

**SHIMIA GRAVIMÉTRICO:**  
**Simulaciones, Herramientas, Instrumentos, Métodos e  
Inteligencia Artificial para Aplicaciones en Docencia,  
Extensión e Investigación**



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

**Eduardo Henao Restrepo**

Instituto de Física  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Antioquia

**Asesor:** Profesor Jorge Hernán López Botero, Ph.D

**Co-asesores:** Profesora Gloria Alexandra Moncayo Gámez, Ph.D

Profesor Jorge Enrique Tobón Gómez, MSc.

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título en:

*Magíster en Física*

2022



## ***Dedicatoria***

*A mi Madre Marta Cecilia,  
mi tía Consuelo de María,  
mis otras tías y a mis primas  
(entre ellas Patricia y Cristina),  
que siempre han estado conmigo,  
acompañándome emocionalmente.*

*A mi Tío Guillermo, quien  
me acerco por primera vez  
al conocimiento científico.*





## Declaración

Por el presente escrito yo, Eduardo Henao Restrepo, con cédula de ciudadanía número 1039453805, declaro que el contenido de este trabajo de grado es original y ha sido posible gracias al programa de becas de maestría de la Universidad de Antioquia de la cual fui beneficiado y a plataformas como Python, Google Colaboratory, Gradio, GeoGebra y LabVIEW en la cual se sustenta el proyecto, además de los artículos/*papers* en los cuales se inspiró el método de inversión gravimétrico.

En el trabajo se hace referencia explícita a otros trabajos en la medida de lo posible (a excepción de cualquier errata). Además, los textos que se han tomado literalmente se indican explícitamente como tales.

Eduardo Henao Restrepo  
2022



## Agradecimientos

Al fondo de Beca de Maestría de la Universidad de Antioquia (UdeA) por acompañar económicamente este proyecto, al Grupo de Instrumentación Científica y Microelectrónica (GICM) del Instituto de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia (UdeA) por acogerme a pesar de cambio de rumbo del proyecto (originalmente la construcción de un gravímetro sencillo con propósitos didácticos) durante la contingencia por la pandemia del virus COVID-19.

Especialmente agradezco a mis asesores y co-asesores:

- Profesor Jorge Hernán López Botero, Ph.D
- Profesora Gloria Alexandra Moncayo Gámez, Ph.D
- Profesor Jorge Enrique Tobón Gómez, MSc.

Mis agradecimientos al NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*) y su base de datos de gravedad pública usadas en el apartado de *machine learning* en Colombia y Antioquia, así como Xiaolin Luo en su *paper* “*Constraining the shape of a gravity anomalous body using reversible jump Markov chain Monte Carlo*” que sirvió como inspiración en el apartado de inversión gravimétrica con Monte Carlo y las plataformas Google Colaboratory (Colab), LabVIEW (*Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench*) y Gradio (Gradient Input Output) utilizadas en las actividades.



## Abstract

*SHIMIA Gravimetrico* is a set of simulations (*simulaciones*), tools (*herramientas*), instruments (*instrumentos*), methods (*métodos*) and artificial intelligence (*inteligencia artificial*) applied to gravimetry. Simulations: developed with Colab and Gradio interactive examples, all related to fundamental aspects of gravimetry (geophysics). Tools: these are open access through a GitHub repository, and allow to be applied to gravimetry courses so that students, and in general the scientific community interested in the subject, have a first approach that will give them a better view on gravimetry. Instruments: With LabVIEW a virtual instrument of a relative gravimeter with zero-length spring was created that emulates in a very approximate way the behavior of a real device. Methods: the idea is to perform simple 2D gravimetric inversions, i.e. to estimate the position and shape of a buried object only with its perturbations in gravity using Bayesian statistical methods, in particular the reversible jump Markov chain Monte Carlo algorithm exposed by Luo2010, with some modifications. Artificial Intelligence: implemented as regressors to fill gravity anomaly databases with free data for Colombia, with gravity anomaly records from the *Instituto Geográfico Agustín Codazzi* and elevation data from the Shuttle Radar Topography Mission.

**Keywords:** *SHIMIA, Gravimetry; Reversible jump Markov chain Monte Carlo; Artificial Intelligence; Didactics.*



## Resumen

SHIMIA Gravimétrico es un conjunto de simulaciones, herramientas, instrumentos, métodos e inteligencia artificial aplicados a la gravimetría. Simulaciones: desarrolladas con Colab y ejemplos interactivos de Gradio, todas relacionadas con aspectos fundamentales de la gravimetría (geofísica). Herramientas: estas son de acceso libre a través de un repositorio de GitHub y permiten ser aplicadas a cursos de gravimetría para que los estudiantes, y en general la comunidad científica interesada en el tema, tengan un primer acercamiento que les dará una mejor visión sobre la gravimetría. Instrumentos: Con LabVIEW se creó un instrumento virtual de un gravímetro relativo con resorte de longitud cero que emula de modo muy aproximado el comportamiento de un equipo real. Métodos: la idea es realizar inversiones gravimétricas en 2D sencillas, es decir, estimar la posición y forma de un objeto enterrado solamente con sus perturbaciones en la gravedad utilizando métodos de estadística Bayesiana, en particular el algoritmo *reversible jump Markov chain Monte Carlo* expuesto por Luo2010, con algunas modificaciones. Inteligencia Artificial: implementada como regresores para rellenar bases de datos de anomalías gravimétricas con datos libres para Colombia, con registros de anomalías de gravedad del Instituto Geográfico Agustín Codazzi y datos de elevación de la misión topográfica Radar Shuttle.

**Palabras Clave:** *SHIMIA, Gravimetría; Reversible jump Markov chain Monte Carlo; Inteligencia Artificial; Didáctica.*





# Índice general

|   |              |
|---|--------------|
| <b>Índice de figuras</b>  | <b>XVII</b>  |
| <b>Índice de tablas</b>   | <b>XXI</b>   |
| <b>Nomenclatura</b>   | <b>XXIII</b> |
| <b>Introducción</b>   | <b>1</b>     |
| <b>1. Marco Teórico</b>   | <b>3</b>     |
| 1.1. Sobre la Gravimetría . . . . .                                     | 4            |
| 1.2. Fórmulas de Gravedad Teórica . . . . .                             | 6            |
| 1.2.1. Fórmulas de 1930-1980 . . . . .                                  | 8            |
| 1.2.2. Otra Fórmula para año 1980* con una mejor aproximación . . . . . | 9            |
| 1.2.3. Fórmula Somigliana para GSR80 . . . . .                          | 10           |
| 1.2.4. Fórmula de 1984 . . . . .  | 10           |
| 1.3. Correcciones, reducciones y ruidos a tener en cuenta . . . . .     | 12           |
| 1.3.1. Dependencia por la latitud y elevación . . . . .                 | 13           |
| 1.3.2. Corrección y anomalía de Aire Libre . . . . .                    | 14           |
| 1.3.3. Corrección y anomalía de Bouguer . . . . .                       | 16           |
| 1.3.4. Corrección Topográfica . . . . .                                 | 17           |
| 1.3.5. Anomalía Isostática . . . . .                                    | 19           |
| 1.3.6. Por deriva instrumental . . . . .                                | 20           |
| 1.3.7. Por mareas terrestres . . . . .                                  | 21           |

## Índice general

---

|  |           |
|--|-----------|
| 1.3.8. Por Efecto Eötvös . . . . .   | 22        |
| 1.3.9. Por la Presión Atmosférica . . . . .  | 23        |
| 1.3.10. Ruido por movimientos sísmicos, Ambiental o Antropogénico . . . . .                                      | 23        |
| 1.4. Gravímetros . . . . .   | 25        |
| 1.4.1. Gravímetros Relativos . . . . .   | 26        |
| 1.4.1.1. Funcionamiento de un Gravímetro LaCoste & Romberg . . . . .   | 26        |
| 1.4.2. Gravímetros Absolutos . . . . .   | 29        |
| 1.5. Algunos hechos históricos de la gravimetría . . . . .   | 30        |
| 1.5.1. Sobre los descubrimientos de <i>Monsieur Bouguer</i> en la expedición<br><i>de La Condamine</i> . . . . . | 30        |
| 1.5.2. Invención de Gravímetro de longitud-0 . . . . .   | 32        |
| 1.5.3. Gravímetro Lunar . . . . .  | 34        |
| 1.5.4. Gravímetros en la actualidad . . . . .  | 35        |
| 1.5.5. Gravímetros MEMS) . . . . .   | 36        |
| Referencias, Marco Teórico . . . . .   | 41        |
| <b>2. Algoritmo <i>Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo</i></b> . . . . .                                    | <b>49</b> |
| 2.1. Introducción . . . . .  | 50        |
| 2.2. Método directo . . . . .  | 51        |
| 2.3. Tipos de Movimientos de Vértices del Polígono . . . . .   | 53        |
| 2.4. Inferencia Bayesiana . . . . .  | 55        |
| 2.5. Algoritmo de Metropolis-Hastings . . . . .  | 56        |
| 2.6. Algoritmo <i>Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo</i> . . . . .   | 57        |
| 2.6.1. Verosimilitud . . . . .   | 57        |
| 2.6.2. Densidad a Priori . . . . .   | 57        |
| 2.6.3. Probabilidades para movimientos de Creación-Destrucción . . . . .   | 58        |
| 2.6.4. Probabilidad de aceptación . . . . .  | 58        |
| 2.6.5. Paralelización de funciones en Python . . . . .   | 59        |
| 2.7. Algoritmo Shamos-Hoey . . . . .   | 60        |
| 2.8. Pasos para la inversión gravimétrica . . . . .  | 62        |
| 2.9. Resultados y Perspectivas . . . . .   | 62        |
| Referencias, Algoritmo <i>Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo</i> . . . . .                                 | 69        |
| <b>3. Machine Learning</b> . . . . .   | <b>71</b> |
| 3.1. Introducción . . . . .  | 71        |
| 3.2. Base de Datos . . . . .   | 72        |
| 3.2.1. NOAA ( <i>National Oceanic and Atmospheric Administration</i> ) . . . . .                                 | 72        |

|   |            |
|---|------------|
| 3.2.2. SRTM ( <i>Shuttle Radar Topography Mission</i> ) . . . . .   | 74         |
| 3.3. Técnicas de <i>Machine Learning</i> para regresiones . . . . . | 79         |
| 3.3.1. Support Vector Machines (SVM) . . . . .                      | 79         |
| 3.3.1.1. Support Vector Regression (SVR) . . . . .                  | 80         |
| 3.4. Red Neuronal . . . . .   | 82         |
| 3.5. Resultados . . . . .   | 84         |
| 3.6. Perspectivas . . . . .   | 90         |
| Referencias, Machine Learning . . . . .                             | 91         |
| <br>  |            |
| <b>4. SHIMIA Gravimétrico</b>                                       | <b>93</b>  |
| 4.1. Que es SHIMIA? . . . . .                                       | 93         |
| 4.1.1. Simulaciones y Herramientas . . . . .                        | 94         |
| 4.2. Métodos . . . . .  | 96         |
| 4.3. Instrumentos . . . . .   | 97         |
| 4.3.1. Inteligencia Artificial . . . . .                            | 98         |
| 4.4. Justificación . . . . .  | 99         |
| Referencias, SHIMIA Gravimétrico . . . . .                          | 101        |
| <br>  |            |
| <b>Appendices</b>   | <b>103</b> |
| <br>  |            |
| <b>Apéndice Propuesta de Curso</b>                                  | <b>105</b> |
| <br>  |            |
| <b>Todas las Referencias</b>  | <b>109</b> |
| <br>  |            |
| <b>Índice Alfabético</b>  | <b>119</b> |



# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Representación del Elipsoide y Geoide en relación con la topografía de la Tierra . . . . .  | 7  |
| 1.2. Valor de la gravedad para las fórmulas de 1930 a 1980 y sus diferencias. . .  | 11 |
| 1.3. Valor de la gravedad para las fórmulas de 1980 a 1984 y sus diferencias. . .  | 11 |
| 1.4. Anomalía de aire libre representada en sección transversal de la corteza . .  | 15 |
| 1.5. Anomalías simple y completa de Bouguer representada en sección transversal de la corteza. . . . .   | 16 |
| 1.6. Plantillas para cálculo de corrección topográfica. . . . .  | 18 |
| 1.7. Modelos de compensación isostática de cargas topográficas de Airy y Pratt.  | 19 |
| 1.8. Efecto de la deriva instrumental y mareas terrestres lunisulares. . . . .   | 22 |
| 1.9. Interior del gravímetro. . . . .  | 25 |
| 1.10. Configuración del resorte simplificada para un resorte de longitud-0 en un gravímetro LaCoste & Romberg y Rigidez en un resorte comparada con uno normal . . . . . | 26 |
| 1.11. Gravímetro absoluto de caída libre y diagrama del interferómetro con retroreflector en caída libre . . . . .   | 29 |
| 1.12. Péndulo de Bouguer mostrado en <i>La Figure de la Terre</i> . . . . .  | 31 |
| 1.13. Fotografías de El gravímetro relativo moderno fue desarrollado por Lucien LaCoste, Arnold Romberg y sus inventos. . . . .  | 32 |
| 1.14. Diagrama básico del Gravímetro LaCoste & Romberg y elaboración del Resorte de longitud-0 . . . . .   | 33 |
| 1.15. Instalación de aparatos en el socavón del piso 500 de la mina “Tiro hermoso”   | 33 |

## Índice de figuras

---

|  |    |
|--|----|
| 1.16. Gravímetro transversal Lunar del Apollo17 . . . . .  | 34 |
| 1.17. Scintrex CG5 y CG6 . . . . .   | 35 |
| 1.18. nano-acelerómetro LIS331DLH XY . . . . .   | 37 |
| 1.19. Bosquejo básico de un acelerómetro microelectromecánico (MEMS) . . . . .   | 37 |
| 1.20. Diseño de Gravímetro MEMS con interferómetro según Middlemiss 2018 . . . . .   | 38 |
| 1.21. Diseño y montaje de Gravímetro MEMS según Tang 2019 . . . . .  | 39 |
|  |    |
| 2.1. Polígono creado en GeoGebra . . . . .   | 50 |
| 2.2. Modelo definido por un polígono bajo tierra y sus anomalías de gravedad . . . . .   | 51 |
| 2.3. Modelo definido por un polígono con bucles . . . . .  | 52 |
| 2.4. Posibles movimientos simples . . . . .  | 53 |
| 2.5. Posibles movimientos de creación . . . . .  | 54 |
| 2.6. Movimiento de destrucción . . . . .   | 54 |
| 2.7. Intersección entre dos segmentos . . . . .  | 60 |
| 2.8. Operación del Algoritmo Shamos-Hoey . . . . .   | 61 |
| 2.9. Evolución de funciones . . . . .  | 63 |
| 2.10. Tiempo de cómputo con media móvil para cada 10 iteraciones exitosas. . . . .   | 63 |
| 2.11. Ejemplo de recorrido del centroide y punto medio de los vértices de los polígonos durante la simulación . . . . .                                | 64 |
| 2.12. Ejemplo de frecuencias en los tipos de movimiento durante la simulación. . . . .   | 65 |
| 2.13. Ejemplo de evolución del número de vértices por iteración y su histograma del número de vértices de los polígonos durante la simulación. . . . . | 65 |
| 2.14. Ejemplo de errores numéricos durante la simulación. . . . .  | 66 |
| 2.15. Ejemplo de uno de los resultados aceptables tras ejecutar el algoritmo RJMCMC con información del polígono objetivo. . . . .                     | 67 |
| 2.16. Ejemplo de uno de los resultados aceptables tras ejecutar el algoritmo RJMCMC sin información del polígono objetivo. . . . .                     | 67 |
|  |    |
| 3.1. Distribución de la base de datos en Colombia y Antioquia . . . . .  | 73 |
| 3.2. Corrección de datos faltantes en la base de datos SRTM . . . . .  | 74 |
| 3.3. Mapas de anomalías de aire libre . . . . .  | 76 |
| 3.4. Mapas de anomalías simples de Bouguer . . . . .   | 77 |
| 3.5. Mapas de anomalías simples de Bouguer . . . . .   | 78 |
| 3.6. Un ejemplo de clasificación en dos dimensiones. . . . .   | 80 |
| 3.7. Diagrama de la red neuronal . . . . .   | 82 |
| 3.8. Función de activación Softplus con distintos valores de $\beta$ . . . . .   | 83 |
| 3.9. Mapas de algunos resultados del área de estudio . . . . .   | 85 |

|   |    |
|---|----|
| 3.10. Épocas de la red neuronal durante el entrenamiento . . . . .  | 88 |
| 3.11. Mapa de NeuralNetwork para Colombia . . . . .   | 89 |
| 3.12. Histogramas de las diferencias entre predicción y grupo Test de las anomalías gravimétricas . . . . . | 90 |
| 4.1. Ejemplo de Actividad en GeoGebra para aprender sobre el Geoide y el elipsoide de referencia. . . . .   | 95 |
| 4.2. Ejemplo con Gradio y GeoGebra para la ecuación Talwani . . . . .                                       | 96 |
| 4.3. Captura de pantalla del Gravímetro LabVIEW . . . . .   | 98 |





# Índice de tablas

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Valor de los parámetros para fórmulas de 1930-1980 . . . . .  | 9  |
| 1.2. Valor de los parámetros para fórmula aproximada de 1980* . . . . .  | 9  |
| 1.3. Valor de los parámetros para fórmula Somigliana . . . . .   | 10 |
| 1.4. Valor de los parámetros $k$ y $e^2$ para fórmula de 1984 . . . . .  | 10 |
| 1.5. Correcciones atmosféricas en función de la elevación sobre el nivel del mar   | 23 |
| 2.1. Probabilidades de movimiento según número de vértices . . . . .   | 55 |
| 2.2. Descripción de cambios en el orden total al buscar una intersección entre<br>segmentos en el ejemplo del algoritmo Shamos-Hoey de la Figura 2.8 . . . . | 61 |
| 3.1. Errores en elevaciones para el modelo de digital SRTM . . . . .   | 75 |
| 3.2. Resultados estadísticos de los regresores SVR y la red neuronal . . . . .   | 87 |



# Nomenclatura

## Acrónimos / Abreviaciones

|       |  |
|-------|--|
| CIPM  | <i>International Committee for Weights and Measures</i>  |
| DANE  | Departamento Administrativo Nacional de Estadística      |
| DEM   | <i>Digital Elevation Model</i>                           |
| EGM   | <i>Earth Gravitational Model</i>                         |
| FACom | Grupo de Física y Astrofísica Computacional              |
| FCEN  | Facultad de Ciencias Exactas y Naturales                 |
| GICM  | Grupo Instrumentación Científica y Microelectrónica      |
| GRS80 | <i>Geodetic Reference System 1980</i>                    |
| GRS84 | <i>Geodetic Reference System 1984</i>                    |
| IA    | Inteligencia Artificial                                  |
| IRIS  | <i>Incorporated Research Institutions for Seismology</i> |
| IV    | Instrumento Virtual                                      |
| LC&R  | <i>LaCoste &amp; Romberg</i>                             |
| LED   | <i>Light-Emitting Diode</i>                              |

## Nomenclatura

---

|        |  |
|--------|--|
| LiDAR  | <i>Light Detection And Ranging</i>   |
| MEMS   | <i>Microelectromechanical Systems</i>  |
| MGN    | Marco Geoestadístico Nacional, DANE  |
| ML     | <i>Machine Learning</i>  |
| MSE    | <i>Mean Squared Error</i>  |
| NASA   | <i>National Aeronautics and Space Administration</i>                             |
| NEMS   | <i>Nanoelectromechanical Systems</i>   |
| NIST   | <i>National Institute of Standards and Technolog</i>                             |
| NOAA   | <i>National Oceanic and Atmospheric Administration</i>                           |
| OVSM   | Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Manizales                            |
| OVSP   | Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Pasto                                |
| QPD    | <i>Quadrant Photodiodes</i>  |
| RJMCMC | <i>Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo</i>                                  |
| SEAP   | <i>Solar, Earth and Planetary Physics</i> (Física Solar, Terrestre y Planetaria) |
| SGC    | Servicio Geológico Colombiano  |
| SHIMIA | Simulaciones, Herramientas, Instrumentos, Métodos e Inteligencia Artificial      |
| SRTM   | <i>Shuttle Radar Topography Mission</i>  |
| SVM    | <i>Support Vector Machines</i>   |
| SVR    | <i>Support Vector Regression</i>   |
| TBB    | <i>Intel Threading Building Blocks</i>   |
| UdeA   | Universidad de Antioquia   |

# Introducción

Como un aporte a los ejes misionales de la Universidad: docencia, extensión, investigación, y con apropiación social del conocimiento, y haciendo uso de nuevas tecnologías, se diseñó e implementó SHIMIA Gravimétrico, un conjunto de simulaciones, herramientas, instrumentos, métodos e inteligencia artificial con temas relacionados con el método geofísico de gravimetría.

SHIMIA es: simulaciones matemáticas en Python de teoría gravimetría en forma interactiva, inversión gravimétrica y regresión de bases de datos utilizando inteligencia artificial. Además de una simulación de un gravímetro en LabVIEW.

Herramientas, como Colab y ejemplos interactivos empleando Gradio, relacionados con aspectos fundamentales del método gravimétrico en geofísica, los cuales incluyen las principales correcciones y reducciones en gravimetría. Estos pueden ser accedidos libremente a través de un repositorio de GitHub \* para aplicarse a cursos de gravimetría para que sean de fácil acceso por los estudiantes y en general para la comunidad científica interesada en el tema.

Instrumentos, con LabVIEW se diseñó un instrumento virtual (IV) de un gravímetro relativo con resorte de longitud cero que emula de modo muy aproximado el comportamiento de un equipo real. Este primer acercamiento le dará al estudiante una mejor visión de cómo usar un gravímetro.

Métodos, la idea es realizar inversiones gravimétricas en 2D sencillas solamente con sugerir la forma del modelo definido por polígonos bajo la superficie con un contraste de

---

\*<https://edwardptera.github.io/SHIMIA-Gravimetrico>

## Nomenclatura

---

densidad utilizando métodos de estadística Bayesiana, en particular el algoritmo *reversible jump Markov chain Monte Carlo* expuesto por Luo [Luo10], con algunas modificaciones.

Inteligencia Artificial (IA) implementada como regresores para rellenar bases de datos de anomalías gravimétricas con datos libres obtenidos de NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*) en Colombia, con registros del Instituto Geográfico Agustín Codazzi durante los años 1958 a 1996 y datos de SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission*) empleando la librería de Python `srtm.py` en GitHub por Tomo Krajina[Kra20].

SHIMIA tiene aplicaciones en Docencia; las herramientas de simulación e inteligencia artificial permitirán aplicarse en cursos básicos y avanzados. Estos cursos pueden ser de una gran variedad, desde geofísica, astronomía, ingenierías y laboratorios relacionados con el estudio del suelo.

Extensión: SHIMIA puede ser usado por una universidad para aplicarse en cursos a personas o entidades externas, interesadas en el área de la gravimetría o afines, para entrenamiento de personal y análisis de datos.

Investigación: SHIMIA permite a los grupos entrenar a sus miembros para futuras campañas de medida, SHIMIA es también una robusta herramienta para el análisis de datos gravimétricos.

Apropiación social del conocimiento: SHIMIA servirá como apoyo en trabajos geocientíficos de carácter geofísico o geodinámico e incluso prestar servicios a empresas que quieran desarrollar trabajos comparativos desde la inteligencia artificial.

Así mismo, se trata de realizar un aporte a la didáctica de las geociencias, que permita una mejor apropiación del conocimiento geocientífico aplicados a cursos de gravimetría utilizando las herramientas anteriormente citadas.

*I constructed a physical pendulum and used it to make a “precision” measurement of gravity. The years of experience building things taught me skills that were directly applicable to the construction of the pendulum. Twenty-five years later, I was to develop a refined version of this measurement using laser-cooled atoms in an atomic fountain interferometer*

---

Steven Chu – (Wikiquote)  
Biographical, Nobleprize.org.

# Capítulo 1

## Marco Teórico

---

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Sobre la Gravimetría . . . . .   | 4  |
| 1.2. Fórmulas de Gravedad Teórica . . . . .                                 | 6  |
| 1.2.1. Fórmulas de 1930-1980 . . . . .                                      | 8  |
| 1.2.2. Otra Fórmula para año 1980* con una mejor aproximación . . . . .     | 9  |
| 1.2.3. Fórmula Somigliana para GSR80 . . . . .                              | 10 |
| 1.2.4. Fórmula de 1984 . . . . .  | 10 |
| 1.3. Correcciones, reducciones y ruidos a tener en cuenta . . . . .         | 12 |
| 1.3.1. Dependencia por la latitud y elevación . . . . .                     | 13 |
| 1.3.2. Corrección y anomalía de Aire Libre . . . . .                        | 14 |
| 1.3.3. Corrección y anomalía de Bouguer . . . . .                           | 16 |
| 1.3.4. Corrección Topográfica . . . . .                                     | 17 |
| 1.3.5. Anomalía Isostática . . . . .  | 19 |
| 1.3.6. Por deriva instrumental . . . . .                                    | 20 |
| 1.3.7. Por mareas terrestres . . . . .                                      | 21 |
| 1.3.8. Por Efecto Eötvös . . . . .  | 22 |
| 1.3.9. Por la Presión Atmosférica . . . . .                                 | 23 |
| 1.3.10. Ruido por movimientos sísmicos, Ambiental o Antropogénico . . . . . | 23 |
| 1.4. Gravímetros . . . . .  | 25 |
| 1.4.1. Gravímetros Relativos . . . . .                                      | 26 |
| 1.4.1.1. Funcionamiento de un Gravímetro LaCoste & Romberg . . . . .        | 26 |
| 1.4.2. Gravímetros Absolutos . . . . .                                      | 29 |
| 1.5. Algunos hechos históricos de la gravimetría . . . . .                  | 30 |

|   |    |
|---|----|
| 1.5.1. Sobre los descubrimientos de <i>Monsieur Bouguer</i> en la expedición de <i>La Condamine</i> . . . | 30 |
| 1.5.2. Invención de Gravímetro de longitud-0 . . . . .  | 32 |
| 1.5.3. Gravímetro Lunar . . . . .   | 34 |
| 1.5.4. Gravímetros en la actualidad . . . . .   | 35 |
| 1.5.5. Gravímetros MEMS) . . . . .  | 36 |
| Referencias, Marco Teórico . . . . .  | 41 |

---

### 1.1. Sobre la Gravimetría

La gravimetría estudia la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Tierra con fines geofísicos, geodésicos o geodinámicos [Tor89; SAT20]. La aplicación geofísica de este método pasivo es la determinación de contrastes de densidad en el subsuelo como apoyo en la resolución de diversos problemas de carácter geocientífico. Debido a que la Tierra no es homogénea, ni es una esfera perfecta y además está rotando, el valor de la gravedad terrestre varía de un lugar a otro. Las variaciones de la gravedad incluyen el efecto debido a la altura con respecto a un nivel de referencia, la atracción lunisolar, topografía y diversas inhomogeneidades en el subsuelo [Fro98; SAT20].

Las anomalías de gravedad resultan de la diferencia entre los valores de aceleración de la gravedad esperados por la teoría según un modelo de Tierra dado y los valores de aceleración de la gravedad tomados en campo, por el aire, mar, o incluso medidos desde satélites, con el uso de gravímetros relativos. Las anomalías de gravedad corresponden a contrastes de densidad en la corteza o en el manto superior [BLA96].

El objetivo de medir pequeñas variaciones del valor de la gravedad en varios puntos de una zona, o a lo largo del tiempo, es encontrar anomalías bajo la superficie, también es posible encontrar periodicidades provocadas por el efecto de mareas de la Luna y el Sol [Lon59; BLA96; BS11].

Existen diversos factores que pueden enmascarar las anomalías de gravedad debidas a contrastes de densidad. Estos factores son debidos a ruidos ambientales y antropogénicos, efecto de mareas terrestres y de carga oceánica, y movimientos telúricos, también se encuentran correcciones por derivas instrumentales y perturbaciones por la temperatura y la presión [Lon59; Mor80; BLA96; Wei+16; Lec+20; YIN20]. Esta es la razón por lo que se deben realizar correcciones y reducciones a los datos de gravedad medidos u obtenidos en una campaña de toma de datos.

Los gravímetros se clasifican en dos tipos, gravímetros absolutos y gravímetros relativos. El objetivo de un gravímetro absoluto es medir la aceleración de la gravedad terrestre en un punto concreto del planeta, son grandes y pesados. Los Gravímetros, absolutos y relativos, son dispositivos delicados, herméticos y climatizados, debido a esto, son equipos muy costosos.



A diferencia de los gravímetros relativos que miden el valor de aceleración de la gravedad directamente, el propósito de los gravímetros relativos es medir cambios en la aceleración de la gravedad en puntos o tiempos distintos.

Gravímetros relativos modernos (de las casas Scintrex y LaCoste & Romberg) tienen una precisión entre 1 a 2  $\mu\text{Gal}$  [LaC88; ASG99; Lac04; Van05; Mid+16] (donde 1 Gal = 1  $\text{cm}/\text{s}^2$ ).

Los gravímetros relativos miden variaciones espaciales o temporales de la gravedad terrestre, con respecto a un punto o a una medida inicial. Son portátiles y relativamente pequeños, estos últimos son los usados en campañas gravimétricas.

Los gravímetros absolutos, si embargo, están diseñados para estar anclados en laboratorios (generalmente subterráneos) o a bordo de barcos y aviones. También existen satélites construidos para medir la gravedad como el GRACE y el GRAIL desde la órbita terrestre y lunar respectivamente [ZH].

Existe una nueva generación de gravímetros miniaturizados llamados gravímetros microelectrónicos (MEMS) [Mid+16; Mid+17; Bra+18; Pra+18] inspirados en el mismo funcionamiento de acelerómetros para celulares.

Gracias a las mediciones hechas con gravímetros relativos, su procesamiento e interpretación, se puede tener una idea de la distribución de anomalías en el subsuelo, midiendo esos cambios no esperados en la aceleración de gravedad en la zona de estudio, las cuales pueden estar relacionadas con yacimientos minerales, de hidrocarburos, desplazamientos de masa en el subsuelo, delimitación de zonas arqueológicas; entre otras, permitiendo hallazgos de esos tipos.

En la actualidad, además de prospección de petróleo y minas, los gravímetros se usan (acompañados con otras técnicas) en geofísica para encontrar anomalías gravitacionales, para aplicaciones en estudios de tectónica, para entender un poco más el fenómeno volcánico [RW00] y estudiar variaciones temporales de la gravedad que nos permita modelar un sistema magmático. Aporta conocimiento también en geotermia, búsqueda de aguas subterráneas, yacimientos arqueológicos, entre otros.

Para calcular la gravedad en la tierra es necesario tener en cuenta una primera aproximación que consiste en ajustar un elipsoide [Age83] a la forma de la Tierra, y partir de ahí, crear un modelo teórico simplificado, cabe destacar que los centros del elipsoide y de la Tierra no coinciden necesariamente. Además, se define otra superficie llamada elipsoide, un equipotencial de gravedad ajustado al nivel del mar (Figura 1.1).

### 1.2. Fórmulas de Gravedad Teórica

Originalmente, durante la doceava reunión 1887 de Comité Internacional de Pesos y Medidas (CIPM) [mes88] se decidió definir (original en francés y traducción libre):

*La valeur de cette intensité normale de la pesallteur est égale à celle de l'intensité de la pesanteur au Bureau international (cote de niveau du pavillon de Breteuil) divisée par 1.0003322, coefficient qui provient de la réduction théorique à la latitude de 45° et au niveau de la mer.*

---

El valor de esta intensidad de gravedad estándar es igual al de la intensidad de gravedad en la Oficina Internacional (cota de altura del pabellón Breteuil) dividido por 1.0003322, coeficiente que resulta de la reducción teórica a la latitud de 45° y al nivel del mar.

Actualmente y según el catálogo de valores recomendados por CODATA2018 [Tie+21] (Comité de Información para Ciencia y Tecnología), valor adoptado por el Servicio Internacional de Pesos y Medidas, NIST, en inglés: *National Institute of Standards and Technology*, el valor de la aceleración estándar de la gravedad en la Tierra (caída libre) está definido directamente como:

$$g_n = 980.665 \text{ Gal}^*$$

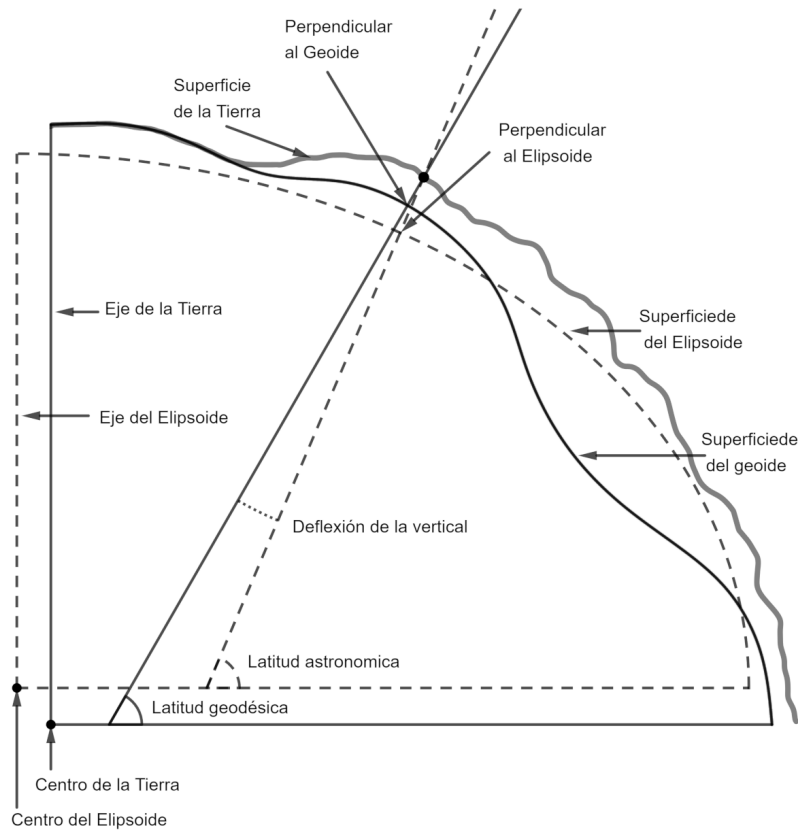
que corresponde con un modelo de Tierra esférica, sin rotación y homogénea [Tie+21]. Esto indica, que los gravímetros necesitan medir cambios cientos de miles de veces menor que la gravedad de la Tierra como para observar diferencias significativas en el valor teórico.

Para calcular el valor de la aceleración en función de la latitud, existen varias aproximaciones a lo largo de la historia que definen una ecuación para el valor teórico de la gravedad en algún concreto punto de la Tierra, suponiendo una forma elipsoidal para su superficie. Se ha tratado de hacer un formalismo para calcular la gravedad teórica en un punto terrestre.

Las fórmulas de la gravedad terrestre vienen a partir de la suposición inicial de considerar a la Tierra no como una esfera perfecta, sino como un esferoide oblató, un elipsoide, modelo cuyos parámetros se han refinado con el paso de los años, a partir de ahí las ecuaciones son modelos matemáticos exactos o aproximados (para facilitar su cómputo).

---

\*<https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?gn>



**Figura 1.1** Representación del Elipsoide y Geoide en relación con la topografía de la Tierra. Inspirado en figuras de *Geodesy for the Layman* [Age83]. La escala es exagerada para mostrar las diferencias entre las distintas superficies.

La superficie aproximadamente elipsoidal de la Tierra es debida en gran parte a su rotación, deformación que es más prominente en algunas lunas del sistema solar, así como deformaciones por efecto de mareas terrestres, más pequeñas, pero que tienen que ser tomadas en cuenta al medir con precisión la gravedad a lo largo del tiempo.

El valor de la gravedad teórica aproximado (a partir del cálculo de potencial en una región elipsoidal) de la gravedad  $\gamma_0(\varphi)$  en función de la latitud geodésica  $\varphi$  es [BLA96]:

$$\gamma_0(\varphi) = \gamma_a(1 + \beta_0 \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi + \dots) \quad (1.1)$$

Donde  $\beta_i$  son los coeficientes de la expansión, parámetros ajustados según el modelo de cada campaña geodésica, y  $\varphi$  latitud geodésica, que esta definida por el ángulo entre el plano normal (al punto en la superficie del elipsoide que se mide) y el plano ecuatorial, que no coincide necesariamente con el centro del elipsoide, y no debe confundirse con la latitud geocéntrica o astronómica que si lo hacen.

## Marco Teórico

---

Por otro lado, la fórmula teórica de la gravedad que viene de la teoría dada por Pizzeti en 1894 del equipotencial en un elipsoide y elaborada posteriormente por Carlo Somigliana (20 de septiembre de 1860 - 20 de junio de 1955) en 1929 [Mor80; Age91].

La gravedad teórica  $\gamma_0$  según la fórmula Somigliana medida en la latitud geodésica  $\varphi$ .

$$\gamma_0(\varphi) = \frac{a\gamma_a \cos^2(\varphi) + b\gamma_b \sin^2(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}} \quad (1.2)$$

o de otra forma (más conveniente para calcular numéricamente),

$$\gamma_0(\varphi) = \gamma_a \frac{1 + k \cdot \sin^2(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}}, \quad (1.3)$$

es decir:

$$k = \frac{b\gamma_b}{a\gamma_a} - 1, \quad (1.4)$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad (1.5)$$

donde,

- $e$ : Excentricidad
- $a$ : Radio ecuatorial (semieje mayor)
- $b$ : Radio polar (semieje menos)
- $k$ : Constante sin nombre [Age91]
- $\gamma_a$ : Gravedad ecuatorial
- $\gamma_b$ : Gravedad polar

Para estas ecuaciones no se ha tenido en cuenta el cálculo de la proporción de errores ni la incertidumbre reportada de los valores de sus parámetros.

### 1.2.1. Fórmulas de 1930-1980

Las fórmulas de gravedad teórica  $\gamma_0(\varphi)$  que corresponden a las expresiones de los años 1930, 1948, 1967 y 1980 implementan la siguiente aproximación para el elipsoide [Age83; BLA96; Fro98]:

$$\gamma_0(\varphi) \approx \gamma_a (1 + \beta_0 \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi) \quad (1.6)$$

Donde  $\varphi$  es la latitud geodésica,  $\gamma_a$  es el valor de la gravedad medido en el ecuador (semieje mayor del elipsoide) y  $\beta_i$  son los valores de la expansión. En la Tabla 1.1, se muestran los valores de los parámetros utilizados en la Fórmula 1.6 según el año.

