 8: Transcripciones: 60, 63 y 65) y persuadir a través de ejemplos (e.g., Tarea 8: Transcripciones: 65

y 68; Tarea 9: Transcripciones: 69 y 73) y refutar conocimientos o puntos de vista (e.g., Tarea 9: Transcripción 71). La Tabla 88 muestra la suma categórica de ejemplos de argumentación por parte de María.

Tabla 88: Suma categórica de los ejemplos para la argumentación de María

Diálogo/monólogo	Argumento con carácter dialógico	María usa estos argumentos para la construcción social de conocimiento con ambos auditorios: seminario de práctica pedagógica y aula de clase.	
	Argumento con carácter monológico	María se pregunta y se responde por argumentos con la intención de explicar en el auditorio del seminario de práctica pedagógica.	
Algunos indicadores de argumentación		Entonces. Estructura de las preguntas: ¿por qué?, ¿qué es? y ¿el qué?	
Recursos retóricos	Modelo	María apela a la afirmación propuesta por un colega.	
	Ejemplo	María ofrece o solicita casos particulares en ambos auditorios.	
	Metáfora	María solicita a sus estudiantes comparaciones entre objetos matemáticos y objetos de sus vidas cotidianas en el auditorio del aula de clase.	
Componentes Argumentativos	Datos	Implícitos en preguntas y respuestas sobre conocimientos geométricos.	
	Conclusiones	Implícitas en respuestas.	
	Garantías	A priori-epistemológicas	las usa o solicita en ambos auditorios.
		A priori-pedagógica	usadas en el auditorio del seminario de práctica pedagógica.
		Epistemológico-institucional	
		Empírico-personales	solicita su uso a sus estudiantes en el auditorio del aula de clase.
	Cualificadores modales	Más o menos, aunque	Racionalidad práctica.
		Exactamente, siempre	Racionalidad teórica.
	Soportes	Teóricos y empíricos	
	Refutadores	Refinamiento de definiciones en el auditorio del aula de clase.	
Intención de los Argumentos	Para validar	Refinamiento de definiciones o afirmaciones de sus estudiantes a traves de garantías a priori-epistemológicas en el auditorio del aula de clase con sus estudiantes.	
	Para persuadir	Solicitud de persuasión a través de recursos retóricos de modelos, de metáforas o de ejemplos en el auditorio del aula de clase.	
	Para refutar	Refinamiento de definiciones en el auditorio del aula de clase.	

7.4. Conclusiones de capítulo

Este capítulo versó sobre la argumentación de los tres maestros en formación inicial, participantes de la investigación. El estudio de caso de las particularidades de la argumentación de los tres participantes en dos auditorios particulares permite responder la pregunta investigativa. A manera de conclusión, puede afirmarse, que los maestros en formación inicial, en geometría, durante la práctica pedagógica argumentan usando argumentos con características dialógicas y monológicas. Los argumentos con características dialógicas sirven para la construcción social de conocimiento geométrico por medio del refinamiento de cualificadores modales provisionales y la refutación de conocimientos o puntos de vista de los participantes, mientras que los argumentos con características monológicas tienen como intención ofrecer explicaciones a los participantes de ambos auditorios. Asimismo, los participantes ofrecen y solicitan en ambos auditorios recursos retóricos, tales como ejemplos, modelos, ilustraciones y metáforas.

Los argumentos tienen intenciones diversas, entre ellas: validar, justificar, defender, refutar, explicar y persuadir. Además, sobre los componentes argumentativos que presentan los participantes en ambos auditorios, puede afirmarse que usan datos diversos, en algunas ocasiones acompañados por las preguntas, conclusiones diversas sobre conocimientos geométricos o experiencias personales, garantías diversas, como a priori-epistemológicas, pedagógicas, institucionales-curriculares, epistemológico-institucionales, empírico-profesionales, empírico-personales y a priori con el uso de medios.

También se usan soportes empíricos y teóricos, cualificadores modales provisionales que refieren una racionalidad práctica y cualificadores modales absolutos relativos a una racionalidad teórica. Por último, la Tabla 89 presenta un resumen del estudio de caso, en la cual se presenta la pregunta, el objetivo general, los objetivos específicos, los elementos teóricos que componen el Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática, los participantes y los dos auditorios, el tipo de paradigma de enseñanza de la geometría al que se adecuan las tareas, el rol del investigador, las estrategias de análisis de los datos investigativos para los dos auditorio, y las estrategias para concluir sobre las particularidades de la argumentación de cada participante.

Tabla 89: Resumen del estudio de caso

Pregunta	¿Cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica?								
Objetivo general	Analizar cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica.								
Objetivos específicos	Describir la función del diálogo y de los recursos retóricos usados por tres maestros en formación inicial cuando argumentan durante su práctica pedagógica en geometría. Identificar los componentes argumentativos presentes en las argumentaciones, en geometría, de tres maestros en formación inicial en práctica pedagógica. Caracterizar la intención de los argumentos usados por tres maestros en formación inicial cuando enseñan geometría. Proponer un modelo teórico emergente a partir del análisis y de la interpretación de la argumentación de maestros en formación inicial en práctica pedagógica.								
				Auditorios					
				Seminario de práctica pedagógica			**Aula de clase**		
				Carlos	**Helena**	**María**	**Carlos**	**Helena**	**María**
Elementos Teóricos	**Diálogo/monólogo**	Argumento con carácter dialógico		✔	✔	✔	✔	✔	✔
		Argumento con carácter monológico		✔	✔	✔			
	Indicadores de argumentación			✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Recursos retóricos	Ejemplo		✔		✔	✔	✔	✔
		Ilustración		✔	✔	✔			
		Modelo				✔			
		Metáfora							✔
	Componentes argumentativos	Datos		✔	✔	✔	✔	✔	✔
		Conclusiones		✔	✔	✔	✔	✔	✔
		Garantías	A priori-epistemológica	✔	✔	✔			✔
			Epistemológico-institucional		✔	✔			
			A priori-pedagógica	✔		✔			
			A priori con el uso de medios	✔	✔	✔			
			Empírico-personales		✔		✔		✔
			Empírico-profesional		✔				
		Cualificadores modales		✔	✔	✔	✔	✔	✔
		Soportes		✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Intención de los argumentos	Refutadores							
		Para validar					✔	✔	
		Para defender							
		Para refutar				✔	✔	✔	✔
		Para explicar		✔	✔	✔	✔	✔	
		Para persuadir					✔		
		Para justificar						✔	
Tipo de paradigma de enseñanza de la geometría para cada tarea				Geometría axiomática natural			Geometría natural		
Rol del investigador				Maestro formador de Carlos, Helena y María.			No asistió.		
Estrategias de análisis de datos investigativos				Interpretación de ejemplos individuales					
Estrategia para concluir sobre las particularidades de la argumentación de cada participante				Suma categórica de los ejemplos individuales.					

Capítulo 8

8. Conclusiones

Los únicos interesados en cambiar el mundo son los pesimistas, porque los optimistas están encantados con lo que hay. (Saramago, 1995)

En este capítulo, se discute cómo se resolvió el problema investigativo, el cual se orientó por la pregunta: ¿cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica? por el objetivo general: analizar cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica, y por los objetivos específicos: describir la función del diálogo y de los recursos retóricos usados por tres maestros en formación inicial cuando argumentan durante su práctica pedagógica en geometría, identificar los componentes argumentativos presentes en las argumentaciones, en geometría, de tres maestros en formación inicial en práctica pedagógica, caracterizar la intención de los argumentos usados por tres maestros en formación inicial cuando enseñan geometría y proponer un modelo teórico emergente a partir del análisis y de la interpretación de la argumentación de maestros en formación inicial en práctica pedagógica.

