Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 51(2017)2, páginas 119-152

Morfismos de Abel, series lineales y sus límites sobre curvas

Abel maps, linear series and their limits on curves

Pedro H. Rizzo[0]

Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

Abstract. Se presentan los principales resultados y técnicas en la construcción de los espacios moduli de series lineales, series lineales límite sobre curvas y la relación de estos con los morfismos de Abel. Se inicia con una breve revisión de la teoría de series lineales y sus principales consecuencias sobre curvas suaves. Son examinadas dos construcciones de límites de series lineales y sus espacios moduli: los de tipo Eisenbud–Harris [14] y los de tipo Osserman [42]. Adicionalmente, es presentada la relación de esta última construcción con las fibras de los morfismos de Abel [22] y así mismo la construcción de los límites del tipo Esteves-Nigro-Rizzo [20, 21] que generalizan los dos tipos de límites anteriores. Finalmente, una breve digresión presenta los avances actuales y aspectos de futuros desarrollos relacionados a estas teorías y sus aplicaciones.

Key words and phrases. Series lineales, morfismos de Abel, series lineales límite, espacios moduli.

2010 Mathematics Subject Classification. 14-02,14D06,14D22,14H51,14H10.

Resumen. We introduce the main results and techniques related to the constructions of the moduli spaces of linear series, limit linear series on curves and its relations with Abel maps. We start with a brief exposition of the theory of the linear series and its main consequences on smooth curves. Also, we examine two constructions of limits of linear series and their moduli spaces: Eisenbud and Harris types [14] and Osserman types [42]. In addition, we discuss the relation of the latter construction with Abel maps [22] and we present a new limits construction: Esteves–Nigro–Rizzo types [20, 21] which generalize Eisenbud–Harris and Osserman constructions. Finally, we give a brief overview on further works related to these theories and their applications.

Palabras y frases clave. Linear series, Abel maps, limit linear series, moduli spaces.

[0]Proyecto Mapas de Abel y series lineales límite sobre curvas de tipo compacto, Acta IN655CE.

1. Introducción

La teoría de series lineales, entendida hoy como el estudio de los espacios de secciones de fibrados de rectas sobre una variedad, ha hecho parte del progreso de la geometría algebraica por más de dos siglos. Dicha teoría, en el caso particular sobre curvas, evolucionó y motivó diferentes frentes de investigación que aún hoy son materia de estudio. Ejemplo de esto es la teoría de las series lineales límite introducidas por Eisenbud y Harris [14], como consecuencia del comportamiento de las series lineales via deformación de una familia de curvas suaves a una curva singular (de tipo compacto).

Este artículo tiene como meta conducir al lector por un recorrido ameno y desprovisto de ciertos detalles técnicos–sin dejar de ser rigurosos–por los principales resultados, construcciones y consecuencias vinculadas a las teorías de las series lineales, series lineales límite y su relación con los morfismos de Abel sobre curvas. Desde un enfoque amplio este texto es una invitación al estudio de la geometría algebraica de curvas y de los espacios de moduli relacionados con éstas.

La teoría de series lineales sobre curvas algebraicas suaves de género g se remonta a los estudios de Riemann [47] sobre la determinación de un sistema con a lo más g puntos sobre esta, de tal forma que ellos correspondieran a los polos de una función racional. De forma un poco más precisa, Riemann, generalizando trabajos previos de Abel, definió para una curva suave C de género g conjuntos de a lo más g puntos por la intersección de C con un sistema (lineal) de curvas $\sum_j \alpha_j P_j(x,y) = 0$, donde los α_j son números complejos y los $P_j(x,y)$ son polinomios. A partir de 1866, las escuelas de geometría lideradas por los matemáticos Clebsch, Gordan, Brill y Max Noether, iniciaron el estudio de las propiedades birracionales de las curvas algebraicas suaves a partir de la comprensión y estudio de estos puntos que llamaron de series o sistemas lineales sobre una curva suave C. En este mismo periodo, estas mismas escuelas inician sus estudios en (sub-)variedades algebraicas de $\mathbb{P}^n$ para cualquier $n \geq 1$, motivados por sus investigaciones en la teoría de curvas. Una de las consecuencias más fructíferas de ese nuevo enfoque fue la relación entre las series lineales sobre una curva suave C y morfismos al espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Bien entendido, dada una función $z \in C \mapsto (P_0(z) : \cdots : P_n(z)) \in \mathbb{P}^n$ donde los $P_i(z)$ son polinomios homogéneos y del mismo grado, para cada $i = 0, \ldots, n$, tenemos que si C_0 es la imagen de C por este morfismo, los puntos de intersección de C por la serie lineal de curvas $\sum_j \alpha_j P_j(x,y) = 0$ corresponden a las imágenes inversas por este morfismo de los puntos de intersección de C_0 con hipersuperficies. Para mayores detalles ver [10]. El estudio de las propiedades y la información que estos morfismos podían dar de una curva suave de género g inauguran lo que conocemos hoy como la teoría de Brill-Noether. Una manera rápida de entender quizás su importancia dentro de la teoría de curvas (y, *a fortiori* de la geometría del espacio moduli $\mathcal{M}_g$ que parametriza las clases por isomorfismo de estas) es a través de la siguiente analogía (ver [30]): la teoría de Brill-Noether es la teoría de representaciones de una curva (abstracta) C.

En estos términos, la pregunta más importante de la teoría de Brill-Noether es: ¿para qué valores de r y d una curva suave de género g admite un morfismo (no-degenerado) de grado d a $\mathbb{P}^r$? Como se discutirá en la segunda sección de este artículo, una condición necesaria para garantizar la existencia de dicho morfismo es que el número, que actualmente es conocido como número de Brill-Noether, $\rho := g - (r+1)(g-d+r)$ sea no negativo. Este resultado es una de las direcciones de un teorema conocido hoy como teorema de Kempf/Kleiman-Laksov/Griffiths–Harris/Brill-Noether (ver [31], capítulo 5 o [4], capítulo 5, teorema 1.1). En lo sucesivo se referenciará este como teorema de Brill-Noether. Este fue un resultado que Brill y Noether solo conjeturaron a partir de su validez para curvas de grado pequeño. Ahora bien, ¿es la condición de $\rho \geq 0$ suficiente para garantizar la existencia de un morfismo? En realidad, la suficiencia de esta condición no es válida para cualquier curva suave, como también se discutirá en la misma sección, solo para aquellas que sean *generales*. Este último concepto es lo que obliga a la introducción de elementos variacionales en la teoría, es decir, en lugar de estudiar propiedades sobre una sola curva, se estudia la validez de estas propiedades para una familia de curvas. El pionero de esta idea fue Castelnuovo, quien investigó un caso especial del teorema de Brill-Noether. Veinte años más tarde, Severi sugiere que las ideas de Castelnuovo podían adaptarse para una prueba general del teorema. En términos simples, Severi sugiere considerar una familia de curvas $\{C_t\}$ con conjunto de parámetros $\mathbb{C}$, con C_0 una curva singular $g-$nodal estudiada por Castelnuovo y C_t, para cada $t \neq 0$, una curva suave. Para mayores detalles, ver [31] p.241-243. Uno de los problemas con este enfoque, y que inaugura la investigación en lo que conocemos hoy por teoría de la deformación, es determinar si la familia de series lineales sobre $\{C_t\}_{t\neq 0}$ “converge” a una serie lineal sobre C_0.

El esfuerzo de varios matemáticos por formalizar estas últimas ideas y consolidar una teoría, entre ellos Kempf, Kleiman, Laksov, Griffiths, Gieseker, entre otros, alcanza su recompensa con el trabajo de Eisenbud–Harris [14], el cual marcaría el inicio de la teoría de series lineales límite. Mayores detalles serán expuestos en las Secciones 2 y 3 de este artículo. En ese trabajo pionero Eisenbud y Harris simplifican y generalizan el teorema de Brill-Noether. Pero el éxito con esta nueva teoría no acaba ahí. Ellos probaron en una colección de artículos subsecuentes diversas aplicaciones al estudio de la geometría de los espacios moduli de curvas $\mathcal{M}_g$ y, de su compactificación, el espacio moduli de curvas estables $\overline{\mathcal{M}}_g$. Además, surgieron importantes líneas de investigación sobre aspectos fundamentales relacionados a deformaciones de familias de curvas suaves. Entre ellas, el estudio de la deformación de estructuras definidas sobre ellas cuando estas degeneran a una curva singular, como por ejemplo, las relacionadas al espacio que parametriza las series lineales $G^r_d(C)$, y el de su compactificación, el espacio que parametriza las series lineales límite. Estos serán los tópicos que se discutirán con mayor detalle en las secciones 3, 5 y 6 de este artículo.

Con respecto al desarrollo de la teoría de las series lineales límite, una de sus mayores limitaciones es que no es expuesta en toda su generalidad. De forma más precisa, la teoría desarrollada por Eisenbud y Harris es solo para un tipo de curvas estables, las llamadas curvas de tipo compacto. Esto se debe en gran parte a que, para este tipo de curvas, la variedad de Picard es separable y completa, es decir, el límite de un fibrado de rectas será un fibrado de rectas. Esto para todo tipo de curvas singulares no es cierto. Las tentativas de construcción de teorías más generales han ido de la mano de niveles serios de dificultad, como por ejemplo [18] donde se presentan los límites de series lineales canónicas sobre una curva de dos componentes que no es de tipo compacto. Esto ha conllevado a explorar herramientas que han hecho parte de la evolución del concepto de serie lineal sobre una curva suave, pero que solo hasta hace pocos años atrás mostró avances, éstas son los morfismos de Abel. En el mismo trabajo que ya fue citado de Riemann [47] es donde se introduce por primera vez este tipo de funciones. Recomendamos [23] Capítulo 9, para la evolución histórica de este concepto. En términos modernos, estos morfismos asocian a cada divisor efectivo de grado fijo d sobre la curva un divisor de grado 0 sobre ésta. Lo interesante, y que ya había sido descubierto por Abel, es que sus fibras parametrizan series lineales sobre la curva. Así, teniendo en cuenta las dificultades relacionadas a la generalización de las series lineales límite sobre curvas, algunos especialistas en lugar de estudiar límites de series lineales estudian deformaciones de morfismos de Abel. Estos son los temas que desarrollaremos en las Secciones 2, 4, 5 y 6. Haremos en la primera una introducción formal de estos morfismos y en las dos secciones restantes se presenta una discusión más exhaustiva de la relación de estos morfismos y los límites de series lineales. Así mismo, comentaremos acerca de su relación con las actuales teorías que llevarán a la generalización del concepto de serie lineal límite a cualquier tipo de curva estable.

El artículo está organizado como sigue: en la primera sección se darán la definición y principales resultados clásicos acerca de las series lineales sobre curvas suaves, como también lo relacionado a su *espacio de configuraciones* $G^r_d(C)$, esto es, el espacio moduli que las parametriza. Se presenta una breve introducción a los morfismos de Abel y su relación con las series lineales cuyo principal resultado es conocido como el teorema de Abel-Jacobi. En la segunda sección, serán exploradas las ideas detrás de las construcciones por Eisenbud–Harris y Osserman de las series lineales límite siempre que la curva (singular) límite corresponda al *toy case*. En cada caso, son analizadas sus principales consecuencias, fortalezas y carencias, lo que motivará la introducción de las teorías de Esteves-Nigro-Rizzo, que serán presentadas en Sección 5. Previo a esta presentación, en la Sección 4, se ilustra la relación entre las series lineales límite y los morfismos de Abel, definidos ahora sobre curvas singulares. Este será el ingrediente adicional que permitirá juntar e introducir la teoría que se expondrá en la Sección 5. Este será el aliciente para la construcción de una teoría general de series lineales límite sobre cualquier tipo de curva estable, como se verá en la Sección 6. Para finalizar, también en la Sección 6 se discutirán los nuevos avances en esta área y los problemas derivados a partir de estos nuevos enfoques.

Parte de este trabajo se encuentra en la tesis [48] del autor. El autor agradece a todas las personas que hicieron posible este trabajo, principalmente al profesor Eduardo Esteves. También agradece a los jurados por todos sus valiosos aportes, críticas y sugerencias, todas ellas en aras de mejorar este escrito.

2. Series lineales sobre curvas: generalidades

2.1. Definición y principales resultados

En esta sección, C representará una curva proyectiva, suave, conexa, de género $g \geq 0$ definida sobre $\mathbb{C}$. La búsqueda de propiedades geométricas de C está íntimamente relacionada al estudio del espacio $\mathbb{C}(C)$ de las funciones regulares $f : C \to \mathbb{P}^1$, esto es, funciones $f(x) = [p_0(x) : p_1(x)]$ donde p_i son polinomios homogéneos del mismo grado, sin ceros en común. Para iniciar de manera sistemática este rastreo se da partida en la teoría de divisores sobre C. En esta dirección, los subespacios vectoriales de dimensión finita $\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathbb{C}(C); (f) \geq -D\}$ son indispensables para alcanzar dicho propósito. Aquí el *divisor* $D = \sum n_P P$ es una suma formal de puntos $P \in C$, $n_P \in \mathbb{Z}$ (entendido como la "multiplicidad en el punto P") con casi todo $n_P = 0$. El *divisor principal* $(f) := (f)_0 - (f)_\infty$ se asocia a la función regular f y está compuesto por los divisores de ceros y polos, respectivamente:

$$(f)_0 = \sum_{f(P)=[0:1]} m(f;P)P \qquad (f)_\infty = \sum_{f(P)=[1:0]} m(f;P)P$$

donde $m(f;P)$ corresponde, respectivamente, al *orden* del cero o el polo de f en el punto P. *Grosso modo*, este es un espacio de funciones cuyos ceros y polos tienen su multiplicidad controlada por las multiplicidades de los puntos en D.