## 1.2 Fórmulas de Gravedad Teórica

|                      |  |
|----------------------|--|
| 1930 (Cassinis 1930) | $\gamma_a = 978.049$ Gal, $\beta_0 = 5.2884 \times 10^{-3}$ , $\beta_1 = -5.9 \times 10^{-6}$  |
| 1948 (Jeffreys 1948) | $\gamma_a = 978.0373$ Gal, $\beta_0 = 5.2891 \times 10^{-3}$ , $\beta_1 = -5.9 \times 10^{-6}$ |
| 1967 (GRS67)         | $\gamma_a = 978.0318$ Gal, $\beta_0 = 5.3024 \times 10^{-3}$ , $\beta_1 = -5.9 \times 10^{-6}$ |
| 1980 (GRS80)         | $\gamma_a = 978.032$ Gal, $\beta_0 = 5.3024 \times 10^{-3}$ , $\beta_1 = -5.8 \times 10^{-6}$  |

**Tabla 1.1** Valor de los parámetros para fórmulas de 1930-1980 según la campaña geodésica [Age83; BLA96; Fro98].

### 1.2.2. Otra Fórmula para año 1980\* con una mejor aproximación

Una mejor aproximación del valor teórico de la gravedad para el modelo (Datum) de 1980, con más parámetros en la expansión del potencial de gravedad para un elipsoide, se tiene la siguiente expresión [Mor80]:

$$\gamma_0(\varphi) = \gamma_a \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \sin^{2n} \varphi \right), \quad (1.7)$$

truncando en  $n=4$

$$\gamma_0(\varphi) \simeq \gamma_a \left( 1 + C_2 \sin^2 \varphi + C_4 \sin^4 \varphi + C_6 \sin^6 \varphi + C_8 \sin^8 \varphi \right), \quad (1.8)$$

que es una mejor aproximación a la Fórmula 1.6, nótese la diferencia en la cantidad de parámetros, las potencias de los senos y los factores en sus ángulos. Los valores de los parámetros en esta nueva aproximación es:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2}e^2 + k, & C_4 &= \frac{3}{8}e^4 + \frac{1}{2}e^2k, \\ C_6 &= \frac{5}{16}e^6 + \frac{3}{8}e^4k, & C_8 &= \frac{35}{128}e^8 + \frac{5}{16}e^6k, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$\gamma_a$  es la aceleración de la gravedad en el ecuador,  $e$  es la excentricidad,  $k$  es la constante de la ecuación 1.4,  $C_{2n}$  son los valores de la expansión.

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $\gamma_a = 978.03267715$ Gal | $c_2 = 5.2790414 \times 10^{-3}$ , $c_4 = 2.32718 \times 10^{-5}$<br>$c_6 = 1.262 \times 10^{-7}$ , $c_8 = 7 \times 10^{-10}$ |
|-------------------------------|---|

**Tabla 1.2** Valor de los parámetros para fórmula aproximada de 1980\* con parámetros  $c_i$  ajustados al datum GRS80.

### 1.2.3. Fórmula Somigliana para GSR80

Usando directamente la fórmula Somigliana y según el elipsoide de referencia (Datum) GRS80 [Mor80], tenemos:

$$\gamma_0(\varphi) = \frac{a\gamma_a \cos^2(\varphi) + b\gamma_b \sin^2(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}} \quad (1.10)$$

|                    |    |                           |     |
|--------------------|----|---------------------------|-----|
| $a = 6378.137$     | km | $\gamma_a = 978.03267715$ | Gal |
| $b = 6356.7523141$ | km | $\gamma_b = 983.21863685$ | Gal |

**Tabla 1.3** Valor de los parámetros para fórmula Somigliana.  $a$  y  $b$  corresponden al radio ecuatorial y polar terrestre respectivamente.  $\gamma_a$  y  $\gamma_b$  corresponden a los valores de gravedad en la línea ecuatorial y en los polos respectivamente; ajustados al datum GRS80.

### 1.2.4. Fórmula de 1984

Para el año 1984 (datum GRS84) [Age91] la fórmula viene directamente de la ecuación Somigliana de la forma:

$$g_0 = \gamma_a \frac{1 + k \sin^2(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}}, \quad (1.11)$$

$$k = \frac{b\gamma_b}{a\gamma_a} - 1, \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}. \quad (1.12)$$

Donde  $k$  es constante (sin nombre [Age91]), y  $e$  la excentricidad.  $a$  y  $b$  son el semieje mayor (radio ecuatorial) y menor (radio polar) respectivamente.  $\gamma_a$  y  $\gamma_b$  corresponden a los valores de gravedad en la línea ecuatorial y polar respectivamente.

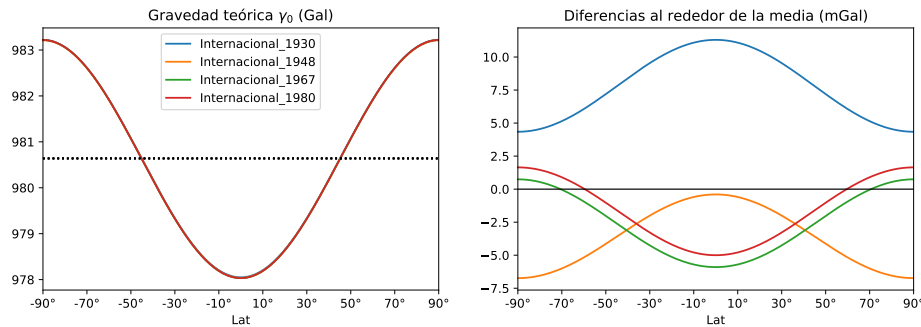
|                               |  |
|-------------------------------|--|
| $\gamma_a = 978.03267714$ Gal | $k = 1.93185138639 \times 10^{-3}$<br>$e^2 = 6.69437999013 \times 10^{-3}$ |
|-------------------------------|--|

**Tabla 1.4** Valor de los parámetros  $k$  y  $e^2$  para fórmula de 1984, ajustados al datum GRS84.

Posteriormente a estos años existen Modelos Gravitacionales de la Tierra, EGM por sus siglas en ingles con miles de parámetros [Pav+12].

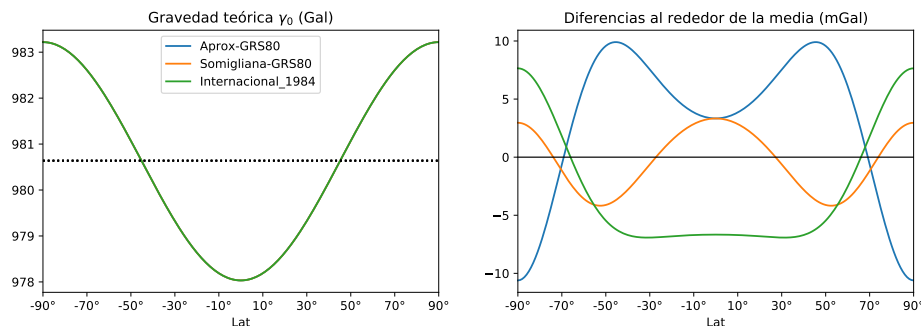
## 1.2 Fórmulas de Gravedad Teórica

Si se grafican los valores absolutos para las fórmulas citadas, no es posible distinguir las diferencias entre ellas (lado izquierdo de Figuras 1.2 y 1.3), se muestra como la gravedad disminuye a bajas latitudes por estar más lejos del centro de la Tierra y es más alta en los polos, a causa del achatamiento de los polos producto de la rotación terrestre, la gravedad promedio es línea punteada.



**Figura 1.2** Izquierda: Gráficos del valor de la gravedad en Gales para la fórmula de 1930, con gravedad promedio en línea punteada. Para los modelos de otros años la gráfica es visualmente idénticas, la gravedad promedio es línea punteada. Derecha: Diferencias en miligales ( $\text{mGal} = 1 \times 10^{-3} \text{ Gal}$ ) al rededor de la media de los valores teóricos de gravedad al rededor del promedio global para las fórmulas 1930 al 1980.

Además, se muestran diferencias al rededor de la media entre ellas (lado derecho de las Figuras 1.2 y 1.3), para las fórmulas más antiguas (1930 al 1980) las diferencias al rededor de la media están miligales (mGal). Pero las diferencias al rededor de la media de las formulas más nuevas están en nanogales (nGal), nótese como estas diferencias presentan más ondulaciones.



**Figura 1.3** Izquierda: Gráficos del valor de la gravedad en Gales para la fórmula de 1984, con gravedad promedio en línea punteada. Para los modelos de otros años la gráfica es visualmente idénticas, la gravedad promedio es línea punteada. Derecha: Diferencias en nanogales ( $\text{nGal} = 1 \times 10^{-9} \text{ Gal}$ ) al rededor de la media de los valores teóricos de gravedad al rededor del promedio global para las fórmulas de 1980 (aproximación con 4 parámetros y Somigliana) y la fórmula 1984.

### 1.3. Correcciones, reducciones y ruidos a tener en cuenta

Al medir la aceleración de la gravedad en una región concreta de la Tierra (o en cualquier otro mundo) hay varios factores para tener en cuenta que pueden perturbar esos valores y que pueden ser de nuestro interés, ya sea porque son nuestro objeto de estudio o, por el contrario, deseamos conocerlos para reducir su efecto sobre nuestras medidas realizadas [BLA96].

Las correcciones pueden ser de origen meramente físico: por la forma elipsoidal del planeta (esferoide oblato), por las irregularidades de la superficie e inhomogeneidades presentes en el subsuelo (topográficas y Bouguer), efectos gravitacionales de otros astros, esto es efectos de marea de la Luna y el Sol principalmente en el caso de la Tierra (para otros mundos, los modelos de mareas lunisulares no funcionan) [BLA96].

También hay que tener en cuenta que la forma en la que están diseñados los instrumentos y los principios físicos de los materiales donde fueron construidos, tienen un rango de acción y una incertidumbre indicada por el fabricante. Así que hay que tener en cuenta que el efecto de medir no es perfecto y los instrumentos cambian sus propiedades físicas con el paso del tiempo por efecto del desgaste (deriva instrumental).

En resumen, la gravedad observada puede verse como una serie de contribuciones debidas a distintos efectos [BLA96]

- Gravedad Observada = Atracción debido a un elipsoide de referencia en función de la latitud geográfica donde se mide.
- ± Elevación sobre el nivel del mar / geoide (aire libre).
  - ± Efectos por cuerpos de masa de diferentes densidades bajo tierra (Bouguer).
  - ± Cambios topográficos en el terreno circundante.
  - ± Efectos por como se distribuye la corteza oceánica y continental bajo tierra (equilibrio isostático).
  - ± Variaciones dependientes del tiempo provocadas por efecto de mareas (lunisulares principalmente).
  - ± Efectos propios del instrumento, como la deriva instrumental.
  - ± Cambios en la medida provocados por la aceleración centrífuga según sea el desplazamiento de la medida relativa (Efecto Eötvös).
  - ± Cambios en la atmósfera en función de la altura y el clima (como cambios en la presión y temperatura).
  - ± Ruidos provocados por sismos y movimiento ambiental o antropogénico.



### 1.3.1. Dependencia por la latitud y elevación

La distancia del centro de la Tierra a un punto en la superficie aumenta en latitudes altas, por su forma elipsoidal (achataamiento de los polos) producto de la rotación del planeta. De la misma forma, la aceleración de la gravedad se incrementa con la latitud.

Usando la ecuación 1.1 tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_0(\varphi)}{d\varphi} &\approx \frac{d}{d\varphi} \left[ \gamma_a (1 + \beta_0 \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi) \right] \\ &= \gamma_a (2\beta_0 \cos \varphi \sin \varphi + 4\beta_1 \cos 2\varphi \sin 2\varphi) \\ &= \gamma_a (\beta_0 \sin 2\varphi + 2\beta_1 \sin 4\varphi) \approx \gamma_a \beta_0 \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (1.13)$$

La dependencia de la latitud se mide según cambia la gravedad a razón de la longitud de arco de la latitud, luego [Net39; AB14]:

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{dg}{ds} = \frac{1}{r} \frac{d\gamma_0}{d\varphi} \approx \frac{1}{R_e} \frac{d\gamma_0}{d\varphi} \\ &= \frac{\gamma_a}{R_e} (\beta_0 \sin 2\varphi + 2\beta_1 \sin 4\varphi) \\ &\approx \frac{\gamma_a}{R_e} \beta_0 \sin 2\varphi, \\ &\approx 0.811 \sin 2\varphi \frac{\text{Gal}}{\text{m}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Donde  $R_e$  es el radio en el Ecuador,  $r$  el radio medio de la Tierra,  $\varphi$  es la latitud geodésica y  $s$  es su arco de circunferencia.

Para la dependencia de la elevación, por ejemplo, usamos la fórmula WELMEC (en Gales) con valores en los parámetros de las fórmulas 1967 y 1980, y que incluye cambios por altura  $h$  en metros en su ecuación [SL03]:

$$\gamma_w = 978.0318 \text{ Gal} \left[ 1 + 5.3024 \times 10^{-4} \sin^2 \varphi - 5.8 \times 10^{-6} \sin^2 2\varphi \right] - 3.082 \times 10^{-8} \frac{\text{Gal}}{\text{m}} h, \quad (1.15)$$

luego:

$$C_h = \frac{d\gamma_w}{dh} = -3.082 \times 10^{-8} \frac{\text{Gal}}{\text{m}} \quad (1.16)$$

La aceleración de la gravedad disminuye con la elevación.

### 1.3.2. Corrección y anomalía de Aire Libre

En una campaña gravimétrica a bordo de un barco, la altura sobre el nivel del mar (y por ende del geoide) es prácticamente cero, no tiene que considerarse efectos de altura, pero en la mayoría de los casos (en campanas gravimétricas en el continente y aéreas) es necesario tomarse en cuenta la disminución de la gravedad a medida que aumenta la altura.

Suponiendo el caso más aproximado, donde la tierra es esférica y homogénea con un radio  $r$  equivalente al radio medio de la Tierra, para medir la gravedad a una altura  $h$  desde el nivel del mar aproximamos con una serie de Taylor [BLA96]:

$$g(r+h) = g(r) + h \frac{\partial}{\partial r} g(r) + \dots \quad (1.17)$$

teniendo en cuenta los primeros términos y reordenando, tenemos

$$g(r) - g(r+h) = -h \frac{\partial}{\partial r} g(r) \quad (1.18)$$

suponiendo el caso más sencillo de una superficie esférica, donde  $g(r) = -GM/r^2$ , con  $G$  constante,  $M$  la masa total de la esfera y  $r$  la distancia (radio medio) desde el centro, esta aproximación solo tiene sentido para puntos más allá de la superficie de dicha esfera

$$g(r) - g(r+h) = - \underbrace{\frac{2g(r)}{r}}_{g_{fa}} h \quad (1.19)$$

Donde, el último término  $g_{fa}$ , es la corrección de aire libre [BLA96]:

$$g_{al}^0 = -2GMr^{-3}h = \pm 0.3086 \times 10^{-5} h \quad (1.20)$$

También es posible calcular un segundo término para la corrección de aire libre:

$$g_{al}^1 \propto \cos 2\phi h \approx \pm 0.0022 \times 10^{-5} \cos 2\phi h \quad (1.21)$$

Donde  $G = (6.67430 \pm 0.00015) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2\dagger}$  [Tie+21], es la constante de gravitación universal,  $M$  es la masa de la Tierra,  $r$  el radio medio de la Tierra, y  $h$  es la altura a partir de ese radio medio en metros.

---

<sup>†</sup><https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg>

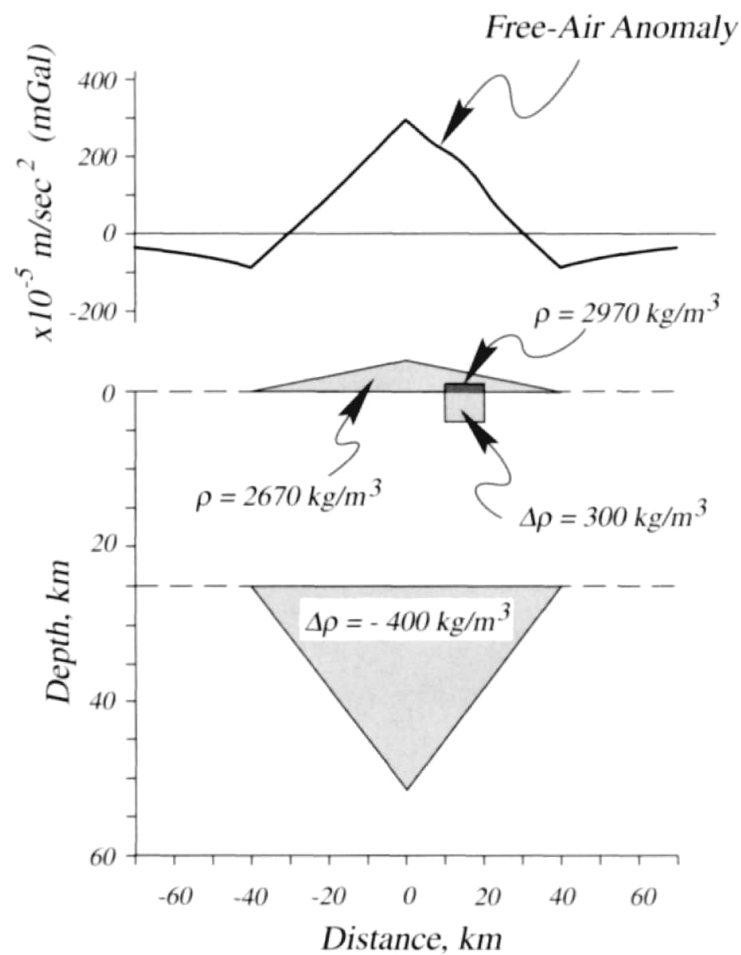
### 1.3 Correcciones, reducciones y ruidos a tener en cuenta

La anomalía de aire libre es definida de la siguiente forma:

$$\Delta g_{al} = g_{obs} - g_{al} - g_0 \quad (1.22)$$

Donde  $g_{obs}$  es la aceleración de la gravedad observada y  $g_0$  es la aceleración de la gravedad teórica. Cabe destacar el caso especial de mediciones a nivel del mar donde  $h = 0$  es también una anomalía de aire libre [BLA96]:

$$\begin{aligned} \Delta g_{al} &= g_{obs} - g_{al} - g_0 \\ &= g_{obs} - g_0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

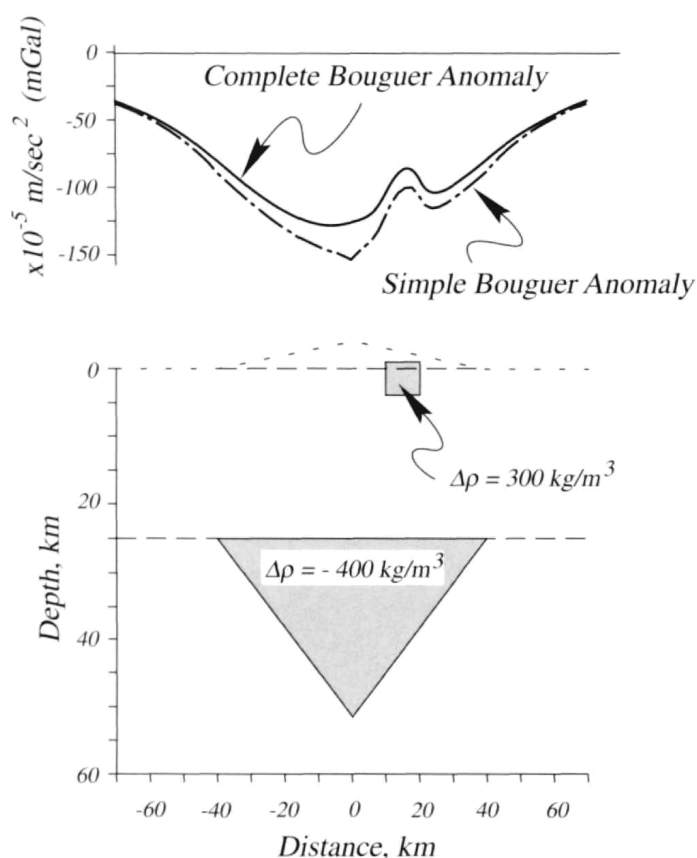


**Figura 1.4** Anomalía de aire libre representada en sección transversal de la corteza. La anomalía se debe al aumento de la elevación sobre el nivel del mar en el punto en el que se mide la gravedad. Tomado de la Figura 7.5 de *Potential theory in gravity & magnetic applications* BLAKELY [BLA96]

### 1.3.3. Corrección y anomalía de Bouguer

Anteriormente, hemos supuesto el planeta Tierra como un objeto elipsoidal (o por lo menos esférico) y perfectamente uniforme para simplificar cálculos.

Pero sabemos que así como la superficie de la Tierra no es un elipsoide perfecto, dentro de la Tierra la composición no es uniforme, existen cuerpos todos ellos de distintos materiales y densidades que modifican ligeramente el valor de la aceleración de la gravedad del planeta. Uno de los primeros en reportar esto, fue *Pierre Bouguer* durante trabajos geodésicos en Suramérica. Por ejemplo, se cuenta la anécdota que en uno de sus viajes se dio cuenta de que el Volcán Chimborazo ejercía cierta influencia de la gravedad vista a partir de la desviación de una plomada, o de la disminución del valor de la gravedad de Guayaquil a Quito no era tan grande como era esperado, concluyendo un efecto en la capa del subsuelo entre los dos puntos observados [BL49; Esp89].



**Figura 1.5** Anomalías simple y completa de Bouguer representada en sección transversal de la corteza. La anomalía de Bouguer incluye un componente negativa con una longitud de onda larga causada por “raíz” de baja densidad que compensa isostáticamente la topografía.

Tomado de la Figura 7.6 de *Potential theory in gravity & magnetic applications* BLAKELY [BLA96]

### 1.3 Correcciones, reducciones y ruidos a tener en cuenta

---

La corrección de Bouguer elimina la atracción que genera el material entre la estación de medida y el nivel de referencia [Esp89; BLA96].

Suponiendo una extensa placa horizontal infinita, de densidad  $\rho$  y espesor  $h$  uniforme.

$$\delta g_B = 2\pi G\rho h = \mp 0,4193\rho\delta h, \quad (1.24)$$

tomando  $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ , como un valor promedio para rocas graníticas, usado por razones históricas [Hin03], tenemos:

$$\delta g'_B = 5.34\pi Gh = \mp 0.1119 \times 10^{-5} \delta h \quad (1.25)$$

La corrección simple de Bouguer es definida de la siguiente forma [BLA96]:

$$\Delta g_{sb} = g_{obs} - g_{fa} - g_{sb} - g_0 \quad (1.26)$$

Donde  $g_{obs}$  es la aceleración de la gravedad observada,  $g_{fa}$  es la corrección de aire libre,  $g_{sb}$  es la corrección simple de Bouguer y  $g_0$  es la aceleración de la gravedad teórica.

La corrección simple de Bouguer no tiene en cuenta la topografía de la superficie de la Tierra y es necesario realizar una corrección topográfica  $g_t$ . Entonces, la corrección completa de Bouguer queda definida de la siguiente forma [BLA96]:

$$\Delta g_{sb} = g_{obs} - g_{fa} - g_{sb} - g_t - g_0 \quad (1.27)$$

La anomalía de Bouguer incluye un componente negativa con una longitud de onda larga causada por efectos isostáticos que compensan los topográficos. Queda ver entonces como calcular el efecto de la topografía y el de compensación isostática.

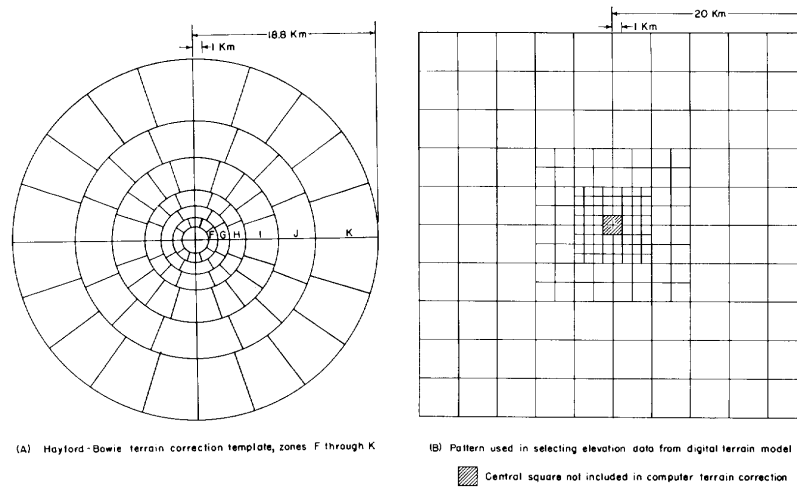
#### 1.3.4. Corrección Topográfica

Exceso o defecto de masa del terreno alrededor de la estación de medida en una plantilla radial o con métodos computacionales con plantillas cuadradas, con regiones más detalladas cerca al punto de estudio [Ham39; Kan62], varía entre los 0.05mGal y los 0.30mGal[AB14]. Gravímetros modernos ya realizan estas correcciones con bases de datos internas por el fabricante.

## Marco Teórico

Depende de catálogos cartográficos, topográficos o batimétricos preexistentes detallados en modelos de elevación digital DEM, (*Digital Elevation Model*) de alta precisión, del orden de los 30 a 90 metros<sup>‡</sup>.

La información topográfica se subdivide a partir de una rejilla anular, cuadrículada con mayor subdivisión hacia al centro (Figura 1.6) o rejillas más complejas llamadas *quad-tree* o *quad-grid* [PAL02] y luego, se definen prismas (no necesariamente planos) con diferente altura según la media de la zona.



**Figura 1.6** Plantillas para cálculo de corrección topográfica. Plantilla radial de Hayford-Bowie (izquierda). Plantilla cuadrículada de Kane (derecha).

Figura tomada y modificada de Kane 1962 - *A Comprehensive System of Terrain Corrections Using a Digital Computer* [Kan62].

La atracción de gravedad aproximada  $g_t$  por un prisma (de base plana) en la rejilla anular es [Kan62]:

$$g_t \approx 2GDA^2 - \frac{R_2 - R_1 + \sqrt{R_1^2 + H^2} - \sqrt{R_2^2 + H^2}}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1.28)$$

Donde  $G$  es la constante gravitacional universal,  $D$  es la densidad del prisma,  $A$  es la longitud del lado horizontal del prisma,  $R_1$  es radio del círculo interior del anillo anular,  $R_2$  es radio del círculo exterior del anillo anular, y  $H$  es la altura del anillo anular o prisma.

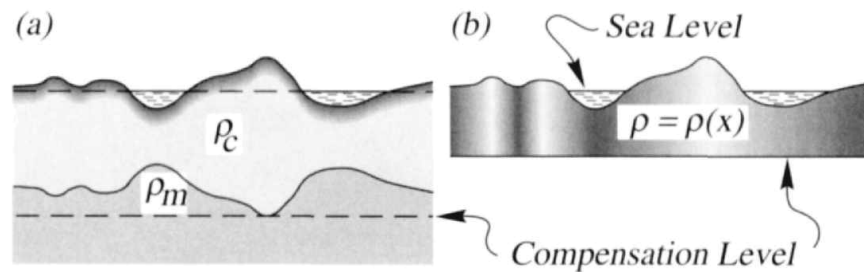
Los modelos de elevación digital vienen de muchas fuentes y pueden ser y sus bases de datos pueden ser de origen satelital, como *SRTM Shuttle Radar Topography Mission* o más detalladas con radares LiDAR (*Light Detection And Ranging*).

<sup>‡</sup>Ortega Estupiñán, Adriana Micaela, comunicación personal, 13 de abril de 2022

### 1.3.5. Anomalia Isostática

La isostasia es la condición de equilibrio gravitacional que se presenta en las capas superiores, corteza y manto superior de forma similar a como un objeto flota en equilibrio en un fluido de mayor densidad, dejando la mayor parte de su volumen bajo superficie. De mismo modo, la corteza se equilibra gravitacionalmente con las capas inferiores, dejando “raíces” en las zonas más montañosas o con mayores densidades en los puntos más altos y siendo por esto la corteza oceánica más delgada que la continental.

Existen dos modelos básicos que inicialmente trataron de describir el fenómeno, asumiendo algunas condiciones distintas entre sí, los modelos de Airy y Pratt.



**Figura 1.7** Modelos de compensación isostática de cargas topográficas de Airy (a), en función de las raíces con densidad constante y Pratt (b) con una densidad que varía lateralmente y es constante verticalmente. Tomado de la Figura 7.8 de *Potential theory in gravity & magnetic applications* BLAKELY [BLA96]

El modelo de Airy-Heiskanen supone que la compensación de masas se da a partir de ondulaciones de la interfaz corteza-manto a modo de raíces de baja densidad, mientras que debajo de las cuencas oceánicas profundas, el manto de alta densidad se deforma hacia arriba en la corteza de menor densidad, es decir en las plataformas continentales las raíces son mayores (más gruesas) y en las oceánicas son más delgadas (Figura 1.7 (a)) [BLA96].

Mientras el modelo de Pratt-Hayford vez tener en cuenta ondulaciones en la interfaz corteza-manto que considera constante, supone que la densidad varía lateralmente en la corteza para que cada sección vertical de la corteza tenga masa idéntica 1.7 (a)) [BLA96].

La realidad es mucho más compleja, aunque existen algunos lugares que se aproximan más a un modelo que a otro, se puede considerar una combinación de ambos, teniendo en cuenta no solo ondulaciones en la interfaz corteza-manto, sino también cambios (no lineales y discontinuos) en la densidad, no solo lateral sino verticalmente.

La anomalía isostática  $\Delta g_i$  es [BLA96]:

$$\Delta g_i = g_{\text{obs}} - g_{\text{fa}} - g_{\text{sb}} - g_{\text{t}} - g_i - g_0. \quad (1.29)$$

## Marco Teórico

---

Donde  $g_{\text{obs}}$  es la aceleración de la gravedad observada,  $g_{\text{fa}}$  es la corrección de aire libre,  $g_{\text{sb}}$  es la corrección simple de Bouguer,  $g_{\text{t}}$  es la corrección topográfica,  $g_{\text{i}}$  es la corrección isostática y  $g_0$  es la aceleración de la gravedad teórica.

La corrección isostática  $g_i$  se puede calcular con varios métodos, uno de ellos es con análisis de Fourier. [BLA96]:

$$g_i = \mathfrak{F}^{-1} \left[ 2\pi G e^{k|z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-|k|)^{n-1}}{n!} \mathfrak{F}[\rho(z_1^n - z_2^n)] \right].$$

Donde  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}^{-1}$  son las transformada de Fourier e inversa de Fourier Respectivamente,  $G$  es la constante de gravitación universal,  $g_i$  es la corrección isostática medida en la altura,  $z_0$ ,  $k$  es el número de onda en el dominio de Fourier y  $\rho(x, y)$  es densidad de un bloque de corteza confinado entre las superficies  $z_1(x, y)$  y  $Z_2(x, y)$ .

### 1.3.6. Por deriva instrumental

La deriva instrumental son las variaciones como efectos térmicos, mecánicos y eléctricos que afectan al sensor, o factores como el desgaste de materiales y el consecuente desajuste de las piezas del instrumento, o factores externos como los atmosféricos o las mareas [Tor89].

Para ello, durante las campañas gravimétricas es necesario tener un conjunto de estaciones base en la cual regresar cada cierto tiempo en forma de bucles escalonados para verificar como va variando la medida de un solo instrumento a lo largo de la toma de muestras y así crear un ajuste de deriva lineal en cada bucle [AB14]. En algunos estudios más detallados se tienen en cuenta efectos no lineales [Wei+16].

Dependiendo del gravímetro y como esté programado, la deriva instrumental puede calcularse a mano con los datos en bruto, teniendo en cuenta el factor de calibración proporcionado por el instrumento y convirtiendo el resultado a miligales (o unidad equivalente) a partir de la escala del instrumento; o calculado directamente por la computadora del gravímetro en caso de gravímetros modernos [Wei+16].

Otro caso que puede considerarse deriva instrumental son las mareas terrestres en rangos de pocas horas, donde las mareas pueden considerarse lineales [Wen78; BLA96]. Para tiempos más largos o más precisos se requiere un mayor análisis teórico.



### 1.3.7. Por mareas terrestres

La superficie de la Tierra en su parte sólida se deforma similar a como lo hace la superficie del agua y sufre deformaciones provocadas por la atracción gravitacional del Sol, la Luna y en menor medida el resto de astros [Wen78].

El efecto de las mareas nunca excede 0.3 mGal y para tiempos cortos (pocas horas) puede considerarse lineal e integrarse con otro tipo de derivas del mismo tipo, pero para periodos de tiempo más largos es necesario calcular teóricamente el efecto de mareas terrestres sobre el punto de observación [Lon59; BLA96; BS11].

A continuación mostramos un modelo teórico expuesto por Longman en 1959 [Lon59]. Las componentes verticales  $g_m$  y horizontal  $h_m$  de mareas lunares son:

$$g_m = GM_m r \left[ \frac{1}{d_s^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{2d_s^4} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \right], \quad (1.30)$$

$$h_m = GM_m r \left[ \frac{3}{2d_s^3} \sin 2\theta + \frac{3}{2d_s^4} (5 \cos^2 \theta - 1) \right]. \quad (1.31)$$

Donde  $G$  es la constante de gravitación,  $M_m$  es la masa lunar,  $d_m$  es la distancia entre el centro de la Tierra y la Luna,  $r$  es la distancia entre el centro de la Tierra y el punto de observación y  $\theta$  ángulo cenital de la Luna.

Las componentes verticales  $g_s$  y horizontal  $h_s$  de mareas solares son:

$$g_s = \frac{GM_s r}{d_s^3} (3 \cos^2 \phi - 1), \quad (1.32)$$

$$h_s = \frac{3}{2} \frac{GM_s r}{d_s^3} \sin 2\phi, \quad (1.33)$$

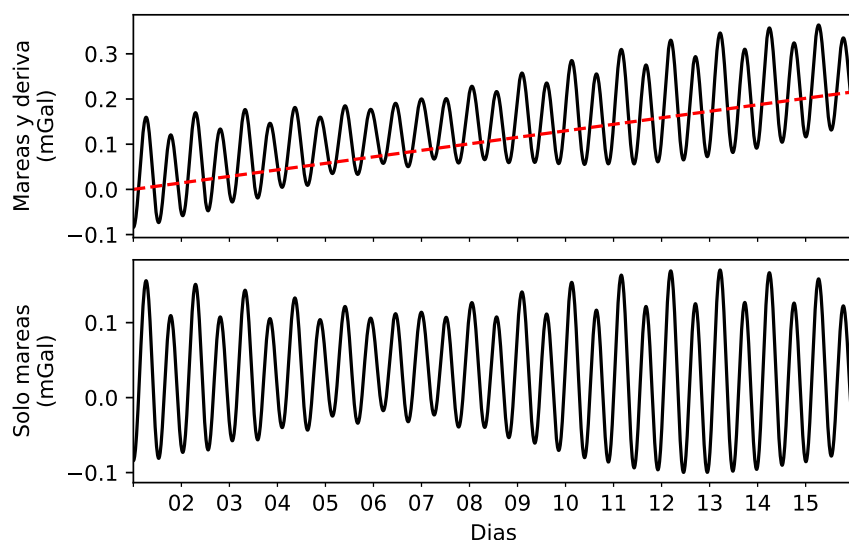
donde  $M_s$  es la masa solar,  $d_s$  es la distancia entre el centro de la Tierra y el Sol,  $r$  es la distancia entre el centro de la Tierra y el punto de observación y  $\phi$  ángulo cenital del Sol.

Las componentes verticales  $g_0$  y horizontal  $h_0$  de mareas lunisulares son:

$$g_0 = g_m + g_s, \quad (1.34)$$

$$h_0 = h_m + h_s. \quad (1.35)$$

Un ejemplo de mareas terrestres (componente vertical lunisolar) con y sin deriva instrumental puede verse en la Figura 1.8. Los gravímetros modernos Scintrex tienen instalado algoritmos y tablas para calcular mareas terrestres [Sci06].



**Figura 1.8** Efecto de la deriva instrumental y mareas terrestres lunisolares (arriba), deriva instrumental lineal (línea roja). Efecto de mareas terrestres lunisolares solamente (abajo).

Adoptado de figura en *Alsadi, H., & Baban, E. (2014) - Introduction to gravity exploration method* [AB14], creado usando *tidegravity* que implementa las ecuaciones de Longman[Lon59] en Python (<https://pypi.org/project/tidegravity/>).

### 1.3.8. Por Efecto Eötvös

La velocidad angular, con respecto al centro de la Tierra, de un observador que se mueve por a la superficie hacia el este es mayor que la de un observador que permanece “en reposo” en la superficie debido a la rotación de la Tierra.

En consecuencia, teniendo en cuenta la fuerza centrífuga, la atracción gravitatoria se reducirá ligeramente para el observador que se mueve este. Del mismo modo, la atracción gravitatoria aumentará ligeramente para un observador que se mueva en dirección oeste, este fenómeno es llamado Efecto Eötvös y es importante cuando el gravímetro está en movimiento con respecto a la superficie como en barcos, aviones y satélites [BLA96].

La corrección por Efecto Eötvös  $g_E$  en miligales (mGal), es:

$$g_E = 7.503v \cos \varphi \sin \alpha + 0.004154v^2, \quad (1.36)$$

donde  $v$  es la velocidad en nudos,  $\alpha$  es el ángulo del desplazamiento con respecto al norte verdadero y  $\varphi$  es la latitud [BLA96].

### 1.3.9. Por la Presión Atmosférica

Efectos de flotabilidad y resistencia del aire no son deseados en una medida gravimétrica, además las variaciones en la masa de toda la capa atmosférica y sus variaciones de presión según la altura en el tiempo tiene efectos en la medida de la aceleración de la gravedad [Wei+16].

Los gravímetros modernos tienen instalado algoritmos y tablas para calcular efectos atmosféricos. A continuación se muestra una tabla antigua (IAG, 1971) con correcciones atmosféricas en función de la elevación sobre el nivel del mar tomada de «Geodetic reference system 1980».[Mor80].

| $h$<br>(km) | $\delta g$<br>(mGal) | $h$<br>(km) | $\delta g$<br>(mGal) | $h$<br>(km) | $\delta g$<br>(mGal) | $h$<br>(km) | $\delta g$<br>(mGal) |
|-------------|----------------------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|
| 0.00        | 0.87                 | 5.00        | 0.47                 | 10.00       | 0.23                 | 20.00       | 0.05                 |
| 0.50        | 0.82                 | 5.50        | 0.44                 | 11.00       | 0.20                 | 22.00       | 0.03                 |
| 1.00        | 0.77                 | 6.00        | 0.41                 | 12.00       | 0.17                 | 24.00       | 0.02                 |
| 1.50        | 0.73                 | 6.50        | 0.38                 | 13.00       | 0.14                 | 26.00       | 0.02                 |
| 2.00        | 0.68                 | 7.00        | 0.36                 | 14.00       | 0.12                 | 28.00       | 0.01                 |
| 2.50        | 0.64                 | 7.50        | 0.33                 | 15.00       | 0.10                 | 30.00       | 0.01                 |
| 3.00        | 0.60                 | 8.00        | 0.31                 | 16.00       | 0.09                 | 32.00       | 0.01                 |
| 3.50        | 0.57                 | 8.50        | 0.29                 | 17.00       | 0.08                 | 34.00       | 0.00                 |
| 4.00        | 0.53                 | 9.00        | 0.27                 | 18.00       | 0.06                 | 37.00       | 0.00                 |
| 4.50        | 0.50                 | 9.50        | 0.25                 | 19.00       | 0.05                 | 40.00       | 0.00                 |

**Tabla 1.5** Correcciones atmosféricas en función de la elevación ( $h$ ) sobre el nivel del mar  $h$  según el IAG, 1971. Tomado de Moritz.

