



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUTO DE FÍSICA

TESIS DE MAESTRÍA:

**INFLUENCIA DE LOS PARÁMETROS
EXPERIMENTALES EN LA TÉCNICA F-SCAN
PARA LA DETERMINACIÓN DE LA ABSORCIÓN
NOLINEAL DE DOS FOTONES**

Tesis presentada por Julián David Henao Escobar para optar por el título de maestría en física ofrecido por la Universidad de Antioquía.

Dirigida por:

PhD. Edgar Alberto Rueda

Co-dirigida por:

PhD. Juan Humberto Serna

A mi madre, el motor de mi vida.

Agradecimientos

- Al profesor Dr. Edgar Rueda un agradecimiento especial por su paciencia y apoyo constante, por los conocimientos entregados tanto en lo académico como en lo personal.
- Al profesor Dr. Juan Serna por todo lo enseñando.
- A todos los integrantes del Grupo de óptica y Fotónica de la universidad de Antioquia, por compartir sus conocimientos.
- A mi tía Mónica y Alexandra brindarme su confianza para continuar con mis sueños.
- Al físico Juan David Rincón por compartir su conocimiento y brindarme su ayuda en todo momento.
- Por último, pero no menos importante a mi familia, a Nata, por la paciencia y el apoyo incondicional siempre. Por compartir conmigo alegrías, tristezas y logros.

Índice general

Resumen	9
1. Introducción	11
1.1. Objetivos	12
1.1.1. Objetivo general	12
1.1.2. Objetivos específicos	12
2. Fundamentos y conceptos teóricos	14
2.1. Ecuación de onda para el campo electromagnético	14
2.2. Haces Gaussianos	16
2.2.1. Óptica de un haz Gaussiano	16
2.2.2. Aproximación paraxial	17
2.2.3. Solución a la ecuación de Helmholtz	18
2.3. Medios ópticos lineales y no lineales. Oscilador armónico	20
2.3.1. Oscilador armónico lineal	21
2.3.2. Oscilador armónico no lineal	22
2.4. Efectos no lineales de tercer orden	23
2.4.1. Índice de refracción no lineal n_2	25
2.4.1.1. Determinación del índice de refracción no lineal	25
2.4.1.2. Cambio en el índice de refracción debido a los efectos térmicos	27
2.4.2. No-linealidades ópticas inducidas por transiciones electrónicas en semi-conductores.	29
2.4.2.1. Efecto de las transiciones inter-banda en los procesos ópticos no lineales.	29
2.4.2.2. Procesos ópticos no lineales que involucran transiciones virtuales	30
2.5. Absorción no lineal de la intensidad	31
2.5.1. Absorción de dos fotones de la misma frecuencia óptica	32
2.6. Transmitancia	35
2.6.1. Transmitancia considerando un haz con perfil espacial y temporal gaussiano	36
3. Técnica de caracterización óptica no lineal F-scan	39
3.1. Descripción e implementación de la técnica F-scan	39
3.2. Dependencia de la potencia óptica en función de la corriente suministrada	44
3.3. Fenómeno de histéresis en las lentes electroópticas EFTL	52
4. Análisis de parámetros experimentales	57
4.1. Ajuste de parámetros simulados.	58
4.1.1. Variación de parámetros simulados.	59
4.2. Aproximación de la función de transmitancia	70

4.3.	Correlación entre los parámetros experimentales	73
4.4.	Error relativo en β ajustando con dos, tres o más parámetros experimentales . .	80
4.5.	Validación de un modelo experimental	83
4.5.1.	Análisis del ajuste mediante la implementación de la métricas estadísticas	83
4.6.	Distribución estadística de β	90
5.	Conclusiones y perspectivas	96
5.1.	Conclusiones	96
5.2.	Perspectivas	97
6.	Productos de investigación	99
6.1.	Artículos	99
6.1.1.	Artículos publicados	99
6.2.	Eventos científicos	99
A.	Deducción de la ecuación de Helmholtz	100
B.	Absorción multifotónica	101
C.	Deducción de la ecuación de transmitancia	105

Índice de figuras

2.1.	Efecto de polarización debido al campo eléctrico incidente sobre un material.	15
2.2.	Cintura de un haz con perfil de onda gaussiano.	19
2.3.	Parámetros que componen un haz con perfil gaussiano.	19
2.4.	Perfil de intensidad para un haz Gaussiano en modo TEM_{00}	20
2.5.	Una carga en un resorte con masa m y carga q a una distancia x del origen donde hay un campo eléctrico externo aplicado \vec{E}	21
2.6.	Una partícula en un sistema de masa-resorte con masa m y carga q a una distancia x del origen donde hay un campo eléctrico externo \vec{E} aplicado.	21
2.7.	El potencial eléctrico en función del desplazamiento. A medida que x aumenta, el potencial ya no sigue una ecuación cuadrática y la partícula se ionizará más allá de cierto desplazamiento crítico. Se considerará pequeños desplazamientos cuando E es pequeño.	22
2.8.	En esta figura se muestra el fenómeno físico de la dependencia del índice de refracción con la intensidad como la geometría de la interacción y la descripción de los niveles de energía.	25
2.9.	Auto-enfoque de un haz dentro de un material con $n_2 > 0$	27
2.10.	(a)Transiciones entre estados virtuales cuando la energía del fotón es menor que E_g . (b) Proceso de absorción de dos fotones	30
2.11.	(a)Absorción dos fotones del mismo campo óptico. (b) Absorción dos fotones de diferentes campos óptico.	32
2.12.	Representación general de reflexiones en las superficies de la muestra.	34
2.13.	Absorción no lineal de segundo orden TPA.	35
2.14.	Gráfica de la transmitancia inversa en función de la intensidad incidente sobre la muestra	36
3.1.	Montaje experimental F-scan.	40
3.2.	Descripción experimental de la técnica F-scan.	40
3.3.	Principio de funcionamiento de EFTL. Un actuador electromagnético ejerce presión sobre una membrana, cambiando su radio de curvatura, modificando así su distancia focal[5].	41
3.4.	(a) Imagen de una EFTL (b) Esquema de la lente[5].	41
3.5.	Diámetro del haz en la superficie de la muestra con (a) f_1 y (b) f_2	42
3.6.	función de transmitancia.	44
3.7.	Caracterización de la lente EL 10-30. Los puntos representan los datos experimentales, mientras que la línea solida representa la ecuación de ajuste a los datos experimentales.	45
3.8.	En la Fig(a) se representan el valor predicho vs el valor real; mientras la Fig(b) representa los residuos del modelo; donde el valor posicional indica el orden en el cual están los datos experimentales.	47
3.9.	Residuos del modelo vs predicción.	47

3.10. Gráfico Q-Q plot de residuos del modelo.	48
3.11. Distribución residuos del modelo.	48
3.12. Intervalo de confianza calibración $\lambda=630$ nm.	49
3.13. Caracterización de la lente EL 10-30 empleando una longitud de onda $\lambda=1064$ nm.	49
3.14. En la Fig(a) se representan el valor predicho vs el valor real de la potencia óptica; mientras la Fig(b) representa los residuos del modelo.	50
3.15. Residuos del modelo vs predicción.	50
3.16. Gráfico Q-Q plot de residuos del modelo.	51
3.17. Gráfico Q-Q plot de residuos del modelo.	51
3.18. Caracterización de la lente EFTL mediante un ajuste polinomial empleando una longitud de onda $\lambda=1064$ nm.	52
3.19. En (a) se representa la dirección creciente de la corriente, y en (b) la dirección decreciente de la corriente.	53
3.20. Histéresis en la lente EFTL empleando una longitud de onda $\lambda=532$ nm.	53
3.21. Función de transmitancia medida con un cristal bulk de Si. La línea azul con puntos verdes corresponde al método con corriente creciente, mientras la línea roja con putos amarillos corresponde al método con corriente decreciente.	54
4.1. Función de transmitancia.	58
4.2. Variación de la potencia en la función de transmitancia. La profundidad de la señal se hace más intensa a medida que la potencia incidente es mayor.	59
4.3. Variación de la profundidad y el ancho en función de cambios en la potencia incidente.	60
4.4. Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.	60
4.5. Variación del diámetro en la función de transmitancia.	61
4.6. Variación de la profundidad y el ancho en función de cambios en el diámetro del haz incidente.	61
4.7. Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.	62
4.8. Variación en la duración del pulso t	62
4.9. Variación de la profundidad y el ancho debido a variaciones en la duración del haz incidente.	63
4.10. Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.	63
4.11. Variación de la distancia de la muestra con relación a la lente EFTL.	64
4.12. Variación de la profundidad y el ancho en función de la distancia muestra-EFTL.	64
4.13. Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.	65
4.14. Variación de la transmitancia ante cambios en el espesor de la muestra.	65
4.15. Variación de la profundidad y el ancho en función de variaciones en el espesor de la muestra.	66
4.16. Variación de la profundidad y el ancho en función de variaciones en el espesor de la muestra.	66
4.17. Variación en la tasa de repetición del haz.	67
4.18. Variación de la profundidad y el ancho en función de variaciones de ν	67
4.19. Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.	68
4.20. Variación en la longitud de onda.	68
4.21. Variación de la profundidad y el ancho de la transmitancia.	69
4.22. Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.	69
4.23. (a) $\beta(1-R)L_{eff}I_o(f)$ representa y, (b) la cantidad $\frac{1}{\cosh^2(\rho)}$	70
4.24. Comparación entre la función de transmitancia aproximada con la función de transmitancia original.	71
4.25. Comparación entre la función de transmitancia aproximada con la función de transmitancia original.	72

4.26. En (a) se realiza ajuste mediante la función de transmitancia a primer orden en β y en (b) el ajuste mediante la función de transmitancia a segundo orden en β	72
4.27. Correlación positiva entre dos variables.	73
4.28. Correlación negativa entre dos variables.	74
4.29. Correlación diámetro del haz y coeficiente de absorción.	74
4.30. En (a) errores relativos. En (b) Variación del diámetro en función de β	75
4.31. Correlación potencia del haz y coeficiente de absorción.	75
4.32. En (a) errores relativos (b) Variación de la potencia en función de β	76
4.33. Correlación tasa de repetición y coeficiente de absorción β	76
4.34. En (a) Errores relativos ν en función de β . En (b) Variación de la ν en función de β	77
4.35. Correlación ancho temporal y coeficiente de absorción β	77
4.36. En (a) Errores relativos t en función de β . En (b) Variación de la t en función de β	77
4.37. Correlación distancia de la muestra a la EFTL d_s y coeficiente de absorción β	78
4.38. En (a) Errores relativos d_s en función de β . En (b) Valores obtenidos	78
4.39. Correlación distancia entre la longitud de onda λ y coeficiente de absorción β	79
4.40. En (a) Errores relativos L en función de β . En (b) Valores obtenidos.	79
4.41. Comparación de los errores relativos de los parámetros en función de β	80
4.42. Errores relativos potencia del haz y diámetro del haz en función de β	80
4.43. Errores relativos potencia del haz y tasa de repetición del haz en función de β	81
4.44. Errores relativos de la tasa de repetición del haz y el ancho temporal del haz en función de β	81
4.45. Errores relativos de los parámetros experimentales en función de β	82
4.46. Errores relativos de los parámetros experimentales en función de β	82
4.47. Función de transmitancia con ruido gaussiano añadido.	85
4.48. Distribución de residuos normalizados para la potencia.	86
4.49. Distribución de residuos normalizados para el diámetro.	86
4.50. Distribución de residuos normalizados para el ancho temporal.	87
4.51. Distribución de residuos normalizados para la tasa de repetición.	87
4.52. Distribución de residuos normalizados.	88
4.53. Distribución de residuos normalizados de los valores de β	89
4.54. Distribución de residuos normalizados.	89
4.55. Distribución de residuos normalizados.	90
4.56. Distribución gaussiana para P y D	91
4.57. Distribución normal para t y d_s	91
4.58. Distribución normal para L y ν	91
4.59. Función de transmitancia con errores normales en los parámetros simulados.	92
4.60. Distribución normal en β	92
4.61. Gráfico qqplot para β	93
B.1. Absorción de tres fotones.	103

Índice de cuadros

3.1. Ajuste de datos experimentales empleando una longitud de onda $\lambda=630$ nm. La primera columna indica el valor de ajuste, la segunda columna la desviación estándar y al tercera columna el intervalo de confianza.	45
3.2. Ajuste de datos experimentales empleando una longitud de onda $\lambda=1064$ nm. La primera columna indica el valor de ajuste, la segunda columna la desviación estándar y la tercera columna el intervalo de confianza.	50
3.3. Parámetros experimentales técnica F-scan.	54
4.1. Parámetros simulados con los cuáles se ha realizado el modelo teórico de la función de transmitancia.	59
4.2. Ajustes para β mediante la implementación de ambas aproximaciones.	73
4.3. Estadísticas para β ajustando con la potencia.	85
4.4. Estadísticas para β ajustando con el diámetro.	86
4.5. Estadísticas para β ajustando con el ancho temporal.	87
4.6. Estadísticas para β ajustando con la tasa de repetición del haz.	87
4.7. Estadísticas para β ajustando con la potencia.	88
4.8. Estadísticas para β ajustando con todos los parámetros libres.	88
4.9. Estadísticas para β ajustando con todos los parámetros libres.	89
4.10. Valores métricos ajustando con todos los parámetros libres.	90

Resumen

F-scan es una técnica de caracterización de propiedades ópticas no lineales que permite determinar el coeficiente de absorción de dos fotones en materiales del tipo semiconductor, y surge como una alternativa a la técnica Z-scan. Su característica principal es el uso de una lente electro-óptica que cambia su longitud focal en función de una corriente aplicada, en reemplazo del desplazamiento de la muestra a través del eje óptico del montaje, permitiendo determinar la variable de interés mediante un ajuste de los datos experimentales. No obstante, como todas las técnicas de este tipo, F-scan requiere de la determinación de varios parámetros experimentales; que influyen en la determinación del valor correcto de absorción de dos fotones (TPA).

En este trabajo se hace uso de diferentes aproximaciones y herramientas estadísticas para determinar cómo influye cada uno de los parámetros en la precisión del valor de determinado o variable de interés; en este caso: el coeficiente de absorción de dos fotones β . Un ajuste correcto de los datos experimentales es crucial para obtener un valor confiable del parámetro de interés. Por lo tanto, es importante conocer los valores de todos los parámetros experimentales con la mayor precisión posible para utilizar la menor cantidad de parámetros de interés como variables de ajuste, especialmente si la técnica requiere el conocimiento de un gran número de parámetros (en este caso 10 parámetros experimentales). Pero en ocasiones esto no es posible, y los parámetros experimentales sólo se conocen con una incertidumbre considerable. Por lo tanto, es de gran valor conocer cuales de estos parámetros influyen más en la incertidumbre de la variable de interés, y como influyen.

Los parámetros principales analizados fueron diámetro del haz, longitud de onda, potencia promedio, ancho temporal del pulso, la frecuencia del pulso, el espesor de la muestra y la distancia muestra-lente. Se encontró que los parámetros que más influyen son el ancho temporal, y la frecuencia de pulso, lo cual conlleva a que para un valor correcto de TPA estos parámetros deben ser medidos con un bajo error relativo. Además, del análisis estadístico y diferentes pruebas visuales y analíticas se determinó la distribución estadística de TPA. Se encontró que sigue una distribución normal lo cual valida la técnica de ajuste empleada en[1].

Bibliografía

- [1] EDGAR RUEDA, JUAN H. SERNA, ABDULLATIF Y HAMAD, HERNANDO GARCIA. *Two-photon absorption coefficient determination using the differential F-scan technique*. November 2019 Optics & Laser Technology 119(10):105584

Introducción

La luz juega un rol vital en nuestra vida diaria y se ha convertido en una herramienta importante para nuestro mundo en el siglo XXI. Las tecnologías basadas en la luz protegen la salud y la seguridad, proveen energía sustentable, permiten exploraciones espaciales, suministran opciones de iluminación avanzada en zonas rurales, permiten la comunicación vía internet y mantienen la promesa de posibilidades sin límite para la mejora de la condición humana y la protección de nuestro planeta.

El nacimiento del láser ha creado en el ámbito científico un gran interés por conocer la respuesta de algunos materiales en función de la luz incidente, más aún, en la determinación de las propiedades ópticas no lineales de materiales de uso científico e industrial. Para medir la absorción no lineal y el índice de refracción no lineal, se ha utilizado desde hace varias décadas una técnica llamada Z-scan, especialmente debido a su configuración óptica y tratamiento de datos relativamente simples, la cual se caracteriza por medir las variaciones de la intensidad debido al enfoque de un haz cuyo perfil de intensidad es gaussiano después de que se transmite o refleja en la superficie de la muestra que se desea estudiar[2][1].

La técnica F-scan es una modificación de la técnica Z-scan que también permite realizar mediciones experimentales de parámetros no lineales como el coeficiente de absorción de dos fotones y el índice de refracción no lineal en materiales del tipo semiconductor. La principal característica de F-scan es la incorporación de un lente que varía la longitud focal en función de la corriente suministrada. Por lo tanto, a diferencia de Z-scan, la muestra permanece fija en el plano focal y, debido a esto se pueden realizar montajes complejos donde se deban conectar instrumentos a la muestra o generar campos eléctricos o magnéticos.

Las técnicas de caracterización óptica no lineales, en este caso como F-scan requieren conocer ciertos parámetros experimentales para la determinación de la variable de interés, lo cual hace que la precisión con la que se determine la variable de interés depende directamente de la precisión de los parámetros experimentales. Por lo tanto, se requiere estudiar como cada parámetro influye en la precisión final de la variable interés.

El objetivo en la mayoría de los experimentos es combinar varias variables en una sola cantidad, es decir, asociar el error de una cantidad con cierta combinación de parámetros experimentales. El error en el valor combinado es una función de los errores en los términos constituyentes. Como la suma de probabilidades no es lineal, la simple suma de los errores de los términos constituyentes da una sobreestimación del error en la variable combinada. Debido a la complejidad de la ecuación de ajuste de F-scan, se hace importante realizar un análisis minucioso para ver cómo se correlacionan las diferentes variables y como esto afecta el valor de la variable de interés.[3]

En este trabajo se pretende determinar la influencia de los parámetros experimentales en la obtención del valor correcto de β ; para ello el trabajo se dividió de la siguiente manera: En el capítulo 2 se hace una revisión de los principales aspectos teóricos como los efectos de absorción no lineal y la teoría que conlleva a entender un haz con perfil espacial y temporal gaussiano.

En el capítulo 3 se realiza un estudio de la transmitancia y se describe la técnica de caracterización óptica no lineal F-scan. Además, se describe como la dirección de la corriente suministrada a la lente EFTL ocasiona cambios en la transmitancia debido a la histeresis ocasionada en la misma, y como este proceso de histeresis influye en errores al momento de obtener el valor correcto del parámetro β .

En el capítulo 4 se analizan la influencia de los parámetros experimentales en la función de transmitancia, y como estos cambios, generan variaciones en el valor correcto de β . Además, se realiza una aproximación de la función de transmitancia lo cual permite que el análisis de datos estadísticos desde el punto de vista computacional sea más rápido, permitiendo obtener un muestreo mayor. Luego, se procede a estudiar las correlaciones entre los valores experimentales y β , y se determina cual de los parámetros experimentales influyen con un mayor error en el valor real de β teniendo en cuenta el ajuste realizado. Finalmente, se emplean métricas estadísticas para validar los ajustes y a partir de ello, considerando que los parámetros experimentales siguen un error gaussiano, se procede a determinar la distribución estadística que sigue el parámetro β , lo cual es de gran importancia ya que permitirá saber si toda la teoría del error basada en la distribución gaussiana es válida.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

Determinar la influencia de los parámetros experimentales en la determinación del valor correcto del coeficiente de absorción de dos fotones β .

1.1.2. Objetivos específicos

- Realizar un estudio detallado de la teoría que conlleva a la determinación de los parámetros ópticos no lineales de tercer orden y las transiciones ópticas que se producen en este fenómeno, así como la interacción radiación-materia.
- Caracterizar la lente de distancia focal variable controlada electrónicamente (EFTL) en función a la corriente suministrada y estudiar como puede afectar la determinación correcta del coeficiente de absorción TPA.
- Implementar análisis estadísticos para determinar los errores presentes en los parámetros experimentales, y como estos influyen en el valor de β .

Bibliografía

- [1] M. SHEIK-BAHAE, A.A. SAID, T.H. WEI, D.J. HAGAN, AND E.W. VAN STRYLAND, "Sensitive Measurement of Optical Nonlinearities Using a Single Beam", Journal of Quantum Electronics, JQE QE-26, 760-769
- [2] M. SHEIK-BAHAE, J. WANG, R. DE SALVO, D. J. HAGAN Y E. W. VAN. "Measurement of nondegenerate nonlinearities using a two-color Z-scan", *Opt. Lett.*, 17 (1992) 258-260.
- [3] HAND, DAVID. (2011). "Measurements and their Uncertainties: A Practical Guide to Modern Error Analysis by Ifan G. Hughes, Thomas P. A. Hase. *International Statistical Review*.
- [4] JUAN HUMBERTO SERNA RESTREPO. *Estudio e implementación de técnicas ópticas basadas en el principio de distorsión espacial del haz para la medición de parámetros ópticos no lineales y caracterización de pulsos ultracorto. (2016) Tesis Doctorado.*

Fundamentos y conceptos teóricos

La óptica es una parte importante de la vida cotidiana. La luz se propaga por el espacio vacío, así como a través de objetos materiales, y nos proporciona información visual sobre el mundo. Los efectos familiares reflexión, refracción, difracción, absorción y dispersión explican una amplia variedad de experiencias visuales comunes a nosotros, desde el enfoque de la luz mediante una lente simple hasta los colores que se ven en un arco iris. Sorprendentemente, esto puede explicarse asignando un pequeño conjunto de parámetros ópticos a los materiales. Bajo las experiencias ordinarias de la vida cotidiana, estos parámetros son constantes, independientes de la intensidad de la luz y se enmarcan en el área conocida como la óptica lineal.

La invención del láser dio lugar al estudio de la óptica a altas intensidades, lo que condujo a nuevos fenómenos que no se ven con la luz ordinaria, como la generación de nuevos colores a partir de luz monocromática en un cristal transparente o el autoenfoco de un haz óptico en un líquido homogéneo. A las intensidades utilizadas para generar este tipo de efectos, los parámetros ópticos habituales de los materiales no pueden considerarse constantes, sino que se convierten en funciones de la intensidad de la luz lo cual se conoce como óptica no lineal. Entre los efectos ópticos no lineales se encuentran la generación de segundo armónico, generación de tercer armónico, la radiación de Hawking análoga, entrelazamiento de fotones y muchos más[4]. Algunas consecuencias de estos fenómenos son la generación de longitudes de onda a partir de una luz monocromática en un cristal transparente, la absorción en función del haz luminoso o el auto-enfoque de la radiación en el medio material que se logran medir a partir de cambios en la amplitud, frecuencia o fase de un campo electromagnético al propagarse en el interior de un material. Estas simples cantidades medibles otorgan información del material como el índice de refracción no lineal n_2 , el coeficiente de absorción de dos fotones β o la susceptibilidad eléctrica χ_e .

2.1. Ecuación de onda para el campo electromagnético

Un campo óptico está descrito a través de un campo eléctrico y un campo magnético, los cuales se encuentran acoplados entre sí. La propagación de este campo óptico a través de un medio está totalmente condicionado por las propiedades del medio; ya sean eléctricas, magnéticas u ópticas. Estas propiedades se encuentran representadas a través de los tensores de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética.

Cuando un campo eléctrico es aplicado a un medio dieléctrico, una polarización es creada en el material. Las ecuaciones de Maxwell para materiales no magnéticos en ausencia de cargas y corrientes externas son:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0 & & \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 & & \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

donde \vec{D} es el vector de desplazamiento eléctrico y \vec{H} es el vector de inducción magnética[2], en adición se tiene que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)$, donde \vec{P} es la polarización del material, ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío y $\vec{E}(\vec{r}, t)$ es el campo eléctrico. La polarización da evidencia que a medida que el campo óptico incidente interactúa con el medio provoca que la distribución de carga en el material se reordene. La primera aproximación para el reordenamiento es la aproximación dipolar. El reacomodo de la distribución de carga causa cambios en las propiedades ópticas de los medios.

Los campos eléctricos aplicados a un medio material producen una redistribución de densidad de carga, en materiales dieléctricos se produce el efecto de polarización. Los dipolos inducidos en el material se orientan en la dirección del campo eléctrico aplicado. La luz, conformada por campos electromagnéticos, causa en los materiales el efecto de polarización, este cambio a su vez induce diferencias en las propiedades del material y por ende en la forma en como interacciona con la luz incidente tal como se muestra en la Fig. 2.1.

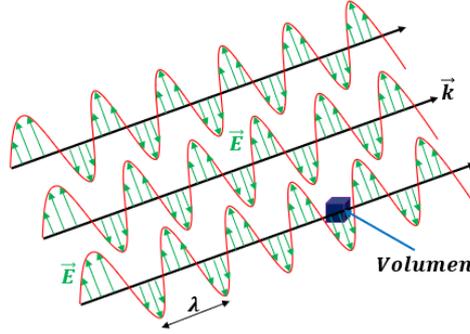


Figura 2.1: Efecto de polarización debido al campo eléctrico incidente sobre un material.

Con el objetivo de obtener las ecuaciones de Maxwell del campo eléctrico en un medio material se debe tomar el rotacional en ambos lados de la ecuación $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ teniendo como resultado;

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \tag{2.2}$$

Aplicando la identidad vectorial $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$ en la Ec.(2.2) se obtiene:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \tag{2.3}$$

El vector de campo magnético \vec{B} esta relacionado con el vector de inducción magnética \vec{H} a través de la relación $\vec{B} = \mu \vec{H}$ donde μ es la permeabilidad magnética. Considerando $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ [2] se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) \tag{2.4}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}$, se puede obtener,

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial^2 \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

El vector de desplazamiento $\vec{D}(\vec{r}, t)$ en términos de la polarización $\vec{P}(\vec{r}, t)$ y el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ está representado por;

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (2.6)$$

Sustituyendo la Ec.(2.5) en la Ec.(2.6), se llega a;

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

La Ec.(2.7) es la ecuación de onda para un medio sin magnetización, eléctricamente neutro, no conductor, es decir, no existen en el material cargas libres ni densidad de corriente libre, además ϵ_0 y μ se consideran constantes escalares, lo cual es cierto para un medio isotrópico¹ lineal y homogéneo. Un medio es lineal si sus propiedades no dependen de la amplitud de los campos en el medio. Es homogéneo si sus propiedades no son funciones del espacio. Además, también se observa la dependencia con el término de polarización $\vec{P}(\vec{r}, t)$ que actúa como fuente de radiación y que puede incluir tanto el término lineal como los términos no lineales. Por lo tanto, el vector de polarización será una función la cual puede tener una dependencia exclusiva de la intensidad del campo electromagnético incidente sobre el material. Cuando el campo óptico sobre el material es del orden del campo de un átomo en el estado base $E_{\text{átomo}} = e/4\pi\epsilon_0 a_0^2 = 5 \times 10^{11} \text{V/m}$, la relación entre $\vec{P}(\vec{r}, t)$ y $\vec{E}(\vec{r}, t)$ se considera lineal, por el contrario, si el campo incidente es mucho mayor $E_{\text{átomo}}$, la relación se considera no lineal.

2.2. Haces Gaussianos

La importancia fundamental de la Ec.(2.7) es modelar la manera en la que se puede propagar un campo óptico a través de un medio no lineal y por lo tanto, divide el estudio de la óptica en dos grandes áreas de la investigación.

La primera gran área se conoce como óptica lineal, y envuelve todos aquellos fenómenos ópticos en los cuales la intensidad del campo óptico no es relevante. El objetivo central en este caso, es entender como las propiedades ópticas y eléctricas del medio modifican el campo óptico que se propaga. La segunda área pertenece al dominio de la óptica no lineal en donde la intensidad del campo óptico se vuelve absolutamente relevante y cuyo eje central de estudio es explicar los fenómenos que ocurren en un sistema físico, cuando sobre éste incide luz de alta intensidad capaz de modificar las propiedades ópticas del mismo.

2.2.1. Óptica de un haz Gaussiano

Considerando el campo óptico incidente monocromático, el campo eléctrico puede escribirse como una función armónica compleja dependiente del tiempo y la posición;

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp i\omega t \quad (2.8)$$

¹El medio es isotrópico si sus propiedades son las mismas en todas las direcciones desde cualquier punto dado.

Donde $\vec{E}(\vec{r})$ se conoce como la amplitud compleja del campo eléctrico y $\omega=2\pi f$ es la frecuencia angular de la onda, con f siendo la frecuencia del campo óptico.[2][4]
De la misma forma en que se puede escribir el vector $\vec{E}(\vec{r})$, también es posible escribir los vectores $\vec{P}(\vec{r})$, $\vec{D}(\vec{r})$ y $\vec{B}(\vec{r})$.

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{r}, t) &= \vec{P}(\vec{r}) \exp i\omega t \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \vec{D}(\vec{r}) \exp i\omega t \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}(\vec{r}) \exp i\omega t\end{aligned}\tag{2.9}$$

Las cantidades \vec{P} , \vec{D} y \vec{B} son las amplitudes complejas para cada uno de los campos vectoriales que estas cantidades representan. Reemplazando la Ec.(2.8) junto con la Ec.(2.9) en la Ec.(2.1) y, teniendo en cuenta las relaciones constitutivas para el campo eléctrico y el campo magnético se llega a que la amplitud compleja del campo eléctrico o magnético debe satisfacer la ecuación de Helmholtz. Ver ApéndiceA:

$$\nabla^2 \vec{E} + \vec{k} \vec{E} = 0\tag{2.10}$$

donde \vec{E} es la amplitud del campo, \vec{k} es el número de onda, y ∇^2 es el Laplaciano.

Como el medio considerado es isotrópico, lineal y homogéneo una solución para la Ec.(2.10) es[4];

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{A} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})\tag{2.11}$$

Considerando que el haz es una onda donde su propagación es altamente direccional, se puede hacer uso de la aproximación paraxial en la que se consideran las variaciones del campo electromagnético en la dirección transversal muy pequeñas en comparación con la dirección de propagación.

2.2.2. Aproximación paraxial

Una onda es paraxial si su frente de onda está conformado por rayos paraxiales. Esta aproximación es adecuada cuando no existen divergencias muy grandes del frente de onda y se asume que ésta se propaga como una onda plana a lo largo de una dirección específica. En estos casos, la envolvente compleja se modifica de forma tal que ya no es un vector constante sino que varía suavemente con la posición. Asumiendo que $\vec{k} = k_z \hat{z}$,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) \exp(ik_z z)\tag{2.12}$$

Para que la Ec. (2.12) cumpla con la ecuación de Helmholtz, se deben añadir condiciones adicionales a $\vec{A}(\vec{r})$ para garantizar que la variación sea suave dentro de una distancia igual a la longitud de onda del campo. Así, la envolvente compleja debe satisfacer la condición:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r})}{\partial z^2} \ll k_z^2 \vec{A}(\vec{r})\tag{2.13}$$

Reemplazando la Ec.(2.12) en la Ec.(2.10) y haciendo uso de la Ec.(2.13) es posible llegar a una ecuación para la envolvente compleja llamada ecuación paraxial de Helmholtz o SVEA (Slowly Varying Envelope Approximation)[4].

$$\nabla_t^2 \vec{A} - 2ik_z \vec{A} = 0 \quad (2.14)$$

donde ∇_t^2 es el Laplaciano transversal, el cual se puede observar en la Ec.(2.15).

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{j} \quad (2.15)$$

La solución a la Ec.(2.14) es una ecuación parabólica la cuál es una aproximación paraxial de una onda esférica. Debido a que la óptica no lineal requiere de campos intensos, es necesario utilizar láseres, que por naturaleza son altamente direccionales, es decir, que estos cumplan con la condición de paraxialidad. Esto implica que la aproximación paraxial es adecuada para describir la forma en la que se propaga un campo óptico en un medio material.

2.2.3. Solución a la ecuación de Helmholtz

Debido a que \vec{A} es una cantidad vectorial, cada una de sus componentes se puede representar según[4], donde $\vec{U}(\vec{r})$ es una componente cualquiera de $\vec{E}(\vec{r})$ y $\vec{A}(\vec{r})$.

$$\vec{U}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(-ik_z z) \quad (2.16)$$

En la aproximación paraxial $\vec{E}(\vec{r})$ debe satisfacer la ecuación paraxial de Helmholtz, por tanto,

$$\nabla_t^2 \vec{E} - i2k \vec{E} = 0 \quad (2.17)$$

La solución a la Ec.(2.17) paraxial son los llamados haces gaussianos,

$$\vec{U}(\vec{r}, t) = \frac{w_0}{w(z)} \left(\frac{-2r^2}{w(z)^2} \right) \exp\left(-ikz + \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right) \exp\left(\frac{-ikr^2}{2R(z)}\right) + c.c \quad (2.18)$$

Es importante destacar el carácter físico o propiedad física de cada factor en la solución gaussiana de la Ec.(2.18). El primer factor se debe a la amplitud del campo electromagnético, el cual está representado por;

$$A_0 = \left(\frac{-2r^2}{w(z)^2} \right) \quad (2.19)$$

el segundo factor es la fase longitudinal en la dirección de propagación:

$$\exp\left(-ikz + \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right) \quad (2.20)$$

y, el tercer es la fase radial en el plano transversal.

$$\exp\left(\frac{-ikr^2}{2R(z)}\right) \quad (2.21)$$

Los parámetros que describen un haz Gaussiano, y que dependen de la propagación son: el diámetro del haz $w(z)$ y el radio de la curvatura del frente de onda $R(z)$ dados por:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (2.22)$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right) \quad (2.23)$$

donde z_0 se conoce como zona de Rayleigh lo cual físicamente es la distancia de propagación en la que el haz no cambia su diámetro significativamente, es decir, en esta zona el haz se puede considerar como una onda plana; está zona se mide desde la cintura del haz w_0 que es la medida en el diámetro del haz en el punto donde este se hace más pequeño.

$$z_0 = \frac{kw_0^2}{4} \quad (2.24)$$

En la Fig. 2.2, se muestra la propagación para un haz con perfil Gaussiano, donde se ha simulado una longitud de onda $\lambda=750\text{nm}$ y una cintura de haz $w_0=0.1\text{mm}$.

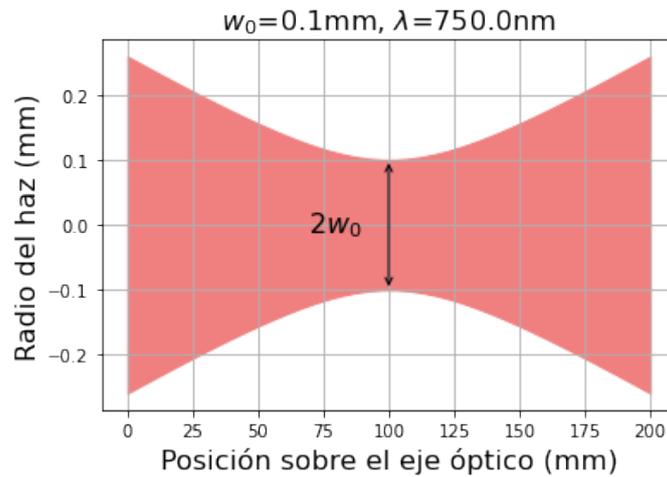


Figura 2.2: Cintura de un haz con perfil de onda gaussiano.

Por su parte, en la Fig.2.3 se puede observar el comportamiento de los parámetros que componen un haz cuyo perfil es gaussiano. El diámetro del haz es de comportamiento hiperbólico, los vértices pertenecientes a estas hipérbolas representan la cintura de haz w_0 . Los frentes de ondas que caracterizan el haz gaussiano poseen una forma parabólica donde su radio de curvatura en la región paraxial (alrededor del eje de propagación) están descritas por un semicírculo de radio $R(z)$.

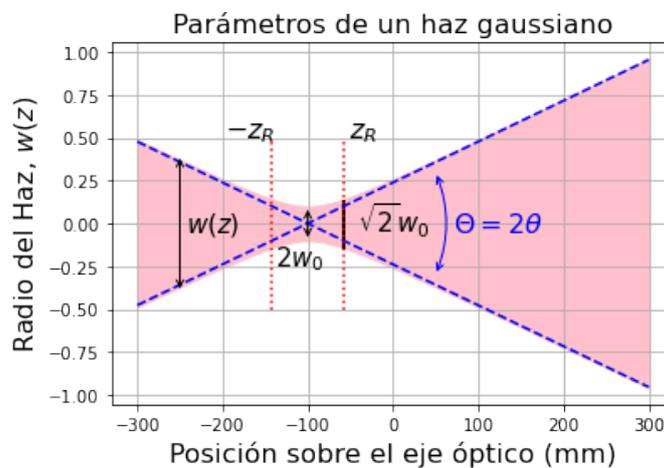


Figura 2.3: Parámetros que componen un haz con perfil gaussiano.

Como se ha establecido anteriormente el comportamiento de una onda plana en la zona o rango de Rayleigh no presenta variaciones apreciables de amplitud e intensidad sobre el eje de propagación, por lo tanto en esta zona estos parámetros son considerados como constantes.

La intensidad de un haz gaussiano se puede encontrar mediante la Ec.(2.25) y en la Fig.2.4 se puede observar el perfil de intensidad para un haz gaussiano en el modo TEM_{00}

$$\left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 = \left| \vec{A}(\vec{r}, t) \right|^2 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp\left(\frac{-2r^2}{w^2(z)} \right) \quad (2.25)$$

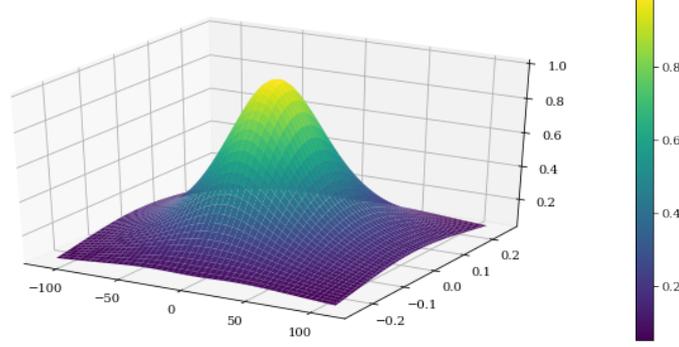


Figura 2.4: Perfil de intensidad para un haz Gaussiano en modo TEM_{00} .

2.3. Medios ópticos lineales y no lineales. Oscilador armónico

La ecuación de onda que describe la manera en la cual un campo óptico se propaga a través de un medio no lineal está dado por la Ec.(2.7) donde el término de polarización se puede escribir como;

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_L(\vec{r}, t) + \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) \quad (2.26)$$

donde $\vec{P}_L(\vec{r}, t)$ es el término de polarización lineal y $\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)$ hace referencia a la contribución no lineal de la polarización.

La polarización y el campo óptico incidente están relacionados de forma general por

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \left[\chi^{(1)} \vec{E}(\vec{r}, t) + \chi^{(2)} \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \chi^{(3)} \vec{E}^3(\vec{r}, t) + \dots + \chi^{(n)} \vec{E}^n(\vec{r}, t) \right], \quad (2.27)$$

donde χ^n es la susceptibilidad eléctrica de orden n . En consecuencia se puede definir el término de polarización de orden n como $\vec{P}^n \equiv \epsilon_0 \chi^n \vec{E}^n(\vec{r}, t)$, donde $\chi^{(2)}$ es un tensor de rango tres asociado a los comportamientos cuadráticos no lineales de segundo orden, $\chi^{(3)}$ es un tensor de rango cuatro asociado al comportamiento cúbico de la susceptibilidad y origina fenómenos no lineales de tercer orden y, así sucesivamente las susceptibilidades van generando fenómenos no lineales correspondientes a su orden. A las susceptibilidades iguales o mayores a las de segundo orden se les conoce como susceptibilidades no lineales.

A continuación, se desarrolla un modelo de la respuesta estática de un oscilador armónico lineal y luego se generaliza al caso no lineal para mostrar como la susceptibilidad no lineal se relaciona con la constante de resorte lineal y no lineal. Posteriormente, el modelo se aplica a un resorte no lineal en un campo eléctrico armónico para desarrollar una comprensión de la dependencia de la susceptibilidad óptica no lineal en la frecuencia del campo eléctrico.