Con relación a este enfoque los espacios $|D| = \{D+(f) |\, f \in \mathcal{L}(D)\}$, de divisores *efectivos linealmente equivalentes* a D, en la literatura clásica se llaman *series lineales* sobre C. Estos se identifican con un espacio proyectivo de dimensión $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(D)) - 1$. De forma más general, el conjunto de divisores $\mathcal{D}$ se llama de *serie lineal de grado* d y *dimensión* r si $\mathcal{D} = \{D + (f) |\, f \in V - \{0\}\} \subseteq |D|$ para algún subespacio vectorial $V \subseteq \mathcal{L}(D)$ no-nulo, $d = \sum n_P$ y $r + 1 = \dim_{\mathbb{C}}(V)$. En el caso que $\mathcal{D} = |D|$ la serie lineal es llamada *completa*.

A partir de la correspondencia entre divisores D y fibrados vectoriales $\mathcal{O}(D)$ de dimensión 1 sobre C, [32] p.143-144 y p.128-129, en lo sucesivo una *serie* *lineal de grado d y dimensión r* será el par $\mathfrak{g} = (L, V)$, donde L es un fibrado vectorial sobre C de dimensión 1 y grado d y $V \subseteq \Gamma^0(C, L)$ un subespacio vectorial no-nulo de secciones globales sobre la curva C de dimensión $r+1$, al cual se le asocia el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$. Es frecuente la notación g_d^r para indicar los pares de esta forma.

Las series lineales sobre curvas proyectivas suaves son una valiosa herramienta tanto en el estudio de propiedades geométricas intrínsecas y extrínsecas de la curva, como en problemas de clasificación. En efecto, para argumentar esta afirmación se presentarán algunas de las construcciones más importantes relacionadas con series lineales sobre curvas. Con estas se pretende facilitar la comprensión de estos objetos. Además, será la estrategia para motivar los párrafos sucesivos dedicados al estudio de esta herramienta y, más aún, la de justificar (en cierta medida) a Eisenbud y Harris cuando afirmaron: "most problems of interest about curves are, or can be, formulated in terms of linear series" [14], p.339.

Primero se presentarán los problemas intrínsecos. Para esto, considere la serie lineal $\mathfrak{g} := (L, V)$ de grado d y dimensión r sobre C y un punto $P \in C$. Se define el entero $\epsilon(P)$ como el orden de $\mathfrak{g}$ en P si es el orden de anulamiento de alguna sección de $V - \{0\}$ en P. Las secciones de V con orden de anulamiento de por lo menos i en P forman un subespacio vectorial V_i de V. Es fácil ver que para cada i se cumplen

$$V_i \supseteq V_{i+1}, \qquad V_0 = V \qquad \text{y} \qquad V_i = 0 \qquad \text{si} \qquad i > d.$$

En consecuencia solo podrán existir $r+1$ órdenes distintos de $\mathfrak{g}$ en P, que organizados en forma creciente satisfacen:

$$0 \leq \epsilon_0(P) < \epsilon_1(P) < \cdots < \epsilon_r(P) \leq d \quad \text{y} \quad i \leq \epsilon_i(P) \leq d \qquad \forall i = 0, \ldots, r.$$

El número entero no-negativo $\operatorname{wt}(P) := \sum_{i=0}^{r} (\epsilon_i(P) - i)$ es llamado peso de ramificación de $\mathfrak{g}$ en P, donde los $\alpha_i(P) := \epsilon_i(P) - i$ forman una secuencia no-creciente de enteros no-negativos, llamada secuencia de ramificación de $\mathfrak{g}$ en P. En particular, $0 \leq \operatorname{wt}(P) \leq (r+1)(d-r)$ y en el caso que $\operatorname{wt}(P) > 0$ P es llamado punto de ramificación de $\mathfrak{g}$.

Para el caso especial en que $r = g-1$ y $d = 2g-2$, donde g es el género de la curva C, se prueba que existe una única serie lineal de grado $2g-2$ y dimensión $g-1$: el par $\mathfrak{g}_W := \big(\omega_C, H^0(C, \omega_C)\big)$, con ω_C el *fibrado canónico* o fibrado co-tangente de C. En este caso, los puntos de ramificación de $\mathfrak{g}_W$ se llaman *puntos de Weierstrass*, que corresponden a uno de los invariantes intrínsecos más importantes asociados a la curva C. Estos son finitos y la suma de todos sus pesos de ramificación es igual a $(g-1)g(g+1)$, [4], p.41 o [29], p.273-277. Una aplicación de este invariante, el cual es un resultado crucial para determinar la representabilidad (fina) por un esquema proyectivo del problema moduli para curvas proyectivas suaves de género g, es que el grupo $\mathrm{Aut}(C)$ de los automorfismos de C es finito para $g \geq 2$, ver [4], p.45 o [46], p.123-129. En realidad, el resultado acerca los puntos de Weierstrass y sus pesos es solo un caso particular de lo que ocurre con los puntos de ramificación de un fibrado vectorial sobre curvas, conocido como la *fórmula de Plücker*: a cada serie lineal $\mathfrak{g}$ se le asocia el divisor de ramificación $W(\mathfrak{g})$ definido por $[W(\mathfrak{g})] := \sum\limits_{P \in C} wt(P)[P]$ y la fórmula garantiza que el grado de este divisor es igual a

$$\sum_{P \in C} wt(P) = (r+1)(d + r(g-1)).$$

Observe que al tomar $r = g-1$ y $d = 2g-2$ en esta igualdad, obtenemos el resultado anterior sobre los puntos de Weierstrass.

La fórmula presentada aquí es la versión general de las fórmulas de Plücker clásicas las cuales están relacionadas a la igualdad entre ciertos invariantes numéricos de la curva C y los de su curva dual C^* y viceversa. La geometría proyectiva clásica y el estudio de los primeros invariantes intrínsecos asociados a curvas proyectivas suaves estaban relacionados a estas formulaciones, ver [4] p.39-40 o [29] p.263-273.

A pesar de que lo tratado hasta ahora solo involucra curvas suaves definidas sobre $\mathbb{C}$, destacamos que la generalización de las series lineales a curvas suaves definidas sobre cuerpos finitos ha rendido importantes consecuencias. Precisamente, la generalización de los puntos de ramificación para una serie lineal $\mathfrak{g}$, llamados de *puntos de* $\mathfrak{g}-$*osculación* en este contexto, permitió dar una nueva prueba y también mejorar la cota de la hipotésis de Riemann de curvas suaves definidas sobre cuerpos finitos. Para mayores detalles ver [50].

Al respecto de los problemas relacionados a la geometría extrínseca de C y que atañen a las series lineales, estos son los de existencia de ciertos morfismos de C al espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. En terminos más precisos: cada morfismo $f : C \to \mathbb{P}^r$ no-degenerado (es decir, que su imagen no esté contenida en ningún hiperplano de $\mathbb{P}^r$ para no tener que aumentar r arbitrariamente), de grado fijo d (entendido aquí como el grado de la imagen $f(C)$ veces el grado del morfismo $C \to f(C)$) y, a menos de cambios proyectivos de coordenadas, (esto es, $f \sim g$ si y solo si existe $p \in PGL(r+1)$ tal que $g = f \circ p$), corresponde a una serie lineal $\mathfrak{g} = (L, V)$ de grado d y rango r, libre de punto base (esto es, $\epsilon_0(P) = 0$ para cada $P \in C$). En este orden de ideas, podemos plantearnos el siguiente problema: ¿para cuáles tripletas de enteros no-negativos (g, r, d), toda curva suave de género g admite una serie lineal de grado d y dimensión r? O de forma equivalente, ¿toda curva suave de género g admite un morfismo (libre de punto base) no-degenerado a $\mathbb{P}^r$ de grado menor o igual a d? La mejor solución que se tiene a este problema es lo que conocemos hoy como *teorema de Brill–Noether*, el cual tiene implicaciones profundas en el estudio de las series lineales. Posteriormente daremos más detalles sobre el planteamiento y resultados que intervienen en la solución a esta pregunta.

Finalmente, al respecto de la clasificación de curvas suaves, un antiguo problema es el de garantizar la existencia de familias de curvas suaves con género fijo tal que ella sea *general*. La condición de que la familia sea general puede ser interpretada informalmente en que cada integrante de esta colección sea definido por un número fijo y libre de parámetros. En términos un poco más precisos, una familia de curvas suaves $\mathcal{C}$ parametrizada por B es un morfismo plano $f : \mathcal{C} \to B$ donde cada fibra $f^{-1}(b)$, para cada $b \in B$, es una curva suave. La condición de f ser plano es el concepto algebraico que nos permite garantizar las mismas propiedades geométricas a cada integrante de $\mathcal{C}$, por ejemplo, que todas ellas tengan el mismo género g. Ahora la familia será (moduli) general si el morfismo $\mu : B \to M_g$, donde a cada $b \in B$ le asigna la clase de equivalencia por isomorfismo de la curva definida por la fibra $[f^{-1}(b)]$, es tal que su imagen es densa en M_g. Aquí M_g es el representante grueso del espacio moduli que parametriza las clases por isomorfismo de curvas suaves de género g.

Se puede decir que garantizar la existencia de familias de curvas generales ha sido un problema que ha permitido en muchos aspectos comprender la geometría del espacio M_g. En principio, para géneros pequeños es fácil exhibir familias generales de curvas. Por ejemplo, toda curva suave de género 2 es determinada por una ecuación del tipo $y^2 = h(x)$ con $h = x^6 + \sum a_{5-i}x^i$ un polinomio mónico de grado 6, libre de cuadrados, esto es, los $(a_0, \dots, a_4)$ tomados en un abierto de $\mathbb{C}^5$. Para género ≥ 3, tenemos la dicotomía: las curvas suaves son o no *hiperelípticas*. En efecto, una curva es hiperelíptica si admite una serie lineal g_2^1. En términos de morfismos al espacio proyectivo esto equivale a la existencia de un morfismo de grado 2 de C a la recta $\mathbb{P}^1$. Ahora, en el caso en que C no sea hiperelíptica la serie lineal $\mathfrak{g}_W := \big(\omega_C, H^0(C, \omega_C)\big)$ definida por el fibrado canónico determina un morfismo $\varphi : C \to \mathbb{P}^{g-1}$ de grado $2g-2$ que en realidad es una inmersión llamada morfismo canónico. La imagen $C \cong \varphi(C)$ es una curva suave de grado $2g-2$ llamada curva canónica. En el caso $g = 3$, curvas canónicas serán cuárticas planas que varían dentro de una serie lineal y así parametrizadas por parámetros libres. Afirmaciones similares valen para $g = 4$ y $g = 5$: curvas canónicas son intersecciones completas en $\mathbb{P}^3$ y $\mathbb{P}^4$, respectivamente. Sin embargo, como fue probado por Gieseker ([26]) (y luego simplificado por Eisenbud–Harris ([13]) usando series lineales límite) la noción de que una curva suave sea general puede estar ligada a condiciones técnicamente complejas. En efecto, todas ellas son curvas de Petri generales, las cuales son difíciles de exhibir explícitamente para géneros arbitrarios (por ejemplo, ver [25]). En estos términos, la búsqueda de familias generales de curvas empleó otros enfoques: construir familias $f : \mathcal{C} \to B$ sobre espacios de parámetros con propiedades especiales, por ejemplo, dados por un abierto del espacio afín. En este caso la existencia del morfismo $\mu : B \to M_g$ garantiza sobre M_g propiedades geométricas que permiten su clasificación. Determinar la existencia de este tipo de familias generales es conocido como el problema de la *uniracionalidad* de M_g. Este problema tiene una larga historia, siendo Max

Noether (aprox. 1885) el primero en probar la uniracionalidad de M_g para $g \leq 7$. Un resultado contundente en esta dirección, probado por Eisenbud–Harris a partir de la aplicación de las series lineales límite y la teoría de Brill-Noether, es que este tipo de familias no existen para géneros $g \geq 23$, en otras palabras, M_g no es uniracional para $g \geq 23$.

2.2. Sobre la construcción del espacio moduli de series lineales

Esta sección se reserva al estudio de las series lineales por sí mismas. En ese sentido, cierta experiencia y conocimiento al respecto de la construcción de espacios moduli y de aspectos básicos de la teoría de variedades algebraicas será necesaria, pero no indispensable.

Como antes, C representará una curva proyectiva, suave, conexa de género g. En principio, es posible garantizar la existencia de un espacio moduli proyectivo

$$G_d^r(C) := \Big\{(L,V)|\, L \in \mathcal{P} := \mathrm{Pic}^d(C),\, V \subset \Gamma(C,L),\, \dim(V) = r+1\Big\}$$

que parametriza series lineales sobre una curva C, donde $\mathcal{P}$ es el grupo algebraico de Picard que parametriza las clases de equivalencia (por equivalencia lineal) de divisores de grado d sobre C y $\Gamma(C,L)$ es el espacio de secciones globales de L sobre C. Precisamente, $G_d^r(C)$ es el espacio que representa el functor que asocia a cada esquema T un fibrado vectorial de dimensión 1 $\mathcal{L}$ sobre $C \times T$ de grado relativo d sobre T y un subfibrado $\mathcal{V}$ de rango $r+1$ de $p_{T*}(\mathcal{L})$ tal que el par $(\mathcal{L},\mathcal{V})$ corresponde a una *familia de series lineales* sobre $C \times T/T$. Por esto último entenderemos que, dado cualquier diagrama cartesiano,

$$\begin{array}{ccc} C \times S & \xrightarrow{\tilde{f}} & C \times T \\ {\scriptstyle ps}\downarrow & & {\scriptstyle pr}\downarrow \\ S & \xrightarrow{f} & T, \end{array}$$

y $\mathcal{V} \subseteq p_{T*}(\mathcal{L})$ como antes, la composición de los morfismos naturales $f^*\mathcal{V} \hookrightarrow f^*p_{T*}(\mathcal{L}) \hookrightarrow p_{s*}\tilde{f}^*\mathcal{L}$ es siempre inyectiva.