En estas conclusiones, el análisis y la interpretación de los datos investigativos para el estudio de caso de las particularidades de la argumentación de los tres participantes se ponen en discusión con los hallazgos de los estudios que se consultaron en el capítulo 3 (Revisión de ‘Algunos’ Estudios en Argumentación en Educación Matemática) y con los de los estudios reportados en el capítulo 4 (Referente teórico). Para tal efecto, se decidió presentar cuatro apartados titulados: sobre el Modelo Teórico Integral, sobre el diseño metodológico, sobre el cumplimiento de los objetivos y el futuro investigativo. A continuación, se detalla cada uno de ellos.

8.1. Sobre el Modelo Teórico Integral

En esta investigación se analizó cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica. Por las características intrínsecas del problema investigativo, el cuarto objetivo específico, proponer un modelo teórico emergente a partir del análisis y de la interpretación de la argumentación de maestros en formación inicial en práctica pedagógica, implicó revisar ‘algunos’ estudios sobre argumentación en formación inicial de maestros, en formación de escolares, y en su epistemología y en su lógica (capítulo 3), porque no fue interés inicial estudiar la argumentación vinculada de forma directa con la deducción y con la logicidad sino con la razonabilidad en la práctica pedagógica. Estas primeras conclusiones permitieron al investigador inferir que existen numerosos estudios que informan sobre los procesos argumentativos deductivos tanto en la formación inicial de maestros como en la formación de escolares; sin embargo, son exiguos los estudios que se interesan por estudiar la argumentación vinculada con el diálogo y la persuasión, de manera especial, cuando se orienta al aprendizaje y la enseñanza de la geometría en el auditorio del aula de clase con estudiantes desde la formación inicial de maestros.

A partir de aquellas conclusiones que se documentan en el capítulo 3, se optó por el Modelo Argumentativo de Toulmin para conformar el referente teórico de la investigación. Sin embargo en el análisis y la interpretación de los primeros datos investigativos, de manera específica en la fase I, el investigador se percató de que era insuficiente el análisis a partir de tal modelo, porque se reducía solamente al de los componentes argumentativos mediante la lógica sustantiva (Toulmin, 2003, 2007; Simpson, 2015), análisis parcial donde se podían apreciar evidencias no solo de cualidades lógico-sustantivas sino también de cualidades retóricas (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006; Bermejo, 2006) y de cualidades dialécticas (Duschl y Osborne, 2002; van Eemeren et al., 2006; van Eemeren et al., 2007; Bermejo, 2006; Sampson y Clark, 2008; Muller et al., 2009; Nielsen, 2011) inscritas en actos comunicativos (Habermas, 1999, 2002). Por lo tanto, después de finalizar el análisis de los datos investigativos, el investigador propone un Modelo Teórico Integral Emergente de Argumentación en Educación Matemática.

Es de anotar que la construcción del Modelo Teórico Integral Emergente de Argumentación en Educación Matemática se hizo de manera inductiva, es decir, a medida que se realizaban el análisis e interpretación de los datos investigativos se agregaban elementos teóricos a dicho modelo.

El Modelo Teórico Integral se conforma del complemento de cualidades retóricas y dialécticas a las lógico-sustantivas propuestas en el Modelo Argumentativo de Toulmin (2003, 2007). Durante el análisis e interpretación de los datos investigativos, dicho complemento permitió mostrar evidencias empíricas de la importancia de la persuasión, del convencimiento, del diálogo y del monólogo en la argumentación de los maestros en formación inicial en su práctica pedagógica.

Por ejemplo, al incluir cualidades retóricas y dialécticas en el referente teórico para el análisis de los datos, el investigador pudo evidenciar la importancia de las preguntas y respuestas en la argumentación de los maestros en formación inicial, aspecto que se relaciona de forma directa con cualidades dialécticas. De igual manera, las cualidades retóricas pudieron evidenciarse cuando los maestros en formación inicial solicitaban u ofrecían recursos para persuadir o convencer a los oyentes en ambos auditorios.

En este Modelo Teórico Integral, después del análisis e interpretación de los datos investigativos, la argumentación se define como una actividad que se estudia mediante el diálogo informal, abierto y colaborativo.

Es decir, la argumentación se estudió mediante un diálogo informal porque aunque los maestros en formación inicial tenían algunas propuestas para la presentación y discusión sobre algunas tareas de geometría, no había un plan de preguntas preestablecidas, estas surgieron a partir de la evolución de la solicitud y del ofrecimiento de argumentos en los diálogos acontecidos de forma directa en los dos auditorios.

Del mismo modo, la argumentación se estudió mediante un diálogo abierto ya que no solo los maestros en formación tenían la razón en sus argumentos, sino que también sus colegas o estudiantes tenían puntos de vista razonables para la discusión sobre conocimientos geométricos o sobre el aprendizaje o enseñanza dela geometría.

Por último, la argumentación se estudió mediante el diálogo colaborativo ya que los maestros en formación inicial, sus colegas y sus estudiantes construyeron en forma conjunta algunos conocimientos, antes desconocidos, mediante experiencias compartidas de aprendizaje y enseñanza de la geometría.

Para esta investigación, a partir del complemento de cualidades lógicas, retóricas y dialécticas propuestas en el Referente teórico, *la argumentación* se consideró como una actividad verbal, social y racional (van Eemeren et al., 2006). De manera específica, se definió en términos de acciones comunicativas de maestros en formación puestas en acto cuando solicitaban y ofrecían argumentos a los participantes de auditorios conformados por colegas o por estudiantes de escuela mediante preguntas y respuestas cuya intención era *validar, justificar, defender, refutar o persuadir* puntos de vista o conocimientos sobre geometría. La argumentación estuvo conformada por argumentos, los cuales a su vez pudieron componerse de datos, conclusiones, garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores.

En el Modelo Teórico Integral Emergente de Argumentación en Educación Matemática, *la razonabilidad* se concibió como diversas formas de argumentar en complemento con la logicidad, la deducción y la validación. En algunos estudios, esta concepción se considera en complemento con la racionalidad teórica. Esto quiere decir que "la razonabilidad no puede contradecir o excluir la racionalidad; supera la racionalidad, ya que también implica una actitud más comprensiva y articulada de la razón humana" (Rigotti y Greco, 2009, p. 22). La racionalidad teórica se asumió como complementaria con la racionalidad práctica.

La argumentación en la práctica pedagógica durante la formación inicial de maestros involucró las cogniciones individual y social, recursos retóricos para argumentar, el diálogo, el tema como pretexto para argumentar, herramientas de mediación y el contexto sociocultural de los participantes, ideas que coincide con la propuesta de Muller, Perret-Clermont, Tartas y Iannaccone (2009). De manera especial, dentro de los recursos retóricos para argumentar se encuentraron: el ejemplo, la ilustración, el modelo y la metáfora (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). Además, en esta investigación el tema como pretexto para argumentar fue la geometría.