2.3.1. Oscilador armónico lineal

Sea una carga en un resorte como se muestra en la Fig. 2.5. Para el modelo de oscilador armónico unidimensional estático, se aplica un campo eléctrico estático \vec{E} el cual hace que el resorte se estire. El campo eléctrico aplicado puede ser tan grande que el resorte se estire lo suficiente para salir de su zona de respuesta lineal y conduzca a términos anarmónicos, es decir, que el resorte pierda su linealidad. Se considerará que el campo es lo suficientemente pequeño como para mantener el resorte en un zona lineal.

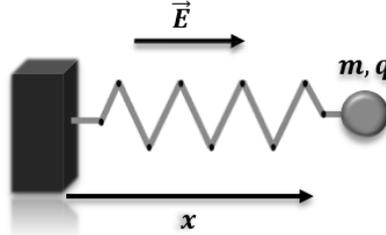


Figura 2.5: Una carga en un resorte con masa m y carga q a una distancia x del origen donde hay un campo eléctrico externo aplicado \vec{E} .

El diagrama de fuerzas que actúan sobre una carga q de masa m se muestra en la Fig.2.6. En equilibrio, la fuerza del resorte $\vec{F}_s = -kx\hat{i}$, donde k es la constante del resorte, igual a la fuerza que produce el campo eléctrico E sobre la carga, es decir,

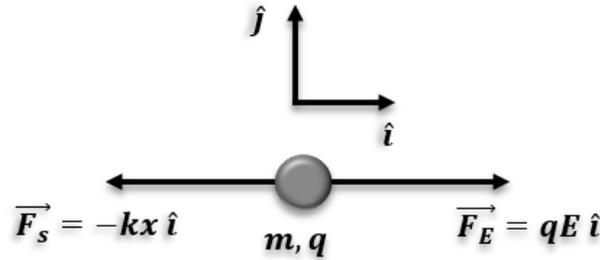


Figura 2.6: Una partícula en un sistema de masa-resorte con masa m y carga q a una distancia x del origen donde hay un campo eléctrico externo \vec{E} aplicado.

$$F_s = F_E \rightarrow kx = qE \rightarrow x = \frac{q}{k}E, \quad (2.28)$$

Reemplazando la Ec. (2.28) en $p = qx$, donde p es el momento dipolar se obtiene;

$$p = \frac{q^2}{k}E \quad (2.29)$$

La susceptibilidad lineal estática se define como $\alpha = \left. \frac{\partial p}{\partial E} \right|_{E=0}$ donde se tiene que $\alpha = \frac{q^2}{k}$. Cuando k es pequeño, la partícula q está débilmente ligada y resultan grandes desplazamientos de pequeños campos aplicados. Cuando q es grande, la susceptibilidad lineal o polarización es grande porque la fuerza aplicada es proporcional a q . En un ensamble de N resortes se tiene que[8]

$$P = \epsilon_0 N p = \epsilon_0 N \frac{q^2}{k} E. \quad (2.30)$$

Comparando $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}(\vec{r}, t)$ con la Ec. (2.30), se concluye que,

$$\chi^{(1)} = N \frac{q^2}{k} \quad (2.31)$$

2.3.2. Oscilador armónico no lineal

En el caso de un oscilador armónico, se sabe que $\vec{F}_s = -\vec{\nabla}U_L$, la fuerza que actúa sobre la carga es igual al gradiente de un potencial armónico $U_L = kx^2/2$, pero, ¿qué pasa cuando el potencial es anarmónico? Una forma de dar respuestas es suponer que el potencial anarmónico se desvía suavemente del caso armónico como se aprecia en la Fig.2.7 razón por la cual se puede expandir la magnitud de la fuerza en series de Taylor a partir de la posición de equilibrio, la cual se supone en $x = 0$, es decir,

$$F(x) = -\nabla U_{\text{nL}} = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + \dots \quad (2.32)$$

$$\approx k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 \quad (2.33)$$

donde se ha aproximado la serie hasta el término de segundo orden y $k^{(1)} = F'(0) = k$ es el coeficiente lineal del resorte y $k^{(2)} = F''(0)/2$ es el coeficiente no lineal de segundo orden del resorte.

Si se aplica un campo externo E sobre la carga tal que el sistema este en equilibrio, se tiene entonces que,

$$k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 = qE, \quad (2.34)$$

la cual es una ecuación cuadrática en x y por tanto, se puede reescribir como:

$$x^2 + \frac{k^{(1)}}{k^{(2)}}x - \frac{q}{k^{(2)}}E = 0. \quad (2.35)$$

Solucionado para x ;

$$x = \frac{-k^{(1)}}{2k^{(2)}} \pm \sqrt{\left(\frac{k^{(1)}}{k^{(2)}}\right)^2 + \frac{4q}{k^{(2)}}E} = \frac{-k^{(1)}}{2k^{(2)}} \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{4q}{k^{(2)}}\left(\frac{k^{(2)}}{k^{(1)}}\right)^2 E} \right] \quad (2.36)$$

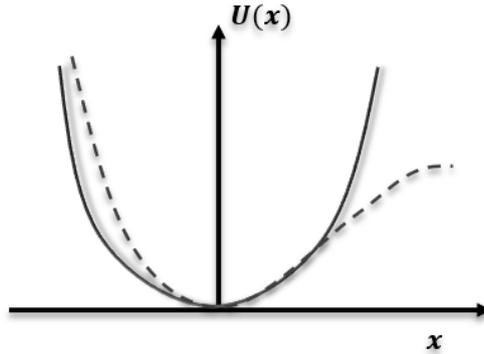


Figura 2.7: El potencial eléctrico en función del desplazamiento. A medida que x aumenta, el potencial ya no sigue una ecuación cuadrática y la partícula se ionizará más allá de cierto desplazamiento crítico. Se considerará pequeños desplazamientos cuando E es pequeño.

Considerando campos pequeños, de tal forma que $\frac{4q}{k^{(2)}}\left(\frac{k^{(2)}}{k^{(1)}}\right)^2 E \ll 1$. Esta aproximación es válida, ya que siempre el experimentador podrá manipular la amplitud de campo externo E ,

por lo cual se puede usar la aproximación del binomio de Newton $(1 + a)^n = 1 + an + n(n - 1)a^2/2! + n(n - 1)(n - 2)a^3/3!$ en la Ec.(2.36),

$$x = \frac{-k^{(1)}}{2k^{(2)}} \left[1 \pm \left(1 + \frac{1}{2} \left(4qk^{(2)} E \left(\frac{1}{k^{(1)}} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(4qk^{(2)} E \left(\frac{1}{k^{(1)}} \right)^2 \right)^2 \right) \right) \right] - \frac{k^{(1)}}{32k^{(2)}} \left(4qk^{(2)} E \left(\frac{1}{k^{(1)}} \right)^2 \right)^3, \quad (2.37)$$

donde

$$x = \frac{q}{k^{(1)}} E - \frac{q^2 k^{(2)}}{(k^{(1)})^3} E^2 + \frac{2q^4 (k^{(2)})^2}{(k^{(1)})^5} E^3, \quad (2.38)$$

recordando que $p = qx$, el momento dipolar es,

$$p = qx = \frac{q^2}{k^{(1)}} E - \frac{q^3 k^{(2)}}{(k^{(1)})^3} E^2 + \frac{2q^5 (k^{(2)})^2}{(k^{(1)})^5} E^3, \quad (2.39)$$

teniendo en cuenta la Ec.(2.30),

$$P = \epsilon_0 N p = \epsilon_0 \left[\frac{Nq^2}{k^{(1)}} E - \frac{Nq^3 k^{(2)}}{(k^{(1)})^3} E^2 + \frac{2Nq^5 (k^{(2)})^2}{(k^{(1)})^5} E^3 \right], \quad (2.40)$$

comparando la Ec.(2.40) con la Ec.(2.27) se obtiene,

$$\chi^{(1)} = \frac{Nq^2}{k^{(1)}}, \quad \chi^{(2)} = \frac{-Nq^3 k^{(2)}}{k^{(1)3}}, \quad \chi^{(3)} = \frac{2Nq^5 k^{(2)2}}{k^{(1)5}}. \quad (2.41)$$

2.4. Efectos no lineales de tercer orden

Como el medio óptico considerado por el cual se propaga el campo es lineal y no dispersivo, entonces $\vec{P}(\vec{r}, t)$ debe ser una función que varía proporcionalmente con el campo óptico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, donde el factor de proporcionalidad esta dado por la susceptibilidad óptica $\chi^{(i)}(r - r', t - t')$ y como se estableció anteriormente, esta relacionado con las propiedades ópticas del material. Este tensor de susceptibilidad, es definido, de tal manera que cumpla con el principio de causalidad, lo cual indica que $\chi^i = 0$ si $t - t' < 0$, garantizando que la respuesta del sistema no ocurra antes de que se aplique la perturbación. Además, si el medio óptico es homogéneo y su respuesta es localizada se debe cumplir que $r = r'$. Lo anterior implica que el tensor de susceptibilidad óptica va a ser una función solamente del tiempo que transcurre desde que se aplica el campo óptico al sistema hasta que se mide la respuesta del mismo.

Luego, se puede considerar $\vec{P}(\vec{r}, t)$ y $\vec{E}(\vec{r}, t)$ como cantidades escalares aunque, en realidad estas cantidades son vectoriales.

$$\vec{P}(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{P}(t), \quad \vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{E}(t) \quad (2.42)$$

Donde se asume que la polarización al tiempo t depende únicamente de los valores instantáneos de la intensidad del campo eléctrico como se muestra en la Ec. (2.43). La suposición

de que el medio responde instantáneamente también implica que el medio no debe tener pérdidas ni dispersiones.

Luego, la Ec.(2.27) puede representarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t) &= \epsilon_0 \left[\chi^{(1)} \tilde{E}(t) + \chi^{(2)} \tilde{E}^2(t) + \chi^{(3)} \tilde{E}^3(t) + \dots + \dots \right] \\ &= \tilde{P}^{(1)}(t) + \tilde{P}^{(2)}(t) + \tilde{P}^{(3)}(t) + \dots +,\end{aligned}\tag{2.43}$$

donde $\tilde{P}^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \tilde{E}^{(2)}(t)$ es la polarización no lineal de segundo orden y $\tilde{P}^{(3)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} \tilde{E}^{(3)}(t)$ hace referencia a la polarización no lineal de tercer orden.

Los procesos físicos que ocurren como resultado de la polarización de segundo orden $\tilde{P}^{(2)}(t)$ son distintos a los que ocurren como resultado de la polarización de tercer orden $\tilde{P}^{(3)}(t)$. En los líquidos, gases, sólidos amorfos (como los vidrios) y algunos cristales, $\chi^{(2)}$ desaparece, y consecuentemente estos materiales no producen interacciones ópticas no lineales de segundo orden pero sí de tercer orden[3], por lo cual, en este trabajo se estudiarán los fenómenos relacionado con la susceptibilidad óptica de tercer orden $\chi^{(3)}$.

Estos efectos de no linealidad dependen de la intensidad del campo electromagnético y de la susceptibilidad no lineal. Para optimizar estos fenómenos, se necesita obtener un mecanismo de tal forma que la magnitud del campo eléctrico sea alta y obtener grandes coeficientes de susceptibilidad no lineal. Para obtener grandes coeficientes de susceptibilidad no lineal, se requieren materiales de alta no linealidad. Dentro de los fenómenos ópticos no lineales de segundo y tercer orden, se encuentran diferentes tipos de interacciones ópticas no lineales, como generación de segundo y tercer armónico, generación de suma de frecuencias, autoenfocamiento, entre otros, absorción de dos fotones y cambio en el índice de refracción.[4]

Considerando un campo incidente monocromático y con polarización lineal $\tilde{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)$ la polarización inducida hasta tercer orden puede escribirse como,

$$\tilde{P}(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} E_0 \cos(\omega t) + \epsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 \cos^2(\omega t) + \epsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos^3(\omega t) + \dots +\tag{2.44}$$

Teniendo en cuenta las siguientes identidades trigonométricas: $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$ y $\cos^3(\omega t) = \frac{3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)}{4}$ se puede escribir Ec.(2.44) en la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t) &= \epsilon_0 \chi^{(1)} E_0 \cos(\omega t) + \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)}}{2} E_0^2 + \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)}}{2} E_0^2 \cos(2\omega t) \\ &\quad + \frac{3\epsilon_0 \chi^{(3)}}{4} E_0^3 \cos(\omega t) + \frac{\epsilon_0 \chi^{(3)}}{4} E_0^3 \cos(3\omega t)\end{aligned}\tag{2.45}$$

Luego, la Ec.(2.45) puede ser separada en las contribuciones de $\tilde{P}(t)$ oscilando a las diferentes frecuencias: 0, ω , 2ω y 3ω como se muestra a continuación:

$$\tilde{P}^{(0)}(t) = \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)}}{2} E_0^2,\tag{2.46}$$

$$\tilde{P}^{(\omega)}(t) = \epsilon_0 \left[\chi^{(1)} E_0 + \frac{3}{4} \chi^{(3)} E_0^3 \right],\tag{2.47}$$

$$\tilde{P}^{(2\omega)}(t) = \frac{\epsilon_0}{2} \chi^{(2)} E_0^2 \cos(2\omega t), \quad (2.48)$$

$$\tilde{P}^{(3\omega)}(t) = \frac{\epsilon_0}{4} \chi^{(3)} E_0^3 \cos(3\omega t). \quad (2.49)$$

El término $\tilde{P}^{(0)}(t)$ representa una contribución estacionaria que implica la aparición de un potencial constante proporcional a las susceptibilidad de segundo orden. Se trata de un proceso de rectificación óptica, por lo que ante la excitación del campo oscilante a frecuencia ω , el material responde con una perturbación estacionaria.

Los términos $\tilde{P}^{(2\omega)}(t)$ y $\tilde{P}^{(3\omega)}(t)$ corresponde a la generación de segundo y tercer armónico respectivamente, de la luz incidente. La intensidad en ambos es proporcional al cuadrado y al cubo respectivamente de la intensidad incidente.

El término $\tilde{P}^{(\omega)}(t)$ incluye la respuesta lineal $\tilde{P}_L^{(\omega)} = \epsilon_0 \chi^{(1)} E_0 \cos(\omega t)$ junto con el término no lineal $\tilde{P}_{NL}^{(\omega)} = \frac{3\epsilon_0 \chi^{(3)}}{4} E_0^3 \cos(\omega t)$ que modifica la respuesta a la frecuencia de excitación y se traduce en cambios del índice de refracción.

2.4.1. Índice de refracción no lineal n_2

El índice de refracción no lineal es un proceso óptico el cual está asociado a transiciones electrónicas resonantes que ocurren en el material y que involucran procesos de absorción de uno, dos o más fotones (absorción multifotónica). En los materiales semiconductores, estos procesos están condicionados a como es la energía de los fotones incidentes comparados con la energía de la banda prohibida del material. Por tanto, debido a estos efectos no lineales o transiciones ópticas el haz modifica su fase como la amplitud del campo durante la propagación en el medio y se puede observar analizando las variaciones de la función de transmitancia una vez el haz emerge de la muestra. En la Fig.2.8 se observa el fenómeno de la dependencia del índice de refracción con la intensidad del campo incidente.

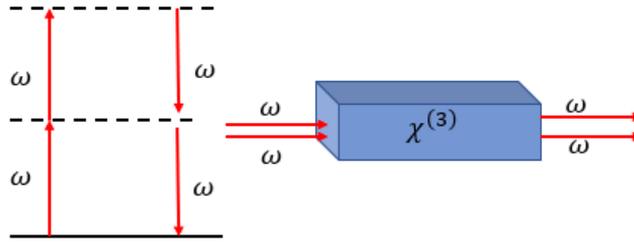


Figura 2.8: En esta figura se muestra el fenómeno físico de la dependencia del índice de refracción con la intensidad como la geometría de la interacción y la descripción de los niveles de energía.

2.4.1.1. Determinación del índice de refracción no lineal

Con el objetivo de determinar el el cambio en índice de refracción el cual depende de la intensidad del campo eléctrico incidente, se debe tener en cuenta el elemento de polarización inducido por el medio $P^{(1)} = \epsilon_0 \chi^{(1)} E$ y sustituirlo en la Ec.(2.7) con la finalidad de obtener,

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu (1 + \chi^{(1)}) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.50)$$

Comparando la Ec.(2.50) con la ecuación de onda homogénea $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$, donde v es la velocidad de propagación de la onda se tiene que:

$$\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \mu (1 + \chi^{(1)}) \longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu (1 + \chi^{(1)})}}. \quad (2.51)$$

Recordando que: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu}}$ y $n_0 = \frac{c}{v}$, donde n_0 es el índice de refracción lineal, entonces n_0 puede escribirse en función de la susceptibilidad lineal $\chi^{(1)}$ de la siguiente manera:

$$n_0 = \frac{c}{v} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu}}}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu (1 + \chi^{(1)})}}} = (1 + \chi^{(1)}) \longrightarrow n_0 = (1 + \chi^{(1)}). \quad (2.52)$$

Hay una dependencia del índice de refracción lineal en la susceptibilidad, y por ende hay una dependencia del índice de refracción en el elemento de polarización de primer orden. Resolver la ecuación de onda no lineal considerando el elemento completo de la polarización, es un trabajo complejo. Para simplificar este problema, se consideran las siguientes restricciones:

- Campo eléctrico incidente monocromático polarizado linealmente.
- Los elementos no lineales en la polarización superiores al orden 3 son despreciables.
- Para un medio isotrópico (por ende centrosimétrico), no hay contribución no lineal de segundo orden. Además, todos los elementos de la susceptibilidad de tercer orden $\chi_{ijkl}^{(3)}$ existen solo 21 diferentes de cero, de los cuales solo tres son independientes[1].

De manera similar, la polarización no lineal de tercer orden, se puede escribir como:

$$P(t) = \varepsilon_0 (\chi^{(1)} E(t) + 3\chi^{(3)} |E(t)|^2 E(t)). \quad (2.53)$$

Reemplazando este término en la Ec.(2.7) la ecuación de onda resulta:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu (1 + \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)} |E(t)|^2) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.54)$$

Comparando nuevamente con la ecuación de onda homogénea para un medio libre de fuentes de cargas se tiene:

$$n = \sqrt{1 + \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)} |E(t)|^2} \longrightarrow n = n_0 \sqrt{1 + \frac{3\chi^{(3)} |E(t)|^2}{n_0^2}}. \quad (2.55)$$

Realizando al expansión binomial al elemento de la raíz debido a que $\frac{3\chi^{(3)} |E(t)|^2}{n_0^2} \ll 1$, dado que $\chi^{(3)}$ tiene un valor muy pequeño cuando se le compara con n_0 , entonces:

$$n = n_0 + \tilde{n}_2 |E(t)|^2. \quad (2.56)$$

Donde $\tilde{n}_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{2n_0}$. Debido a que el promedio temporal del campo es la irradiancia la cual puede representarse como $I = n_0 \varepsilon_0 c |E(t)|^2$, entonces el índice de refracción se puede escribir como,

$$n = n_0 + n_2 I. \quad (2.57)$$

Acá, $n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{2n_0^2\epsilon_0c}$ es conocido como el índice de refracción no lineal de segundo orden para la intensidad, o simplemente índice de refracción no lineal, el cual está relacionado directamente con el tensor de polarización no lineal de tercer orden el cual aparece debido a los fenómenos de auto-enfoque o auto-desenfoque del haz.

El auto-enfoque de la luz es el proceso en el cual un haz de luz (radiación electromagnética) intensa modifica las propiedades ópticas de un medio material de tal manera que el haz se enfoca dentro del material[6] como se puede observar en la Fig.2.9.

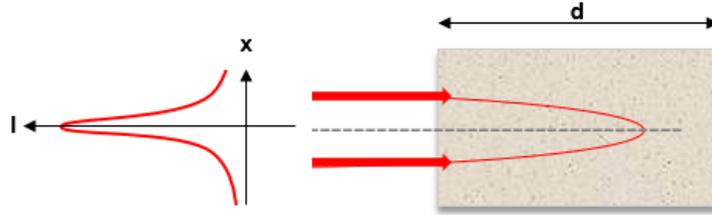


Figura 2.9: Auto-enfoque de un haz dentro de un material con $n_2 > 0$.

La intensidad del haz es la encargada de modificar el índice de refracción del material, haciendo que este sea mayor en la parte central y disminuya en función de la distancia al eje óptico del sistema. Este efecto retarda el frente de onda en la parte central, haciendo que este se curve y se enfoque dentro material. En este caso se asume que el índice de refracción no lineal es positivo ($n > 0$) y el material se comporta como si fuese una lente convergente. El proceso de auto-desenfoque hace que el haz diverja a medida que se propaga dentro del material lo cual corresponde a un índice de refracción no lineal negativo ($n < 0$) comportándose como una lente divergente.

Como los términos de susceptibilidad son cantidades reales como cantidades complejas, donde el término imaginario implica la absorción del medio. Considerando el índice de refracción complejo, la Ec.(2.55) se puede representar como:

$$n + ik = \sqrt{1 + \chi_r^{(1)} + i\chi_i^{(1)} + 3\chi_r^{(3)}|E(t)|^2 + 3i\chi_i^{(3)}|E(t)|^2}, \quad (2.58)$$

donde k es el coeficiente de extinción que determina el amortiguamiento espacial de la onda electromagnética[9], $\chi_r^{(n)}$ y $\chi_i^{(n)}$ hace referencia a la parte real e imaginaria de la susceptibilidad.

El coeficiente de extinción se puede representar en función de la susceptibilidad como:

$$k = \frac{1}{2} \frac{\chi_i^{(1)}}{n_0} + \frac{3}{2} \frac{\chi_i^{(3)}|E(t)|^2}{n_0}. \quad (2.59)$$

Además, k puede relacionarse con el coeficiente de absorción $\alpha = \frac{2k\omega}{c}$. En términos del coeficiente de absorción se tiene:

$$\alpha = \alpha_0 + \beta I, \quad (2.60)$$

donde se tiene que $\alpha_0 = \frac{\omega\chi_i^{(1)}}{cn_0}$ y $\beta = \frac{3\omega\chi_i^{(3)}}{c^2n_0^2\epsilon_0}$ donde α_0 es el coeficiente de absorción lineal y β es el coeficiente de absorción no lineal.

2.4.1.2. Cambio en el índice de refracción debido a los efectos térmicos

Al momento de un material ser irradiado por un láser de alta potencia se pueden generar efectos térmicos en el material debido al aumento de temperatura de la zona local, es decir, la

zona donde se concentra la mayor iluminación en la muestra debido al haz. Un efecto de este calentamiento lleva a un cambio en el índice de refracción. En general, para obtener efectos no lineales debido a cambios en la temperatura del medio, es necesario que el material sea expuesto a la radiación por escalas de tiempo del orden de los segundos. Por lo tanto, el índice de refracción no lineal sometido a cambios por efecto térmicos se puede escribir como:

$$n = n_0 + \left(\frac{dn}{dT} \right) T_1, \quad (2.61)$$

donde el término $\left(\frac{dn}{dT} \right)$ describe la manera o forma de cambio del índice de refracción en el material debido a la temperatura, y T_1 es el cambio de temperatura inducido por el láser que a su vez obedece la ecuación de transporte de calor.

La correspondencia entre T_1 y la ecuación de transporte de calor se establece mediante la relación:

$$\rho_0 C \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} \right) - k \nabla^2 T_1 = \alpha I(r). \quad (2.62)$$

En esta ecuación establece a $\rho_0 C$ como la capacidad calorífica por unidad de volumen, α indica el coeficiente de absorción lineal, k es la conductividad térmica y por último $I(r)$ define la distribución espacial de intensidad del haz, el cual incide sobre la muestra. Además de esto, el cambio en el índice de refracción también puede depender del tipo de láser que se utilice en la practica; por lo tanto si ha de utilizarse una haz láser de emisión continua la variación del índice de refracción esta dada por:

$$\Delta n = \left(\frac{dn}{dT} \right) \left(\frac{\alpha I^{max} R^2}{k} \right), \quad (2.63)$$

donde R es el radio del haz. Comparando la Ec.(2.63) con la Ec.(2.57) se obtiene;

$$\Delta n_2^T = \left(\frac{dn}{dT} \right) \left(\frac{\alpha R^2}{k} \right). \quad (2.64)$$

El término Δn_2^T no es una propiedad óptica intrínseca del material, debido a que depende del parámetro geométrico R^2 y el superíndice T indica la dependencia térmica.[4]

En un láser pulsado, el cambio en el índice de refracción del material se escribe en función del ancho temporal del pulso t_p dado por[4]

$$\Delta n_2^T = \left(\frac{dn}{dT} \right) \left(\frac{\alpha I^{max} t_p}{\rho_0 C} \right), \quad (2.65)$$

y por lo tanto:

$$\Delta n_2^T = \left(\frac{dn}{dT} \right) \left(\frac{\alpha t_p}{\rho_0 C} \right). \quad (2.66)$$

Se puede establecer una condición en la cual los efectos térmicos inducidos en el material poseen una contribución mayor que los efectos electrónicos al cambio en el índice de refracción no lineal de un material. Dicha condición esta dada por:

$$t_p = n_2^E \rho_0 C \left(\frac{dn}{dT} \right)^{-\alpha}, \quad (2.67)$$

donde n_2^E el índice de refracción no lineal generado por contribuciones de la radiación electromagnética.

2.4.2. No-linealidades ópticas inducidas por transiciones electrónicas en semiconductores.

Los sistemas ópticos de materiales semiconductores han jugado un papel relevante en el desarrollo de la fotónica, debido a que pueden producir efectos ópticos no lineales intensos. La principal característica de un material semiconductor es la aparición de una banda de energía prohibida E_g entre la banda de valencia, y la banda de conducción del material. Los materiales con $E_g = 0$ eV se conocen como metales o semi-metales, y cuando $E_g > 3$ eV se llaman aislantes[1]. Para comprender los efectos ópticos no lineales en un semiconductor, se hace importante saber cuando la energía de la radiación incidente $\hbar\omega$ sobre el material es mayor o menor que la banda prohibida del material E_g . Para el caso en que la respuesta no lineal del material se debe exclusivamente a transferencia de electrones de la banda de valencia hacia la banda de conducción, lo que implica una modificación de las propiedades ópticas del material [4].

En el caso de que $\hbar\omega > E_g$ la respuesta no lineal del materia se debe exclusivamente a la transferencia de electrones de la banda de valencia hacia la banda de conducción, lo cual implica una modificación de las propiedades del material. En el caso en que $\hbar\omega < E_g$ los efectos ópticos no lineales son instantáneos y resultan debido a los procesos que involucran transiciones entre niveles de energía virtuales.

2.4.2.1. Efecto de las transiciones inter-banda en los procesos ópticos no lineales.

Cuando $\hbar\omega > E_g$, la respuesta no lineal del medio se da en términos de la variación temporal de la población de electrones de la banda de conducción $\hbar\omega > E_g$, la cual está gobernada por la ecuación diferencial;

$$\frac{dN_c}{dt} = \frac{\alpha I}{\hbar\omega} = -\frac{(N_c - N_c^{(0)})}{\tau_R}. \quad (2.68)$$

Donde α es el coeficiente de absorción lineal del material a una cierta frecuencia óptica, $N_c^{(0)}$ es la población inicial de la banda de conducción en equilibrio térmico, τ_R es el tiempo de recombinación electrón-hueco e I es la intensidad de la radiación. En un estado de equilibrio $\frac{dN_c}{dt}=0$, y por lo tanto:

$$N_c = N_c^{(0)} + \frac{\alpha\tau_R I}{\hbar\omega}. \quad (2.69)$$

En el caso en que se tiene un pulso láser más corto que el tiempo de recombinación, la población de electrones en la banda de conducción crece monótonicamente, y los cambios en las propiedades ópticas del material puede explicarse estudiando el movimiento de los electrones en la banda de conducción del material, mediante la aproximación de electrón libre. En esta aproximación se asume que los electrones que se ubican en la banda de conducción oscilan libremente con el campo óptico aplicado. Este movimiento de cargas hace que la función de permitividad eléctrica del material se pueda escribir como:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_b + \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})}, \quad (2.70)$$

donde ϵ_b es la permitividad eléctrica relacionada con los electrones ligados, τ es la respuesta óptica del material y ω_p es la frecuencia de plasma, la cual está dada por: $\omega_p = \frac{N_c e^2}{\epsilon_o m}$, donde e es la carga del electrón, m la masa del electrón y ϵ_o la permitividad del vacío. Por tanto cuando la población de la banda de conducción aumenta, también lo hace la permitividad eléctrica. Partiendo de la Ec.(2.69) y Ec.(2.70) y sabiendo que $n^2 = \epsilon(\omega)$ [4], se obtiene una expresión

para el cambio en el índice de refracción dado por $n = n_0 + n_2 I$.

$$n(\omega) = \left(\epsilon_b + \frac{N_c e^2}{\epsilon_o m \omega (\omega + (i/\tau))} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{e^2 \alpha \tau_R}{2 \epsilon_b n_0 m \hbar \omega^3} I \quad (2.71)$$

donde:

$$n_2 = -\frac{e^2 \alpha \tau_R}{2 \epsilon_b n_0 \hbar \omega^3} \quad (2.72)$$

Luego, en el caso en que la energía de la radiación incidente sobre el medio sea mayor que la energía de la banda prohibida del semiconductor, se tiene que el índice de refracción no lineal depende de ω^{-3} , resultando en una disminución del valor de n_2 . En este caso, los efectos ópticos no lineales que predominan son la saturación y la absorción excitónica debido a portadores de carga foto-excitados y a la generación de pares electrón-hueco (excitones).

2.4.2.2. Procesos ópticos no lineales que involucran transiciones virtuales

Cuando la energía de la radiación electromagnética incidente es menor que el ancho de la banda prohibida del material, es decir, $\hbar\omega < E_g$ la respuesta del semiconductor se puede entender como se muestra en la Fig. 2.10

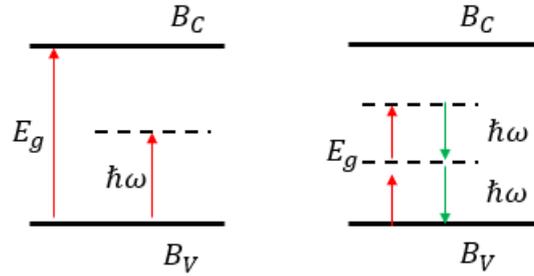


Figura 2.10: (a) Transiciones entre estados virtuales cuando la energía del fotón es menor que E_g . (b) Proceso de absorción de dos fotones

En este caso, la energía de la radiación incidente es tan baja que no se genera absorción de un solo fotón, siendo imposible realizar transiciones electrónicas de la banda de valencia hacia la banda de conducción del material. Esto hace posible que surjan respuestas no lineales en el material que involucran transiciones entre niveles virtuales, en donde la absorción de dos fotones Fig.2.10 (b) es el proceso que presenta una mayor probabilidad de ocurrir (a excepción de situaciones en que $\hbar\omega \approx E_g$ [4]). En este caso, el cambio en el índice de refracción del material es debido al proceso de absorción no lineal que ocurre en el material y dichos fenómenos se relacionan entre sí por medio de las transformaciones de Kramers-Kronig[6]. De esta manera, se puede expresar el índice de refracción no lineal del medio como:

$$n_2(\omega) = \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{\beta(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (2.73)$$

donde β es el coeficiente de absorción de dos fotones, este parámetro depende del tipo de transición óptica en el material y que se puede obtener mediante la expresión[4]

$$\beta_n(\hbar\omega) = f_n \frac{K \sqrt{E_p}}{n_0^2 E_g^3} \sum_{n=0}^{n=2} F_2^{(n)} \left(\frac{\hbar\omega}{E_g} \right), \quad (2.74)$$

donde:

$$F_2^{(n)}(x) = \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}+n}}{(2x)^5}. \quad (2.75)$$

La transiciones ópticas corresponden para $n = 0,1,2$, luego estas transiciones son: permitida-permitida (a-a), permitida-prohibida (a-f) o prohibida-prohibida (f-f), donde la contribución de cada proceso depende de la energía del fotón. El factor f_n es un parámetro ajustable que está relacionado con la dependencia de los elementos que conforman la matriz de momento angular del sistema, $E_p = 21$ eV es un valor de energía que depende de la matriz de transiciones inter-banda y K es un factor cuyo valor $K = 1940$ cuando la energía de la banda prohibida está dada en eV y β en $\frac{cm}{GW}$ [11].

2.5. Absorción no lineal de la intensidad

La ecuación diferencial que gobierna o describe la absorción de luz en un material es una ecuación diferencial que registra el cambio de la intensidad del haz en función de la propagación del material, la cual se representa en series de potencia en la intensidad. La solución de la Ec.(2.76) proporcionará la información de los efectos de absorción no lineales [1], tal que,

$$\frac{dI}{dz} = -(\alpha I + \beta I^2 + \gamma I^3 + \dots + \Omega I^n), \quad (2.76)$$

donde α es el coeficiente de absorción lineal, β es el coeficiente de absorción de dos fotones, γ es el coeficiente de absorción de tres fotones y Ω representa el coeficiente de absorción de n-fotones.

La absorción de dos fotones (TPA) en el sentido físico implica una transición del estado fundamental de un sistema a un estado superior mediante la absorción simultánea de dos fotones de un campo o campos de radiación incidente. Este proceso implica reglas de selección diferentes a las de la absorción de un solo fotón. Por tanto, la espectroscopia de TPA complementa la espectroscopia de absorción lineal en el estudio de los estados excitados de los sistemas.

El fenómeno físico de absorción de dos fotones físicamente se puede obtener a través de dos situaciones; las cuales se ilustran en la Fig. 2.11. La Fig 2.11(a) muestra la absorción de dos fotones del mismo campo óptico los cuales oscilan a la misma frecuencia ω para hacer la transición, la cual es aproximadamente a 2ω . La Fig. 2.11(b) representa dos campos ópticos cuyas frecuencias de oscilación son ω_e y ω_p y por tanto se absorbe un fotón de cada uno de los campos para realizar la transición la cual es aproximadamente a $\omega_e + \omega_p$. En ambos casos el estado es virtual, es decir, este no implica un estado estacionario real del sistema. Por tanto, el sistema debe absorber los dos fotones simultáneamente. Esto hace que el proceso sea sensible a la intensidad óptica instantánea. En este trabajo siempre se considerará la absorción de dos fotones provenientes de un mismo campo óptico de incidencia.

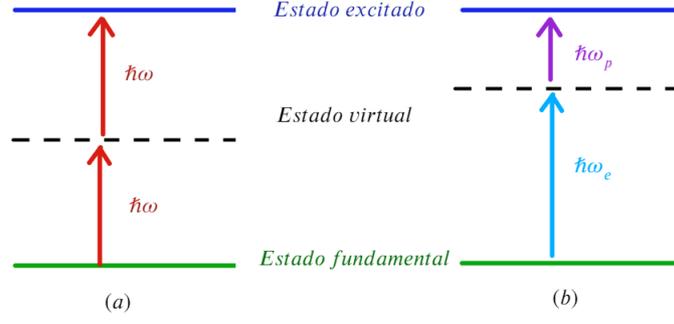


Figura 2.11: (a) Absorción dos fotones del mismo campo óptico. (b) Absorción dos fotones de diferentes campos óptico.

Aunque la transición de dos fotones no implique un estado intermedio real, a menudo pueden presentarse impurezas en el material lo cual producirá una pequeña cantidad de absorción lineal. Esta absorción no contribuye a la transición del estado final del proceso sino que solo sirve como un mecanismo de pérdida adicional. [1]

2.5.1. Absorción de dos fotones de la misma frecuencia óptica

La absorción no lineal se puede considerar proporcional al cuadrado de la intensidad instantánea. La ecuación diferencial que describe la pérdida óptica viene dada al tomar los dos primeros términos de la parte derecha de la Ec.(2.76), tal que;

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha I - \beta I^2, \quad (2.77)$$

La solución de la Ec.(2.77) proporcionará la información de la variación de la intensidad en función de la propagación del haz en la muestra $I(z)$. Además, la intensidad puede ser considerada como una función del tiempo y de la posición, tal que $I = I(r, z, t)$, donde r es la componente radial. De este modo, la Ec.(2.77) puede ser resuelta por el método de separación de variables.

$$\frac{dI(r, z, t)}{I(r, z, t) (\alpha + \beta I(r, z, t))} = -dz \quad (2.78)$$

Integrando el factor izquierdo de la Ec.(2.78) $\int_0^z \frac{dI(r,z,t)}{I(r,z,t)(\alpha + \beta I(r,z,t))}$ por fracciones parciales.

$$\frac{A}{I} + \frac{D}{(\alpha + \beta I)} = \frac{A(\alpha + \beta I) + DI}{I(\alpha + \beta I)} = 1, \quad (2.79)$$

luego,

$$A\alpha + A\beta I + DI = 1 \leftrightarrow I(A\beta + D) + A\alpha = 1. \quad (2.80)$$

A partir de la Ec.(2.80) se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A\alpha = 1 \quad \leftrightarrow \quad A = \frac{1}{\alpha} \quad (2.81)$$

$$A\beta + D = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} + D = 0 \quad \leftrightarrow \quad D = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.82)$$

Reemplazando los valores obtenidos de A y D en la Ec. (2.79) se obtiene:

$$\frac{A}{I} + \frac{B}{(\alpha + \beta I)} = \frac{1}{\alpha I} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta I)}. \quad (2.83)$$

Integrando la Ec.(2.83), se llega a;

$$\begin{aligned} \int_{I_0}^{I(z)} \frac{dI}{I(\alpha + \beta I)} &= \int_{I_0}^{I(z)} \frac{dI}{\alpha I} - \frac{\beta}{\alpha} \int_{I_0}^{I(z)} \frac{dI}{(\alpha + \beta I)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln(I) \Big|_{I_0}^{I(z)} - \frac{\beta}{\alpha} \int_{I_0}^{I(z)} \frac{dI}{(\alpha + \beta I)} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Resolviendo la integral $\int_{I_0}^{I(z)} \frac{dI}{(\alpha + \beta I)}$ de forma indefinida y considerando el siguiente cambio de variable,

$$u = \alpha + \beta I \quad \leftrightarrow \quad du = \beta dI \quad \leftrightarrow \quad \frac{du}{\beta} = dI, \quad (2.85)$$

lo cual conduce a

$$\frac{1}{\beta} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{\beta} \ln(u) = \frac{1}{\beta} \ln(\alpha + \beta I). \quad (2.86)$$

Reemplazando en la Ec(2.84) se tiene;

$$\begin{aligned} \int_{I_0}^{I(z)} \frac{dI}{I(\alpha + \beta I)} &= \int_{I_0}^{I(z)} \frac{dI}{\alpha I} - \frac{\beta}{\alpha} \int_{I_0}^{I(z)} \frac{dI}{(\alpha + \beta I)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln(I) \Big|_{I_0}^{I(z)} - \left(\frac{1}{\alpha} \ln(\alpha + \beta I) \right) \Big|_{I_0}^{I(z)} \\ &= \frac{1}{\alpha} (\ln(I) - \ln(\alpha + \beta I)) \Big|_{I_0}^{I(z)} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{I}{(\alpha + \beta I)} \right) \Big|_{I_0}^{I(z)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\ln \left(\frac{I(z)}{(\alpha + \beta I(z))} \right) - \ln \left(\frac{I_0}{(\alpha + \beta I_0)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{I(z)(\alpha + \beta I_0)}{I_0(\alpha + \beta I(z))} \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Integrando la parte derecha de la Ec.(2.78) $-\int_0^z dz = -z$ e igualando con la Ec.(2.87) se obtiene,

$$\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{I(z)(\alpha + \beta I_0)}{I_0(\alpha + \beta I(z))} \right) = -z \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{I(z)(\alpha + \beta I_0)}{I_0(\alpha + \beta I(z))} \right) &= -\alpha z \quad \leftrightarrow \quad e^{\ln \left(\frac{I(z)(\alpha + \beta I_0)}{I_0(\alpha + \beta I(z))} \right)} = e^{-\alpha z} \\ I(z)(\alpha + \beta I_0) &= e^{-\alpha z} I_0(\alpha + \beta I(z)) \end{aligned} \quad (2.89)$$

Al organizar los términos y factorizando,

$$\begin{aligned} I(z)(\alpha + \beta I_0) - e^{-\alpha z} I_0 \beta I(z) &= e^{-\alpha z} I_0 \alpha \\ I(z)(\alpha + \beta I_0 - e^{-\alpha z} I_0 \beta) &= e^{-\alpha z} I_0 \alpha \end{aligned} \quad (2.90)$$

Solucionando la Ec.(2.90) para $I(r, z, t)$ se concluye que,

$$I(r, z, t) = \frac{e^{-\alpha z} I_0 \alpha}{\alpha + \beta I_0 - e^{-\alpha z} I_0 \beta} = \frac{\alpha e^{-\alpha z} I_0}{\alpha \left(1 + \frac{\beta I_0}{\alpha} - \frac{\beta I_0}{\alpha} e^{-\alpha z} \right)} = \frac{e^{-\alpha z} I_0}{\left(1 + \beta I_0 \left(\frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha} \right) \right)} \quad (2.91)$$

Por tanto, la Ec.(2.91) proporcionará la información sobre la variación de la intensidad como una función de la propagación del haz dentro del material cuando se considera absorción no lineal.

$$I(r, z, t) = \frac{e^{-\alpha z} I_0}{\left(1 + \beta I_0 \left(\frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha}\right)\right)}, \quad (2.92)$$

donde $L_{eff} = \left(\frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha}\right)$ es la longitud efectiva del material. Por consiguiente, la Ec.(2.92) puede ser escrita en función de la longitud efectiva como:

$$I(r, z, t) = \frac{e^{-\alpha z} I_0}{\left(1 + \beta I_0 L_{eff}\right)} \quad (2.93)$$

Para una muestra de longitud o espesor L es importante tener en cuenta que en la posición $z = 0$ se refiere a la posición justo dentro de la superficie del material, de modo que se incluya cualquier pérdida de intensidad debido a la superficie. Considerando la Fig.2.12 la luz incide en la superficie del material de manera normal con una intensidad inicial I_0 . En la superficie, una fracción de la intensidad inicial, RI_0 , se refleja. El factor R se llama reflectancia y es una característica de la interfaz misma, es decir, depende del índice de refracción n de la muestra. Suponiendo una interfaz aire-material e incidencia normal en la superficie de la muestra el coeficiente R se define como;[2],

$$R = \frac{(n - 1)^2 + k^2}{(n + 1)^2 + k^2} \quad (2.94)$$

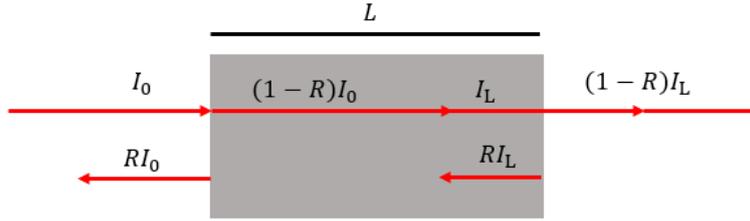


Figura 2.12: Representación general de reflexiones en las superficies de la muestra.