Su existencia es esbozada como sigue: $G_d^r(C)$ es el esquema de ceros de un morfismo ν de fibrados sobre la Grassmanniana relativa $G := \mathrm{Grass}_{\mathcal{P}}(r+1, p_{2*}\mathcal{M})$. Aquí, $\mathcal{M} := \mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{O}_C(np)$ es un fibrado vectorial sobre $C \times \mathcal{P}$, donde $\mathcal{L}$ es el fibrado universal (de Poincaré) sobre $C \times \mathcal{P}$, con $p_1 : C \times \mathcal{P} \to C$, $p_2 : C \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ las proyecciones canónicas. Aquí $n >> 0$ es escogido de tal forma que $p_{2*}\mathcal{M}$ sea realmente un fibrado. En concreto, $G_d^r(C)$ es el esquema de ceros de la composición:

$$\nu : \mathcal{V} \hookrightarrow \pi^* p_{2*}\mathcal{M} = q_{2*}(Id,\pi)^*\mathcal{M} \longrightarrow q_{2*}(Id,\pi)^*\mathcal{M}|_{np\times\mathcal{P}}$$

donde $\mathcal{V}$ es el subfibrado universal de G y los morfismos involucrados en esta expresión satisfacen el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & C \times G \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "(\mathrm{Id},\pi)"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ C & C \times \mathcal{P} \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & \mathcal{P}. \end{tikzcd}$$

Para mayores detalles ver [4], Capítulo IV, §3. Sabemos que $\mathcal{V}$ es un fibrado vectorial de rango $r+1$ y $\mathcal{M}|_{np\times\mathcal{P}}$ es un fibrado vectorial de rango n, en consecuencia cada componente de la variedad proyectiva $G^r_d(C)$ tiene codimensión a lo más $(r+1)n$. En otras palabras, cada componente tiene dimensión al menos

$$\begin{aligned} \dim(G) - (r+1)n &= g + (r+1)(n+d+1-g-(r+1)) - (r+1)n \\ &= (r+1)(d-r) - gr \\ &=: \rho(g,d,r). \end{aligned}$$

El número $\rho(g,d,r)$ es llamado de *número de Brill–Noether*. Para una descripción completa de $G^r_d(C)$ y $\rho(g,d,r)$, en el caso que g, d y r son pequeños, ver [4], Capítulo V, p.206–212.

Se dice que una curva C de género g *satisface la condición de Brill–Noether* si para cada par (d,r) con $\rho(g,d,r) < 0$ no existe una g^r_d sobre C. Como es de esperarse, este número y condición están relacionadas con el teorema de Brill-Noether y, por el cálculo de la dimensión anterior, con el espacio moduli $G^r_d(C)$ de series lineales. Por ejemplo, curvas de género 0 o 1 satisfacen la condición de Brill–Noether. Por el contrario, no toda curva de género $g \geq 3$ la satisface. En efecto, si C es curva hiperelíptica (con $g \geq 3$) entonces C no cumple la condición: ya que C admite un g^1_2 por definición, se sigue

$$\rho(g,2,1) = (1+1)(2-1) - g = 2 - g < 0.$$

A la luz de este contexto es el momento propicio de presentar el teorema conocido como de Brill–Noether:

Teorema 2.1. *Una curva general proyectiva C, suave, conexa y de género $g \geq 2$ sobre $\mathbb{C}$ admite una g^r_d si y sólo si $\rho(g,d,r) \geq 0$; en caso afirmativo, $\rho(g,d,r)$ corresponde a la dimensión (pura) del espacio moduli proyectivo $G^r_d(C)$ de series lineales sobre C de dimensión r y grado d.*

El término “general” en la hipótesis hace referencia a la existencia de un espacio clasificante, que en este caso es el espacio moduli de curvas M_g en donde todos los objetos de una misma clase, a menos de casos particulares, satisfacen la propiedad requerida. De esta forma, el término corresponde exactamente a la existencia en M_g, con $g \geq 2$, de un abierto denso donde cada clase (de equivalencia por isomorfismo) en este abierto satisface la propiedad de Brill–Noether.

Es importante resaltar que Brill y Noether no dieron una demostración de este teorema, pero sí una aproximación heurística para la dimensión ([28], p.238–239). La parte del "si" fue probada independiente por Kempf (ver [33]) y Kleiman–Laksov (ver [34] y [35]). En ambos casos sus argumentos son aplicables a cualquier tipo de curvas proyectivas, suaves y conexas sobre $\mathbb{C}$, es decir, se puede prescindir de la hipótesis de generalidad en este caso.

Los argumentos en la dirección del "sólo si" dejan en evidencia una de las técnicas más fructíferas en el estudio de propiedades de una curva suave y sobre la cual Eisenbud–Harris basaron sus investigaciones y aplicaciones, esta es la técnica por *deformación*. En términos coloquiales, esta técnica consiste en relegar el análisis de ciertas propiedades sobre curvas suaves a un análisis donde también se incluyan curvas singulares, a partir de admitir curvas singulares (típicamente nodales) sobre familias de curvas suaves. Este enfoque permitió el estudio y comprensión de la estructura del espacio moduli $\overline{\mathcal{M}}_g$ de curvas estables, compactificación del espacio $\mathcal{M}_g$ de curvas suaves. Además, introdujo nuevas técnicas y, así mismo, nuevos espacios moduli como los de *series lineales límite*.

La primera prueba completa de esta parte del teorema fue dada por Griffiths–Harris (ver [28]) basados en argumentos por deformación propuestos por Severi, quien a su vez había perfeccionado los argumentos de Castelnuovo, pionero en los análisis de propiedades por deformación. Más tarde, Eisenbud–Harris (ver [14]), siguiendo un trabajo de Gieseker (ver [26]), simplifican y generalizan la prueba del teorema, a partir de la noción de *serie lineal límite* a la cual nosotros le dedicaremos secciones posteriores.

Cabe anotar que no todas las demostraciones de esta dirección del teorema apelan a argumentos por deformación. En efecto, Lazarsfeld en [36] usando argumentos relacionados a fibrados vectoriales sobre una clase general de superficies, llamadas $K3$, prueba que las secciones de estos corresponden a curvas generales que satisfacen la propiedad de Brill-Noether. Parafraseando lo hecho por Lazarsfeld, su objetivo inicial es producir una sola curva suave de género g que tenga la propiedad de Brill-Noether, ya que esta última condición es una condición abierta en M_g. Así, su próximo objetivo, es construir esta curva como una sección hiperplana a una superficie $K3$. En [3], XXI,§7 es posible hallar una prueba que simplifica los argumentos de la referencia pionera [36].

Por otra parte, lo relacionado al estudio de propiedades de estructura de $G^r_d(C)$ como conexidad (teorema de Fulton-Lazarsfeld), suavidad (teorema de Gieseker), irreducibilidad, entre otras características especiales relacionadas a este espacio, recomendamos [4] capítulos IV y VII, [3] capítulo XXI.

2.3. Morfismos de Abel y series lineales

Existen dos conceptos que serán desarrollados a seguir, relacionados a las fibras del morfismo de Abel(-Jacobi): familias de divisores efectivos y series lineales completas. Precisamente, sea $\mathfrak{g} := (L, V)$ una serie lineal sobre una curva suave C de grado d y dimensión r. Cada sección $s \in V \setminus \{0\}$ define de manera natural un divisor de cero sobre C, $\operatorname{div}(s)$. Este es un divisor efectivo sobre C de grado d o, de forma más técnica, define un punto en $C^{(d)}$, la variedad que parametriza el conjunto de divisores efectivos de grado d, llamada producto simétrico de grado d de C. Esto no es más que el cociente del producto $C \times \cdots \times C$ de d copias de C por el grupo (finito) S_d de permutaciones de $d-$elementos. Es fácil probar que $s \in V \setminus \{0\}$ determina de forma única $\operatorname{div}(s)$, a menos de constantes ([32], p.157). En otras palabras, se da la inclusión natural $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow C^{(d)}$. En realidad, esta inclusión es de la forma $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(C, L)) \subset C^{(d)}$, donde $\mathbb{P}(\Gamma(C, L))$ es la proyectivización de las secciones de la serie lineal completa sobre C. En términos más técnicos, esta última proyectivización representa la fibra del *morfismo de Abel de grado d sobre C*, A_d. Explícitamente, A_d es definido como

$$\begin{array}{cccc} A_d & : & C^{(d)} & \longrightarrow & J_C \\ & & \sum_{i=1}^{d} Q_i & \mapsto & [\mathcal{O}_C(\sum_{i=1}^{d} Q_i - dP)], \end{array}$$

donde $J_C := \operatorname{Pic}^0(C)$ es *la variedad Jacobiana de C*, que parametriza clases de equivalencia (por equivalencia lineal) de divisores de grado 0 sobre C, y $P \in C$ es cualquier punto. En consecuencia, $A_d^{-1}(L(-dP)) = \mathbb{P}(H^0(C, L))$ y así, cada $\mathfrak{g}$ determina la inclusión $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow C^{(d)}$. Esta imagen es denotada por $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

A partir de esta relación la teoría de series lineales sobre una curva suave C admite una nueva interpretación útil en futuras generalizaciones. Específicamente, considerando $p(t) := \binom{r+t}{r}$ un *polinomio de Hilbert* y $H := p + C^{(d-1)} \subset C^{(d)}$ un divisor amplio relativo sobre $C^{(d)}$, que parametriza familias de divisores efectivos de grado d cuyo soporte contiene el punto fijo P, el esquema proyectivo

$$\operatorname{Hilb}_{A_d}^{\binom{r+t}{r}, H} := \left\{ Y \subset A_d^{-1}(L) \mid P_Y(t) = \binom{r+t}{r} \right\}$$

parametriza subespacios proyectivos de dimensión r contenidos en las fibras del mapa de Abel A_d. Este objeto está ampliamente documentado en la literatura y es llamado *esquema de Hilbert relativo del morfismo A_d*. Para una introducción a los morfismos de Abel ver [27], Capítulo V, p.153-201 y para los esquemas de Hilbert ver [31], Capítulo I, p.5-12 o [23], Capítulo II.

En conclusión, bajo este enfoque la asignación $\mathfrak{g} \mapsto \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ es formalmente descrita en términos del morfismo:

$$\begin{array}{ccccc} \Phi & : & G_d^r(C) & \longrightarrow & \operatorname{Hilb}_{A_d}^{\binom{r+t}{r}, H} \\ & & \mathfrak{g} & \mapsto & \mathbb{P}(\mathfrak{g}). \end{array} \tag{1}$$

Finalmente, el Teorema de Abel, que originalmente se refiere a sumas de ciertas integrales elípticas a lo largo de curvas no-racionales (ver por ejemplo [46], p.135), es interpretado en términos modernos como

Teorema 2.2 (**Abel**. [23], Capítulo 9)**.** *El morfismo Φ en (1) es un isomorfismo.*

En particular, la asignación $\mathfrak{g} \mapsto \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ es bien comportada sobre familias de curvas suaves. El buen comportamiento significa que si tenemos una familia de series lineales sobre una familia de curvas suaves, entonces ésta es traducida como una familia plana de subesquemas cerrados de las fibras del mapa de Abel A_d.

3. Generalidades sobre las series lineales límite

3.1. Enfoque y construcción por Eisenbud y Harris

El concepto de serie lineal límite (abreviamente sll) fue introducido por Eisenbud y Harris en los años ochenta. Ellos obtuvieron importantes consecuencias a partir de la aplicación de este en diversas situaciones, como, por ejemplo, resultados sobre la geometría del espacio moduli de curvas $\mathcal{M}_g$ (ver [12]), del límite por deformación de puntos de Weierstrass (ver [11]), generalización del teorema de Brill-Noether (ver [14]), entre otras. La técnica detrás de estos resultados es descrita, *grosso modo*, por el análisis de propiedades geométricas vía deformaciones a partir de curvas irreducibles suaves a curvas reducibles típicamente nodales. En el caso de una serie lineal límite, la palabra límite hace referencia al límite por la deformación de series lineales definidas sobre familias de curvas suaves a una curva singular, que corresponde a la fibra especial de la familia.

A continuación se dará una visión general de esta técnica. Para esto se fijará un cierto contexto. La técnica de Eisenbud y Harris es aplicable a curvas X de *tipo compacto*, esto es, curvas para las cuales $\mathrm{Pic}(X)$ es *universalmente cerrado y separable* ([31], p.249-250). No obstante, en esta sección se tratarán curvas de la forma $X := Y \cup Z$, donde Y y Z son componentes irreducibles suaves que se interceptan en un único nodo $P \in X$. La razón para esta elección es que la teoría de Osserman y sus generalizaciones, ambas a ser presentadas en secciones posteriores, son basadas en este caso simple.

Fijado este contexto, considere una familia (plana y proyectiva) de curvas $\mathcal{X}/B$, donde la base es elegida por $B := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$, el espacio total $\mathcal{X}$ es regular, la fibra genérica $\mathcal{X}_\eta$ es una curva suave y la fibra especial es la curva X. Una familia de curvas con estas características es llamada *suavización regular* de X. A partir del hecho que $\mathcal{X}$ es regular se sigue que:

(1) Y y Z son divisores de Cartier en $\mathcal{X}$ y todo divisor en $\mathcal{X}$ soportado sobre X es una combinación $\mathbb{Z}-$lineal de Y y de Z. También, debido a que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Y+Z)$, se obtiene $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(iY) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-iZ)$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. En otras palabras, cada combinación $\mathbb{Z}-$lineal de Y y de Z es reducida a múltiplos sobre una de las componentes ([31], p.253-254).