El diálogo fue una parte sustancial de la argumentación y se consideró un *acto de habla*. Por tanto, fue valioso en actividades educativas; sobre todo cuando se trató la argumentación con características dialógicas ya que parecía surgir en determinados contextos (Muller et al., 2009). En esta investigación, *la argumentación con características dialógicas* surgió mediante preguntas y respuestas cuando los participantes presentaron o discutieron algunas tareas sobre algunos temas de geometría. En este sentido, la argumentación con características dialógicas fue entendida como un proceso social y colaborativo necesario para resolver tareas y avanzar en el conocimiento (Duschl y Osborne, 2002; Muller et al., 2009). Además, se inscribió en actos de comunicación por medio del ofrecimiento y de la solicitud de argumentos (Habermas, 1999; Toulmin, 2007).

Sobre la lógica informal puede concluirse que, aunque se consultaron desde el inicio de esta investigación algunos estudios sobre su importancia para estudiar la argumentación (De Villiers, 1993; Boero, 1999, 2007; Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Inglis, 2007; Crespo, 2007a, 2007b; Knipping, 2008; Crespo et al., 2010; McClain, 2009; Goizueta, 2015), los análisis se centraban en sus componentes. Además, a pesar de que Fernandes y Fonseca (2004) proponen que los maestros en formación inicial deben conocer los requerimientos curriculares para poder compartir experiencias de argumentación con sus estudiantes en auditorios del aula de clase, enmarcan la argumentación en una perspectiva de la lógica formal, la cual es aún limitada porque no proponen la lógica informal como una oportunidad para comprender, analizar e interpretar la argumentación desde un modelo teórico más amplio.

Sobre la importancia del diálogo en la argumentación, por ejemplo, Camargo (2010) analiza la actividad demostrativa a través de la conversación instruccional. Sin embargo, en la presente investigación se retomó de forma especial el diálogo informal para el análisis de la argumentación, pero no en el sentido de que unos participantes más instruidos o experimentados en el aprendizaje y en la enseñanza de la geometría impartieran conocimientos a otros menos experimentados, lo cual iría en contravía con la propuesta naturalista de esta investigación y de entender la argumentación mediante un diálogo informal, abierto y colaborativo. Esto puede evidenciarse cuando algunos estudiantes, en el auditorio del aula de clase, usaron garantías empírico-personales que sus maestros desconocían. De esta manera, la argumentación permitió no solo orientarse sobre conocimientos geométricos, y sobre el aprendizaje y la enseñanza de la geometría, sino también sobre puntos de vista de conceptos geométricos que se relacionan, de manera directa, con experiencias personales de los estudiantes.

Por su parte, Roig et al. (2011) analizan la argumentación de maestros en formación inicial bajo el Modelo Argumentativo de Toulmin (2007) y, de manera específica, estudian el refinamiento de las garantías para apoyar una conclusión, para su admisibilidad y cuestionamiento; sin embargo, no enmarcan dicho analisis a partir del diálogo con preguntas y respuestas, y no proponen futuros estudios para la construcción social de conocimiento en el auditorio donde estudian tal argumentación.

Sobre la importancia de preguntas y respuestas, puede afirmarse que en algunos estudios que se consultaron se investiga la argumentación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la formación de maestros (Nardi et al., 2011; Roig et al., 2011; Goizueta y Planas, 2013a, 2013b; Camargo, 2010; Fernandes y Fonseca, 2004; Douek y Scali, 2000; Martin y McCrone, 2007; Martin et al., 2005), pero en sus referentes teóricos no explicitan las preguntas y respuestas con la solicitud y el ofrecimiento de argumentos; incluso, los indicadores de argumentación en el diálogo no se consideran en los análisis de datos investigativos. En cambio, la presente investigación considera las preguntas, las respuestas y los indicadores de argumentación en el diálogo para conformar el Modelo Teórico Integral de Argumentación en Educación Matemática.

De manera puntual, Douek y Scali (2000) proponen establecer diseños de prácticas de enseñanza con estudiantes. Del análisis de los datos investigativos se concluye que estos diseños pueden depender de los tipos de preguntas que se hagan y de las intenciones de los argumentos.

Sobre los componentes argumentativos y la estructura de la argumentación puede ejemplificarse que, en algunos estudios, se resalta su estructura en el análisis (Knipping, 2008); sin embargo, no describen los componentes argumentativos en términos de los puntos de vista sobre el aprendizaje y la enseñanza de la geometría durante la práctica pedagógica de maestros en formación inicial. Además, en el análisis realizado por Knipping (2008), no se incluyen cualidades retóricas y dialécticas que son fundamentales para un análisis integral de la argumentación en auditorios conformados por maestros en formación inicial con estudiantes.

Por su parte, Nardi et al. (2011) en su modelo teórico no proponen las garantías a priori con el uso de medios en la argumentación de maestros en formación inicial. Pese a que algunos investigadores, por ejemplo, Arzarello et al. (2007), han estudiado el uso de medios, estos investigadores no han tenido interés por vincular de forma directa este uso con un tipo particular de garantía.

Igualmente, Inglis y Mejía-Ramos (2005) analizan los cualificadores modales en la argumentación de maestros en ejercicio; no obstante, este estudio no hace planteamientos o clasificaciones sobre los cualificadores modales ni los relaciona con la racionalidad práctica. Al respecto, la presente investigación plantea algunos caminos para estudiar su presencia en la argumentación, durante la formación universitaria, por maestros en formación inicial en relación con la práctica pedagógica.

La importancia de los recursos retóricos: ilustraciones, modelos y metáforas en la argumentación, no se analizan de forma explícita en ninguno de los estudios consultados en la revisión (e.g., Nardi et al., 2011; Roig et al., 2011; Goizueta y Planas, 2013a, 2013b; Camargo, 2010; Perry et al., 2009; Echeverry et al., 2012; Fernandes y Fonseca, 2004; Douek y Scali, 2000; Martin y McCrone, 2007; y Martin et al., 2005) y no se vinculan con el convencimiento y la persuasión como cualidades retóricas de la misma.

En la literatura en Educación Matemática puede evidenciarse que las intenciones de los argumentos se estudian en relación directa con conocimientos geométricos, tal es el caso del estudio realizado por Camargo (2010), pero no con puntos de vista sobre el aprendizaje y la enseñanza de la geometría de maestros en formación inicial durante su práctica pedagógica.

Para finalizar, respecto a la construcción social de conocimiento, se consultaron algunos estudios durante la revisión (Herbst, 1999, 2007, 2009; Arzarello et al., 2007; Arzarello y Sabena, 2011; Balacheff, 1999, 2000, 2007; Weiss et al., 2009; Reiss y Renkl, 2002; Reiss y Heinze, 2007; Reiss, 2007; y Harel y Sowder, 1998; Harel, 2007; Crespo, 2007a,2007b, Fiallo, 2010); sin embargo, estos no profundizan en dicha construcción mediante los cualificadores modales y la continuidad entre garantías empírico-personales y garantías a priori-epistemológicas, ni mediante indicadores de refutación en el diálogo.

Finalmente, se propone un Modelo Teórico Integral Emergente de Argumentación en Educación Matemática que se presenta a continuación en la Tabla 90.

Tabla 90: Modelo para analizar argumentos de maestros en formación inicial durante su práctica pedagógica.