El resto de la intensidad de la luz, $(1 - R) I_0$, se transmite a través de la superficie hacia el material. La luz se propaga a través del material y experimenta absorción hasta que alcanza la superficie posterior $z = L$, donde L es la longitud de la muestra. Aquí la intensidad tiene un valor I_L . Nuevamente hay reflexión $(RI)L$, la cual está determinada por $(1 - R) I_L$ siendo transmitida a través de la superficie.

Por tanto, considerando la reflectancia en la primera superficie la Ec.(2.93) puede ser escrita como,

$$I(r, z, t) = \left((1 - R) \frac{e^{-\alpha z} I_0}{\left(1 + \beta I_0 (1 - R) L_{eff}\right)} \right). \quad (2.95)$$

Considerando la reflectancia en la segunda superficie, es decir, en $z = L$, se determina que la intensidad será $I(r, L, t) \rightarrow (1 - R) I(r, z, t)$

$$I(r, L, t) = \frac{e^{-\alpha L} I_0 (1 - R)^2}{\left(1 + \beta I_0 (1 - R) L_{eff}\right)}, \quad (2.96)$$

lo cual representa la intensidad del campo propagado a través del material cuando se tiene en cuenta la absorción no lineal de segundo orden, es decir, el coeficiente de absorción de dos

fotones β .

La Fig.2.13 muestra la variación en la intensidad para un material de espesor $L = 0,8 \times 10^{-3}$ m cuando se presenta la absorción no lineal de segundo orden tal y como se ha determinado en la Ec.(2.96). En la simulación se ha tomado el semiconductor Arseniuro de aluminio y galio $\text{Al}_{0,18}\text{Ga}_{0,82}\text{As}$ al cual se le ha incidido un campo óptico gaussiano con longitud de onda $\lambda = 1500$ nm. Para este valor en la longitud de onda, su absorción lineal $\alpha = 699.92 \text{ cm}^{-1}$ [5] y un valor de $\beta = 0.34 \times 10^{-9} \text{ cm/W}$ [1], además, de un valor para la potencia de haz dada por $I_0 = 1 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$.

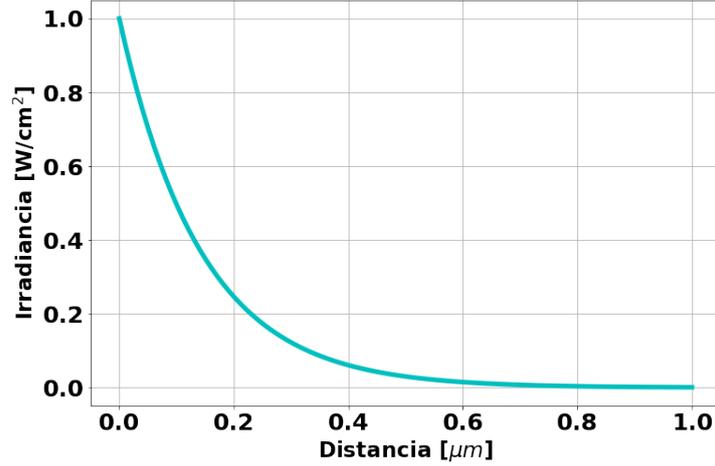


Figura 2.13: Absorción no lineal de segundo orden TPA.

En el Apéndice B se estudia el caso para un proceso multifotónico, es decir, cuando se considera la absorción de n-fotones.

2.6. Transmitancia

La transmitancia o transmisión T se define como la energía transmitida por una muestra, dividida por la energía incidente[3].

Considerando la absorción no lineal hasta el término de segundo orden, se tiene que la variación de la intensidad está dada por la Ec.(2.96) y recordando que I_0 es la intensidad incidente, la transmitancia se puede representar como,

$$T = \frac{I_{trans}}{I_{inc}} = \frac{e^{-\alpha L} I_0 (1-R)^2}{1 + \beta I_0 (1-R) L_{eff}} = \frac{e^{-\alpha L} (1-R)^2}{1 + \beta I_0 (1-R) L_{eff}} \quad (2.97)$$

Al considerar la forma inversa de la transmitancia T^{-1} se obtiene;

$$T^{-1} = \frac{1}{T} = \frac{1 + \beta I_0 (1-R) L_{eff}}{e^{-\alpha L} (1-R)^2} = \frac{1}{e^{-\alpha L} (1-R)^2} + I_0 \frac{\beta L_{eff}}{e^{-\alpha L} (1-R)} \quad (2.98)$$

Por tanto, la T^{-1} en función de I_0 representa una ecuación de línea recta donde el término $\frac{1}{e^{-\alpha L} (1-R)^2}$ es el intercepto con el eje T^{-1} y por lo tanto, el término $\frac{\beta L_{eff}}{e^{-\alpha L} (1-R)}$ es la pendiente de la recta.

La Fig.2.14 representa una simulación de la transmitancia inversa en función de la intensidad incidente sobre la muestra. Se ha tomado como valores $R = 0,14973$, $\alpha = 1256.6 \text{ [cm]}^{-1}$,

$\beta_2 = 4.5$ [cm/GW] y una muestra cuyo espesor es de $L=0.17$ [cm], estos valores corresponden para el óxido de cobre Cu₂O[4].

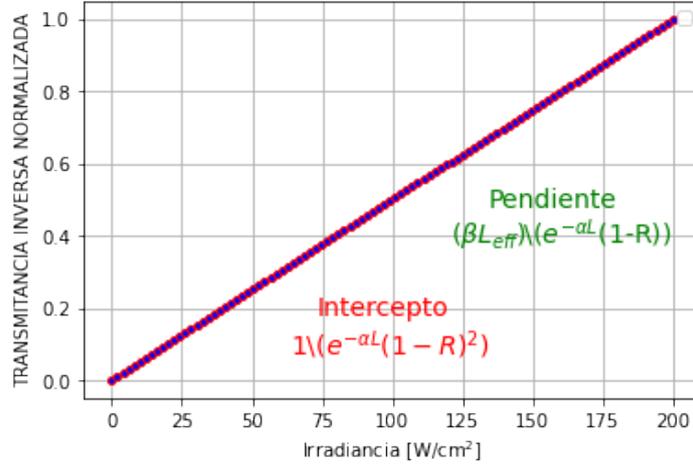


Figura 2.14: Gráfica de la transmitancia inversa en función de la intensidad incidente sobre la muestra

La Ec.(2.98) puede ser generalizada para el caso de absorción de n-fotones, tal que,

$$T = \frac{e^{-\alpha L}(1-R)^2}{\left(1 + \frac{k_n}{\alpha} I_{(0)}^{n-1}(1-R)^{n-1}(1 - e^{-\alpha L(n-1)})\right)^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (2.99)$$

de igual manera, la transmitancia para el caso el caso multifotónico se puede representar por la transmitancia inversa tal que;

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^{n-1}} &= \frac{1 + \frac{k_n}{\alpha} I_{(0)}^{n-1}(1-R)^{n-1}(1 - e^{-\alpha L(n-1)})}{e^{-\alpha L}(1-R)^2} \\ &= \left(\frac{1}{e^{-\alpha L}(1-R)^2}\right)^{n-1} + \frac{k_n(e^{\alpha L(n-1)} - 1)}{\alpha(1-R)^{n-1}} I_{(0)}^{n-1} \end{aligned}, \quad (2.100)$$

donde el término $\left(\frac{1}{e^{-\alpha L}(1-R)^2}\right)^{n-1}$ es el intercepto y $\frac{k_n(e^{\alpha L(n-1)} - 1)}{\alpha(1-R)^{n-1}}$ es la pendiente de la recta.

2.6.1. Transmitancia considerando un haz con perfil espacial y temporal gaussiano

Al considerar un haz incidente sobre la muestra con perfil geométrico y temporal gaussiano puede considerar la intensidad o irradiancia como función de los parámetros r, z y t ; tal que,

$$I(z, r, t) = I(z) e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}, \quad (2.101)$$

donde la energía puede representarse mediante,

$$E(z_0) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty I(r, z_0, t) dt \quad (2.102)$$

y la energía incidente E_0 puede ser considerada como;

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty I_0 e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} dr \int_{-\infty}^\infty I_0 e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} dt. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Al realizar las integrales de la Ec. (2.103) se tiene que $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ y, con la finalidad de solucionar la integral $\int_0^\infty r e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} dr$ se realiza el siguiente cambio de variable.

Sea $u = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \rightarrow du = \frac{-2r}{r_0^2} dr \leftrightarrow r dr = \frac{-r_0^2}{2}$, luego, la integral se puede escribir de tal manera,

$$\int r e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} dr = \frac{-r_0^2}{2} \int e^u du = \frac{-r_0^2}{2} e^u. \quad (2.104)$$

Evaluando los limites de integración,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} dr &= \left. \frac{-r_0^2}{2} e^{-\frac{r^2}{r_0^2}} \right|_0^\infty = \frac{-r_0^2}{2} (e^\infty - e^{-0}) \\ &= \frac{-r_0^2}{2} (-1) = \frac{r_0^2}{2} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Además, teniendo en cuenta que $\int e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} dt = I_0 \sqrt{\pi} t_0$, la energía incidente será $E_0 = \pi r_0^2 I_0 \sqrt{\pi} t_0$. Recordando que la intensidad transmitida esta dada por la Ec. (2.96), la energía transmitida será,

$$E_t = \int_{2\pi}^0 d\theta \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{(1-R)^2 I_0 e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} e^{-\alpha L}}{1 + \beta(1-R) I_0 e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} L_{eff}} \right) r dr dt. \quad (2.106)$$

La solución de la Ec.(2.106) está dada por la Ec.(2.107) donde la solución paso a paso se muestra en el Apéndice C.

$$E_t = \frac{\pi r_0^2 (1-R) e^{-\alpha L}}{\beta L_{eff}} \int_{-\infty}^\infty \left[\ln(1 + \beta(1-R) I_0 e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} L_{eff}) \right] dt. \quad (2.107)$$

Recordando que $T = \frac{E_t}{E_0}$, la transmitancia será;

$$T = \frac{(1-R) e^{-\alpha L}}{\beta L_{eff} I_0 \sqrt{\pi} \tau_0} \int_{-\infty}^\infty \left[\ln(1 + \beta(1-R) I_0 e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} L_{eff}) \right] dt. \quad (2.108)$$

Bibliografía

- [1] JUAN HUMBERTO SERNA RESTREPO, *Estudio e implementación de técnicas ópticas basadas en el principio de distorsión espacial del haz para la medición de parámetros ópticos no lineales y caracterización de pulsos ultracorto.* (2016) Tesis Doctorado.
- [2] JACKSON, J. D. (1999). *Classical electrodynamics.*
- [3] SUTHERLAND, R. L. (2003). *Handbook of nonlinear optics.* CRC press.
- [4] BOYD, R. W. (2003). *Nonlinear optics.* Elsevier.
- [5] FRANCISCO J. RODRIGUEZ, FU XIANG WANG, MARTTI KAURANEN. *Calibration of the second-order nonlinear optical susceptibility of surface and bulk of glass*” Optics Express 16, 12 (2008).
- [6] P.A.FRANKELN Y COL ”*Generation of Optical Harmonics*”, Physical review letter 7,no.4 (1961):118 Elsevier.
- [7] AGRAWAL, G. (2011) *Applications of nonlinear fiber optics,* Elsevier.
- [8] MARK A. HEALD, JERRY B. MARION *Classical electromagnetic radiation*”, Thomson Learning, third edition USA (1995).
- [9] ROBERT W. BOYD , *Nonlinear Optics.* Third Edition. (2008)
- [10] “DISPERSION OF BOUND ELECTRONIC NONLINEAR REFRACTION IN SOLIDS,”, *Kramers–Kronig Relations in Optical Materials.* IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 27, no. 6. pp. 1296–1309, 1991
- [11] R. S. QUIMBY, *PHOTONICS AND LASERS: AN INTRODUCTION.* John Wiley and Sons, 2006.
- [12] M. BORN AND E. WOLF *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light,*Elsevier, 2013.
- [13] MELINDA ROSE, *A history of the laser: A trip through the light fantastic. A laser history,*Elsevier, 2010.
- [14] R. S. QUIMBY, *Photonics and lasers: an introduction.* John Wiley and Sons,Elsevier, 2006.
- [15] CENTRO DE LÁSERES PULSADOS,, *funcionamiento de un láser,*”,Elsevier, 2007.

Técnica de caracterización óptica no lineal

F-scan

F-scan, es una técnica de caracterización óptica no lineal diseñada para medir los parámetros ópticos no lineales tales como el coeficiente de absorción de dos fotones β y el índice de refracción no lineal n_2 para materiales del tipo semiconductor e inclusive otro tipo de materiales que respondan a las altas intensidades del campo a través de efectos no lineales. Un haz láser Gaussiano ya sea pulsado o continuo es enfocado a través de una lente de foco variable EFTL (Electronically focus tunable lens), es decir, una lente que varía su posición focal en función de la corriente aplicada, con la finalidad de generar altas intensidades para producir los efectos no lineales en la muestra que se desea analizar. Para esto la EFTL realiza un barrido de longitudes focales a través del eje óptico. Cuando un foco proporcionado por la lente coincide con la posición de la muestra respecto a ella se genera la zona de mayor intensidad y por lo tanto se evidencian los procesos no lineales. Los efectos ópticos no lineales se evidencian ya sean por medio de la modificación de la intensidad del campo o por los cambios de fase de la radiación electromagnética. Estas altas intensidades incidentes del campo hacen que la muestra responda a ello auto-enfocando el haz o desenfocado el haz dentro de material, también hay respuesta por medio de una absorción no lineal ocasionado un cambio en la transmitancia o reflectancia debido al cambio del índice de refracción no lineal n_2 .

3.1. Descripción e implementación de la técnica F-scan

La Fig.3.1 indica el montaje experimental en la implementación de la técnica F-scan. En este modelo experimental, la información se obtiene por medio de la transmitancia del campo óptico a través de la muestra, ocasionando cambios en la amplitud, intensidad y fase del haz incidente cuyo perfil geométrico es considerado gaussiano. En el montaje, el chooper óptico modula el haz láser con una determinada frecuencia, es decir, este es el encargado de marcar el haz (etiquetar) con el fin de que toda la información que llegue al detector con la frecuencia establecida por el chooper sea únicamente amplificada por medio de un Lock-in Amplifier.

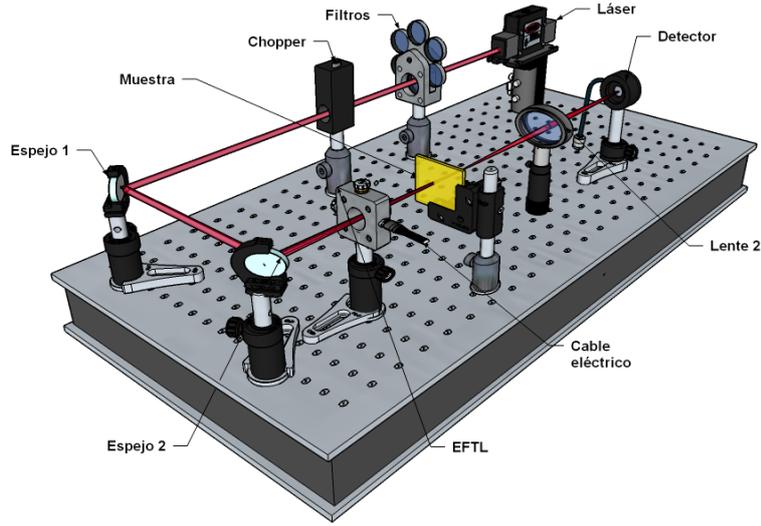


Figura 3.1: Montaje experimental F-scan.

F-scan permite determinar el coeficiente de absorción de dos fotones β a través del estudio en el cambio de la transmitancia del haz incidente mientras se propaga por la muestra. Con la finalidad de determinar la transmitancia se debe partir de la Ec.(2.77), y debido a la incorporación de una lente variable en su longitud focal, la intensidad en la superficie de la muestra, ahora es una función de los parámetros, r , f y t , donde f es la longitud focal proporcionada por la lente, la cuál tiene una dependencia de la corriente suministrada mediante un controlador electrónico. Por tanto, la ecuación diferencial que permite determinar la intensidad en función de la posición focal está determinada por;

$$\frac{dI(r, f, t)}{dz} = \alpha I(r, f, t) - \beta I^2(r, f, t). \quad (3.1)$$

En el montaje experimental f es la distancia focal de la EFTL, d_m es la posición de la muestra medida respecto a la EFTL y $z = f - d_m$ es la distancia entre el punto focal y la muestra como se muestra en la Fig.3.2.

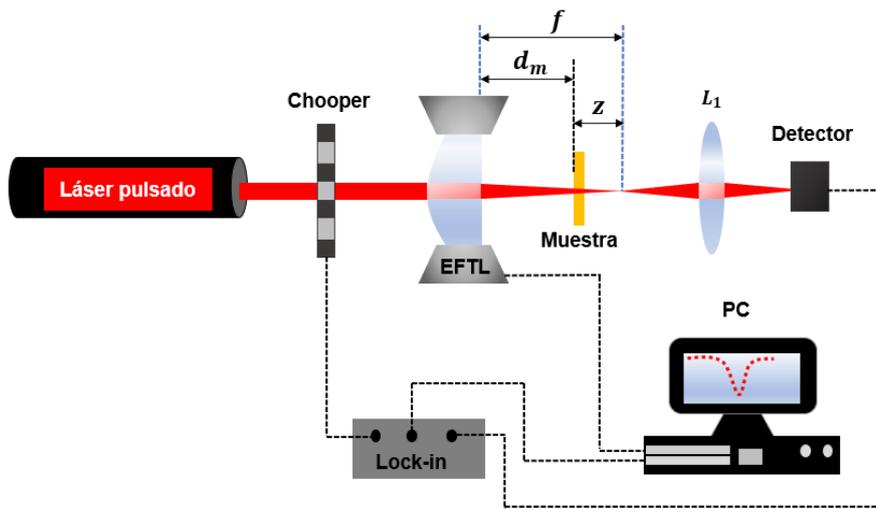


Figura 3.2: Descripción experimental de la técnica F-scan.

El haz de perfil gaussiano el cual es modulado por el chopper óptico, incide sobre la lente de distancia focal variable controlada electrónicamente (EFTL). Una de las principales características de las lentes EFTL es su amplio rango continuo de enfoque, lo que las hace

adecuadas para múltiples aplicaciones. Por ejemplo, se usan en sistemas de visión artificial, en tomografía de coherencia óptica de exploración profunda, en metrología de superficie, en medidas de autocorrelación de pulsos ópticos ultracortos, y determinación de propiedades ópticas no lineales. Las lentes EFTL han sido caracterizadas y fabricadas por la compañía Optotune[4].

Las lentes EFTL consisten de una membrana elástica transparente, rodeada por un actuador electromagnético que ejerce presión sobre la membrana en función de una corriente aplicada, suministrada por un controlador electrónico. Cuando se ejerce presión sobre la membrana, esta se deforma cambiando su radio de curvatura, modificando la distancia focal del EFTL[5] como se muestra en la Fig.3.3.

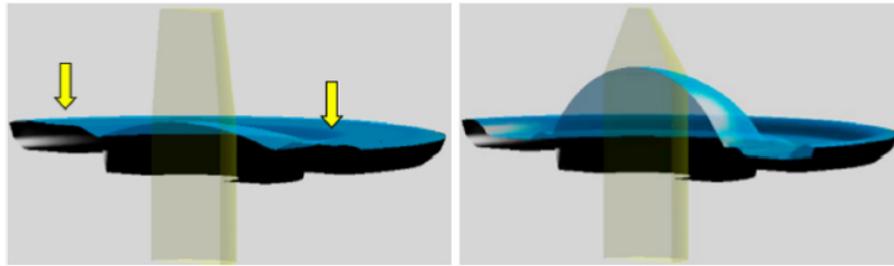


Figura 3.3: Principio de funcionamiento de EFTL. Un actuador electromagnético ejerce presión sobre una membrana, cambiando su radio de curvatura, modificando así su distancia focal[5].

A continuación se presenta un esquema de la lente utilizada que corresponde a la referencia EL-10-30[5].

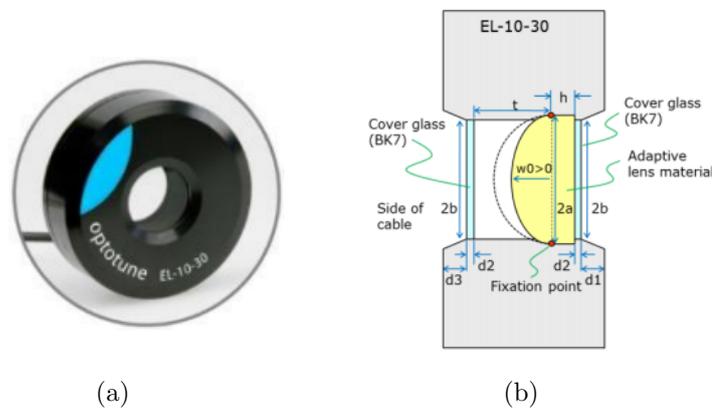


Figura 3.4: (a) Imagen de una EFTL (b) Esquema de la lente[5].

El controlador electrónico utilizado es suministrado por la empresa que fabrica la lente y permite entregar una corriente máxima de 300 mA con una resolución de 0.1 mA, lo que corresponde a tener una resolución en distancia focal de 0.017 mm. La muestra en estudio se coloca en una posición fija dentro del rango de la EFTL, la cual hace que el haz que incide sobre ella se enfoque en el material con el fin de generar efectos ópticos no lineales. La luz que sale de la lente se enfoca nuevamente por medio de una lente fija L_1 a un fotodetector D, y la señal de salida de este es filtrada por un amplificador de Lock-in y procesada por medio de un computador como se muestra en la Fig.3.2.

Con la finalidad de obtener el cambio en la transmitancia que se mide en el detector, se debe partir de la Ec.(3.2)

$$\frac{dI(r, f, t)}{dz'} = \alpha I(r, f, t) - \beta I^2(r, f, t), \quad (3.2)$$

y la Ec.(3.3).

$$\frac{d\phi(r, f, t)}{dz'} = \Delta n(I(r, f, t)k), \quad (3.3)$$

donde z' es la distancia de propagación de haz dentro de la muestra. F-scan es una técnica asimétrica en el radio del haz, cuando se mide respecto a la posición de la muestra; esta asimetría se debe al hecho de que para cada longitud focal que genera la lente se tiene un haz gaussino diferente, tal como se muestra en la Fig. 3.5.

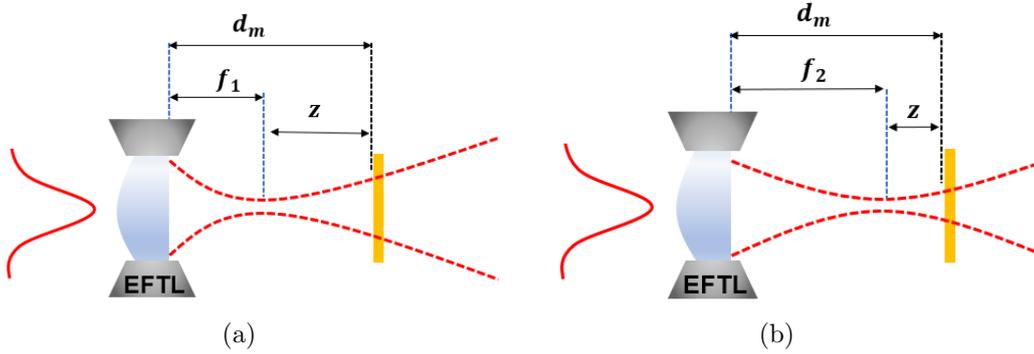


Figura 3.5: Diámetro del haz en la superficie de la muestra con (a) f_1 y (b) f_2

Considerando un haz con geometría gaussiana, perfil temporal secante-hiperbólico y perfil espacial gaussiano propagándose a lo largo del eje óptico. Bajo estas condiciones, el campo óptico, se puede expresar como:[4],

$$E_{in}(z, r, f, t) = A_0(\vec{r}) \frac{w_0}{w(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \exp\left[-i\frac{k_z r^2}{2R(z)} - ik_z z\right] \frac{1}{\cosh\left(\frac{t}{\tau_0}\right)}, \quad (3.4)$$

donde $\tau_0 = \frac{\tau_p}{2\ln[1+\sqrt{2}]}$ con τ_p siendo el ancho del pulso y $[1 + \sqrt{2}]$ es un factor que tiene en cuenta el perfil temporal secante-hiperbólico del pulso. De esta manera, la intensidad del haz en la superficie de la muestra en función de la distancia focal de la EFTL $I_{in}(r, f, t)$ se puede escribir como,

$$I_{in}(r, f, t) = I_0(f) \exp\left[-2\left(\frac{r}{w(f)}\right)^2\right] \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right)}, \quad (3.5)$$

con $I_0(f)$ siendo el pico de intensidad en la superficie de la muestra, que para láseres pulsados se calcula como[4],

$$I_0(f) = \frac{2 \ln(1 + \sqrt{2}) P_{ave}}{t_p \nu \pi w^2(f)}, \quad (3.6)$$

donde P_{ave} es la potencia promedio del haz incidente en la muestra, ν es la frecuencia de repetición del láser y $w(f)$ es el radio del haz en la superficie de la muestra, que está dado por,

$$w(f) = w_0(f) \sqrt{1 + \left(\frac{d_m - f}{z_0(f)}\right)^2}, \quad (3.7)$$

con $z_0(f) = \frac{\pi(w_0(f))^2}{\lambda}$ es el rango de Rayleigh.

Al resolver la Ec.(3.2) por fracciones parciales tal y como se ha resuelto la Ec.(2.77) se obtiene que la intensidad a la salida de la muestra, después de que el campo se ha propagado una distancia L dentro del material es:

$$I_{out}(r, f, t) = \frac{I_{in}(r, f, t) e^{-\alpha L}}{1 + \beta I_{in}(r, f, t) L_{eff}}. \quad (3.8)$$

Considerando las reflexiones en las caras de la muestra, (ver Fig. 2.12), la intensidad después de que el haz se ha propagado una distancia L dentro del material, en función de la distancia focal, esta dada por:

$$I_{out}(r, f, t) = \frac{(1 - R)^2 I_{in}(r, f, t) e^{-\alpha L}}{1 + \beta(1 - R) I_{in}(r, f, t) L_{eff}}. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la transmitancia óptica normalizada en función de la longitud focal está determinada por,

$$T(f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} I_{out}(r, f, t) r dr dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (1 - R)^2 I_{in}(r, f, t) e^{-\alpha L} r dr dt}. \quad (3.10)$$

Para resolver las integrales que aparecen en la Ec. (3.10), se procede a calcular inicialmente la integral del numerador expresándolo en términos de cantidades conocidas tal y como se realizó anteriormente.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} I_{out}(r, f, t) r dr dt = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(1 - R)^2 I_0(f) \exp \left[-2 \left(\frac{r}{w(f)} \right)^2 \right] \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)}}{1 + \beta(1 - R) I_0(f) \exp \left[-2 \left(\frac{r}{w(f)} \right)^2 \right] \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)} L_{eff}} r dr dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La parte espacial de esta integral puede resolverse, haciendo el cambio de variable:

$$u(r) = 1 + \beta(1 - R) I_0(f) \exp \left[-2 \left(\frac{r}{w(f)} \right)^2 \right] \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)} L_{eff}. \quad (3.12)$$

Por lo cual, la Ec.(3.11) se puede escribir como;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} I_{out}(r, f, t) r dr dt = \frac{w^2(1 - R) e^{-\alpha L}}{4\beta L_{eff}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \beta(1 - R) L_{eff} I_0 \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)} \right) dt. \quad (3.13)$$

Tomando $\rho = \frac{t}{\tau_0}$, se obtiene que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} I_{out}(r, f, t) r dr dt = \frac{w^2(1 - R) \tau_0 e^{-\alpha L}}{4\beta L_{eff}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\beta(1 - R) L_{eff} I_0(f)}{\cosh^2(\rho)} \right) d\rho. \quad (3.14)$$

El denominador en la Ec. (3.10) se calcula de manera directa, tal que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (1-R)^2 I_{in}(r, f, t) e^{-\alpha L} r dr dt = I_0(f) (1-R)^2 \frac{w^2}{4} \tau_0 e^{-\alpha L}. \quad (3.15)$$

De ese modo, la transmitancia en función de la distancia focal f , se puede escribir como;

$$T(f) = \frac{\frac{w^2(1-R)^2 \tau_0 e^{-\alpha L}}{4\beta L_{eff}}}{I_0(f) (1-R)^2 \frac{w^2}{4} \tau_0 e^{-\alpha L}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\beta(1-R) L_{eff} I_0(f)}{\cosh^2(\rho)} \right) d\rho. \quad (3.16)$$

Simplificando, se obtiene;

$$T(f) = \frac{1}{I_0(f) \beta L_{eff} (1-R)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\beta(1-R) L_{eff} I_0(f)}{\cosh^2(\rho)} \right) d\rho. \quad (3.17)$$

Definiendo $B(f) = I_0(f) \beta L_{eff} (1-R)^2$, se tiene:

$$T(f) = \frac{1}{B(f)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\beta(1-R) L_{eff} I_0(f)}{\cosh^2(\rho)} \right) d\rho. \quad (3.18)$$

Considerando que $B(f) < 1$ y que $\rho = 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \frac{t}{\tau}$ la transmitancia puede escribirse como [1][6],

$$T(f) = \sum_{m=0}^N \left[\frac{[-B(f)]^m}{m+1} \prod_{n=0}^m \left[\frac{2(m-n) + \delta_{mn}}{2(m-n) + 1} \right] \right]. \quad (3.19)$$

La Fig.3.6 representa una simulación de de la Ec.(3.19) donde U.A representa unidades arbitrarias.

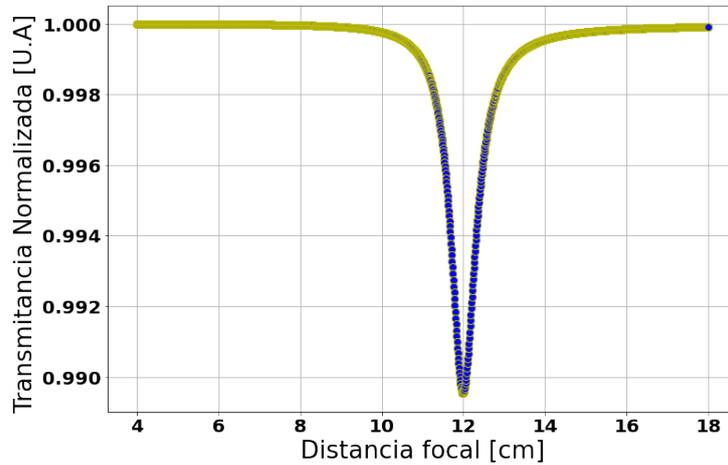


Figura 3.6: función de transmitancia.

3.2. Dependencia de la potencia óptica en función de la corriente suministrada

Una característica importante al momento de emplear las lentes electroópticas es conocer la relación focal-corriente. La lente EFTL para este trabajo se calibró empleando dos longitudes de onda, obteniendo para cada una de ellas dos diferentes relaciones de la potencia óptica en función de la corriente aplicada.

Es importante mencionar que la intención no es medir la acromaticidad de la lente. Esta acromaticidad ya ha sido medida y corroborada por el fabricante, así como en el artículo de Serna et al.[4]. La importancia de caracterizar adecuadamente la lente de foco variable en función de la corriente aplicada se justifica en el hecho de obtener valores experimentales correctos para el coeficiente de absorción de dos fotones β de los materiales semiconductores. Aunque la calibración es proporcionada por los datos del fabricante, es importante confirmar si esta tiene coherencia con los datos medidos en el laboratorio.

En la primera calibración se iluminó la EFTL con un láser de He-Ne a 632 nm, y para una corriente J previamente determinada, se mide la distancia focal f empleando una cámara (MOST), la cual por medio de un desplazador se mueve en la dirección del eje óptico hasta encontrar el menor tamaño de la cintura del haz w_o lo cual coincide con la posición del foco imagen de la EFTL. Este método se repite para distintas corrientes, lo cual proporciona diferentes registros de la variación de la posición focal en función de la corriente.

Para determinar dicha relación entre la potencia óptica y la corriente aplicada, se realiza un ajuste de regresión lineal ordinaria (OLS). Los resultados estadísticos se aprecian en el cuadro. 3.1

Ajuste lineal de datos experimentales			
	Coeficiente	std err	[0.02 0.97]
Intercepto	5.64	0.20	5.20 6.09
Pendiente	0.04	0.01	0.04 0.05

Cuadro 3.1: Ajuste de datos experimentales empleando una longitud de onda $\lambda=630$ nm. La primera columna indica el valor de ajuste, la segunda columna la desviación estándar y al tercera columna el intervalo de confianza.

En la Fig.3.7 se aprecian los datos experimentales y, adicional se representan la ecuación de línea recta que mejor se ajusta a los datos.

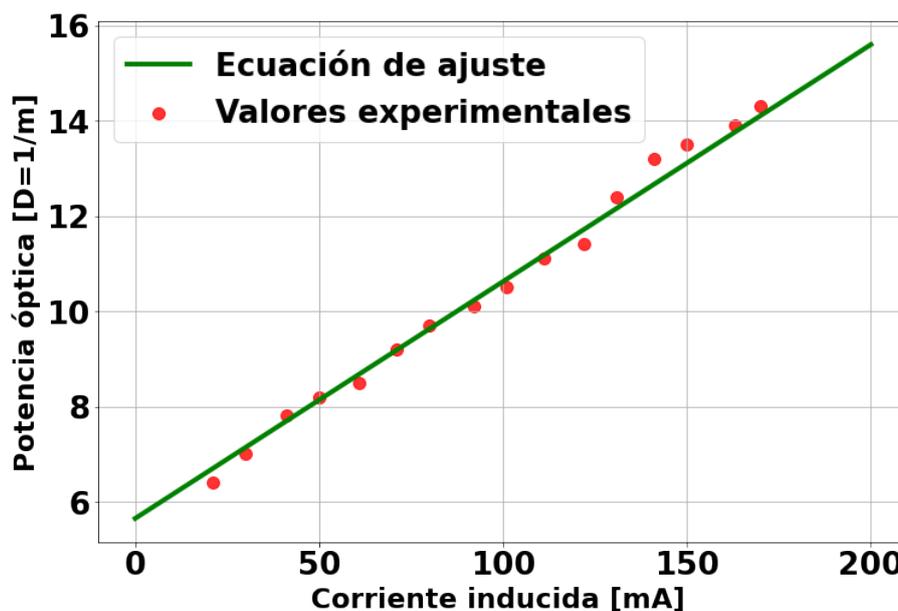


Figura 3.7: Caracterización de la lente EL 10-30. Los puntos representan los datos experimentales, mientras que la línea sólida representa la ecuación de ajuste a los datos experimentales.

Con la finalidad de validar el ajuste de datos experimentales, puede emplearse el método de los residuos. Investigar los residuales normalizados como un indicador de la calidad de un ajuste ayuda en determinar como un modelo incorrecto puede conducir a estructura y autocorrelaciones en los residuos normalizados. La estructura de los residuos se puede visualizar más claramente haciendo uso de un gráfico de rezago que se construye trazando el R_i residual normalizado según [10];

$$R_i = \frac{y_i - y(x_i)}{\alpha_i} \quad (3.20)$$

donde y_i , α_i y $y(x_i)$ son la medición, incertidumbre y valor del ajuste respectivamente, contra un R_{i-k} donde k es un número entero, y generalmente es 1. Estos gráficos son de gran utilidad para identificar valores atípicos y para probar la aleatoriedad de los errores. Cualquier patrón no aleatorio en el gráfico de retardo es un indicador de autocorrelaciones en los residuos y sugiere que algo falta en el modelo teórico.

El grado de correlación, o forma en la gráfica de retardo se puede reducir a un solo valor numérico evaluando el valor estadístico Durbin-Watson considerando su forma ponderada, para $k = 1$, el término de Durbin-Watson D se define en términos de los residuos normalizados como [10];

$$D = \frac{\sum_{i=2}^N [R_i - R_{i-1}]^2}{\sum_{i=1}^N [R_i]^2} \quad (3.21)$$

La estadística de Durbin-Watson tiene valores en el rango $0 < D < 4$ y puede indicar tres casos límites.

- $D=0$ implica que los residuos están correlacionados sistemáticamente.
- $D=2$ implica que residuos están distribuidos aleatoriamente y siguen una distribución gaussiana.
- $D = 4$: implica que los residuos sistemáticamente anticorrelacionados.

Es importante tener en cuenta que si el valor de D se acerca a 0 o 4 se debe sospechar del ajuste estadístico, y cuestionar el ajuste si D difiere significativamente de 2.

El valor estadístico obtenido de $R^2=0.987$; mientras que el valor estadístico de Durbin-Watson determinó un valor de 1.223, lo cual indica que los datos están distribuidos de forma aleatoria y siguen una distribución gaussiana. Con la finalidad de corroborar los datos obtenidos y la relación entre la potencia óptica se realiza una inspección de visual o análisis de residuos como se observa en la Fig. 3.8.