(2) Para cada fibrado vectorial $\mathcal{L}_\eta$ de dimensión 1 sobre $\mathcal{X}_\eta$ existe un fibrado vectorial $\mathcal{L}$ también de dimensión 1 sobre $\mathcal{X}$, tal que $\mathcal{L}|_{X_\eta} \cong \mathcal{L}_\eta$, conocido como la extensión de $\mathcal{L}_\eta$ a $\mathcal{X}$. No obstante, esta extensión no es única,

debido a que $\mathcal{L}(iY) := \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(iY)$, con $i \in \mathbb{Z}$, son también extensiones (en efecto todas, [31], p.253-254) de $\mathcal{L}_\eta$.

La existencia de diferentes extensiones para cada $\mathcal{L}_\eta$ sobre $\mathcal{X}$ significa que el esquema de Picard relativo $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}/B)$ es universalmente cerrado pero no separado. Sin embargo, la situación no es la misma sobre los espacios vectoriales: si $\mathcal{L}$ es un fibrado vectorial de dimensión 1 sobre $\mathcal{X}$ y $\mathcal{V}_\eta \subset \Gamma(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{L}|_{\mathcal{X}_\eta})$ es un subespacio vectorial de dimensión $r+1$, entonces existe una única extensión $\mathcal{V} \subset H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$, definida por $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\eta \cap H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ ([31], p.254-255).

Una situación muy diferente se dará si se fija el grado de la extensión $\mathcal{L}$: en este caso es bien sabido que el esquema de Picard es separado y por tanto propio. En consecuencia, al considerar una serie lineal $(\mathcal{V}_\eta, \mathcal{L}_\eta)$ de grado, por ejemplo, d y dimensión r, existe una colección de extensiones $(\mathcal{V}_i, \mathcal{L}_i)$ sobre $\mathcal{X}$, donde $\mathcal{L}_i$ es únicamente determinado por la condición de tener grado $d-i$ sobre la componente Y y grado i sobre la componente Z. En este caso, se dice que $\mathcal{L}_i$ tiene *bi-grado* $(d-i, i)$ sobre X.

La teoría de series lineales límite desarrollada por Eisenbud–Harris sólo considera los fibrados vectoriales de dimensión 1 de "grados extremos", esto es, dados por los pares $(\mathcal{V}_0, \mathcal{L}_0)$ y $(\mathcal{V}_d, \mathcal{L}_d)$ donde $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_d$ tienen bi-grados $(d, 0)$ y $(0, d)$ sobre X, respectivamente. En realidad, para sus aplicaciones este tipo de pares fueron suficientes.

Observe que al considerar $L_Y := \mathcal{L}_0|_Y$ y $L_Z := \mathcal{L}_d|_Z$, las restricciones de $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_d$ a las componentes Y y Z, respectivamente, estos serán fibrados de grado d sobre Y y Z. Más aún, la restricción de sus respectivos espacios de secciones $\mathcal{V}_0|_Y$ y $\mathcal{V}_d|_Z$ pueden ser identificados como subespacios de $V_Y \subseteq \Gamma(Y, L_Y)$ y $V_Z \subseteq \Gamma(Z, L_Z)$, respectivamente. En definitiva, los pares "límites" $(\mathcal{L}_0|_Y, \mathcal{V}_0|_X)$ y $(\mathcal{L}_d|_Z, \mathcal{V}_d|_X)$ son identificados con los pares de series lineales (V_Y, L_Y) y (V_Z, L_Z) en cada componente suave.

En resumen, a partir de series lineales $(\mathcal{L}_\eta, \mathcal{X}_\eta)$ sobre la fibra genérica de una familia de curvas $\mathcal{X}/B$, Eisenbud y Harris definieron una serie lineal límite como el par $\{(L_Y, V_Y), (L_Z, V_Z)\}$ sobre la curva límite X. Pero cuidado, no se deje confundir: las series lineales límite del tipo Eisenbud–Harris contienen información acerca del nodo P de X, determinada por ciertas condiciones de compatibilidad de estas en el nodo. De forma más precisa, el primer resultado de Eisenbud–Harris orientado a entender la estructura de sus límites es el siguiente:

Proposición 3.1 ([14], Proposición 2.1)**.** *Si (L_Y, V_Y) y (L_Z, V_Z) son realizados como límite de las series lineales (L_η, V_η) sobre $\mathcal{X}_\eta$, y ϵ_i^Y, ϵ_i^Z son los órdenes de anulamiento en P de (L_Y, V_Y) y (L_Z, V_Z), respectivamente, entonces, para cada $i = 0, \ldots, r$, se satisface la siguiente desigualdad*

$$\epsilon_i^Y + \epsilon_{r-i}^Z \geq d. \tag{2}$$

Este resultado los motiva a dar la siguiente definición:

Definición 3.2 ([14] p. 346)**.** Sea X una curva con dos componentes suaves Y y Z coincidiendo en un único nodo P. El par $\mathfrak{g} := \{(L_Y, V_Y), (L_Z, V_Z)\}$ es llamado de *serie lineal límite* (que abreviamos por sll) sobre X si satisface la desigualdad (2).

Eisenbud y Harris llamaron a la sll refinada si para cada i en (2) se tiene la igualdad. En caso contrario, la sll es llamada cruda. A partir de esta distinción, ellos se centraron en estudiar las sll refinadas, debido a que su comportamiento era similar al de las series lineales sobre curvas suaves. Por ejemplo, entre los resultados que reflejan este comportamiento similar están los siguientes:

Proposición 3.3. *Bajo las hipótesis de la proposición 3.1, podemos afirmar*

(1) ([14], Proposición 1.1) Si $\mathfrak{g}$ *es una sll refinada entonces vale la fórmula de Plücker para* $\mathfrak{g}$*, esto es*

$$\sum_{Q \in X \setminus \{P\}} wt(Q) = (r+1)(d + r(g-1)).$$

(2) ([14], Proposición 2.5) $\mathfrak{g}$ *es una sll refinada si y solo si ningún punto de ramificación de* (L_η, V_η) *especializa al nodo* P *de* X*.*

Adicional a todo lo anterior, Eisenbud y Harris prueban la existencia de un espacio moduli que parametriza las sll refinadas sobre X obtenidas como límites de series lineales $(\mathcal{L}_\eta, X_\eta)$ sobre las fibras genéricas $\mathcal{X}_\eta$ de la suavización regular $\mathcal{X}/B$ de X. Sin embargo, esta variedad no es en general propia, debido a que no considera las sll crudas. En términos más precisos:

Teorema 3.4 ([14], Teorema 3.3)**.** *Sea* $\mathcal{X}/B$ *una suavización regular de* X*, con* $q_1, \ldots, q_s : B \to \mathcal{X}$ *secciones suaves y sean* $\epsilon^1, \ldots, \epsilon^s$ *secuencias de enteros satisfaciendo:* $0 \leq \epsilon_0^j \leq \epsilon_1^j \leq \cdots \leq \epsilon_r^j \leq d - r$*, para cada* $j = 1, \ldots, s$*. Entonces existe un esquema casi-proyectivo* $G := G_d^{r,\mathrm{EH}}(\mathcal{X}/B; (q_1, \epsilon^1), \ldots, (q_s, \epsilon^s))$ *sobre* B*, compatible con cambios de base, parametrizando series lineales sobre la fibra suave* $\mathcal{X}_\eta$ *de* $\mathcal{X}$ *y series lineales límite refinadas sobre* X*, todas de grado* d *y dimensión* r*, satisfaciendo las secuencias de ramificación* $(q_1(b), \epsilon^1), \ldots, (q_s(b), \epsilon^s)$*, para cualquier* $b \in B$*. Toda componente de* G *tiene dimensión* $\geq \rho + 1$*. Por otro lado, si*

$$\sum_{i,j} \epsilon_i^j = (r+1)d + \binom{r+1}{2}(2g-2)$$

o X *no admite series lineales límite crudas con las condiciones de ramificación establecidas, entonces* G *es propio sobre* B*.*

Para hacer comprensibles las próximas situaciones, se define a continuación el esquema de sll sobre la curva X del tipo Eisenbud–Harris:

$$G_d^{r,\mathrm{EH}}(X) := \{((L_Y, V_Y), (L_Z, V_Z)) \,|\, \text{satisfaciendo (2)}\}. \tag{3}$$

Este es un subesquema proyectivo del producto $G_d^r(Y) \times G_d^r(Z)$. En efecto, $G_d^{r,\mathrm{EH}}(X)$ es un subesquema cerrado del producto determinado por la unión de los esquemas definidos por los pares de series lineales satisfaciendo las condiciones de anulamiento en el nodo dadas por (2). Claramente, $G_d^{r,\mathrm{EH}}(X)$ incluye a las sll refinadas y crudas. El conjunto de las sll refinadas forman un subconjunto abierto, que denotaremos por $G_d^{r,\mathrm{EH,ref}}(X)$.

3.2. Enfoque y construcción de las sll del tipo Osserman.

Concerniente a la construcción del esquema casi-proyectivo $G_d^{r,\mathrm{EH}}$ $(\mathcal{X}/B;(q_1,\epsilon^1),\dots,(q_s,\epsilon^s))$ de Eisenbud–Harris, se pueden evidenciar dos limitaciones. La primera es la ausencia de naturalidad de la construcción, refiriéndose a que este esquema no representa ningún functor natural. La segunda es la exclusión en $G_d^{r,\mathrm{EH}}$ $(\mathcal{X}/B;(q_1,\epsilon^1),\dots,(q_s,\epsilon^s))$ de las sll crudas, lo que no permite sea un esquema propio. Por otro lado, a pesar de que $G_d^{r,\mathrm{EH}}(X)$ contenga sll crudas no es del todo claro que éste tenga una descripción funtorial.

Estas carencias son las principales razones por las que Osserman se ve motivado a introducir un nuevo enfoque. La idea detrás de la construcción de límites del tipo Osserman es, en términos muy informales, la de considerar “todos los posibles grados para un fibrado sobre X”, generalizando la idea de Eisenbud–Harris de solo considerar los grados extremos. A continuación se discute la construcción del espacio moduli de límites del tipo Osserman así como sus limitaciones, que serán las que motiven el enfoque de la teoría de Esteves–Nigro–Rizzo.

A partir de una suavización regular de X, $\pi : \mathcal{X} \to B$, fue visto que para toda serie lineal $(\mathcal{L}_\eta,\mathcal{V}_\eta)$ sobre $\mathcal{X}_\eta$ de grado d y dimensión r, existe una única extensión a $\mathcal{X}$, $(\mathcal{L}_i,\mathcal{V}_i)$ tal que $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_\eta \cap \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}_i)$ y las restricciones de $\mathcal{L}_i$ a Y y Z tienen grados $d-i$ y i respectivamente. Debido a que $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i(Y)$, esta relación induce la inclusión $\mathcal{L}_i \hookrightarrow \mathcal{L}_{i+1}$. Por otro lado, fijando la elección de un isomorfismo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Y+Z) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, obtenemos un morfismo en la dirección contraria $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i(Y) \cong \mathcal{L}_i(-Z) \to \mathcal{L}_i$. Para los espacios $\mathcal{V}_i \cap \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}(-(i+1)Z)) = \mathcal{V}_{i+1}$, los morfismos inducidos sobre las secciones globales $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}_{i+1}) \to \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}_i)$ y $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}_i) \to \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}_{i+1})$, llevan $\mathcal{V}_{i+1}$ a $\mathcal{V}_i$ y $\mathcal{V}_i$ a $\mathcal{V}_{i+1}$. Denotamos por $\varphi_i : \mathcal{V}_{i+1} \to \mathcal{V}_i$ y $\varphi^i : \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_{i+1}$ estos morfismos.

Podemos decir que, *grosso modo*, el espacio moduli de sll del tipo Osserman $G_d^{r,\mathrm{Oss}}(\mathcal{X}/B)$ parametriza las $(d+1)-$tuplas formadas por los pares $(\mathcal{L}_i,\mathcal{V}_i)$, $i = 0,\dots,d$, a partir de la elección de un fibrado vectorial de dimensión 1 $\mathcal{L} := \mathcal{L}_0$ de bi-grado $(d,0)$ sobre $\mathcal{X}$ y los $\mathcal{V}_i$ son fibra a fibra subespacios vectoriales de dimensión $(r+1)$ de los espacios de secciones globales definidos por cada fibrado $\mathcal{L}_i := \mathcal{L}_0(iY)$, respectivamente. Estos subespacios se encuentran “ligados” a través de morfismos φ_i y φ^i, esto es, $\varphi_i(\mathcal{V}_{i+1}) \subseteq \mathcal{V}_i$ y $\varphi^i(\mathcal{V}_i) \subseteq \mathcal{V}_{i+1}$. En este sentido, los pares extremos sobre la fibra especial X, como será discutido más adelante, (L_0,V_0) y (L_d,V_d) pueden ser identificados con los pares

$((L_Y, V_Y), (L_Z, V_Z))$ definidos por Eisenbud y Harris. Esto, en un cierto sentido, justifica nuestra afirmación acerca de la construcción de Osserman como la que considera todos los posibles grados. Bajo esta nueva perspectiva, Osserman en analogía a lo probado por Eisenbud–Harris concluye que

Teorema 3.5 ([42], Teorema 5.3). *Dada una suavización regular $\mathcal{X}/B$ de X, secciones suaves p_i y secuencias de ramificación $\{\alpha_i(p_j)\}$, el funtor $\mathfrak{G}^r_d(\mathcal{X}/B)$ de series lineales límite sobre $\mathcal{X}/B$, con índices de ramificación de por lo menos $\alpha_i(p_j)$ en cada p_j, es compatible con cambio de base y representable por un esquema $G^{r,\mathrm{Oss}}_d(\mathcal{X}/B)$ proyectivo sobre B. Toda componente de $G^{r,\mathrm{Oss}}_d(\mathcal{X}/B)$ tiene dimensión por lo menos $\rho(g, r, d; \alpha_i(p_j)) + dimB$, con $\rho(g, r, d; \alpha_i(p_j)) = (r + 1)(d - r) - rg - \sum_{i,j} \alpha_i(p_j)$.*

Si la dimensión de la fibra de $G^{r,\mathrm{Oss}}_d(\mathcal{X}/B)$ es exactamente $\rho(g, r, d; \alpha_i(p_j))$, entonces toda sll sobre esta fibra es obtenida por suavización de series lineales sobre sus fibras próximas.