Diálogo	Argumento con carácter dialógico	Un acto de habla en el cual un participante solicita u ofrece argumentos mediante preguntas o respuestas, en su orden.		
Indicadores de argumentación		Señal que permite identificar argumentos a través del diálogo, estas señales son conectores que unen de manera argumentativa, puntos de vista o afirmaciones. Además, se consideran cualidades retóricas vinculadas con la persuasión y el convencimiento en el diálogo.		
Recursos retóricos	Ejemplo	Uso de casos particulares en la argumentación con la intención de persuadir o generalizar conocimientos o puntos de vista.		
	Ilustración	Uso de una gráfica para apoyar argumentos.		
	Modelo	Uso de la apelación a la acción o a un argumento que ha sido presentado de forma previa por un participante en la argumentación.		
	Metáfora	Uso de una comparación entre objetos de la vida cotidiana con objetos geométricos en un argumento con el fin de persuadir.		
Componentes argumentativos	Datos	Evidencias empíricas o teóricas que acompañan las preguntas o respuestas.		
	Conclusión	Puntos de vista o afirmaciones que defiende quien argumenta.		
	Garantías	Justifica la conexión entre datos y conclusión	A priori-epistemológicas	
			A priori-pedagógica	
			A priori con el uso de medios	
			Institucional-curricular	
			Empírico-profesional	
			Empírico-personal	
			Evaluativa	
	Cualificador modal	Especifica el grado de certeza de una conclusión.	Provisional	Indica una racionalidad práctica.
			Absoluto	Indica una racionalidad teórica.
	Soportes	Apoya la garantía a través de evidencias teóricas o empíricas.		
	Refutadores	Excepciones a un punto de vista o afirmación sobre un conocimiento geométrico.		
Intención de los argumentos	Para validar	Refinar definiciones, afirmaciones o puntos de vista.		
	Para justificar	Ofrecer argumentos convincentes.		
	Para refutar	Aclarar puntos de vista o afirmaciones.		
	Para defender	Aportar argumentos a favor de un punto de vista o afirmación.		
	Para explicar	Ofrecer otros puntos de vista o afirmaciones.		
	Para persuadir	Usar en los argumentos recursos retóricos.		

8.2. Sobre el diseño metodológico

En el diseño metodológico de esta investigación fueron esenciales los dos auditorios (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006; Apostel, 2007) donde los maestros en formación inicial argumentaron: el seminario de práctica pedagógica y el aula de clase. También lo fueron las tareas que propusieron tanto el investigador como los maestros en formación inicial. A continuación, se pormenoriza cada una de ellas.

8.2.1. Los dos auditorios considerados para la argumentación

Como consecuencia del problema investigativo, se recolectaron los datos investigativos durante la formación inicial de maestros en relación con su práctica pedagógica. No fue de interés recolectarlos durante la fundamentación en los cursos propios sobre fundamentación en geometría que hacen parte del plan de estudios de la Licenciatura, en los cuales la argumentación se vincula con la deducción y la logicidad de forma directa. Analizar cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica permitió asumir dos auditorios: el seminario de práctica pedagógica donde los maestros en formación inicial presentaban o discutían sus tareas para luego enseñarlas a estudiantes de escuela primaria o secundaria, y el auditorio del aula de clase, en el que argumentaban con sus estudiantes sobre conocimientos geométricos o puntos de vista sobre el aprendizaje o enseñanza de la geometría.

8.2.2. Las tareas como orientadoras de la argumentación

Las tareas que propuso el investigador a los maestros en formación inicial en el auditorio del seminario de práctica pedagógica, y las tareas que los maestros en formación inicial propusieron a sus estudiantes en el auditorio del aula de clase permitieron orientar la argumentación a través de preguntas y respuestas. Esta afirmación se considera una conclusión que puede servir para el diseño de tareas en las cuales el propósito sea argumentar.

En cuanto a la función del diálogo, puede concluirse que las tareas se formulaban a partir de preguntas, cuya estructura correspondía con: *el cómo se argumenta, la intención de la argumentación, a quiénes se argumenta y el qué se argumenta*, evidencia de ello puede verse en los segmentos locutivos diversos presentados en el capítulo 6 (Análisis e interpretación de datos investigativos).

Las tareas a través de preguntas coinciden con los paradigmas de enseñanza de la geometría: natural y axiomática natural (Houdement y Kuzniak, 2003; Kuzniak, 2008; Kuzniak y Rauscher, 2011). Como se afirmaba en el capítulo 4 (Referente teórico), se corrobora que no se usó el paradigma de enseñanza de la geometría III por parte del investigador y de los maestros en formación inicial en las preguntas planteadas, esto se debe a que el curso estuvo relacionado con la práctica (Herbst y Chazan, 2003; Miyakawa y Herbst, 2007; y Nardi et al., 2011) y no con la fundamentación teórica en geometría.

8.3. Sobre el cumplimiento de los objetivos investigativos

En este apartado, se destacan los temas centrales tratados en los tres últimos objetivos específicos[37]. A continuación, se presentan algunas conclusiones para cada uno de ellos.

8.3.1. Los argumentos de carácter monológico y dialógico y los recursos retóricos

En esta investigación, la argumentación se entendió como esencial al comunicar conocimientos y puntos de vista entre maestros en formación inicial y estudiantes, no limitada a la logicidad (Andaluz, 1992), sino complementaria con la razonabilidad (Toulmin, 2003, 2007; Harada, 2009; Rigotti y Greco, 2009).

[37] El cumplimiento del objetivo cuatro fue documentado en el apartado 8.1 del presente capítulo.

En cuanto a las cualidades dialécticas (van Eemeren et al., 2006; van Eemeren et al., 2007; Bermejo, 2006; Nielsen, 2011), mientras los tres maestros en formación inicial presentaron las preparaciones de sus clases en el auditorio del seminario, en algunos momentos la argumentación se tornó monológica debido a su intención explicativa. Sin embargo, cuando argumentaron sobre conceptos geométricos en el auditorio del aula de clase con sus estudiantes, se caracterizó dialógica. Por otra parte, en el auditorio del seminario, en los argumentos de los participantes, predominaron las garantías a priori-epistemológicas (Nardi et al., 2011); mientras que en el auditorio de clase con estudiantes sobresalió la solicitud de garantías empírico-personales (Nardi et al., 2011).

Aunque el investigador tuvo como supuesto teórico que los maestros en formación inicial argumentarían de manera dialógica (Duschl y Osborne, 2002; Muller et al., 2009; Nielsen, 2011), pudieron recolectarse evidencias empíricas que demostraron lo contrario, debido a que en algunas ocasiones recurrieron a la argumentación con características monológicas, es decir, ellos se preguntaban y se respondían ante los oyentes del auditorio del seminario de práctica pedagógica.

A su vez, en las ocasiones donde predominó la argumentación con características dialógicas esta sirvió para la construcción social de conocimiento geométrico (Leitão, 2011), como por ejemplo, durante los segmentos locutivos ocurridos en el auditorio del aula de clase. La argumentación con características dialógicas sirvió para que los maestros en formación inicial refutaran algunos argumentos de sus estudiantes y para que refinaran el uso de los cualificadores modales en sus afirmaciones o puntos de vista (Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Inglis, 2007). La construcción social del conocimiento mediante la argumentación y la validación de afirmaciones o puntos de vista en el auditorio del aula de clase coincide con las conclusiones de algunos estudios revisados en el capítulo 3 (Herbst, 2007; Leitão, 2011; Goizueta, 2015).