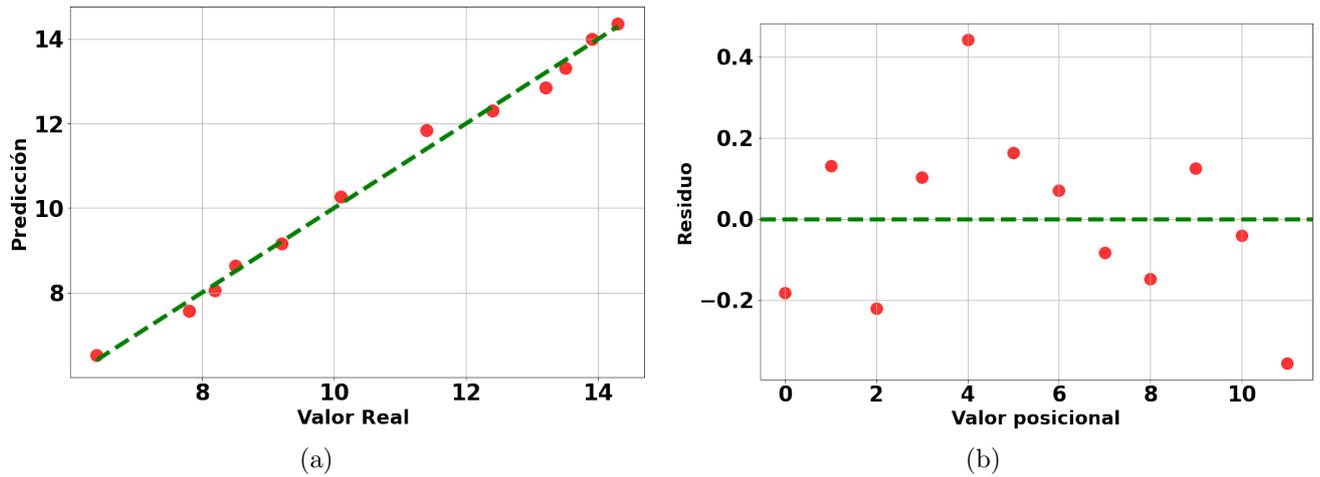


Figura 3.8: En la Fig(a) se representan el valor predicho vs el valor real; mientras la Fig(b) representa los residuos del modelo; donde el valor posicional indica el orden en el cual están los datos experimentales.

Para observar la dispersión respecto de la recta para cada valor predicho (cuánto se alejan del ajuste), se realiza un gráfico de Residuos vs Predichos (Residuals vs Fitted). Luego se espera que no exista ningún tipo de patrón en los residuos, además, no se espera tener datos atípicos, es decir, datos con residuos muy grandes, lo cual se observa en la Fig.3.9.

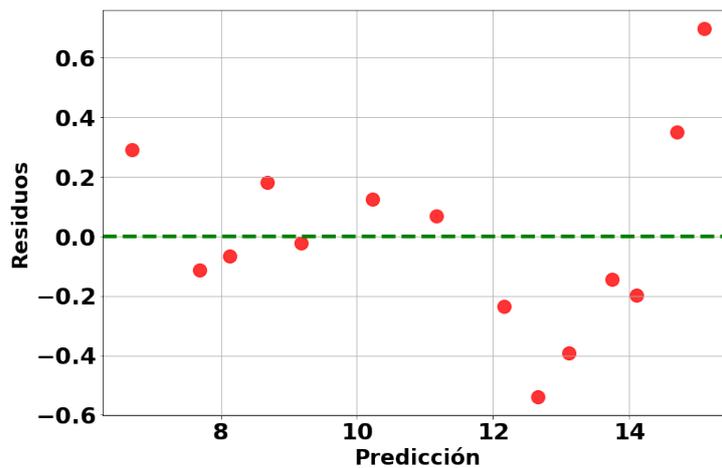


Figura 3.9: Residuos del modelo vs predicción.

En la Fig.3.10 la cual representa un gráfico Q-Q Plot se muestra cómo se acumulan los residuos respecto de los cuantiles teóricos de una distribución normal. El hecho de que se aprecien los residuos cercanos a la línea recta implica que la distribución de los residuos es normal,

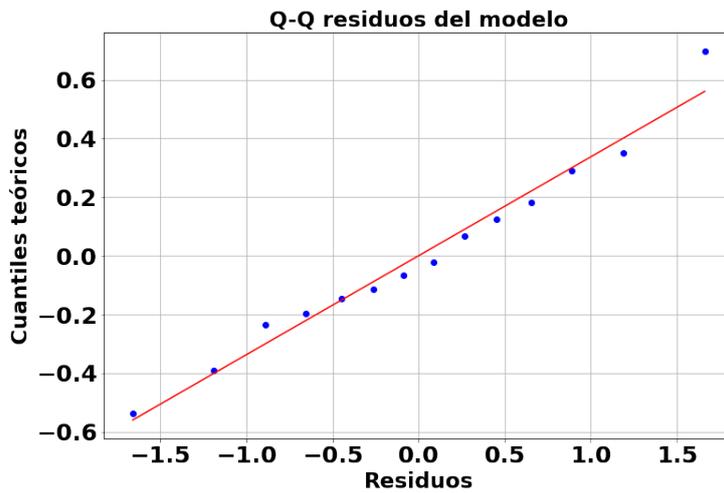


Figura 3.10: Gráfico Q-Q plot de residuos del modelo.

luego, en la Fig.3.11 se puede observar que la distribución de los residuos del modelo siguen una distribución normal.

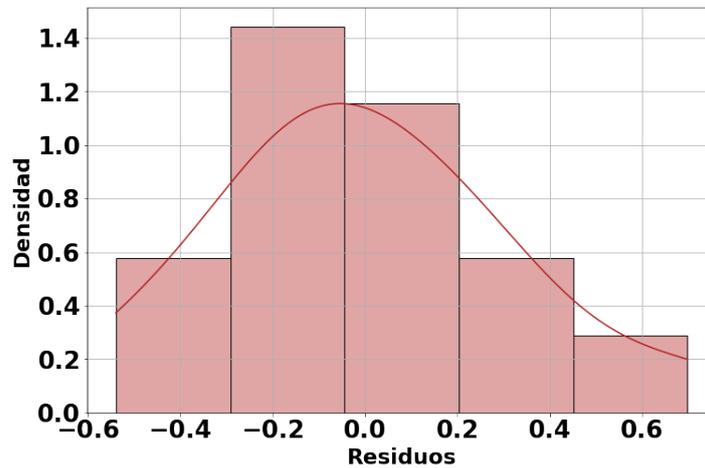


Figura 3.11: Distribución residuos del modelo.

En la Fig.3.12 se incluyen los límites superior e inferior del intervalo de confianza. Esto permite identificar la región en la que, según el modelo generado y para un determinado nivel de confianza, se encuentra el valor promedio de la variable obtenida.

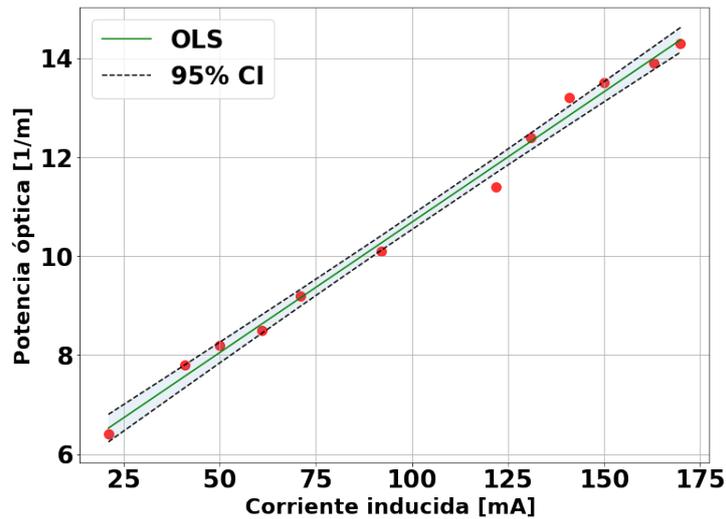


Figura 3.12: Intervalo de confianza calibración $\lambda=630$ nm.

Por lo tanto, se puede observar efectivamente que la relación entre potencia óptica, donde su rango está entre las 0 y 16 dioptrías y la corriente y su rango está dado entre 0 y 200 mA para una longitud de onda $\lambda = 632$ nm es lineal.

Con la intención de validar los resultados anteriores se realiza una segunda calibración usando un método diferente. Se iluminó la lente EFTL empleando un láser con una longitud de onda $\lambda=1064$ nm. De igual manera, se realiza el ajuste de valores experimentales, con la finalidad de obtener la relación entre la potencia óptica y la corriente inducida bajo esta longitud de onda. En la Fig. 3.13 se aprecian los datos experimentales y, adicional se representan la ecuación de línea recta que mejor se ajusta a los datos.

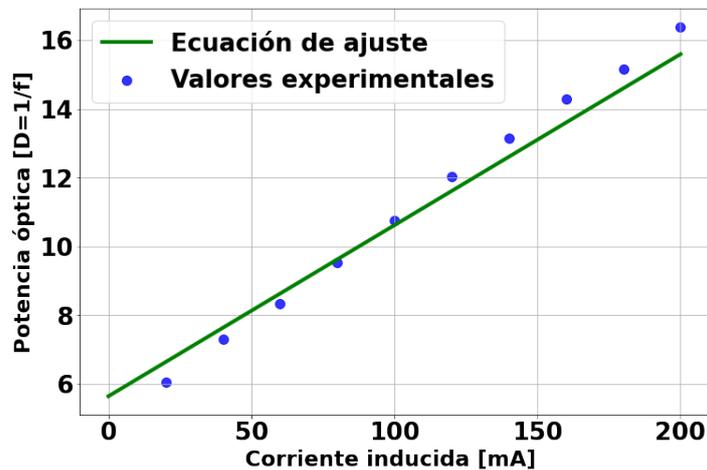


Figura 3.13: Caracterización de la lente EL 10-30 empleando una longitud de onda $\lambda=1064$ nm.

Al determinar la relación entre la potencia óptica y la corriente aplicada, se realiza un ajuste de regresión lineal ordinaria (OLS) como se aprecia en el cuadro 3.2.

Ajuste lineal de datos experimentales			
	Coefficiente	std err	[0.025 0.975]
Intercepto	4.96	0.07	4.77 5.15
Pendiente	0.05	0.01	0.05 0.05

Cuadro 3.2: Ajuste de datos experimentales empleando una longitud de onda $\lambda=1064$ nm. La primera columna indica el valor de ajuste, la segunda columna la desviación estándar y la tercera columna el intervalo de confianza.

Aunque el valor que se obtiene mediante el ajuste de $R^2=0.99$ y el valor estadístico de Durbin-Watson de 1.82, indican un buen ajuste y una distribución normal de los datos experimentales, es importante realizar de nuevo una inspección visual para validar el ajuste experimental de la potencia óptica, lo cual se muestra la Fig.3.14.

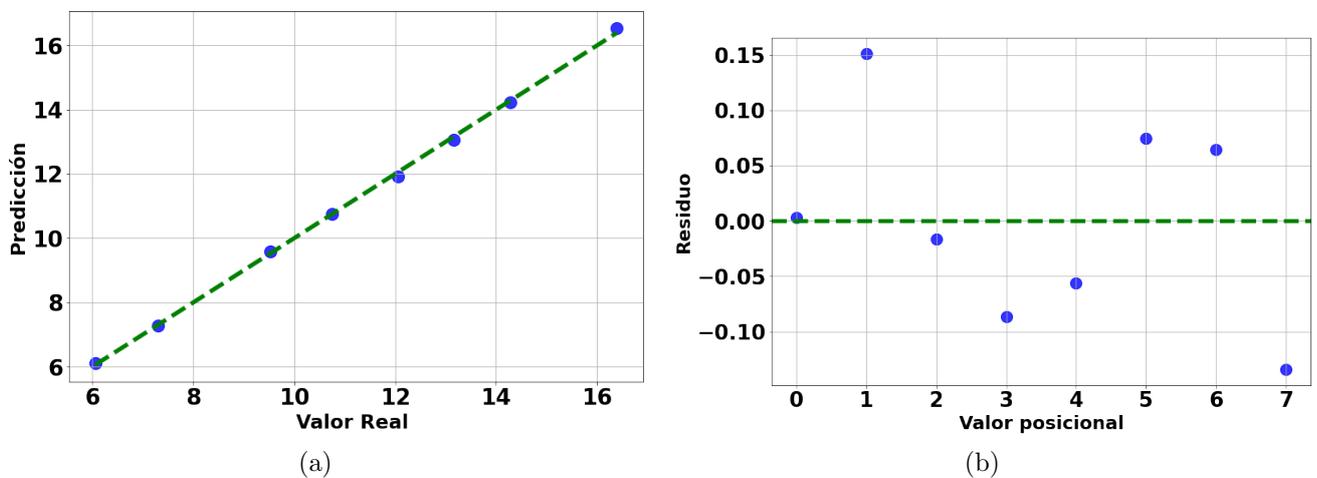


Figura 3.14: En la Fig(a) se representan el valor predicho vs el valor real de la potencia óptica; mientras la Fig(b) representa los residuos del modelo.

En la Fig.3.15 se observa que los residuos no siguen ningún patrón, lo cual indica que los residuos se distribuyen de manera normal.

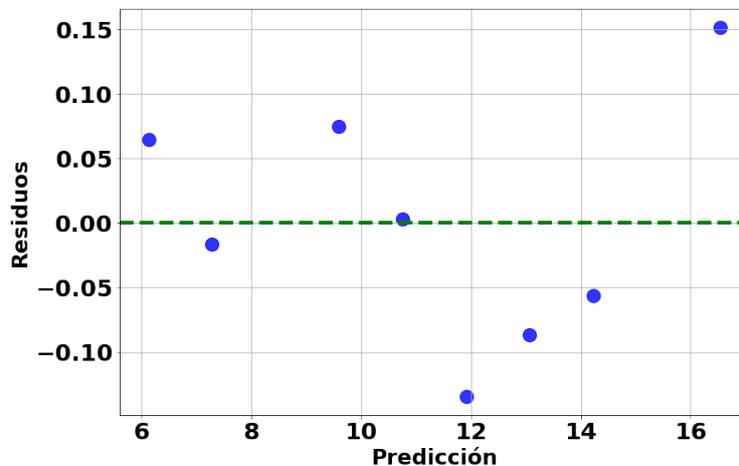


Figura 3.15: Residuos del modelo vs predicción.

La Fig.3.16 la cual representa un gráfico Q-Q Plot se muestra cómo los residuos no se desvían respecto a la recta, lo que deja más claro que efectivamente la distribución de los residuos es normal.

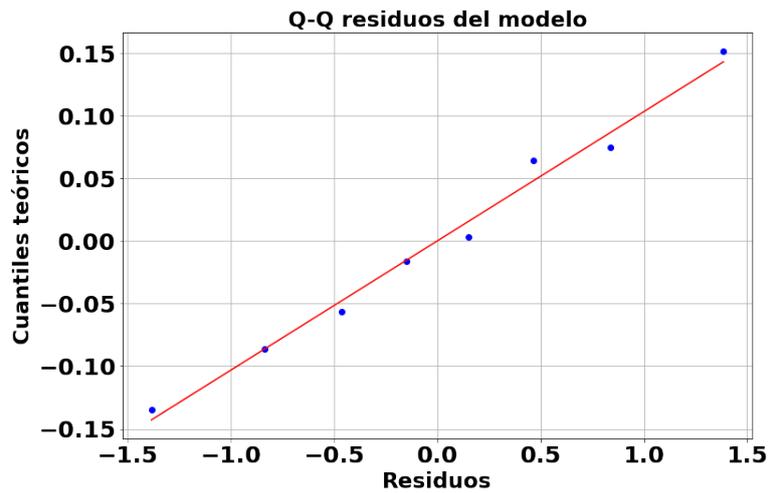


Figura 3.16: Gráfico Q-Q plot de residuos del modelo.

Luego, en la Fig.3.17 se aprecia la distribución de los residuos del modelo, lo cual es consecuente con una distribución normal.

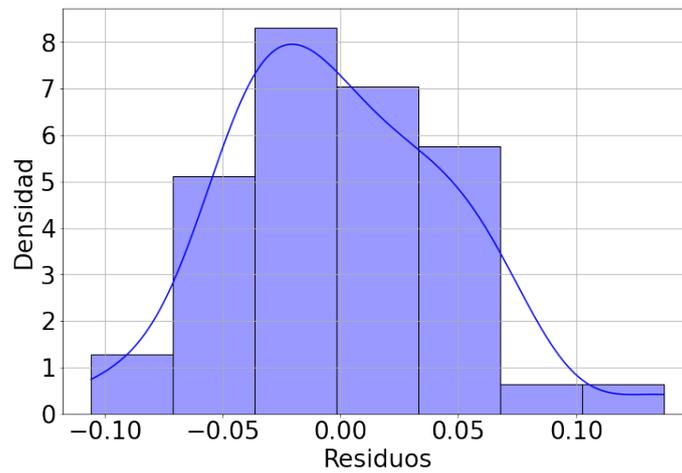


Figura 3.17: Gráfico Q-Q plot de residuos del modelo.

En la Fig.3.18 se incluyen los límites superior e inferior del intervalo de confianza. Esto permite identificar la región en la que, según el modelo generado y para un determinado nivel de confianza, se encuentra el valor promedio de la variable obtenida.

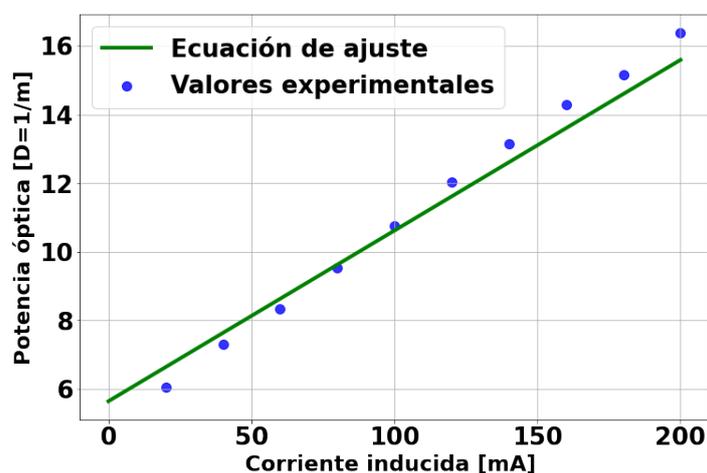


Figura 3.18: Caracterización de la lente EFTL mediante un ajuste polinomial empleando una longitud de onda $\lambda=1064$ nm.

Nuevamente para 1064 nm la relación potencia-corriente es lineal como lo es para la longitud de onda 632 nm. En ambas pruebas, se aprecia que los valores de las pendientes estadísticamente son iguales, lo que quiere decir que tienen la misma relación potencia-corriente, por lo tanto, la lente EFTL es acromática. En la Fig.3.13 y en la Fig.3.7 puede observarse que la diferencia en el intercepto se debe probablemente a diferencias en el origen usado para medir las distancias focales.

Es importante establecer que la lente es acromática, debido a que para valores diferentes de longitudes de onda con la que ésta sea iluminada se obtendrán relaciones parecidas de la potencia en función de la corriente suministrada. De igual manera, es recomendable que la lente EFTL sea calibrada según la longitud de onda con la que se vaya a trabajar el modelo experimental.

3.3. Fenómeno de histéresis en las lentes electroópticas EFTL

Un aspecto a tener en cuenta es la presencia de histéresis en las lentes EFTL. Este estudio ha sido realizado en el artículo[13] en donde se propone una metodología para la programación aleatoria de corrientes, pero en el caso de F-scan la programación de la corriente siempre se hace en una dirección creciente o decreciente, la cual es tratada en este trabajo.

Al momento de realizar el ajuste de los datos experimentales, se debe tener en cuenta el punto de partida de la corriente, es decir, si el recorrido de la corriente comienza desde el valor mínimo (0 mA) o, un valor de corriente máximo el cual es exclusivo de la marca de la lente EFTL. La Fig.3.19 muestra el proceso de inducción de corriente, ya sea en sentido creciente, donde la corriente aumenta desde un valor mínimo a un valor máximo y, en sentido opuesto, donde ésta disminuye desde el valor máximo al valor mínimo de corriente.

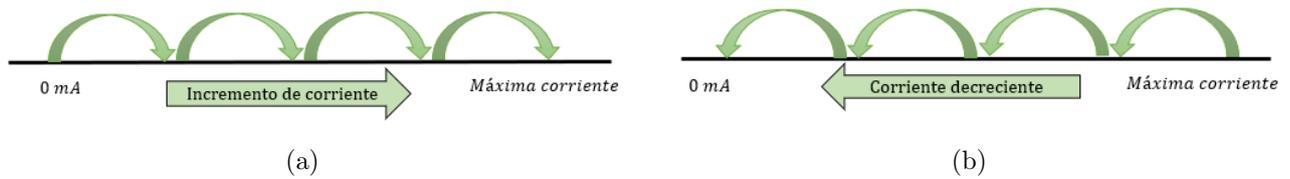


Figura 3.19: En (a) se representa la dirección creciente de la corriente, y en (b) la dirección decreciente de la corriente.

En la Fig. 3.20 se puede apreciar que la potencia óptica tiene una dependencia de la dirección en la que se da el cambio de la corriente (aumentando o disminuyendo el valor actual). Por tal motivo, esta dependencia en la dirección cambiante de la variable de control es precisamente la característica de un efecto de histéresis en el sistema. Cabe resaltar que dicho fenómeno de histéresis es independiente del paso usado en el cambio de la corriente, es decir, si esta se aumenta de 0.1 mA, 0.2 mA, 0.3 mA, entre otros.

Por tal motivo, además, de conocer la dependencia de la potencia óptica y la corriente, también es importante conocer la dirección en la que esta llega a la lente, ya sea creciente o decreciente.

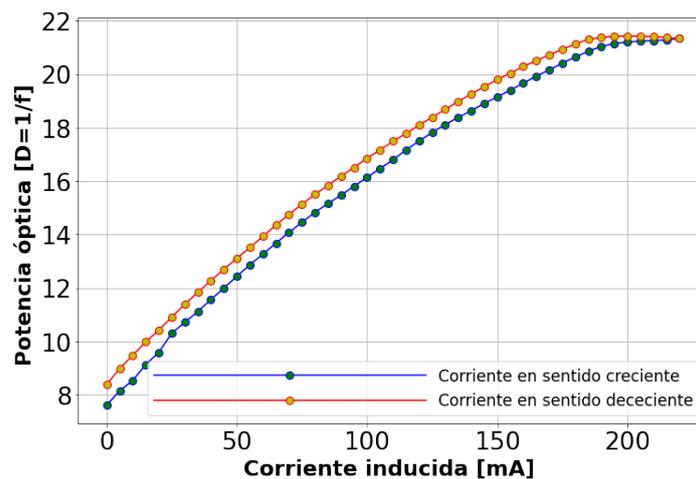


Figura 3.20: Histéresis en la lente EFTL empleando una longitud de onda $\lambda=532$ nm.

Las funciones de transmitancia, tienen una dependencia exclusiva de la dirección de corriente que se induzca en el modelo experimental; lo cual se muestran en la Fig.3.21 (línea roja o azul). El valor mínimo de dichas funciones es aquel que corresponde al plano donde la distancia focal programada en la EFTL coincide con la distancia d_m entre la EFTL y el plano donde se encuentra la muestra. Es importante resaltar, que al momento de realizar el ajuste experimental mediante el modelo teórico TF-scan para obtener una correcta determinación del coeficiente TPA, es obligatorio obtener una relación unívoca entre la corriente y la distancia focal. A continuación, se mostrará lo que sucede si se utiliza una calibración realizada para una ruta de corriente creciente para ajustar los datos experimentales obtenidos con una ruta de corriente decreciente y viceversa.

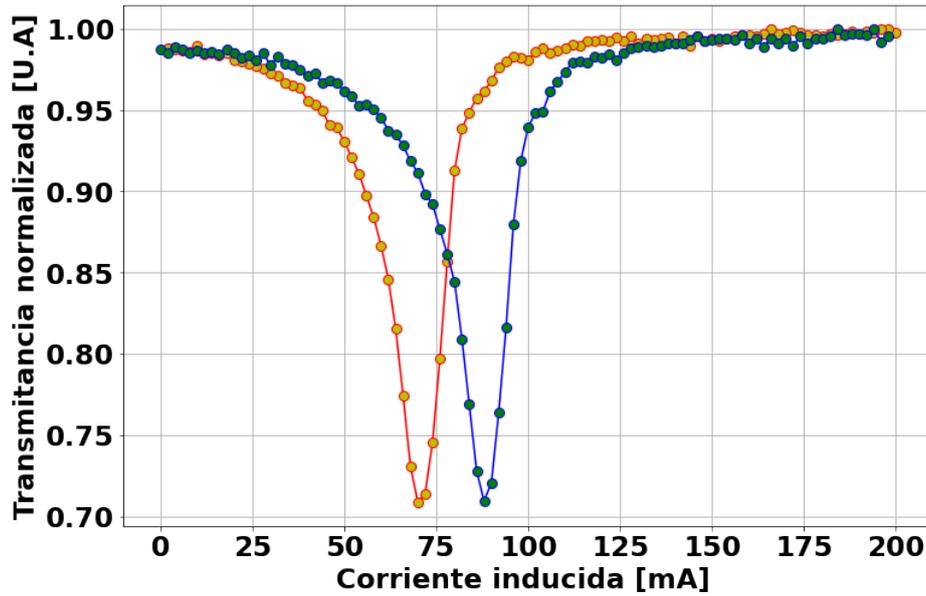


Figura 3.21: Función de transmitancia medida con un cristal bulk de Si. La línea azul con puntos verdes corresponde al método con corriente creciente, mientras la línea roja con puntos amarillos corresponde al método con corriente decreciente.

Las funciones de transmitancia obtenidas correspondientes a la Fig.3.21 fueron obtenidas empleando una muestra de Silicio con los parámetros experimentales que se muestra en el cuadro 3.3.

L(mm)	d(mm)	D(mm)	P_{avg} (mW)	R	α (1/cm)
1.2	100	1.3	260	0.33	760

Cuadro 3.3: Parámetros experimentales técnica F-scan.

Con la finalidad de determinar un correcto ajuste al valor del coeficiente de absorción de dos fotones, es necesario caracterizar la dirección de la corriente. Se ajustaron los datos experimentales usando la calibración (corriente creciente) y se obtuvieron los valores de TPA para la función de transmitancia obtenida con la calibración (corriente creciente) de $\beta=6.5$ cm/GW, mientras para la función de transmitancia obtenida con la calibración (corriente decreciente) se obtiene un valor de $\beta=3.7$ cm/GW.

De los ajustes experimentales obtenidos, se puede determinar una diferencia entre los valores de TPA cuando se utilizaron las calibraciones correctas, esta fue del 16 %, mientras que la diferencia cuando se utilizaron las calibraciones incorrectas fue superior al 48 %. Este resultado muestra la coherencia entre los valores de TPA obtenidos cuando se utiliza la calibración correcta. También muestra el considerable error de precisión cuando se utiliza la calibración incorrecta, mostrando lo importante que es tener una calibración correcta cuando se tiene en cuenta el fenómeno de histéresis.

Bibliografía

- [1] SUTHERLAND, R. L. (2003). *Handbook of nonlinear optics*. CRC press.
- [2] JACKSON, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*.
- [3] BOYD, R. W. (2003). *Nonlinear optics*. Elsevier.
- [4] JUAN HUMBERTO SERNA RESTREPO, *Estudio e implementación de técnicas ópticas basadas en el principio de distorsión espacial del haz para la medición de parámetros ópticos no lineales y caracterización de pulsos ultracorto*. (2016) Tesis Doctorado.
- [5] FRANCISCO J. RODRIGUEZ, FU XIANG WANG, MARTTI KAURANEN. *Calibration of the second-order nonlinear optical susceptibility of surface and bulk of glass*” Optics Express 16, 12 (2008).
- [6] ROBERT W. BOYD , *Nonlinear Optics*. Third Edition. (2008)
- [7] P.A.FRANKELN Y COL ”*Generation of Optical Harmonics*”, Physical review letter 7,no.4 (1961):118 Elsevier.
- [8] AGRAWAL, G. (2011) .*Applications of nonlinear fiber optics*”, Elsevier.
- [9] MARK A. HEALD, JERRY B. MARION *Classical electromagnetic radiation*”, Thomson Learning, third edition USA (1995).
- [10] IFAN HUGHES; THOMAS P A HASE .*Oxford : New York : Oxford University Press, 2010.*”.
- [11] “DISPERSION OF BOUND ELECTRONIC NONLINEAR REFRACTION IN SOLIDS,”, *Kramers–Kronig Relations in Optical Materials*. IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 27, no. 6. pp. 1296–1309, 1991
- [12] R. S. QUIMBY, *PHOTONICS AND LASERS: AN INTRODUCTION*. John Wiley and Sons, 2006.
- [13] Walter A. Torres-Sepúlveda, Julian D. Henao Escobar, Jennyfer A. Morales Marín , Alejandro Mira-Agudelo, Edgar A. Rueda Muñoz HYSTERESIS CHARACTERIZATION OF AN ELECTRICALLY FOCUS-TUNABLE LENS.Optical Engineering 59(4), 044103 (8 April 2020). <https://doi.org/10.1117/1.OE.59.4.044103>.
- [14] M. BORN AND E. WOLF *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*,Elsevier, 2013.
- [15] MELINDA ROSE, *A history of the laser: A trip through the light fantastic. A laser history*,Elsevier, 2010.

- [16] R. S. QUIMBY, *Photonics and lasers: an introduction. John Wiley and Sons*, Elsevier, 2006.
- [17] CENTRO DE LÁSERES PULSADOS,, *funcionamiento de un láser,*”, Elsevier, 2007.

Análisis de parámetros experimentales

El Premio Nobel Richard Feynman afirma que: La prueba de todo conocimiento es el experimento. El experimento es el único juez de la “verdad” científica. Por lo tanto, un experimento no está completo hasta que no se haya realizado un análisis de la incertidumbre en el resultado final a reportar. Solo cuando se conoce la incertidumbre del valor experimental es posible hacer las siguientes preguntas:

- ¿Los resultados concuerdan con la teoría?
- ¿Son reproducibles los resultados?
- ¿Se ha observado un nuevo fenómeno o efecto?

El objetivo del análisis de errores es cuantificar y registrar los errores asociados con la propagación inevitable en un conjunto de mediciones, y por tanto, identificar cómo se puede mejorar el experimento. En las ciencias naturales, a menudo se realizan experimentos para determinar el valor de una cantidad, sin embargo, siempre habrá un error asociado con ese valor debido a incertidumbres experimentales. Nunca se puede estar seguro de cuál es el valor exacto, pero los errores proporcionan un rango característico en el cual se cree que el valor correcto reside en una probabilidad y por tanto, en un conjunto de valores específicos. Por tal motivo, un experimento no estará totalmente determinado o completo hasta que no se haya realizado un análisis de la incertidumbre en el resultado final a reportar[1].

Al realizar un análisis de datos experimentales es de vital importancia informar el valor obtenido de esta cantidad medida con la mejor estimación, donde la incertidumbre reportada debe considerarse como una declaración de probabilidad que permite evaluar la cantidad medida dentro de los límites conocidos. En la física experimental, la reducción de los errores aleatorios es de gran importancia debido a que en los experimentos cuanto menor sea la incertidumbre aleatoria, menor será el rango disperso de los datos y, por lo tanto, más precisa será la medición. La mejor estimación de la cantidad medida es la media de los datos distribuidos y por tanto, el error está asociado con la distribución de valores alrededor de esta media[2]. La distribución que describe la extensión de los datos se define mediante un término estadístico conocido como desviación estándar.

Es importante tener presente que los mecanismos de medición siempre tendrán incorporado un ruido fundamental el cual puede estar regido por alguna ley física, pero normalmente funcionará con un nivel de ruido más alto, ruido técnico que en principio puede reducirse. Un modelo experimental estará siempre determinado por un conjunto de leyes físicas y por tanto, el mecanismo de medición se rige bajo estas características físicas, pero en los mecanismos usados para describir y modelar determinado fenómeno experimental debe incorporarse el ruido técnico

el cual depende de las condiciones del experimentador y de los mecanismos de medición[3]. En un experimento se tiene como principal objetivo reducir en un alto porcentaje los errores en la toma de datos experimentales, pero algunos de ellos son inevitables y siempre harán parte del experimento que se lleve a cabo. Es por ello, que en este capítulo se pretende estudiar como los parámetros experimentales empleados en la técnica de caracterización óptica F-scan afectan el valor de TPA.

4.1. Ajuste de parámetros simulados.

El análisis de datos experimentales es aplicado para describir algunos fenómenos físicos mediante modelos matemáticos que pueden describir de manera cualitativa y cuantitativa el fenómeno, con la finalidad de realizar predicciones futuras o establecer relaciones entre valores experimentales. El fenómeno físico se puede describir mediante la recolección de datos de diferentes variables de interés a las que después se le determina algún tipo de relación. La mayoría de las leyes físicas son relaciones funcionales entre variables de un sistema. Por ende, al desarrollar modelos se busca encontrar funciones que vinculen las diferentes variables y que sean consistentes con los datos establecidos.

Al realizar un análisis de datos experimentales es muy importante esclarecer la ecuación matemática por la cual se puede describir el fenómeno físico y mas aún, establecer como se ve afectado algún parámetro o algunos parámetros elegidos para su estudio o análisis ante un cambio de otro u otros parámetros.

En el caso de F-scan, la ecuación que mejor describe la transmitancia está determinada por;

$$T(f) = \frac{1}{B(f)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\beta(1-R)L_{eff}I_0(f)}{\cosh^2(\rho)} \right) d\rho \quad (4.1)$$

Es importante determinar los parámetros experimentales más relevantes en el análisis de alguna variable particular y como estos introducen algún error en el valor real de dicha variable. En este caso, se conocerá como afecta la medida errónea de los valores experimentales al valor real del coeficiente de absorción de dos fotones β . La función de transmitancia representada en la Ec.(4.1) se puede ver en la Fig.4.1.

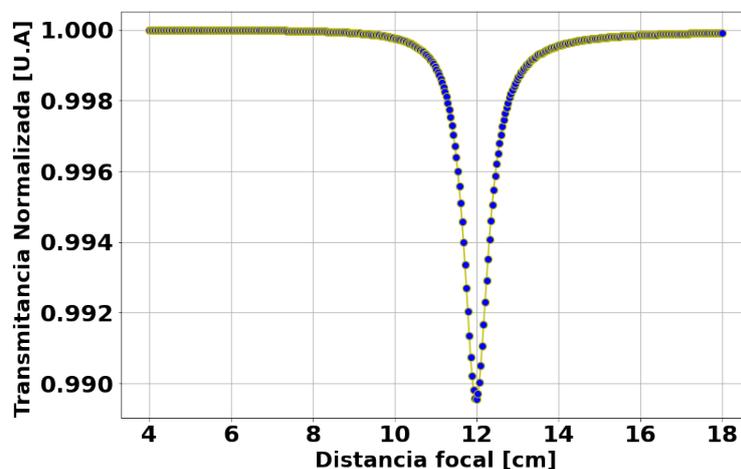


Figura 4.1: Función de transmitancia.

En el cuadro 4.1 se indican los valores simulados que han sido utilizados con la finalidad de describir la función de transmitancia, donde λ es la respectiva longitud de onda; P es la potencia incidente; d_s es la distancia de la lente EFTL a la muestra; t indica la duración del pulso; D es el diámetro del haz incidente; ν es la tasa de repetición del haz y L es el espesor de la muestra.

Parámetros simulados								
Parámetro	β [m/W]	λ [m]	P [W]	d_s [m]	t [s]	ν [Hz]	D [m]	L [m]
Valor asociado	3.4×10^{-11}	790×10^{-9}	140×10^{-3}	120×10^{-3}	70×10^{-15}	90.6×10^6	2.0×10^{-3}	0.08×10^{-3}

Cuadro 4.1: Parámetros simulados con los cuáles se ha realizado el modelo teórico de la función de transmitancia.

Considerando el valor simulado para el coeficiente de absorción de dos fotones β aquel registrado en el cuadro 4.1, se procederá a variar un único parámetro de los ya mencionados considerando los demás parámetros fijos, lo cual permitirá determinar cambios en la transmitancia en función de dicha variable.

4.1.1. Variación de parámetros simulados.

Fijando los valores experimentales, λ , β , d_s , t , D , ν y variando únicamente la potencia P , se observa en la Fig.4.2 los siguientes cambios en la función de transmitancia donde se aprecia que para potencias mayores la profundidad en la señal es mayor.

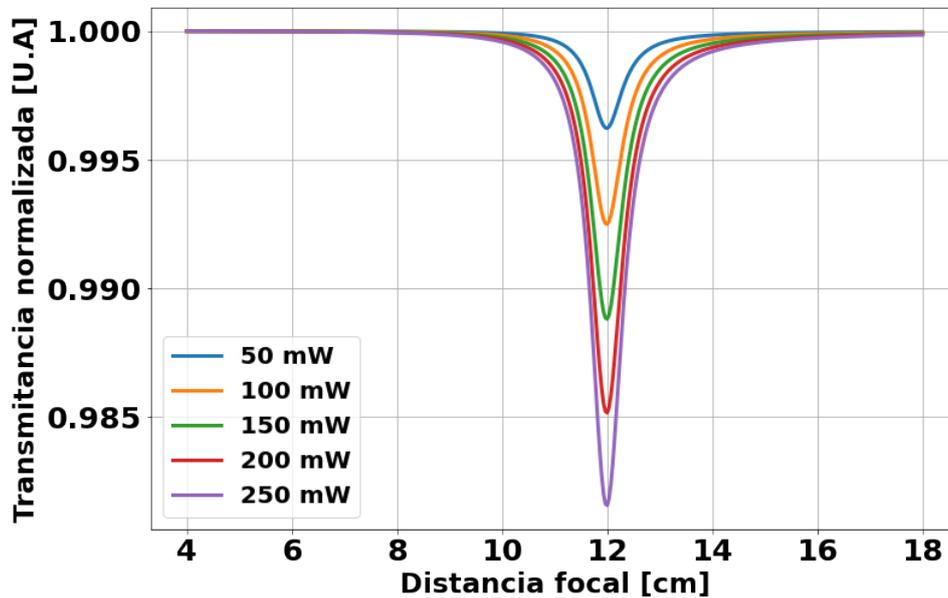


Figura 4.2: Variación de la potencia en la función de transmitancia. La profundidad de la señal se hace más intensa a medida que la potencia incidente es mayor.

También se hace posible apreciar otras características que subyacen en la función de transmitancia ante algún cambio en el valor de la potencia P , es por ello, que en la Fig.4.3a se aprecian variaciones en la profundidad donde se corrobora que a mayores potencias incidente la profundidad crece, lo cual conduce a que la profundidad y la potencia incidente son variables directamente proporcionales. En la Fig.4.3b representa la variación del ancho donde se puede apreciar que a mayores valores de potencia incidente el ancho de la transmitancia disminuye; lo cual relaciona de manera inversa la potencia incidente con el ancho de la transmitancia. El

ancho se ha medido empleando un criterio análogo a FWHM, en este caso, se mide el punto medio de la profundidad y no el máximo, y de este modo, obtener el ancho de la función de transmitancia.

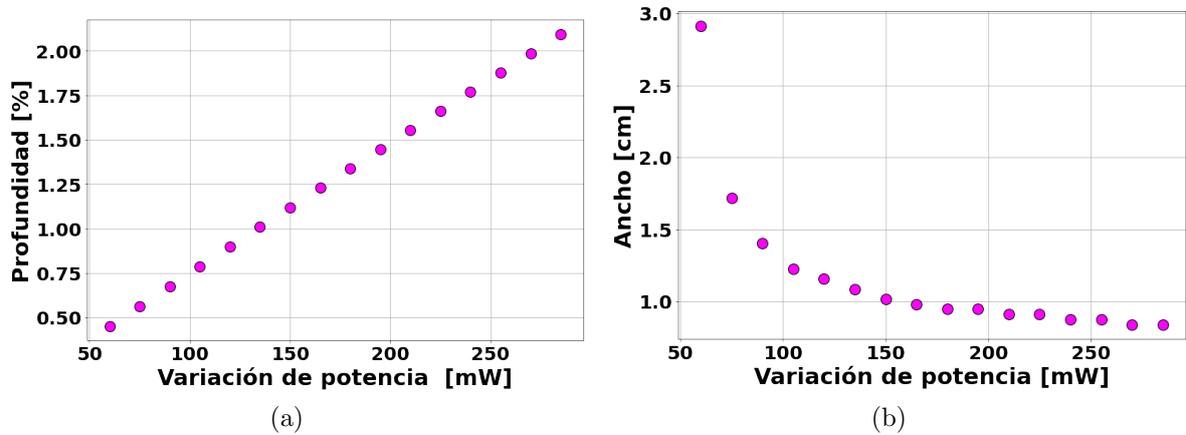


Figura 4.3: Variación de la profundidad y el ancho en función de cambios en la potencia incidente.