Bien entendido, los elementos de $G^{r,\mathrm{Oss}}_d(\mathcal{X}/B)$ sobre las fibras de $\eta \neq 0$, esto es, sobre la curva suave $\mathcal{X}_\eta$, corresponden al espacio usual de series lineales G^r_d de $\mathcal{X}_\eta$ debido a que los morfismos $\mathcal{L}_i|_{\mathcal{X}_\eta} \to \mathcal{L}_{i+1}|_{\mathcal{X}_\eta}$ son todos isomorfismos y luego cada V_i es determinado únicamente por V_0.

Ahora sobre la curva límite X, cada fibrado vectorial $L_i := \mathcal{L}_i|_X$ es determinado de forma única por sus restricciones a Y y Z. Claramente, $L_i|_Z = \mathcal{L}_0(iY)|_Z \cong L_0|_Z(ip)$ y de la misma forma $L_i|_Y = \mathcal{L}_0|_Y(-iZ) \cong L_0|_Y(-ip)$. Los morfismos $L_i \to L_{i+1}$ son definidos por la inclusión canónica sobre Z y el morfismo cero sobre Y, y viceversa para los morfismos de $L_{i+1} \to L_i$. De esta forma, denotando por V_i la imagen de $\mathcal{V}_i$ por los morfismos $H^0(X, \mathcal{L}_i) \to H^0(X, L_i)$, la afirmación acerca que V_i es llevado en V_{i+1} (resp. V_{i+1} es llevado en V_i) es equivalente a que los espacios $V_i|_Z$ (resp. $V_i|_Y$) puedan ser considerados como una filtración creciente (resp. decreciente) de $V_Z := V_d|_Z$ (resp. $V_Y := V_0|_Y$). No obstante, como lo advierte Osserman ([43], p. 12): "V_i incluye, en general, estrictamente más información que $V_i|_Z$ y $V_i|_Y$, debido a la existencia y elección de secciones sobre Y y Z que pueden ser identificadas, si ambas se anulan sobre P. Esta información extra significará, en particular, que nuestro espacio de límites no es el mismo que el espacio de Eisenbud-Harris".

En lo sucesivo, el foco de atención se fijará sobre la curva límite X, en aras de especificar con mayores detalles lo que es una sll del tipo Osserman.

Dado un fibrado vectorial L de dimensión 1 sobre X, existen sucesiones cortas exactas,

$$0 \longrightarrow L|_Y(-P) \longrightarrow L \longrightarrow L|_Z \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L|_Z(-P) \longrightarrow L \longrightarrow L|_Y \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Ahora, para cada entero no-negativo i, el fibrado L_i sobre X representará el único fibrado determinado por las restricciones $L|_Y(-ip)$ y $L|_Z(ip)$. Existen morfismos naturales $\varphi^i : L_i \to L_{i+1}$ y $\varphi_i : L_{i+1} \to L_i$, definidos a partir de la composición

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_{i+1}|_Z(-p) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi_i"] & L_{i+1}|_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 & L_i|_Z \arrow[l] & L_i \arrow[l] \arrow[u, shift left, "\varphi^i"] & L_i|_Y(-p) \arrow[l] & 0. \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Observe que se satisface $\varphi^i\varphi_i = \varphi_i\varphi^i = 0$ para cada i.

Definición 3.6. Una serie lineal límite del tipo Osserman sobre X de grado d y dimensión r, con $r \leq d$, es una colección, denotada $(L, V_0, \ldots, V_d)$, que consiste de un fibrado vectorial L de dimensión 1 sobre X, con grado d al restringirse a Y y de grado 0 al restringirlo a Z. Los subespacios $V_i \subseteq \Gamma(X, L_i)$ representan espacios vectoriales de dimensión $r+1$, para cada $i = 0, \ldots, d$, tales que $\varphi^i(V_i) \subseteq V_{i+1}$ y $\varphi_i(V_{i+1}) \subseteq V_i$ para cada i.

Se define

$$G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X) = \{\mathfrak{g} := (L, V_0, \ldots, V_d)|\ V_i \underset{\varphi_i}{\overset{\varphi^i}{\rightleftarrows}} V_{i+1}\}$$

y de ahí es posible definir una *aplicación de olvido* al producto $G_d^r(Y) \times G_d^r(Z)$ por

$$\begin{array}{rccc} \rho \quad : & G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X) & \longrightarrow & G_d^r(Y) \times G_d^r(Z) \\ & \mathfrak{g} = (L, V_0, \ldots, V_d) & \mapsto & ((L_0|_Y, V_0|_Y), (L_d|_Z, V_d|_Z)) \end{array}$$

a partir de la cual Osserman obtiene un morfismo de comparación con el esquema de Eisenbud–Harris (3):

Teorema 3.7. ([43], Teorema 3.2.1) *El morfismo ρ define $G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X) \xrightarrow{\rho} G_d^{r,\mathrm{EH}}(X)$ una sobreyección de conjuntos, el cual es un isomorfismo sobre el subesquema abierto correspondiente a las series lineales límite refinadas.*

Las sll de $G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X)$, cuya imagen por ρ en $G_d^{r,\mathrm{EH}}(X)$ corresponde a sll refinadas (resp. crudas), serán llamadas refinadas (resp. crudas).

Estos últimos resultados motivan el estudio de propiedades intrínsecas a la variedad $G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X)$. Para esto, serán necesarias un par de definiciones. Para una sll $\mathfrak{g} = (L, V_0, \dots, V_d)$, asociamos a cada subespacio V_i las siguientes secuencias cortas exactas:

$$0 \longrightarrow V_i^{Y,0} \longrightarrow V_i \longrightarrow V_i|_Y \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow V_i^{Z,0} \longrightarrow V_i \longrightarrow V_i|_Z \longrightarrow 0 \tag{6}$$

donde $V_i^{Y,0}$ denota el subespacio de V_i que se anula sobre Y y $V_i|_Y$ denota la imagen en $\Gamma(Y, L_i|_Y)$ de V_i por restricción. Una construcción similar se ajusta al sustituir Y por Z. A la luz de esta notación, es posible probar que la aplicación $\varphi^i : V_i \longrightarrow V_{i+1}$ tiene núcleo $V_i^{Z,0}$ y su imagen contenida en $V_{i+1}^{Y,0}$, mientras que $\varphi_i : V_{i+1} \longrightarrow V_i$ tiene núcleo $V_{i+1}^{Y,0}$ y su imagen está contenida en $V_i^{Z,0}$. Esto induce la definición:

Definición 3.8. Una sll $\mathfrak{g} = (L, V_0, \dots, V_d)$ es llamada **exacta** si las sucesiones

$$V_i \xrightarrow{\varphi^i} V_{i+1} \xrightarrow{\varphi_i} V_i \xrightarrow{\varphi^i} V_{i+1},$$

son exactas para cada $i = 0, \dots, d-1$.

En términos numéricos la exactitud se interpreta por: $\mathfrak{g} = (L, V_0, \dots, V_d)$ es exacta si y sólo si $\mathrm{rank}(\varphi^i) + \mathrm{rank}(\varphi_i) = r$, para cada i. De esta forma, debido a que para cualquier sll $\mathrm{rank}(\varphi^i) + \mathrm{rank}(\varphi_i) \leq r$, el conjunto de sll exactas forman (por semi-continuidad, ver [32], Capítulo 3 §12) un subconjunto abierto de $G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X)$, denotado por $G_d^{r,*}(X)$.

Ejemplos de sll exactas son las sll refinadas. Sin embargo, esta inclusión es en general propia (ver [48]). En este sentido, el Teorema 3.2 puede ser escrito como el isomorfismo

$$G_d^{r,*}(X) \supset \rho^{-1}(G_d^{r,\mathrm{EH,ref}}(X)) \xrightarrow{\cong} G_d^{r,\mathrm{EH,ref}}(X). \tag{7}$$

Ahora, considere $\mathcal{X}/B$ una suavización regular de X. Sea $\mathcal{L}_\eta$ un fibrado vectorial de grado d sobre la fibra genérica suave $\mathcal{X}_\eta$. Fue visto que existe una extensión $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{X}$ para la cual $L := \mathcal{L}|_X$ tiene grado d sobre Y y 0 sobre Z. Fijando esta extensión $\mathcal{L}$, denote por $L_i := \mathcal{L}(iY)|_X \cong \mathcal{L}(-iZ)|_X$, para cada $i = 0, \dots, d$. Recuerde, los $\mathcal{L}_i := \mathcal{L}(iY)$ son todas las extensiones de grado d de $\mathcal{L}_\eta$ en $\mathcal{X}$.

Si V_η es un subespacio vectorial de $\Gamma(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{L}_\eta)$ de dimensión $r+1$, él puede ser identificado con un subespacio de $\Gamma(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{L}(iY)|_{\mathcal{X}_\eta})$ para cada $i = 0, \dots, d$. Defina $\mathcal{V}_i := \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}(iY)) \cap V_\eta$ y denote por $V_i \subset \Gamma(X, L_i)$ la imagen por la aplicación natural inducida sobre las secciones globales $\mathcal{V}_i \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}_i) \to \Gamma(X, L_i)$. En resumen, es posible probar:

Proposición 3.9. *La colección* $\mathfrak{g} = (L, V_0, \dots, V_d)$ *es una sll exacta.*

Para mayores detalles ver [48]. *Grosso modo*, las sll exactas, a diferencia de las sll refinadas, contienen las suavizaciones de series lineales a lo largo de suavizaciones regulares a X. En otras palabras, las sll exactas contienen los que son "realmente límites de series lineales" a lo largo de límites por suavizaciones regulares a X. Ahora, surge un nuevo problema: este conjunto de "límites" es un subconjunto abierto de $G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X)$, para el cual no es posible determinar su frontera ya que ello está indiscutiblemente relacionado (como es clásicamente conocido) con *suavizaciones no-regulares.* En efecto, la teoría desarrollada por Osserman es solo sobre límites definidos sobre suavizaciones regulares de X. Una manera de dejar en evidencia un elemento en la frontera de $G_d^{r,*}(X)$, como será discutido más adelante, es a partir de su identificación como subesquema de la fibra en un (cierto) morfismo de Abel.

Finalmente, se hace referencia a uno de los resultados relacionados a sll exactas, que refleja detalles acerca de su estructura

Lema 3.10 ([42], Lema A.12)**.** *Si* $\mathfrak{g} = (L, V_0, \dots, V_d)$ *es una sll exacta sobre* X*, entonces existen enteros* $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r \leq d$ *y secciones* $s_0, \dots, s_r$ *con* $s_j \in V_{i_j}$ *tales que para cada* $i = 0, \dots, d$*, los* s_j *con* $i_j = i$ *forman una base de*$V_i / V_i^{Y,0} \oplus V_i^{Z,0}$ *y las imágenes iteradas de los* s_j *forman una base para los* V_i*.*

Bien entendido, este lema afirma que las sll exactas son las candidatas naturales en el espacio moduli de Osserman a generalizar las sll refinadas del tipo Eisenbud y Harris. No obstante, debido a que las sll refinadas están contenidas propiamente en las sll exactas, tenemos una diferencia estructural entre las compactificaciones $G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X)$ y $G_d^{r,\mathrm{EH}}(X)$ (ver, por ejemplo, [48], Ejemplo 1, Capítulo 2).

4. Morfismos de Abel sobre curvas singulares y su relación con las series lineales límite

Como se vio en el caso de curvas suaves, el estudio de series lineales está íntimamente relacionado al estudio de los subesquemas de las fibras del morfismo de Abel.

Ahora, ¿qué es posible decir acerca de este enfoque sobre curvas singulares? Como ya fue mencionado, las curvas a consideración son las singulares (de tipo compacto) X, con dos componentes suaves Y y Z que coinciden en único nodo P. Por un lado, fue presentada la construcción robusta del moduli de Osserman $G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X)$. No obstante, no es ni inmediato ni evidente un concepto de serie lineal límite completa ni de familia de divisores efectivos asociados a estas sll. Por otro lado, en ([8]) Coelho y Pacini construyeron morfismos de Abel de grado d

$$\begin{array}{cccc} A_d & : & X^{(d)} & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^d(X) \\ & & \sum_{i=1}^d q_i & \mapsto & [\mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^d q_i)], \end{array}$$

donde ahora $\mathrm{Pic}^d(X)$ es el esquema de Picard que parametriza fibrados vectoriales de dimensión 1 sobre X de bi-grado (d_1, d_2) tales que $d_1 + d_2 = d$. Sin embargo, las fibras de A_d no son, en general, bien comportadas. Por ejemplo, ellas no son, en general, equidimensionales y así las fibras del morfismo de Abel A_d no pueden constituir una familia plana, ni en el caso en que $d >> 0$. Es en este sentido, en que las fibras de este morfismo no pueden ser vistas como límites planos de fibras de morfismos de Abel de curvas suaves deformando a X.