Al mismo tiempo, tanto en la argumentación con características dialógicas como monológicas, los maestros en formación inicial usaron diversos indicadores de argumentación (van Eemeren et al., 2006; van Eemeren et al., 2007; Herrero, 2006). Su uso confirma un supuesto práctico inicial del investigador: los indicadores de argumentación que usaron los maestros en formación inicial no se limitaron a los usuales en la argumentación deductiva, los utilizaron con significados más allá de la simple logicidad al vincularlos con la razonabilidad de sus puntos de vista (Toulmin, 2003, 2007).

Por una parte, los indicadores de argumentación en el diálogo ayudaron de forma metodológica y analítica al investigador a identificar los argumentos usados por los tres maestros en formación inicial. Algunos indicadores usados por los estudiantes en el auditorio del aula de clase dependieron de las preguntas que se les planteaban. Por otra parte, los indicadores permitieron al investigador advertir en el diálogo o en el monólogo los componentes del Modelo Argumentativo de Toulmin, porque señalaban momentos, conexiones o vínculos entre conocimientos o puntos de vista. De manera específica, en los segmentos locutivos que se presentan en el capítulo 6 (Análisis e interpretación de datos investigativos), el uso de diversos indicadores permitió distinguir las garantías empleadas.

Los argumentos con características dialógicas conllevan la colaboración en la construcción social del conocimiento. Esta es una conclusión esencial para los programas de formación inicial de maestros, porque puede permitir pensar sobre la forma y el contenido de cómo se enseña a argumentar de manera deductiva y su importancia en relación con la práctica pedagógica.

Con respecto a las cualidades retóricas, los maestros en formación inicial solicitaron u ofrecieron algunos recursos retóricos a sus interlocutores en sus argumentos. En el análisis e interpretación de datos investigativos (capítulo 6), se evidencia el uso de cuatro recursos retóricos: ejemplos, modelos, ilustraciones o metáforas (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). Su uso favoreció la persuasión o el convencimiento (Perelman, 1997; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006), y la fuerza de sus argumentos (Apostel, 2007).

En este uso de recursos retóricos, se destacan: el ejemplo con el fin de persuadir por medio de casos particulares a los oyentes de los auditorios; la ilustración, como sustentación de los argumentos; el modelo, para apoyarse en las decisiones o afirmaciones de otros participantes del auditorio; y la metáfora, para establecer comparaciones entre objetos geométricos con objetos de la vida cotidiana.

8.3.2. Los componentes argumentativos

Las cualidades lógico-sustantivas sobresalieron al identificarse los componentes argumentativos. Al definir la argumentación como acto comunicativo; de manera específica, las preguntas y las respuestas que facilitaron la solicitud y el ofrecimiento de argumentos de los maestros en formación inicial en relación con su práctica pedagógica, hizo posible que el investigador pudiera reconocer tanto los datos como las conclusiones que usaron.

Las garantías corresponden con la clasificación propuesta por Nardi et al. (2011). Entre los hallazgos de garantías que usaron durante sus argumentos en relación con la práctica pedagógica se resaltan: garantías a priori: epistemológicas y pedagógicas; garantías institucionales: curriculares y epistemológicas; garantías empíricas: profesionales y personales; y garantías evaluativas.

El uso más extendido fue el de las garantías a priori-epistemológicas sobre conocimientos geométricos. Las garantías a priori-pedagógicas[38] y las garantías institucionales-epistemológicas[39] se usaron en ocasiones escasas. Las garantías institucionales-curriculares no se usaron. Las garantías empírico-profesionales se emplearon una sola vez por parte del Colega 2; sin embargo, los tres participantes no las tuvieron en cuenta en sus argumentos. Fue recurrente el uso de garantías empírico-personales por parte de los tres maestros en formación inicial, esto puede evidenciarse en el capítulo 7 (El estudio de las particularidades de la argumentación de tres participantes). Las garantías evaluativas solo se usaron una vez por parte de la Colega 1. Cabe anotar, que emergió una nueva categoría del estudio empírico de los datos investigativos para agregar a la clasificación de garantías propuestas por Nardi et al. (2011), a saber: garantía a priori con el uso de medios[40]. Esta garantía se refiere al uso del *software* de geometría dinámica Geogebra a través de las herramientas que provee, para apoyar argumentos sobre conjeturas (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010) o sobre su pertinencia (Apostel, 2007). No obstante, faltan más estudios empíricos sobre la argumentación de maestros en formación inicial en relación con su práctica para confirmar esta categoría de garantía. Se recomienda que el tipo de preguntas que el maestro en formación inicial o en ejercicio haga a sus estudiantes durante la argumentación se oriente por la solicitud de garantías a priori-epistemológicas.

Los cualificadores modales usados en los argumentos por los maestros en formación inicial dan cuenta de una racionalidad práctica para la enseñanza de la geometría (Herbst y Chazan, 2003; Miyakawa y Herbst, 2007; y Nardi et al., 2011). En su mayoría, estos cualificadores indicaron provisionalidad de los argumentos que comunicaban, por eso podrían llamarse cualificadores modales provisionales (Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Inglis, 2007). Estos

---

[38] Remitirse a la argumentación de María, en el apartado 7.3.
[39] Remitirse a la argumentación de Helena y de María, en el apartado 7.2. y 7.3.
[40] Remitirse a la argumentación de Carlos y de Helena, en el apartado 7.1. y 7.2.

se usaron con garantías diferentes a las a priori-epistemológicas donde la experiencia fue esencial. Además, fueron indicadores de la construcción social del conocimiento en los dos auditorios en los que ellos argumentaron. Los maestros en formación inicial también emplearon cualificadores modales absolutos, los cuales se relacionaron de forma directa con afirmaciones conocidas por ellos de la geometría, y se vincularon con el uso de garantías a priori-epistemológicas.

Los soportes que utilizaron los maestros en formación inicial cuando argumentaban fueron de dos tipos: unos teóricos relacionados con conocimientos del contenido matemático (Adler et al., 2005; Ball et al., 2005; Ball et al., 2008) específicamente de geometría, y otros empíricos relacionados con las experiencias personales y profesionales de quienes argumentaban, con conocimientos de contenido pedagógico (Schulman 1986, 1987) sobre geometría.

La refutación, los refutadores y los antagonistas en la argumentación se evidenciaron cuando los maestros en formación inicial trataban de refinar las afirmaciones[41] de los oyentes de ambos auditorios; este refinamiento se dirigía hacia una refutación por el uso de un cualificador modal provisional o hacia la solicitud de argumentos[42]. Las funciones tanto de protagonistas como de antagonistas en la argumentación fueron adoptadas por los tres maestros en formación inicial.

8.3.3. El uso de intenciones diversas en los argumentos

Los maestros en formación inicial solicitaron argumentos con intenciones diversas, tanto en el auditorio del seminario de práctica pedagógica como en el auditorio del aula de clase, entre las que se destacan: para validar (Harel y Sowder, 1998; Herbst, 1999), defender (McClain,

[41] Se sugiere al lector que se remita a los apartados 7.1. y 7.3.
[42] Se sugiere al lector que se remita al apartado 7.2.