Además, considerando la Fig. 4.2 se puede apreciar que la posición del valor mínimo de la función de transmitancia no tiene variaciones ante cambios de P , lo cual se ilustra en la Fig.4.4b; mientras tanto, en la Fig.4.4a se gráfica la razón entre la profundidad y el ancho la cual aumenta a valores mayores de potencia incidente.

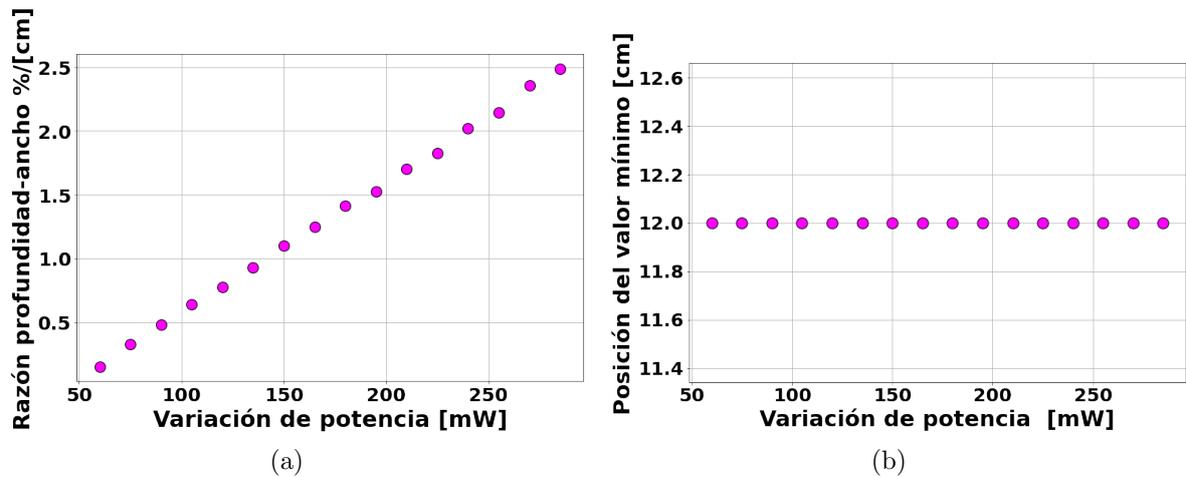


Figura 4.4: Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.

Fijando los parámetros β , λ , d_s , t , P , ν y variando únicamente el valor del diámetro D , la transmitancia también varía conforme D lo hace, lo cual se evidencia en la Fig.4.5. Se aprecia como la profundidad de la transmitancia es un función del diámetro; esto indica que ante un valor erróneo de este parámetro por encima del valor real, la función será más profunda, mientras que un valor por debajo del valor real, la función será menos intensas en su profundidad.

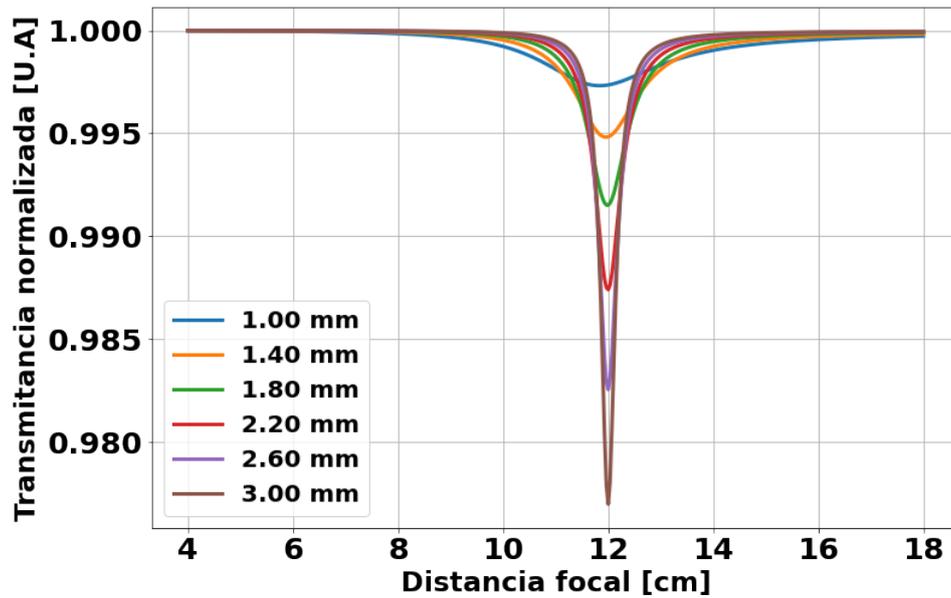


Figura 4.5: Variación del diámetro en la función de transmitancia.

En la Fig.4.6a se observa la variación de la profundidad donde se aprecia que a mayores valores del diámetro la profundidad de la transmitancia se hace mas pronunciada, luego tanto la profundidad como el diámetro son variables que se relacionan de manera directa. En la Fig.4.6b es apreciable la variación en el ancho de la transmitancia donde se observa una relación inversa con el diámetro incidente, es decir, a mayores valores del diámetro incidente el ancho de la transmitancia disminuye.

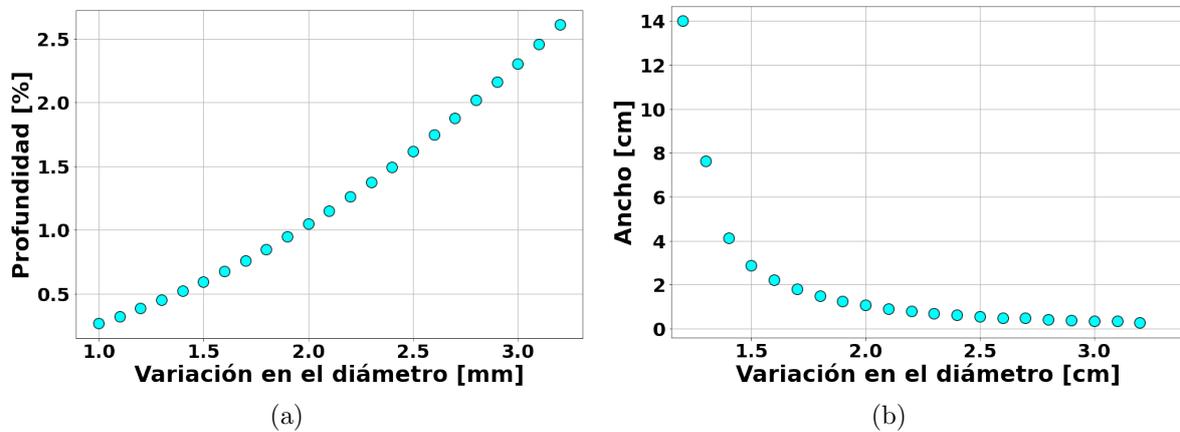


Figura 4.6: Variación de la profundidad y el ancho en función de cambios en el diámetro del haz incidente.

La razón profundidad-ancho es observable en la Fig.4.7a donde se indica que a mayores valores del diámetro esta relación también crece y, en la Fig.4.7b se indica que el valor de la posición del mínimo no cambia ante variaciones en el diámetro incidente.

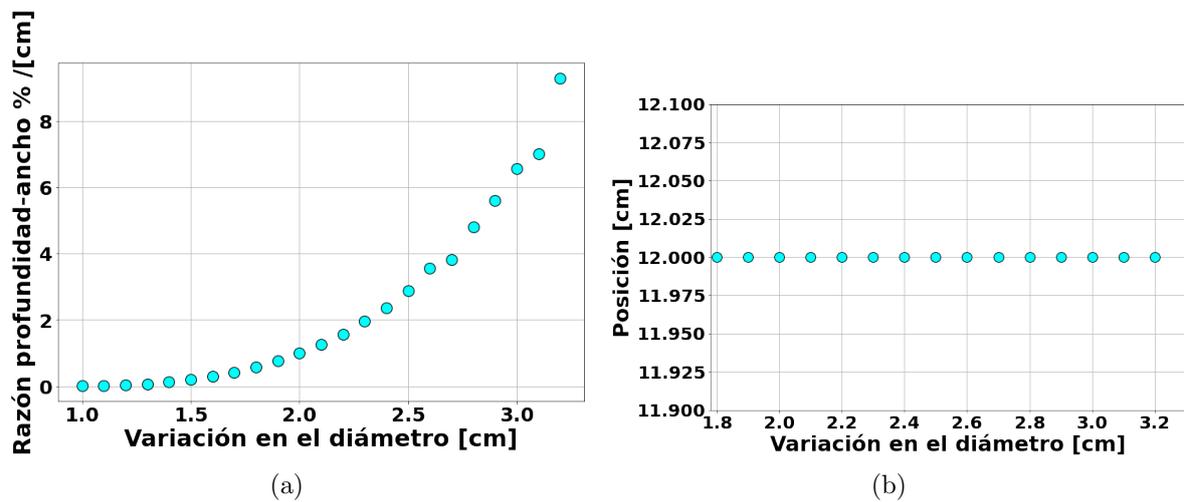


Figura 4.7: Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.

Ahora, considerando la duración del pulso t del haz incidente, de manera similar, se aprecian variaciones en la transmitancia, como se representa en la Fig.4.8

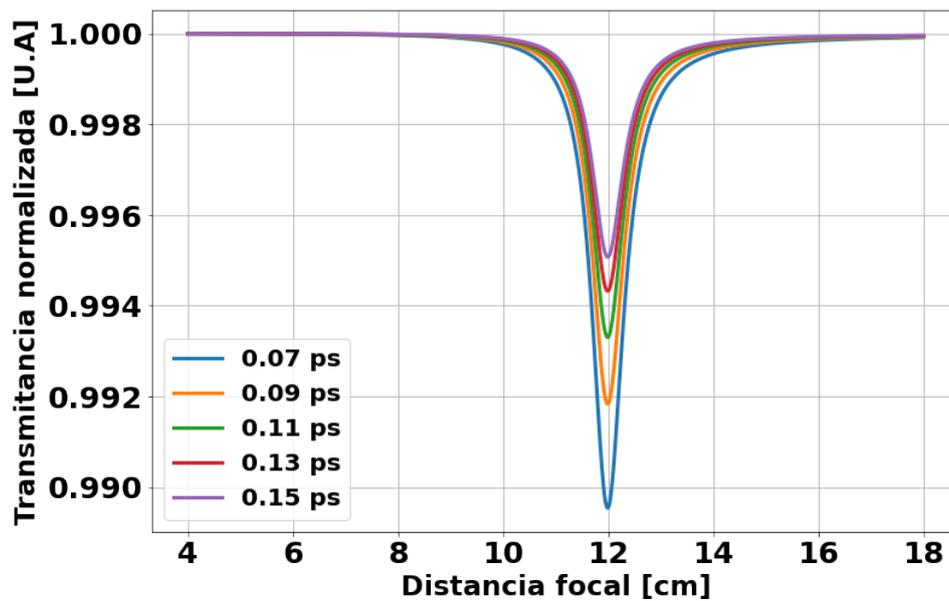


Figura 4.8: Variación en la duración del pulso t .

A continuación, en la Fig.4.9a se observa la variación de la profundidad donde se establece que la profundidad disminuye a medida que el ancho temporal del haz aumenta, luego estas dos variables se relaciona de manera inversa. En la Fig.4.9b se muestra que el ancho de la transmitancia se relaciona con el ancho temporal del haz de manera directa, es decir, a mayores valores del ancho temporal del haz, el ancho de la transmitancia se hace mas grande y viceversa.

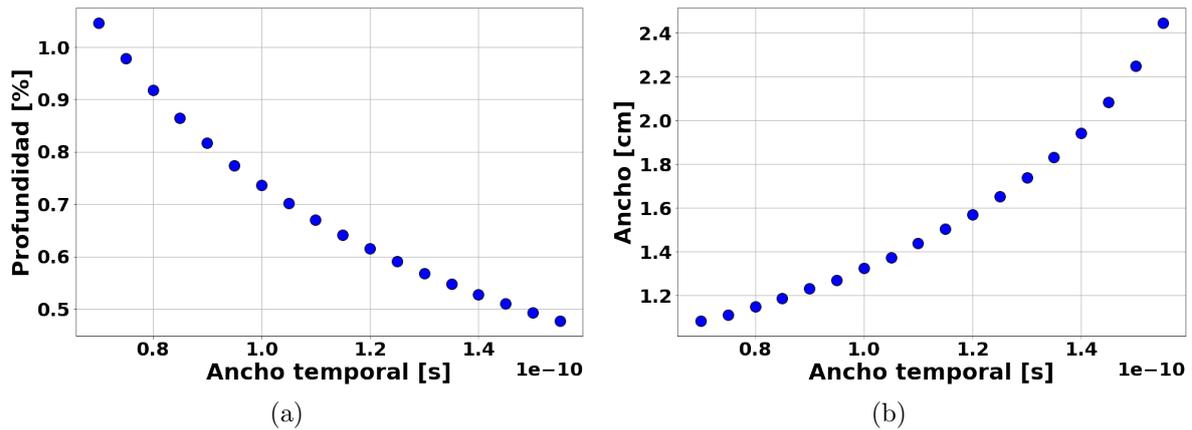


Figura 4.9: Variación de la profundidad y el ancho debido a variaciones en la duración del haz incidente.

La Fig.4.10 indica la razón profundidad-ancho. Se observa que esta relación disminuye a medida que el ancho temporal del haz aumenta; por su parte, en la Fig.4.10b se muestra que ante cambios del ancho temporal del haz, la posición del valor mínimo no cambia.

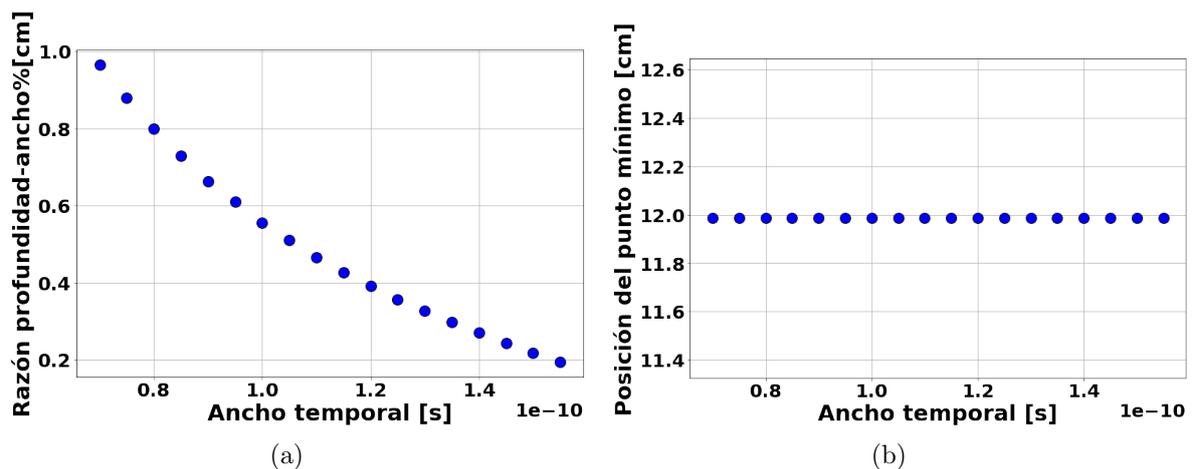


Figura 4.10: Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.

La distancia de la muestra-lente d_s también induce cambios en la transmitancia. Aunque experimentalmente este valor es sencillo de medir, estas variaciones se aprecian en la Fig.4.11.

En la Fig.4.11 se observa que la muestra se ha ido reubicando de tal modo, que siempre coincida con la distancia focal del eje horizontal. Por ejemplo, para l distancia focal de 8 cm, la muestra tiene un $d_s = 8$ cm, para una distancia focal de 10 cm, la muestra tiene un $d_s=10$ cm, y para la una distancia focal de 16 cm, la muestra tiene un $d_s=16$ cm.

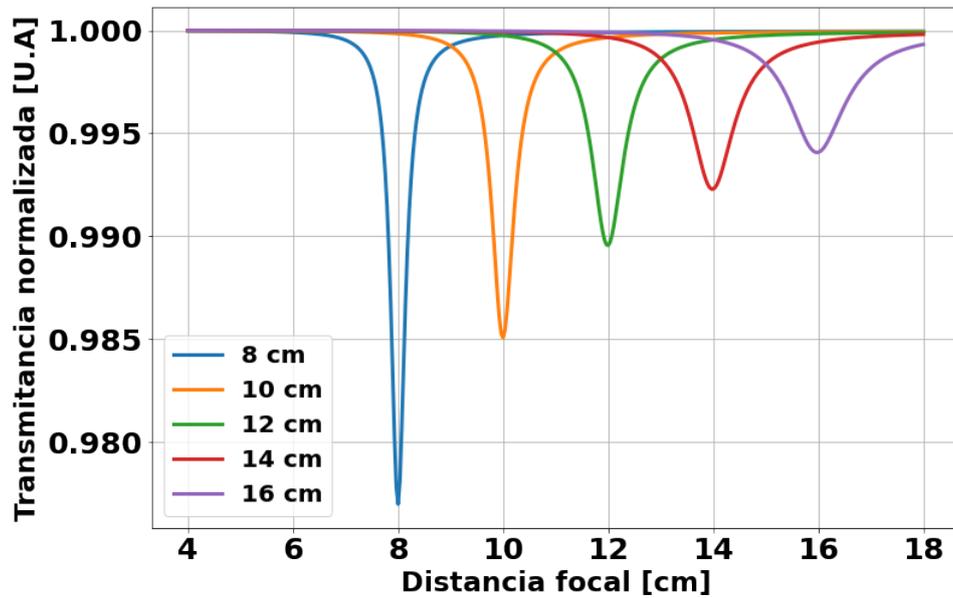


Figura 4.11: Variación de la distancia de la muestra con relación a la lente EFTL.

En la Fig.4.12a se observa la profundidad de la transmitancia disminuye a medida que la distancia muestra-EFTL se hace mayor, mientras tanto, en la Fig.4.12b se aprecia que a medida que la muestra se encuentra a una distancia mayor respecto a la lente EFTL el ancho de la transmitancia también aumenta.

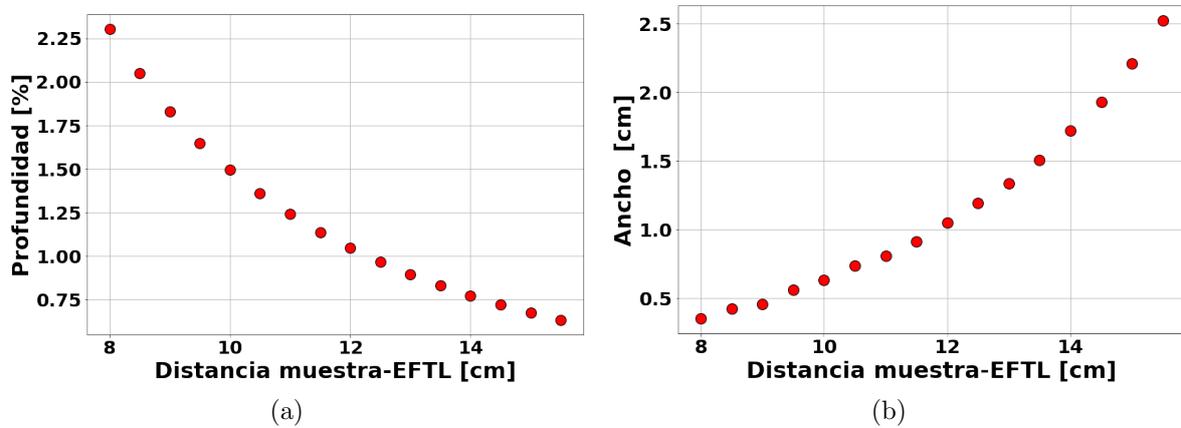


Figura 4.12: Variación de la profundidad y el ancho en función de la distancia muestra-EFTL.

Por su parte, la Fig.4.13a muestra que la razón profundidad-ancho disminuye a medida que la distancia muestra-EFTL aumentan y, en la Fig.4.13b se aprecia la variación de la posición del valor mínimo, el cual aumenta a medida que la distancia muestra-EFTL aumenta.

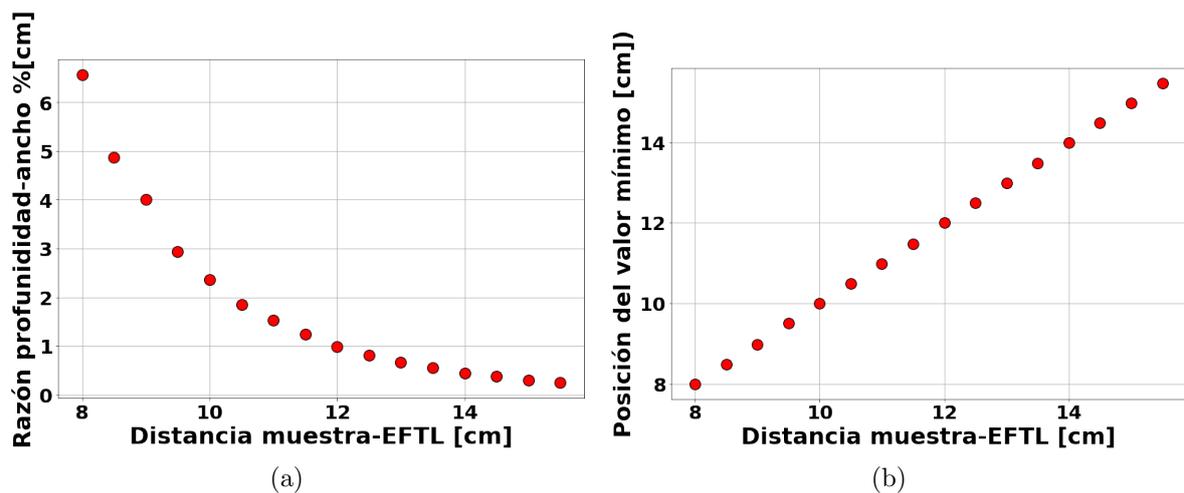


Figura 4.13: Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.

Toda muestra, de la cual se desee obtener las características ópticas, tiene cierto espesor L . En la Fig.4.17 se evidencia como cambia la transmitancia ante variaciones en el espesor de la muestra.

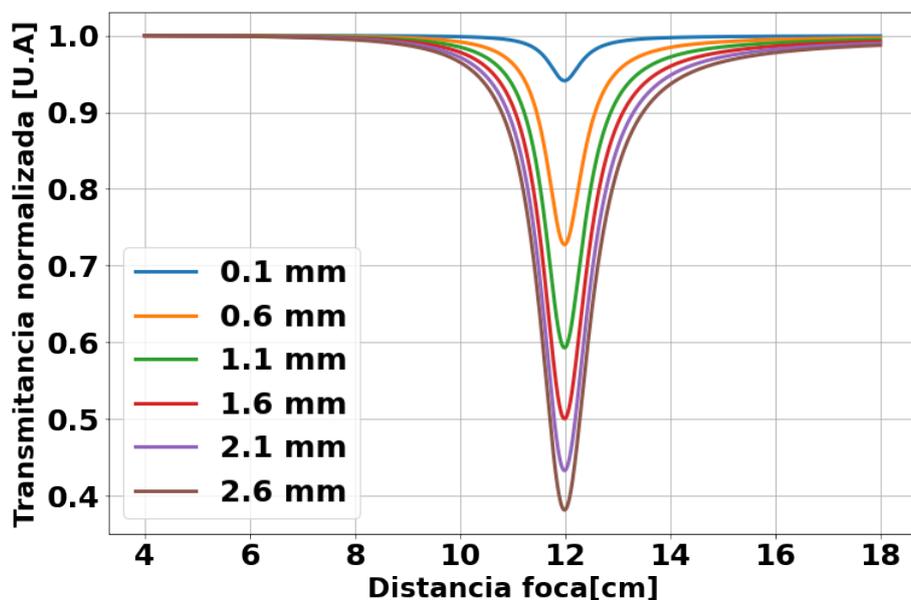


Figura 4.14: Variación de la transmitancia ante cambios en el espesor de la muestra.

En la Fig.4.15a se representa el cambio de la profundidad donde se puede concluir que la profundidad de la transmitancia aumenta a medida que el espesor de la muestra también lo hace. De manera similar, el ancho de la transmitancia también aumenta a medida que el espesor de la muestra también lo hace, tal y como se representa en la Fig.4.15b.

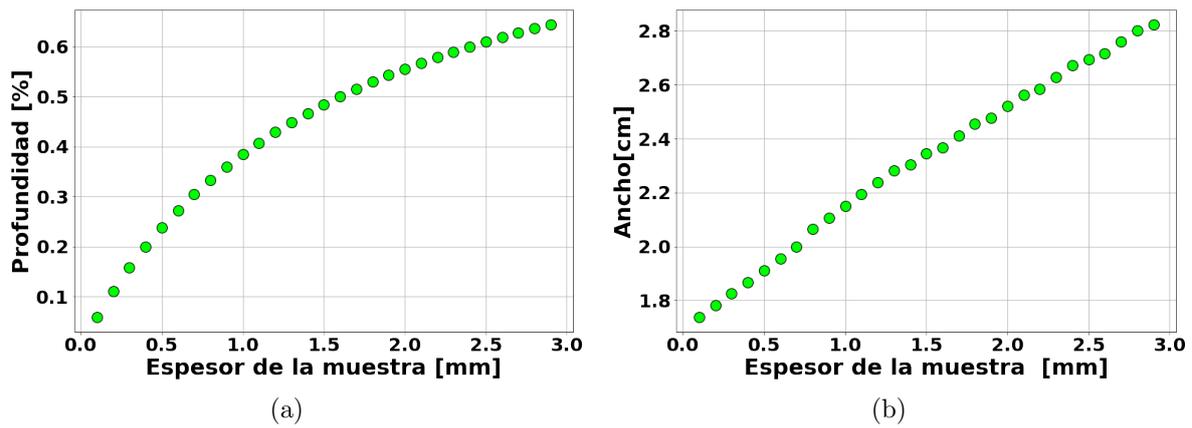


Figura 4.15: Variación de la profundidad y el ancho en función de variaciones en el espesor de la muestra.

La Fig.4.16a indica la razón entre la profundidad y el ancho donde es factible concluir que esta razón aumenta a medida que el espesor de a muestra aumenta, y de igual manera en la Fig.4.16b se puede apreciar que ante variaciones en el espesor, la posición de valor mínimo de la transmitancia permanece constante.

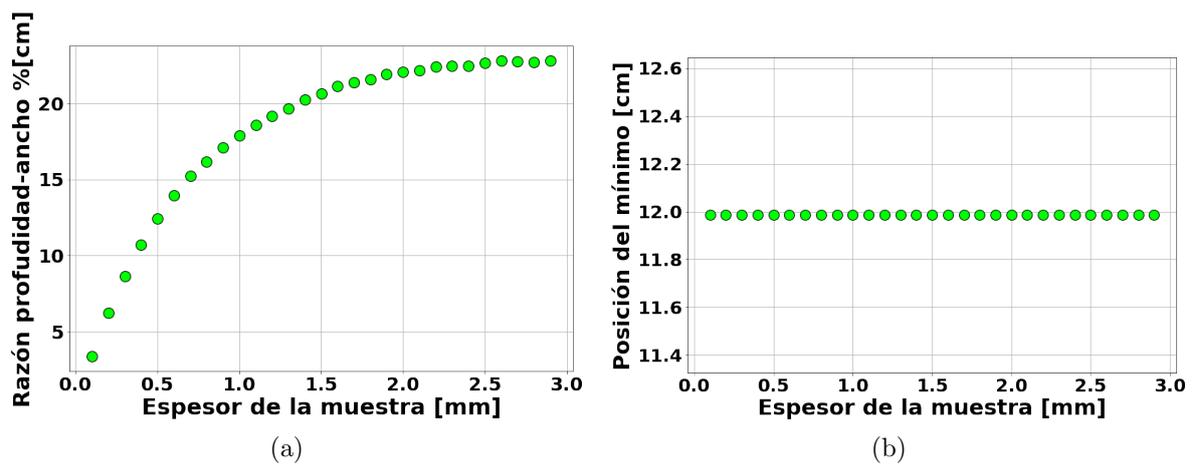


Figura 4.16: Variación de la profundidad y el ancho en función de variaciones en el espesor de la muestra.

La tasa de repetición ν del haz incidente también es otro parámetro que induce cambios en la función de transmitancia. En la Fig.4.17 se aprecian los cambios que este parámetro ocasiona en la transmitancia.

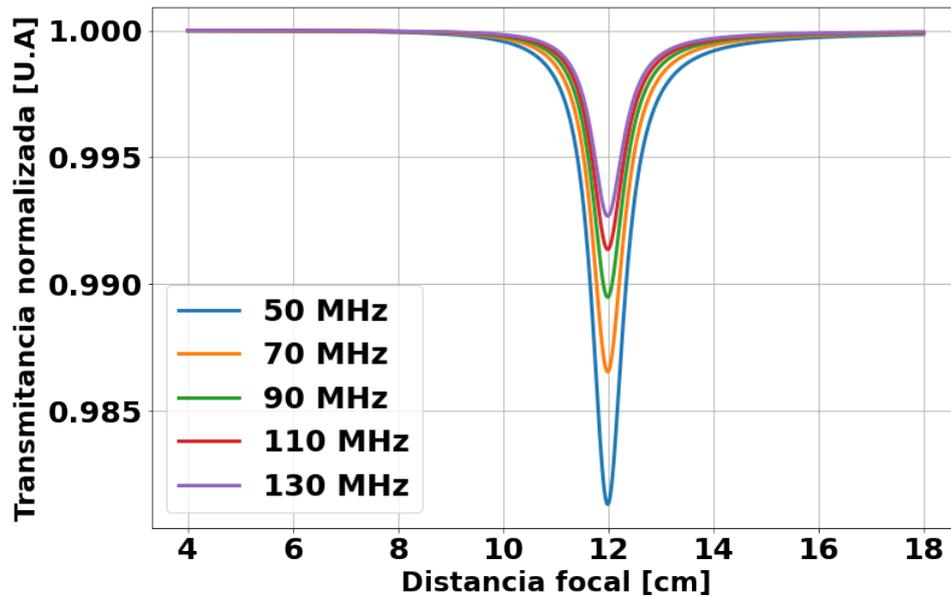


Figura 4.17: Variación en la tasa de repetición del haz.

En la Fig.4.18a se puede apreciar que la profundidad de la transmitancia disminuye a medida que la tasa de repetición del haz aumenta, mientras tanto, en la Fig.4.18b se indican las variaciones en el ancho de la transmitancia la cual aumenta cuando la tasa de repetición del haz también lo hace.

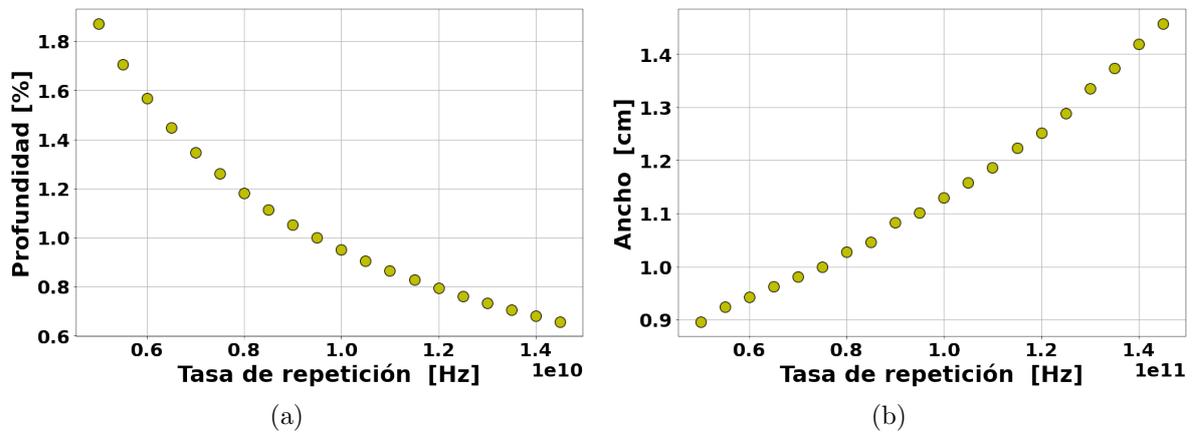


Figura 4.18: Variación de la profundidad y el ancho en función de variaciones de ν .

Los cambios en la relación profundidad-ancho se observan en la Fig.4.19a donde se puede concluir que a medida que la tasa de repetición del haz aumenta, esta relación disminuye. En la Fig.4.19b se puede observar que ante variaciones en la tasa de repetición del haz, el valor de la posición del mínimo permanece constante..

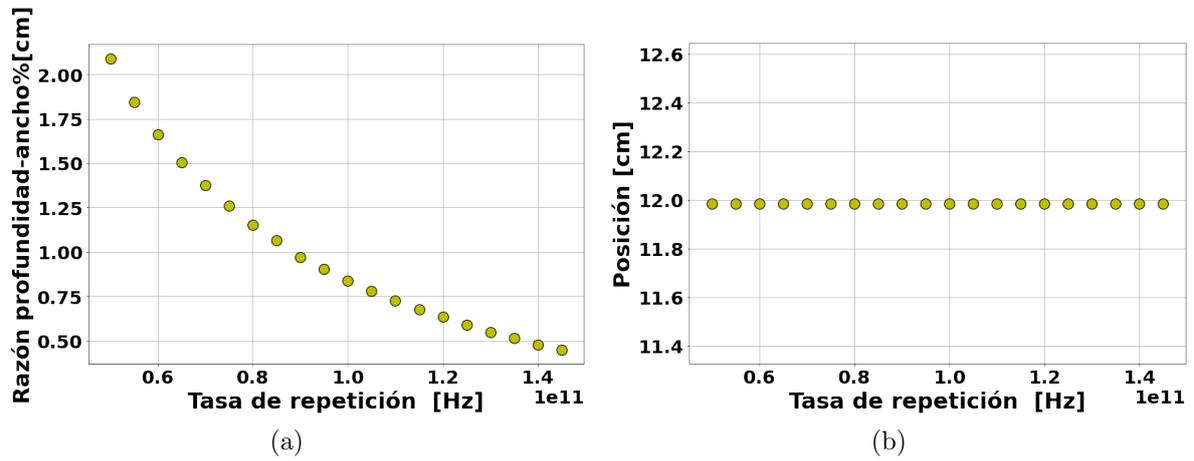


Figura 4.19: Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.

Finalmente, cambios en la longitud de onda λ también afecta la transmitancia; estas variaciones se pueden observar en la Fig.4.20.

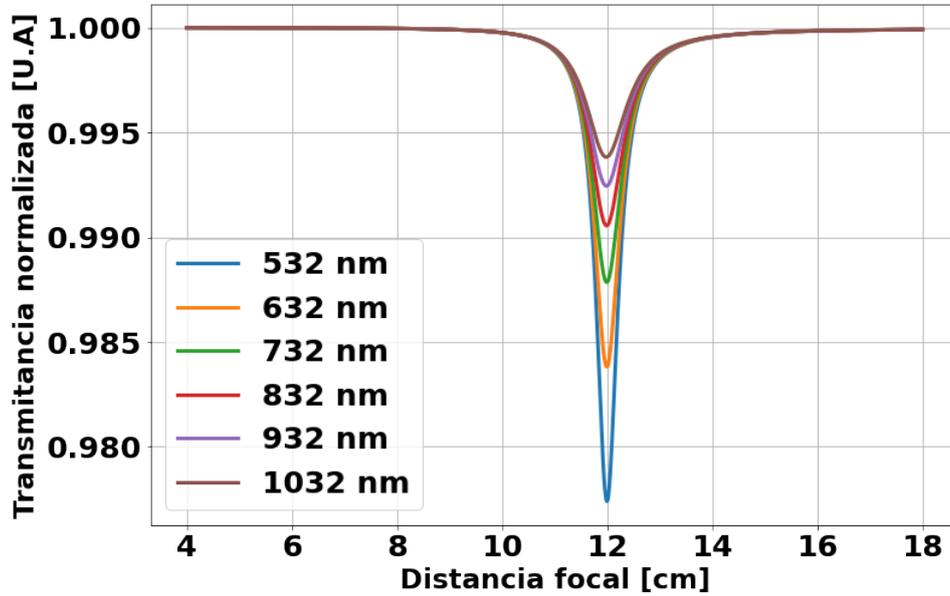


Figura 4.20: Variación en la longitud de onda.

La Fig.4.21a muestra que a longitudes de onda mayores la profundidad de la transmitancia disminuye, mientras que en la Fig.4.21b se observa el caso contrario donde a mayores valores de la longitud de onda, el ancho de la transmitancia aumenta.

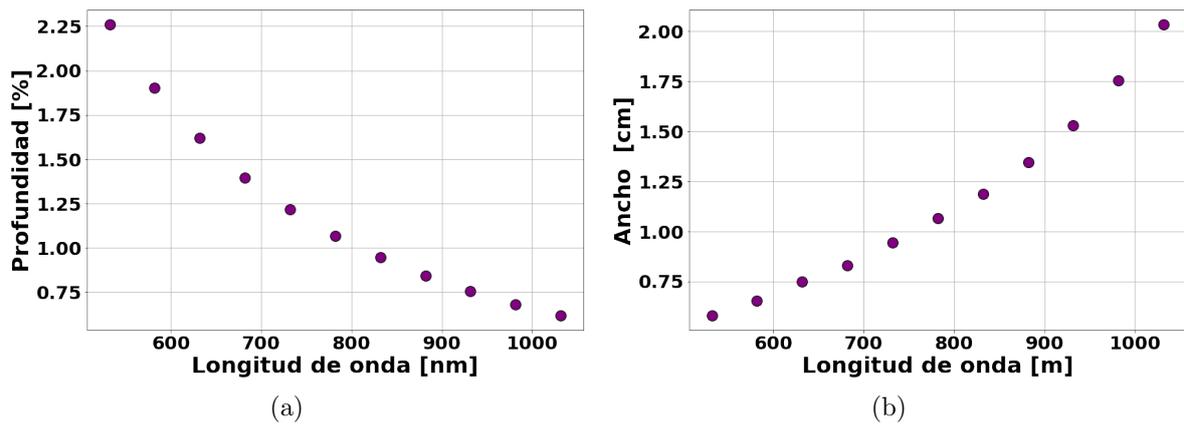


Figura 4.21: Variación de la profundidad y el ancho de la transmitancia.

Por su parte, de la Fig.4.22a se puede concluir que la razón profundidad-ancho disminuye para valores mayores en la longitud de onda, mientras de la Fig.4.22b se observa que prácticamente el valor de la posición de mínimo no varía.

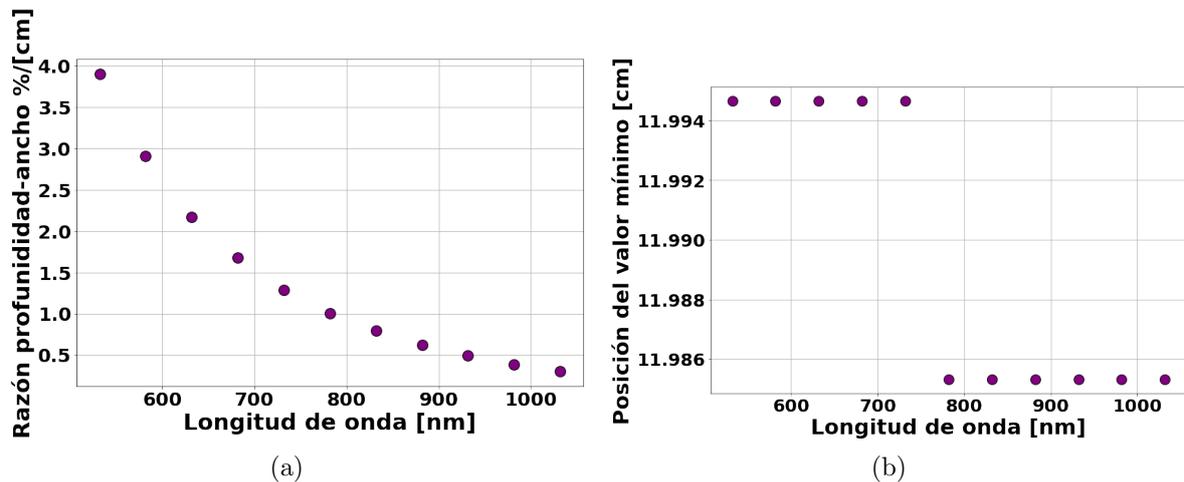


Figura 4.22: Razón entre la profundidad-ancho y valores mínimos de la función de transmitancia.