4.1. Los resultados de Esteves–Osserman

Esteves y Osserman obtienen en [22] un importante resultado que relaciona las sll del tipo Osserman y las fibras del morfismo de Abel construido por Coelho-Pacini.

La idea de Esteves-Osserman es la de asociar a cada sll $\mathfrak{g} := (L, V_0, \ldots, V_d)$ sobre X un subesquema de la fibra $A_d^{-1}(L)$, el cual es definido como la clausura:

$$\mathbb{P}(\mathfrak{g}) := \overline{\{\mathrm{div}(s|_Y) + \mathrm{div}(s|_Z) \,|\, s \in V_i \setminus V_i^{Y,0} \cup V_i^{Z,0},\ i = 0, \ldots, d\}}.$$

(Recuerde que para cada V_i existen dos sucesiones cortas exactas asociadas (6), que definen a $V_i^{Y,0}$ y $V_i^{Z,0}$). Ellos consiguieron probar que los $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ son bien comportados cuando la sll $\mathfrak{g} \in G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X)$ es exacta. De forma más precisa,

Teorema 4.1 ([22], Teorema 4.3) *Si* $\mathfrak{g} = (L, V_0, \ldots, V_d)$ *es una serie lineal límite exacta sobre* X *de grado* d *y dimensión* r*, entonces* $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ *es un esquema reducido, conexo, Cohen–Macaulay de dimensión pura* r*, que es también una deformación plana de* $\mathbb{P}^r$ *y con polinomio de Hilbert en dos variables dado por* $P(s,t) = \binom{r+s+t}{r}$.

Este es el resultado análogo, en el caso singular, al que establece el teorema de Abel. En efecto, sea $\mathfrak{g} = (L, V_0, \ldots, V_d) \in G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X)$. Para cada $i = 0, \ldots, d$, defina $\Gamma_Y^i := \Gamma(Y, L_{d-i}|_Y)$ y $\Gamma_Z^i := \Gamma(Z, L_i|_Z)$. Note que $\mathbb{P}(\Gamma_Y^i) \times \mathbb{P}(\Gamma_Z^{d-i}) \subseteq A_d^{-1}(L)$ de forma canónica: basta tomar los pares (D_1, D_2) de divisores D_1 y D_2 sobre Y y Z, respectivamente, tales que $L_{d-i}|_Y \cong \mathcal{O}_Y(D_1)$ y $L_i|_Z \cong \mathcal{O}_Z(D_2)$ tienen por imagen $D_1 + D_2$. Claramente,

$$A_d^{-1}(L) = \mathbb{P}(\Gamma_Y^0) \times \mathbb{P}(\Gamma_Z^d) \cup \mathbb{P}(\Gamma_Y^1) \times \mathbb{P}(\Gamma_Z^{d-1}) \cup \cdots \cup \mathbb{P}(\Gamma_Y^d) \times \mathbb{P}(\Gamma_Z^0).$$

También, como consecuencia de que

$$\mathbb{P}(\Gamma_Y^0) \subseteq \mathbb{P}(\Gamma_Y^1) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{P}(\Gamma_Y^{d-1}) \subseteq \mathbb{P}(\Gamma_Y^d),$$

y

$$\mathbb{P}(\Gamma_Z^0) \subseteq \mathbb{P}(\Gamma_Z^1) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{P}(\Gamma_Z^{d-1}) \subseteq \mathbb{P}(\Gamma_Z^d),$$

es posible identificar la fibra $A_d^{-1}(L) \subseteq \mathbb{P}(\Gamma_Y^d) \times \mathbb{P}(\Gamma_Z^d) \simeq \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$. En [22], §4, los $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ son caracterizados por una descomposición natural $\mathbb{P}(\mathfrak{g}) := \bigcup\limits_i \mathbb{P}(\mathfrak{g}_i)$, donde $\mathfrak{g}_i := (L_i, V_i)$ y

$$\mathbb{P}(\mathfrak{g}_i) \subseteq \mathbb{P}(V_i|_Y) \times \mathbb{P}(V_i|_Z) \subseteq \mathbb{P}(\Gamma_Y^{d-i}) \times \mathbb{P}(\Gamma_Z^i) \subseteq A_d^{-1}(L) \subseteq X^{(d)}$$

es el subesquema reducido definido a nivel de conjuntos por

$$\mathbb{P}(\mathfrak{g}_i) := \overline{\left\{ \operatorname{div}(s|_Y) + \operatorname{div}(s|_Z) \,|\, s \in V_i - (V_i^{Y,0} \cup V_i^{Z,0}) \right\}}. \tag{8}$$

De esta forma, es fácil identificar entonces a $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_i)$ y en consecuencia a $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ dentro del producto $\mathbb{P}(\Gamma_Y^d) \times \mathbb{P}(\Gamma_Z^d)$, donde el polinomio de Hilbert en dos variables $P(s,t) = \binom{r+s+t}{r}$ es el polinomio que corresponde a la diagonal en $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$. Para mayores detalles ver [22].

A continuación serán expuestos algunos detalles generales acerca la prueba del teorema (4.1). Primero, observe que $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_i)$ es vacío si y sólo si $V_i = V_i^{Y,0} \cup V_i^{(Z,0)}$. Luego la hipótesis sobre la exactitud de $\mathfrak{g}$ implica que $\mathbb{P}(\mathfrak{g}) = \bigcup\limits_i \mathbb{P}(\mathfrak{g}_i)$, donde $V_i \neq V_i^{Y,0} \cup V_i^{(Z,0)}$. Esta misma hipótesis de exactitud, por el lema (3.2), se refleja en una condición sobre $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$, más exactamente sobre los $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_i)$. En concreto, cada $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_i)$ es descrito por subvariedades irreducibles escritas como uniones de ciertos productos de espacios proyectivos, los cuales "pegan bien", en el sentido en que $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ tiene el polinomio de Hilbert de la diagonal en $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$ que es el polinomio "esperado" de la deformación plana del espacio proyectivo $\mathbb{P}^r$. Para mayores detalles ver [22].

Por otro lado, Esteves-Osserman también prueban en [22] que $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ es un límite plano cuando $\mathfrak{g}$ proviene de una suavización, mostrando así que la definición de este esquema en la fibra es bien comportada por suavizaciones, como acontece con las sll exactas. Específicamente, dada una suavización regular $\mathcal{X}/B$ de X y series lineales sobre las fibras genéricas, es posible construir una sll exacta $\mathfrak{g} = (L, V_0, \ldots, V_d)$, la cual es el límite de series lineales sobre las fibras genéricas. Esto es lo que en forma más precisa prueba el siguiente resultado:

Teorema 4.2 ([22], Teorema 5.2)**.** *Sean $\mathcal{X}/B$ una suavización regular de X y (L_η, V_η) series lineales de dimensión r y grado d sobre la fibra genérica. Sea $\mathfrak{g}$ la sll que es límite de (L_η, V_η). Entonces $\mathbb{P}(V_\eta)$, puede verse como un subesquema de la fibra del producto simétrico relativo $S^d(\mathcal{X}/B)$ sobre η, y su clausura intersecta $X^{(d)}$ en $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.*

5. Progresos recientes: nuevas técnicas y nuevos caminos.

En esta sección se presentan algunas problemáticas y avances recientes relacionados a las series lineales límite. Recibirán especial atención el desarrollo de nuevas técnicas en búsqueda de generalizar los resultados aquí presentados acerca de la relación entre series lineales límite y subesquemas en la fibra del morfismo de Abel.

El interés hacia la generalización de la noción de series lineales límite es motivado por la construcción de espacios moduli para este tipo de estructuras y la relación de estos con los esquemas de Hilbert relativos a los morfismos de Abel. En realidad, se podría decir que la motivación principal del estudio y generalización de estas nociones es suscitada por la comprensión de la geometría del moduli de curvas estables $\overline{\mathcal{M}}_g$ y "el ataque" a grandes problemas como las *Conjeturas de rango maximal*. Esto sin contar que muchos de los desarrollos teóricos a discutirse a continuación aguardan por la búsqueda de nuevas aplicaciones y sobre todo de herramientas hacia nuevas perspectivas en el estudio de problemas clásicos como la teoría de curvas de Brill–Noether–Petri (ver, por ejemplo, [24]), el problema de Brill-Noether (ver, por ejemplo, [41],[25, 49]), entre otros.

5.1. Sobre la "compactificación" de $G_d^{r,*}(X)$

Una de las consecuencias de la construcción de Esteves–Osserman, es que su resultado puede ser interpretado como un morfismo racional al nivel de conjuntos por:

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{P} & : & G_d^r(X) & \dashrightarrow & \mathrm{Hilb}_{A_d}^{\binom{r+t+s}{r},H} \\ & & \mathfrak{g} & \mapsto & \mathbb{P}(\mathfrak{g}) \end{array} \tag{9}$$

el cual es definido sobre $G_d^{r,*}(X)$, el abierto de las sll exactas del tipo Ossermann. Claramente esta es la versión para el caso de la curva singular X del teorema de Abel en (1). Como ejemplos simples muestran (ver, por ejemplo [48]) $\mathbb{P}$ no se extiende a las sll no-exactas. En este sentido, una iniciativa natural es la de intentar "resolver" este morfismo. Esta problemática es relacionada a la búsqueda de una compactificación o frontera de $G_d^{r,*}(X)$ entendida como una variedad sobre $\overline{\mathcal{M}}_g$, donde la curva X (siendo singular) pertenece a Δ_0 una de las componentes del divisor de la frontera $\overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g$. Una idea simple, pero extraordinaria, para resolver este tipo de problemas (ver [18]) es la de extender la construcción en este caso de las sll conocida para suavizaciones regulares de X, a suavizaciones no-regulares de X. Esta estrategia es motivada, por un lado, por que en el contexto de deformaciones hacia la curva X suavizaciones con *índice de singularidad* δ corresponden al límite al aproximarse a la curva X en Δ_0 e interceptar este divisor con tangencia δ, siendo el caso $\delta = 1$ el de una suavización regular e interceptar este divisor transversalmente (ver por ejemplo [31] p. 145-146) y para $\delta \geq 2$ corresponde a suavizaciones no-regulares. Por otro lado, fue discutido que $G_d^{r,*}(X)$ es un esquema (abierto) que parametriza límites a lo largo de deformaciones y nada más apropiado que intentar encontrar el objeto que contenga los límites en "todas las direcciones".

El estudio pionero acerca de lo que podría ser una serie lineal límite a lo largo de suavizaciones no-regulares fue de Cumino–Esteves–Gatto en [9] a partir de aplicar *twist* a fibrados, término introducido por Esteves en [15] en el estudio de la compactificación de la Jacobiana (relativa) en familias de curvas reducidas. Así, Esteves–Nigro–Rizzo motivados por el éxito de las ideas de Osserman y las de Cumino–Esteves–Gatto, construyen en [21] los espacios moduli $G^r_{d,\delta}(X)$ parametrizando *series lineales límite de nivel-*δ que corresponderían a la construcción de las sll a lo largo de suavizaciones con índice de singularidad δ y, así mismo, la construcción de los espacios que contienen los "límites" a lo largo de estas suavizaciones $G^{r,*}_{d,\delta}(X)$.

A continuación se discutirán más detalles acerca esta construcción. Una suavización de X *con índice de singularidad* δ es un morfismo proyectivo, plano $\pi_\delta : \mathcal{X} \to B$, donde $B = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$, $\mathcal{X}$ es regular excepto posiblemente en P, la fibra especial es identificada con X y la fibra genérica es suave. El valor δ hace referencia a la ecuación local de $\mathcal{X}$ en P que es de la forma $t^\delta = fg$ con f y g las ecuaciones locales de los ramos de X en P. Claramente, la suavización será regular si y sólo si $\delta = 1$.

Para cada entero $i > 0$ el $i-$*twist por* Z de $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ es definido por

$$\mathcal{I}_Z^{(i)} := \ker\left(\mathcal{I}_Z^{(i-1)} \longrightarrow \frac{\mathcal{I}_Z^{(i-1)}|_Z}{\text{torsion}}\right),$$

donde $\mathcal{I}_Z^{(0)} := \mathcal{O}_\mathcal{X}$. Por ejemplo, $\mathcal{I}_Z^{(1)}$ es simplemente el fibrado de ideales $\mathcal{I}_{Z|\mathcal{X}}$. En general, el fibrado $\mathcal{I}_Z^{(i)}$ tiene rango (relativo) 1 y es (relativamente) libre de torsión sobre B (ver [9], p. 13). En realidad, a partir de la definición y explorando sus restricciones a la fibra especial se puede probar (ver [21]) que dado $\mathcal{L}$ un fibrado sobre $\mathcal{X}$ de bi-grado $(d, 0)$ existe una colección de $d\delta + 1$ fibrados libres de torsión y rango 1 sobre X determinados por las siguientes condiciones:

(1) Una colección de $d + 1$ de fibrados vectoriales de dimensión 1 $L_{i\delta} := \mathcal{L}(-i(\delta Z))|_X$ de bi-grados $(d-i, i)$ para $i = 0, \dots, d$. Además, son (únicamente) determinados por las restricciones $L_{i\delta}|_Y \cong L|_Y(-iP)$ y $L_{i\delta}|_Z \cong L|_Z(iP)$.