### 1.3.10. Ruido por movimientos sísmicos, Ambiental o Antropogénico

Movimientos en el terreno de diversas fuentes generan perturbaciones en los gravímetros, si durante una mediada ocurren, pueden ser desechadas y esperar a que el ruido sea lo suficientemente pequeño, pero no siempre es posible; y en gravímetros que miden la gravedad de forma “continua” (en intervalos de tiempo regulares), es necesario tener en cuenta el ruido en uno o varios modelos matemáticos, reconocer y entender sus fuentes para filtrarlos satisfactoriamente.

Los esfuerzos entre las fallas geológicas o actividad volcánica (tremor, por ejemplo) producen perturbaciones en las medidas de los gravímetros. Pueden filtrarse con datos obtenidos por sismómetros [Wei+16].

## Marco Teórico

---

Por ejemplo, Wei, Shen, Li y Ziwei proponen el siguiente modelo no lineal para el procesamiento de datos gravimétricos, el efecto gravimétrico  $g_{nl}$  de un sismo en el tiempo  $t_i$  [Wei+16]:

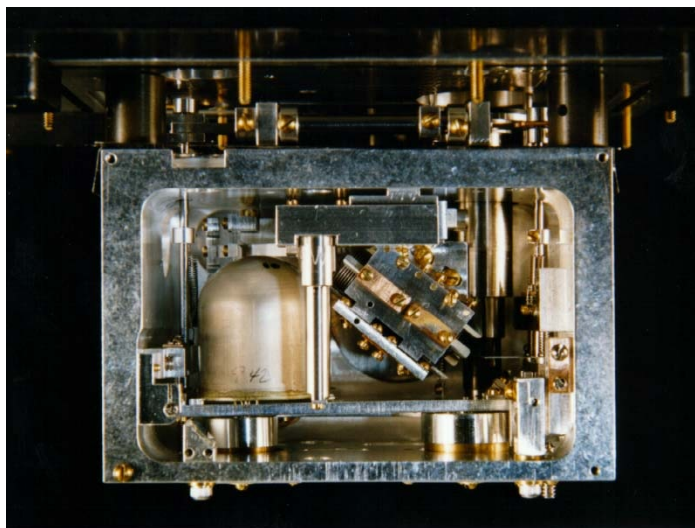
$$\begin{aligned} g_{nl}(t_i) = & d_0 + d_1 t_i \\ & + \sum_{j=1}^{N_{ab}} \left[ a_j \cos\left(\frac{2\pi}{T_j} t_i\right) + b_j \sin\left(\frac{2\pi}{T_j} t_i\right) \right] \\ & + \sum_{j=1}^{N_g} g_j H(t_i - T_{g_j}) + \sum_{j=1}^{N_h} h_j H(t_i - T_{h_j}) t_i \\ & + \sum_{j=1}^{N_k} k_j \exp\left[\frac{-(t_i - T_{k_j})}{\tau_j}\right] H(t_i - T_{k_j}) t_i. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Donde  $t_i$  es el tiempo en el minuto  $i$ ,  $H$  es la función de paso;  $d_0$  es el término constante de la secuencia de tiempo residual,  $d_1$  es el término lineal de los datos de observación de la gravedad, Los parámetros  $a_j$ ,  $b_j$  son factores de carga anuales o estacionales simulados en el residual mediante el uso de la función seno y coseno,  $g_j$  es el error de salto causado en el momento  $T_{g_j}$ . Cuando  $T_{g_j}$  es el momento sísmico,  $g_j$  es el cambio de gravedad coseísmico (provocado por los primeros movimientos de la ruptura inicial),  $h_j$  es la tasa de cambio de gravedad después del terremoto,  $k_j$  es la amplitud del proceso de relajación del resorte simulado usando la función exponencial después del terremoto;  $\tau_j$  es el tiempo de relajación del gravímetro de resorte después del terremoto.

Diversos procesos naturales provocan ruidos en el ambiente, como viento, la lluvia o el propio desplazamiento de seres vivos y medios de transporte e industria, entre otros, que inducen perturbaciones adicionales en el suelo, y son captados por los sensores gravimétricos. En gravímetros que miden continuamente, es importante tener en cuenta este tipo de ruidos.

Algunos tipos de ruido pueden considerarse de tipo aleatorio, pero en otros casos no es posible, sobre todo las relacionadas con humanos y demás seres vivos, lo que hace difícil filtrarlo. Estos tipos de ruido tienen ciertos patrones debido al comportamiento humano (por ejemplo los fines de semana y días festivos el ruido es menor) eventos inesperados como el COVID [Lec+20; YIN20], catástrofes climáticas o sociales cambian significativamente el comportamiento humano.

La intensidad del ruido puede ser más baja en casos de confinamiento, o más alto en caso de un conflicto armado, cuando suceden los modelos de filtrado preexistentes tienen que ser revisados. No es tanto la intensidad del ruido sino su comportamiento estadístico lo que dificulta su filtrado [Lec+20; YIN20].



**Figura 1.9** Interior del gravímetro LaCoste & Romberg. Este está sellado herméticamente, manteniendo la temperatura y presión constantes para reducir la deriva instrumental. Tomado del Manual LaCoste & Romberg 2004 [Lac04]

## 1.4. Gravímetros

Los gravímetros son instrumentos que permiten medir el valor de la aceleración de la gravedad en un punto concreto (valores absolutos) o compararlo con el valor de la gravedad, otro punto o momento (valores relativos). Están pensados para encontrar cambios en la densidad del subsuelo como apoyo en la resolución de diversos problemas de carácter geocientífico como puede ser prospección de petróleo o para estudiar cambios en zonas vulcanológicamente activas.

Algunos de los primeros gravímetros eran péndulos (simples, rígidos o compuestos) que permitían conocer el valor local de la gravedad al conocer el periodo de oscilación de una o varias configuraciones del sistema, algunos como el péndulo de Kater [Web+35] eran bastante complejos y precisos para su época (con relación a un péndulo simple).

Los gravímetros pueden clasificarse en dos tipos: absolutos y relativos.

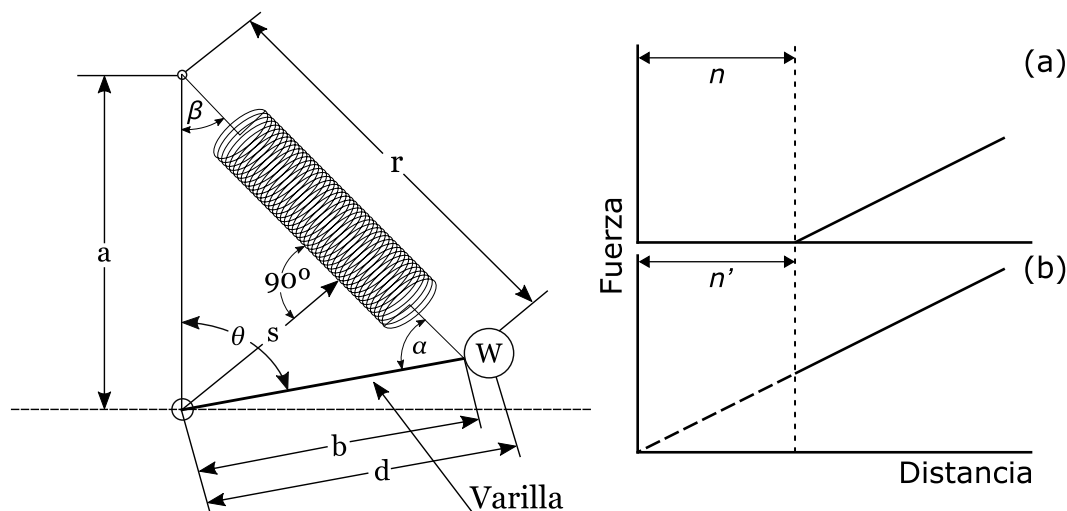
### 1.4.1. Gravímetros Relativos

El gravímetro relativo clásico, está basado en el llamado resorte de longitud-0. Los gravímetros relativos son dispositivos con resortes especialmente diseñados para facilitar los cálculos necesarios para medir variaciones en la aceleración de la gravedad usando resortes especiales sobre péndulos rígidos.

Los resortes pueden ser de longitud-0 (Figura 1.10 [LaC88; Lac04]) inventado por Lucien LaCoste [Lac04] o de cuarzo en caso de gravímetros Scintrex [Sci06]. Se diferencian de los gravímetros absolutos porque miden cambios en el valor de la gravedad (en torno a una estación base o a lo largo del tiempo) La Figura 1.9 muestra el interior un gravímetro LaCoste & Romberg.

Otros gravímetros relativos son los gravímetros superconductores, que se comportan como gravímetros mecánicos con resortes, solamente que la levitación magnética hace el papel de fuerza elástica. Funcionan suspendiendo una esfera superconductora diamagnética enfriada con helio líquido en un campo magnético extremadamente estable [Goo99; Vir06], son muy precisos  $1\mu\text{Gal}$  [Vir06; Car+19], pero bastante complejos en su diseño.

#### 1.4.1.1. Funcionamiento de un Gravímetro LaCoste & Romberg



**Figura 1.10** Configuración del resorte simplificado para un resorte de longitud-0 en un gravímetro LaCoste & Romberg (izquierda).

Rigidez en un resorte normal con longitud natural  $n$  (derecha-a) y en un resorte de longitud-0 con  $n = 0$  y  $n'$  representa la longitud del resorte cuando las espiras comienzan a separarse (derecha-b) Tomado del Manual LaCoste & Romberg 2004 [Lac04].

Los Gravímetros LaCoste & Romberg consisten en péndulos rígidos horizontales conectados a un resorte de longitud-0, sellado en una cámara hermética al vacío y con control de la temperatura. Un diagrama más detallado de un gravímetro LaCoste & Romberg puede verse en la Figura 1.14, pero su funcionamiento puede simplificarse como aparece en la Figura 1.10, lo que permite mayor claridad en el análisis de fuerzas.

Basándonos en el Manual LaCoste & Romberg de 2004 [Lac04] y en la patente US2293437A<sup>§</sup> [Luc41], encontremos la ecuación del resorte de longitud-0 en función de  $\theta$  (el ángulo entre la vertical y la varilla).

En primer lugar, teniendo en cuenta la Figura 1.10 se puede ver que:

$$\sin \beta = \frac{s}{a}, \quad (1.38)$$

y por ley de senos (en un triángulo la razón, entre cada lado y el seno de su ángulo opuesto, es constante), entonces:

$$\frac{\sin \theta}{r} = \frac{\sin \beta}{b}, \quad (1.39)$$

donde  $\beta$  es el ángulo formado por los lados  $a$  (la distancia de los fulcros de la varilla y el resorte alineados verticalmente) y  $r$  (el radio del resorte). La distancia mínima desde el fulcro de la varilla hasta el resorte es  $s$ , luego  $r$  y  $s$  son perpendiculares, su ángulo es  $90^\circ$ . La distancia desde el fulcro de la varilla hasta donde se conecta con el resorte es  $b$  y  $d$  es la distancia desde el fulcro de la varilla hasta el centro de la masa de prueba con peso  $W = mg$  (Figura 1.10).

De las anteriores relaciones podemos deducir que:

$$s = a \sin \beta, \quad r = b \frac{\sin \theta}{\sin \beta} \quad (1.40)$$

El torque por la fuerza de gravedad  $T_g$  es:

$$T_g = Wd \sin \theta, \quad (1.41)$$

---

<sup>§</sup><https://patents.google.com/patent/US2293437A>

## Marco Teórico

---

el torque por la fuerza del resorte  $T_s$ , teniendo en cuenta que  $n$  es la longitud natural del resorte y  $k$  es la constante del resorte, es:

$$\begin{aligned} T_s &= -k(r-n)s \cdot \sin 90^\circ, \\ &= kns - krs, \\ &= kns - kab \frac{\sin \theta}{\sin \beta} \sin \beta, \\ &= kns - kab \sin \theta, \end{aligned} \tag{1.42}$$

Entonces, el torque total es:

$$T = T_g + T_s = kns + (kab - Wd) \sin \theta. \tag{1.43}$$

Pero  $W = mg$  (donde  $m$  es la masa de prueba y  $g$  la aceleración de la gravedad) y suponiendo  $n = 0$  (para un resorte de longitud-0),

$$T = (kab - Wd) \sin \theta. \tag{1.44}$$

El momento de inercia es:  $I = md^2$ , entonces:

$$I\ddot{\theta} = (kab - mgd) \sin \theta, \tag{1.45}$$

$$\ddot{\theta} = \left( \frac{kab - mgd}{md^2} \right) \sin \theta = -\mu \sin \theta. \tag{1.46}$$

donde

$$\mu = \left( \frac{mgd - kab}{md^2} \right) \tag{1.47}$$

Que es la ecuación dinámica en función de  $\theta$  de un Gravímetro del tipo LaCoste & Romberg, con un resorte de longitud-0 en la configuración de brazo (Figura 1.10).

Agregando un factor de amortiguamiento (que no afecta la condición de equilibrio) proporcional a la velocidad angular.  $\dot{\theta}$ , es decir, agregamos artificialmente amortiguamiento a la ecuación dinámica añadiendo el término  $\lambda \dot{\theta}$ :

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \mu \sin \theta = 0. \tag{1.48}$$



Realizando los siguientes reemplazos ( $\theta \rightarrow x$ ,  $\dot{\theta} \rightarrow y$ ).

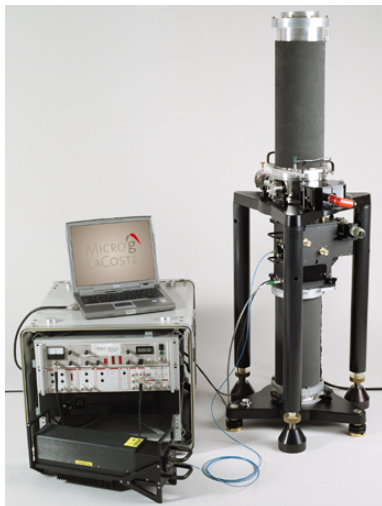
Tenemos el sistema dinámico bidimensional no lineal:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\mu \sin x + \lambda y). \quad (1.49)$$

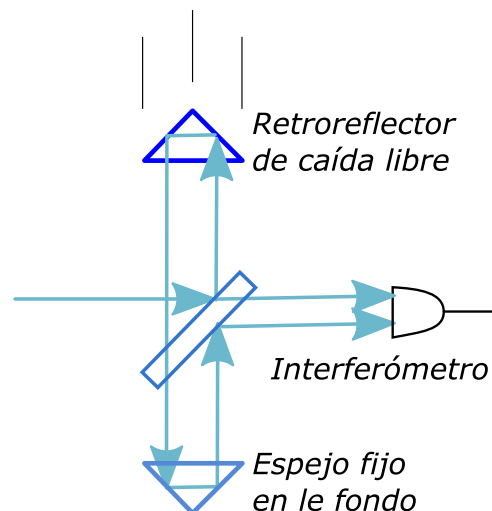
Con estas ecuaciones, es posible estudiar la estabilidad del sistema dinámico (con valores de amortiguamiento  $\lambda$  distintos) en un Gravímetro del tipo LaCoste & Romberg.

### 1.4.2. Gravímetros Absolutos

Los gravímetros absolutos miden el valor local de la gravedad, generalmente con un dispositivo de caída. No necesitan de un punto de referencia, pero son grandes y pesados, menos portables, que los relativos.



(a) Gravímetro absoluto FG5



(b) Interferómetro para Gravímetro de caída libre

**Figura 1.11** Gravímetro absoluto de caída libre y diagrama del interferómetro con retroreflector en caída libre. Tomado de [http://www.microgLaCoste.com/images/FG5\\_small.jpg](http://www.microgLaCoste.com/images/FG5_small.jpg)

Un gravímetro de caída libre mide la aceleración de la gravedad, midiendo la aceleración de un objeto que cae libremente en el vacío. Se necesitan sistemas de medida de muy alta precisión. Algunos gravímetros absolutos como el FG5 [Geo10] (Figura 1.11a), utilizan métodos ópticos como la interferometría, con este método se puede medir los desplazamientos de las franjas de interferencia y así obtener la velocidad en todo momento y, por tanto, la aceleración (Figura 1.11b).

Los gravímetros atómicos, también del tipo absoluto, miden la aceleración de gases enrarecidos a temperaturas cercanas al cero absoluto con interferometría Raman, son muy

precisos  $2\mu\text{Gal}$  [Fix03] y su funcionamiento permite medidas absolutas estando dentro de un avión o un barco [Bid+18].

### 1.5. Algunos hechos históricos de la gravimetría

A continuación se presentan algunos hechos históricos selectos relacionados con la gravimetría o más específicamente con los gravímetros, entre ellas, La expedición de La Condamine y los descubrimientos de Bouguer en el Ecuador, la invención del gravímetro de longitud-0 y las primeras aplicaciones del gravímetro, el gravímetro lunar del Apolo 17, el uso moderno de los gravímetros y sobre la nueva generación de gravímetros microelectromecánicos (MEMS).

#### 1.5.1. Sobre los descubrimientos de *Monsieur Bouguer* en la expedición de *La Condamine*

La expedición de La Condamine, de origen Franco-Español fue financiada por el Virreinato de Nueva Granada a la presidencia de Quito en 1735 con el objetivo de medir la forma de la Tierra, para ello escoge a Pierre Bouguer, matemático francés, y lo encarga a la parte astronómica, pero realiza también aportes a la geografía, geología, y geofísica [Esp89].

Pierre Bouguer además de hacer levantamientos topográficos (por ejemplo el Magdalena), realizó el aporte más importante durante el viaje en los alrededores del volcán Chimborazo, el descubrimiento de nuevos fenómenos en la medición de aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, con el cual fundaría una nueva rama de las Geociencias, la Gravimetría [Esp89].

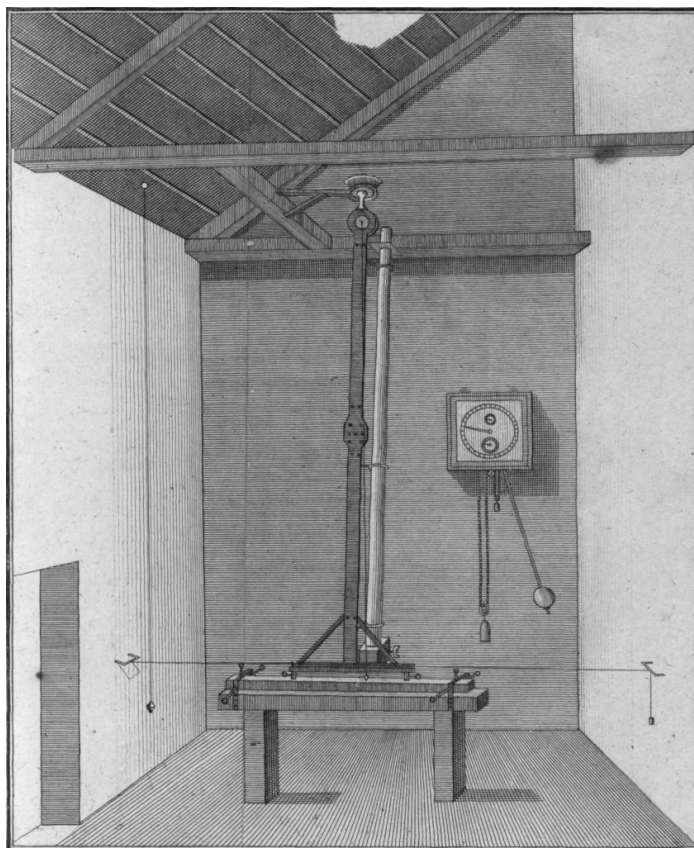
Bouguer observó cambios relacionados con variaciones locales en la aceleración de la gravedad, por ejemplo que la aceleración de la gravedad disminuía menos de lo esperado al pasar de Guayaquil (emplazada sobre el nivel del mar) a Quito en lo alto de las montañas [Esp89].

En su época ya se tenía en cuenta el cambio de la gravedad según la latitud y altura, pero los valores observados no correspondían a los modelos teóricos. *Monsieur Bouguer* dedujo que no se estaba teniendo en cuenta la capa de terreno comprendida entre las de estaciones Guayaquil y Quito, esta ejerce una atracción adicional hacia abajo que compensa parcialmente la disminución de gravedad por la diferencia elevación. Con este descubrimiento, ideó un modelo simplificado de una capa de terreno infinita de densidad constante [Esp89].

Los resultados de las investigaciones de Bouguer en Suramérica fueron presentadas (entre otros textos) en la obra *La Figure de la Terre*, escrita en conjunto por Pierre Bouguer

## 1.5 Algunos hechos históricos de la gravimetría

(1698-1758) y *Charles-Marie de La Condamine* (1701-1774), compañero expedición [BL49; Esp89].



**Figura 1.12** Péndulo de Bouguer mostrado en *La Figure de la Terre*. Imagen tomada del mismo texto

Otra de las observaciones de Bouguer fue ver como una plomada (Figura 1.12) se desviaba de la vertical aparente cerca a zonas montañosas, el experimento fue realizado utilizando dos estaciones al norte y sur del Volcán Chimborazo (Ecuador en la actualidad) y midiendo el ángulo entre la dos plomadas con métodos ópticos [BL49; Esp89].

Bouguer escribió y “*Memoria sobre las atracciones y sobre la manera de observar si las montañas son capaces de producirlas*”, firmada en el pueblo de Riobamba el 30 de diciembre de 1738, y enviada inmediatamente a París. Fue leída en la Academia de Ciencias en octubre de 1739, casi cinco años antes del regreso de Bouguer. Finalmente, fue incluida como capítulo IV de «La obra de Pierre Bouguer en la Nueva Granada y el descubrimiento de la gravimetría».

El experimento fue comprobado por un estudio independiente en 1744, midiendo la desviación producida en el monte Shehallian (Escosia) por Nevil Maskelyne (1732-1811), el

quinto Astrónomo Real y director del Observatorio Astronómico de Greenwich después de que Newton descartara la idea de hacer el experimento.

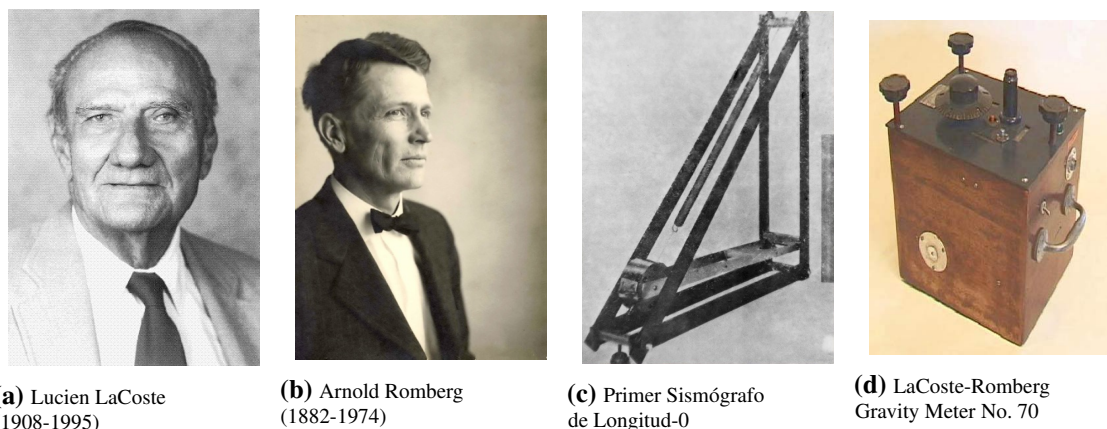
A este fenómeno se le conoce como Efecto de Relieve (ver corrección topográfica) [Esp89].

### 1.5.2. Invención de Gravímetro de longitud-0

Lucien LaCoste (Figura 1.13a) físico y metrólogo inventor del resorte de longitud-0 y Arnold Romberg (Figura 1.13b) profesor de física en la Universidad de Texas fundaron la *LaCoste & Romberg Meter Manufacturing Firm* y desarrollaron las primeras generaciones de gravímetros modernos usadas en campañas gravimétricas.

El gravímetro relativo moderno fue desarrollado por Lucien LaCoste (1908-1995) y Arnold Romberg (1882-1974) en 1936 [Wik21], Fotos 1.13a y 1.13a respectivamente. Ambos fundaron la *LaCoste & Romberg Meter Manufacturing Firm*, que venden gravímetros de gran calidad con distintos propósitos, tanto en la industria como en las Ciencias. El primer uso que se le dio al gravímetro relativo se dio en la prospección de petróleo y minas [LaC88].

En la patente US2293437A<sup>¶</sup>, registrada en 1941 a nombre de Lucien LaCoste y Arnold Romberg, describe la elaboración y funcionamiento del resorte de longitud-0 en su gravímetro, Figuras 1.13d [Luc41; Jen08] y Figura 1.14) [Lac04].



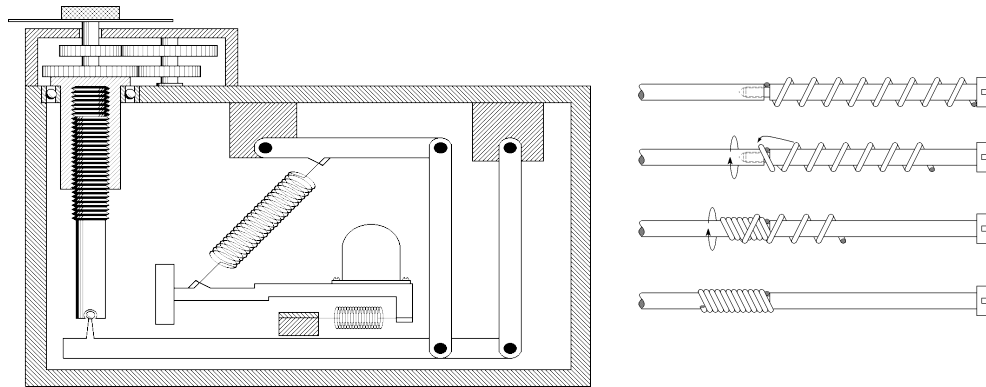
**Figura 1.13** Fotografías de El gravímetro relativo moderno fue desarrollado por Lucien LaCoste, Arnold Romberg y sus inventos.

Tomado de <https://web.archive.org/web/20210716081427/https://web2.ph.utexas.edu/utphysicshistory/LucienLaCoste.html>

---

<sup>¶</sup><https://patents.google.com/patent/US2293437A>

## 1.5 Algunos hechos históricos de la gravimetría



**Figura 1.14** Diagrama básico del Gravímetro LaCoste & Romberg (izquierda). Elaboración del Resorte de longitud-0, una forma consiste en dar vueltas a un resorte de adentro hacia afuera, con un mandril rotatorio (derecha). Tomado del Manual LaCoste & Romberg 2004 [Lac04].

El resorte de longitud-0 fue usado inicialmente en un sismógrafo (Figura 1.13c) pero posteriormente fue usado en los gravímetros de la compañía (Figura 1.13d) y posteriores gravímetros relativos hasta el uso de resortes de cuarzo.

Una de las primeras expediciones de gravedad se llevó a cabo en México durante el periodo que comprende del primero de agosto de 1928 al 31 de julio de 1929 con el objetivo de describir la forma más acertada, la forma del Geoide (forma teórica de la Tierra a cero metros sobre el nivel del mar) y determinar la estructura geológica subterránea.



**Figura 1.15** Instalación de aparatos en el socavón del piso 500 de la mina “Tiro hermoso”. De izquierda a derecha: Ing. Ramiro Robles; Ayud. Mariano Saldaña; Ing. Elfego Ruíz. Tomado de <https://web.archive.org/web/20121003162239/http://www.siap.gob.mx/publicaciones/mapoteca/007.html>

*La expedición operó en la boca y dentro de la mina Tiro Hermoso (Figura 1.15) en Tulancingo Hidalgo; en Tlamacas (a las faldas del volcán Popocatepetl), Amecameca y Toluca en el Estado de México, así como en Acámbaro, Guanajuato y Morelia, Michoacán.*

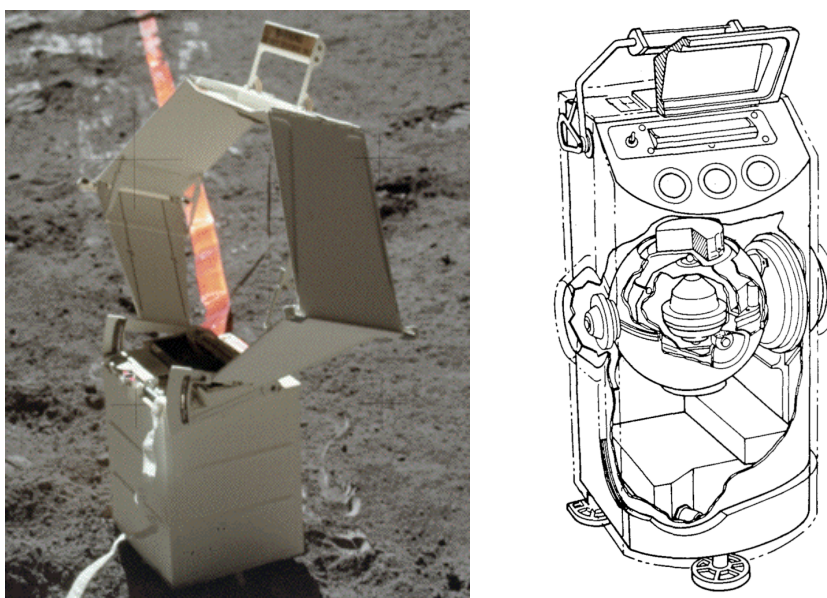
## Marco Teórico


---


*Los especialistas hicieron cuatro observaciones de 12 horas cada una. La estación de medición gravimétrica se montó, al paso de la expedición, en diferentes casas de los poblados, a 601 metros bajo la superficie y en la boca de la mina Tiro Hermoso; también se instaló en las ruinas de una antigua estación sísmológica en el paraje de Tlamacas. Las mediciones más complicadas fueron las realizadas en la mina; esto se debió a las múltiples explosiones de dinamita en el interior.*

Cita extraída textualmente del Boletín No. 7. Julio de 2012, de la Mapoteca Manuel Orozco y Berra del SIAP sitio accedido a través del catálogo Wayback Machine, ya que la página no existe actualmente <sup>¶</sup>

### 1.5.3. Gravímetro Lunar



**Figura 1.16** Gravímetro transversal Lunar del Apollo 17. Fotografía (izquierda) y diseño (derecha). Tomado de NASA  *Apollo 17 Press Kit* y <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/experiment/display.action?id=1972-096C-09>

Durante una de las misiones de la NASA  (*National Aeronautics and Space Administration*) en el Apollo 17, el último viaje a la Luna el 7 de diciembre de 1972, con el propósito de analizar las rocas lunares de las tierras altas en *Mare Imbrium* que fue producto antiguo

---

<sup>¶</sup><https://web.archive.org/web/20121018023550/http://www.siap.gob.mx/publicaciones/mapoteca/007-2.html>



## 1.5 Algunos hechos históricos de la gravimetría

impacto de asteroide, e investigar su posible actividad volcánica reciente, entre otros instrumentos y experimentos, llevaron un gravímetro transversal (Figura 1.16) de diseño LaCoste & Romberg para realizar una campaña gravimétrica relativa en el área de estudio [NASa; NASb].

Era un equipo básico, de la casa LaCoste & Romberg, con electrónica asociada, sensores (placas de condensador de suspensión de masa de resorte), un parasol y un cable plano a la electrónica de la estación central, con una masa total de 12.7kg [NASb].

### 1.5.4. Gravímetros en la actualidad

Además de prospección de petróleos y minas, los gravímetros se usan (acompañados con otras técnicas) en vulcanología para encontrar anomalías gravitacionales, para conocer los cambios internos en la actividad de volcanes y su potencial de riesgo para poblaciones aledañas [Sei95; RW00]. Los gravímetros también son empleados en geotermia, búsqueda de aguas subterráneas, grandes yacimientos arqueológicos, tectónica, entre otros.

Dos ejemplos (fotos) de gravímetros Scintrex CG5 y CG6 se muestran en la Figura 1.17, se puede ver como cada uno cuenta con pantallas digitales asociadas computadoras integradas. El CG5 (Figura 1.17a), es el modelo empleado por instituciones públicas en Colombia y universidades, tanto publicas UNAL, como privadas UniAndes \*\*.



(a) CG5



(b) CG6

**Figura 1.17** Scintrex CG5 (a) y CG6 (b). A diferencia de los LC&R, estos utilizan un resorte de cuarzo, que tiene un coeficiente de dilatación más pequeño que el metálico. Imágenes tomadas durante visita académica al El Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Pasto (OVSP).

\*\*Ortega Estupiñán, Adriana Micaela, comunicación personal, 13 de abril de 2022

Hoy en día, existen un mayor número de equipos, cada uno fabricado con un propósito concreto, por ejemplo, algunos gravímetros están específicamente diseñados para ser ingresados en pozos y otros nuevos gravímetros están siendo fabricados para estudios fuera de la Tierra, la Luna y Marte, por ejemplo. Los gravímetros relativos utilizados con mayor frecuencia, pero el uso de gravímetros absolutos es esencial a la hora de calibrar los primeros y definir estándares gravimétricos en cada país.

A diferencia de los equipos antiguos, los gravímetros actuales son asistidos por computadoras integradas y software propietario para enviar los datos a un computador y realizar los cálculos y correcciones deseadas o programar el equipo previamente a una campaña gravimétrica según sea el objetivo de esta.

### 1.5.5. Gravímetros MEMS)

Los sistemas Microelectromecánicos o MEMS por sus siglas en inglés, son aparatos mecánicos de escala micrométrica ( $1\ \mu\text{m} = 1 \times 10^{-6}\ \text{m}$ ) embebidos en chips con funciones varias, recientemente varios equipos han creado varios prototipos (aunque de una escala más grande) con aplicaciones en gravimetría.

Pero primero veamos donde viene el término, según Maluf y Williams [MW04] y Piya-wattanametha y Qiu [PQ10], se acuñó en una reunión de expertos llamada *Micro Tele-Opered Robotics Workshop* celebrada en *Slat Lake City, Utah* durante el año 1989, sin embargo, la tecnología micro electromecánica ya estaba presente desde el año 1980 desde el trabajo publicado por Petersen [Pet80] llamado «Silicon Torsional Scanning Mirror».

Durante la posterior década a ese *Workshop*, NSF (*National Science Foundation*) financió una serie de proyectos de sistemas microelectromecánicos bajo su iniciativa de tecnologías emergentes [MW04; PQ10], desde aquellos años, el grado de miniaturización ha sido tal que incluso las piezas mecánicas han llegado a la escala nanométrica ( $1\ \text{nm} = 1 \times 10^{-9}\ \text{m}$ ) conocidas como NEMS.

Los MEMS han sido aplicados, entre otras cosas, como acelerómetros en dispositivos tales como smartphones (Figura 1.18), y existen aplicaciones para medir la gravedad (entre otras cosas) de forma rudimentaria con ellos, tales como *Sensor Kinetics* (descontinuada), *Phybox*<sup>††</sup> o *Physics Tools Suite*<sup>‡‡</sup>, ideales para toda clase de experimentos en clases de laboratorio en física, ya que aprovechan todos los sensores del equipo y pueden exportar la información recolectada de ellos para su posterior análisis.

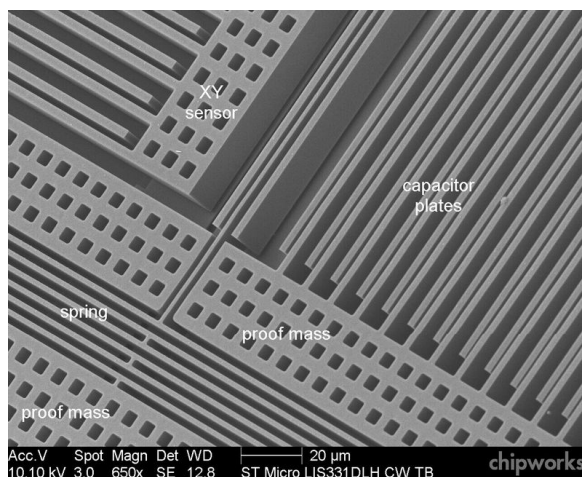
---

<sup>††</sup><https://phyphox.org/>

<sup>‡‡</sup><https://www.vieyrasoftware.net/>



## 1.5 Algunos hechos históricos de la gravimetría



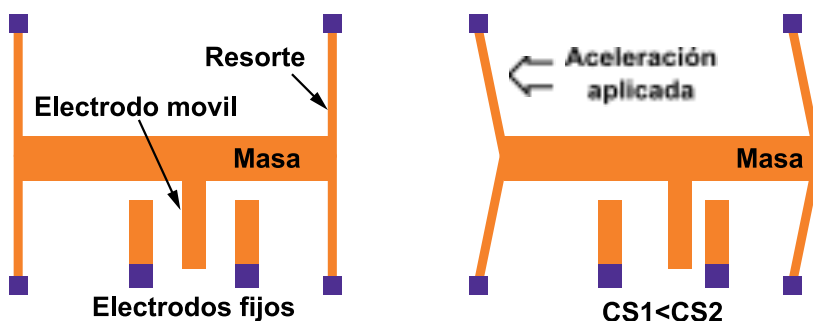
**Figura 1.18** nano-acelerómetro LIS331DLH XY.

Tomado de <https://www.memsjournal.com/2010/12/motion-sensing-in-the-iphone-4-mems-accelerometer.html>

Los acelerómetros microelectromecánicos funcionan a través una masa de prueba suspendida, conectada al un marco fijo a través de una serie de brazos que actúan como resortes [OKH09], como se puede ver en las Figuras 1.18 y 1.19.

Tanto la masa de prueba como el marco tienen una serie de placas no conectadas entre sí que actúan como puentes de condensadores, cuando la masa experimenta una aceleración, la capacitancia entre estas placas cambia y permite medir dicha aceleración [MDC01; OKH09].

Este es el tipo de acelerómetros que se encuentran en los celulares modernos, solo que más complejos (Figura 1.18) y con diferentes ejes; estos permiten (entre otras cosas), el uso de aplicaciones especializadas como las mencionadas antes es posible calcular los valores en bruto de dichos sensores y calcular un valor aproximado de la gravedad terrestre, solo que con mucho ruido.