2009), refutar (McClain, 2009; Reid et al., 2011), explicar (De Villiers, 1993), persuadir (Inglis y Mejía-Ramos, 2005; Crespo, 2007a, 2007b; Reiss, 2007; Crespo et al., 2010; Arzarello y Sabena, 2011; Roig et al., 2011) y justificar (Battista y Clements, 1995; McClain, 2009); este hallazgo corresponde con las conclusiones del estudio realizado por McClain (2009), el cual evidencia argumentos para la defensa, el desacuerdo, la justificación y el refinamiento, pero más amplio. A futuro, estos tipos de intenciones en los argumentos ameritarán más estudios empíricos, en la formación inicial de maestros, tanto en la fundamentación en geometría como en relación con la práctica pedagógica.

8.4. Futuro investigativo

Para futuros investigadores cuyo interés esté orientado hacia la temática tratada en esta investigación, se recomienda validar o refutar las conclusiones obtenidas aquí, a partir de la consideración de las particularidades relacionadas con el planteamiento del problema investigativo, la revisión de estudios, el referente teórico, y el diseño metodológico relacionado con el estudio de caso. Se espera que los hallazgos encontrados en tal estudio sobre las particularidades de la argumentación de los tres participantes sean validados o refutados por futuros investigadores en otros participantes, contextos y escenarios mediante otros diseños metodológicos.

A continuación, se proponen algunos trabajos investigativos futuros para estudiar:

- Estructuras de preguntas y respuestas cuando maestros en formación inicial argumenten tanto en cursos universitarios teóricos como en cursos universitarios prácticos. Asimismo, estudiar diseños de clase con tipos de preguntas y respuestas que puedan surgir mediante el diálogo informal, abierto y colaborativo.

- Los argumentos que usen de forma simultánea el maestro en formación inicial y sus estudiantes en auditorios de aula de clase, ya que cualquier modificación en las preguntas que haga el maestro modificará la forma en que argumenten; es decir, la solicitud e intención de argumentos por parte del maestro obedecen a las preguntas que formule, como también al ofrecimiento de argumentos por parte de sus estudiantes.
- Posibles relaciones entre argumentos con características monológicas y procesos metacognitivos que realicen maestros en formación inicial y en ejercicio en auditorios de aula de clase.
- Posibles relaciones entre cualificadores modales y construcción social de conocimiento; por ejemplo, ¿cómo se logra construcción social de conocimientos en auditorios conformados por maestros y estudiantes mediante el refinamiento de cualificadores que se usen en la argumentación?
- Otros tipos de garantías que pueden usar los maestros en formación inicial cuando argumenten con sus colegas en cursos relacionados con su formación o cuando argumenten con sus estudiantes en auditorios de aula de clase. Asimismo, se deja para futuras investigaciones el estudio de las garantías con el uso de medios.
- Posibles relaciones entre la refutación y la construcción social de conocimiento. Con este fin, se sugiere hacer hincapié en *indicadores de refutación en el diálogo*, de manera análoga, como se definieron y usaron *los indicadores de argumentación en el diálogo* en esta investigación.
- Posibles relaciones entre otros recursos retóricos diferentes al ejemplo, el modelo, la ilustración y la metáfora, con la argumentación en auditorios conformados por maestros y estudiantes.

- La argumentación para establecer relaciones de continuidad entre enseñanza-aprendizaje de la geometría y la demostración matemática (Pedemonte, 2007; Arzarello y Sabena, 2011). De manera concreta, estudiar la continuidad para determinar conexiones entre indicadores de argumentación y conectores lógico-formales, entre cualificadores modales relativos o provisionales y cuantificadores lógicos-formales, entre garantías empíricas y a priori-epistemológicas. También, entre los recursos retóricos utilizados: las metáforas y los modelos con las ilustraciones y los ejemplos como recursos retóricos para facilitar la continuidad de la argumentación a la demostración matemática.
- Posibles diferencias entre tareas que se propongan y se realicen en cursos de práctica pedagógica y en cursos de geometría durante la formación inicial de maestros y cómo pueden influir en sus argumentos.

9. Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 359-381, http://dx.doi.org/10.1007/s10649-005-5072-6

Alexy, R. (1989). *Teoría de la argumentación jurídica.* Centro de Estudios Constitucionales (Manuel Atienza e Isabel Espejo, Trs.). Madrid, España (primera edición en alemán, 1978).

Álvarez, C., & Moroto, J. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa. *Gazeta de Antropología, 28*(1), 1-12.

Andaluz, A. (1992). S. E. Toulmin: racionalidad y logicidad. *Cuadernos Salmantinos de Filosofía, 19*, 255-286.

Angulo, J., Barquín, J., & Pérez, A. (1999). *Desarrollo profesional del docente: Política, investigación y práctica*. Madrid, España: Ediciones Akal.

Apostel, L. (2007). ¿Cuál es la fuerza de un argumento?: Algunos problemas y sugerencias. *Praxis filosófica, 25*, 129-138.

Aristóteles. (2004). *Tratados de lógica: El organon.* Porrúa.

Arnaus, R. (1999). La formación del profesorado: Un encuentro comprometido con la complejidad educativa. En J. Angulo, J. Barquín, & A. Pérez (Eds.), *Desarrollo profesional del docente: Política, investigación y práctica* (pp. 599-635). Madrid, España: Ediciones Akal.

Arsac, G. (1987). El Origen de la Demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathématiques, 8*(3), 267-312.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2007). The transition to formal proof in geometry. In P. Boero (Eds.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 305-323). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 189-206. doi: 10.1007/s10649-010-9280-3.

Atienza, M., & Jiménez, M. (1993). Entrevista con Stephen E. Toulmin. *DOXA: Cuadernos de Filosofía del Derecho, 13,* 329-356.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*(3), 225-253. doi: 10.1007/s10758-010-9169-3.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate... Recuperado de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. (Pedro Gómez y Angela Pinilla, Trs.). Santafé de Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Balacheff, N. (2007). Research Paradigms on Teaching and Learning Proof. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), *Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof*. Providence, Rhode Island: University Massachusetts Dartmount.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who Knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator, 29*(1), 14-46.

Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4th ed., 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59 (5),* 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proc. 26th Conf. of the Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 57-64). Norwich, England: PME.

Battista, M., & Clements, D. (1995). Connecting Research to Teaching: Geometry and Proof. *The Mathematics Teacher, 88*(1), 48-54.

Bermejo, L. (2006). *Bases filosóficas para una teoría normativa integral de la argumentación. Hacia un enfoque unificado de sus dimensiones lógica, dialéctica y retórica* (Tesis doctoral). Universidad de Murcia, Murcia, España.

Bermejo, L. (2009). La distinción aristotélica entre Lógica, Dialéctica y Retórica y su lugar en la teoría de la Argumentación. *COGENCY 1(2),* pp. 27-48.

Blanton, M., & Stylianou, D. (2007). The Proof Project. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), *Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof*. Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Blanton, M., Stylianou, D., & David, M. (2009). Understanding Instructional Scaffolding in Classroom Discourse on Proof. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (pp. 290-306). New York: Routledge.

Boavida, A., & Ponte, J. (2011). Investigación colaborativa: potencialidades y problemas. *Revista Educación y Pedagogía, 23*(59), 125-135.

Boenders, F. (1987-990). Una conversación con Chaïm Perelman. *Anales de Derecho, 10*, 257-270.