(2) Una colección de $d(\delta - 1)$ fibrados de rango 1, libres de torsión $L_{i\delta+j} := \mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_Z^{i\delta+j}|_X$ que son isomorfos a $L_{(i+1)\delta}|_Y \oplus L_{i\delta}|_Z$ para $i = 0, \dots, d-1$ y $j = 1, \dots, \delta - 1$.

Una construcción de esta colección de fibrados que vale la pena tener en cuenta cuando (obviamente) $\mathcal{X}$ sea no-regular y que se relaciona en un cierto sentido a la construcción para el caso de $\mathcal{X}$ regular es la siguiente: es posible resolver la singularidad en el nodo P por *blow-ups* sucesivos hasta obtener una suavización regular $\widetilde{\pi}_\delta : \widetilde{\mathcal{X}} \to B$ cuya fibra genérica es igual a la de π_δ y la fibra especial X^δ es obtenida a partir de X al conectar las dos componentes Y y Z a través de una cadena de curvas racionales de longitud $\delta - 1$, $E_1, \dots, E_{\delta-1}$ ordenadas de tal forma que $\#(E_i \cap E_{i+1}) = 1$, para $i = 1, \dots, \delta-2$ y $E_i \cap E_j = \phi$ si $|i-j| > 1$. La curva X^δ es conocida como el modelo *semi-estable* de X y el morfismo de *contracción* $\nu^\delta : X^\delta \to X$, como aquel que colapsa la cadena E_δ de X^δ. En este sentido, a partir de un fibrado vectorial L de dimensión 1 y bi-grado $(d, 0)$ sobre X la construcción de la colección de los $d\delta + 1$ fibrados corresponde al *push-forward* $L_{i\delta+j} := \nu_{\delta *}\widetilde{L}_{i\delta+j}$ donde los $\widetilde{L}_{i\delta+j}$ son por construcción $\widetilde{L}_0 := \nu_\delta^* L$, $\widetilde{L}_{i\delta} := \nu_\delta^* L_i$, $i = 0, \dots, d-1$ y para $j = 1, \dots, \delta - 1$:

$$\widetilde{L}_{i\delta+j}|_W = \begin{cases} L_{i+1}|_Y & \text{si } W = Y \\ L_i|_Z & \text{si } W = Z \\ \mathcal{O}_{E_l} & \text{si } W = E_l,\ l \neq j \\ \mathcal{O}_{E_j}(1) & \text{si } W = E_j. \end{cases}$$

Para detalles más precisos ver [21]. Ahora, de la misma forma que en el caso de Osserman es posible construir una colección de $2d\delta$ morfismos de fibrados (ver [21] o [48]) por restricción–inclusión con las adaptaciones naturales, entendiendo por esto que en el caso $\delta \nmid i$ los *fibrados* considerados no son fibrados vectoriales de dimensión 1, pero sí libres de torsión y de rango 1 como fueron definidos anteriormente. Precisamente, el diagrama a continuación

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L|_Y \otimes \mathcal{O}_Y(q_-P) \arrow[r, "\iota_{i,Y}"] \arrow[d, equal] & L^{(i)} \arrow[r, "\rho_{i,Z}"] \arrow[d, shift left, "\varphi^i"] & L|_Z \otimes \mathcal{O}_Z(q_+P) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 & L|_Y \otimes \mathcal{O}_Y(q_-P) \arrow[l] & L^{(i+1)} \arrow[l, "\rho_{i+1,Y}"] \arrow[u, shift left, "\varphi_i"] & L|_Z \otimes \mathcal{O}_Z(q_+P) \arrow[l, "\iota_{i+1,Z}"] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

conmutan, donde q_+ (resp. q_-) es el cociente de la división euclidiana de i (resp. $-(i+1)$) por δ y los morfismos $\rho_{i+1,Y}$, $\rho_{i,Z}$ son las sobreyecciones naturales y $\iota_{i,Y}$, $\iota_{i+1,Z}$ son las inclusiones naturales. Es fácil ver que $\varphi^i\varphi_i = \varphi_i\varphi^i = 0$ para cada i.

En consecuencia existirán, siguiendo las ideas de Osserman, las nociones de sll *de nivel* δ y de sll *exacta de nivel* δ. Explícitamente, la *serie lineal límite de nivel-*δ de X corresponde a la colección $\mathfrak{g} = (L; V^{(i)}, 0 \leq i \leq d\delta)$ donde L es un fibrado vectorial de dimensión 1 sobre X y los $V^{(i)} \subseteq \Gamma(X, I^{(i)})$ son subespacios vectoriales de secciones globales para cada $0 \leq i \leq d\delta$, todos con la misma dimensión, tales que

$$\Gamma(\varphi^i)(V^{(i)}) \subseteq V^{(i+1)} \quad \text{y} \quad \Gamma(\varphi_i)(V^{(i+1)}) \subseteq V^{(i)}$$

para cada i, donde los fibrados $L^{(i)}$ y los morfismos φ^i, φ_i son como descritos anteriormente. En este caso, $\mathfrak{g}$ tiene grado d si L tiene grado d, y $\mathfrak{g}$ tiene dimensión r si los $V^{(i)}$ tienen dimensión proyectiva r. Además, $\mathfrak{g}$ es *exacto* si satisface

$$\Gamma(\varphi^i)(V^{(i)}) = \mathrm{Ker}(\Gamma(\varphi_i)|_{V^{(i+1)}}) \quad \text{y} \quad \Gamma(\varphi_i)(V^{(i+1)}) = \mathrm{Ker}(\Gamma(\varphi^i)|_{V^{(i)}}).$$

Aquí $\Gamma(\cdot)$ es el morfismo inducido sobre los espacios de secciones globales sobre X.

En esta dirección es posible garantizar, siguiendo ideas análogas a las de Osserman, que existe la variedad $G^r_{d,\delta}(X)$ de sll de nivel δ y que contiene al abierto $G^{r,*}_{d,\delta}(X)$ de sll exactas, que a su vez contiene los "límites" de series lineales a lo largo de suavizaciones con índice de singularidad δ. Lo nuevo es que el morfismo (sobreyector) natural de "olvido" $\rho_\delta : G^r_{d,\delta}(X) \to G^r_d(X)$ para todo $\delta \geq 2$ es tal que $\rho_\delta^{-1}(G^r_d(X)) \subset G^{r,*}_{d,\delta}(X)$, que podemos interpretar como que cada sll del tipo Osserman (exacto o no) posee una pre-imagen sll exacta de nivel δ. Y como era de esperarse, cada elemento exacto en el nivel δ está relacionado a fibras del morfismo de Abel con el polinomio de Hilbert "correcto" y en ese sentido será un candidato a resolver nuestro morfismo $\mathbb{P}$. Todo lo dicho hasta ahora puede ser resumido en el siguiente teorema:

Teorem 5.1 (Esteves-Nigro-Rizzo [21]). *Existe un esquema proyectivo $G^r_{d,\delta}(X)$ parametrizando sll de nivel-δ y un morfismo sobreyectivo de "olvido" ρ_δ : $G^r_{d,\delta}(X) \twoheadrightarrow G^r_d(X)$ tal que*

$$\begin{tikzcd}
G^r_{d,\delta}(X) \arrow[d, two heads, "\rho_\delta"] & \rho_\delta^{-1}(G^{r,*}_d(X)) \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"] & G^{r,*}_{d,\delta}(X) \arrow[r, "\mathbb{P}"] & \mathrm{Hilb}_{\mathrm{A_d}}. \\
G^r_d(X) & G^{r,*}_d(X) \arrow[l, hook'] \arrow[urr, "\mathbb{P}"] & &
\end{tikzcd}$$

No obstante, con relación a la resolución de la aplicación $\mathbb{P}$ se presentan algunas limitaciones. La primera es la dependencia de los puntos exactos con el índice de singularidad δ y la segunda es la ausencia de una relación entre los diferentes niveles a medida que δ crece. Por ejemplo, la cantidad de componentes conexas de $G^{r,*}_{d,\delta}(X)$ crece a medida que $\delta >> 0$. En aras de resolver estas limitaciones el siguiente hecho elemental es la idea fundamental de un nuevo enfoque que permitirá superarlas: es conocido que $\mathrm{Ext}^1(L_i|_Z, L_{i+1}|_Y) \cong \mathbb{C} \cong \mathrm{Ext}^1(L_{i+1}|_Y, L_i|_Z)$, para cada $i = 0, \ldots, d-1$. Esto puede interpretarse como que las extensiones entre bi-grados son parametrizadas por la recta afín. Más aún, si estas son identificadas de manera conveniente la secuencia de *twisters* entre $(d, 0)$ y $(0, d)$ puede ser parametrizada por una cadena de $d + 1$ $\mathbb{P}^1$'s, donde cada $\mathbb{P}^1$ parametriza la colección de extensiones de un grado fijo. Ahora, ¿qué ocurre con los subespacios de secciones globales cuando las extensiones entre L_i y L_{i+1} se deforman a la extensión trivial $L_i|_Z \oplus L_{i+1}|_Y$? Una forma de llegar a la respuesta de esta pregunta es interpretándola de la siguiente forma:

para cada $c \in \mathbb{C}$ el siguiente diagrama relaciona la deformación de los fibrados con la de las secciones

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Gamma(X, L_i) \arrow[r, hook] & \Gamma(L_i|_Y) \oplus \Gamma(L_i|_Z) \arrow[d, "{(c,1)}"] \\ V_i^c := (c,1)V_i \arrow[r, hook] & \Gamma(X, (c,1)L_i) \arrow[r, hook] & \Gamma(L_i|_Y) \oplus \Gamma(L_i|_Z). \end{tikzcd}$$

Y como una consecuencia relevante, se prueba que $\lim_{c\to\infty} V_i^c = V_i|_Z \oplus V_i^{Z,0}$ y además $\lim\limits_{c\to 0} V_{i+1}^c = V_{i+1}|_Y \oplus V_{i+1}^{Y,0}$. Lo sorprendente es que la exactitud es equivalente a: $\lim_{c\to\infty} V_i^c = \lim_{c\to 0} V_{i+1}^c$. Bien entendido, una sll exacta $\mathfrak{g} = (L, V_0, \ldots, V_d)$ del tipo de Osserman será identificada por una cadena de $d+1$ curvas racionales y, en general, una sll de nivel-δ exacta es determinada por una cadena de $d\delta+1$ curvas racionales. Esta digresión es posible formalizarla al traducirla, en términos de estabilidad de morfismos de curvas racionales, a un espacio de paramétros apropiado. En términos más o menos precisos, es posible identificar sll exactas en cualquier nivel con elementos de $\overline{M}_0(H_d^r(X))$, donde $H_d^r(X)$ es el espacio de *series lineales generalizadas sobre* X. En realidad, uno de los resultados principales de [20] es la construcción del funtor de *series lineales límite estables* sobre X denotado por $\mathfrak{G}_d^r(X)$ el cual se prueba es isomorfo al funtor $\overline{\mathcal{M}}_0\left(H_d^r, \beta\right)^{\mathbb{C}^*}$ y en consecuencia representado por el espacio moduli grueso proyectivo $G_d^r(X)^{\mathrm{st}} := \overline{M}_0(H_d^r(X), \beta)^{\mathbb{C}^*}$. Precisamente,

Teorema 5.2 (Esteves-Nigro-Rizzo, [20])**.** *Para todo $\delta \geq 1$, existe un morfismo natural*

$$\Psi_\delta : G_{d,\delta}^{r,*}(X) \longrightarrow G_d^r(X)^{st},$$

cuya unión es igual a (en el nivel de conjuntos) $G_d^r(X)^{st}$, cuando del lado izquierdo los índices recorren todo $\delta > 0$. Más aún, Ψ_δ son compatibles con $\rho_{\delta',\delta}$ en el sentido que $\Psi_{\delta'} = \Psi_\delta \circ \rho_{\delta',\delta}$, para todo $\delta|\delta'$:

$$\begin{tikzcd} \rho_{\delta',\delta}^{-1}(G_{d,\delta}^{r,*}(X)) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho_{\delta',\delta}"] & G_{d,\delta'}^{r,*}(X) \arrow[r, "\Psi_{\delta'}"] & G_d^r(X)^{\mathrm{st}}. \\ G_d^r(X) \arrow[urr, "\Psi_\delta"'] & & \end{tikzcd}$$

Y más todavía, este espacio es la "compactificación" que contiene los límites de todos los niveles, en otras palabras, es el candidato buscado que resuelve el morfismo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P} & : & G_d^{r,\mathrm{Oss}}(X) & \dashrightarrow & \mathrm{Hilb}_{A_d}^{\binom{r+s+t}{r}} \\ & & \mathfrak{g} & \mapsto & \mathbb{P}(\mathfrak{g}). \end{array}$$

6. Hacia una teoría general de sll, aplicaciones y comentarios finales

Como ha sido tratado hasta aquí, la construcción del espacio moduli de sll sobre curvas singulares se ha reducido al caso más simple posible. En los últimos años se han presentado avances importantes con el objetivo de generalizar dicha construcción a casos más generales, así como importantes aplicaciones de algunas de las técnicas empleadas con dicho objetivo. Se presentan, a continuación, miradas rápidas a algunos resultados en esta dirección.

- **Los desarrollos de Osserman:** Como se comentó, a pesar de las limitaciones que presenta la construcción de Eisenbud–Harris, esta fue realizada para curvas de tipo compacto de la cual la curva X escogida aquí es el ejemplo trivial. Sin embargo, la generalización de las ideas de Eisenbud–Harris o la introducción de una nueva conceptualización acerca de series lineales límite para curvas que no son de tipo compacto ha sido un problema que no mostró avances por más de 30 años.