Del análisis gráfico presentado anteriormente, se puede concluir que el único parámetro experimental que varía la posición del valor mínimo de la transmitancia es la distancia muestra-EFTL como se evidenció en la Fig.4.13b, los demás parámetros no influyen cambios en la posición en el valor mínimo. Además, la profundidad de la transmitancia tiene un relación directa con los parámetros experimentales siguientes: potencia incidente, diámetro y espesor de la muestra, mientras se relaciona de manera inversa con el ancho temporal del haz, la distancia muestra-EFTL, la tasa de repetición del haz y la longitud de onda del haz. Por su parte, el ancho de la transmitancia se relaciona de manera directa únicamente con la potencia del haz y el diámetro del haz; mientras se relaciona de manera inversa con el ancho temporal del haz, la distancia muestra-EFTL, el espesor de la muestra, tasa de repetición del haz y la longitud de onda del haz. Además, de la Fig.4.11 es claro que poner la muestra a una distancia cercana a la lente es ventajoso porque permite en un rango corto de focales ver mejor la curva de absorción, además que logra un aumento de la razón señal-ruido mientras no se sature.

4.2. Aproximación de la función de transmitancia

Para un buen análisis estadístico se necesita una muestra grande de datos, pero una muestra grande significa mucho tiempo de cómputo, del cuál no se dispone. Por lo tanto se propone realizar una aproximación de la Ec.(4.2) que permitirá obtener las muestras grandes en tiempos razonables.

$$T(f) = \frac{1}{B(f)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\beta(1-R) L_{eff} I_0(f)}{\cosh^2(\rho)} \right) d\rho \quad (4.2)$$

Comparando la cantidad $\frac{\beta(1-R)L_{eff}I_0(f)}{\cosh^2(\rho)}$ con respecto a 1, se gráfica separadamente la cantidad $\beta(1-R)L_{eff}I_0$ la cual se representa en la Fig.4.23a y, la cantidad $\frac{1}{\cosh^2(\rho)}$ mostrada en la Fig.4.23b.

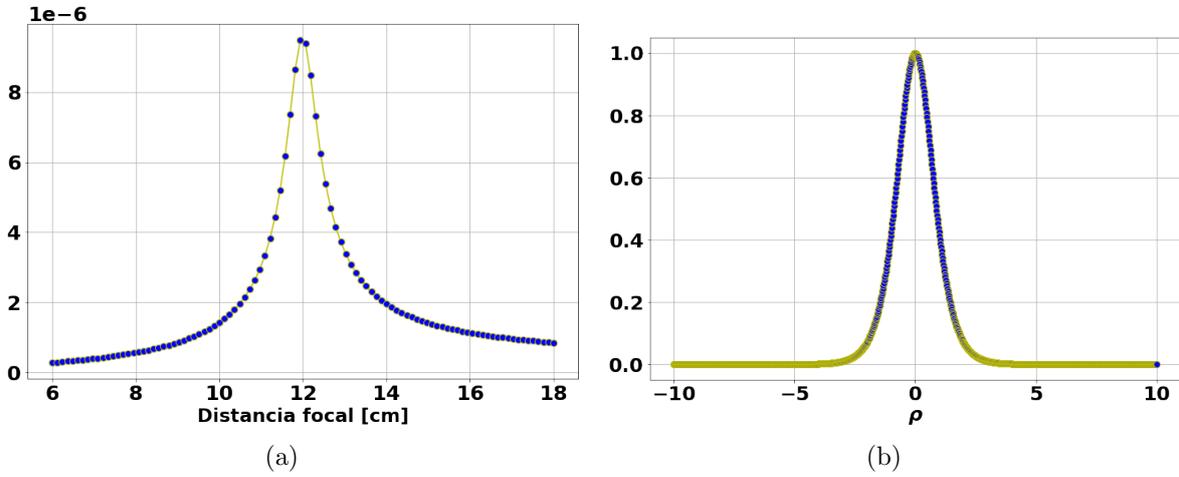


Figura 4.23: (a) $\beta(1-R)L_{eff}I_0(f)$ representa y, (b) la cantidad $\frac{1}{\cosh^2(\rho)}$.

Definiendo a $x = \frac{\beta(1-R)L_{eff}I_0(f)}{\cosh^2(\rho)}$, lo cual indica que $x \ll 1$, entonces $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, por lo tanto;

$$T(f) = \frac{1}{B(f)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta(1-R)L_{eff}I_0(f)}{\cosh^2(\rho)} \right) d\rho - \frac{1}{2B(f)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta(1-R)L_{eff}I_0(f)}{\cosh^2(\rho)} \right)^2 d\rho + \frac{1}{3(f)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta(1-R)L_{eff}I_0(f)}{\cosh^2(\rho)} \right)^3 d\rho + \dots \quad (4.3)$$

Recordando que $B(f) = \beta(1-R)^2 L_{eff}I_0(f)$ se tiene,

$$T(f) = \left(\frac{1}{1-R} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh^2(\rho)} \right) d\rho - \left(\frac{\beta L_{eff}I_0(f)}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh^2(\rho)} \right)^2 d\rho + \left(\frac{\beta^2(1-R)L_{eff}^2 I_0^2(f)}{3} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh^2(\rho)} \right)^3 d\rho + \dots, \quad (4.4)$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh^2(\rho)} \right) d\rho = 2$; $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh^2(\rho)} \right)^2 d\rho = \frac{4}{3}$; $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh^2(\rho)} \right)^3 d\rho = \frac{16}{15}$, por lo tanto,

$$T(f) = \frac{2}{1-R} - \frac{2}{3}\beta L_{eff} I_o(f) + \frac{16}{45}\beta^2 (1-R) L_{eff}^2 I_o^2(f) + \dots \quad (4.5)$$

La Ec.(4.5) es la aproximación resultante de la Ec.(4.2) y por lo tanto puede resultar más sencilla al momento de realizar ajustes estadísticos debido a su carácter lineal.

Para corroborar la validez de la Ec.(4.5) se toma como verdadera la función de transmitancia dada por la Ec.(4.2), se extrae una serie de datos estadísticos donde se tomará como valor real el valor de β y a partir de este conjunto de valores se ajusta con la función aproximada y, de este ajuste obtener el valor del coeficiente de absorción de dos fotones β .

En la Fig.4.24 se representa mediante la línea azul la función de transmitancia original, es decir, la que representa la Ec.(4.2) mientras la línea roja representa la función de transmitancia aproximada Ec.(4.5) a dos ordenes en β . Se puede indicar sobre la función aproximada que eventualmente tiene la misma forma de la función original, aunque esto no indica que se pueda realizar un ajuste adecuado.

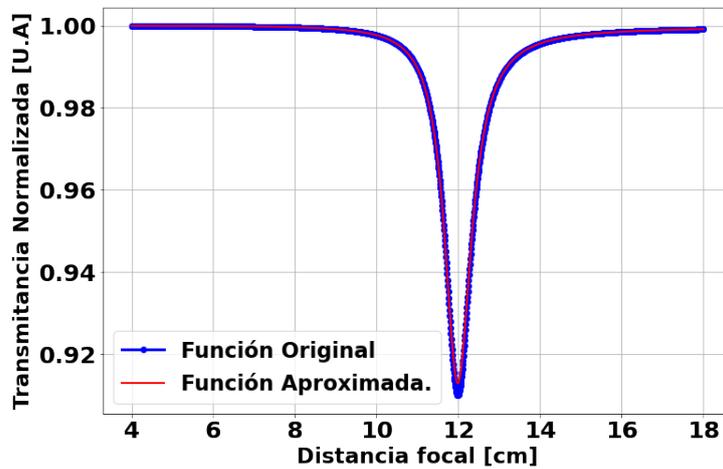


Figura 4.24: Comparación entre la función de transmitancia aproximada con la función de transmitancia original.

Con la finalidad de comprobar si la función de transmitancia aproximada es rigurosa al momento de realizar un ajuste, se debe simular un conjunto de datos e introducir un ruido aleatorio en la función original. En la Fig.4.25 se muestra la función de transmitancia con cierto ruido gaussiano.

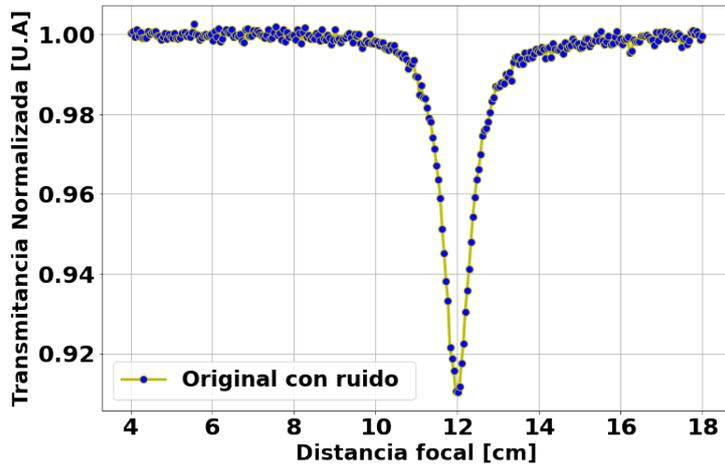


Figura 4.25: Comparación entre la función de transmitancia aproximada con la función de transmitancia original.

Los valores experimentales con los cuales se realizará la simulación son aquéllos que se muestran en el cuadro 4.1, tomándose como valor real para el coeficiente de absorción de dos fotones $\beta=3.34 \times 10^{-11}$ m/W. La Ec.(4.5) es escrita de forma lineal para β , por lo tanto, el ajuste puede realizarse mediante el uso de la función de transmitancia ya sea a primer orden, segundo orden, tercer orden en β , etc.

La función de transmitancia a primer orden en β se representa mediante la Ec.(4.6) y la de segundo orden mediante la Ec.(4.7).

$$T(f) = \frac{2}{1-R} - \frac{2}{3}\beta L_{eff} I_o(f) \quad (4.6)$$

$$T(f) = \frac{2}{1-R} - \frac{2}{3}\beta L_{eff} I_o(f) + \frac{16}{45}\beta^2 (1-R) L_{eff}^2 I_o^2(f) \quad (4.7)$$

En la Fig.4.26a se presenta el ajuste mediante la Ec.(4.6) mientras la Fig.4.26b el ajuste de los datos empleando la Ec.(4.7).

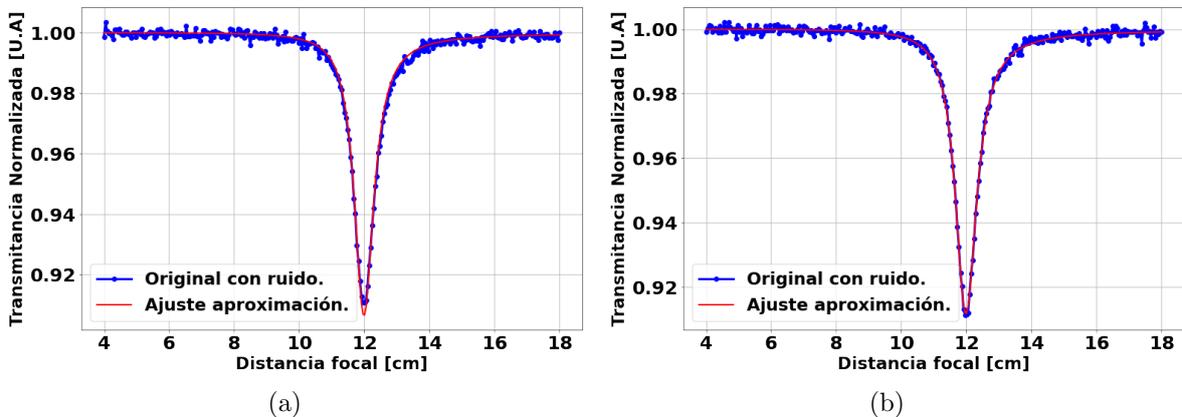


Figura 4.26: En (a) se realiza ajuste mediante la función de transmitancia a primer orden en β y en (b) el ajuste mediante la función de transmitancia a segundo orden en β .

El objetivo de realizar el ajuste es obtener el valor de β y por lo tanto validar que la función de transmitancia establecida por la Ec.(4.5) es válida. Los valores obtenidos para el ajuste se muestran en el cuadro 4.2 donde se observa que el ajuste en término de errores es

mejor cuando este se realiza considerando términos de mayor orden para β en la Ec.4.5 como era de esperarse.

Ajuste al valor de β		
	Primer Orden	Segundo Orden
Valor β de ajuste	3.03 [cm/GW]	3.48 [cm/GW]
Error porcentual	10.7 %	2.2 %

Cuadro 4.2: Ajustes para β mediante la implementación de ambas aproximaciones.

Por lo tanto, es importante resaltar que para el análisis estadístico se debe considerar el orden cuyo error sea inferior al error generado. Luego la función aproximada de la transmisividad cobra su importancia ya que es simple, puede tener un error inferior al generado por los parámetros experimentales, y permite un procesamiento a tiempo cuasi-real.

4.3. Correlación entre los parámetros experimentales

Una medida simple, el coeficiente de correlación, se utiliza comúnmente para cuantificar el grado de asociación entre dos variables. A menudo, las correlaciones se utilizan durante una etapa exploratoria u observacional de la investigación para determinar qué variables al menos tienen una relación estadística entre sí[5][6]. En los diseños experimentales, las correlaciones también se utilizan para determinar el grado de asociación entre las variables dependientes e independientes.

Por lo tanto, un estudio correlacional determina si dos variables están correlacionadas o no. Esto significa analizar si un aumento o disminución en una variable coincide con un aumento o disminución en la otra variable, del mismo modo, dos variables se correlacionan cuando muestran una tendencia creciente o decreciente.[1]

La correlación permite medir el signo y magnitud de la tendencia entre dos variables. La Fig 4.27 representa los diferentes valores del coeficiente de correlación y sus diagramas de dispersión correspondientes cuando dos variables se encuentran correlacionadas positivamente.

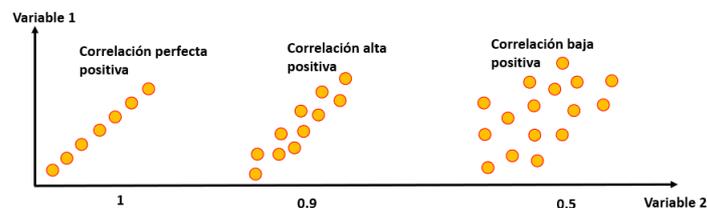


Figura 4.27: Correlación positiva entre dos variables.

La Fig.4.28 representa los diferentes valores del coeficiente de correlación y sus diagramas de dispersión correspondientes cuando dos variables se encuentra correlacionadas negativamente.

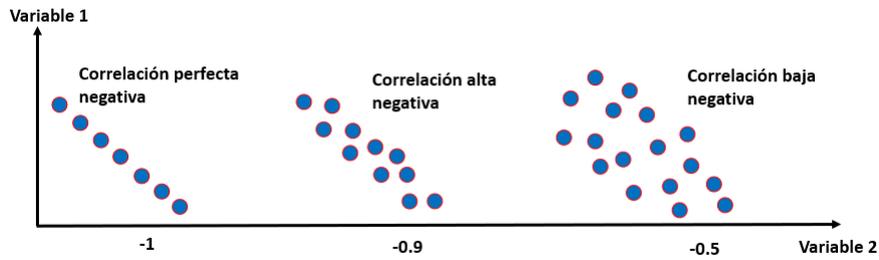


Figura 4.28: Correlación negativa entre dos variables.

Por consiguiente, el signo indica la dirección de la relación; un valor positivo indica una relación directa o positiva, un valor negativo indica relación indirecta, inversa o negativa, y un valor nulo indica que no existe una tendencia entre ambas variables[2]. La magnitud indica la fuerza de la relación, y toma valores entre -1 a 1. Cuanto más cercano sea el valor a los extremos del intervalo (1 o -1) más fuerte será la tendencia de las variables, o será menor la dispersión que existe en los puntos alrededor de dicha tendencia. Cuanto más cerca del cero esté el coeficiente de correlación, más débil será la tendencia, es decir, habrá más dispersión entre las variables[1].

En la Fig.4.29 se observa la correlación entre los parámetros experimentales D y β . Se puede apreciar que estos dos parámetros están correlacionados de manera negativa. Su coeficiente de correlación encontrado es $\text{corr}(\beta, D)=-0.707$. Por lo tanto, se establece que un error por encima del valor de diámetro, determinará un valor en la medida por debajo del valor de β establecido, y del mismo modo, un error por debajo de valor del diámetro proporcionará un valor en la medida por encima del valor de β establecido.

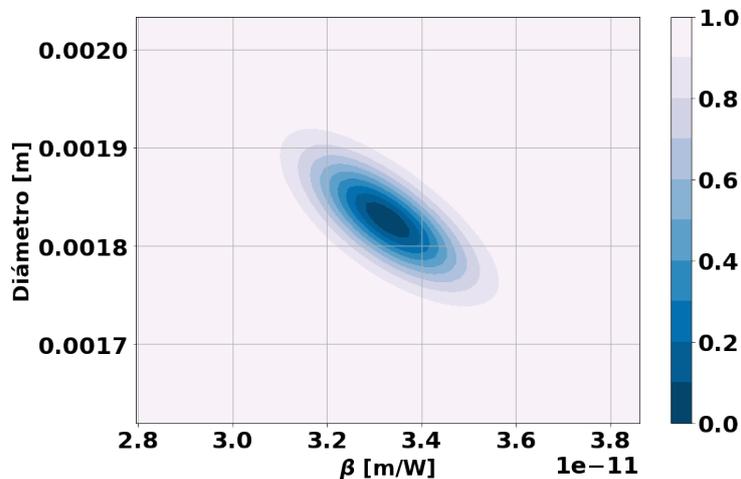


Figura 4.29: Correlación diámetro del haz y coeficiente de absorción.

Se determinará el error relativo que se puede tolerar en los diferentes parámetros experimentales mediante una simulación teniendo en cuenta un error relativo entre 1% y 20% en el valor de β establecido. Para determinar esta relación, se simula el valor de la función de transmitancia E_c (4.5) usando la aproximación hasta segundo orden en β , posteriormente se realiza un ajuste para determinar β . Para cada ajuste se varía el valor de uno de los valores experimentales con respecto al valor real y se mide el error relativo en β . Cuando el error relativo en beta es un determinado valor del rango previamente establecido el programa entrega el valor relativo que se produjo en el parámetro que se estaba variando, es decir, para obtener un error relativo hasta del 20% el programa deberá entregar el valor del parámetro que corresponda al

error de β y por tanto, su error relativo respecto a un valor real.

En la Fig.4.30 se aprecia la variación del diámetro en función de β y los errores relativos respectivamente. Luego, se puede apreciar que si se desea un error en el valor de β inferior al 20% debe medirse el valor del diámetro con una incertidumbre inferior al 30%.

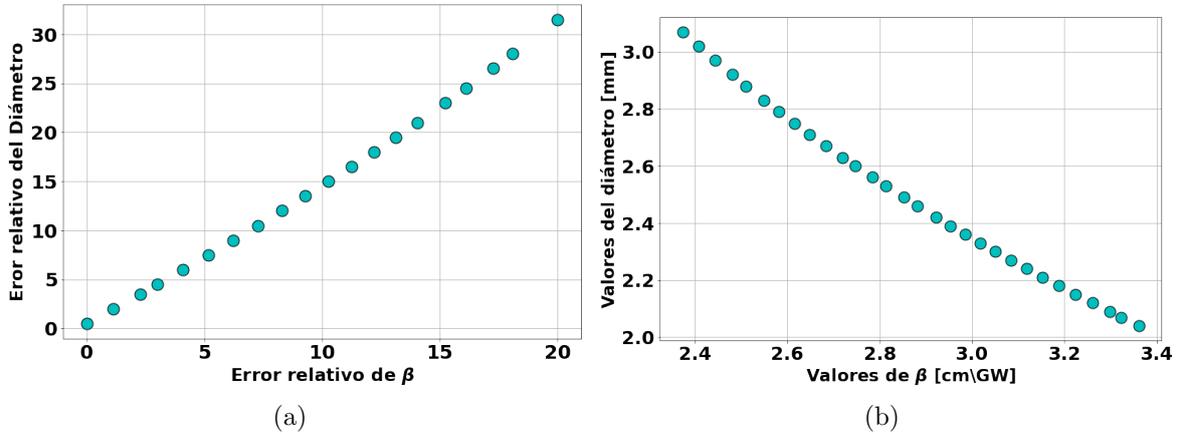


Figura 4.30: En (a) errores relativos. En (b) Variación del diámetro en función de β

En la Fig.4.31 se observa la correlación entre las variables P y β . Se puede apreciar que estos dos parámetros están altamente correlacionados negativamente. Su coeficiente de correlación encontrado fue de $\text{corr}(\beta, P) = -0.971$. Por lo tanto, un error por encima del valor de la potencia, determinará un valor en la medida por debajo del valor de β establecido, y del mismo modo, un error por debajo de valor del potencia proporcionará un valor en la medida por encima del valor de β establecido.

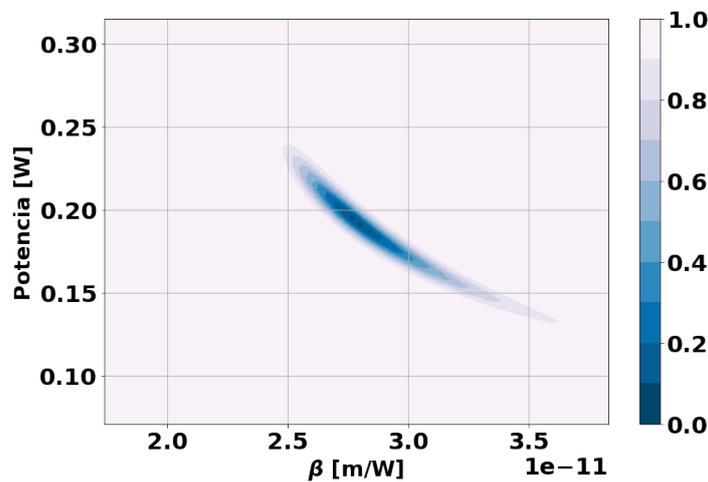


Figura 4.31: Correlación potencia del haz y coeficiente de absorción.

En la Fig.4.32 se aprecia la variación de la potencia en función de β y los errores relativos que puede tomar P para entregar un valor de β con determinado error. Luego, se puede apreciar que si se desea un error en el valor de β inferior al 20% debe medirse el valor de la potencia con una incertidumbre inferior al 25%.

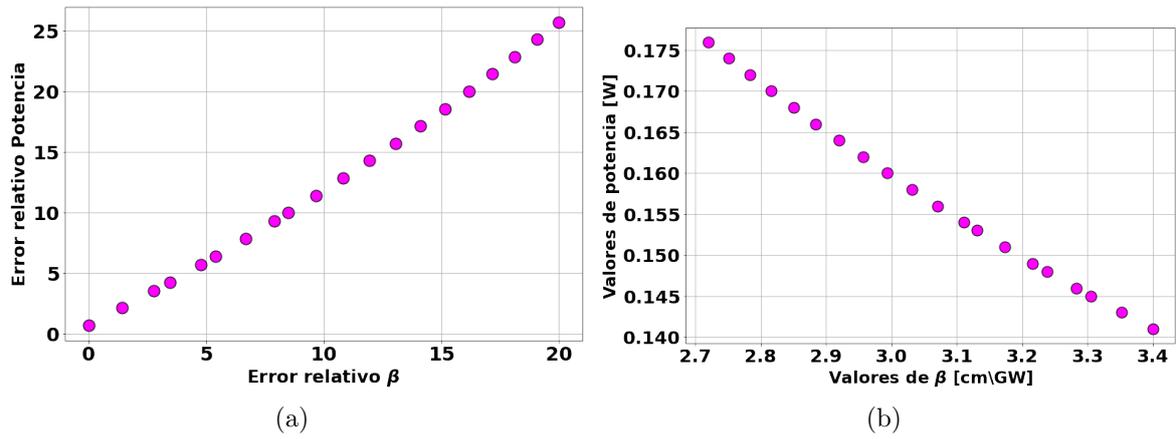


Figura 4.32: En (a) errores relativos (b) Variación de la potencia en función de β

Otro parámetro analizado, es la tasa de repetición del haz. La Fig.4.42 muestra una alta correlación positiva con β y el valor de dicha correlación es $\text{corr}(\beta, \nu)=0.971$.

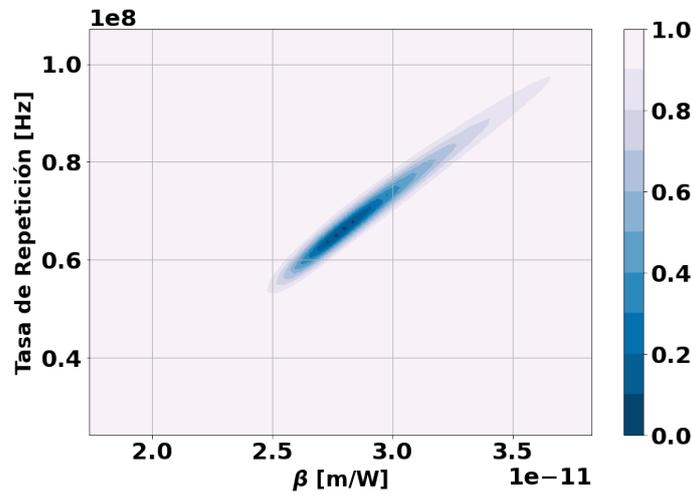


Figura 4.33: Correlación tasa de repetición y coeficiente de absorción β .

De igual manera, se puede determinar el error relativo que puede tolerar la tasa de repetición del haz teniendo presente un error relativo en el valor de β . La Fig.4.34 proporciona los errores relativos y los valores obtenidos. Luego, se puede apreciar que si se desea un error en el valor de β inferior al 20% debe medirse el valor de la tasa de repetición del haz con una incertidumbre inferior al 20%.

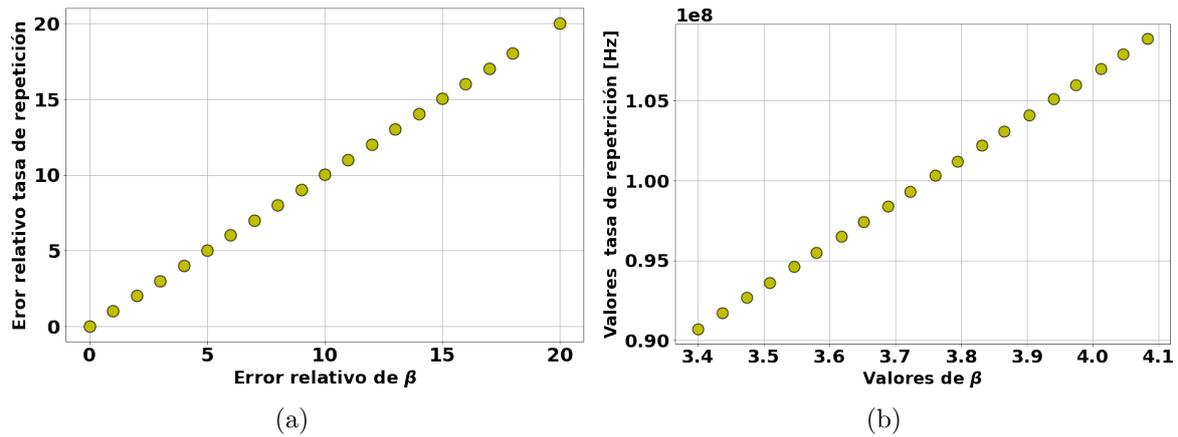


Figura 4.34: En (a) Errores relativos ν en función de β . En (b) Variación de la ν en función de β .

El ancho temporal del haz se correlaciona respecto a β de manera positiva. El valor encontrado de esta correlación fue de $\text{corr}(\beta, t) = 0.971$.

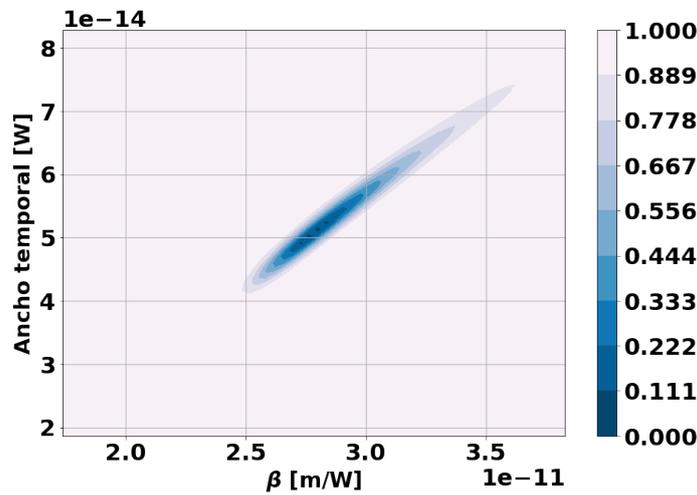


Figura 4.35: Correlación ancho temporal y coeficiente de absorción β .

En la Fig.4.36 se aprecia el error relativo que puede tolerar el ancho temporal del haz teniendo presente un error relativo en el valor real de β , a su vez, también se aprecian los valores obtenidos. Luego, se puede apreciar que si se desea un error en el valor de β inferior al 20% debe medirse el valor del ancho temporal del haz con una incertidumbre inferior al 20%.

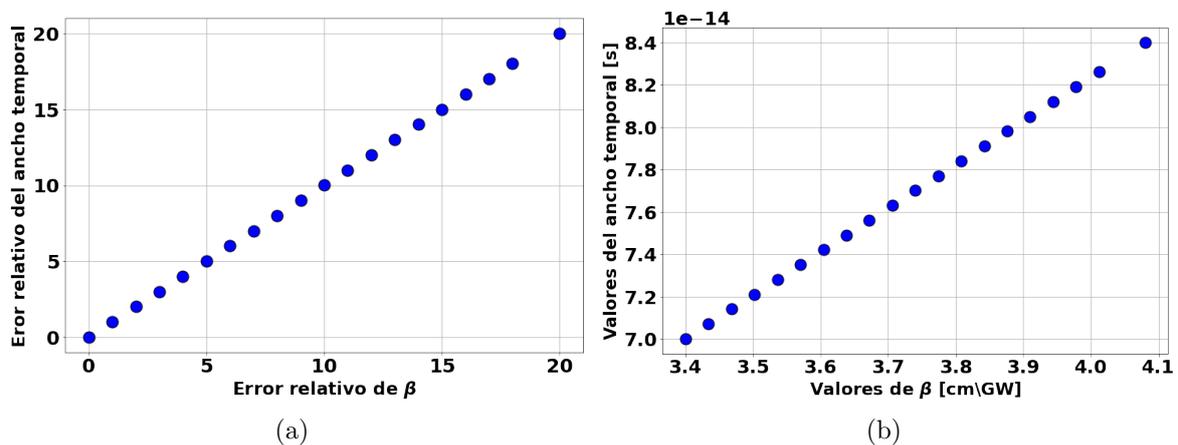


Figura 4.36: En (a) Errores relativos t en función de β . En (b) Variación de la t en función de β .

En la Fig.4.37 se aprecia la correlación de la distancia de la muestra a la lente EFTL en función de β . El valor obtenido de la correlación fue $\text{corr}(\beta, d_s)=0.043$ lo cual demuestra la baja correlación entre estos parámetros.

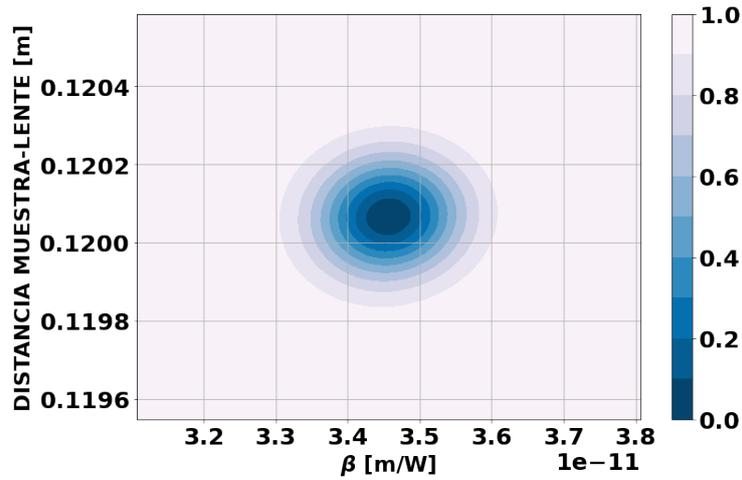


Figura 4.37: Correlación distancia de la muestra a la EFTL d_s y coeficiente de absorción β .

De igual manera; es posible medir los errores relativos y los valores obtenidos cuando se compara d_s y β como se muestra en la Fig.4.38.

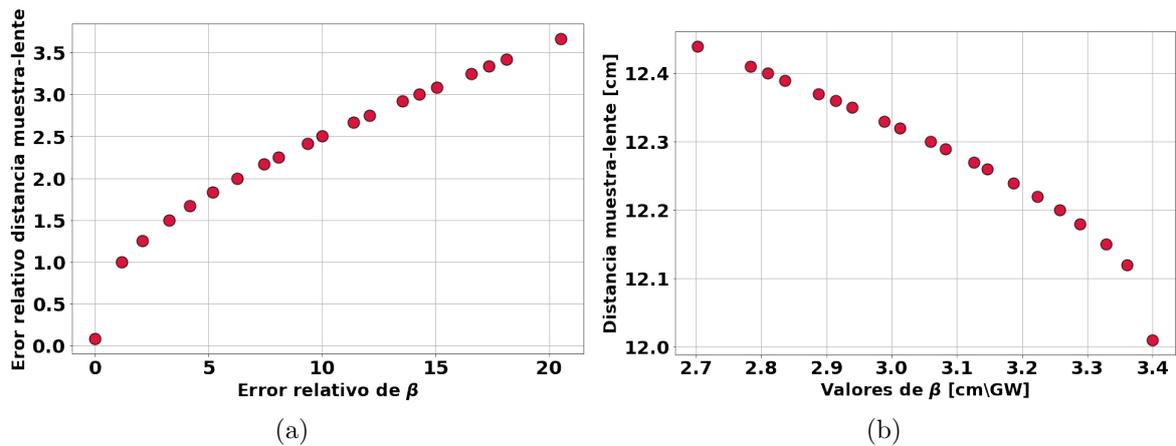


Figura 4.38: En (a) Errores relativos d_s en función de β . En (b) Valores obtenidos

En función a la longitud de onda λ , la correlación con respecto a β se muestra en la Fig.4.39 donde el valor obtenido fue $\text{corr}(\beta, \lambda)=0.949$, lo cual indica una alta correlación.

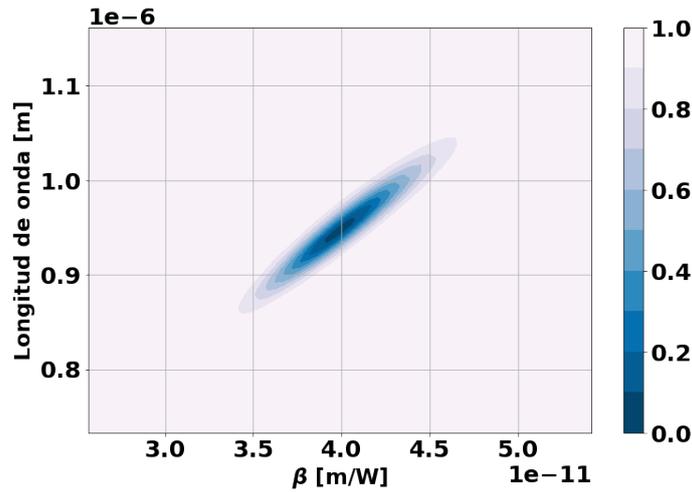


Figura 4.39: Correlación distancia entre la longitud de onda λ y coeficiente de absorción β .

Un parámetro importante al momento de realizar el ajuste de datos estadísticos es el espesor de la muestra. De igual manera, la Fig.4.40 muestra el error relativo que se debe cometer al momento de medir el espesor de la muestra par obtener un error en el coeficiente de absorción.

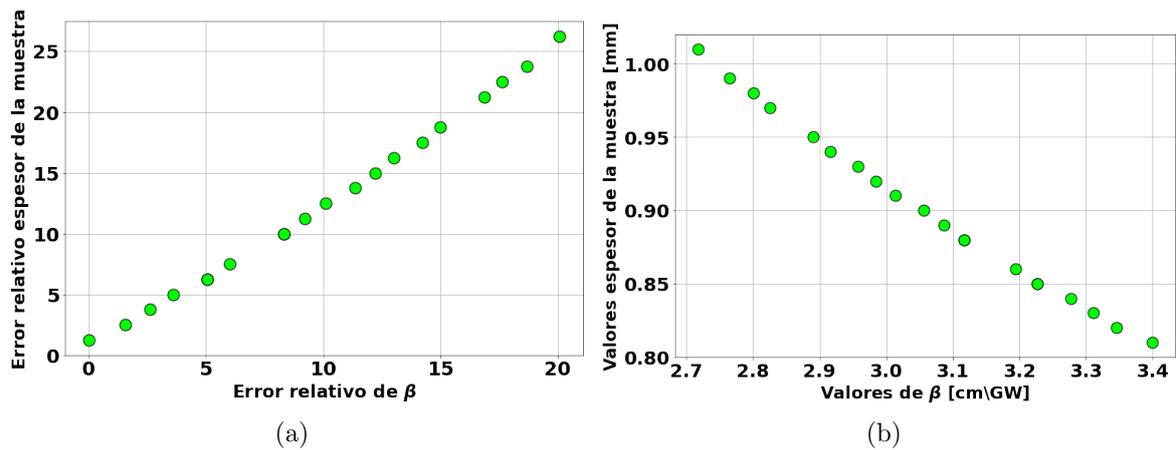


Figura 4.40: En (a) Errores relativos L en función de β . En (b) Valores obtenidos.

Con lo realizado anteriormente se observa la influencia que puede tener una mala medida en el valor de β . Los errores relativos obtenidos anteriormente fueron simulados al ajustar la función de transmitancia únicamente con un parámetro y del ajuste obtener un valor de β con cierto error relativo. De los resultados se puede concluir, que el parámetro que mas influye en el error del coeficiente de absorción es la distancia muestra-lente, ya que un error muy pequeño en su medida conlleva a un error relativo alto en la obtención de β . El hecho de que este parámetro sea sensible en su medida se debe a que precisamente d_s es el punto donde el foco proporcionado por la lente EFTL coincide con la muestra, y es en esa posición donde se genera la absorción no lineal debido a una alta intensidad del haz. De los parámetros experimentales, el diámetro, eventualmente permite un mayor error en su medida aunque, esto no quiere decir que por ese hecho no se deba medir correctamente.

En la Fig.4.41 se observan los resultados de los parámetros experimentales y su influencia en el error relativo de β . Es importante anotar de nuevo, que la simulación se hizo ajustando la función de transmitancia con un único parámetro además de la variable de interés β . Esto significa que no sabemos si hay correlación entre los diferentes parámetros que puedan jugar de tal forma que, por ejemplo, compensen sus errores.

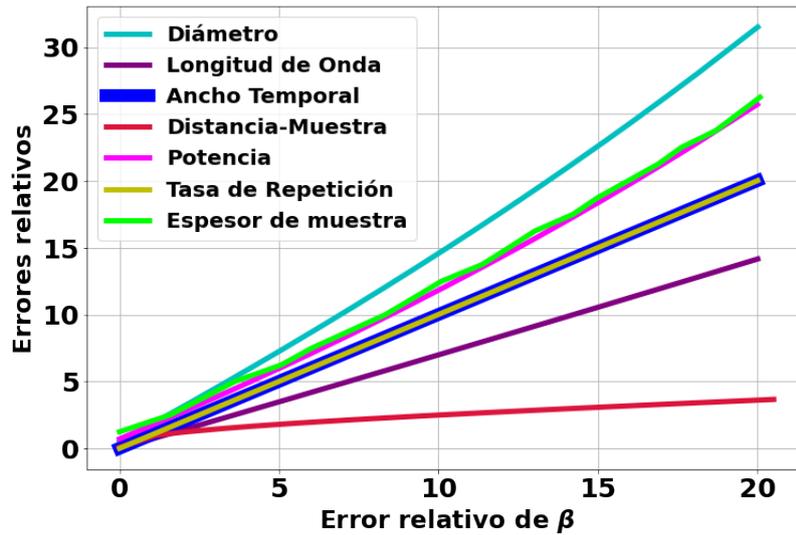


Figura 4.41: Comparación de los errores relativos de los parámetros en función de β .