**Figura 1.19** Bosquejo básico de un acelerómetro microelectromecánico (MEMS).

Modificado de «Sonic nirvana: MEMS accelerometers as acoustic pickups in musical instruments» O'Reilly, Khenkin y Harney [OKH09]

## Marco Teórico

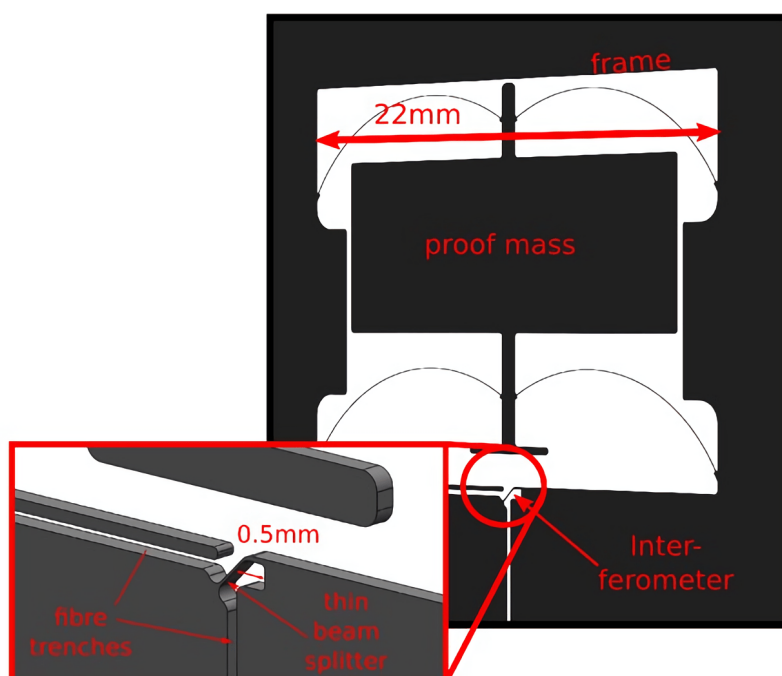
---

En el último lustro, grupos de investigación de China e Inglaterra han diseñado gravímetros basados en acelerómetros microelectromecánicos [Mid+16; Mid+17; Bra+18; Pra+18].

Estos gravímetros son construidos con diferentes propósitos, por ejemplo, para medir mareas terrestres, como el propuesto por Prasad et al. [Pra+18] o, para misiones lunares, como el de Li et al. [Li+18]. Ambos gravímetros funcionan con principios similares a los de acelerómetros microelectromecánicos, pero su diseño es más sencillo que estos y

Los primeros prototipos de gravímetros MEMS, de momento, realmente no son de escala micrométrica, sino de escala milimétrica, a pesar de esto los gravímetros MEMS son más pequeños y ligeros que gravímetros convencionales, aunque de menor precisión, como el de Middlemiss et al. [Mid+16] ( $40\mu\text{Gal}$ ) a diferencia de un Scintrex CG5 ( $2\mu\text{Gal}$ ) [Mid+16]. Y en un futuro pueden llegar a ser más baratos que gravímetros convencionales y servirles de apoyo en distintas investigaciones.

Aunque los gravímetros MEMS conservan la idea de una masa de prueba suspendida en un marco fijo de los acelerómetros microelectrónicos, el número, diseño y física de los resortes es más complejo, por ejemplo, exhiben un comportamiento no lineal en ciertos rangos de operación [Mid+16]. Además, la forma de medir los cambios en la posición de la masa de prueba pasan de ser métodos electrónicos a ópticos, es decir, que requieren tanto una fuente de luz como un sensor en alguna parte del instrumento.



**Figura 1.20** Diseño de Gravímetro MEMS con interferómetro según Middlemiss, Hammond, Noack y Prasad [Mid+18]. Tomado de «MEMS gravity sensors for imaging density anomalies» [Mid+18]

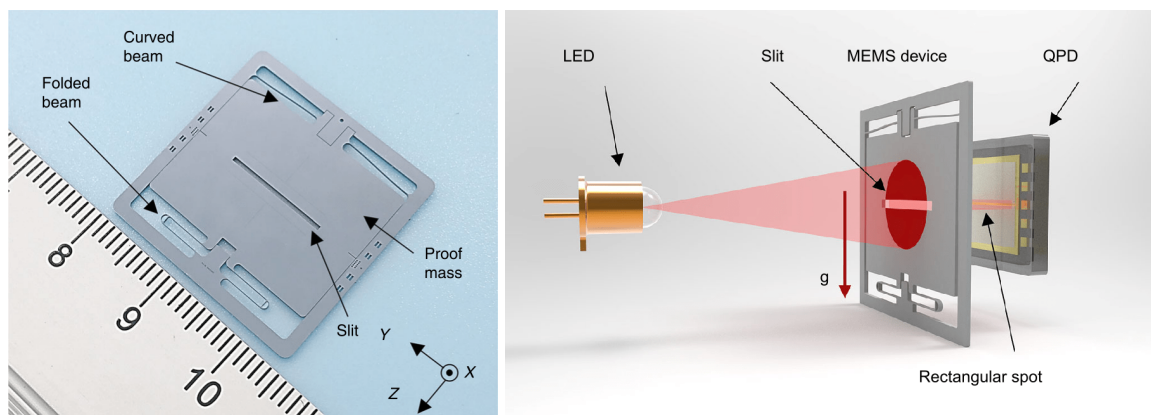
## 1.5 Algunos hechos históricos de la gravimetría

A continuación se muestran dos ejemplos distintos:

**El equipo de Glasgow, Reino Unido: «MEMS gravity sensors for imaging density anomalies», Middlemiss, Hammond, Noack y Prasad [Mid+18]** presentan un gravímetro con una masa de prueba conectada a un sistema de cuatro brazos curvados llamados *anti-spring*, puede caracterizarse por tener una “constante elástica” negativa o al menos parcialmente negativa [Mid+21].

Toda la estructura está fabricada de silicio y se crea de la misma forma que los circuitos electrónicos en una Oblea (*Wafer*) electrónica mediante la técnica grabado profundo de iones reactivos, mientras las partes ópticas son de otros materiales con una mejor reflectividad. Los cambios en la posición de la masa de prueba se midieron con un pequeño interferómetro en la parte inferior del marco, como se muestra en la Figura 1.20, nótese la ventana ampliada donde se muestra el interferómetro y su *beam-splitter* [Mid+18].

Varios de los prototipos del equipo de Glasgow están fabricados con la capacidad de medir mareas terrestres o dicho de otro modo, su sensibilidad y estabilidad se demostró al medir el efecto de las mareas terrestres en las medidas de gravedad [Mid+16; Mid+18; Mid+21].



**Figura 1.21** Diseño y montaje de Gravímetro MEMS según Tang et al. [Tan+19] Tomado de «A high-sensitivity MEMS gravimeter with a large dynamic range» [Tan+19]

**El equipo de Hubei y Wuhan, China: «A high-sensitivity MEMS gravimeter with a large dynamic range», Tang et al. [Tan+19]** presentan un gravímetro con una masa de prueba también conectada al marco con 4 brazos, pero el par de abajo se encuentran doblados y se comporta como resortes convencionales, el par de arriba son ligeramente curvados, aunque en menor medida que los del equipo anterior (Figura 1.21) y son *anti-spring*, con una “constante elástica” en ciertos rangos en función del desplazamiento. Combinados ambos

## Marco Teórico

---

pares de resortes dan una fuerza de restauración no lineal, pero que en ciertos rangos de operación es casi constante, esto le otorga al mecanismo una alta sensibilidad [Tan+19].

De la misma forma, la estructura está elaborada con *Wafer* electrónico mediante grabado profundo de iones reactivos, pero el método de medida es distinto, en vez de utilizar interferometría, La masa de prueba tiene una ranura en la mitad (que permite el paso de luz), un lado se ilumina con un Diodo Emisor de Luz o LED (Thorlabs LED630L) y al otro lado, un fotodiodo de o QPD (HAMAMATSU S5980) y se miden los cambios en la luz incidente [Tan+19]. Otros prototipos chinos como el de Tang et al. [Tan+19] usan un par de fotodiodos para las medidas ópticas, este último diseñado para misiones lunares [Tan+19]. Ambos equipos realizaron simulaciones de elementos finitos previas a la elaboración del gravímetro para calibrar sus parámetros estructurales [Tan+19; Mid+21].

Una interesante nota sobre el gravímetro MEMS de Glasgow (con video) puede leerse en: [https://www.gla.ac.uk/news/archiveofnews/2016/march/headline\\_453570\\_en.html](https://www.gla.ac.uk/news/archiveofnews/2016/march/headline_453570_en.html)

## Referencias, Marco Teórico

- [BL49] Bouguer y Charles-Marie de La Condamine. *La Figure de la Terre*. 1749. DOI: 10.5962/bhl.title.164077.
- [Web+35] Medford Webster, Bob Patchin, Michael Turner, John Wikswo y Jim Waters. *Kater's Pendulum*. 1835.
- [mes88] Bureau international des poids et mesures. *Comité international des Poids et Mesures (CIPM): Procès-verbaux de la 12e session (septembre 1887)*. Procès-verbaux des séances / Comité International des Poids et Mesures, Bureau International des Poids et Mesures. 1888.
- [Ham39] Sigmund Hammer. «TERRAIN CORRECTIONS FOR GRAVIMETER STATIONS». En: *GEOPHYSICS* 4.3 (jun. de 1939), págs. 184-194. ISSN: 0016-8033. DOI: 10.1190/1.1440495. URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1440495>.
- [Net39] L. L. Nettleton. *Determination of Density for Reduction of Gravimeter Observations*. 1939. DOI: 10.1190/1.1437088.
- [Luc41] Arnold Romberg Lucien LaCoste. «Force measuring device». US2293437A. 1941. URL: <https://patents.google.com/patent/US2293437A>.
- [Lon59] I M Longman. «Formulas for computing the tidal accelerations due to the moon and the sun». En: *J. Geophys. Res.* 64.12 (dic. de 1959), págs. 2351-2355. ISSN: 01480227. DOI: 10.1029/JZ064i012p02351. URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/JZ064i012p02351>.
- [Kan62] M. F. Kane. «A COMPREHENSIVE SYSTEM OF TERRAIN CORRECTIONS USING A DIGITAL COMPUTER». En: *GEOPHYSICS* 27.4 (ago. de 1962), págs. 455-462. ISSN: 0016-8033. DOI: 10.1190/1.1439044. URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1439044>.
- [Wen78] Hans-georg Wenzel. «Analysis of earth tide observations». En: *Tidal Phenom.* 1973. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1978, págs. 59-75. ISBN: 978-3-540-62833-0. DOI: 10.1007/BFb0011457. URL: <http://www.springerlink.com/index/10.1007/BFb0011457>.
- [Mor80] H. Moritz. «Geodetic reference system 1980». En: *Bull. Géodésique* 54.3 (nov. de 1980), págs. 395-405. ISSN: 0007-4632. DOI: 10.1007/BF02521480. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF02521480>.

## Marco Teórico

---


- [Pet80] Kurt E. Petersen. «Silicon Torsional Scanning Mirror». En: *IBM J. Res. Dev.* 24.5 (nov. de 1980), págs. 631-637. ISSN: 0018-8646. DOI: 10.1147/rd.245.0631. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5390714/>.
- [Age83] Defense Mapping Agency. *Geodesy for the layman*. 1983.
- [LaC88] Inc. LaCoste and Romberg. *Instruction manual for LaCoste and Romberg, Inc. Model G land gravity meter*. 1988.
- [Esp89] B Armando Espinosa. «La obra de Pierre Bouguer en la Nueva Granada y el descubrimiento de la gravimetría». En: *Rev. la Acad. Colomb. Ciencias Exactas, Fis. y Nat.* 17.64 (1989), págs. 137-141.
- [Tor89] W. Torge. *Gravimetry*. 1989.
- [Age91] Defense Mapping Agency. «World Geodetic System 1984». En: (1991).
- [Sei95] H.O Seigel. *A Guide to high precision land Gravimeter surveys*. Scintrex Limited, 1995, págs. 1-132.
- [BLA96] RICHARD J. BLAKELY. *Potential theory in gravity & magnetic applications*. Vol. 133. 2. 1996, págs. 220-221. ISBN: 052141508X. DOI: 10.1017/S0016756800008773.
- [Fro98] Lowrie Frohlich. *Geophysics - Fundamentals Of*. Vol. 79. 15. 1998, pág. 187. ISBN: 9780521859028.
- [ASG99] Mark E. Ander, Tom Summers y Michael E. Gruchalla. «LaCoste & Romberg gravity meter: System analysis and instrumental errors». En: *Geophysics* 64.6 (nov. de 1999), págs. 1708-1719. ISSN: 00168033. DOI: 10.1190/1.1444675. URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1444675>.
- [Goo99] John M. Goodkind. «The superconducting gravimeter». En: *Rev. Sci. Instrum.* 70.11 (nov. de 1999), págs. 4131-4152. ISSN: 0034-6748. DOI: 10.1063/1.1150092. URL: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1150092>.
- [RW00] Hazel Rymer y Glyn Williams-Jones. «Volcanic eruption prediction: magma chamber physics from gravity and deformation measurements». En: *Geophys. Res. Lett.* 27.16 (2000), págs. 2389-2392. ISSN: 00948276. DOI: 10.1029/1999GL011293.
- [MDC01] Gregory J. Galvin MacDonald, Timothy J. Davis y Noel C. *Microelectromechanical accelerometer for automotive applications*. 2001. URL: <https://patents.google.com/patent/US6199874B1/>.


- [PAL02] Renato Pajarola, Marc Antonijuan y Roberto Lario. «QuadTIN: quadtree based triangulated irregular networks». En: *IEEE Vis. 2002. VIS 2002*. IEEE, 2002, págs. 395-402. ISBN: 0-7803-7498-3. DOI: 10.1109/VISUAL.2002.1183800. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1183800/>.
- [Fix03] J Fixler. «Atom interferometer-based gravity gradiometer measurements». Tesis doct. 2003, 138 pp. ISBN: 9780496569359. URL: <https://www.proquest.com/docview/304714502>.
- [Hin03] William J Hinze. «Bouguer reduction density, why 2.67?» En: *GEOPHYSICS* 68.5 (nov. de 2003), págs. 1559-1560. ISSN: 0016-8033. DOI: 10.1190/1.1620629. URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1620629>.
- [SL03] Roman Schwartz y Andreas Lindau. «Das Europäische gravitationszonenkonzept für eichpflichtige waagen». En: *PTB - Mitteilungen Forschen und Prüfen* 113.1 (2003), págs. 35-42. ISSN: 0030834X.
- [Lac04] Lacoste & Romberg. *Instruction manual Model G&D gravity meters*. 2004.
- [MW04] N. Maluf y K. Williams. *An Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering*. Artech House Microelectromechanical Systems. Artech House, 2004. ISBN: 9781580535915. URL: <https://books.google.com.co/books?id=20j7IaDK10UC>.
- [Van05] Michel Van Camp. «Uncertainty of absolute gravity measurements». En: *J. Geophys. Res.* 110.B5 (2005), B05406. ISSN: 0148-0227. DOI: 10.1029/2004JB003497. URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/2004JB003497>.
- [Sci06] Scintrex. *Manual Gravimetro Scintrex CG-5*. 2006.
- [Vir06] Heikki Virtanen. *Studies of Earth dynamics with the superconducting gravimeter*. 2006. ISBN: 9789521030574. URL: <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/23166>.
- [Jen08] Gerhard Jentzsch. «The automated Burris gravity meter-a new instrument using an old principle». En: *Proc Symp. Terr. Gravim. Static Mob. Meas. St Petersburg, Russ.* 2008, págs. 20-23. URL: <http://www.angewandte-gravimetrie.de/pdf/Jentzsch.pdf>.
- [OKH09] Rob O'Reilly, Alex Khenkin y Kieran Harney. «Sonic nirvana: MEMS accelerometers as acoustic pickups in musical instruments». En: *Sensors (Peterborough, NH)* 26.6 (2009), págs. 1-4. ISSN: 07469462.
- [Geo10] Bundesamt für Kartographie und Geodäsie. *El gravímetro absoluto FG5*. 2010.

- [PQ10] Wibool Piyawattanametha y Zhen Qiu. «12 Optical MEMS». En: *Microelectromechanical Syst. Devices*. 2010. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/12-Optical-MEMS-Piyawattanametha-Qiu/f4d5668ea3200acaedd921695140bf3d893cf183>.
- [BS11] Jean-Pierre Barriot y Lydie Sichoix. «Gravity Modeling, Theory and Computation». En: *Encycl. Solid Earth Geophys.* 2011, págs. 518-524. DOI: 10.1007/978-90-481-8702-7\_233. URL: [https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-90-481-8702-7\\_233](https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-90-481-8702-7_233).
- [Pav+12] Nikolaos K. Pavlis, Simon A. Holmes, Steve C. Kenyon y John K. Factor. «The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)». En: *J. Geophys. Res. Solid Earth* 117.B4 (abr. de 2012). ISSN: 01480227. DOI: 10.1029/2011JB008916. URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/2011JB008916>.
- [AB14] Hamid Alsadi y Ezzadin Baban. «Introduction To Gravity Exploration Method». En: *Researchgate* October (2014), pág. 199. URL: [https://www.researchgate.net/publication/282735037\\_Introduction\\_to\\_gravity\\_exploration\\_method](https://www.researchgate.net/publication/282735037_Introduction_to_gravity_exploration_method).
- [Mid+16] R. P. Middlemiss, A. Samarelli, D. J. Paul, J. Hough, S. Rowan y G. D. Hammond. «Measurement of the Earth tides with a MEMS gravimeter». En: *Nature* 531.7596 (mar. de 2016), págs. 614-617. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/nature17397. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature17397>  
<http://www.nature.com/articles/nature17397>.
- [Wei+16] Jin Wei, Wenbin Shen, Hui Li y Liu Ziwei. «Nonlinear Drift of the Spring Gravimeter Caused by Air Pressure from the Kunming GS15 Gravimeters». En: *Polish Marit. Res.* 23.s1 (oct. de 2016), págs. 180-186. ISSN: 2083-7429. DOI: 10.1515/pomr-2016-0063. URL: <http://content.sciendo.com/view/journals/pomr/23/s1/article-p180.xml>.
- [Mid+17] Richard Middlemiss, Steven Bramsiepe, Rebecca Douglas, James Hough, Douglas Paul, Sheila Rowan y Giles Hammond. «Field Tests of a Portable MEMS Gravimeter». En: *Sensors* 17.11 (nov. de 2017), pág. 2571. ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s17112571. URL: <http://www.mdpi.com/1424-8220/17/11/2571>.



- [Bid+18] Y. Bidel, N. Zahzam, C. Blanchard, A. Bonnin, M. Cadoret, A. Bresson, D. Rouxel y M. F. Lequentrec-Lalancette. «Absolute marine gravimetry with matter-wave interferometry». En: *Nat. Commun.* 9.1 (dic. de 2018), pág. 627. ISSN: 2041-1723. DOI: 10.1038/s41467-018-03040-2. URL: <http://www.nature.com/articles/s41467-018-03040-2>.
- [Bra+18] Steven G. Bramsiepe, David Loomes, Richard P. Middlemiss, Douglas J. Paul y Giles D. Hammond. «A High Stability Optical Shadow Sensor With Applications for Precision Accelerometers». En: *IEEE Sensors Journal* 18.10 (mar. de 2018), págs. 4108-4116. ISSN: 1530-437X. DOI: 10.1109/JSEN.2018.2818066. arXiv: 1711.01253. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8320787/>.
- [Li+18] T. Li, L.W. Zhang, H. Li, Q. Wang, X.X. Song, H.F. Liu y L.C. Tu. «Design and Simulation of a MEMS Gravimeter for Lunar Missions». En: *2018 Eighth Int. Conf. Instrum. Meas. Comput. Commun. Control.* Vol. 0. IEEE, jun. de 2018, págs. 1116-1119. ISBN: 978-1-5386-8246-3. DOI: 10.1109/IMCCC.2018.00232. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9045493/>.
- [Mid+18] Richard Middlemiss, Giles Hammond, Andreas Noack y Abhinav Prasad. «MEMS gravity sensors for imaging density anomalies». En: *Optical Trapping and Optical Micromanipulation XV*. Ed. por Kishan Dholakia y Gabriel C. Spalding. SPIE, sep. de 2018, pág. 20. DOI: 10.1117/12.2323969. URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/10723/2323969/MEMS-gravity-sensors-for-imaging-density-anomalies/10.1117/12.2323969.full>.
- [Pra+18] A. Prasad, S. G. Bramsiepc, R. P. Middlemiss, J. Hough, S. Rowan, G. D. Hammond y D. J. Paul. «A Portable MEMS Gravimeter for the Detection of the Earth Tides». En: *Proceedings of IEEE Sensors 2018-October (2018)*, págs. 12-14. ISSN: 21689229. DOI: 10.1109/ICSENS.2018.8589884.
- [Car+19] Daniele Carbone, Flavio Cannavò, Filippo Greco, Richard Reineman y Richard J. Warburton. «The Benefits of Using a Network of Superconducting Gravimeters to Monitor and Study Active Volcanoes». En: *J. Geophys. Res. Solid Earth* 124.4 (abr. de 2019), págs. 4035-4050. ISSN: 2169-9313. DOI: 10.1029/2018JB017204. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2018JB017204>.

- [Tan+19] Shihao Tang, Huafeng Liu, Shitao Yan, Xiaochao Xu, Wenjie Wu, Ji Fan, Jinquan Liu, Chenyuan Hu y Liangcheng Tu. «A high-sensitivity MEMS gravimeter with a large dynamic range». En: *Microsystems & Nanoengineering* 5.1 (dic. de 2019), pág. 45. ISSN: 2055-7434. DOI: 10.1038/s41378-019-0089-7. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41378-019-0089-7><http://www.nature.com/articles/s41378-019-0089-7>.
- [Lec+20] Thomas Lecocq, Stephen Hicks, Koen Van Noten, Kasper Van Wijk, Raphael S M De Plaen, Gregor Hillers, Maria-theresia Apoloner y Mario Arroyo-sol. «Global quieting of high frequency seismic noise due to COVID-19 pandemic lockdown measures». En: 2438.07 (2020), págs. 1-10.
- [SAT20] Federico Gustavo Enrique Späth, Ezequiel Darío Antokoletz y Claudia Noemí Tocho. *Tópicos de gravimetría*. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata (EDULP), 2020. ISBN: 978-950-34-1897-0. DOI: 10.35537/10915/97536. URL: <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/97536>.
- [YIN20] Suguru Yabe, Kazutoshi Imanishi y Kiwamu Nishida. «Two-step seismic noise reduction caused by COVID-19 induced reduction in social activity in metropolitan Tokyo, Japan». En: *Earth, Planets Sp.* 72.1 (dic. de 2020), pág. 167. ISSN: 1880-5981. DOI: 10.1186/s40623-020-01298-9. URL: <https://doi.org/10.1186/s40623-020-01298-9><https://earth-planets-space.springeropen.com/articles/10.1186/s40623-020-01298-9>.
- [Mid+21] Richard P. Middlemiss, Paul Campsie, William Cunningham, Rebecca Douglas, Victoria McIvor, James Hough, Sheila Rowan, Douglas J. Paul, Abhinav Prasad y G. D. Hammond. «A MEMS gravimeter with multi-axis gravitational sensitivity». En: (feb. de 2021), págs. 1-30. arXiv: 2102.05528. URL: <http://arxiv.org/abs/2102.05528>.
- [Tie+21] Eite Tiesinga, Peter J. Mohr, David B. Newell y Barry N. Taylor. «CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018». En: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 50.3 (2021), pág. 033105. DOI: 10.1063/5.0064853. eprint: <https://doi.org/10.1063/5.0064853>. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0064853>.
- [Wik21] Wikipedia. *Lucien LaCoste* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2021. URL: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lucien\\_LaCoste&oldid=1053848488](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lucien_LaCoste&oldid=1053848488).
- [NASa] NASA . *Apolo 17 Press Kit*. Inf. téc. URL: [https://www.nasa.gov/specials/apollo50th/pdf/A17%7B%5C\\_%7DPressKit.pdf](https://www.nasa.gov/specials/apollo50th/pdf/A17%7B%5C_%7DPressKit.pdf).

- [NASb] NASA . *Lunar Surface Gravimeter*. URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/experiment/display.action?id=1972-096C-09>.
- [ZH] Maria Zuber y R.S. Hildebrand. *GRAIL: Gravity Recovery and Interior Laboratory*. URL: <http://moon.mit.edu/index.html>.



*Probability is orderly opinion ...  
inference from data is nothing other  
than the revision of such opinion in the  
light of relevant new information.*

---

Thomas Bayes

## Capítulo 2

# Inversión Gravimétrica 2D usando el algoritmo RJMCMC (*Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo*)

---

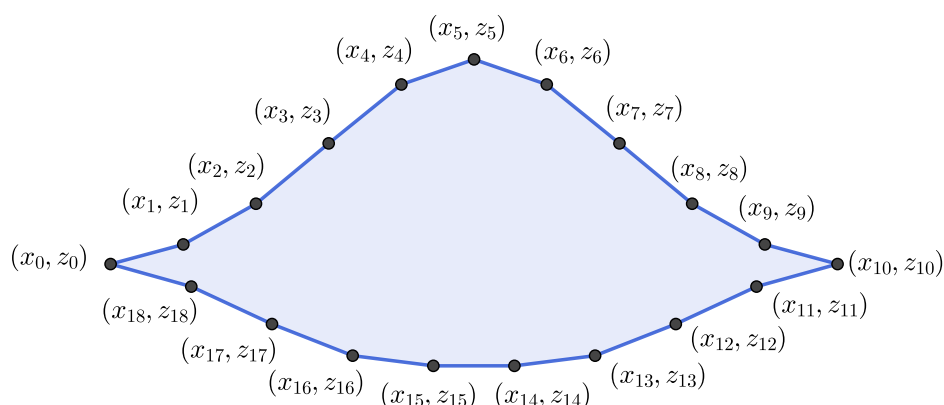
|  |    |
|--|----|
| 2.1. Introducción . . . . .  | 50 |
| 2.2. Método directo . . . . .  | 51 |
| 2.3. Tipos de Movimientos de Vértices del Polígono . . . . .                     | 53 |
| 2.4. Inferencia Bayesiana . . . . .  | 55 |
| 2.5. Algoritmo de Metropolis-Hastings . . . . .                                  | 56 |
| 2.6. Algoritmo <i>Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo</i> . . . . .         | 57 |
| 2.6.1. Verosimilitud . . . . .   | 57 |
| 2.6.2. Densidad a Priori . . . . .   | 57 |
| 2.6.3. Probabilidades para movimientos de Creación-Destrucción . . . . .         | 58 |
| 2.6.4. Probabilidad de aceptación . . . . .                                      | 58 |
| 2.6.5. Paralelización de funciones en Python . . . . .                           | 59 |
| 2.7. Algoritmo Shamos-Hoey . . . . .   | 60 |
| 2.8. Pasos para la inversión gravimétrica . . . . .                              | 62 |
| 2.9. Resultados y Perspectivas . . . . .   | 62 |
| Referencias, Algoritmo <i>Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo</i> . . . . . | 69 |

---

## 2.1. Introducción

La inversión gravimétrica es un método en el cual se encuentra el modelo del subsuelo a través de la información de anomalías de gravedad, en contraposición con el método directo donde se calculan las anomalías de gravedad a partir de un modelo dado, en este caso definido por polígonos.

Tal como lo define Luo [Luo10], para el caso bidimensional (más sencillo) en el cual describimos una anomalía gravimétrica, es decir, una región con una densidad diferente al resto del suelo a través de un polígono de  $k$  vértices descrito por posiciones  $(x_i, z_i)$ , con  $i = 0, 1 \dots, k$  donde  $k \geq 3$ . Se define un polígono  $\theta$  con  $k$  vértices,  $\theta_k = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \dots, \mathbf{v}_{k-1})$  donde cada vértice está definido en el plano por  $\mathbf{v}_j = (x_j, z_j)$  (Figura 2.1). Entonces para un polígono  $\theta_k$  de  $k$  vértices del modelo  $\mathcal{M}_k$ , se tienen  $2k$  parámetros,  $k$  posiciones de los vértices en el eje horizontal  $x_i$  y  $k$  posiciones de los vértices en el eje vertical  $z_i$



**Figura 2.1** Polígono creado en GeoGebra

Luo [Luo10] utiliza un sistema de referencia levógiro, esto es, con  $x$  positivo hacia la derecha y  $z$  positivo hacia abajo. En este capítulo, sin embargo, se usa un sistema de referencia dextrógiro con  $x$  positivo hacia la derecha y  $z$  positivo hacia arriba. En ambos casos los polígonos están definidos por defecto con los vértices ordenados en el sentido de las manecillas del reloj

Se usa el método directo con un modelo (polígono) de prueba y se compara con las anomalías gravimétricas a las cuales se realizará la inversión, después se proponen cambios aleatorios al modelo de prueba, y se establecen condiciones de rechazo si el nuevo modelo no es lo suficientemente bueno, eso es conocido como algoritmo de Metropolis–Hastings [Met+53; Has70].

## 2.2. Método directo

La anomalía de gravedad resulta de la diferencia entre el valor teórico y el valor de gravedad observada. Para un caso bidimensional, la anomalía gravimétrica  $\Delta g$  de un polígono bajo tierra con un contraste de densidad  $\Delta\rho$  con el terreno circundante, puede describirse con la ecuación de Talwani [TWL59; Che+06; Luo10]:

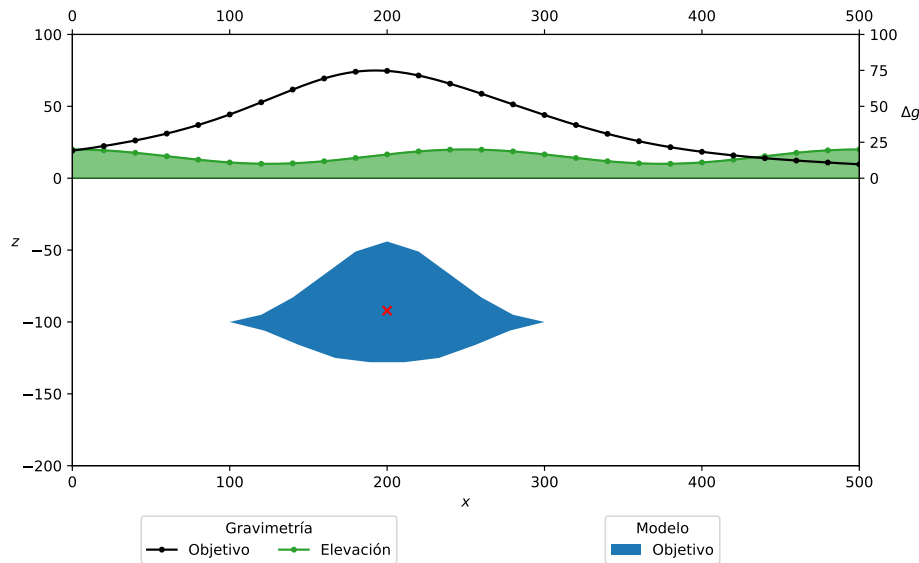
$$\Delta g(\tilde{x}_j, \tilde{z}_j) = 2G\Delta\rho \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\xi_{i-1}\eta_i - \xi_i\eta_{i-1}}{(\xi_i - \xi_{i-1})^2 + (\eta_i - \eta_{i-1})^2} \times \left[ \frac{1}{2}(\eta_i - \eta_{i-1}) \ln \left( \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2} \right) + g_i \right], \quad (2.1)$$

$$g_i = (\xi_i - \xi_{i-1}) \left[ \text{atan} \left( \frac{\xi_i}{\eta_i} \right) - \text{atan} \left( \frac{\xi_{i-1}}{\eta_{i-1}} \right) \right] \quad (2.2)$$

Donde  $G$  es la constante de Gravitación universal y

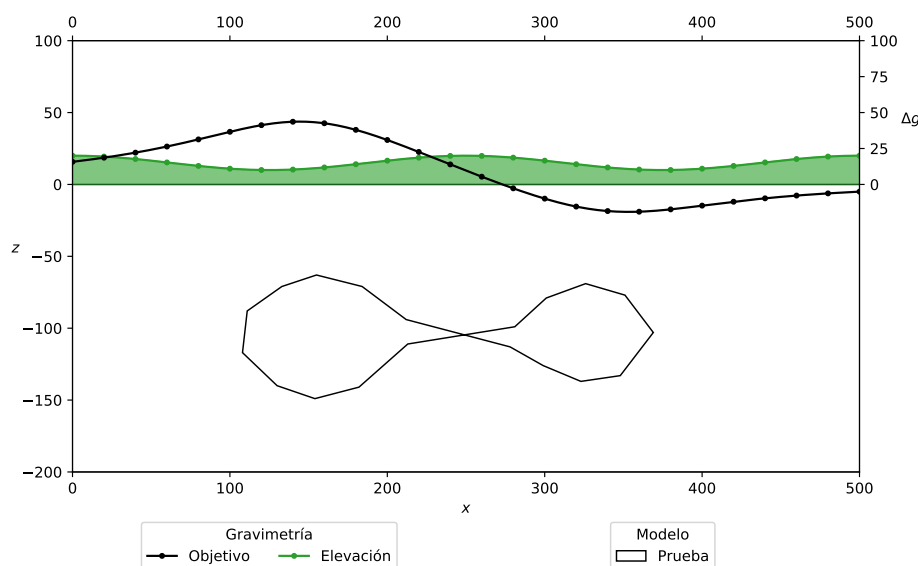
$$\xi_i = x_i - \tilde{x}_j, \quad \eta_i = z_i - \tilde{z}_j. \quad (2.3)$$

Los puntos  $j$ ,  $\tilde{x}_j$  y  $\tilde{z}_j$  (en verde Figura 2.2) son las coordenadas horizontal y vertical respectivamente donde se mide al anomalía gravimétrica  $\Delta g$  (puntos gris oscuro en la Figura 2.2), y  $x_i$  y  $z_i$  son las coordenadas horizontal y vertical respectivamente del vértice  $i$  del polígono que define el modelo analizado (vértices del polígono azul en Figuras 2.1 y 2.2).



**Figura 2.2** Modelo definido por un polígono bajo tierra y sus anomalías de gravedad

Para facilitar los cálculos, suponemos el caso adimensional donde  $2G\Delta\rho = 1$  (sin unidades). En esta ecuación, el sentido en que corran los vértices (en el sentido de las manecillas del reloj o en contra) como se muestra en la Figura 2.3 que tiene un bucles en la forma del polígono, y el sistema de referencia levógiro o dextrógiro afecta el signo de  $\Delta g$  y hay que ponerlo manualmente según el caso (a conveniencia) en la ecuación de Talwani [TWL59].



**Figura 2.3** Modelo definido por un polígono con bucles y sus anomalías de gravedad. Los vértices de la izquierda estén ordenados en el sentido de las manecillas del reloj y tienen anomalías positivas, los vértices de la derecha, debido al bucle, se orientan en contra de las manecillas del reloj y tienen anomalías negativas. El cálculo del centroide de dicho polígono deja de funcionar.

Para este caso, supongamos que hacemos 26 medidas gravimétricas equiespaciadas horizontalmente desde  $\tilde{x}_0 = 0$  hasta  $\tilde{x}_{25} = 500$  (también con magnitudes adimensionales)  $\forall_{j=0,1,\dots,25}$ , con alturas ligeramente distintas según una forma sinusoidal, línea verde en la Figura 2.2.

Definimos los siguientes tipos de modelos durante la simulación:

**Modelo inicial:** es el modelo definido por el primer polígono con el que comienza la simulación

**Modelo de prueba:** Son los modelos que reciben modificaciones aleatorias en uno de sus vértices (seleccionado también a azar) en cada iteración del algoritmo.

**Modelo objetivo:** es el modelo que se quiere encontrar con el método de inversión gravimétrica con el perfil de anomalías de gravedad.

El polígono asociado al modelo objetivo puede ser desconocido, solo teniendo la información de gravedad (similar a como sucede en la realidad) puede ser conocido (para probar



el algoritmo), o conocido (para probar el algoritmo o como ejemplo de su funcionamiento). Si el Modelo es fabricado de antemano, el perfil de anomalías de gravedad se calcula por método directo con la ecuación de Talwani (2.1).

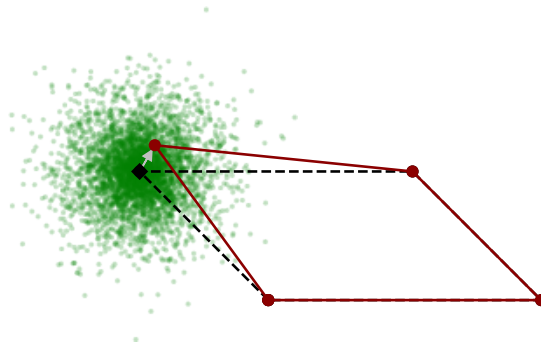
### 2.3. Tipos de Movimientos de Vértices del Polígono

Para cada iteración del algoritmo, primero se elige un vértice al azar, y luego se propone un movimiento para ese vértice: moverlo en una posición cercana y aleatoria de de distribución normal, crear un nuevo vértice y moverlo de la misma forma que el caso anterior, o quitar el vértice del polígono:

**Simple:** se mueve el vértice elegido usando la siguiente transformación:

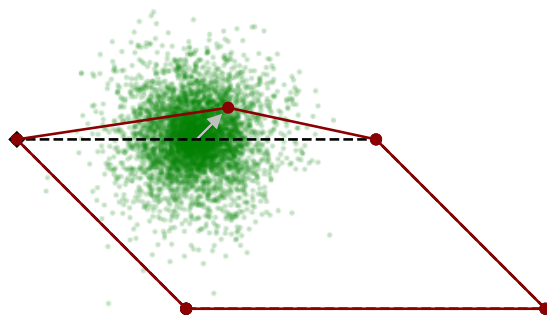
$$x'_i = x_i + r \cos(\vartheta), \quad z'_i = z_i + r \sin(\vartheta). \quad (2.4)$$

Donde  $\vartheta$  es una variable aleatoria uniforme entre  $(0, \pi)$ , y  $r$  es una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación estándar  $\sigma_a$  es igual a 0.25 de la distancia mínima a los vértices adyacentes (Figura 2.4). Este tipo de movimiento corresponde al tradicional en el algoritmo de Metropolis-Hastings [Met+53; Has70; Luo10].



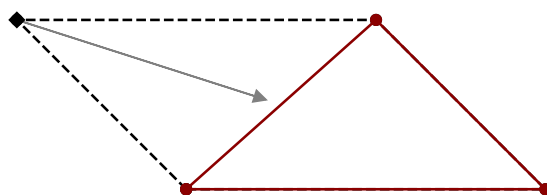
**Figura 2.4** Posibles movimientos simples (verde) del vértice seleccionado (rombo) aleatoriamente en un paralelogramo. La nueva forma del polígono modificado aparece en rojo oscuro, la antigua con líneas discontinuas en negro.

**Creación:** se toma el valor medio entre el vértice elegido y el siguiente, donde se crea un nuevo vértice entre los dos y a partir de ahí se realiza un movimiento simple como el visto anteriormente. En este caso  $\sigma_a$  es la mitad de la distancia entre el vértice elegido y el siguiente (Figura 2.5) [Luo10].