Boero, P. (1999). Argumentación y Demostración: Una Relación Compleja, Productiva, e inevitable en las Matemáticas y en la Educación Matemática. Recuperado de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html

Boero, P. (2007). Conjecturing and Proving as Rational Behaviors. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), *Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof*. Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Bur, R. (2007). Psicología del razonamiento. Recuperado de http://www.ricardobur.com.ar/publicac/Psicologia% 20del% 20Razonamiento.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria* (Tesis doctoral). Universitat de València, Valencia, España.

Castillo, E., & Vásquez, M. (2003). El rigor metodológico en la investigación cualitativa. *Revista Colombia Médica, 34*(3), 164-167.

Clifford, C. (2005). Ethics and Politics in Qualitative Research. In N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research Third Edition* (pp. 139-164). Thousand Oaks, CA: Sage.

Crespo, C. (2007a). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología* (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada, Distrito Federal, México.

Crespo, C. (2007b). Los estudiantes ante formas de argumentar aristótelicas y no aristotélicas. Un estudio de casos. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 2*(1), 84-100.

Crespo, C., Farfán, R., & Lezama, M. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(3), 283-306.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-29.

Denzin, N. (1984). *The research act*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Denzin, N. (1989). *Interpretive biography*. Newbury Park, CA: Sage.

Dewey, J. (1928). *Cómo pensamos*. Madrid, España: Calpe.

Douek, N., & Scali, E. (2000). About argumentation and conceptualisation. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proc. 24th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 249-256) Hiroshima, Japan: PME.

Duschl, R., & Osborne, J. (2002). Supporting and Promoting Argumentation Discourse in Science Education. *Studies in Science Education, 38,* 39-72. doi: 10.1080/03057260208560187.

Echeverry, A., Molina, Ó., Samper, C., Perry, P., & Camargo, L. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 73-88, http://dx.doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.112.

Ellis, A. (2007a). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 194-229.

Ellis, A. (2007b). Proof and Generalization Research Paradigm. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), *Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof*. Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Erduran, S., Ardac, D., & Yakmaci-Guzel, B. (2006). Learning to Teach Argumentation: Case Studies of Pre-Service Secondary Science Teachers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 1-14.

Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. (2010). *Texto maestro de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas*. Medellín, Colombia: Facultad de Educación.

Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. (2012). *Reglamento de Prácticas Pedagógicas para los programas de Pregrado*. Medellín, Colombia: Facultad de Educación.

Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. (2016). *Perfil del Egresado de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas*. Medellín, Colombia: Facultad de Educación.

Fernandes, D., & Fonseca, L. (2004). Ar*gumentação e Demonstração no Contexto da A Formação Inicial de Professores. En A. Borralho, C. Monteiro, & R. Espadeiro* (Eds.), Matemática na formação de professor (pp. 249-272). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica* (Tesis doctoral). Universitat de València, Valencia, España.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas, *Revista Integración, 31*(2), 181-205.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics 74*(2), 163-183. doi: 10.1007/s10649-010-9232-y.

Godino, J., & Recio, A. (2001). Significados de la demostración en Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 19*(3), 405-414.

Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

Goizueta, M., & Planas, N. (2013a). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. *PNA, 7*(4), 155-170.

Goizueta, M., & Planas, N. (2013b). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 31*(1), 61-78.

Guba, E., & Lincoln, Y. (1981). *Effective evaluation: improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Habermas, J. (1999). *Teoría de la acción comunicativa I. Racionalidad de la acción y racionalización social* (Manuel Jiménez Redondo, Tr.). Madrid, España: Taurus Ediciones (primera edición en alemán, 1981).

Habermas, J. (2002). *Verdad y justificación* (Pere Fabra y Luis Díez, Trs.). Madrid, España: Editorial Trotta (primera edición en alemán, 1999).

Harada, E. (2009). Algunas aclaraciones sobre el “Modelo” Argumentativo de Toulmin. *ContactoS, 73*, 45-56.

Harel, G. (2007). Summary of Research Work. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), *Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof*. Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Harel, G., & Fuller, E. (2009). Current Contributions Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K -16 Perspectives* (pp. 355-370). New York: Routledge.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, J. J. Kaput, F. Hitt, T. P, (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education VII* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Heinze, A., & Reiss, K. (2009). Developing Argumentation and Proof Competencies in the Mathematics Classroom. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspectives* (pp. 191-203). New York: Routledge.

Henao, B. (2010). *Hacia la construcción de una ecología representacional: Aproximación al aprendizaje como argumentación desde la perspectiva de Stephen Toulmin* (Tesis doctoral). Universidad de Burgos, Burgos, España.

Henao, B. & Stipcich, M. (2008). Educación en ciencias y argumentación: la perspectiva de Toulmin como posible respuesta a las demandas y desafíos contemporáneos para la enseñanza de las Ciencias Experimentales. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 1*(7), 47-62.

Herbst, P. (1999). Acerca de la demostración y la lógica de la práctica en la Enseñanza de la Geometría: Observaciones sobre la forma de prueba a dos columnas. Recuperado de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990102Theme/990102ThemeES.html

Herbst, P. (2000). *¿A dónde va la investigación sobre la prueba?* En Balacheff, N. (Ed.), Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas (pp. 191-200). Santafé de Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Herbst, P. (2007). Studying the Role of Proof in Classroom Public Knowledge. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), *Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof*. Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Herbst, P., & Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: The case of engaging students in proving. *For the Learning of Mathematics, 23*(1), 2-14.

Herrero, J. (2006). *Teoría de pragmática, de lingüística textual y de análisis del discurso.* La Mancha, España: Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In *Proceedings 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1-9). Bellaria, Italy: CERME.

Hoyles, C., & Küchermann, D. (2002). Students' understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 193-223.

Ibañes, M. (2001). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M. Moreno, M. Gil, & J. Godino (Eds.), *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. En Seminario de Investigación I: Prueba y demostración: Razonamiento matemático* (pp. 11-26). Almería, España: Universidad de Almería, Servicio de Publicaciones.

Inglis, M. (2007). Paradigms for Proofs. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), *Research Colloquium Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof.* Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Inglis, M., & Mejía-Ramos, J. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas, 10 (3). *Revista EMA, Investigación e Innovación en Educación Matemática*, 327-352.

Inglis, M., Mejía-Ramos, J., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66* (1), 3-21.

Jaworski, B., & Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice, and the roles of practising teachers. In *Second International Handbook of Mathematics Education* (829-875). Springer Netherlands.

Jiménez Aleixandre, M. & Díaz de Bustamante, J. (2003). Discurso de aula y argumentación en la clase de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), 359-370.

Knipping, C. (2008). A Method for Revealing Structures of Argumentations in Classroom Proving Processes. *ZDM International Journal of Mathematics Education, 40*(3) 427-441, doi: 10.1007/s11858-008-0095-y.

Kuzniak, A. (2008). Diversidad de las matemáticas enseñadas "aquí" y "en otro lugar": el ejemplo de la geometría. *Matematicalia: Revista de Divulgación Matemática de la Real Sociedad Matemática Española, 4* (1), 1-6.

Kuzniak, A., & Rauscher, J. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics, (77),* 129-147. doi: 10.1007/s10649-011-9304-7.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático.* (Carlos Solis, Tr.). Madrid, España: Editorial Alianza (primera edición en inglés, 1976).