4.4. Error relativo en β ajustando con dos, tres o más parámetros experimentales

Si al momento de realizar el análisis experimental no se cuenta con una buena medida en la exactitud de determinados parámetros experimentales, el ajuste puede hacerse comparando parámetro con parámetro y, de esta manera determinar cual de estos tiene un mayor peso, al momento de realizar el ajuste y obtener β con el mínimo error relativo.

Considerando como variables, los parámetros experimentales P y D , y se encuentra nuevamente el error relativo que puede tolerar cada uno de estos parámetros experimentales para obtener un valor de β con cierto error relativo. En la Fig. 4.42 se pueden observar los errores relativos de la potencia y el diámetro en función del error relativo de coeficiente de absorción.

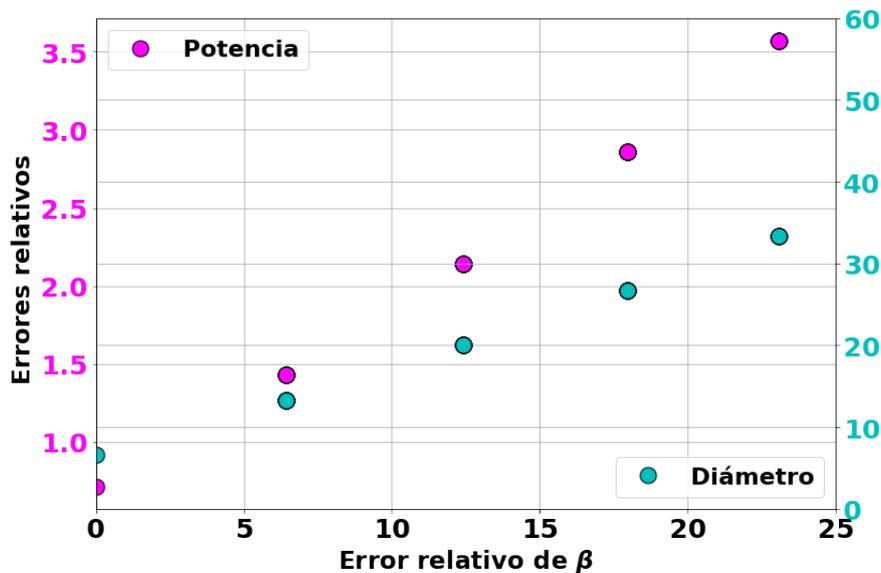


Figura 4.42: Errores relativos potencia del haz y diámetro del haz en función de β .

De la información suministrada por la Fig.4.42 se puede concluir que el parámetro con más peso es la potencia P , debido a que necesita de una medida más precisa para obtener un

menor valor en el error relativo del β siempre y cuando los demás parámetros permanezcan fijos.

Al comparar la tasa de repetición del haz con la potencia incidente dejando los demás parámetros experimentales fijos, se indica en la Fig.4.43 que la tasa de repetición necesita ser medida con mayor precisión, ya que error del 20 % en la medida del β indicaría que la tasa de repetición debe medirse con una exactitud del 0.5 % mientras que la potencia con una exactitud del 25 %.

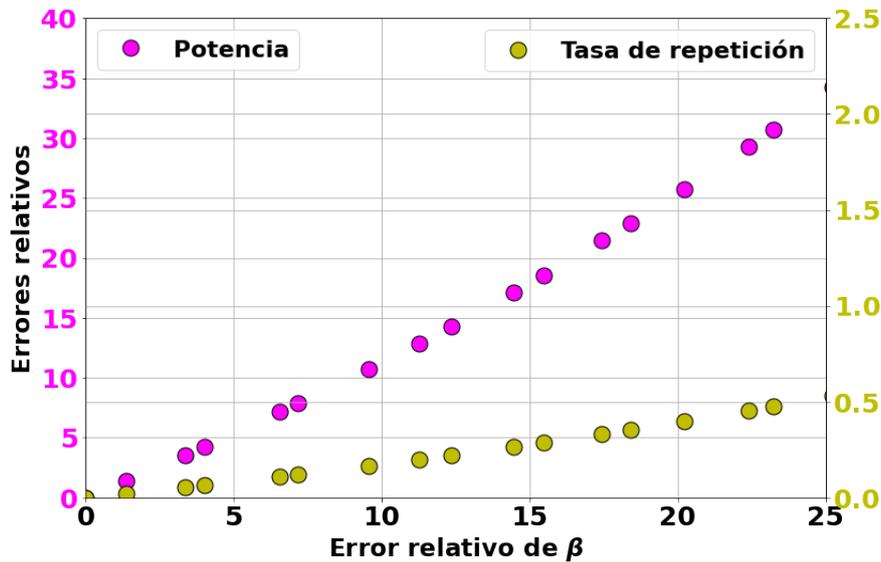


Figura 4.43: Errores relativos potencia del haz y tasa de repetición del haz en función de β .

Si el ajuste estadístico se realiza con t y ν ; en la Fig.4.44 se aprecia que la tasa de repetición del haz debe medirse con mayor precisión ya que para obtener un error relativo del 20 % en β , esta debe medirse con una precisión del 8 % mientras que el ancho temporal debe medirse con una precisión del 15 %.

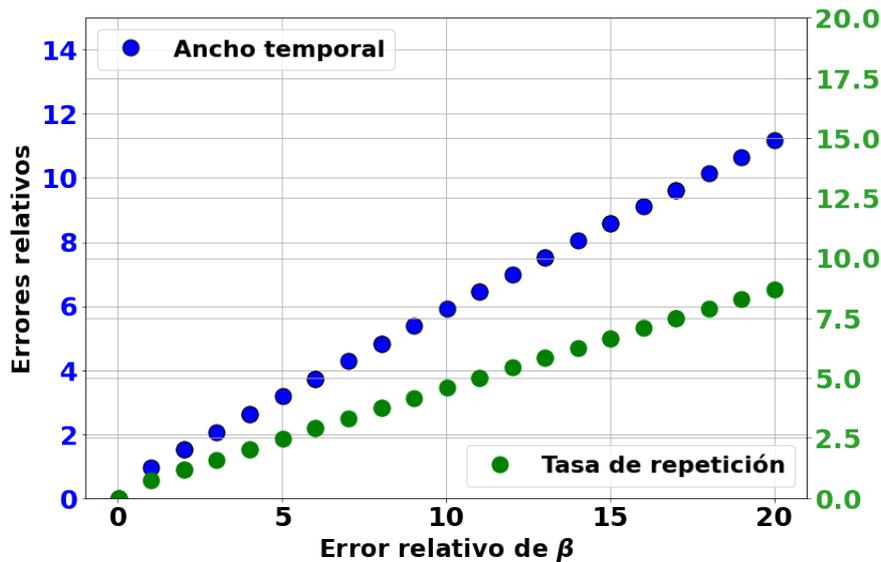


Figura 4.44: Errores relativos de la tasa de repetición del haz y el ancho temporal del haz en función de β .

Conocer la influencia de los valores experimentales es de vital importancia, debido a que experimentalmente algunos parámetros experimentales son más complicados de medir que

otros; en este caso, de lo anterior se ha observado que la tasa de repetición, el ancho temporal y la distancia de la lente a la muestra son parámetros importantes de medir, ya que estos son los que influyen en mayor medida en el error relativo del coeficiente de absorción lo cual no quiere decir que no se deba prestar atención en la medida exacta de los demás parámetros experimentales como la potencia o el diámetro del haz; es evidente que una mala medición en estos, genera cierto error relativo en la obtención del TPA.

Ahora, se analizará el caso en el cual no se cuenta con una medida exacta de los parámetros experimentales, es decir, el programa dejará libres todos los parámetros y ajustará el valor de β necesario con cierto error relativo. Es importante realizar un ajuste considerando todos los parámetros libres ya que experimentalmente, no se pueda contar con un valor exacto de los parámetros experimentales. En la Fig.4.45 se concluye que el diámetro del haz es un factor que permite un mayor error en su medida relativa, seguidamente del espesor de la muestra y la potencia.

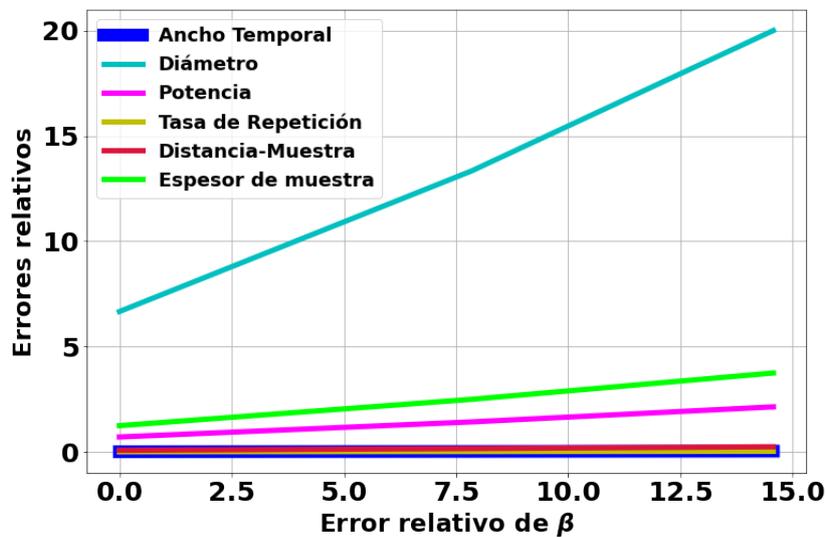


Figura 4.45: Errores relativos de los parámetros experimentales en función de β .

En la Fig.4.46 (a) y (b) se aprecia con mayor resolución los parámetros experimentales que influyen en un mayor error en el valor real del coeficiente de absorción.

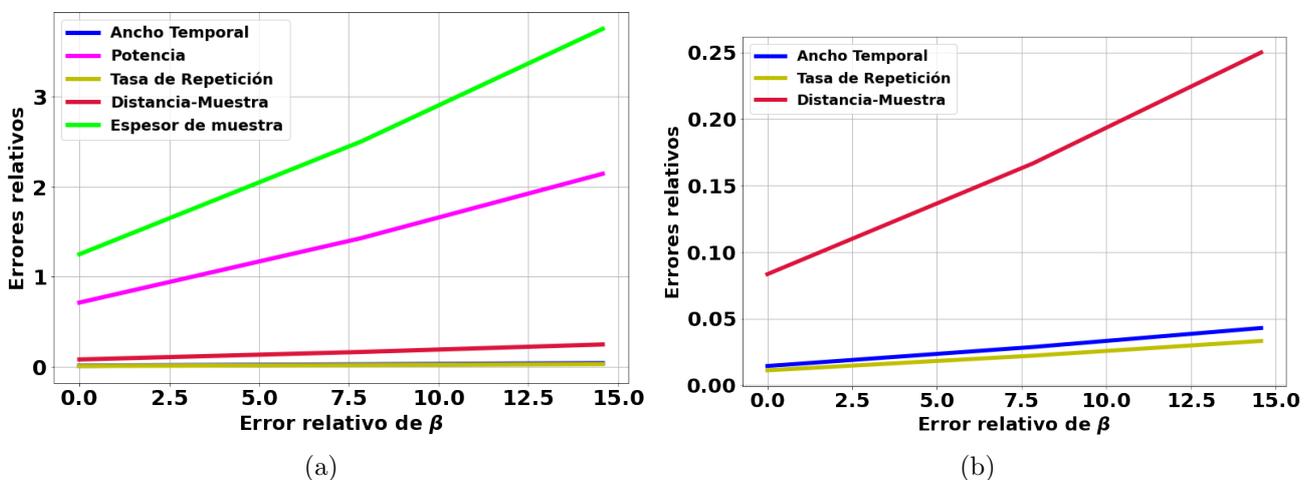


Figura 4.46: Errores relativos de los parámetros experimentales en función de β .

Aunque es importante tener una excelente medida de los parámetros experimentales, lo cual conlleva a la disminución en el error relativo del coeficiente de absorción, es importante

mencionar que experimentalmente hay parámetros difíciles de medir, ya sea por la complejidad de su parte experimental, o por lo costoso de los aparatos experimentales necesarios para su medición. Del análisis presentando anteriormente se puede apreciar que el valor experimental que más incide en el error de β es la tasa de repetición seguida del ancho temporal, lo cual indica que deben tener un mayor exactitud en sus valores experimentales.

4.5. Validación de un modelo experimental

La validación de un modelo es posiblemente el paso más importante en la secuencia de construcción del modelo. También es uno de los más pasados por alto. A menudo, la validación de un modelo parece consistir en nada más que citar el valor de ajuste estadístico R^2 [3]. Infortunadamente, un valor alto de R^2 no garantiza que el modelo se ajuste bien a los datos experimentales. El uso de un modelo que no se ajusta bien a los datos no puede proporcionar buenas respuestas a las cuestiones e interrogantes de la investigación[1][6].

En la literatura, existen determinadas herramientas estadísticas para la validación de modelos experimentales, entre las cuáles se destacan el análisis gráfico de residuos mediante la estadística de Durbin-Watson, la estadística de χ^2 , χ_{min}^2 , χ_ν^2 [1] entre otras. Los diferentes tipos de gráficos de los residuos de un modelo ajustado proporcionan información sobre la idoneidad de los diferentes aspectos del modelo. Los métodos numéricos para la validación de modelos, como la estadística R^2 , también son útiles, pero generalmente en menor grado que los métodos gráficos. Los métodos gráficos tienen una ventaja sobre los métodos numéricos para la validación de modelos porque ilustran fácilmente una amplia gama de aspectos complejos de la relación entre el modelo y los datos[7]. Los métodos numéricos para la validación del modelo tienden a centrarse estrictamente en un aspecto particular de la relación entre el modelo y los datos y, a menudo, intentan comprimir esa información en un solo número descriptivo o resultado de la prueba.

4.5.1. Análisis del ajuste mediante la implementación de la métricas estadísticas

Además de la estadística de Durbin-Watson mencionada en el capítulo 2, existen varias pruebas estadísticas que calculan la probabilidad de que los datos puedan ser descritos por un modelo teórico establecido. Esto se lleva a cabo definiendo la hipótesis nula, H_o , que a menudo es la suposición de que una distribución muestral obtenida puede describirse mediante una distribución principal particular[1]. Cuando se amplían estos argumentos para probar la calidad de un ajuste particular, se prueba la hipótesis nula de los datos de la muestra, y_i , los cuales están bien modelados por una función particular o principal, $y(x_i)$.

Un modelo estadístico que se usa comúnmente para probar la significancia de la hipótesis nula es el modelo estadístico χ^2 la cual se define como[1];

$$\chi^2 = \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\alpha_i} \right)^2 \quad (4.8)$$

La distribución de la muestra se prueba con una distribución principal particular teniendo en cuenta las incertidumbres experimentales. Minimizar el modelo estadístico χ^2 permite estimar los parámetros del modelo de mejor ajuste y sus incertidumbres.

El valor mínimo resultante de la estadística χ^2 , χ_{min}^2 , es una medida numérica de la discrepancia entre el modelo propuesto y los datos. Debido a que la estadística χ^2 se suma

sobre todos los puntos o datos experimentales, es una medida cuantitativa de que tan bien se puede modelar todo el conjunto de datos con la distribución principal propuesta y, como tal, se puede usar como una prueba de la hipótesis nula. Para cualquier conjunto de datos dado se puede determinar la probabilidad de obtener un valor de χ^2 igual a χ^2 , χ_{min}^2 o mayor, dado el modelo propuesto[1].

Es posible dar estimaciones para varios parámetros estadísticos basados en diferentes números de puntos de datos en un conjunto de mediciones. El número de variables no restringidas se conoce como el número de grados de libertad y representa el número de piezas de información independientes que se utilizan para evaluar una estimación de un parámetro. En general, los grados de libertad son iguales al número de puntos de datos independientes utilizados en la estimación menos la cantidad de parámetros utilizados en la estimación que ya se han determinado a partir del conjunto de datos. Al ajustar N puntos de datos independientes con una función con \aleph parámetros, el número de grados de libertad, ν , es:

$$\nu = N - \aleph \quad (4.9)$$

La función de distribución de probabilidad χ^2 se define como[1];

$$X(\chi^2; \nu) = \frac{(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp(-\chi^2/2)}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \quad (4.10)$$

donde Γ es la función gamma y ν hace referencia los grados de libertad.

La probabilidad de obtener un valor de χ^2 entre χ_{min}^2 e ∞ está determinado por la probabilidad de función acumulada $P(\chi_{min}^2 \leq \chi^2; \nu)$, la cual se puede representar por[1][3];

$$P(\chi_{min}^2 \leq \chi^2 \leq \infty; \nu) = \int_{\chi_{min}^2}^{\infty} X(\chi^2; \nu) d\chi^2 \quad (4.11)$$

Con la finalidad de emplear la prueba de hipótesis para χ^2 se emplean la Ec.(4.10) y la Ec.(4.11). Si el modelo propuesto está de acuerdo con los datos, χ_{min}^2 deberá estar cerca de la media de la distribución de χ^2 y, por lo tanto $\chi_{min}^2 \approx \nu$. Para muchos grados de libertad, la distribución χ^2 se vuelve más simétrica y la mediana, la moda y la media se vuelven similares y por tanto se esperaría una buena coincidencia entre las distribuciones muestral y original, una probabilidad correspondiente $P(\chi_{min}^2 \approx \nu; \nu) \approx 0.5$.

Corresponde al experimentador decidir en que umbral se rechaza la hipótesis nula. Aunque los ajustes se pueden aceptar en el nivel $P(\chi_{min}^2; \nu) \approx 10^{-3}$, no es aconsejable hacerlo de forma natural. Sería una mejor estrategia encontrar el origen de la discrepancia entre el modelo y los datos. A continuación, se describe en que momentos se debe rechazar y aceptar la hipótesis[1].

- Para un ajuste razonable, el valor de $P(\chi_{min}^2; \nu) \approx 0.5$
- Sí $P(\chi_{min}^2; \nu) \rightarrow 1$ compruebe sus cálculos para conocer las incertidumbres de α_i .
- La hipótesis nula generalmente no se rechaza si el valor de χ_{min}^2 esta dentro de $\pm 2\sigma$ de la media, ν , es decir, el rango de $\nu - 2\sqrt{\nu} \leq \chi_{min}^2 \leq \nu + 2\sqrt{\nu}$.
- La hipótesis nula es cuestionada si $P(\chi_{min}^2; \nu) \approx 10^{-3}$ o $P(\chi_{min}^2; \nu) > 0.5$.
- La hipótesis nula es rechazada si $P(\chi_{min}^2) < 10^{-4}$.

Con el objetivo de determinar si una hipótesis nula particular debe rechazarse a un nivel de confianza particular, las probabilidades de obtener el valor observado de χ_{min}^2 o superior dado el número de grados de libertad deben calcularse utilizando la Ec.(4.11). Sin embargo, se puede obtener una indicación rápida de si la hipótesis nula debe rechazarse al considerar estadística del χ^2 reducido, χ_ν^2 , que es simplemente el valor de χ_{min}^2 dividido por el número de grados de libertad, tal y como se expresa a continuación;

$$\chi_\nu^2 = \frac{\chi_{min}^2}{\nu} \quad (4.12)$$

La estadística de χ^2 reducida nos indica que: [1]

- Para un ajuste razonable, el valor de $\chi_\nu^2 \approx 1$.
- Sí $\chi_\nu^2 \ll 1$ se debe verificar los cálculos para las incertidumbres en α_i .
- La hipótesis nula es cuestionada si $\chi_\nu^2 > 2$ para $\nu \approx 10$.
- La hipótesis nula es cuestionada si $\chi_\nu^2 > 1.5$ si ν se encuentra en el rango aproximado de $50 \leq \nu \leq 10$.

A continuación, se realizan algunos experimentos teóricos para cuantificar la calidad del ajuste.

Considerando como parámetro de ajuste un único parámetro experimental se realiza un análisis de residuos. En la Fig.4.47 se observa la función de transmitancia con un error gaussiano añadido y sus respectivas barras de error.

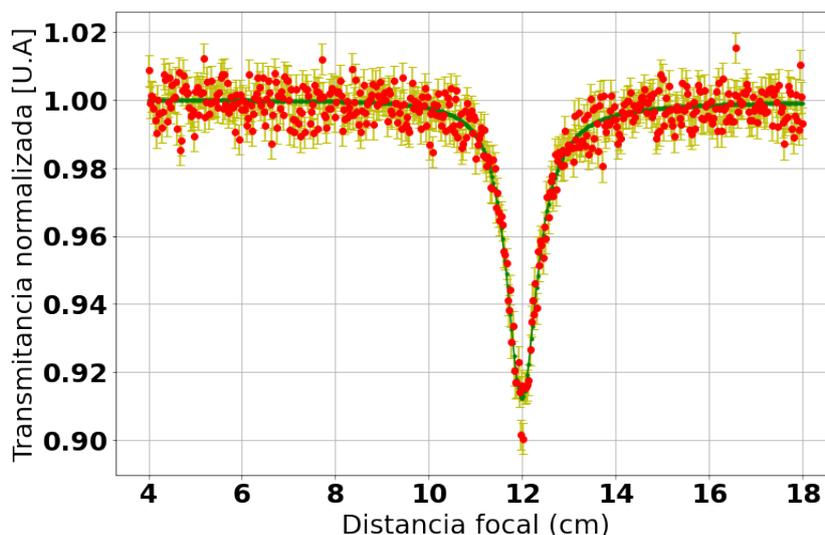


Figura 4.47: Función de transmitancia con ruido gaussiano añadido.

Al ajustar la función de transmitancia para obtener β con un único parámetro experimental y el valor de β se obtienen los siguientes resultados.

Ajustando teniendo en cuenta la potencia como único parámetro experimental libre además de la variable de interés β se obtienen los resultados mostrados en el cuadro 4.3.

Valor beta original	Valor beta ajuste	Error porcentual beta	Prob χ_{min}^2	Prob χ_ν^2	Durbin-Watson D
3.40 cm/GW	3.11 cm/GW	8.6 %	1.0×10^{-2}	1.2	2.04

Cuadro 4.3: Estadísticas para β ajustando con la potencia.

En la Fig.4.48 se pueden observar los residuos y el histograma de residuos normalizados para la potencia.

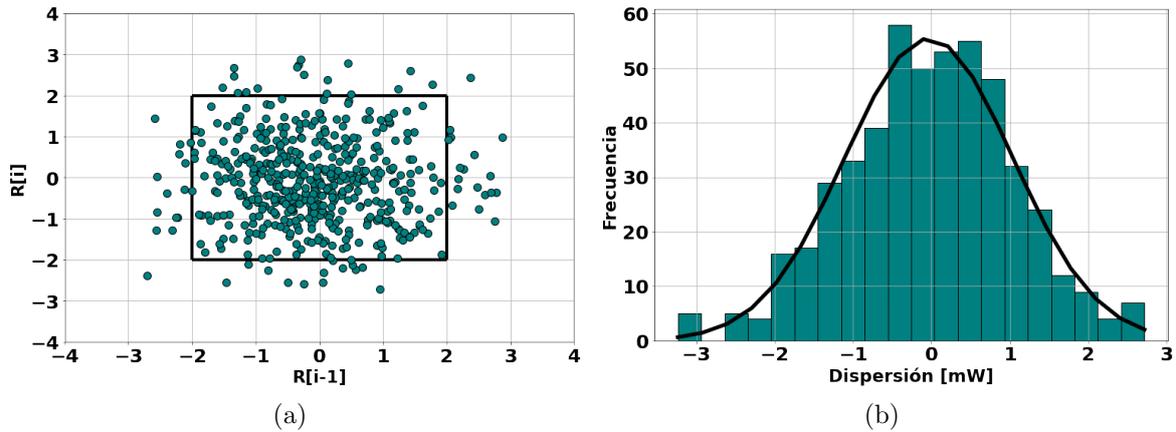


Figura 4.48: Distribución de residuos normalizados para la potencia.

De la estadística de Durbin–Watson se puede concluir que los residuos distribuidos aleatoriamente siguen una distribución gaussiana y de la estadística χ^2_ν se concluye un ajuste razonable.

Por el contrario, si el ajuste de datos estadísticos se realiza únicamente con el diámetro y valor de β , se obtienen los siguientes valores estadísticos representados en el cuadro 4.4 y, en la Fig.4.49 se representan los residuos normalizados para el diámetro.

Valor beta original	Valor beta ajuste	Error porcentual beta	Prob χ^2_{min}	Prob χ^2_ν	Durbin-Watson D
3.40 cm/GW	3.14 cm/GW	7.5 %	4.5×10^{-3}	1.5	1.59

Cuadro 4.4: Estadísticas para β ajustando con el diámetro.

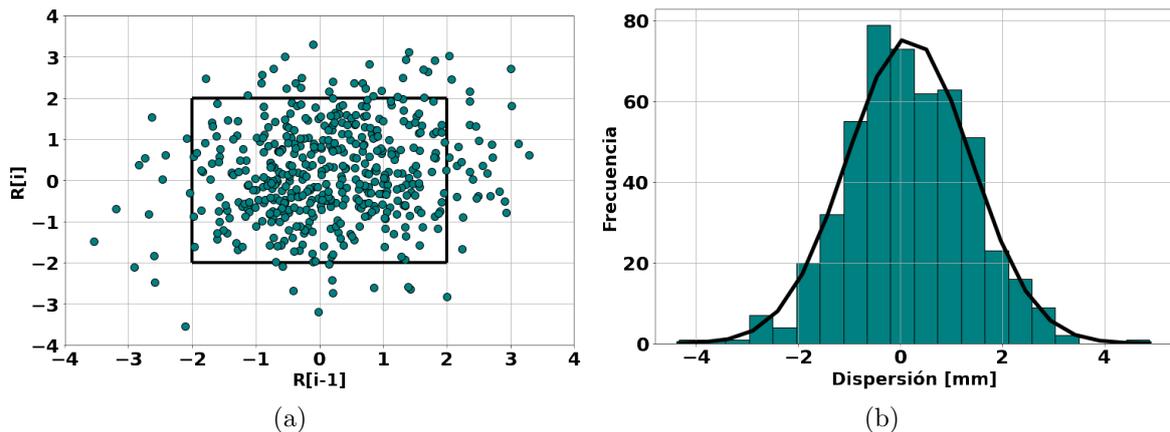


Figura 4.49: Distribución de residuos normalizados para el diámetro.

De igual manera, de la estadística de Durbin–Watson se puede concluir que los residuos distribuidos aleatoriamente siguen una distribución gaussiana y de la estadística χ^2_ν se concluye un ajuste razonable.

Si el ajuste se realiza únicamente con el ancho temporal del haz y el valor de β , se obtienen los siguientes valores estadísticos mostrados en el cuadro 4.5 y, en la Fig.4.50 se observan los residuos normalizados para el ancho temporal.

Valor beta original	Valor beta ajuste	Error porcentual beta	Prob χ_{min}^2	Prob χ_{ν}^2	Durbin-Watson D
3.40 cm/GW	3.84 cm/GW	12.9%	2.8×10^{-6}	1.3	2.11

Cuadro 4.5: Estadísticas para β ajustando con el ancho temporal.

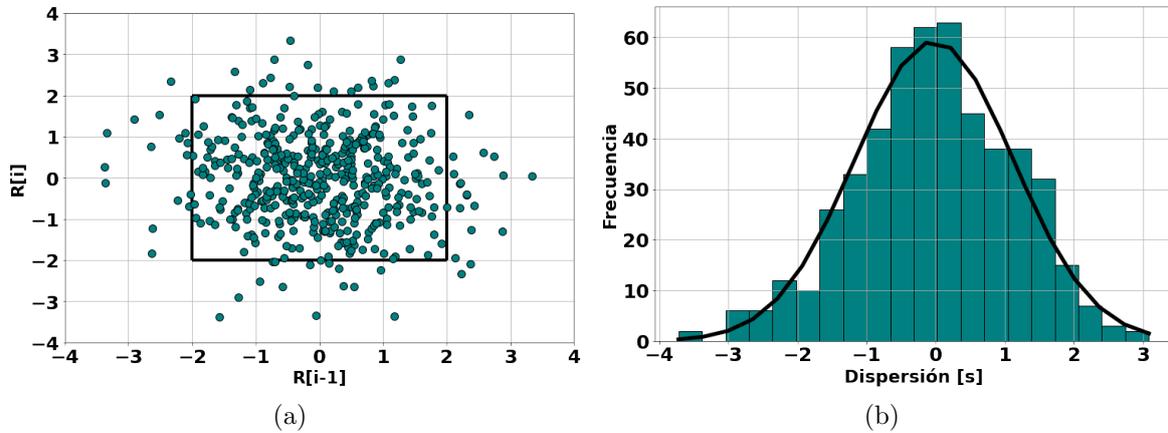


Figura 4.50: Distribución de residuos normalizados para el ancho temporal.

Igualmente, la estadística de Durbin–Watson concluye que los residuos distribuidos aleatoriamente siguen una distribución gaussiana y de la estadística χ_{ν}^2 se concluye un ajuste razonable.

Realizando el ajuste teniendo en cuenta únicamente la tasa de repetición del haz y el valor de β , se obtienen los siguientes valores estadísticos mostrados en el cuadro 4.6 y, en la Fig.4.51 se observan los residuos normalizados para la tasa de repetición.

Valor beta original	Valor beta ajuste	Error porcentual beta	Prob χ_{min}^2	Prob χ_{ν}^2	Durbin-Watson D
3.40 cm/GW	3.80 cm/GW	11.9%	4.6×10^{-6}	1.3	2.04

Cuadro 4.6: Estadísticas para β ajustando con la tasa de repetición del haz.

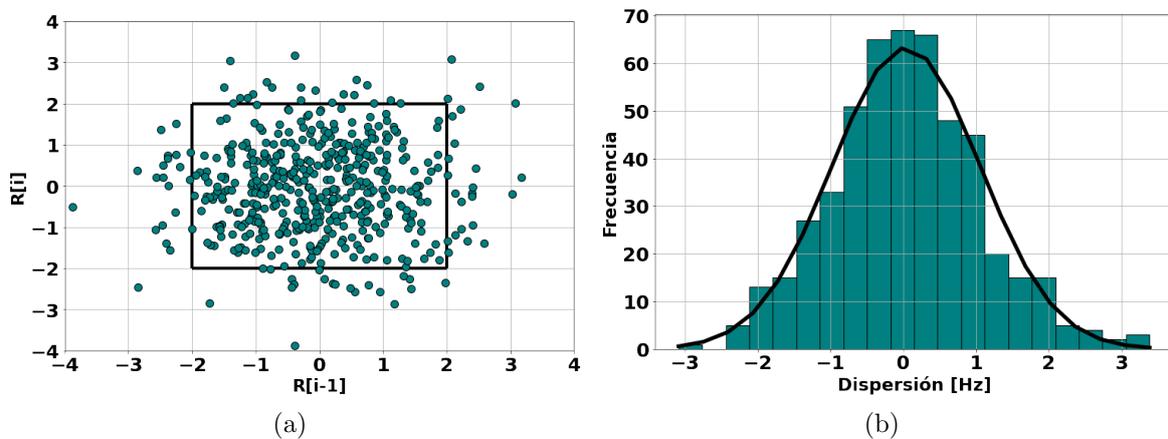


Figura 4.51: Distribución de residuos normalizados para la tasa de repetición.

Nuevamente, de la estadística de Durbin–Watson se puede concluir que los residuos distribuidos aleatoriamente siguen una distribución gaussiana y de la estadística χ_{ν}^2 se concluye un ajuste razonable.

A continuación, el ajuste será realizado empleando como único parámetro libre la potencia y la variable de interés β . En esta ocasión, se analizará una muestra 5000 datos. En el cuadro 4.7 se muestran los valores estadísticos obtenidos bajo el estudio de un mayor número de datos experimentales y, en la Fig.4.52 se presentan la distribución de residuos normalizados para la potencia.

Valor beta original	Valor beta ajuste	Error porcentual beta	Prob χ_{min}^2	Prob χ_{ν}^2	Durbin-Watson D
3.40 cm/GW	3.35 cm/GW	1.4%	0.34	1.3	1.97

Cuadro 4.7: Estadísticas para β ajustando con la potencia.

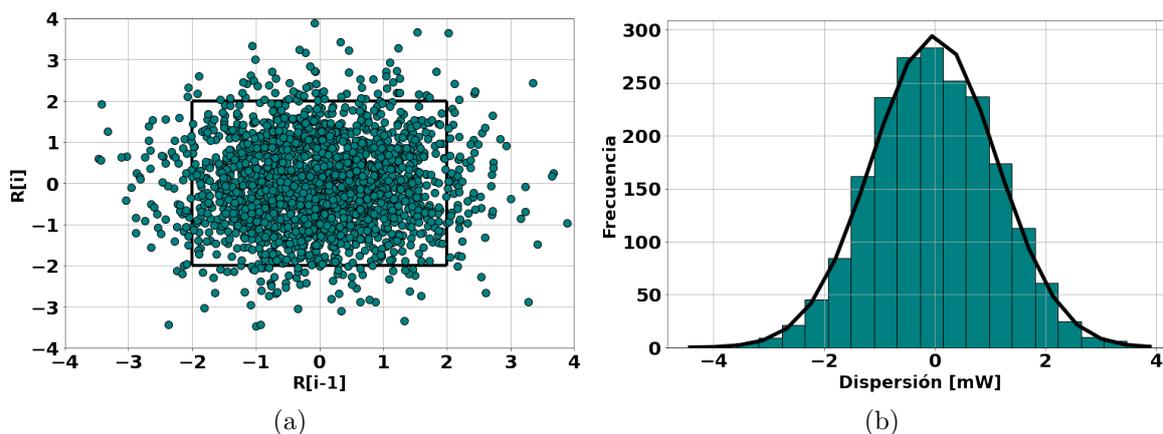


Figura 4.52: Distribución de residuos normalizados.

Puede observarse que de la estadística de Durbin–Watson se concluye que los residuos distribuidos aleatoriamente siguen una distribución gaussiana y de la estadística χ_{ν}^2 concluye un ajuste razonable. A diferencia del análisis estadístico con un número menor de datos experimentales se puede observar que la estadística $\chi_{min}^2 \approx 0.5$ a diferencia del valor obtenido en el cuadro 4.3 de $\chi_{min}^2 \approx 1.0 \times 10^{-2}$. El siguiente resultado muestra que al realizar el análisis estadístico con una mayor muestra de datos experimentales mejora la métrica de χ_{min}^2 de lo cual se concluye un ajuste razonable mejorando el error relativo en el TPA.

Si al momento de realizar el ajuste estadístico se pretende dejar todos los parámetros experimentales libres además del valor de β , y de ese modo obtener el valor de β , los valores estadísticos se muestran a continuación en el cuadro 4.8.

Valor beta original	Valor beta ajuste	Error porcentual beta	Prob χ_{min}^2	Prob χ_{ν}^2	Durbin-Watson D
3.40 cm/GW	3.92 cm/GW	15.3%	1.6×10^{-4}	2.0	1.29

Cuadro 4.8: Estadísticas para β ajustando con todos los parámetros libres.

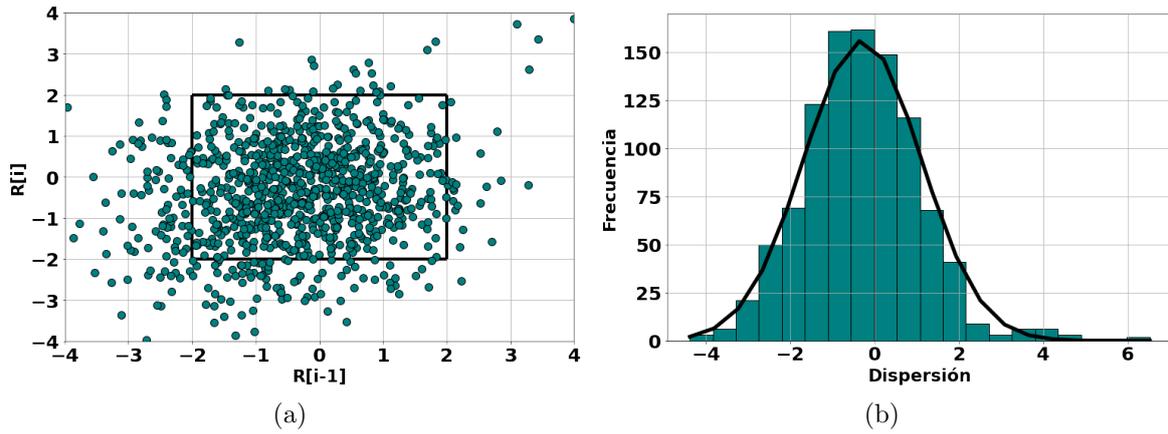


Figura 4.53: Distribución de residuos normalizados de los valores de β .

La estadística de Durbin–Watson observa una tendencia lineal. Por otro lado, la estadística χ^2_ν cuestionaría la hipótesis nula.

En todas las pruebas estadísticas realizadas, se puede observar que la estadística χ^2_{min} rechazaría o cuestionaría la hipótesis nula lo cual se corrige realizando el ajuste con una mayor muestra de datos experimentales, tal y como se hizo con la potencia.

Una posible alternativa y mejorar esta métrica es considerar más puntos de muestreo. Por lo tanto, en el cuadro 4.9 y en la Fig.4.54 se observan los resultados de las métricas al ajustar con pocos puntos, de lo cual se puede concluir que un bajo muestreo o datos no es una buena idea al momento de realizar el ajuste de datos estadísticos.

Valor beta original	Valor beta ajuste	Error porcentual beta	Prob χ^2_{min}	Prob χ^2_ν	Durbin-Watson D
3.40 cm/GW	3.87 cm/GW	13.8%	9.1×10^{-5}	1.6	3.89

Cuadro 4.9: Estadísticas para β ajustando con todos los parámetros libres.

La estadística χ^2_ν como la χ^2_{min} cuestionarían la hipótesis nula. El término Durbin-Watson indicaría que los residuos sistemáticamente anticorrelacionados, pero el hecho de que este valor se acerque significativamente a 4 cuestionaría el ajuste[1]

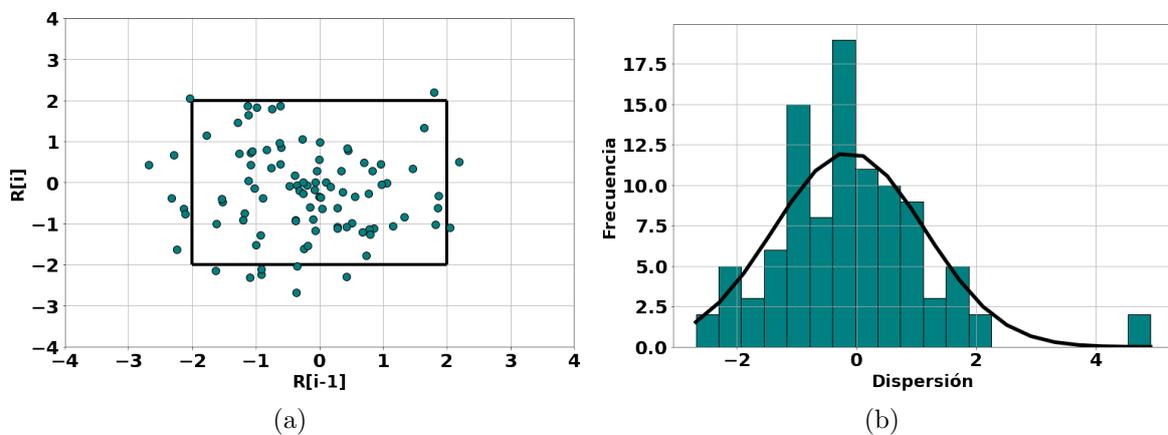


Figura 4.54: Distribución de residuos normalizados.

De manera análoga, se realiza el ajuste y se prueban las métricas estadísticas mediante la implementación de más puntos experimentales, esto se aprecia en la Fig.4.55 y el cuadro 4.10.