**Figura 2.5** Posibles movimientos de creación (verde) del vértice seleccionado (rombo) aleatoriamente en un paralelogramo. La nueva forma del polígono modificado aparece en rojo oscuro, la antigua con líneas discontinuas en negro.

**Destrucción:** el vértice elegido es removido del polígono del modelo. Debido a esto, este es el tipo de movimiento que más afecta el modelo. En este caso, se considera que  $r$  es la distancia ente el vértice y el punto medio entre los vértices adyacentes, y  $\sigma_a$  es la mitad de la distancia entre los vértices adyacentes (Figura 2.6) [Luo10].



**Figura 2.6** Movimiento de destrucción del vértice seleccionado (rombo) aleatoriamente en un paralelogramo. La nueva forma del polígono modificado aparece en rojo oscuro, la antigua con líneas discontinuas en negro.

Los movimientos de creación y destrucción corresponden a movimientos mas algoritmos mas complejos complejos como GREEN «Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination» [GRE95; Luo10]

Dependiendo del numero de vértices del modelo de prueba en cada iteración se asignan probabilidades para cada tipo de movimiento en la próxima iteración de forma que sean iguales pero restringiendo un numero mínimo de 3 vértices, porque no existe un polígono cerrado menor que un triangulo.

|                           |     |     |     |     |     |
|---------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Numero de vértices        | 3   | 4   | ... | 19  | 20  |
| Movimiento Simple         | 1/2 | 1/3 | ... | 1/3 | 1/2 |
| Movimiento de Creación    | 1/2 | 1/3 | ... | 1/3 | 0   |
| Movimiento de Destrucción | 0   | 1/3 | ... | 1/3 | 1/2 |

**Tabla 2.1** Probabilidades de movimiento según numero de vértices

Es decir, un modelo de prueba que sea un triángulo solo tendrá dos tipos de movimientos accesibles, el simple y el de creación. De la misma forma se define arbitrariamente una cota máxima de vértices (en este caso 20), es decir, un modelo de prueba definido por un polígono de 20 lados, solamente tiene accesibles dos tipos de movimiento. En la Tabla 2.1 se pueden ver las probabilidades de cada tipo de movimiento en función del número de vértices del modelo de prueba.

## 2.4. Inferencia Bayesiana

Desde un punto de vista Bayesiano, no existe una diferencia fundamental entre los datos observados  $\mathbf{y}$  (las anomalías de gravedad de cada modelo) y los parámetros de un modelo estadístico  $\theta$  (el vector con los vértices del polígono de cada modelo): todos se consideran números aleatorios bajo ciertas distribuciones[Luo10]

Teniendo en cuenta, las siguientes probabilidades:

- Densidad a priori  $\pi(\mathbf{y})$ : la distribución de probabilidad de tener  $\mathbf{y}$  antes de considerar los parámetros estadísticos.
- Verosimilitud  $\pi(\mathbf{y}|\theta)$ : la distribución de probabilidad de  $\mathbf{y}$ , dado que la proposición  $\theta$  se cumpla.

La distribución conjunta de que se den los datos  $\mathbf{y}$  y los parámetros estadísticos  $\theta$  se puede representar como [Luo10; ZR21]:

$$\pi(\mathbf{y}, \theta) = \pi(\mathbf{y}|\theta)\pi(\mathbf{y}) \tag{2.5}$$

La distribución de probabilidad de  $\theta$ , dado que la proposición  $\mathbf{y}$  se cumpla o densidad a posteriori es determinada a través del teorema de Bayes [Luo10]:

$$\pi(\theta|\mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y}|\theta)\pi(\theta)}{\int \pi(\mathbf{y}, \theta) d\theta} \tag{2.6}$$

$$= \frac{\pi(\mathbf{y}|\theta)\pi(\theta)}{\int \pi(\mathbf{y}|\theta)\pi(\mathbf{y}) d\theta} \tag{2.7}$$

## 2.5. Algoritmo de Metropolis-Hastings

El algoritmo Metropolis-Hastings es un método de Monte Carlo de cadenas de Markov el cual permite ajustarse aproximadamente a una distribución de probabilidad (estimar integrales) a través de caminos aleatorios, proponiendo cambios aleatorios en los parámetros estadísticos durante cada iteración .

Un proceso de Markov es un proceso estocástico discreto donde la probabilidad de que ocurra un evento  $s'$  depende únicamente de su evento anterior  $s$ , esto se puede describir de la forma:

$$q(s, s')\pi(s) = q(s', s)\pi(s') \quad (2.8)$$

donde  $q(s, s')$  es la función de probabilidad de la transición del próximo estado  $s'$  dado el estado actual  $s$ . El estado contiene la información estadística en cada iteración, y se suele almacenar con un conjunto de parámetros estadísticos, normalmente en un vector y en el algoritmo original, este vector es de dimensión fija y conocida, pero esto no siempre es así, como en nuestro caso, donde desconocemos el número de vértices que tendrá el polígono que describe el perfil de anomalías al cual queremos realizar la inversión gravimétrica [Luo10].

Primero se supone un estado inicial  $s$  y se comienzan a efectuar cambios aleatorios en sus parámetros estadísticos y se crea el estado  $q(s, s')$ , para aceptar o rechazar dichos cambios se usa condición de Metrópolis.

La condición de Metrópolis es [Luo10; ZR21]:

$$u < \min(1, \alpha_{i \rightarrow j}) \quad (2.9)$$

donde  $u$  es un número aleatorio entre 0 y 1 y  $\alpha_{i \rightarrow j}$  es la probabilidad de aceptación entre la iteración  $i$  y  $j$  (ver ecuación 2.15).

Si se cumple la condición, el estado  $s'$  es aceptado y se toma como verdadero, luego se propone uno nuevo a partir de cambios aleatorios en alguno de sus parámetros. Si la condición es rechazada se continúa el estado anterior  $s$  y se sugieren otros cambios aleatorios a sus parámetros hasta que la condición sea aprobada. Luego de sucesivas iteraciones exitosas, el modelo se va aproximando lentamente a la distribución objetivo [ZR21].

El siguiente algoritmo es una modificación llamada *Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo* donde el número de parámetros del modelo estadístico es desconocido y durante cada iteración se pueden dar la creación o destrucción de nuevos parámetros (en este caso las posiciones de los vértices del polígono) según una función de densidad de probabilidad.

## 2.6. Algoritmo Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo

El algoritmo RJMCMC (*Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo*) es un siguiente paso del *Markov Chain Monte Carlo* donde las probabilidades a posteriori varían de dimensionalidad en cada iteración, en este caso es el número de vértices del polígono [GRE95].

### 2.6.1. Verosimilitud

Suponiendo la probabilidad de que los valores de gravedad con la ecuación de Talwani [TWL59] entre el polígono del modelo de ejemplo (el que se quiere encontrar) y el polígono del modelo de prueba sean equivalentes, sigue una distribución de tipo Normal o Gaussiano  $g(x|\mu, \sigma)$  con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , es decir,

$$g(x|\mu, \sigma) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (2.10)$$

para comparar el parecido de las mediciones gravimétricas con las del modelo propuesto, la Función de verosimilitud  $\pi(\mathbf{y}|\theta_k, \mathcal{M}_k)$  del modelo  $\mathcal{M}_k$  se define como [Luo10]:

$$\pi(\mathbf{y}|\theta_k, \mathcal{M}_k) = \exp \left[ -\frac{\sum_{j=0}^{m-1} (\hat{y}(\theta_k, \tilde{x}_j) - \Delta g_j)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2.11)$$

Donde  $\Delta g_j$  son las medidas de anomalías gravimétricas tomadas en campañas de campo, y  $\hat{y}(\theta_k, \tilde{x}_j)$  son las anomalías gravimétricas con el modelo de prueba definido por el polígono  $\theta_k$  (con  $k$  vértices) usando la ecuación (2.1); para este caso se toma  $\sigma = 0.2$ .

### 2.6.2. Densidad a Priori

La Densidad a priori  $\pi(\theta_k, \mathcal{M}_k)$  del modelo  $\mathcal{M}_k$  se define como [Luo10]:

$$\pi(\theta_k, \mathcal{M}_k) \propto \exp \left[ -\left( k^\gamma + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (\phi_i(\theta_k) - \omega_k)^2 \right) \right], \quad (2.12)$$

Donde el ángulo interno de un polígono regular es,

$$\omega_k = (k - 2)\pi/k, \quad k \geq 3,$$

y  $\phi_i(\theta_k)$  es el ángulo interno del vértice  $i$  del polígono  $\theta_k$  (con  $k$  vértices). La función penaliza la irregularidad del polígono y el número de vértices; para este caso se toma  $\gamma = 1.6$ .

### 2.6.3. Probabilidades para movimientos de Creación-Destrucción

Pero la dimensión o numero de vértices  $k$  del polígono  $\theta_k$  puede cambiar de una iteración a otra al crear o destruir aleatoriamente vértices.

La probabilidad para movimientos de Creación-Destrucción  $\Upsilon_k(\sigma_a)$  se define como [Luo10]:

$$\Upsilon_k(\sigma_a) = \frac{2\pi d_{k+1}kr}{b_k(k+1)f_n(r|0, \sigma_a)}, \quad (2.13)$$

Donde

$$f_n(r|\mu, \sigma_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma_a}\right)^2\right], \quad (2.14)$$

es la función de Gauss normalizada con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma_a$  en  $r$ .

Las probabilidades de realizar movimientos de creación  $b_k$  y destrucción  $d_{k+1}$  quedan restringidos para limitar el número de vértices entre 3 y un valor máximo establecido en 20.

### 2.6.4. Probabilidad de aceptación

La proposición de cambiar del modelo  $(\theta_i, \mathcal{M}_i)$  al modelo  $(\theta_j, \mathcal{M}_j)$  es aceptada con la condición de Metrópolis  $u < \min(1, \alpha_{i \rightarrow j})$  donde  $u$  es un numero aleatorio entre 0 y 1.

La Probabilidad de aceptación  $\alpha_{i \rightarrow j}$  para el algoritmo según el tipo de movimiento es [Luo10]:

$$\alpha_{i \rightarrow j}(\theta_i, \theta_j) = \frac{\pi(\theta_j, \mathcal{M}_j|\mathbf{y})r_{j \rightarrow i}(\theta_j)q_{j \rightarrow i}(\theta_j, \theta_i)}{\pi(\theta_i, \mathcal{M}_i|\mathbf{y})r_{i \rightarrow j}(\theta_i)q_{i \rightarrow j}(\theta_i, \theta_j)} \quad (2.15)$$

donde  $r_{i \rightarrow j}(\theta_i)$  es la probabilidad de que la transición del modelo  $\mathcal{M}_i$  al modelo  $\mathcal{M}_j$  sea dada, y  $q_{i \rightarrow j}(\theta_i, \theta_j)$  es la densidad de probabilidad a partir de la cual se extraen los parámetros (vértices del polígono)  $\theta_j$  dados los parámetros  $\theta_i$ .

Entonces, según cada tipo de movimientos, tenemos:

#### Simple

$$\alpha_{i \rightarrow j} = \frac{\pi(\mathbf{y}|\theta'_k, \mathcal{M}_k) \pi(\theta'_k, \mathcal{M}_k)}{\pi(\mathbf{y}|\theta_k, \mathcal{M}_k) \pi(\theta_k, \mathcal{M}_k)}, \quad (2.16)$$

### Creación

$$\alpha_{i \rightarrow j} = \frac{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \mathcal{M}_{k+1}) \pi(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \mathcal{M}_{k+1})}{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_k, \mathcal{M}_k) \pi(\boldsymbol{\theta}_k, \mathcal{M}_k)} \Upsilon_k(\sigma_a), \quad (2.17)$$

### Destrucción

$$\alpha_{i \rightarrow j} = \frac{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_k, \mathcal{M}_k) \pi(\boldsymbol{\theta}_k, \mathcal{M}_k)}{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \mathcal{M}_{k+1}) \pi(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \mathcal{M}_{k+1})} \Upsilon_k(\sigma_a), \quad (2.18)$$

Además de la condición del algoritmo de Metropolis–Hastings [Met+53; Has70], donde  $u$  es un número aleatorio entre 0 y 1, se rechazan aquellas iteraciones con errores de punto flotante tipo Numpy.

Además del método propuesto por Luo [TWL59; Luo10], se emplea el algoritmo Shamos-Huey [SH76], con la librería de GitHub `lycantropos/bentley_ottmann` \* [Ibr20] para rechazar polígonos con intersecciones, gracias a esto desaparecen los bucles durante las simulaciones que invalidan los cálculos siguientes, pero aparecen “espículas” en los polígonos, es decir, vértices alejados con ángulo interno próximo a cero.

### 2.6.5. Paralelización de funciones en Python

Para el cómputo en paralelo de las funciones descritas en las ecuaciones 2.1, 2.11 y 2.12, se utiliza Numpy [LPS15] de Python, específicamente el decorador JIT (*Just-in-Time compilation*) con la librería `llvmlite` de Python:

```
@njit(fastmath=True, error_model='numpy', parallel=True)
```

Esto permite paralelización de trozos de código a través de la compilación directa en lenguaje de máquina, para este caso, habilitando la opción `'tbb'` (*Intel Threading Building Blocks*) como opción de paralelización para los dos núcleos que ofrecen en las CPU de las máquinas virtuales de Colab, dependiendo de las siguientes opciones en el archivo de configuración `.numba_config.yaml` según se trabaje en serie o en paralelo:

**En serie** `DISABLE_JIT: 1`

**En paralelo** `DISABLE_JIT: 0`

`NUM_THREADS: 2`

`THREADING_LAYER: 'tbb'`

---

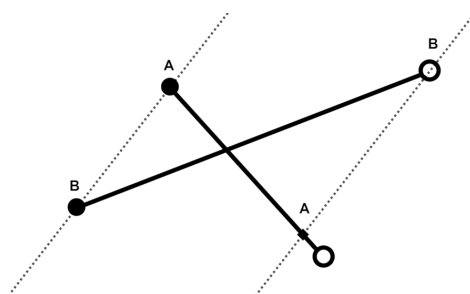
\*<https://bentley-ottmann.readthedocs.io>

## 2.7. Algoritmo Shamos-Hoey

El algoritmo Shamos-Hoey [SH76] es un método que busca la existencia de por lo menos una intersección en un conjunto de  $N$  segmentos, pero no busca donde están dichas intersecciones exactamente, algo que requiere un mayor costo computacional.

Por lo tanto, este algoritmo es suficiente e ideal como condición de rechazo para evitar que el polígono de prueba tenga intersecciones entre sí, donde la ecuación de Talwani [TWL59] y las usadas para calcular el Área y centroide [Bou97] del polígono no son válidas, ya que es más rápido que otros que buscan las coordenadas de las intersecciones, algo que no es de nuestro interés en nuestro método, al menos para las primeras versiones. Esto es, porque un polígono con intersecciones tiene bucles, unos levógiros, otros dextrógiros que producen aportes positivos y negativos de área (o gravedad en caso de la ecuación de Talwani) que se cancelan entre sí.

Para el caso de dos segmentos, hay una intersección entre sí, cuando el orden en que aparecen sus puntos extremos están intercambiados en una dirección determinada (Figura 2.7).

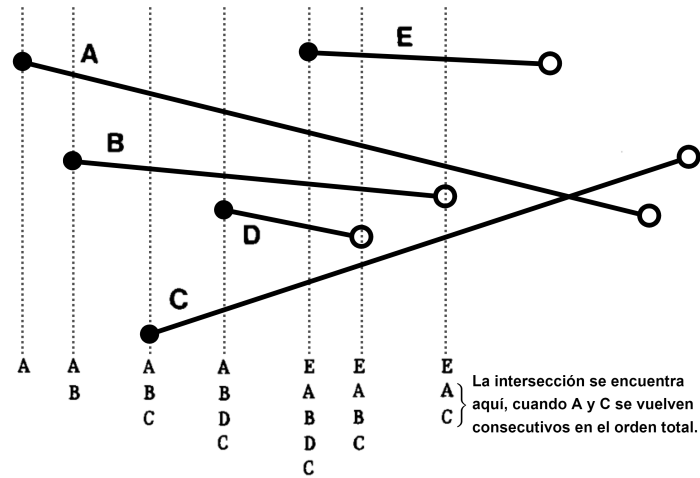


**Figura 2.7** Intersección entre dos segmentos, primero con el orden de segmentos  $AB$  y luego intercambiándose en  $BA$ , únicamente posible cuando hay una intersección. Las líneas punteadas son paralelas

El algoritmo busca si hay por lo menos una intersección El algoritmo escanea una serie de  $N$  segmentos de izquierda a derecha según el sistema de referencia a través de líneas verticales de arriba hacia abajo en los  $2N$  puntos extremos de cada segmento, luego, el algoritmo va ordenando dichos puntos de tal forma que se añaden en listas llamadas “orden total”.

Se mantienen las mismas reglas de ornamento durante la operación. Teniendo en cuenta el sistema de referencia escogido, por ejemplo: el primer punto extremo de cada segmento (del lado izquierdo) de acuerdo a como va apareciendo y remueve del orden total el último punto extremo (del lado derecho). Luego se busca en cada orden total un par de segmentos consecutivos que se intersecan. La búsqueda termina cuando se encuentra el primero, o cuando se ha analizado todo el conjunto y no se ha encontrado ninguna intersección. Con este método se evitan tener que analizar todas las combinaciones posibles de pares de segmentos.





**Figura 2.8** Operación del Algoritmo Shamos-Hoey y descripción de cambios en el orden total al buscar una intersección entre segmentos. Inspirada en figura de «Geometric intersection problems» [SH76]

Un ejemplo con 5 segmentos  $A, B, C, D$  y  $E$  analizando cada par de segmentos consecutivos en cada orden total hasta encontrar una intersección, detectada cuando aparecen los segmentos consecutivos  $A$  y  $C$ , (Figura 2.8 y en la Tabla 2.2).

|         |   |
|---------|---|
| $A$     | Aparece el segmento $A$ .<br>No hay otro segmento para comparar   |
| $AB$    | Aparece el segmento $B$ debajo de $A$ .<br>Los segmentos consecutivos $A$ y $B$ no se intersecan  |
| $ABC$   | Aparece el segmento $C$ debajo de $B$ .<br>Ninguna pareja de segmentos consecutivos se intersecan.  |
| $ABDC$  | Aparece el segmento $D$ entre $B$ y $C$ .<br>Ninguna pareja de segmentos consecutivos se intersecan.  |
| $EABDC$ | Aparece el segmento $E$ encima de $A$ .<br>Ninguna pareja de segmentos consecutivos se intersecan.  |
| $EABC$  | Sale el Segmento $D$ del orden total.<br>Ninguna pareja de segmentos consecutivos se intersecan.  |
| $EAC$   | Sale el Segmento $D$ del orden total.<br>Los segmentos consecutivos $E$ y $A$ no se intersecan,<br>pero los segmentos consecutivos $A$ y $C$ <b>si se intersecan.</b> |

**Tabla 2.2** Descripción de cambios en el orden total al buscar una intersección entre segmentos en el ejemplo del algoritmo Shamos-Hoey de la Figura 2.8

## **2.8. Pasos para la inversión gravimétrica**

Primero partimos de un conjunto de valores de gravedad al cual queremos realizar la inversión, o a modo de ejemplo definimos un polígono para el modelo objetivo, lo que queremos ajustarnos a lo más posible con el método inverso, y calculamos con él, las anomalías de gravedad del modelo objetivo usando el método directo (ecuación 2.1, de Talwani [TWL59]).

Suponemos un modelo inicial básico definiendo, por ejemplo, un triángulo; y en las posteriores iteraciones se hacen modificaciones aleatorias al polígono en las cuales el número de vértices aumentar o decrecer de acuerdo a como se describió en la sección 2.3.

Luego se compara los valores de las anomalías de gravedad del modelo de prueba con las del modelo objetivo calculados con la ecuación 2.1 en la condición de Metrópolis  $u < \min(1, \alpha_{i \rightarrow j})$  [Met+53; Has70], también a diferencia del método planteado por Luo[Luo10], se hace implementa el algoritmo Shamos-Huey para rechazar polígonos con intersecciones entre sí o cuando se presentan errores numéricos. Si todas las condiciones se cumplen, el modelo es aceptado y se realiza todo el proceso nuevamente.

Luego de varias iteraciones exitosas, los modelos de prueba se aproximan a las del modelo objetivo con respecto a sus valores de gravedad. De la misma forma, los polígonos asociados al modelo de prueba se aproximará un poco más a los del modelo objetivo (en caso de haberse definido previamente), y esto es el método inverso utilizando técnicas de Monte Carlo.

## **2.9. Resultados y Perspectivas**

Las figuras de esta sección muestran el comportamiento durante las iteraciones exitosas de una simulación, ejemplo, el añadir una condición para prevenir intersecciones entre los polígonos ha mejorado notablemente los resultados de las simulaciones.

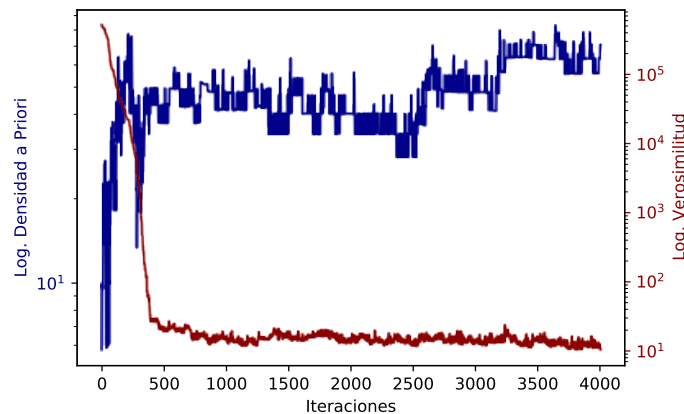
Aunque la simulación depende de procesos iterativos (las cadenas de Markov de longitud variable), paralizar las funciones de densidad de probabilidad mejora los tiempos de cómputo por iteración.

Sin embargo, siguen apareciendo “espiculas” que deberían evitarse tal como está definida la función de densidad a priori (Ecuación 2.12) que depende de los ángulos internos, se intentó con otras definiciones para función con medias armónicas y geométricas, pero las funciones propuestas por Luo [Luo10] dan los mejores resultados.

Este algoritmo es una primera aproximación para técnicas de inversión gravimétrica en 2D con técnicas de Monte Carlo se sugiere para futuras versiones el uso de distintos

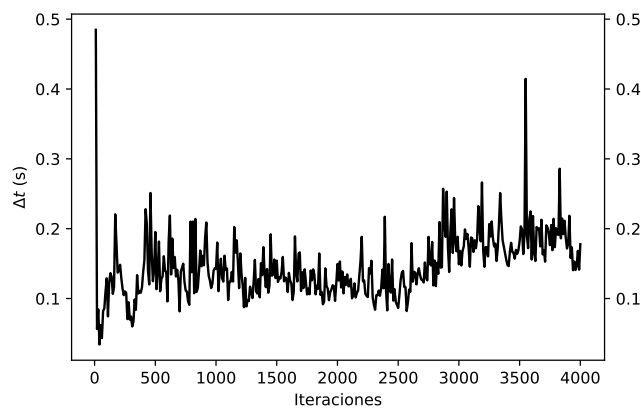
polígonos con contrastes de densidad variables, o un sistema de capas representadas en series de vectores (también de longitud variable), más acorde un caso de vida real.

Las variaciones de los valores de las funciones de verosimilitud y densidad a priori de los modelos de prueba durante cada iteración durante una de las simulaciones se muestra en la Figura 2.9. Si convergen a ciertos rangos de valores, el ajuste de los modelos de prueba con respecto al modelo objetivo probablemente será lo suficientemente bueno, aunque a partir de cierto tiempo puede cambiar la tendencia.



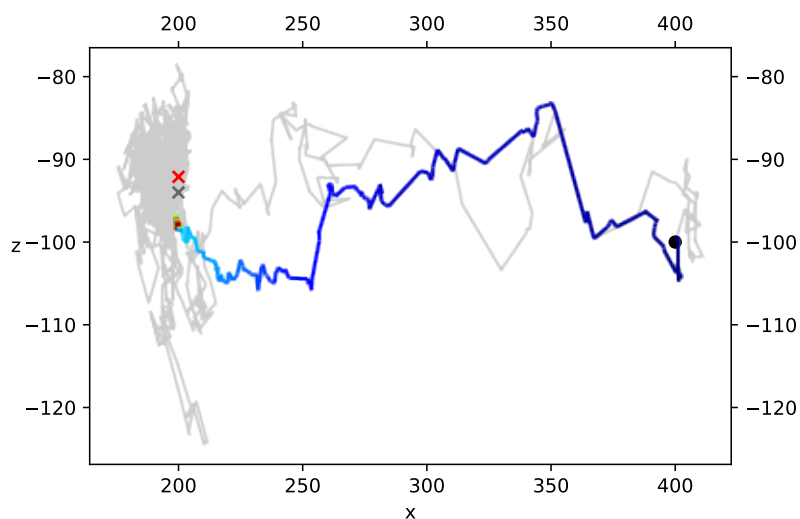
**Figura 2.9** Evolución de las funciones de verosimilitud y densidad a priori.

La duración de las iteraciones exitosas en segundos con una media móvil de 10 iteraciones durante una de las simulaciones para ver el comportamiento de tiempo de cómputo general durante la simulación se muestra en la Figura 2.10. Los tiempos de cómputo aumentan mientras los modelos de prueba se ajustan al modelo objetivo, idealmente hasta estabilizarse con algunas fluctuaciones estadísticas por la aparición de “espículas”. En ocasiones se presentan tiempos anormalmente largos debido al carácter estocástico de la simulación. Se utilizó tqdm [tqd22] para ver una barra de progreso durante la simulación y la creación de videos.



**Figura 2.10** Tiempo de cómputo con media móvil para cada 10 iteraciones exitosas.

Se usan dos formas de calcular el recorrido de los modelos de prueba durante la simulación se muestran en un ejemplo de simulación en la Figura 2.11. El camino gris es calculado con la media de todos los vértices del modelo de prueba durante cada iteración, al estilo de Luo [Luo10]. El camino arcoíris se realiza con una nueva aproximación, calculando el centroide del modelo de prueba durante cada iteración.



**Figura 2.11** Ejemplo de recorrido del centroide (arco-iris) y punto medio de los vértices de los polígonos (gris) durante la simulación.

El centroide  $(C_x, C_y)$  un polígono de área  $A$  con  $n$  vértices  $\{x_i, y_i\}$  es [Bou97]<sup>†</sup>:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \quad (2.19)$$

$$C_x = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i), \quad (2.20)$$

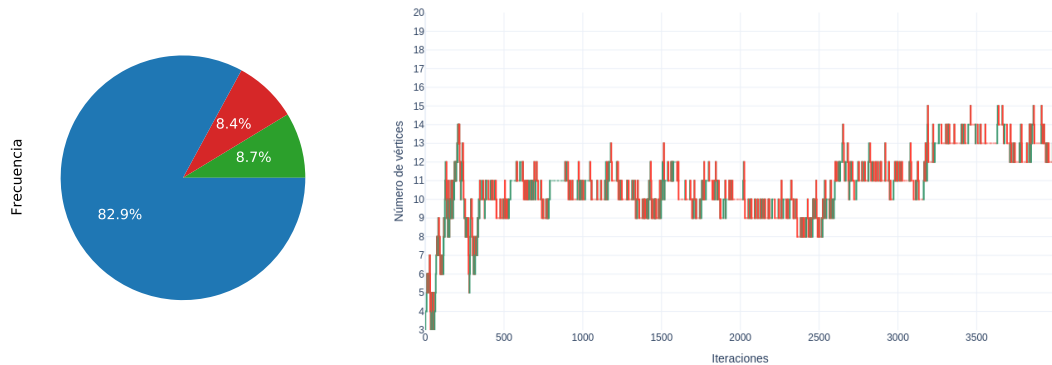
$$C_y = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i), \quad (2.21)$$

Ecuación válida para polígonos simples que no presenten bucles, es decir, que no tienen intersecciones entre sí mismos.

Las repeticiones de los colores muestran como los modelos de prueba se acercan rápidamente al centroide del modelo de prueba, representada con una  $\times$  roja, de la misma forma, la  $\times$  gris es la media de los vértices del modelo objetivo (Figura 2.11).

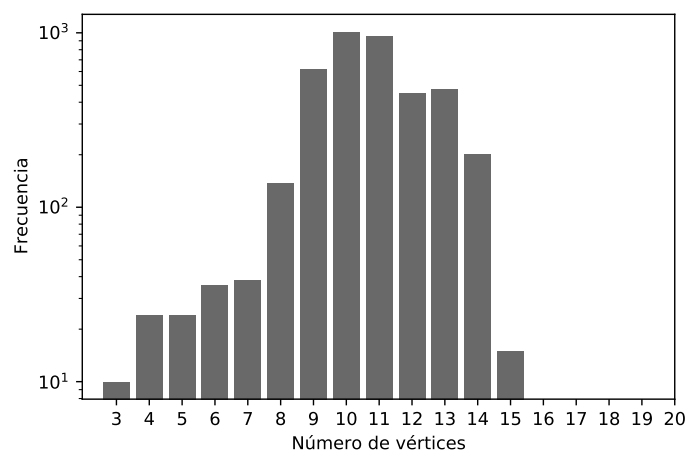
<sup>†</sup><http://paulbourke.net/geometry/polygonmesh/>

Una vez el centroide de los modelos de prueba es cercano, se aproximan mucho más lentamente y los movimientos de las iteraciones intentan aproximarse a la forma del modelo objetivo. Se observa como el camino gris es mucho más errático a medida que se acerca al modelo objetivo y queda claro como el cálculo del recorrido mediante centroides es un indicador mucho más claro de la evolución de la simulación.



**Figura 2.12** Ejemplo de frecuencias en los tipos de movimiento durante la simulación.

Un diagrama de pie de los porcentajes totales de tipos de movimientos y uno de evolución en cada iteración de las poblaciones de movimientos se muestran en la Figura 2.12, donde los movimientos simples (azul en caso del diagrama de pie), creación (verde) y destrucción (rojo), se observa como los movimientos simples son los más comunes, este efecto no está directamente programado en el algoritmo y ocurre como un fenómeno emergente de este mismo, es un buen indicador de que la simulación se acerca al número de vértices del modelo objetivo (información que desconoce la simulación).

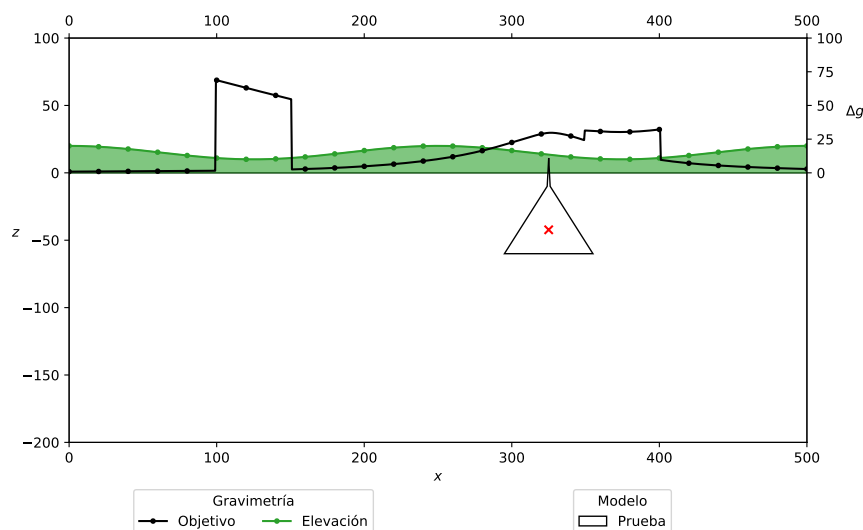


**Figura 2.13** Ejemplo de evolución del número de vértices por iteración y su histograma del número de vértices de los polígonos durante la simulación.

Independiente del número de vértices del modelo inicial (un triángulo generalmente), durante las primeras iteraciones se recorren todos los números de vértices posibles, mientras el modelo tiende rápidamente al centro del modelo objetivo, como se ve en la Figura (2.9), esto es, conociendo únicamente los valores de anomalías gravimétricas y nunca su forma. Luego, a partir de cierto momento el número de vértices se estabiliza en el rango, aunque difiere del número de vértices del modelo objetivo.

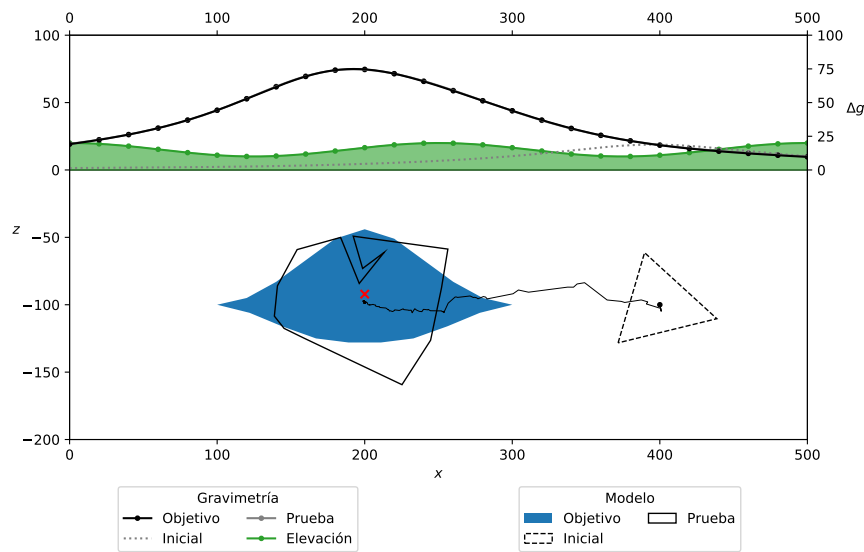
La distribución del número de vértices durante la simulación puede verse en la Figura 2.13. Donde se establece un número máximo arbitrario de 20 vértices y por razones geométricas, un número mínimo de 3 vértices (triángulo), programadas a mano en las probabilidades de los movimientos para los próximos tipos de movimiento en cada iteración.

Un ejemplo de errores numéricos donde aparecen algunas partes con valores exagerados se muestra en la Figura 2.14, sucede cuando el método con la ecuación de Talwani falla al atravesar al menos uno de los vértices del modelo la línea  $z = 0$ , y al realizar el método directo para la comparación del modelo objetivo.

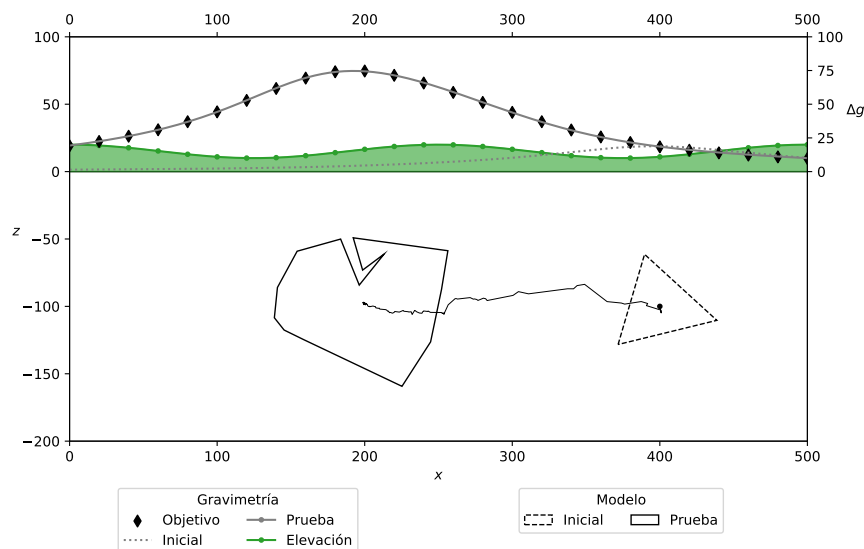


**Figura 2.14** Ejemplo de errores numéricos durante la simulación.

Durante la simulación, los centroides de los modelos de prueba se ajustan rápidamente al modelo objetivo, pero aun simulando 10000 iteraciones exitosas, los modelos de prueba no se ajustan exactamente a la forma del modelo objetivo, y comienzan a aparecer “espículas” que pueden generar errores durante las simulaciones, como la aparición de errores numéricos como los de la Figura 2.3 si una de las “espículas” atraviesa  $z = 0$ . O polígonos con “masas” a gran profundidad, lejos del área de estudio que no generan cambios en las anomalías de gravedad de modo significativo, si una de las “espículas” se aleja demasiado.



**Figura 2.15** Ejemplo de uno de los resultados aceptables tras ejecutar el algoritmo RJMCMC con información del polígono objetivo. Se muestra el polígono del modelo objetivo, su centroide represento con una  $\times$  roja, el ultimo polígono después de 4000 iteraciones exitosas y el recorrido de 1000 de los centroides de los modelos de prueba. El polígono de línea segmentada representa el modelo inicial y la curva punteada gris es su perfil de anomalías gravimétricas.



**Figura 2.16** Ejemplo de uno de los resultados aceptables tras ejecutar el algoritmo RJMCMC sin información del polígono objetivo. Solo se muestra la información de las 26 anomalías de gravedad que son las que el algoritmo analiza para la inversión, el ultimo polígono después de 4000 iteraciones exitosas y el recorrido de 1000 de los centroides de los modelos de prueba. El polígono de línea segmentada representa el modelo inicial y la curva punteada gris es su perfil de anomalías gravimétricas.