  Los resultados más recientes de Osserman en esta dirección (ver [45, 44]) pretenden responder a esta cuestión. A grandes rasgos, en ellos Osserman introduce una nueva definición de serie lineal límite que incluye a curvas nodales que no son de tipo compacto, y construye el espacio moduli que las parametriza logrando mostrar resultados de suavización y especialización. En el caso especial de curvas "pseudocompactas" (terminología introducida por él) muestra que su definición es una generalización natural a la introducida por Eisenbud–Harris y, además, logra probar que en este caso el espacio moduli de tales series lineales límite tiene la dimensión esperada y logra generalizar el teorema de Brill–Noether para secuencias de *multi-anulamiento* sobre curvas suaves.

- **Los resultados de Binglin Li:** Uno de los resultados centrales de la teoría de Esteves–Osserman es la construcción de los subesquemas $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ en la fibra del morfismo de Abel de grado d asociados a las series lineales límite $\mathfrak{g} = (L, V_0, \ldots, V_d)$ como la unión de los esquemas $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_i)$ donde los $\mathfrak{g}_i = (V_i, L_i)$ para L_i el *twist* de L de bi-grado $(d-i, i)$ y estos últimos se pueden interpretar como las clausuras de las imágenes de los morfismos racionales $\mathbb{P}(V_i) \dashrightarrow \mathbb{P}(V_i/V_i^{Y,0}) \times \mathbb{P}(V_i/V_i^{Z,0})$ donde $V_i^{Y,0}$ (resp. $V_i^{Z,0}$) corresponden a los espacios de V_i de secciones que se anulan sobre la componente Y (resp. Z). En particular, $V_i^{Y,0} \cap V_i^{Z,0} = \{0\}$. Esto motiva a Li (ver [37]) a estudiar las clausuras de imágenes de morfismos racionales $\mathbb{P}(V) \dashrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(V/V_i)$, que denota por $X(V_1, \ldots, V_n)$, donde los $V_i \subset V$ son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V tales que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i = \{0\}$. Los resultados de Li están orientados hacia el estudio de propiedades geométricas de dichos espacios (por ejemplo, dimensión, suavidad, irreducibilidad, si es o no Cohen-Macaulay, etc). Este es un tema con innúmeras aplicaciones e interés para los geómetras y geómetras aplicados (ver por ejemplo: aplicaciones en visión computacional en [1], deformación de espacios proyectivos en [6], teoría de la probabilidad en [40]).

Como consecuencia de algunos de los resultados presentados por Binglin Li, Esteves y Muñoz en [19] lograron establecer generalizaciones de los trabajos de Ossermann y Esteves–Osserman en [42] y [22], respectivamente, para curvas con 3 componentes irreducibles. Un resultado que llama la atención de este trabajo es la noción de serie lineal límite *ultra-refinada*, que es una clase propia de los refinados en Eisenbud–Harris para el caso de curvas con 3 componentes y que tienen el polinomio de Hilbert correcto como subesquemas de las fibras del morfismo de Abel y en ese sentido es el análogo a los exactos definidos por Osserman en el caso de dos componentes.

- **Una conexión inesperada, la Geometría Tropical:** Toda curva algebraica tiene asociado de manera natural un grafo dual (es decir, el lado "combinatorio de la curva"), a partir de asignar a cada componente irreducible un vértice, y los vértices serán ligados siempre y cuando las respectivas componentes se intersecten. Por ejemplo, una curva es de tipo compacto si y sólo si su grafo dual es un árbol. Esta conexión básica se extiende a familias para introducir nuevos análisis para la comprensión y generalización de estructuras via degeneración sobre (el espacio moduli de) curvas (ver, por ejemplo, [7] la *tropicalización abstracta*) que permiten establecer conexiones inesperadas entre el estudio de la geometría algebraica de curvas y la geometría tropical de curvas tropicales (entiéndase como "grafos decorados y con peso"). Un ejemplo de esta conexión es el estudio de la teoría de divisores sobre grafos que conllevó al reciente trabajo de Amini–Baker (ver [2]) donde introducen una nueva aproximación a las series lineales límites (como un híbrido entre las teorías clásicas de sll y los resultados más recientes en teoría de divisores sobre grafos) que incluye a curvas que no son de tipo compacto. Si se considera X como en nuestro caso, las familias de divisores que ellos encontraron son notoriamente mayores a los $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ construidos por Osserman–Esteves.

  La motivación principal para establecer este puente y la combinación de técnicas es la de dar respuesta a intrigantes problemas como la conjetura del Rango Maximal, y la conjetura de Caporaso acerca la interpretación del rango de Baker–Norine de un divisor sobre familias de curvas tropicales, entre otras.

  A continuación son dedicadas algunas líneas muy generales a los objetos de estudio de la geometría tropical. Esta nueva área se dedica al estudio de los conjuntos de ceros de polinomios en varias variables con coeficientes sobre el álgebra de números tropicales ($\mathbb{T} := (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \otimes)$, donde para cada $a, b \in \mathbb{T}$

$$a \oplus b := \min(a, b) \qquad a \otimes b := a + b.$$

Desde un punto de vista geométrico, la geometría tropical puede ser entendida como la peor deformación de la estructura compleja sobre una variedad algebraica cualquiera. Para aprender más acerca esta teoría y toda una miscelánea de sus aplicaciones, ver [38] o [5] y, muy especialmente, [39].

Volviendo al resultado de Amini–Baker, podemos decir que a pesar de llegar a resultados de especialización, en su construcción y en los recientes avances sobre esta teoría nos resta decir que se carece de un espacio moduli que contenga las sll de su aproximación. Sin embargo, como fue comentado, el hecho de explorar estos nuevos caminos abre nuevos horizontes hacia la búsqueda de una teoría en su total generalidad, como es el caso de los resultados a continuación.

- **La generalización Esteves-Amini:** Este es un trabajo actualmente en progreso (ver [17] y [16]), motivado por los resultados recientes acerca de la construcción del espacio moduli de series lineales límites estables en [20]. Esteves–Amini pretenden generalizar la construcción mencionada para cualquier tipo de curvas estables de tipo compacto y hasta aquellas que no son de tipo compacto. Como lo mencionó Esteves en cada una de sus intervenciones, a través de notables ejemplos, las piezas fundamentales de esta nueva construcción son las llamadas *teselaciones de variedades tóricas* (que invita a la "combinatoria") y *Stacks de Artin*, con la introducción de una nueva teoría de *deformaciones de puntos.*

References

[1] C. Aholt, B. Sturmfels, and R. Thomas, *A Hilbert Scheme in computer vision*, Canad. J. Math **65** (2013), no. 5, 961–988.

[2] O. Amini and M. Baker, *Linear series on metrized complexes of algebraic curves*, Mathematische Annalen **362** (2015), no. 1, 55–106.

[3] E. Arbarello, M. Cornalba, and P. Griffiths, *Geometry of algebraic curves, vol.2*, vol. 268, Grundlehren der Mathematischen Wissenchaften, Springer-Verlag, New York, 2011.

[4] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of algebraic curves, vol.1*, vol. 267, Grundlehren der Mathematischen Wissenchaften, Springer-Verlag, New York, 1985.

[5] E. Brugalle and et al., *Brief introduction to tropical geometry*, vol. 1, Proceedings of 21st Gokova Geometry-Topology Conference. OpenLibra, Gokova, 2015.

[6] D. Cartwright and et al., *Mustafin varieties*, Selecta Math. **17** (2011), no. 4, 757–793.

[7] M. Chan, *Lectures on tropical curves and their moduli space*, vol. S/N, Electronic Notes of the School of Moduli of Curves, CIMAT. Guanajuato–Mexico, 2016.

[8] J. Coelho and M. Pacini, *Abel maps for curves of compact type*, J. of Pure and Applied Algebra. **214** (2010), no. 8, 1319–1333.

[9] C. Cumino, E. Esteves, and L. Gatto, *Limits of special Weierstrass points*, Int. Math. Res. Papers **2008** (2008), no. 1, 1–65.

[10] J. Dieudonné, *The historical development of algebraic geometry*, The American Mathematical Monthly **79** (1972), no. 8, 827–866.

[11] D. Eisenbud and J. Harris, *Existence, decomposition and limits of certain Weierstrass points*, Invent. Math. **87** (1982), no. 1, 495–515.

[12] ______, *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves*, Invent. Math. **67** (1982), no. 1, 23–86.

[13] ______, *A simpler proof of the Gieseker-Petri theorem on special divisors*, Invent. Math. **74** (1983), no. 2, 269–280.

[14] ______, *Limit linear series: Basic theory*, Invent. Math. **85** (1986), no. 1, 337–371.

[15] E. Esteves, *Compactifiying the relative Jacobian over families of reduced curves*, Transactions of AMS **353** (2001), no. 8, 3045–3095.

[16] ______, *Limit linear series: Perspectives from a work in progress*, http://www.birs.ca/workshops/2014/14w5133/Programme14w5133.pdf (2014).

[17] ______, *Limit linear series: a new perspective*, www.impa.br/opencms/pt/eventos/extra/2015elga (2015).

[18] E. Esteves and N. Medeiros, *Limit canonical systems on curves with two components*, Invent. Math. **149** (2002), no. 1, 267–338.

[19] E. Esteves and G. Munoz, *Limit linear series for curves of compact type with three irreducible components*, Preprint. arXiv:1704.02543 (2017).

[20] E. Esteves, A. Nigro, and P. Rizzo, *Stable limit linear series on singular curves*, In preparation.

[21] E. Esteves, A. Nigro, and Pedro Rizzo, *Level–delta limit linear series*, Preprint. arXiv:1606.04281 (2016), no. to appear in Mathematische Nachrichten.

[22] E. Esteves and B. Osserman, *Abel maps and limit linear series*, Rend. Circ. Mat. Palermo **62** (2013), no. 1, 79–95.

[23] B. Fantechi and et al., *Fundamental Algebraic Geometry: Gronthendieck's FGA explained*, vol. 123, Mathematical surveys and Monographs, AMS., New York, 2005.

[24] G. Farkas, *Brill–Noether with ramification at unassigned points*, Journal in Pure and Applied Algebra **217** (2013), no. 10, 1838–1843.

[25] G. Farkas and et al., *Explicit Brill–Noether–Petri general curves*, Preprint. arXiv:1511.07321 (2016).

[26] D. Gieseker, *Stable curves and special divisors*, Invent. Math. **66** (1982), 251–275.

[27] P. Griffiths, *Introduction to algebraic curves*, Translations of mathematical monographs, AMS., Providence, Rhode Island, 1989.

[28] P. Griffiths and J. Harris, *On the variety of special linear series on a general algebraic curve*, Duke Math. J. **47** (1980), 233–272.

[29] ______, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and sons, Inc., New York, 1994.

[30] J. Harris, *Brill-Noether theory*, Surveys in Differential Geometry **14** (2009), 131–143.

[31] J. Harris and I. Morrison, *Moduli of curves*, vol. 187, Graduate Text in Mathematics. Springer–Verlag., New York, 1998.

[32] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, vol. 52, Graduate Text in Mathematics. Springer-verlag., New York, 1977.

[33] G. Kempf, *Schubert methods with an application to algebraic curves*, Publ. Math. Centrum., Amsterdam, 1971.

[34] S. Kleiman and S. Laksov, *On the existence of special divisors*, Amer. J. Math. **94** (1972), 431–436.

[35] ______, *Another proof of the existence of special divisors*, Acta Math. **132** (1974), 163–176.

[36] R. Lazarsfeld, *Brill-Noether-Petri without degenerations*, J.Diff. Geom. **23** (1986), no. 3, 299–307.

[37] B. Li, *Images of rational maps of projective spaces*, Preprint. arXiv:1310.8453v1 (2013).

[38] D. Maclagan and B. Sturmfels, *Introduction to Tropical Geometry*, vol. 161, Graduate Studies in Mathematics, Springer-Verlag., New York, 2015.

[39] G. Mikhalkin, *Tropical geometry and its applications*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain., 2006.

[40] J. Morton, *Relations among conditional probabilities*, J. Symbolic Comput. **50** (2013), 478–492.

[41] A. Ortega, *The Brill–Noether curve and Prym–Tyurin varieties*, Mathematische Annalen **356** (2013), no. 3, 809–817.

[42] B. Osserman, *A limit linear series moduli scheme*, Annales de l'Institut Fourier. **56** (2006), no. 4, 1165–1205.

[43] ______, *Limit linear series: constructions and applications*, Selected Talks: https://www.math.ucdavis.edu/ osserman/math/impa.pdf, IMPA, RJ, 2010.

[44] ______, *Dimension counts for limit linear series on curves not of compact type*, Preprint. arXiv:1410.5450v1, to appear Mathematische Zeitschrift (2014).

[45] ______, *Limit linear series for curves not of compact type*, Preprint. arXiv:1406.6699v3 (2014).

[46] E. Reyssat, *Quelques Aspects des Surfaces de Riemann*, Progress in mathematics. Birkhauser, New York, 1989.

[47] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen funktionen*, Journal fur die reine und angewandte Mathematik **54** (1857), 115–155.

[48] P. Rizzo, *Level–delta and stable limit linear series on singular curves*, Tese de doutorado, IMPA, Rio de Janeiro, 2013, Disponible en http://preprint.impa.br/visualizar?id=6152.

[49] I. Schwarz, *Brill–Noether theory for cyclic covers*, Preprint. arXiv:1603.05084v1. (2016).

[50] K.O. Stohr and J.F. Voloch., *Weierstrass points on curves over finite fields*, Proc. London Math. Soc. **52** (1986), no. 3, 1–19.

(Recibido en septiembre de 2016. Aceptado en julio de 2017)

Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias, Exactas y Naturales
Calle 67, #53-108
Medellín, Colombia
e-mail: pedro.hernandez@udea.edu.co