Leitão, S. (2000). The potential of argument in knowledge building. *Human Development, 43*, 332– 360. doi: 10.1159/000022695

Leitão, S. (2011). O lugar da argumentação na construção do conhecimento em sala de aula. En S. Leitão, & M. Damianovic, *Argumentação na escola: o conhecimento em construção* (pp. 13-46). Campinas-SP: Pontes Editores.

León, O. (2012). Cien años de reformas y un problema actual en la enseñanza de la geometría. En L. Camargo (Eds.), *Investigaciones en Educación Geométrica* (pp. 105-123). Santafé de Bogotá D.C.: Sección de Publicaciones, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

León, O., & Calderón, D. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 5-21.

Lincoln, Y., & Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills: Sage Publications.

López, F. (2012). Las huellas pragmatistas en Los usos de la argumentación. *COGENCY 4*(1), 25-51.

Manghi, D. (2010). Recursos semióticos del profesor de matemáticas: Funciones complementarias del habla y los gestos para la alfabetización científica escolar. *Estudios Pedagógicos, 36*(2), 99-115.

Mariotti, A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En Á. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Martin, T., & McCrone, S. (2007). Multiple Paradigms for Investigating Multiple Aspects of Teaching and Learning Proof. Conjecturing and Proving as Rational Behaviors. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), *Research Colloquium Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof*. Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Martin, T., McCrone, S., Bower, M., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 95-124. doi: 10.1007/s10649-005-6698-0.

Mayan, M. (2001). *Una introducción a los métodos cualitativos: Módulo de entrenamiento para estudiantes y profesionales*. Edmonton Alberta, Canadá: Qual Institute Press.

McClain, K. (2009). When is an Argument Just an Argument: The refinement of Mathematical Argumentation. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (pp. 222-234). New York: Routledge.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santafé de Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Miyakawa, T. & Herbst, P. (2007a). The nature and role of proof when installing theorems: the perspective of geometry teachers. In J. H. Woo et al. (Eds.), Proc. of the 31th of the Group for the psychology of mathematics education (Vol.3, pp. 281-288). Seoul: PME.

Montoya-Delgadillo, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Enseñanza de las ciencias, 32*(3), 227-247.

Muller, N., Perret-Clermont, A.-N., Tartas, V., & Iannaccone, A. (2009). Psychosocial Processes in Argumentation. En N. Muller, & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education: Theoretical Foundations and Practices* (pp. 67-90), New York, USA: Springer.

Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2011). 'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173. doi: 10.1007/s10649-011-9345-y.

Nielsen, J. (2011). Dialectical features of students' argumentation: A critical review of argumentation studies in science education. *Research in Science Education*, *43*(1), 371-393. doi: 10.1007/s11165-011-9266-x.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques* (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier-Grenoble 1-Université de Genova, Grenoble, Francia.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66,* 23-41.

Perelman, C. (1997). *El imperio retórico: retórica y argumentación* (Adolfo León Gómez Giraldo, Tr.). Santafé de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma (primera edición en francés, 1977).

Perelman, C. (2007). Lógica formal y lógica informal (Pierre Angelo González, Tr.). *Praxis Filosófica, 25*, 139-144.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2006). *Tratado de la argumentación: La nueva retórica*. (Julia Sevilla Muñoz, Tr.). Madrid, España: Editorial Gredos (primera edición en francés, 1989).

Perry, P., Camargo, L., Molina, Ó., & Echeverry, A. (2009). Assigning Mathematics Task Versus Providing Pre-Fabricated Mathematics in order to Support Learning to Prove. In F.-L. Lin, F.-J- Hsieh, Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proc. 19th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 139-143), Taipei, Taiwan: PME.

Plantin, C. (1998). La argumentación entre enunciación e interacción. *Escritos, Revista del Centro de Ciencias del Lenguaje, 17-18,* 7-21.

Posada, P. (2010). *Argumentación: teoría y práctica: Introducción a las teorías de la argumentación*. Santiago de Cali: Colombia: Programa Editorial, Universidad del Valle.

Reid, D., Knipping, C., & Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA, 6*(1), 1-10. HANDLE: http://hdl.handle.net/10481/16011

Reiss, K. (2007). Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Recuperado de http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/59/beweis.pdf

Reiss, K., & Heinze, A. (2007). Modeling proof competency. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), Research Colloquium Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof. Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Reiss, K., Heinze, A., Kessler, S., Rudolph-Albert, F., & Renkl, A. (2007). Fostering argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. *Studies on the Educational Quality of Schools*, 251-264.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, *ZDM International Journal of Mathematics Education, 34*(1), 29-35. doi: 10.1007/BF02655690.

Rigo, M. (2014). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. *PNA, 8*(3), 87-98.

Rigotti, E., & Greco, S. (2009). Argumentation as an Object of Interest and as a Social and Cultural Resource. En N. Muller, & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education: Theoretical Foundations and Practices* (pp. 9-66), New York, USA: Springer.

Roig, A., Llinares, S., & Penalva, M. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Educación Matemática, 23*(3), 39-65.

Sampson, V., & Clark, D. (2008). Assessment of the ways students generate arguments in science education: Current perspectives and recommendations for future directions. *Science Education, 92*(3), 447-472.

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa: Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador*. Santafé de Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Schön, D. (1983). Teaching artistry through reflection-in-action. *Educating the reflective practitioner*, 22-40.

Schön, D. (1998). *El profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales cuando actúan.* Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Simpson, A. (2015). The anatomy of a mathematical proof: Implications for analyses with Toulmin's scheme. *Educational Studies in Mathematics, 90*(1), 1-17. doi: 10.1007/s10649-015-9616-0

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos* (Ángel Gallardo, Tr.). Madrid, España: Ediciones Morata (primera edición en inglés, 1995).

Stylianides, A. (2007a). Summary of research work. In M. Blanton, D. Stylianou & K. Weber (Eds.), *Research Colloquium Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof.* Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Stylianides, A. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38* (3), 289-321.

Toulmin, S. (1977). *La comprensión humana: el uso colectivo y la evolución de los conceptos* (Néstor Míguez, Tr.). Madrid: Alianza Editorial.

Toulmin, S. (2003). *Regreso a la razón: El debate entre la racionalidad y la experiencia y la práctica personal en el mundo contemporáneo* (Isabel González-Gallarza, Tr.). Barcelona: España: Ediciones Península (primera edición en inglés, 2001).

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación* (María Morrás y Victoria Pineda, Trs.).Barcelona, España: Ediciones Península (primera edición en inglés, 1958).

Trujillo, J. (2007). Reseña de Los usos de la argumentación. *Praxis Filosófica*, *25*, 159-168.

Trujillo, J., & Vallejo, X. (2007). Silogismo teórico, razonamiento práctico y raciocinio retórico-dialéctico. *Praxis Filosófica*, *24*, 79-114.

van Eemeren, F., Grootendorst, R., & Henkemans, F. S. (2006). *Argumentación: análisis, evaluación y presentación* (Roberto Marafioti, Tr.). Buenos Aires, Argentina: Biblos (primera edición en inglés, 2002).

van Eemeren, F., Houtlosser, P., & Snoeck-Henkemans, A. (2007). *Argumentative Indicators in Discourse. A Pragma-Dialectical Study.* New York: Springer.

Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers'perspectives on "Authentic Mathematics" and the Two-Column proof form. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 275-293, doi: 10.1007/sl0649-008-9144-2.