## Referencias, Algoritmo *Reversible-Jump Markov Chain Monte Carlo*

- [Met+53] Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller y Edward Teller. «Equation of State Calculations by Fast Computing Machines». En: *J. Chem. Phys.* 21.6 (jun. de 1953), págs. 1087-1092. ISSN: 0021-9606. DOI: 10.1063/1.1699114. URL: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1699114>.
- [TWL59] Manik Talwani, J. Lamar Worzel y Mark Landisman. «Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone». En: *J. Geophys. Res.* 64.1 (ene. de 1959), págs. 49-59. ISSN: 01480227. DOI: 10.1029/JZ064i001p00049. URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/JZ064i001p00049>.
- [Has70] W. K. Hastings. «Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications». En: *Biometrika* 57.1 (abr. de 1970), págs. 97-109. ISSN: 1464-3510. DOI: 10.1093/biomet/57.1.97. URL: <https://academic.oup.com/biomet/article/57/1/97/284580>.
- [SH76] Michael Ian Shamos y Dan Hoey. «Geometric intersection problems». En: vol. 1976-Octob. 1976, págs. 208-215.
- [GRE95] PETER J. GREEN. «Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination». En: *Biometrika* 82.4 (1995), págs. 711-732. ISSN: 0006-3444. DOI: 10.1093/biomet/82.4.711. URL: <https://academic.oup.com/biomet/article-lookup/doi/10.1093/biomet/82.4.711>.
- [Bou97] P Bourke. *Polygons and meshes*. 1997. URL: <http://paulbourke.net/geometry/polygonmesh/>.
- [Che+06] Chao Chen, Jianghai Xia, Jiangping Liu y Guangding Feng. «Nonlinear inversion of potential-field data using a hybrid-encoding genetic algorithm». En: *Comput. Geosci.* 32.2 (mar. de 2006), págs. 230-239. ISSN: 00983004. DOI: 10.1016/j.cageo.2005.06.008. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0098300405001366>.
- [Luo10] Xiaolin Luo. «Constraining the shape of a gravity anomalous body using reversible jump Markov chain Monte Carlo». En: *Geophysical Journal International* 180.3 (mar. de 2010), págs. 1067-1079. ISSN: 0956540X. DOI: 10.1111/j.13

- 65-246X.2009.04479.x. URL: <https://academic.oup.com/gji/article-lookup/doi/10.1111/j.1365-246X.2009.04479.x>.
- [LPS15] Siu Kwan Lam, Antoine Pitrou y Stanley Seibert. «Numba: A llvm-based python jit compiler». En: *Proceedings of the Second Workshop on the LLVM Compiler Infrastructure in HPC*. 2015, págs. 1-6. URL: <https://numba.pydata.org/>.
- [Ibr20] Azat Ibrakov. *Bentley Ottmann*. 2020. URL: [https://github.com/lycantropos/bentley\\_ottmann](https://github.com/lycantropos/bentley_ottmann).
- [ZR21] Juan Camilo Zapata y Johans Restrepo. «Self-Adaptive Acceptance Rate-Driven Markov Chain Monte Carlo Method Applied to the Study of Magnetic Nanoparticles». En: *Computation* 9.11 (nov. de 2021), pág. 124. ISSN: 2079-3197. DOI: 10.3390/computation9110124. URL: <https://www.mdpi.com/2079-3197/9/11/124>.
- [tqd22] tqdm developers. *tqdm*. 2022. URL: <https://github.com/tqdm/tqdm>.

*Any sufficiently advanced technology is indistinguishable from magic.*

---

Arthur C. Clarke -  
Clarke's three laws

## Capítulo 3

# Uso de *Machine Learning* para Llenar información de anomalías gravimétricas en el centro de Antioquia

---

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Introducción . . . . .  | 71 |
| 3.2. Base de Datos . . . . .   | 72 |
| 3.2.1. NOAA ( <i>National Oceanic and Atmospheric Administration</i> ) . . . . . | 72 |
| 3.2.2. SRTM ( <i>Shuttle Radar Topography Mission</i> ) . . . . .                | 74 |
| 3.3. Técnicas de <i>Machine Learning</i> para regresiones . . . . .              | 79 |
| 3.3.1. Support Vector Machines (SVM) . . . . .                                   | 79 |
| 3.3.1.1. Support Vector Regression (SVR) . . . . .                               | 80 |
| 3.4. Red Neuronal . . . . .  | 82 |
| 3.5. Resultados . . . . .  | 84 |
| 3.6. Perspectivas . . . . .  | 90 |
| Referencias, Machine Learning . . . . .  | 91 |

---

### 3.1. Introducción

El propósito de este capítulo es complementar bases de datos de campañas gravimétricas previas con métodos de *Machine Learning* para tener modelos predictivos.

La toma de muestras está supeditada a la dificultad de acceso a ciertas regiones, la dificultad de acceso a un gravímetro y lo que conlleva durante una nueva campaña gravimétrica.

En este caso, se utilizan bases de datos públicas de la NOAA para Colombia para tratar de llenar con información de anomalías de aire libre y Bouguer de forma discreta y predecir de forma continua las anomalías en un área del centro de Antioquia (entre las latitudes 5.75N y 6.85N, y entre las longitudes 75.92W 75.25W).

Este capítulo es un estudio preliminar y realiza una primera aproximación al uso de nuevas herramientas de programación aplicada a tratamiento de datos geofísicos, específicamente en el uso de regresores y redes neuronales para rellenar anomalías de aire libre y Bouguer en una región de específica de Antioquia con información de entrenada de una bases de datos de anomalías para Colombia (1997).

La idea con esto es que los estudiantes interesados en gravimetría puedan entrenar modelos de *Machine Learning* (ML) en cualquier lugar con internet con máquinas virtuales como Colab (Google Colaboratory) haciendo uso de bases de datos libres que se puedan descargar fácilmente con simples códigos de Python, a pesar de que estas bases de datos puedan estar desactualizadas. Siendo un paso intermedio a la solicitud y análisis de herramientas más complejas.

## 3.2. Base de Datos

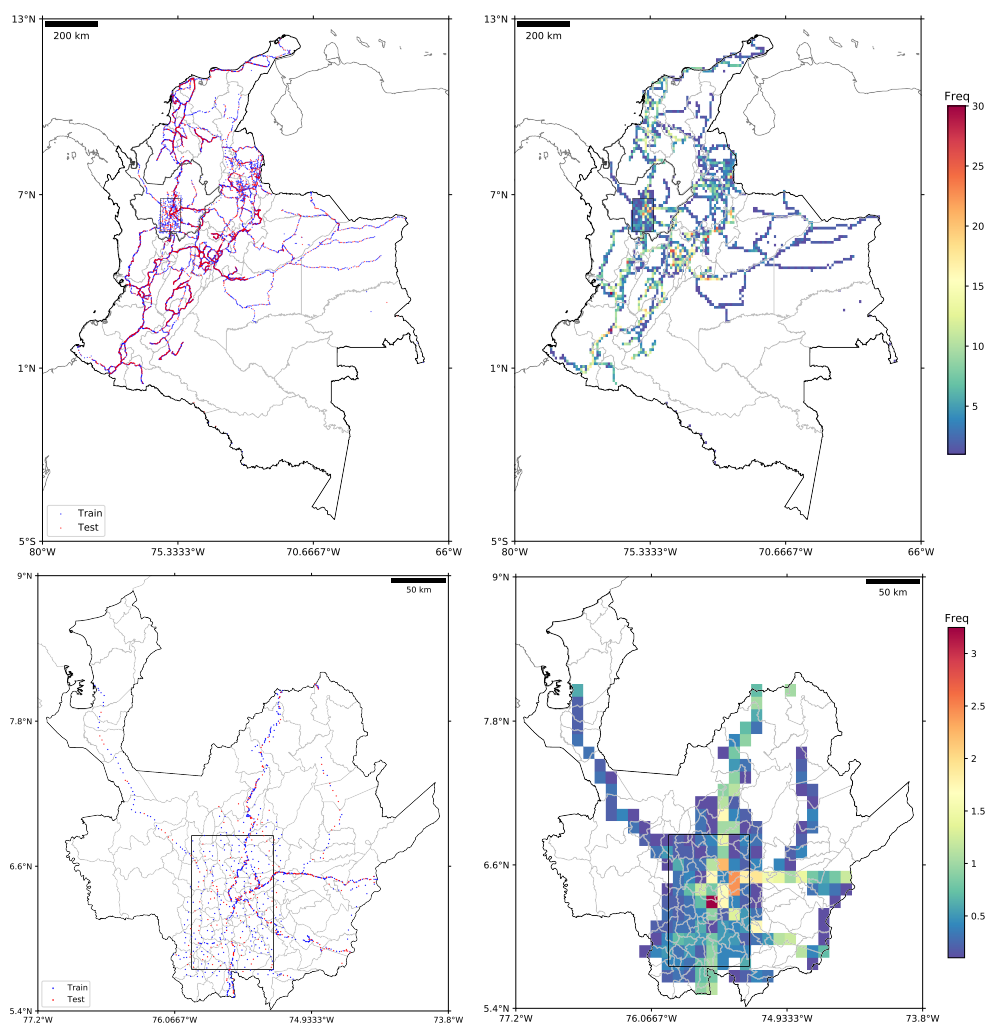
Para este trabajo son utilizadas dos bases de datos de libre acceso distintas. La primera consiste en una base de datos históricos anomalías gravimétricas de la NOAA para Colombia. La segunda corresponde a datos de elevación medidos por satélite SRTM.

### 3.2.1. NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*)

La base de datos de la NOAA Gravity Data de Colombia [Nce08] de 1997 llamado GRAVCD-co1omb97, consta de 9050 registros realizados por el Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC) durante los años 1958 a 1996 a nombre de Dr. Myriam Ardila Torres, subdirectora de Cartografía y entregada a la NOAA en abril de 1997 y se pueden consultar de forma libre\*. Los parámetros incluyen número de la estación, elevación sobre el nivel del mar, anomalías de aire libre y anomalías de Bouguer tanto simple como completa (con  $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ ) calculadas usando el elipsoide de referencia GRS80. La Figura 3.1 muestra la base de datos para Colombia, Antioquia y el área de estudio.

---

\*<https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gravity/1999/data/regional/colomb97>



**Figura 3.1** Distribución de la base de datos en Colombia (arriba) y en Antioquia (abajo). A la izquierda se muestra si están en el grupo Train (azul) o Test (rojo), y a la derecha el histograma de la frecuencia de puntos en una sola sub-región (rectángulo de color) en la barra de vertical. El rectángulo en el centro de Antioquia representa el área de estudio.

La base de (9050) datos se dividió en dos partes Train (Entrenamiento) y Test (Prueba) con ayuda de la librería de Python *Sklearn* [Ped+11] implementando la función `train_test_split`<sup>†</sup> de tal forma que Test (3017) sea aproximadamente un tercio del tamaño de Train (6033). Los puntos se pueden ver en lado izquierdo de la Figura 3.1, los puntos del grupo Train son azules y los puntos del grupo Test son rojos.

Además, se utilizó `np.random.RandomState(137)` como generador aleatorio (o semilla aleatoria) para que los resultados de la división de la base de datos sean en orden pseudo-aleatorios, pero puedan ser reproducibles cada vez que se ejecuta la simulación.

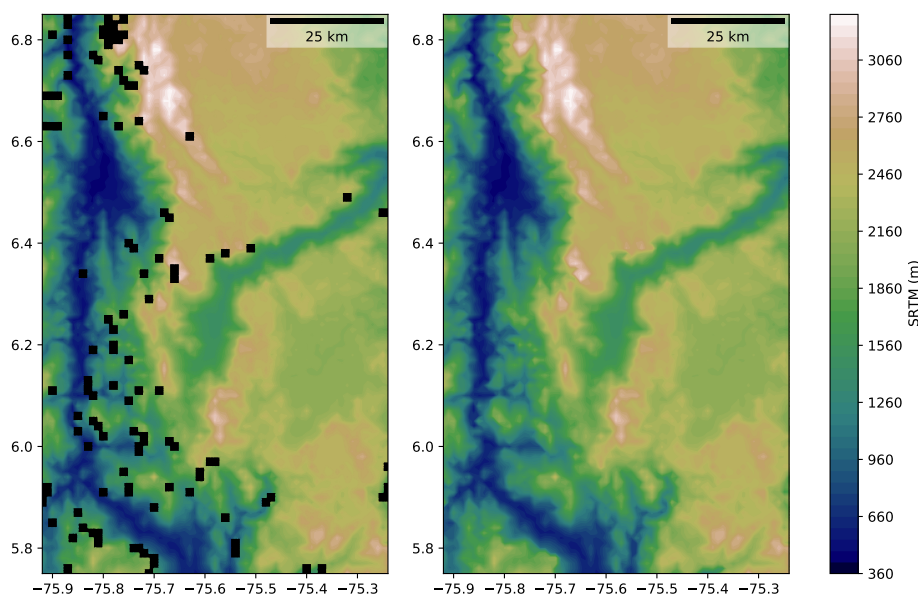
<sup>†</sup>[https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.model\\_selection.train\\_test\\_split.html](https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.model_selection.train_test_split.html)

El resultado de la distribución hecha tanto para los datos de la base de datos de Colombia, como para la selección hecha en el departamento de Antioquia y el área de estudio escogida, se muestra en lado derecho de la Figura 3.1, cada rectángulo tiene un color asociado a la frecuencia de puntos en esa sub-región, la barra vertical indica la frecuencia asociada a ese color.

### 3.2.2. SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission*)

Para obtener información completa de elevaciones en la región centro de Antioquia se usaron datos del modelo de elevación digital (DEM) SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission*) usando la librería de Python `srtm.py` de GitHub <sup>‡</sup> por Tomo Krajina [Kra20].

Sin embargo, hay algunas pocas locaciones sin datos (vacías) que son rellenadas por interpolaciones lineales con la opción `.interpolate(method='slinear')` Pandas en Python que utiliza `scipy.interpolate.interp1d` tal y como se muestra en la Figura 3.2 donde las regiones en negro no tienen datos. Este paso es necesario para el correcto entrenamiento de los métodos de *Machine Learning* usados en el capítulo.



**Figura 3.2** Corrección de datos faltantes en la base de datos SRTM. En el lado izquierdo, la base de datos original con regiones vacías. En el lado derecho, la base de datos “corregida” con interpolaciones lineales con `scipy.interpolate.interp1d` en las opciones de Pandas. Las partes faltantes se muestran en negro, los demás colores muestran la elevación SRTM en metros usando el mapa de colores `gist_earth`.

<sup>‡</sup><https://github.com/tkrajina/srtm.py>

Mukul, Srivastava, Jade y Mukul [Muk+17] afirman en «Uncertainties in the Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) Heights: Insights from the Indian Himalaya and Peninsula» lo siguiente (traducción libre)

Los datos digitales de elevación del terreno (DTED) de la Misión Topográfica Shuttle Radar (SRTM) se utilizan con la opinión consensuada de que tiene una precisión vertical mínima de 16m de error absoluto con un 90% de confianza (error cuadrático medio (RMSE) de 9.73 m) al rededor del mundo. Sin embargo, la precisión vertical de los datos disminuye con el aumento de la pendiente y la elevación debido a la presencia de grandes valores atípicos y vacíos.

Mukul, Srivastava, Jade y Mukul [Muk+17] realizan un análisis de errores entre el modelo de elevación digital SRTM (bandas C y X) que son las elevaciones examinadas  $H_{ex}$ , y son las alturas de referencia  $H_{ref}$ , Kolecka y Kozak [KK14] usaron un DEM para Polonia llamado CODGiK.

$$H_{diff} = H_{ex} - H_{ref}, \tag{3.1}$$

$$ME = \sum \frac{H_{diff}}{n}, \tag{3.2}$$

$$SDE = \sqrt{\frac{(H_{diff} - ME)^2}{n - 1}}, \tag{3.3}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum H_{diff}^2}{n}}, \tag{3.4}$$

Donde ME es el error medio, SDE es el error estándar y RMSE es raíz de la desviación cuadrática media. Algunos de sus resultados se muestran en la Tabla 3.1.

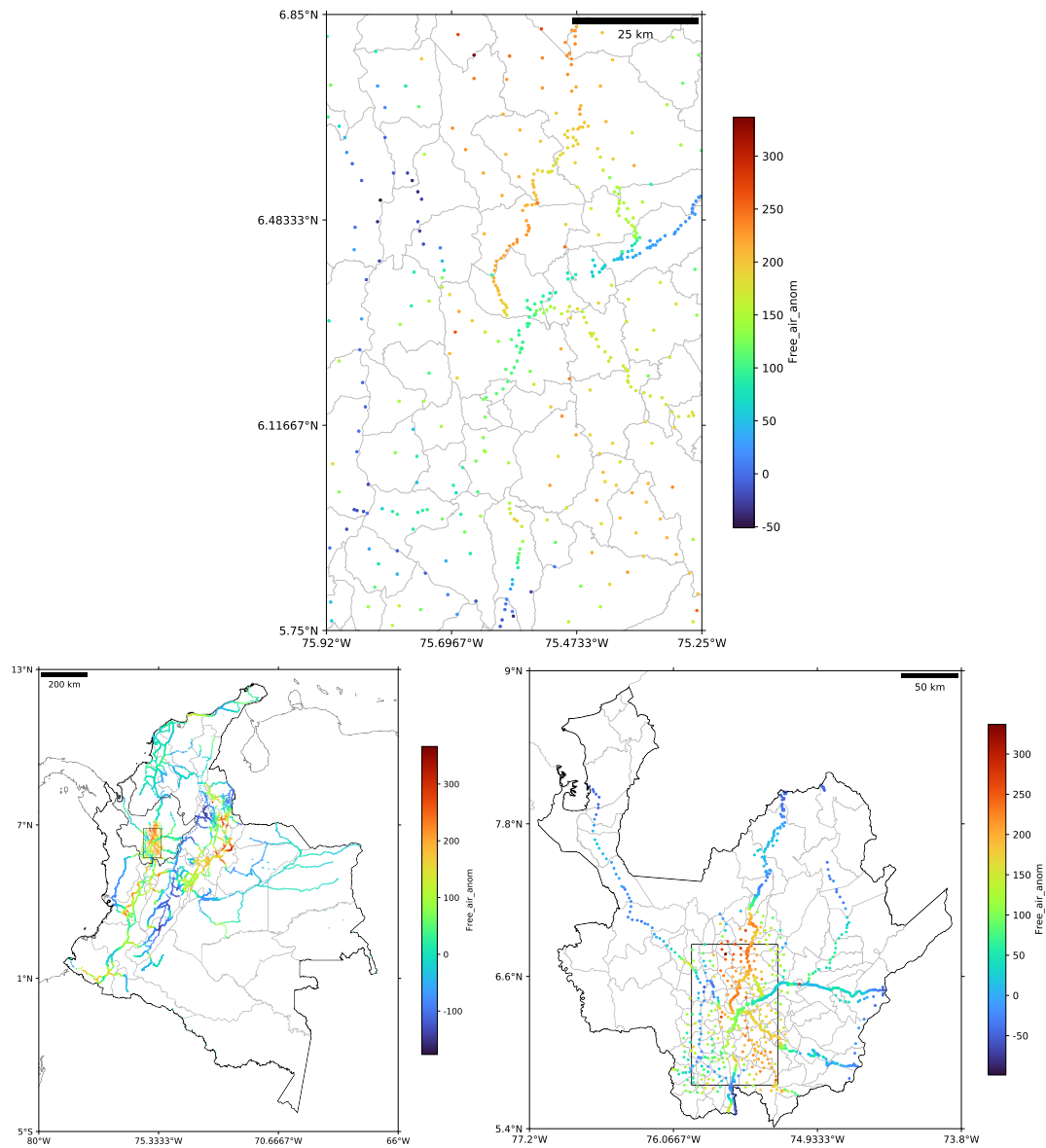
| SRTM DEM | ME (m) | SDE (m) | RMSE (m) |
|----------|--------|---------|----------|
| C-band   | 4.31   | 14.09   | 14.74    |
| X-band   | 9.03   | 37.40   | 38.47    |

**Tabla 3.1** Errores en elevaciones para el modelo de digital SRTM Fragmento de tabla tomado de «Assessment of the Accuracy of SRTM C- and X-Band High Mountain Elevation Data: a Case Study of the Polish Tatra Mountains» Kolecka y Kozak [KK14]

Para este estudio no se tuvieron en cuenta estas incertidumbres, sin embargo, se analizaron las diferencias entre los valores de las elevaciones sobre el nivel del mar reportados entre la base de GRAVCD-colomb97 y la SRTM.

## Machine Learning

Los mapas para las anomalías de aire libre de la base de datos del NOAA, para Colombia, Antioquia y el área de estudio se muestran en la Figura 3.3.

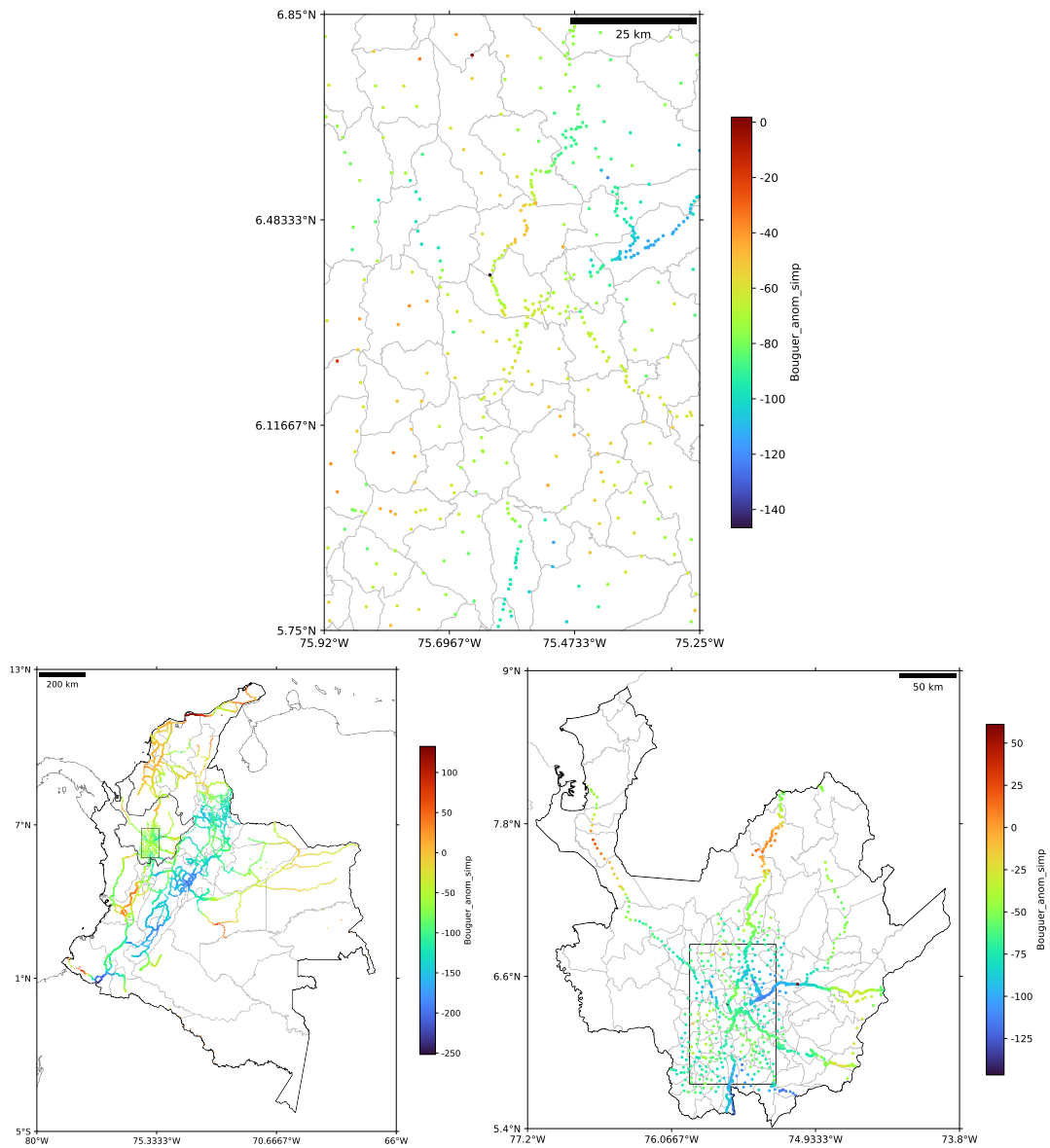


**Figura 3.3** Mapa de anomalías de aire libre. Se usó el mapa de colores turbo de Google [Mik19] usando el archivo de Python `turbo_colormap_mpl.py` de Federico Miorelli [Mik19; Mio19].



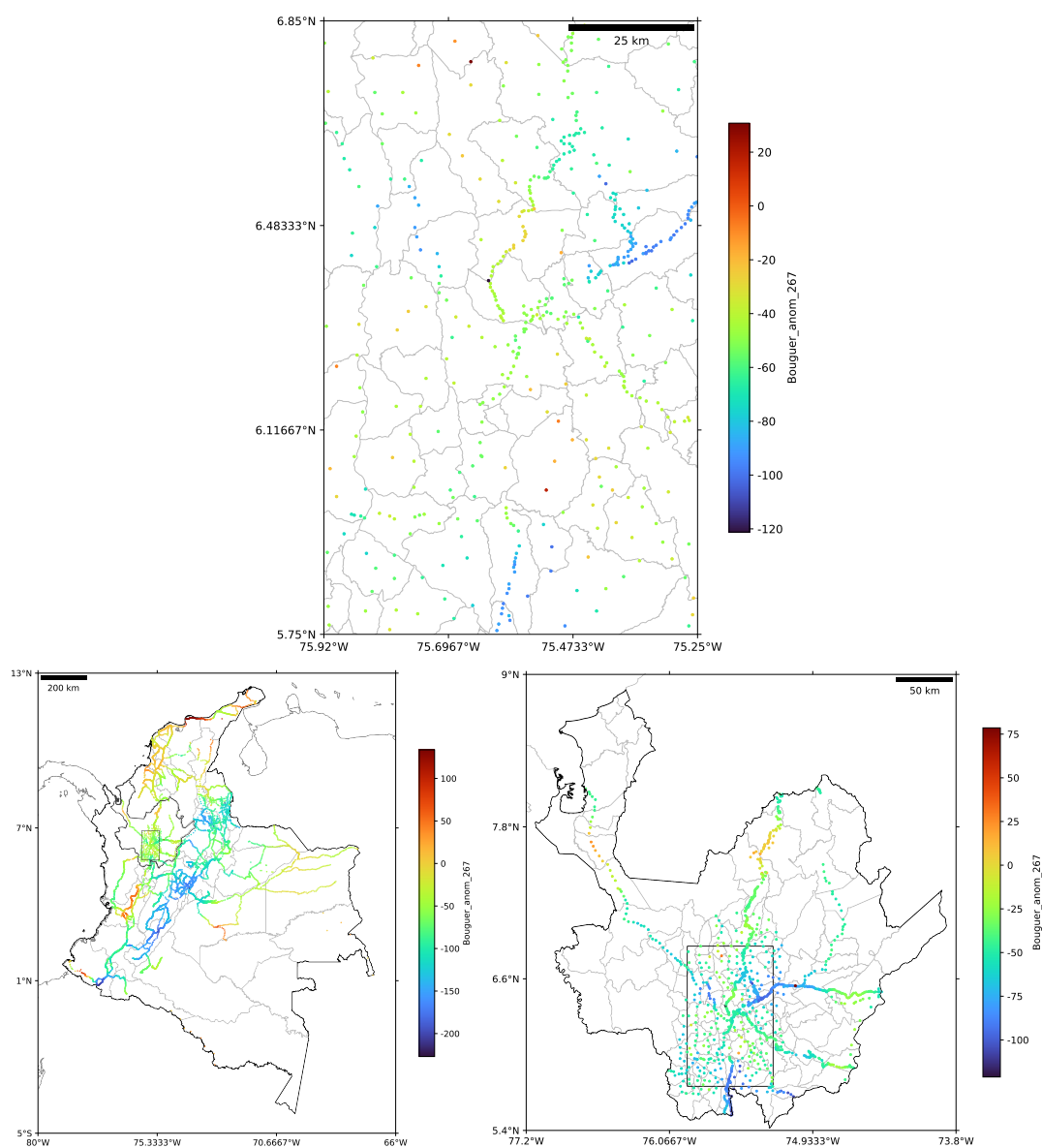
### 3.2 Base de Datos

Los mapas para las anomalías simples de Bouguer de la base de datos del NOAA, para Colombia, Antioquia y el área de estudio se muestran en la Figura 3.4.



**Figura 3.4** Mapa de anomalías simples de Bouguer. Se usó el mapa de colores turbo de Google [Mik19] usando el archivo de Python `turbo_colormap_mpl.py` de Federico Miorelli [Mik19; Mio19].

Los mapas para las anomalías de completas de Bouguer (con  $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ ) de la base de datos del NOAA, para Colombia, Antioquia y el área de estudio se muestran en la Figura 3.5.



**Figura 3.5** Mapa de anomalías completas de Bouguer (con  $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ ). Se usó el mapa de colores turbo de Google [Mik19] usando el archivo de Python `turbo_colormap_mpl.py` de Federico Miorelli [Mik19; Mio19].

### 3.3. Técnicas de *Machine Learning* para regresiones

Se utilizaron diversas técnicas de *Machine Learning* (ML) con los métodos de análisis con regresión para comparar resultados. Se implementaron funciones de librería de Python *Sklearn*[Ped+11] *Support Vector Regression* (SVR) y una red neuronal con la librería de Python *Keras*[Cho+15].

A continuación se hace una pequeña descripción de cada uno:

#### 3.3.1. Support Vector Machines (SVM)

Las Support Vector Machines (SVM) o en español, Máquinas de Vectores de Soporte son un conjunto de técnicas de *Machine Learning* para clasificación y regresión, entre otras técnicas de aprendizaje desarrolladas inicialmente por Cortes y Vapnik [CV95] para los laboratorios AT&T Bell Labs [CV95] como un algoritmo de *Machine Learning* para clasificación de datos.

Los vectores de entrada  $\mathbf{X}$  (por ejemplo, con la información de una imagen aplastada en una dimensión), se asignan de forma no lineal a un espacio de características  $\mathbf{Z}$  de muy alta dimensión ( $N = \frac{n(n+3)}{2}$ ) [CV95].

$$z_1 = x_1, \dots, \quad z_n = x_n, \quad n \text{ coordenadas} \quad (3.5)$$

$$z_{n+1} = x_1^2, \dots, \quad z_{2n} = x_n^2, \quad n \text{ coordenadas} \quad (3.6)$$

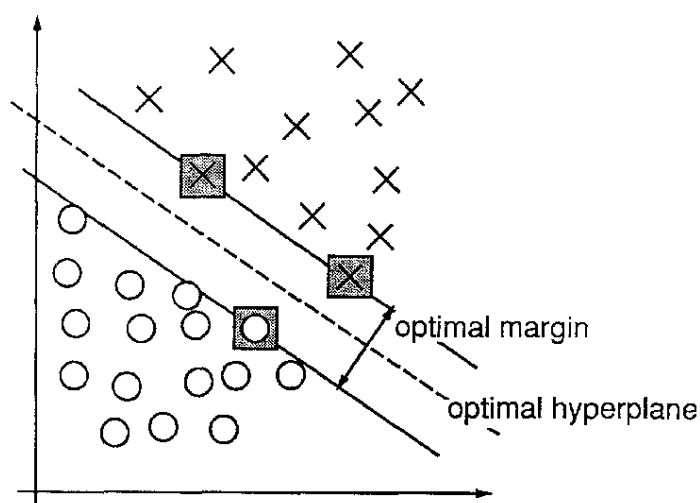
$$z_{2n+1} = x_1 x_2, \dots, \quad z_N = x_n x_{n-1}, \quad \frac{n(n-1)}{2} \text{ coordenadas} \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_N)$  Luego se construye una hipersuperficie de decisión lineal en el espacio de características con la siguiente función:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i \alpha_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \quad (3.8)$$

donde  $x_i$  son las entradas del vector de entrada,  $\alpha_i$  son los pesos en el espacio de características y  $y$  es el vector de características, tal que  $y_i$  puede tomar valores dependiendo de la cantidad de grupos a clasificar, y  $K$  es una función Kernel (núcleo) de producto punto que puede ser definida de cualquier forma.

La hipersuperficie separa los puntos en dos grupos como se puede ver en la Figura 3.6 para el caso bidimensional [CV95].



**Figura 3.6** Un ejemplo de clasificación en dos dimensiones. Los vectores de soporte, marcados con cuadrados grises, definen el margen de mayor separación entre las dos clases. Tomado de «Support vector networks» Cortes y Vapnik [CV95].

Posteriormente algoritmos permiten la generación de hipersuperficie no lineales que pueden clasificar más allá de dos clases, como muestra Cortes y Vapnik [CV95] al clasificar imágenes de números al final del artículo.

### 3.3.1.1. Support Vector Regression (SVR)

Regresión de vectores de soporte o SVR por sus siglas en inglés, es el método de SVM para regresiones, *Sklearn* usa la librería LIBSVM de Chang y Lin [CL11] titulado «LIBSVM: A Library for support vector machines» Tal como lo define Chang y Lin [CL11] en su artículo, la función aproximada de la regresión es (tanto para  $\epsilon$ -SVR como para  $\nu$ -SVR):

$$\sum_{i=1}^N (-\alpha_i + \alpha_i^*) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b \quad (3.9)$$

Donde  $K$  es el Kernel (función de tipo producto punto que puede ser definida de varias formas) y  $\alpha_i$  y  $b$  son un vector y un parámetro parte del cálculo interno del algoritmo [CL11; Ped+11].

*Sklearn* permite un uso bastante amigable de programar SVR, se utilizaron todos los parámetros por defecto con las siguientes opciones para el Kernel definiendo un diccionario como se muestra en el Algoritmo 3.1.

```
1 regr_dict={
2     'SVR-linear':
3         MultiOutputRegressor(SVR(kernel='linear')),
4     'SVR-poly':
5         MultiOutputRegressor(SVR(kernel='poly')),
6     'SVR-rbf':
7         MultiOutputRegressor(SVR(kernel='rbf')),
8 }
```

**Algoritmo 3.1** Regresores *Sklearn* en forma de diccionario

Entre otras opciones, en *Sklearn* se puede elegir la función de Kernel para un SVR, el manual de *Sklearn*<sup>§</sup> [Ped+11]:

- 'linear':

$$\langle x, x' \rangle$$

- 'poly':

$$(\gamma \langle x, x' \rangle + r)^d$$

- 'rbf':

$$\exp\left(-\gamma \|x - x'\|^2\right)$$

- 'sigmoid':

$$\tanh(\gamma \langle x, x' \rangle + r)$$

donde  $\gamma$  (gamma)  $r$  (coef0) y  $d$  (degree) son parámetros.

Otro parámetro para SVR, es  $C$ , minimiza los errores de los ejemplos de entrenamiento en contra a la simplicidad de la superficie de decisión, es decir, con un valor de  $C$  bajo, se suaviza la superficie de decisión con más errores en las variables de ejemplo, mientras que con un valor de  $C$  alto la superficie es más compleja aproximándose a los valores de ejemplo y reduciendo errores, pero produce casos de sobre-entrenamiento y no se ajusta correctamente a nuevos valores desconocidos [Ped+11].

Existen métodos que crean varios grupos de datos de entrenamiento y de prueba, se entrena y evalúa respectivamente con cada uno y luego se combinan los resultados, esta técnica se le llama *k-fold Cross-Validation*<sup>¶</sup>. Pero para este caso, solo se parte la base de datos en una de entrenamiento y otra de prueba.

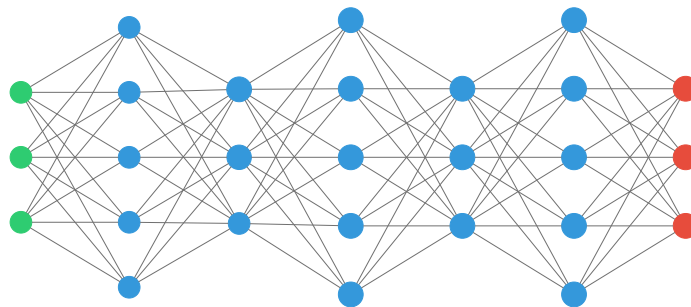
<sup>§</sup><https://scikit-learn.org/stable/modules/svm.html>

<sup>¶</sup><https://machinelearningmastery.com/k-fold-cross-validation/>

### 3.4. Red Neuronal

Con la misma base de datos, se implementó una red neuronal a través de la librería de Python *Keras*[Cho+15] como se muestra en el Algoritmo 3.2 y como se ve representada en la Figura 3.7 donde los círculos verdes son las variables (neuronas) de entrada, los rojos son los valores (neuronas) de salida y los azules son las neuronas de las capas ocultas. Su estructura se ha decidido arbitrariamente, según los resultados finales, y la evolución de los parámetros parecía lo suficientemente buena según se modificaban el diseño de las capas ocultas, de la misma forma con la función de activación, optimizador y función de pérdida seleccionadas. Durante el entrenamiento se asignan pesos (valores numéricos) a las conexiones entre neuronas dependiendo de las métricas de los resultados previos. No se realizaron comparaciones y mediciones con los resultados de otras estructuras.

Una aplicación web interactiva de redes neuronales muy recomendada y didáctica es <https://playground.tensorflow.org>, creada por Daniel Smilkov and Shan Carter y basada en trabajos previos<sup>||\*\*</sup>



**Figura 3.7** Diagrama de la red neuronal. Los círculos azules representan las neuronas en las capas ocultas, Los verdes son las neuronas de entrada y los rojos son las neuronas de salida.

```

1 nnet = Sequential(name='Sequential')
2 nnet.add(Dense(5, name='hiden0', input_dim=3,
3             kernel_initializer='random_normal',
4             bias_initializer='zeros',
5             activation='softplus'))
6 )
7 nnet.add(Dense(3, name='hiden1', activation='softplus'))
8 nnet.add(Dense(5, name='hiden2', activation='softplus'))
9 nnet.add(Dense(3, name='hiden3', activation='softplus'))
10 nnet.add(Dense(5, name='hiden4', activation='softplus'))
11 nnet.add(Dense(3, name='Output'))
12 display(nnet.summary())
13 tqdm_callback = TqdmCallback(verbose=0)

```

<sup>||</sup><https://cs.stanford.edu/people/karpathy/convnetjs/demo/classify2d.html>

<sup>\*\*</sup><http://colah.github.io/posts/2014-03-NN-Manifolds-Topology>

```

14 time_callback = TimeHistory()
15 nnet.compile(optimizer='adam', loss='mse', metrics=['mse'])
16 netfit = nnet.fit(
17     X_train, Y_train,
18     validation_data=(X_test, Y_test),
19     epochs=4_000,
20     verbose=0,
21     callbacks=[tqdm_callback, time_callback])

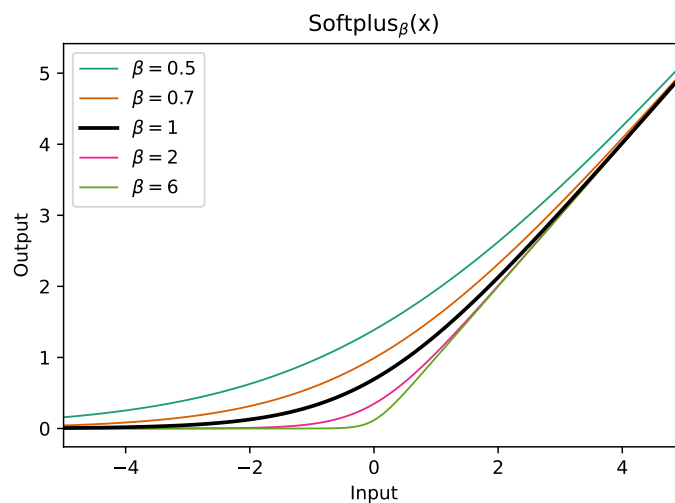
```

**Algoritmo 3.2** Red Neuronal en *keras*

Es una red neuronal densa (es decir, cada neurona está completamente conectada con todas las neuronas de las capas inmediatamente vecinas) implementa cinco capas ocultas con (4,3,4,3,4) neuronas respectivamente (Figura 3.7), cada una con funciones de activación que determina el grado de activación de una neurona, se utiliza *softplus* [Glo+11; Cho+15] con parámetros por defecto (Ecuación 3.10 y Figura 3.8)

$$\text{Softplus}_{\beta}(x) = \frac{1}{\beta} \log(1 + e^{\beta x}), \quad (3.10)$$

Donde  $\beta$  es un parámetro que controla la forma de la función de activación. Se utilizó el valor por defecto  $\beta = 1$ .