Valor beta original	Valor beta ajuste	Error porcentual beta	Prob χ_{min}^2	Prob χ_{ν}^2	Durbin-Watson D
3.40 cm/GW	3.96 cm/GW	16.4%	1.3×10^{-5}	2.2	1.13

Cuadro 4.10: Valores métricos ajustando con todos los parámetros libres.

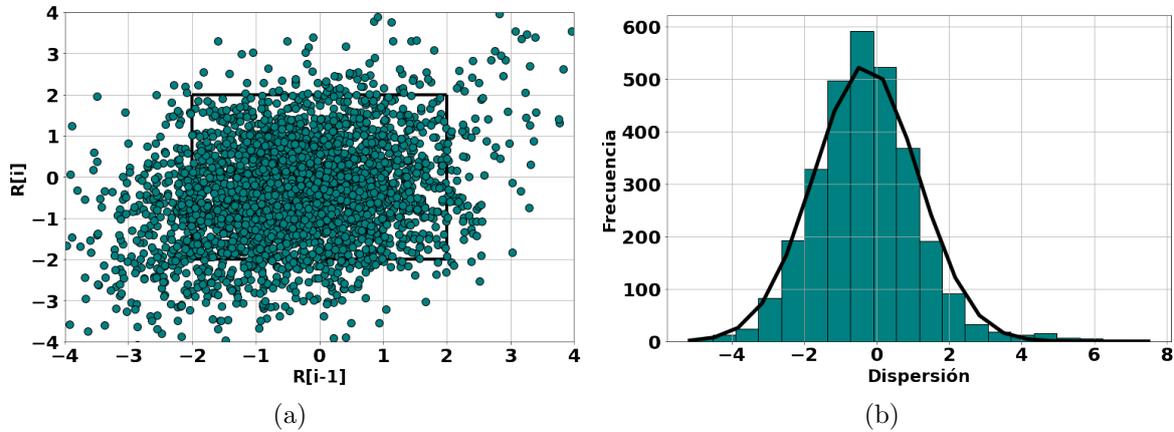


Figura 4.55: Distribución de residuos normalizados.

De las métricas estadísticas χ_{ν}^2 como χ_{min}^2 cuestionarían o rechazarían la hipótesis nula. El término Durbin-Watson indicaría un mal ajuste y por tanto una tendencia lineal en los datos experimentales lo cual cuestionaría el ajuste.

Al momento de realizar el ajuste de datos experimentales es importante establecer la cantidad de parámetros de ajuste (aquéllos que tienen incertidumbre) con los cuales se pretende realizar el ajuste. En el ajuste es de vital importancia ajustar con la cantidad mínima de parámetros experimentales más la variable de interés, pero es necesario tener una alta precisión en los otros como para considerarlos exactos. Esto se pudo observar que al ajustar con un solo parámetro experimental más la variable de interés y considerando una mayor muestra de datos experimentales el ajuste mejoró y por tanto el error relativo en el TPA como se realizó para la potencia como se muestra en el cuadro 4.7. Al momento de realizar el ajuste con todos los parámetros experimentales libres, se pudo apreciar que un mayor muestreo de datos experimentales mejora la estadística, pero de la estadística de χ_{min}^2 la hipótesis se rechazaría, luego es factible concluir que el ajuste debe realizarse con el menor número de parámetros libres más la variable de interés.

4.6. Distribución estadística de β

La distribución normal o distribución Gaussiana es la más utilizada en estadística. Es muy común encontrarse variables que siguen distribuciones normales en fenómenos de la naturaleza. Una variable que se distribuye de manera normal tiene un histograma o función de densidad con forma de campana, con un pico y es simétrica alrededor de la media. La distribución Normal o Gaussiana es importante en ciencia de datos ya que existen algoritmos y procedimientos estadísticos paramétricos que suponen que las variables de entrada siguen una distribución normal[1][5]. Por ello, es necesario comprobar si las variables de salida, en este caso β sigue una distribución normal. En caso de no seguirla, se hace necesario realizar alguna transformación de la variable desde el punto de vista estadístico.

Considerando que los parámetros experimentales siguen una distribución gaussiana; es posible preguntarse si β también sigue una distribución gaussiana.

Para determinar la distribución de β se introduce un ruido gaussiano a cada uno de los parámetros experimentales.

En la Fig.4.56 se aprecia la distribución gaussiana o normal en P y D .

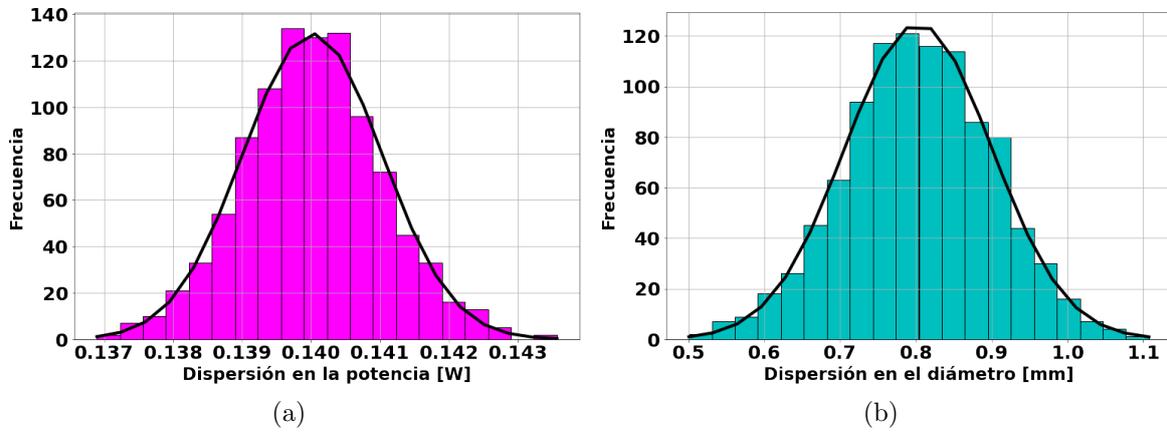


Figura 4.56: Distribución gaussiana para P y D .

La Fig.4.57 representa la distribución normal en los parámetros experimentales d_s y t .

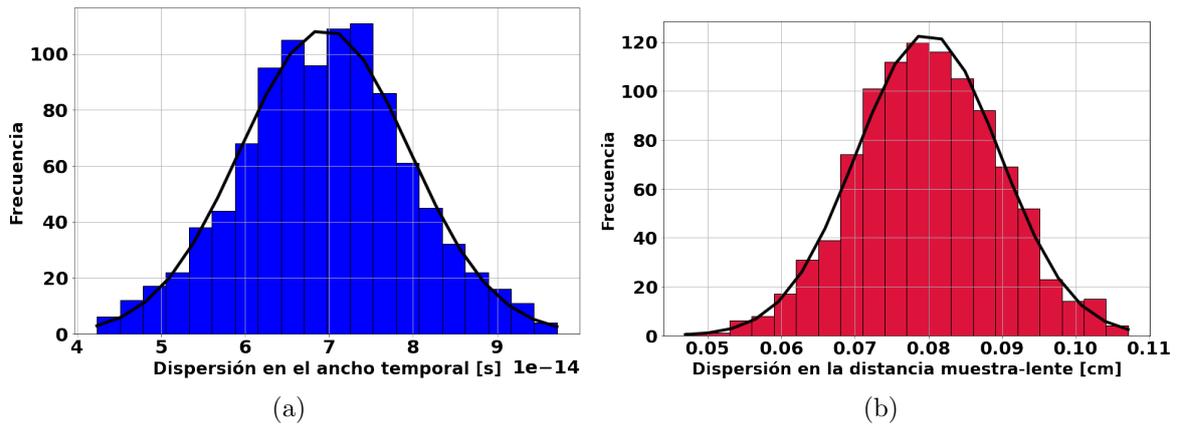


Figura 4.57: Distribución normal para t y d_s .

La Fig.4.58 representa la distribución gaussiana en los parámetros experimentales L y ν .

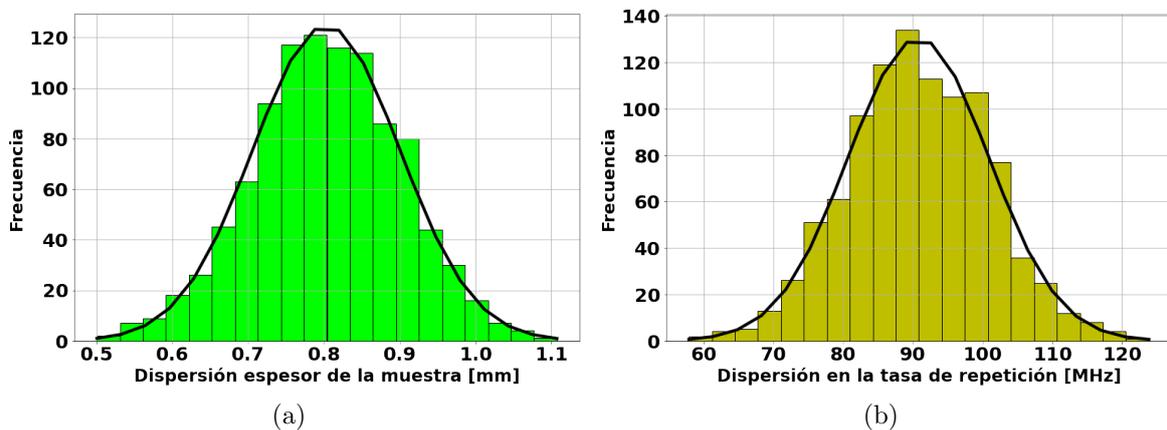


Figura 4.58: Distribución normal para L y ν .

En la Fig.4.59 se aprecia la función de transmitancia considerando errores normales en los parámetros experimentales.

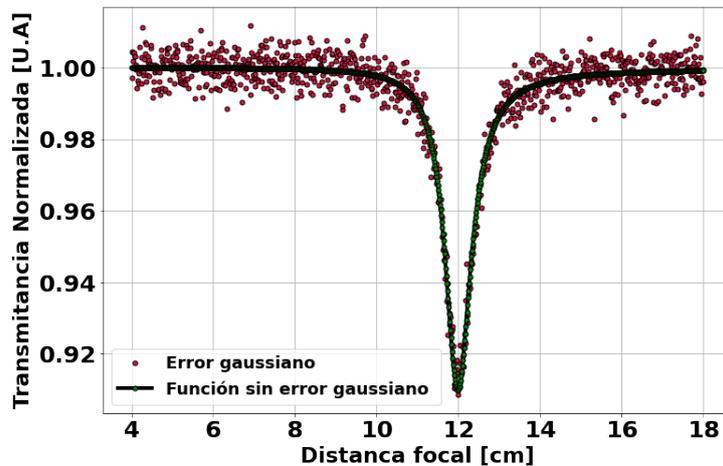


Figura 4.59: Función de transmitancia con errores normales en los parámetros simulados.

Existen diversas técnicas que pueden verificar si una variable sigue una distribución gaussiana o similar a la de Gauss para usar las técnicas estándar, o lo suficientemente no gaussiana como para usar métodos estadísticos no paramétricos.

Un método simple es representar la distribución de la variable con un histograma como se aprecia en la Fig.4.60 donde se puede observar que el parámetro β sigue una distribución normal.

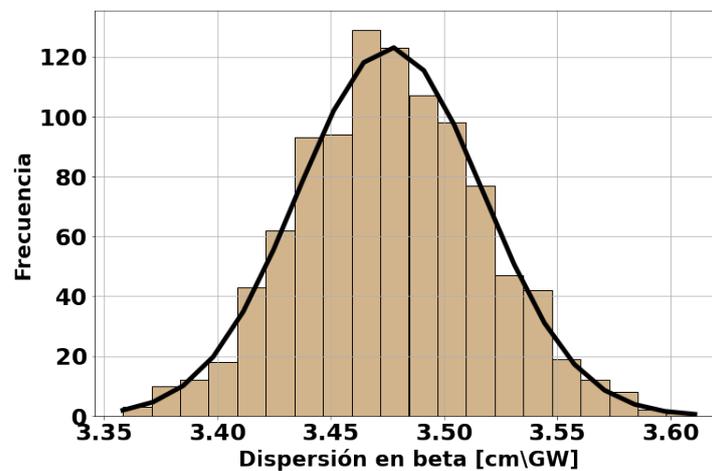


Figura 4.60: Distribución normal en β .

Otro método es el gráfico Q-Q. Esta gráfica genera su propia muestra de la distribución con la que esta comparando, en este caso la distribución normal. Las muestras se dividen en grupos, llamados cuantiles. Cada punto de datos de la muestra se empareja con un miembro similar de la distribución con la que comparamos en la misma distribución de acumulación tal y como se realizó en el capítulo 2.

Los puntos resultantes se trazan como un diagrama de dispersión con el valor comparativo en el eje horizontal y la muestra de datos en el eje vertical. Una línea de puntos en un ángulo de 45° desde la parte inferior izquierda del gráfico hasta la parte superior derecha mostrará una coincidencia perfecta con la distribución con la que se desea comparar. A menudo, se traza una

línea para ver más clara esa diferencia. Las desviaciones de los puntos de la línea muestran una desviación de la distribución esperada. En la Fig.4.61, se puede apreciar que la distribución generada para β es normal ya que sigue casi a la perfección la línea roja.

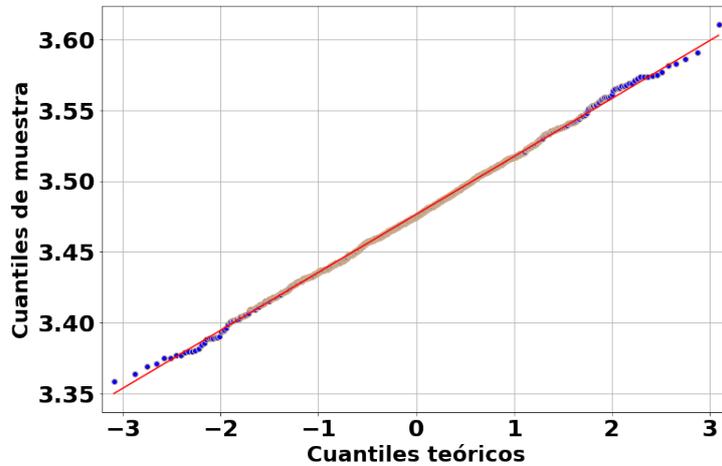


Figura 4.61: Gráfico qqplot para β .

Otra manera de predecir si una variables sigue una distribución normal son las pruebas de normalidad estadística[3].

En la interpretación de una prueba estadística se debe considerar lo siguiente:

- **Estadística** : una cantidad calculada por la prueba que se puede interpretar en el contexto de la prueba comparándola con los valores críticos de la distribución de la estadística de prueba.
- **valor p** : se utiliza para interpretar la prueba, en este caso si la muestra se extrajo de una distribución gaussiana.

Las pruebas suponen que la muestra se extrajo de una distribución gaussiana. Técnicamente, esto se llama hipótesis nula o H_0 . Se elige un nivel de umbral denominado α , típicamente 5% (0.05), que se usa para interpretar el valor p. Luego, debe tenerse en cuenta[8]:

- **$p \leq \alpha$** : rechazar H_0 , no es normal.
- **$p > \alpha$** : falla al rechazar H_0 , normal.

Un resultado superior al 5% no significa que la hipótesis nula sea cierta. Significa que es muy probable que sea cierto dada la evidencia disponible. El valor p no es la probabilidad de que los datos se ajusten a una distribución gaussiana; se puede considerar como un valor que nos ayuda a interpretar la prueba estadística[8].

Una prueba de normalidad estadística es la de Shapiro-Wilk la cual evalúa una muestra de datos y cuantifica la probabilidad de que los datos se extraigan de una distribución gaussiana. Al realizar la prueba de Shapiro-Wilk se obtienen un valor estadístico de 0.999 y un valor de p de 0.736 para la distribución de β . Luego se puede predecir que la muestra parece gaussiana o Normal por lo cual no se rechaza la hipótesis nula H_0 .

Otra prueba de normalidad estadística es la prueba k^2 de D'Agostino calcula estadísticas de resumen a partir de los datos, a saber, curtosis y asimetría, para determinar si la distribución de datos se aparta de la distribución normal. Para emplear esta prueba se debe tener en cuenta lo siguiente[6][8]:

- El sesgo es una cuantificación de cuanto se empuja una distribución hacia la izquierda o hacia la derecha, una medida de asimetría en la distribución.
- La curtosis cuantifica qué parte de la distribución hay en la cola. Es una prueba estadística simple y de uso común para la normalidad.

En esta prueba se obtiene un valor estadístico de 0.979 y un valor de p de 0.613, por lo tanto, la distribución de β es normal y no se rechaza la hipótesis nula H_0 .

Por su parte, la prueba de Anderson-Darling es una prueba estadística que se puede utilizar para evaluar si una muestra de datos proviene de una de las muchas muestras de datos conocidas. Esta se puede utilizar para comprobar si una muestra de datos es normal. Una característica de la prueba de Anderson-Darling es que devuelve una lista de valores críticos en lugar de un solo valor p, lo cual proporciona la base para una interpretación más completa del resultado. El valor estadístico en esta prueba fue de 0.249; mientras que los valores de p obtenidos fueron de (0.574; 0.653; 0.784; 0.914; 1.088). Luego puede observarse que en cada nivel de significancia, la prueba ha encontrado que los datos siguen una distribución normal debido a que si el estadístico de prueba calculado es menor que el valor crítico en un nivel de significancia elegido no se rechaza la hipótesis nula.

En el ajuste de datos experimentales, es importante establecer la distribución o función de densidad que sigue el parámetro de ajuste, en este caso el coeficiente de absorción de dos fotones β . Considerando que los parámetros experimentales cuentan con errores gaussianos, se ha probado mediante técnicas de análisis visual como histogramas y gráficas Q-Q y pruebas estadísticas que β también sigue una distribución normal lo cual es de gran importancia por que el método actual que se emplea para determinar el valor de β y su incertidumbre se basa en suponer que β sigue una distribución normal[4].

Bibliografía

- [1] HAND, DAVID. (2011). *Measurements and their Uncertainties: A Practical Guide to Modern Error Analysis by Ifan G. Hughes, Thomas P. A. Hase. International Statistical Review.*
- [2] DURBIN, J. AND WATSON, G. S. (1950).. *Testing for serial correlation in least squares regression: I. Biometrika, 37, 409–428*
- [3] BATES, D. M. AND WATTS, D. G. (1988).. *Nonlinear Regression Analysis and its Applications.* John Wiley, New York.
- [4] EDGAR RUEDA, JUAN H. SERNA, ABDULLATIF Y HAMAD, HERNANDO GARCIA. *Two-photon absorption coefficient determination using the differential F-scan technique.* November 2019 Optics & Laser Technology 119(10):105584
- [5] D'AGOSTINI, G. (2003). *Bayesian inference in processing experimental data: principles and basic applications. Rep. Prog. Phys., 66, 1383–1419.*
- [6] JAMES, F. (2006).. *Statistical Methods in Experimental Physics. 2nd edition World Scientific, Singapore.*
- [7] BEVINGTON, P. R. AND ROBINSON, D. K. (2003).. *Data Reduction and Error Analysis. McGraw-Hill, New York.*
- [8] CIRO MARTÍNEZ BENCARDINO (2016). *Estadística y muestreo.* Ecoe Edicione

Conclusiones y perspectivas

5.1. Conclusiones

- Se concluyó la importancia de establecer la dirección de la corriente aplicada, esto con la finalidad de no cometer errores en el valor del TPA debido a la presencia del fenómeno de hystéresis en la lente EFTL.
- Se concluye que de los parámetros experimentales que más inciden en el error relativo del valor de β son la tasa de repetición, el ancho temporal y la distancia muestra-EFTL, lo cual indica que se debe tener una mayor exactitud al momento de ser medidas.
- Se concluyó la validez de la función de transmitancia aproximada y se establece la importancia de esta ya que es una función simple, puede tener un error inferior al generado por los parámetros experimentales, y permite un procesamiento a tiempo cuasi-real.
- Se concluyó que al momento de ajustar con un único parámetro experimental el diámetro es la variable que menos influencia tiene en el error relativo del coeficiente de absorción, debido a que para obtener el valor de β con un error inferior al 20 % este podrá medirse hasta con una incertidumbre del 30 %, mientras que la potencia y el espesor deben medirse con una incertidumbre del 25 %, el ancho temporal y la tasa de repetición del haz deben medirse con una incertidumbre del 20 %, la longitud de onda debe medirse con una incertidumbre del 15 % y la distancia muestra-EFTL deberá medirse con una incertidumbre del 4 %.
- Sí el ajuste es realizado con dos parámetros experimentales incluyendo la variable de interés, es este caso, ajustando con el diámetro y la potencia, se concluye que para obtener un error en el valor de β inferior al 20 % la potencia debe medirse con una incertidumbre inferior al 3 % mientras que el diámetro debe medirse con una incertidumbre menor al 30 %, por lo cual, al realizar el ajuste con estos dos parámetros experimentales se debe centrar en medir con mayor precisión la potencia del haz. Por el contrario, si el ajuste se realiza dejando como parámetros libres la potencia y la tasa de repetición se encontró que para obtener un error en el valor de β inferior al 20 % la potencia debe medirse con una incertidumbre menor al 25 % mientras que la tasa de repetición con una incertidumbre menor al 0.5 %, lo cual implica que al ajustar con estos dos parámetros se debe medir el valor de la tasa de repetición con mayor precisión en comparación con la potencia incidente. Si el ajuste se realiza con la tasa de repetición y el ancho temporal, se observó del análisis realizado que para obtener un error en el valor de β inferior al 20 % la tasa de repetición debe medirse con una incertidumbre menor al 8 % mientras que el ancho temporal con una incertidumbre menor al 12 %, lo cual implica una mayor precisión en la medida de la tasa de repetición del haz. Por el contrario, si el ajuste se realiza con todos lo

parámetros experimentales libres, se concluye que para obtener un error en el valor de β inferior al 15 % los parámetros experimentales que más precisión requieren en su medida fueron la distancia muestra-EFTL, la tasa de repetición y el ancho temporal del haz los cuales deben medirse con incertidumbres de 0.25 %, 0.03 % y 0.04 % respectivamente

- Se concluye que es mejor ajustar con un único parámetro experimental más la variable de interés β , siendo el diámetro el mejor parámetro de ajuste.
- Si el error en los parámetros experimentales se considera gaussiano, se concluye que la variable de interés, en este caso el TPA sigue una distribución gaussiana.

5.2. Perspectivas

- Realizar el análisis de datos estadísticos ajuntando con dos, tres, cuatro o cinco parámetros experimentales más la variables de interés.
- Realizar el estudio estadístico de parámetros experimentales en la técnica de caracterización óptica no lineal RF-SCAN con la finalidad de determinar la influencia de los parámetros experimentales en el valor del índice de refracción no lineal.

Bibliografía

- [1] EDGAR RUEDA, JUAN H. SERNA, ABDULLATIF Y HAMAD, HERNANDO GARCIA. *Two-photon absorption coefficient determination using the differential F-scan technique*. November 2019 Optics & Laser Technology 119(10):105584

Productos de investigación

6.1. Artículos

6.1.1. Artículos publicados

- **Hysteresis characterization of an electrically focus-tunable lens.** Walter A Torres-Sepúlveda, Julian D Henao Escobar, Jeny.M, Alejandro Mira-Agudelo, Edgar A. 2020 58 Optical Engineering.

6.2. Eventos científicos

- XVI ENCUENTRO NACIONAL DE OPTICA VII CONFERENCIA ANDINA Y DEL CARIBE EN OPTICA Y SUS APLICACIONES ENO - CANCOA 2019. **Caracterización de histéresis y deriva temporal de una lente electro-óptica de distancia focal sintonizable.** UNIVERSIDAD DE MONTERIA, Montería - Colombia.
- XVII ENCUENTRO NACIONAL DE OPTICA VIII CONFERENCIA ANDINA Y DEL CARIBE EN OPTICA Y SUS APLICACIONES ENO - CANCOA 2021. **Influencia de los parámetros experimentales de la técnica F-scan en la determinación de absorción de dos fotones.** UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA, Medellín - Colombia.

Deducción de la ecuación de Helmholtz

Recordemos que las ecuaciones de Maxwell en su forma armónica se pueden expresar como;

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + i\omega\epsilon\vec{H} & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -i\omega\vec{B} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde las relaciones constitutivas están establecidas como $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ y $\vec{B} = \mu\vec{H}$. Considerando un medio homogéno, libre de fuentes y de cargas, es decir, $\vec{J} = \vec{0}$ y $\rho=0$, las ecuaciones de Maxwell se transforman en;

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\omega\epsilon\vec{H}\tag{A.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}\tag{A.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon\vec{E}) = \epsilon\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0\tag{A.4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu\vec{H}) = \mu\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0\tag{A.5}$$

Con la finalidad de desacoplar las ecuaciones de Maxwell para medios homogéneos, tomemos el rotacional en la Ec.(A.2).

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) &= \vec{\nabla} \times (i\omega\epsilon\vec{E}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} &= i\omega\epsilon\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ -\nabla^2\vec{H} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) &= i\omega\epsilon(-i\omega\mu\vec{H})\end{aligned}\tag{A.6}$$

donde $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}=0$. Considerando que \vec{k} es el vector de onda y por lo tanto $k^2 = \omega\mu\epsilon$, se obtiene la ecuación de Helmholtz para el campo magnético:

$$\nabla^2\vec{H} + \vec{k}^2\vec{H} = 0\tag{A.7}$$

De manera similar, tomando el rotacional en la Ec.(A.3) y teniendo en cuenta las relaciones constitutivas, se llega a la ecuación de Helmholtz para el campo electromagnético:

$$\nabla^2\vec{E} + \vec{k}^2\vec{E} = 0\tag{A.8}$$

Absorción multifotónica

La absorción multifotónica se refiere a la absorción simultánea de n fotones de un solo haz o de múltiples haces. La ecuación diferencial que gobierna este fenómeno relaciona el coeficiente de absorción lineal α y el coeficiente de absorción de n -fotones k_n está dada por;

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(\alpha I(z, r, t) + k_n I^n(z, r, t)), \quad (\text{B.1})$$

$$-\int_0^z dz = \int_{I_0}^{I_z} \frac{dI}{\alpha I + k_n I^n} = \int_{I_0}^{I_z} \frac{dI}{I^n (\alpha I^{1-n} + k_n)} \quad (\text{B.2})$$

Al resolver la integral de la Ec.(B.2) puede considerarse el siguiente cambio de variable, tal que;

$$u = \alpha I^{1-n} + k_n \rightarrow \frac{du}{dI} = \alpha(1-n)I^{-n} = \frac{\alpha(1-n)}{I^n} \rightarrow dI = \frac{I^n}{\alpha(1-n)} du \quad (\text{B.3})$$

Reemplazando en la Ec.(B.2) se obtiene la integral de la Ec.(B.4) la cual puede ser resuelta como una integral indefinida y por último se evalúan los límites de integración.

$$\int \frac{I^n}{I^n \alpha(1-n)u} du = \frac{1}{\alpha(1-n)} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{\alpha(n-1)} \int \frac{1}{u} du, \quad (\text{B.4})$$

Reemplazando $u = \alpha I^{1-n} + k_n$ y evaluando los límites de integración se llega a,

$$\begin{aligned} \int_{I_0}^{I_z} \frac{dI}{I^n (\alpha I^{1-n} + k_n)} &= -\frac{1}{\alpha(n-1)} \ln(\alpha I^{1-n} + k_n) \Big|_{I_0}^{I_z} \\ &= -\frac{1}{\alpha(n-1)} \left[\ln(\alpha I_{(z)}^{1-n} + k_n) - \ln(\alpha I_{(0)}^{1-n} + k_n) \right] \\ &= -\frac{1}{\alpha(n-1)} \ln \left(\frac{\alpha I_{(z)}^{1-n} + k_n}{\alpha I_{(0)}^{1-n} + k_n} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Integrando la parte derecha de la Ec.(B.5), se obtiene,

$$-\int_0^z dz = -z \quad (\text{B.6})$$

Igualando la Ec.(B.5) con la Ec.(B.6) se llega a,

$$-\frac{1}{\alpha(n-1)} \ln \left(\frac{\alpha I_{(z)}^{1-n} + k_n}{\alpha I_{(0)}^{1-n} + k_n} \right) = -z \leftrightarrow e^{z\alpha(1-n)} = \frac{\alpha I_{(z)}^{1-n} + k_n}{\alpha I_{(0)}^{1-n} + k_n} \quad (\text{B.7})$$

$$\alpha I_{(z)}^{1-n} + k_n = e^{z\alpha(n-1)} \left(\alpha I_{(0)}^{1-n} + k_n \right) \leftrightarrow I_{(z)}^{1-n} = \frac{1}{\alpha} e^{z\alpha(n-1)} \left(\alpha I_{(0)}^{1-n} + k_n \right) - \frac{k_n}{\alpha} \quad (\text{B.8})$$

Solucionando para $I_{(z)}$ se obtiene,

$$I_{(z)}^{1-n} = e^{z\alpha(n-1)} \left(I_{(0)}^{1-n} + \frac{k_n}{\alpha} \right) - \frac{k_n}{\alpha} = e^{z\alpha(1-n)} I_{(0)}^{1-n} + e^{z\alpha(1-n)} \frac{k_n}{\alpha} - \frac{k_n}{\alpha} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{I_{(z)}^{n-1}} = \frac{e^{z\alpha(n-1)}}{I_{(0)}^{n-1}} + \frac{k_n}{\alpha} (e^{z\alpha(n-1)} - 1) = \frac{\alpha e^{z\alpha(n-1)} + k_n I_{(0)}^{1-n} (e^{z\alpha(n-1)} - 1)}{I_{(0)}^{n-1} \alpha} \quad (\text{B.10})$$

$$I_{(z)}^{n-1} = \frac{I_{(0)}^{n-1} \alpha}{\alpha e^{z\alpha(n-1)} + k_n (e^{z\alpha(n-1)} - 1)} = \frac{\alpha I_{(0)}^{n-1}}{\alpha e^{z\alpha(n-1)} \left(1 + \frac{k_n}{\alpha} I_{(0)}^{n-1} (1 - e^{-z\alpha(n-1)}) \right)} \quad (\text{B.11})$$

Por tanto, la variación de la intensidad para un proceso multifotónico puede representarse por;

$$I_{(z)}^{n-1} = \frac{I_{(0)}^{n-1} e^{-z\alpha(n-1)}}{\left(1 + \frac{k_n}{\alpha} I_{(0)}^{n-1} (1 - e^{-z\alpha(n-1)}) \right)}, \quad (\text{B.12})$$

donde n indica el orden de la absorción.

Resolviendo para $I(r, z, t)$, la Ec.(B.12) toma la forma de,

$$I(r, z, t) = \frac{I_0 e^{-z\alpha}}{\left(1 + \frac{k_n}{\alpha} I_{(0)}^{n-1} (1 - e^{-z\alpha(n-1)}) \right)^{\frac{1}{n-1}}} \quad (\text{B.13})$$

Considerando la reflectancia en la primera superficie se tiene que,

$$I(r, z, t) = \frac{I_0 e^{-z\alpha}}{\left(1 + \frac{k_n}{\alpha} I_{(0)}^{n-1} (1 - e^{-z\alpha(n-1)}) \right)^{\frac{1}{n-1}}} (1 - R), \quad (\text{B.14})$$

y considerando las pérdidas por reflexión en la segunda cara, es decir, cuando el haz se ha propagado una distancia $z = L$, se tiene,

$$I(r, z, t) = \frac{I_0 e^{-z\alpha} (1 - R)^2}{\left(1 + \frac{k_n}{\alpha} I_{(0)}^{n-1} (1 - R)^{n-1} (1 - e^{-z\alpha(n-1)}) \right)^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (\text{B.15})$$

lo cual representa la intensidad del campo cuando este se ha propagado a través del material teniendo en cuenta la absorción no lineal multifotónica, es decir, el coeficiente de absorción no lineal k_n .

Al suponer que las impurezas introducen alguna absorción lineal de fondo, la ecuación que describe la atenuación de un haz que experimenta absorción de tres fotones viene dada por [1];

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha I - \gamma I^3 \quad (\text{B.16})$$

Luego, la solución para la Ec.(B.16) esta dada por la (B.15) donde debe considerarse $n=3$ y $\gamma = k_n$ así obtener la variación de la intensidad, tal que;

$$I(r, z, t) = \frac{I_0 e^{-z\alpha} (1 - R)^2}{\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} I_0^2 (1 - R)^2 (1 - e^{-2z\alpha})\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{B.17})$$

La Fig.B.1 muestra la variación en la intensidad cuando se presenta la absorción no lineal de tercer orden tal y como se ha determinado en la Ec.(B.17). En la simulación se tomados el semiconductor Arseniuro de aluminio y galio $\text{Al}_{0,18}\text{Ga}_{0,82}\text{As}$ al cual se le ha incidido un campo óptico Gaussiano con longitud de onda $\lambda = 1500$ [nm]. Para este valor en la longitud de onda, su absorción lineal $\alpha = 699.92$ $[\text{cm}]^{-1}$ [5] y un valor de $\gamma = 0.05 \times 10^{-18}$ $[\text{cm}^3/\text{W}^3]$ [1], además, de un valor para la potencia deL haz dada por $I_0 = 1 \times 10^{12}$ $[\text{W}/\text{cm}^2]^2$.

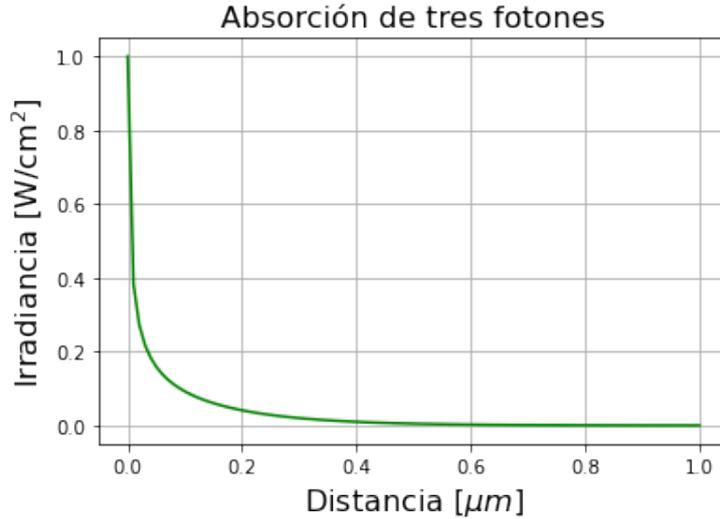


Figura B.1: Absorción de tres fotones.

Bibliografía

- [1] SUTHERLAND, R. L. (2003). *Handbook of nonlinear optics*. CRC press.

Deducción de la ecuación de transmitancia

$$E_t = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{(1-R)^2 I_0 e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} e^{-\alpha L}}{1 + \beta(1-R) I_0 e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} L_{eff}} \right) r dr dt \quad (C.1)$$

Con la finalidad de resolver la Ec.(C.1) consideremos que $C_o = (1-R)^2 I_0 e^{-\alpha L}$ y $C_1 = \beta(1-R) I_0 L_{eff}$; luego se tiene que:

$$E_t = 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{C_o e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}}{1 + C_1 e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}} r dr dt \quad (C.2)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\int_0^{2\pi} = 2\pi$. A continuación se debe considerar que $x = \left(\frac{t}{\tau_0}\right)$ y $y = \left(\frac{r}{r_0}\right)$ y, por lo tanto, $\tau_0 dx = dt$ y $r_0 dy = dr$, entonces,

$$E_t = 2\pi r_0^2 \tau_0 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty y \frac{C_o e^{-x^2} e^{-y^2}}{1 + C_1 e^{-x^2} e^{-y^2}} dy dx \quad (C.3)$$

Ahora, considerando que;

$$w = 1 + C_1 e^{-x^2} e^{-y^2} \quad (C.4)$$

y

$$z = x \quad (C.5)$$

además,

$$J(x, y) dx dy = dw dz \quad (C.6)$$

donde $J(x, y)$ es la matriz Jacobiana, la cual se explicita en la Ec.(C.12)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

Luego, las derivadas parciales son;

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2x C_1 e^{-x^2} e^{-y^2} \quad (C.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -2y C_1 e^{-x^2} e^{-y^2} \quad (C.9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.11})$$

luego, se llega a

$$\begin{bmatrix} -2yC_1e^{-x^2}e^{-y^2} & -2xC_1e^{-x^2}e^{-y^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Por tanto, el Jacobiano de la transformación es;

$$J(x, y) = -2yC_1e^{-x^2}e^{-y^2} \quad (\text{C.13})$$

Entonces,

$$J(x, y)dxdy = dw dz \rightarrow -2yC_1e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = dw dz \rightarrow ye^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = -\frac{dw dz}{2C_1} \quad (\text{C.14})$$

Reemplazando la Ec.(C.14) en la Ec.(C.3), se tiene:

$$E_t = -2\pi r_o^2 \tau_o \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty y \frac{C_o e^{-x^2} e^{-y^2}}{1 + C_1 e^{-x^2} e^{-y^2}} dy dx \quad (\text{C.15})$$

$$E_t = -\frac{\pi r_o^2 \tau_o C_o}{C_1} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dz dw}{w} = \frac{\pi r_o^2 \tau_o C_o}{C_1} \int_{-\infty}^\infty dz \int_0^\infty \frac{dw}{w} \quad (\text{C.16})$$

$$E_t = -\frac{\pi r_o^2 \tau_o C_o}{C_1} \int_{-\infty}^\infty dz \left[\ln(w) \Big|_0^\infty \right] \quad (\text{C.17})$$

Teniendo en cuenta que $dz = dx = \frac{dt}{\tau_o}$ y $w = 1 + C_1 e^{-x^2} e^{-y^2}$ y teniendo en cuenta que $x = \left(\frac{t}{\tau_o}\right)$ y $y = \left(\frac{r}{r_o}\right)$ se llega a;

$$E_t = -\frac{\pi r_o^2 C_o}{C_1} \int_{-\infty}^\infty \left[\ln \left(1 + C_1 e^{-\left(\frac{t}{\tau_o}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{r_o}\right)^2} \right) \Big|_0^\infty \right] dt \quad (\text{C.18})$$

entonces;

$$E_t = -\frac{\pi r_o^2 (1-R)^2 I_o e^{-\alpha L}}{\beta (1-R) I_o L_{eff}} \int_{-\infty}^\infty \left[\ln \left(1 + C_1 e^{-\left(\frac{t}{\tau_o}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{r_o}\right)^2} \right) \Big|_0^\infty \right] dt \quad (\text{C.19})$$

$$E_t = -\frac{\pi r_o^2 (1-R) e^{-\alpha L}}{\beta L_{eff}} \int_{-\infty}^\infty \left[\ln \left(1 + C_1 e^{-\left(\frac{t}{\tau_o}\right)^2} e^{-\left(\frac{\infty}{r_o}\right)^2} \right) - \ln \left(1 + C_1 e^{-\left(\frac{t}{\tau_o}\right)^2} e^{-\left(\frac{0}{r_o}\right)^2} \right) \right] dt \quad (\text{C.20})$$

donde se tiene que $e^{-\left(\frac{\infty}{r_o}\right)^2} = 0$ y $e^{-\left(\frac{0}{r_o}\right)^2} = 1$; por lo tanto, se tiene que;

$$E_t = -\frac{\pi r_o^2 (1-R) e^{-\alpha L}}{\beta L_{eff}} \int_{-\infty}^\infty \left[\ln \left(1 + C_1 e^{-\left(\frac{t}{\tau_o}\right)^2} e^{-\left(\frac{\infty}{r_o}\right)^2} \right) - \ln \left(1 + C_1 e^{-\left(\frac{t}{\tau_o}\right)^2} e^{-\left(\frac{0}{r_o}\right)^2} \right) \right] dt \quad (\text{C.21})$$

luego,

$$E_t = -\frac{\pi r_0^2(1-R)e^{-\alpha L}}{\beta L_{eff}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln(1) - \ln(1 + C_1 e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} \right] dt \quad (\text{C.22})$$

por lo tanto;

$$E_t = \frac{\pi r_0^2(1-R)e^{-\alpha L}}{\beta L_{eff}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln(1 + C_1 e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} \right] dt \quad (\text{C.23})$$

$$E_t = \frac{\pi r_0^2(1-R)e^{-\alpha L}}{\beta L_{eff}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln(1 + \beta(1-R)I_o e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} L_{eff} \right] dt \quad (\text{C.24})$$