**Figura 3.8** Función de activación *Softplus* con distintos valores de  $\beta$  representado en varios colores. Valor por defecto  $\beta = 1$  en negro.

La red neuronal fue entrenada durante 10000 épocas con el optimizador *adam* [KB14; Cho+15] (con los parámetros por defecto) y la función de pérdida usada es *mse* [Cho+15] (*mean squared error*) que minimiza este valor durante el entrenamiento. Se utilizó *tqdm*[tqd22] para ver una barra de progreso del entrenamiento. El valor fue almacenado como métrica durante el entrenamiento, además del tiempo de cómputo en cada época.

### 3.5. Resultados

Los métodos de inteligencia artificial son usados para, a partir de una base de datos discreta, y crear una base de datos continua rellenando los datos faltantes. Tanto para los regresores como para la red neuronal, los parámetros de entrada son tres: longitud, latitud y elevación, y los parámetros de salida son también tres: anomalías en aire libre, anomalía de Bouguer tanto simple como completa (con  $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ ). Se eligió la región central de Antioquia por familiaridad, sin embargo, se encuentran discrepancias en la información de la altitud sobre el nivel del mar con la base de datos SRTM.

Todos los mapas fueron creados con la proyección Mercator con el elipsoide de referencia GRS80 a partir de Cartopy<sup>††</sup> [Met15] y Geopandas<sup>‡‡</sup> [Jor+20] y la escala con matplotlib-scalebar<sup>§§</sup> [Pin22] para la escala. Los mapas de colores de elevaciones usan gist\_earth y para anomalías, se usó el mapa de colores turbo de Google [Mik19] usando el archivo de Python turbo\_colormap\_mpl.py de Federico Miorelli [Mik19; Mio19].

La información de división de la línea costera proviene de Natural Earth [Ear20] y la división política por departamentos y municipios proviene del Marco Geoestadístico Nacional (MGN) del DANE<sup>¶¶</sup> [DAN21] para el año 2021.

Los resultados de las predicciones al rellenar las anomalías de gravedad en cada gráfico: elevaciones (esquina superior izquierda), anomalía, anomalía de aire libre (esquina superior derecha), anomalía simple de Bouguer (esquina inferior izquierda), anomalía completa de Bouguer con  $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$  (esquina inferior derecha).

Se puede notar la dependencia con la altura de las anomalías de aire conforme a lo teóricamente esperado (Figura 3.9) y anomalías de Bouguer más altas en ríos y valles.

Las mayores diferencias de las predicciones se encuentran con respecto a las anomalías simple y completa de Bouguer en las cercanías del Río Cauca, especialmente con las redes neuronales. Nótese los cambios en las escalas para cada variable entre un método y otro.

Aunque la mayoría de los datos con los que se entrenó las redes neuronales se encuentran cerca a vías principales, hay puntos a lo largo del Río Cauca, aunque, más retirados unos de otros que en el caso de puntos cerca a carreteras, como se puede ver en las Figuras 3.1, 3.3, 3.4 y 3.5.

Una de las razones de los resultados de las redes neuronales, que muestra varias zonas aisladas con anomalías de Bouguer altas en los alrededores de Cauca, con las anomalías de

---

<sup>††</sup><https://scitools.org.uk/cartopy>

<sup>‡‡</sup><https://geopandas.org>

<sup>§§</sup><https://pypi.org/project/matplotlib-scalebar>

<sup>¶¶</sup><https://geoportal.dane.gov.co/servicios/descarga-y-metadatos/descarga-mgn-marco-geoestadistico-nacional>



Bouguer tanto simples como completas, es decir, un caso de sobre-ajuste (*Overfitting*) y no deberse a características geológicas, aunque, una interpretación de los valores de anomalías de Bouguer en las cuencas del Cauca y aburra puede deberse a efectos de compensación hidrostática [MGI01].

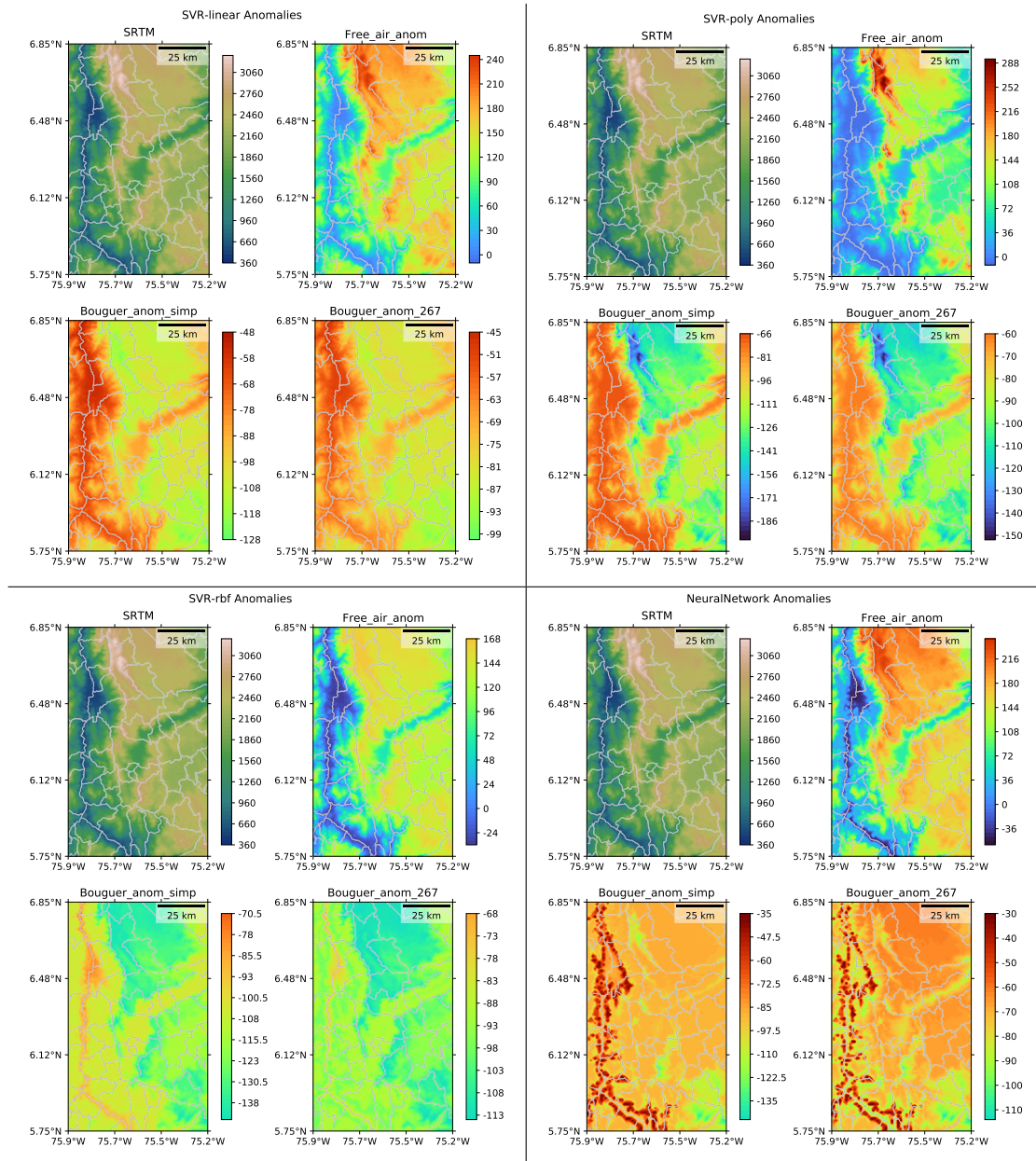


Figura 3.9

Mapas de algunos resultados del área de estudio con los modelos predictivos SVR-linear, SVR-poly, SVR-rbf y NeuralNetwork. Se usó el mapa de colores turbo de Google [Mik19] usando el archivo de Python turbo\_colormap\_mpl.py de Federico Miorelli [Mik19; Mio19].

Para testear tanto los SVR como la red neuronal, se ha decidido usar dos métricas para evaluar los resultados, sean  $y_i$  son los valores del grupo de entrenamiento o de prueba, y  $\hat{y}_i$  son los valores de las predicciones\*\*\* [Ped+11]

### Coefficiente de determinación $R^2$

$$R^2(y_i, \hat{y}_i) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (3.11)$$

donde

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.12)$$

### Error Cuadrático Medio (MSE), por sus siglas en inglés

$$\text{MSE}(y_i, \hat{y}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \bar{y})^2. \quad (3.13)$$

Además de esto se calcula la correlación por pares con Pandas en Python, que utiliza por defecto el método de Pearson a través de algoritmos de numpy<sup>†††</sup>:

$$R_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}} \quad (3.14)$$

Donde  $C_{ij}$  es la matriz de covarianza del vector  $\mathbf{X}$ , es decir:

$$C_{ij} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{N - 1} \quad (3.15)$$

donde  $x_i$  son los elementos de  $\mathbf{X}$  y  $\bar{x}$ , es su valor medio. Y también, se calcula el Error absoluto máximo, es decir:

$$\text{dmax}(y_i, \hat{y}_i) = \text{Max}[(y_i - \hat{y}_i)] \quad (3.16)$$

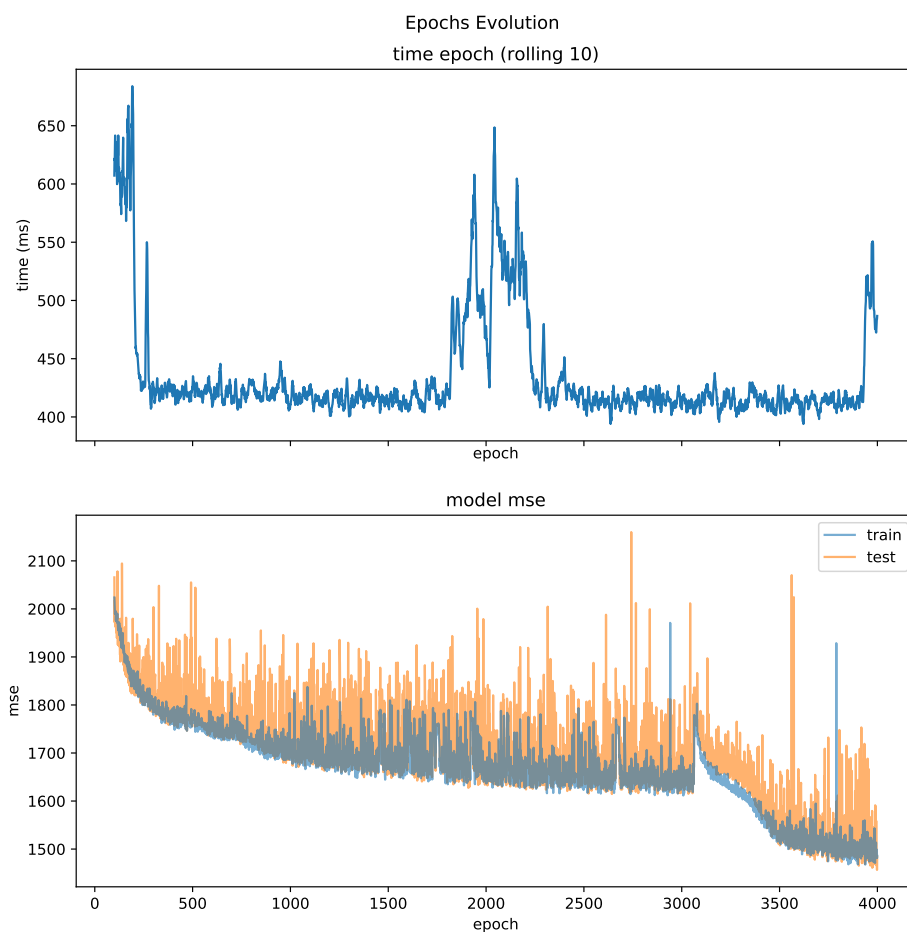
Estos resultados son indexados en la Tabla 3.2.

---

\*\*\*[https://scikit-learn.org/stable/modules/model\\_evaluation.html](https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html)

|               | Metricas |        | Correlación con predicciones |                          |                                       |                      | Error absoluto máximo |                               |  |
|---------------|----------|--------|------------------------------|--------------------------|---------------------------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------------|--|
|               | $R^2$    | MSE    | Aire libre<br>(adimensional) | Simple<br>(adimensional) | Bouguer<br>Completo<br>(adimensional) | Aire libre<br>(mGal) | Simple<br>(mGal)      | Bouguer<br>Completo<br>(mGal) |  |
| SVR-linear    | Train    | 0.4874 | 0.8509                       | 0.6484                   | 0.5744                                | 211.4                | 211.6                 | 215                           |  |
|               | Test     | 0.483  | 2267                         | 0.8528                   | 0.6397                                | 0.5659               | 183.3                 | 183.5                         |  |
| SVR-poly      | Train    | 0.2942 | 3188                         | 0.7637                   | 0.4434                                | 0.3267               | 193.5                 | 197.9                         |  |
|               | Test     | 0.2854 | 3208                         | 0.7593                   | 0.4336                                | 0.3134               | 218.6                 | 194.2                         |  |
| SVR-rbf       | Train    | 0.4312 | 2530                         | 0.8324                   | 0.5958                                | 0.5032               | 198.3                 | 192.7                         |  |
|               | Test     | 0.4168 | 2564                         | 0.8326                   | 0.5768                                | 0.4806               | 196.6                 | 192                           |  |
| NeuralNetwork | Train    | 0.6732 | 1455                         | 0.9057                   | 0.7934                                | 0.7554               | 203.4                 | 203.5                         |  |
|               | Test     | 0.6626 | 1483                         | 0.9053                   | 0.7842                                | 0.7444               | 182.7                 | 182.5                         |  |

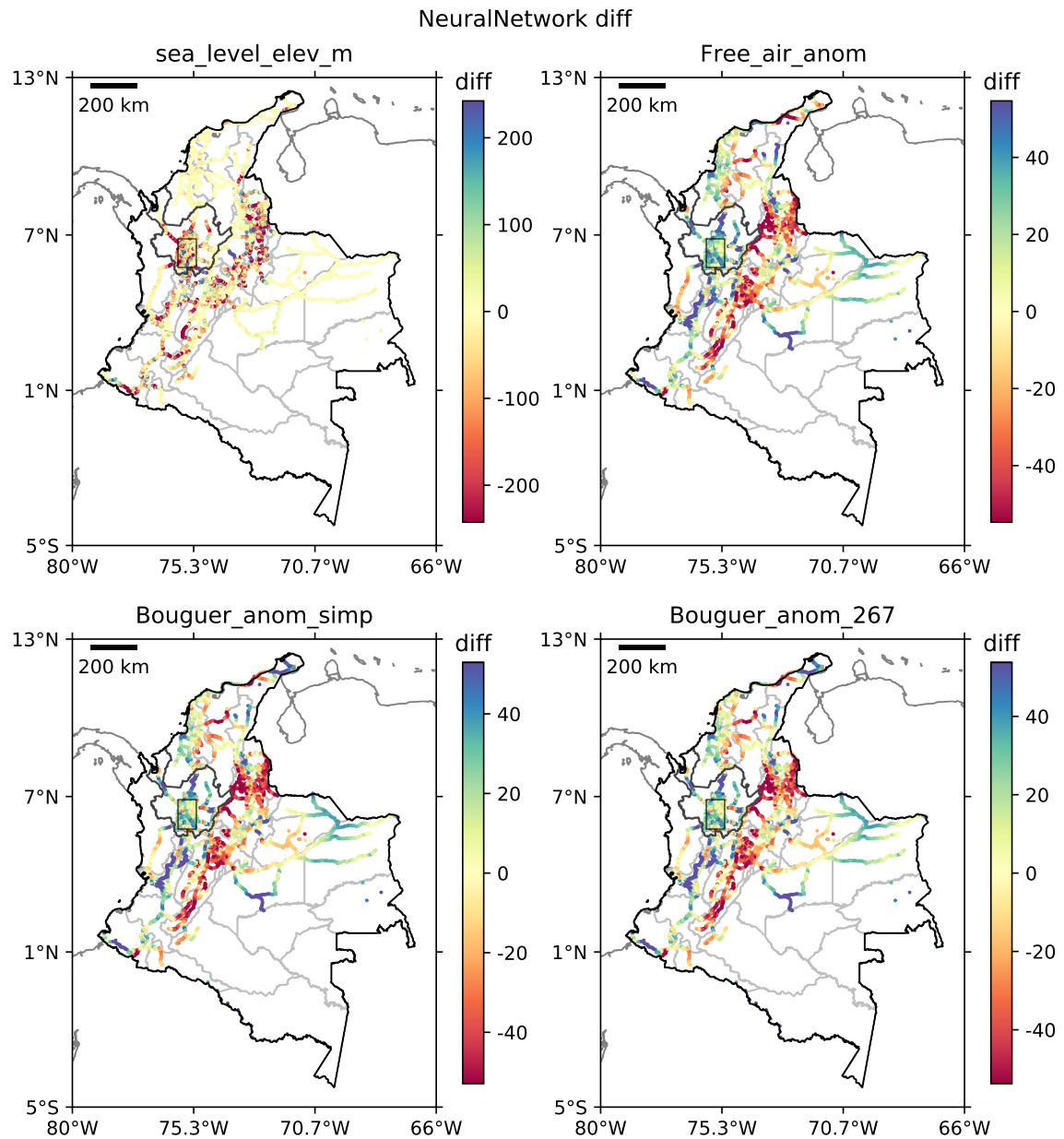
**Tabla 3.2** Resultados estadísticos de los regresores SVR y la red neuronal de los grupos Train y Train para cada uno:  $R^2$  y MSE globales, Correlación por pares y error absoluto máximo (mGal) para anomalías de aire libre, de Bouguer simple y completa.



**Figura 3.10** Épocas de la red neuronal durante el entrenamiento. Arriba, tiempos durante cada época; abajo evolución de las métricas mse para cada época.

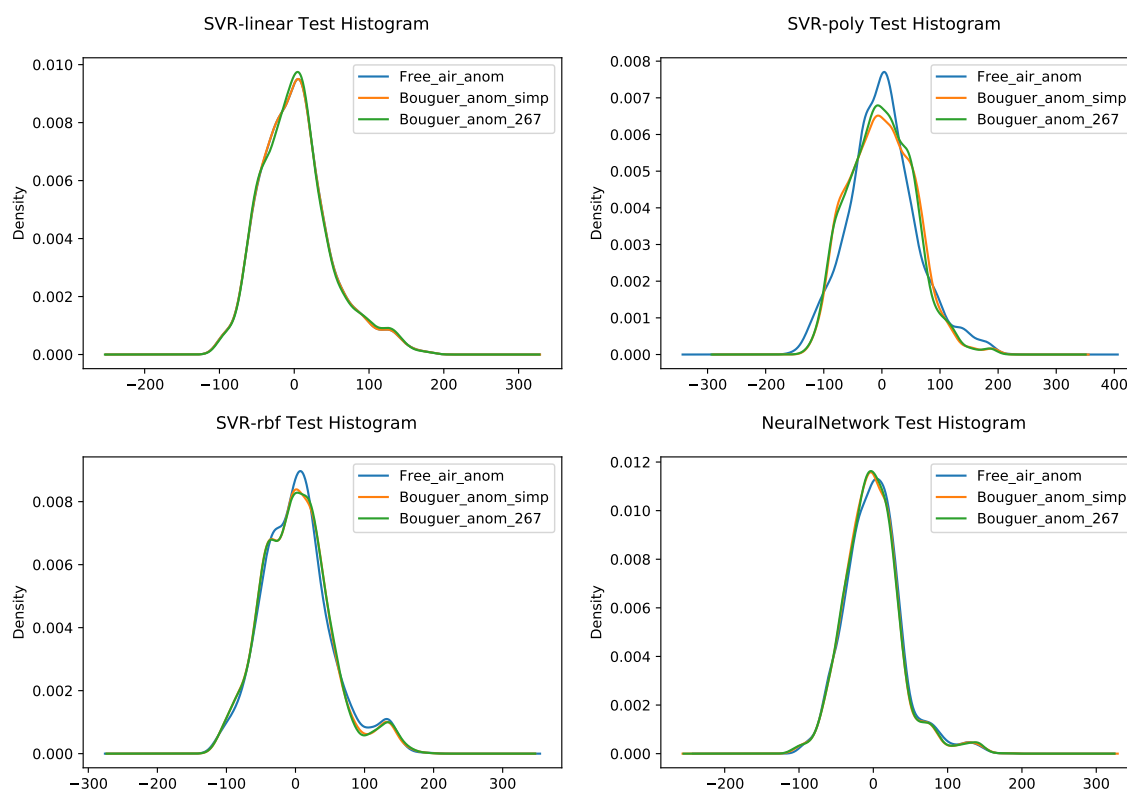
La evolución de la métrica mse (que también es la función de pérdida) y el tiempo de cómputo de cada métrica en milisegundos pueden verse en la Figura 3.10 este tipo de gráficas son importantes para ver como se comportó la función de pérdida durante el entrenamiento y verificar que se minimizó correctamente durante las iteraciones, algunas veces esto no ocurre satisfactoriamente a lo largo del proceso. Nótese que parecen algunas épocas con tiempos de cómputo más largos con respecto al resto, esto se puede dar al no poder cambiar los pesos de la red neuronal de acuerdo a la función de pérdida, es algo normal durante el entrenamiento.

En la Tabla 3.2, se resumen los resultados estadísticos de los resultados estadísticos de los regresores SVR y la red neuronal. Tales como  $R^2$  y MSE globales de la base de datos durante el entrenamiento, y para los datos específicos de anomalías de aire libre, de Bouguer simple y completa (con  $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ ), la correlación por pares y error absoluto máximo (en mGal) entre los datos reales y las predicciones por las técnicas de *machine learning* tanto para el grupo de entrenamiento (Train) como el de prueba (Test).



**Figura 3.11** Ejemplo de mapas de las diferencias entre predicción y grupo Test de las anomalías gravimétricas para NeuralNetwork.

Para observar las diferencias entre los valores reales y las predicciones, se crearon para cada método histogramas (Figura 3.12) con el error relativo en miligales, los resultados nos son perfectos, pero muestran que no existe un sobre-ajuste en las técnicas, que es cuando los modelos predicen muy bien los datos de entrenamiento, pero fallan por completo con los de prueba. Un mapa para las diferencias entre predicción y grupo Test (error relativo) se puede ver en la Figura 3.11.



**Figura 3.12** Histogramas de las diferencias entre predicción del grupo Test de las anomalías gravimétricas para SVR-linear, SVR-poly, SVR-rbf y NeuralNetwork.

### 3.6. Perspectivas

Ajustar los modelos de regresión y redes neuronales para buscar mejores resultados, por ejemplo, escogiendo otras arquitecturas de redes neuronales con funciones de pérdida y optimizadores distintos, y comparar diferencias entre cada una. Utilizar otras bases de datos de anomalías gravimétricas en la misma región u otras y comparar resultados. Luego, conociendo la geología de la zona, realizar un análisis geofísico de los resultados en el área de estudio. Implementar un mayor número de parámetros adicionales, además de las coordenadas y las anomalías en los métodos de inteligencia artificial, como información geológica de la zona o la fecha y hora de la medida, en bases de datos con esa información disponible.

## Referencias, Machine Learning

- [CV95] Corinna Cortes y Vladimir Vapnik. «Support-vector networks». En: *Mach. Learn.* 20.3 (nov. de 1995), págs. 273-297. ISSN: 0885-6125. DOI: 10.1007/BF00994018. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00994018>.
- [MGI01] M. P. Martínez, M. E. Giménez y A. Introcaso. «Indicadores gravimétricos isostáticos en cuencas sedimentarias». En: *Bol. Geol. y Min.* 112.2 (2001), págs. 63-74. ISSN: 03660176.
- [Nce08] Ncei. *Gravity Data*. Ene. de 2008. URL: <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gravity/1999/index.html>.
- [CL11] Chih Chung Chang y Chih Jen Lin. «LIBSVM: A Library for support vector machines». En: *ACM Trans. Intell. Syst. Technol.* 2.3 (2011), págs. 1-39. ISSN: 21576904. DOI: 10.1145/1961189.1961199.
- [Glo+11] Xavier Glorot, Antoine BORDES, Yoshua Bengio y Xinzhong Li. «Deep Sparse Rectifier Neural Networks Xavier». En: *J. Opt. Soc. Am. A Opt. Image Sci. Vis.* 34.7 (2011), págs. 1114-1118. ISSN: 15208532.
- [Ped+11] F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot y E. Duchesnay. «Scikit-learn: Machine Learning in Python». En: *Journal of Machine Learning Research* 12 (2011), págs. 2825-2830.
- [KB14] Diederik P. Kingma y Jimmy Ba. «Adam: A Method for Stochastic Optimization». En: *3rd Int. Conf. Learn. Represent. ICLR 2015 - Conf. Track Proc.* (dic. de 2014), págs. 1-15. arXiv: 1412.6980. URL: <http://arxiv.org/abs/1412.6980>.
- [KK14] Natalia Kolecka y Jacek Kozak. «Assessment of the Accuracy of SRTM C- and X-Band High Mountain Elevation Data: a Case Study of the Polish Tatra Mountains». En: *Pure Appl. Geophys.* 171.6 (jun. de 2014), págs. 897-912. ISSN: 0033-4553. DOI: 10.1007/s00024-013-0695-5. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s00024-013-0695-5>.
- [Cho+15] François Chollet et al. *Keras*. 2015. URL: <https://keras.io>.
- [Met15] Met Office. *Cartopy: a cartographic python library with a Matplotlib interface*. Exeter, Devon, 2015. URL: <https://scitools.org.uk/cartopy>.

## Machine Learning

---

- [Muk+17] Manas Mukul, Vinee Srivastava, Sridevi Jade y Malay Mukul. «Uncertainties in the Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) Heights: Insights from the Indian Himalaya and Peninsula». En: *Sci. Rep.* 7.1 (mar. de 2017), pág. 41672. ISSN: 20452322. DOI: 10.1038/srep41672. URL: <http://www.nature.com/articles/srep41672>.
- [Mik19] Anton Mikhailov. *Turbo, An Improved Rainbow Colormap for Visualization*. Ago. de 2019. URL: <https://ai.googleblog.com/2019/08/turbo-improved-rainbow-colormap-for.html>.
- [Mio19] Federico Miorelli. *Turbo Colormap*. 2019. URL: <https://gist.github.com/FedeMiorelli/640bbc66b2038a14802729e609abfe89>.
- [Ear20] Natural Earth. *1:10m Cultural Vectors*. 2020. URL: <https://www.naturalearthdata.com/>.
- [Jor+20] Kelsey Jordahl, Joris Van den Bossche, Martin Fleischmann, Jacob Wasserman, James McBride, Jeffrey Gerard, Jeff Tratner, Matthew Perry, Adrian Garcia Badaracco, Carson Farmer, Geir Arne Hjelle, Alan D. Snow, Micah Cochran, Sean Gillies, Lucas Culbertson, Matt Bartos, Nick Eubank, maxalbert, Aleksey Bilogur, Sergio Rey, Christopher Ren, Dani Arribas-Bel, Leah Wasser, Levi John Wolf, Martin Journois, Joshua Wilson, Adam Greenhall, Chris Holdgraf, Filipe y François Leblanc. *geopandas/geopandas: v0.8.1*. Ver. v0.8.1. Jul. de 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3946761. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3946761>.
- [Kra20] Tomo Krajina. *srtm.py*. 2020. URL: <https://github.com/tkrajina/srtm.py>.
- [DAN21] DANE. *Marco Geoestadístico Nacional*. 2021. URL: <https://geoportal.dane.gov.co/servicios/descarga-y-metadatos/descarga-mgn-marco-geoestadistico-nacional/>.
- [Pin22] Philippe Pinard. *matplotlib-scalebar*. 2022. URL: <https://github.com/ppinard/matplotlib-scalebar>.
- [tqd22] tqdm developers. *tqdm*. 2022. URL: <https://github.com/tqdm/tqdm>.



*El sabio comienza por hacer lo que  
quiere enseñar y después enseña*

---

Confucio

## Capítulo 4

# SHIMIA Gravimétrico, para Aplicaciones en Docencia, Extensión e Investigación

---

|  |     |
|--|-----|
| 4.1. Que es SHIMIA? . . . . .                | 93  |
| 4.1.1. Simulaciones y Herramientas . . . . . | 94  |
| 4.2. Métodos . . . . .                       | 96  |
| 4.3. Instrumentos . . . . .                  | 97  |
| 4.3.1. Inteligencia Artificial . . . . .     | 98  |
| 4.4. Justificación . . . . .                 | 99  |
| Referencias, SHIMIA Gravimétrico . . . . .   | 101 |

---

### 4.1. Que es SHIMIA?


SHIMIA es un conjunto de Simulaciones, Herramientas, Instrumentos, Métodos e Inteligencia Artificial

Como un aporte a los ejes misionales de la Universidad: Docencia, Extensión, Investigación, y con Apropiación social del conocimiento, y haciendo uso de nuevas tecnologías, se diseñó, se implementó SHIMIA Gravimétrico con temas relacionados con el método geofísico de gravimetría para estudiar el subsuelo de la Tierra, exploración de petróleos y minerales, geodesia, análisis geofísicos, estudios de aguas subterráneas, entre otros.

SHIMIA tiene una colección de herramientas para facilitar el aprendizaje en geociencias con aplicaciones interactivas. Estas pueden ser accedidas libremente a través de un repositorio de GitHub \* A continuación describiremos brevemente algunas de ellas.


### 4.1.1. Simulaciones y Herramientas

Las Herramientas usadas fueron Colab, Gradio y GeoGebra, a continuación una descripción de cada una:

**Colab** : también conocido como Google Colaboratoy [cor21], es un servicio web de Google para escribir y ejecutar código Python en un entorno personalizado de Jupyter en una de las varias máquinas virtuales que proporciona Google, como CPU, GPU o incluso TPU.

Colab se usa ampliamente en ciencia de datos y debido a que el código se ejecuta en ciertos tipos de máquinas virtuales, cualquier equipo con conexión a internet puede abrir y ejecutar el notebook y sus resultados pueden ser reproducibles (siempre y cuando las máquinas virtuales sean similares).

Utilizamos cuadernos Colab para los algoritmos de *reversible-jump Markov chain Monte Carlo* de inversión gravimétrica e inteligencia artificial para rellenar datos de anomalías gravimétricas en una región del centro de Antioquia, además de aplicaciones interactivas con Gradio para hacer explicaciones de temas gravimétricos como gravedad teórica o ecuaciones de gravedad normal, correcciones geofísicas y error de deriva del instrumento.

**Gradio** : (Gradient Input Output) [Abi+21] Citando la página web: *Gradio is the fastest way to demo your machine learning model with a friendly web interface so that anyone can use it, anywhere!* Pero Gradio también es útil para algunos ejemplos interactivos básicos. En este caso, por ejemplo, para el resultado de las anomalías de gravedad de un polígono bajo tierra con la ecuación de Talwani, ver Figura 4.2.

Algunos de los ejemplos son:

**Gravedad teórica:** Cálculos de la gravedad teórica modelando la Tierra como un elipsoide con valores de los parámetros a lo largo del tiempo y sus diferencias.

**Correcciones:** Correcciones de aire libre y de Bouger.

**Deriva instrumental:** Ejemplo de cálculo de la deriva del instrumento.


**Unicidad:** Ejemplo del problema de no unicidad en la inversión gravimétrica mostrando el efecto de dos esferas bajo tierra distintas.

**Trypod:** Calibración del trípode.

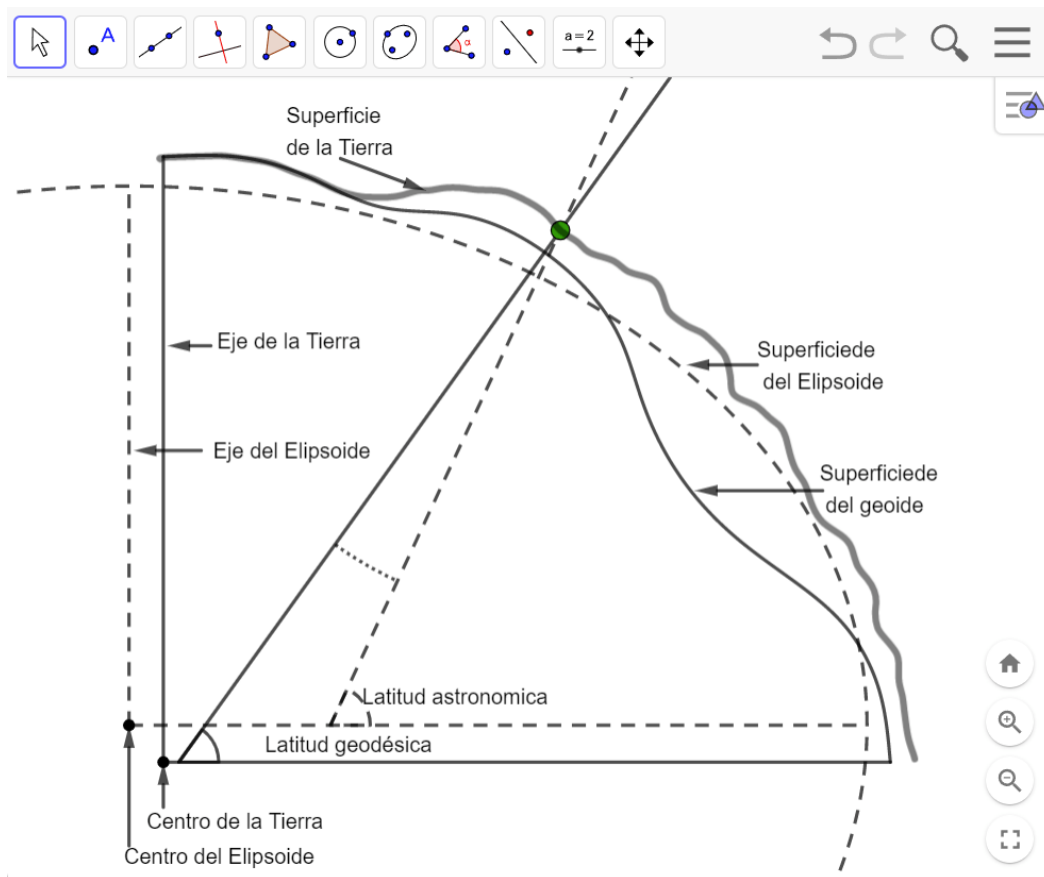
---

\*<https://edwardptera.github.io/SHIMIA-Gravimetrico>

Actualmente, Gradio renovó por completo su interfaz gráfica y estas actividades están en revisión.

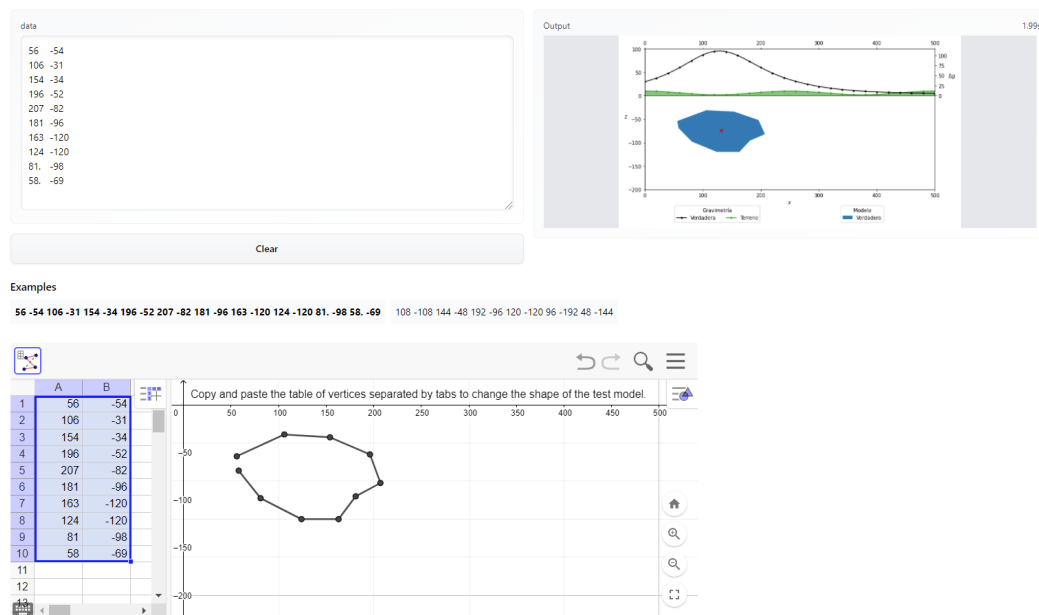
**GeoGebra** : GeoGebra [Hoh+13] es una aplicación de escritorio web y multiplataforma que está escrita en Java, JavaScript y HTML5 para Geometría, Álgebra y, en menor medida, Estadística y Cálculo, pero también es posible enseñar geociencias con ella.

Un ejemplo GeoGebra para aprender sobre el Geoide y el elipsoide de referencia, se puede acceder a través de (<https://www.geogebra.org/classic/htkgfjqj>) donde es posible mover el punto verde y ver como cambia la latitud astronómica y geodésica, una captura de pantalla se aprecia en la Figura 4.1.



**Figura 4.1** Ejemplo de Actividad en GeoGebra para aprender sobre el Geoide y el elipsoide de referencia.

Esta página de GeoGebra puede embeberse en una aplicación de Gradio para ver los resultados de la ecuación de Talwani como muestra la Figura 4.2. En este caso, GeoGebra es útil para realizar visualmente formas de intrusiones (polígonos en 2D) y exportarlas al portapapeles en formato TSV.



**Figura 4.2** Ejemplo con Gradio y GeoGebra para la ecuación Talwani

## 4.2. Métodos

El método, en este caso, es *reversible-jump Markov chain Monte Carlo* implementado al completo en Colab y accesible por cualquiera a través del repositorio de GitHub.


Para la actividad con estudiantes, la idea es que un primer grupo sugiera modelos básicos (justificados a partir de la geología) utilizando las herramientas anteriormente citadas, como el mismo *notebook* de Colab o la actividad en Gradio de Talwani (Figura 4.2) y a partir de ahí genere el perfil de anomalías gravimétricas con el método directo, el Grupo B emplea dicho perfil, desconociendo el polígono del cual proviene y ejecute el algoritmo RJMCMC Luo [Luo10]) que es el método inverso, y luego ambos grupos comparen resultados teniendo en cuenta las limitaciones del algoritmo.

Contamos con una primera demostración de esta actividad en el curso electivo de geofísica para estudiantes de pregrado de física y astronomía de la Universidad de Antioquia (UdeA).

Para más información, leer capítulo 2.

### 4.3. Instrumentos

Existe un simulador de un gravímetro Scintrex CG-5 en la tienda de Android<sup>†</sup>, pero no fue posible instalarlo. También existe uno en Java<sup>‡</sup>, pero los navegadores modernos no soportan el *applet*, se propone crear un gravímetro relativo básico en LabVIEW como una introducción didáctica.

**LabVIEW (*Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench*)**. : Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench [Ell+07]. Es una plataforma para *National Instruments* con un lenguaje de programación visual. Se utiliza para el control y la automatización de la adquisición de datos, pero también se puede utilizar para simulaciones de instrumentos.

El instrumento es un gravímetro relativo simulado en LabVIEW como Instrumento Virtual (IV) donde los estudiantes pueden emular la experiencia del levantamiento gravimétrico en algunos aspectos como la calibración del trípode y la deriva instrumental, algunos aspectos en los controles de resorte son necesarios.

Dado que los gravímetros convencionales son aparatos supremamente costosos por sus características intrínsecas como su alta precisión 1 a 2  $\mu\text{Gal}$ [LaC88; ASG99; Lac04; Van05; Mid+16] (donde 1 Gal = 1  $\text{cm}/\text{s}^2$ ), fiabilidad y sensibilidad al manejo, muchas universidades y centros de investigación no pueden adquirirlos y hacer uso de ellos para efectos investigativos y didácticos, debiendo conformarse con la parte teórica en las clases.

---

<sup>†</sup><https://play.google.com/store/apps/details?id=app.simulador.ragna.esiagrav>

<sup>‡</sup>[http://www.keller-clz.de/java/grav/grav\\_how-e.html](http://www.keller-clz.de/java/grav/grav_how-e.html)

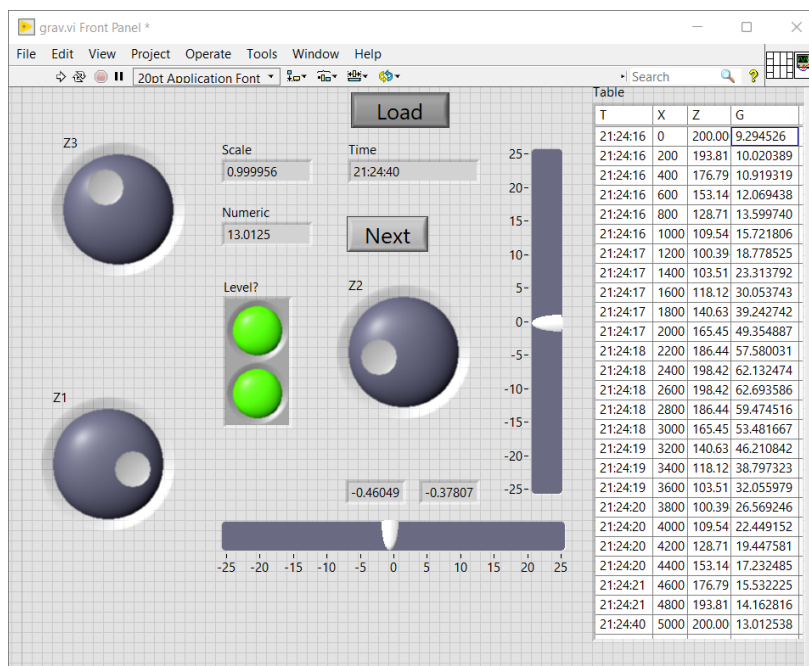


Figura 4.3 Captura de pantalla del Gravímetro LabVIEW [Eil+07]

El Instrumento virtual representa un gravímetro virtual muy básico (4.3), primero se carga un archivo con información gravimétrica a ser simulado, luego con los diales redondos Z1, Z2 y Z3, se equilibra el equipo, los *sliders* vertical y horizontal muestran la inclinación actual en su respectivo eje, ambos LEDs indican si el instrumento está lo suficientemente equilibrado, una vez estén en verde, se procede a medir. Durante cada medida se guardan los datos de tiempo, distancia, altura y gravedad, durante la simulación se añaden efectos de ruidos aleatorios y deriva instrumental (esto puede ser desactivado internamente). Finalmente, es posible exportar los datos simulados y analizarlos.

Este es el entorno en el cual serán descritas las situaciones problema, Campaña Gravimétrica Simulada consta de un gravímetro en LabVIEW y varias simulaciones en Colab y Gradio con varios ejemplos clave (algunos precalculados), ellos constituyen un laboratorio de topografía y gravimetría, en ellos el estudiante hará el papel de un geofísico en una “Campaña Gravimétrica”.

### 4.3.1. Inteligencia Artificial

Un ejemplo sobre la regresión de anomalías gravitacionales en Colombia y Antioquia con técnicas de Inteligencia Artificial (IA): Redes neuronales y *Support Vector Regression* (SVR).

Tanto para los regresores como para la red neuronal, los parámetros de entrada son tres: longitud, latitud y elevación, y los parámetros de salida también son tres: anomalías de aire libre, anomalía simple de Bouguer y anomalía completa de Bouguer.

Para más información, leer capítulo 3.

## 4.4. Justificación

La gravimetría es una rama de la geofísica con diversos métodos de carácter geofísico, su objetivo es la búsqueda y caracterización de variaciones espaciales (y temporales) de la gravedad en una región concreta, por ejemplo monitorear la evolución de cámaras magmáticas en volcanes activos [TM12].

Además, debido a que los gravímetros son costosos, muchas instituciones no disponen de estos equipos, por lo cual para las prácticas deben solicitarlos en préstamo o alquilarlos. Sin embargo, para un curso introductorio como el propuesto, se puede hacer uso de herramientas didácticas para recrear algunos de los procedimientos del método de gravimetría.

Una pequeña introducción a la gravimetría es suficiente para que el estudiante pierda preconcepciones y aprenda a apreciar los fenómenos que en nuestro mundo cotidiano no son tan perceptibles, pero si nos afectan de alguna forma (anomalías gravimétricas, procesos geológicos). Además, el estudiante entenderá las dificultades en la instrumentación de los gravímetros y pormenores en una campaña gravimétrica.

Por ejemplo, en geología, el proyecto IRIS<sup>§</sup> (*Incorporated Research Institutions for Seismology*) ya ofrece varias experiencias interactivas en sismología como <https://www.iris.edu/app/eq-locate/method> (en desarrollo) para explicar varios métodos utilizados en la localización del epicentro de un sismo. O en redes neuronales, por ejemplo las aplicaciones web <https://playground.tensorflow.org>, y <https://cs.stanford.edu/people/karpathy/convnetjs/demo/classify2d.html>

A futuro, SHIMA presentará gravímetros reales con propósitos didácticos, empleando herramientas como Arduino, Raspberry y FPGA. Los grupos de investigación SEAP (Solar, Earth and Planetary Physics), FACom (Grupo de Física y Astrofísica Computacional), GICM (Grupo Instrumentación Científica y Microelectrónica) están interesados en este tipo de proyectos.

---

<sup>§</sup><https://www.iris.edu/hq/>





## Referencias, SHIMIA Gravimétrico

- [LaC88] Inc. LaCoste and Romberg. *Instruction manual for LaCoste and Romberg, Inc. Model G land gravity meter*. 1988.
- [ASG99] Mark E. Ander, Tom Summers y Michael E. Gruchalla. «LaCoste & Romberg gravity meter: System analysis and instrumental errors». En: *Geophysics* 64.6 (nov. de 1999), págs. 1708-1719. ISSN: 00168033. DOI: 10.1190/1.1444675. URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1444675>.
- [Lac04] Lacoste & Romberg. *Instruction manual Model G&D gravity meters*. 2004.
- [Van05] Michel Van Camp. «Uncertainty of absolute gravity measurements». En: *J. Geophys. Res.* 110.B5 (2005), B05406. ISSN: 0148-0227. DOI: 10.1029/2004JB003497. URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/2004JB003497>.
- [Ell+07] Chance Elliott, Vipin Vijayakumar, Wesley Zink y Richard Hansen. «National Instruments LabVIEW: A Programming Environment for Laboratory Automation and Measurement». En: *JALA: Journal of the Association for Laboratory Automation* 12.1 (2007), págs. 17-24. DOI: 10.1016/j.jala.2006.07.012.
- [Luo10] Xiaolin Luo. «Constraining the shape of a gravity anomalous body using reversible jump Markov chain Monte Carlo». En: *Geophysical Journal International* 180.3 (mar. de 2010), págs. 1067-1079. ISSN: 0956540X. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2009.04479.x. URL: <https://academic.oup.com/gji/article-lookup/doi/10.1111/j.1365-246X.2009.04479.x>.
- [TM12] W. Torge y J. Müller. *Geodesy*. De Gruyter graduate. De Gruyter, 2012. ISBN: 9783110207187. URL: <https://books.google.com.co/books?id=YjWMcgAACAAJ>.
- [Hoh+13] M. Hohenwarter, M. Borchers, G. Ancsin, B. Bencze, M. Blossier, A. Delobelle, C. Denizet, J. Éliás, Á Fekete, L. Gál, Z. Konečný, Z. Kovács, S. Lizelfelner, B. Parisse y G. Sturr. *GeoGebra*. Dic. de 2013. URL: <http://www.geogebra.org>.
- [Mid+16] R. P. Middlemiss, A. Samarelli, D. J. Paul, J. Hough, S. Rowan y G. D. Hammond. «Measurement of the Earth tides with a MEMS gravimeter». En: *Nature* 531.7596 (mar. de 2016), págs. 614-617. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/nature17397. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature17397> <http://www.nature.com/articles/nature17397>.

- [Abi+21] Abubakar Abid, Ali Abdalla, Ali Abid, Dawood Khan, Abdulrahman Alfozan y James Zou. «Gradio». En: *arXiv preprint arXiv:1906.02569* (2021). URL: <https://github.com/gradio-app/gradio>.
- [cor21] Michael Piatek corrieann Craig Citro. *Google Colaboratory*. 2021. URL: <https://github.com/googlecolab>.

# Appendices



# Propuesta de Curso

La enseñanza de ciencias como la geología y la geofísica también puede adaptarse a nuevas tecnologías, aprovechando la nube (en este caso Colab) y en general el poder de cómputo de nuevas herramientas web que le pueden dar a los estudiantes facilidades en su aprendizaje previos a mediciones con un instrumento real, donde pueden empezar a familiarizarse con ellos y métodos normalmente usados en gravimetría donde se enfocaría este Curso.

Se sugiere el uso de *notebooks* de Google Colaboratoy (Colab), algunas interactivas con ipywidgets y Gradio (Gradient Input Output), programas libres como GeoGebra y comerciales como LabVIEW (*Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench*).

El Curso consta de una primera clase introductoria y 12 sesiones que pueden durar una o varias clases. Con excepción de la primera clase de introducción al curso, las sesiones se dividen en cuatro partes: el primero “I” será una repaso de la clase anterior, una discusión histórica del tema o una primera aproximación del fenómeno a tratar, en el segundo y tercero son temas teóricos, “A” y “B” respectivamente. Finalmente, en la cuarta parte se muestra una situación problema “P” de un ejemplo práctico o con una aplicación interactiva o una tercera parte teórica “C”. Las duraciones de las partes son un estimado, no necesariamente duran lo mismo y se podrán adaptar a los requerimientos de la clase.

Se recomendará a los estudiantes tratar de adelantarse un poco a los próximos temas del curso. Los estudiantes deberán tener conocimientos básicos de física y matemáticas, así como conocimientos mínimos de geología y computadores (no tienen que saber programar), se recomienda saber algo de inglés.

En la Primera clase realizaremos una presentación e introducción del curso, además de una actividad preliminar para determinar los conocimientos previos de los estudiantes,

## Propuesta de Curso

---

luego de esta se darán a los estudiantes los documentos necesarios, y se discutirá la forma de evaluar el curso. Se propone evaluar de manera tradicional con seguimiento, tareas y exámenes.

Los estudiantes podrán tener actividades de refuerzo, se le dejarán ciertas lecturas o ejercicios que serán reforzadas en las siguientes clases; para los estudiantes que cumplen con los conocimientos previos necesarios se les dará otro tipo de actividades más avanzadas de modo optativo o se les pedirá que ayuden a sus compañeros en el repaso.

Este Curso no pretende ser extenso ni profundo, solo presenta unos elementos básicos que representan nada más que una introducción, con ejemplos sencillos de elementos de una campaña gravimétrica como una simulación de un gravímetro de resorte longitud-0, métodos directo e inverso de información gravimétrica, entre otros utilizando herramientas computacionales.

Un posible curso podría ser (basado en las clases de la Profesora Gloria Alexandra Moncayo Gámez):

### 0. Introducción al curso.

#### 1. La forma de la Tierra:

**I** Historia de la medición de la forma de la Tierra.

**A** El geoide, elipsoide y sistemas de referencia.

**B** Potencial gravitacional y aceleración de la gravedad.

**P** Ejemplos de como se usan los sistemas de referencia en los mapas en casos reales y actividad en GeoGebra (<https://www.geogebra.org/classic/htkgfjqj>)

#### 2. Gravedad en el laboratorio:

**I** Introducción.

**A** Medir la gravedad con el celular.

**B** Medir la gravedad con técnicas de laboratorio

**P** Discusión sobre los resultados obtenidos y su incertidumbre

#### 3. Gravedad teórica:

**I** Repaso clase anterior.

**A** Primeros modelos de gravedad y sus parámetros

**B** Modelos de gravedad empleados en la actualidad, y modelos EGM (*Earth Gravitational Model*)

**P** Ejemplo en Gradio con las diferencias entre las ecuaciones históricas de gravedad teórica.

#### 4. Gravimetría, introducción:

- 
- I** Primeras mediciones de la gravedad en la Tierra
  - A** Mediciones absolutas
  - B** Mediciones absolutas
  - P** Ejemplos de casos reales de campañas gravimétricas
- 5.** Gravimetría, mediciones absolutas:
- I** Repaso clase anterior e introducción.
  - A** Gravímetros absolutos.
  - B** Estaciones de gravedad absoluta.
  - P** Presentación de gravímetros MEMS, fotos y vídeos, por ejemplo:  
[https://www.gla.ac.uk/news/archiveofnews/2016/march/headline\\_453570\\_en.html](https://www.gla.ac.uk/news/archiveofnews/2016/march/headline_453570_en.html)
- 6.** Gravimetría, mediciones relativas:
- I** Repaso clase anterior.
  - A** Gravímetros relativos.
  - B** Mediciones relativas de la gravedad.
  - P** Ejemplo con el gravímetro en LabView.
- 7.** Reducciones y correcciones gravimétricas, parte 1:
- I** Introducción al problema, historia de Bouguer.
  - A** Anomalía de aire libre
  - B** Anomalía simple y completa de Bouguer
  - P** Ejemplos con estudios reales.
- 8.** Reducciones y correcciones gravimétricas, parte 2:
- I** Repaso clase anterior.
  - A** Corrección topográfica
  - B** Corrección isostática.
  - C** Otras correcciones, como por deriva instrumental, mareas terrestres, efecto Eötvös entre otros.
- 9.** Descripción de una campaña gravimétrica:
- I** Introducción.
  - A** Pasos a tener en cuenta en una campaña gravimétrica (relativa) y diferencias según el objetivo de cada una.
  - B** Gravimetría aérea, marítima y satelital.
  - C** Ejemplos reales.

## Propuesta de Curso

---

### 10. Modelamiento de los datos de Gravedad, teoría:

#### I Introducción.

#### A Separación de Anomalías regionales y locales

#### B Anomalías producidas por cuerpos de geometrías simples en 2D y 3D, y ecuación de Talwani.

#### C Deconvolución De Euler.

### 11. Modelamiento de los datos de Gravedad, programas:

#### I Repaso clase anterior.

#### A Modelamiento con Igmás+.

#### B Programa Surfer en Gravimetría.

#### P Ejemplos didácticos con algoritmo RJMCMC para inversión gravimétrica en 2D y rellenado de datos con *machine learning*

### 12. Nuevas aplicaciones en gravimetría:

#### I Introducción.

#### A Uso de nuevas técnicas de procesamiento en gravimetría

#### B Nuevos tipos de gravímetros y sus futuras aplicaciones

#### P Discusión sobre el futuro de la gravimetría y sus aplicaciones en otros mundos.

### Objetivos para el estudiante:

- Aprender conceptos básicos de Geología, Sismología, Isostasia, entre otros.
- Entender Ecuación teórica de la gravedad según el modelo.
- Anomalías Gravimétricas y sus correcciones.
- Diferenciar tipos de Gravímetros y los usos que tiene cada uno.
- Estudiar la física de los gravímetros.
- Comprender la deriva instrumental, error eléctrico y térmico.
- Interactuar con demostraciones que muestren métodos Gravimétricos directos e inversos y su problema de no unicidad.

### Objetivos para las Clases

- Usar adecuadamente las partes de las clases y descansos para mantener la concentración del estudiante.
- Dictar las partes teóricas como uno diálogo entre los estudiantes y el maestro.
- Crear un ambiente donde los estudiantes se ayuden mutuamente.
- Motivar a los estudiantes durante las clases con ejemplos interactivos.
- Permitir el uso creativo de soluciones a las situaciones problema



## Todas las Referencias

- [BL49] Bouguer y Charles-Marie de La Condamine. *La Figure de la Terre*. 1749. DOI: 10.5962/bhl.title.164077.
- [Web+35] Medford Webster, Bob Patchin, Michael Turner, John Wikswo y Jim Waters. *Kater's Pendulum*. 1835.
- [mes88] Bureau international des poids et mesures. *Comité international des Poids et Mesures (CIPM): Procès-verbaux de la 12e session (septembre 1887)*. Procès-verbaux des séances / Comité International des Poids et Mesures, Bureau International des Poids et Mesures. 1888.
- [Ham39] Sigmund Hammer. «TERRAIN CORRECTIONS FOR GRAVIMETER STATIONS». En: *GEOPHYSICS* 4.3 (jun. de 1939), págs. 184-194. ISSN: 0016-8033. DOI: 10.1190/1.1440495. URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1440495>.
- [Net39] L. L. Nettleton. *Determination of Density for Reduction of Gravimeter Observations*. 1939. DOI: 10.1190/1.1437088.
- [Luc41] Arnold Romberg Lucien LaCoste. «Force measuring device». US2293437A. 1941. URL: <https://patents.google.com/patent/US2293437A>.
- [Met+53] Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller y Edward Teller. «Equation of State Calculations by Fast Computing Machines». En: *J. Chem. Phys.* 21.6 (jun. de 1953), págs. 1087-1092. ISSN: 0021-9606. DOI: 10.1063/1.1699114. URL: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1699114>.
- [Lon59] I M Longman. «Formulas for computing the tidal accelerations due to the moon and the sun». En: *J. Geophys. Res.* 64.12 (dic. de 1959), págs. 2351-2355. ISSN: 01480227. DOI: 10.1029/JZ064i012p02351. URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/JZ064i012p02351>.

## Todas las Referencias

---

- [TWL59] Manik Talwani, J. Lamar Worzel y Mark Landisman. «Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone». En: *J. Geophys. Res.* 64.1 (ene. de 1959), págs. 49-59. ISSN: 01480227. DOI: 10.1029/JZ064i001p00049. URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/JZ064i001p00049>.
- [Kan62] M. F. Kane. «A COMPREHENSIVE SYSTEM OF TERRAIN CORRECTIONS USING A DIGITAL COMPUTER». En: *GEOPHYSICS* 27.4 (ago. de 1962), págs. 455-462. ISSN: 0016-8033. DOI: 10.1190/1.1439044. URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1439044>.
- [Has70] W. K. Hastings. «Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications». En: *Biometrika* 57.1 (abr. de 1970), págs. 97-109. ISSN: 1464-3510. DOI: 10.1093/biomet/57.1.97. URL: <https://academic.oup.com/biomet/article/57/1/97/284580>.
- [SH76] Michael Ian Shamos y Dan Hoey. «Geometric intersection problems». En: vol. 1976-Octob. 1976, págs. 208-215.
- [Wen78] Hans-georg Wenzel. «Analysis of earth tide observations». En: *Tidal Phenom.* 1973. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1978, págs. 59-75. ISBN: 978-3-540-62833-0. DOI: 10.1007/BFb0011457. URL: <http://www.springerlink.com/index/10.1007/BFb0011457>.
- [Mor80] H. Moritz. «Geodetic reference system 1980». En: *Bull. Géodésique* 54.3 (nov. de 1980), págs. 395-405. ISSN: 0007-4632. DOI: 10.1007/BF02521480. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF02521480>.
- [Pet80] Kurt E. Petersen. «Silicon Torsional Scanning Mirror». En: *IBM J. Res. Dev.* 24.5 (nov. de 1980), págs. 631-637. ISSN: 0018-8646. DOI: 10.1147/rd.245.0631. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5390714/>.
- [Age83] Defense Mapping Agency. *Geodesy for the layman*. 1983.
- [LaC88] Inc. LaCoste and Romberg. *Instruction manual for LaCoste and Romberg, Inc. Model G land gravity meter*. 1988.
- [Esp89] B Armando Espinosa. «La obra de Pierre Bouguer en la Nueva Granada y el descubrimiento de la gravimetría». En: *Rev. la Acad. Colomb. Ciencias Exactas, Fis. y Nat.* 17.64 (1989), págs. 137-141.
- [Tor89] W. Torge. *Gravimetry*. 1989.
- [Age91] Defense Mapping Agency. «World Geodetic System 1984». En: (1991).
- [CV95] Corinna Cortes y Vladimir Vapnik. «Support-vector networks». En: *Mach. Learn.* 20.3 (nov. de 1995), págs. 273-297. ISSN: 0885-6125. DOI: 10.1007/BF00994018. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00994018>.
- [GRE95] PETER J. GREEN. «Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination». En: *Biometrika* 82.4 (1995), págs. 711-732. ISSN: 0006-3444. DOI: 10.1093/biomet/82.4.711. URL: <https://academic.oup.com/biomet/article-lookup/doi/10.1093/biomet/82.4.711>.
- [Sei95] H.O Seigel. *A Guide to high precision land Gravimeter surveys*. Scintrex Limited, 1995, págs. 1-132.

- [BLA96] RICHARD J. BLAKELY. *Potential theory in gravity & magnetic applications*. Vol. 133. 2. 1996, págs. 220-221. ISBN: 052141508X. DOI: 10.1017/S0016756800008773.
- [Bou97] P Bourke. *Polygons and meshes*. 1997. URL: <http://paulbourke.net/geometry/polygonmesh/>.
- [Wen97] Hans-Georg Wenzel. «Tide-generating potential for the earth». En: *Tidal Phenom.* Vol. 66. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1997, págs. 9-26. DOI: 10.1007/BFb0011455. URL: <http://www.springerlink.com/index/10.1007/BFb0011455>.
- [Fro98] Lowrie Frohlich. *Geophysics - Fundamentals Of*. Vol. 79. 15. 1998, pág. 187. ISBN: 9780521859028.
- [ASG99] Mark E. Ander, Tom Summers y Michael E. Gruchalla. «LaCoste & Romberg gravity meter: System analysis and instrumental errors». En: *Geophysics* 64.6 (nov. de 1999), págs. 1708-1719. ISSN: 00168033. DOI: 10.1190/1.1444675. URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1444675>.
- [Goo99] John M. Goodkind. «The superconducting gravimeter». En: *Rev. Sci. Instrum.* 70.11 (nov. de 1999), págs. 4131-4152. ISSN: 0034-6748. DOI: 10.1063/1.1150092. URL: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1150092>.
- [RW00] Hazel Rymer y Glyn Williams-Jones. «Volcanic eruption prediction: magma chamber physics from gravity and deformation measurements». En: *Geophys. Res. Lett.* 27.16 (2000), págs. 2389-2392. ISSN: 00948276. DOI: 10.1029/1999GL011293.
- [MDC01] Gregory J. Galvin MacDonald, Timothy J. Davis y Noel C. *Microelectromechanical accelerometer for automotive applications*. 2001. URL: <https://patents.google.com/patent/US6199874B1/>.
- [MGI01] M. P. Martínez, M. E. Giménez y A. Introcaso. «Indicadores gravimétricos isostáticos en cuencas sedimentarias». En: *Bol. Geol. y Min.* 112.2 (2001), págs. 63-74. ISSN: 03660176.
- [PAL02] Renato Pajarola, Marc Antonijuan y Roberto Lario. «QuadTIN: quadtree based triangulated irregular networks». En: *IEEE Vis. 2002. VIS 2002*. IEEE, 2002, págs. 395-402. ISBN: 0-7803-7498-3. DOI: 10.1109/VISUAL.2002.1183800. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1183800/>.
- [Fix03] J Fixler. «Atom interferometer-based gravity gradiometer measurements». Tesis doct. 2003, 138 pp. ISBN: 9780496569359. URL: <https://www.proquest.com/docview/304714502>.
- [Hin03] William J Hinze. «Bouguer reduction density, why 2.67?» En: *GEOPHYSICS* 68.5 (nov. de 2003), págs. 1559-1560. ISSN: 0016-8033. DOI: 10.1190/1.1620629. URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1620629>.
- [SL03] Roman Schwartz y Andreas Lindau. «Das Europäische gravitationszonenkonzept für eichpflichtige waagen». En: *PTB - Mitteilungen Forschen und Prüfen* 113.1 (2003), págs. 35-42. ISSN: 0030834X.
- [Lac04] Lacoste & Romberg. *Instruction manual Model G&D gravity meters*. 2004.

## Todas las Referencias

---

- [MW04] N. Maluf y K. Williams. *An Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering*. Artech House Microelectromechanical Systems. Artech House, 2004. ISBN: 9781580535915. URL: <https://books.google.com.co/books?id=20j7IaDK10UC>.
- [Van05] Michel Van Camp. «Uncertainty of absolute gravity measurements». En: *J. Geophys. Res.* 110.B5 (2005), B05406. ISSN: 0148-0227. DOI: 10.1029/2004JB003497. URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/2004JB003497>.
- [VV05] Michel Van Camp y Paul Vauterin. «Tsoft: Graphical and interactive software for the analysis of time series and Earth tides». En: *Comput. Geosci.* 31.5 (2005), págs. 631-640. ISSN: 00983004. DOI: 10.1016/j.cageo.2004.11.015.
- [Che+06] Chao Chen, Jianghai Xia, Jiangping Liu y Guangding Feng. «Nonlinear inversion of potential-field data using a hybrid-encoding genetic algorithm». En: *Comput. Geosci.* 32.2 (mar. de 2006), págs. 230-239. ISSN: 00983004. DOI: 10.1016/j.cageo.2005.06.008. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0098300405001366>.
- [Sci06] Scintrex. *Manual Gravimetro Scintrex CG-5*. 2006.
- [Vir06] Heikki Virtanen. *Studies of Earth dynamics with the superconducting gravimeter*. 2006. ISBN: 9789521030574. URL: <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/23166>.
- [Ell+07] Chance Elliott, Vipin Vijayakumar, Wesley Zink y Richard Hansen. «National Instruments LabVIEW: A Programming Environment for Laboratory Automation and Measurement». En: *JALA: Journal of the Association for Laboratory Automation and Measurement* 12.1 (2007), págs. 17-24. DOI: 10.1016/j.jala.2006.07.012.
- [Jen08] Gerhard Jentzsch. «The automated Burris gravity meter-a new instrument using an old principle». En: *Proc Symp. Terr. Gravim. Static Mob. Meas. St Petersburg, Russ.* 2008, págs. 20-23. URL: <http://www.angewandte-gravimetrie.de/pdf/Jentzsch.pdf>.
- [Nce08] Ncei. *Gravity Data*. Ene. de 2008. URL: <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gravity/1999/index.html>.
- [OKH09] Rob O'Reilly, Alex Khenkin y Kieran Harney. «Sonic nirvana: MEMS accelerometers as acoustic pickups in musical instruments». En: *Sensors (Peterborough, NH)* 26.6 (2009), págs. 1-4. ISSN: 07469462.
- [Geo10] Bundesamt für Kartographie und Geodäsie. *El gravímetro absoluto FG5*. 2010.
- [Luo10] Xiaolin Luo. «Constraining the shape of a gravity anomalous body using reversible jump Markov chain Monte Carlo». En: *Geophysical Journal International* 180.3 (mar. de 2010), págs. 1067-1079. ISSN: 0956540X. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2009.04479.x. URL: <https://academic.oup.com/gji/article-lookup/doi/10.1111/j.1365-246X.2009.04479.x>.
- [PQ10] Wibool Piyawattanametha y Zhen Qiu. «12 Optical MEMS». En: *Microelectromechanical Syst. Devices*. 2010. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/12-Optical-MEMS-Piyawattanametha-Qiu/f4d5668ea3200ac aedd921695140bf3d893cf183>.

- [BS11] Jean-Pierre Barriot y Lydie Sichoix. «Gravity Modeling, Theory and Computation». En: *Encycl. Solid Earth Geophys.* 2011, págs. 518-524. DOI: 10.1007/978-90-481-8702-7\_233. URL: [https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-90-481-8702-7\\_233](https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-90-481-8702-7_233).
- [CL11] Chih Chung Chang y Chih Jen Lin. «LIBSVM: A Library for support vector machines». En: *ACM Trans. Intell. Syst. Technol.* 2.3 (2011), págs. 1-39. ISSN: 21576904. DOI: 10.1145/1961189.1961199.
- [Glo+11] Xavier Glorot, Antoine BORDES, Yoshua Bengio y Xinzhong Li. «Deep Sparse Rectifier Neural Networks Xavier». En: *J. Opt. Soc. Am. A Opt. Image Sci. Vis.* 34.7 (2011), págs. 1114-1118. ISSN: 15208532.
- [Ped+11] F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot y E. Duchesnay. «Scikit-learn: Machine Learning in Python». En: *Journal of Machine Learning Research* 12 (2011), págs. 2825-2830.
- [Pav+12] Nikolaos K. Pavlis, Simon A. Holmes, Steve C. Kenyon y John K. Factor. «The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)». En: *J. Geophys. Res. Solid Earth* 117.B4 (abr. de 2012). ISSN: 01480227. DOI: 10.1029/2011JB008916. URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/2011JB008916>.
- [TM12] W. Torge y J. Müller. *Geodesy*. De Gruyter graduate. De Gruyter, 2012. ISBN: 9783110207187. URL: <https://books.google.com.co/books?id=YjWMcgAACAAJ>.
- [Hoh+13] M. Hohenwarter, M. Borchers, G. Ancsin, B. Bencze, M. Blossier, A. Delobel, C. Denizet, J. Éliás, Á Fekete, L. Gál, Z. Konečný, Z. Kovács, S. Lizelfelner, B. Parris y G. Sturr. *GeoGebra*. Dic. de 2013. URL: <http://www.geogebra.org>.
- [AB14] Hamid Alsadi y Ezzadin Baban. «Introduction To Gravity Exploration Method». En: *Researchgate* October (2014), pág. 199. URL: [https://www.researchgate.net/publication/282735037\\_Introduction\\_to\\_gravity\\_exploration\\_method](https://www.researchgate.net/publication/282735037_Introduction_to_gravity_exploration_method).
- [KB14] Diederik P. Kingma y Jimmy Ba. «Adam: A Method for Stochastic Optimization». En: *3rd Int. Conf. Learn. Represent. ICLR 2015 - Conf. Track Proc.* (dic. de 2014), págs. 1-15. arXiv: 1412.6980. URL: <http://arxiv.org/abs/1412.6980>.
- [KK14] Natalia Kolecka y Jacek Kozak. «Assessment of the Accuracy of SRTM C- and X-Band High Mountain Elevation Data: a Case Study of the Polish Tatra Mountains». En: *Pure Appl. Geophys.* 171.6 (jun. de 2014), págs. 897-912. ISSN: 0033-4553. DOI: 10.1007/s00024-013-0695-5. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s00024-013-0695-5>.
- [Cho+15] François Chollet et al. *Keras*. 2015. URL: <https://keras.io>.
- [LPS15] Siu Kwan Lam, Antoine Pitrou y Stanley Seibert. «Numba: A llvm-based python jit compiler». En: *Proceedings of the Second Workshop on the LLVM Compiler Infrastructure in HPC*. 2015, págs. 1-6. URL: <https://numba.pydata.org/>.

## Todas las Referencias

---

- [Met15] Met Office. *Cartopy: a cartographic python library with a Matplotlib interface*. Exeter, Devon, 2015. URL: <https://scitools.org.uk/cartopy>.
- [Mid+16] R. P. Middlemiss, A. Samarelli, D. J. Paul, J. Hough, S. Rowan y G. D. Hammond. «Measurement of the Earth tides with a MEMS gravimeter». En: *Nature* 531.7596 (mar. de 2016), págs. 614-617. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/nature17397. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature17397> <http://www.nature.com/articles/nature17397>.
- [Wei+16] Jin Wei, Wenbin Shen, Hui Li y Liu Ziwei. «Nonlinear Drift of the Spring Gravimeter Caused by Air Pressure from the Kunming GS15 Gravimeters». En: *Polish Marit. Res.* 23.s1 (oct. de 2016), págs. 180-186. ISSN: 2083-7429. DOI: 10.1515/pomr-2016-0063. URL: <http://content.sciendo.com/view/journals/pomr/23/s1/article-p180.xml>.
- [Mid+17] Richard Middlemiss, Steven Bramsiepe, Rebecca Douglas, James Hough, Douglas Paul, Sheila Rowan y Giles Hammond. «Field Tests of a Portable MEMS Gravimeter». En: *Sensors* 17.11 (nov. de 2017), pág. 2571. ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s17112571. URL: <http://www.mdpi.com/1424-8220/17/11/2571>.
- [Muk+17] Manas Mukul, Vinee Srivastava, Sridevi Jade y Malay Mukul. «Uncertainties in the Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) Heights: Insights from the Indian Himalaya and Peninsula». En: *Sci. Rep.* 7.1 (mar. de 2017), pág. 41672. ISSN: 20452322. DOI: 10.1038/srep41672. URL: <http://www.nature.com/articles/srep41672>.
- [Bid+18] Y. Bidel, N. Zahzam, C. Blanchard, A. Bonnin, M. Cadoret, A. Bresson, D. Rouxel y M. F. Lequentrec-Lalancette. «Absolute marine gravimetry with matter-wave interferometry». En: *Nat. Commun.* 9.1 (dic. de 2018), pág. 627. ISSN: 2041-1723. DOI: 10.1038/s41467-018-03040-2. URL: <http://www.nature.com/articles/s41467-018-03040-2>.
- [Bra+18] Steven G. Bramsiepe, David Loomes, Richard P. Middlemiss, Douglas J. Paul y Giles D. Hammond. «A High Stability Optical Shadow Sensor With Applications for Precision Accelerometers». En: *IEEE Sensors Journal* 18.10 (mar. de 2018), págs. 4108-4116. ISSN: 1530-437X. DOI: 10.1109/JSEN.2018.2818066. arXiv: 1711.01253. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8320787/>.
- [Li+18a] T. Li, L. W. Zhang, H. Li, Q. Wang, X. X. Song, H. F. Liu y L. C. Tu. «Design and Simulation of a MEMS Gravimeter for Lunar Missions». En: *2018 Eighth International Conference on Instrumentation Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC)*. 2018, págs. 1116-1119. DOI: 10.1109/IMCCC.2018.00232.
- [Li+18b] T. Li, L.W. Zhang, H. Li, Q. Wang, X.X. Song, H.F. Liu y L.C. Tu. «Design and Simulation of a MEMS Gravimeter for Lunar Missions». En: *2018 Eighth Int. Conf. Instrum. Meas. Comput. Commun. Control*. Vol. 0. IEEE, jun. de 2018, págs. 1116-1119. ISBN: 978-1-5386-8246-3. DOI: 10.1109/IMCCC.2018.00232. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9045493/>.



- [Mid+18] Richard Middlemiss, Giles Hammond, Andreas Noack y Abhinav Prasad. «MEMS gravity sensors for imaging density anomalies». En: *Optical Trapping and Optical Micromanipulation XV*. Ed. por Kishan Dholakia y Gabriel C. Spalding. SPIE, sep. de 2018, pág. 20. DOI: 10.1117/12.2323969. URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/10723/2323969/MEMS-gravity-sensors-for-imaging-density-anomalies/10.1117/12.2323969.full>.
- [Pra+18] A. Prasad, S. G. Bramsiepc, R. P. Middlemiss, J. Hough, S. Rowan, G. D. Hammond y D. J. Paul. «A Portable MEMS Gravimeter for the Detection of the Earth Tides». En: *Proceedings of IEEE Sensors 2018-October (2018)*, págs. 12-14. ISSN: 21689229. DOI: 10.1109/ICSENS.2018.8589884.
- [Car+19] Daniele Carbone, Flavio Cannavò, Filippo Greco, Richard Reineman y Richard J. Warburton. «The Benefits of Using a Network of Superconducting Gravimeters to Monitor and Study Active Volcanoes». En: *J. Geophys. Res. Solid Earth* 124.4 (abr. de 2019), págs. 4035-4050. ISSN: 2169-9313. DOI: 10.1029/2018JB017204. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2018JB017204>.
- [Mik19] Anton Mikhailov. *Turbo, An Improved Rainbow Colormap for Visualization*. Ago. de 2019. URL: <https://ai.googleblog.com/2019/08/turbo-improved-rainbow-colormap-for.html>.
- [Mio19] Federico Miorelli. *Turbo Colormap*. 2019. URL: <https://gist.github.com/FedeMiorelli/640bbc66b2038a14802729e609abfe89>.
- [Tan+19] Shihao Tang, Huafeng Liu, Shitao Yan, Xiaochao Xu, Wenjie Wu, Ji Fan, Jinquan Liu, Chenyuan Hu y Liangcheng Tu. «A high-sensitivity MEMS gravimeter with a large dynamic range». En: *Microsystems & Nanoengineering* 5.1 (dic. de 2019), pág. 45. ISSN: 2055-7434. DOI: 10.1038/s41378-019-0089-7. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41378-019-0089-7> <http://www.nature.com/articles/s41378-019-0089-7>.
- [Ear20] Natural Earth. *1:10m Cultural Vectors*. 2020. URL: <https://www.naturalearthdata.com/>.
- [Ibr20] Azat Ibrakov. *Bentley Ottmann*. 2020. URL: [https://github.com/lycantropos/bentley\\_ottmann](https://github.com/lycantropos/bentley_ottmann).
- [Jor+20] Kelsey Jordahl, Joris Van den Bossche, Martin Fleischmann, Jacob Wasserman, James McBride, Jeffrey Gerard, Jeff Tratner, Matthew Perry, Adrian Garcia Badaracco, Carson Farmer, Geir Arne Hjelle, Alan D. Snow, Micah Cochran, Sean Gillies, Lucas Culbertson, Matt Bartos, Nick Eubank, maxalbert, Aleksey Bilogur, Sergio Rey, Christopher Ren, Dani Arribas-Bel, Leah Wasser, Levi John Wolf, Martin Journois, Joshua Wilson, Adam Greenhall, Chris Holdgraf, Filipe y François Leblanc. *geopandas/geopandas: v0.8.1*. Ver. v0.8.1. Jul. de 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3946761. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3946761>.
- [Kra20] Tomo Krajina. *srtm.py*. 2020. URL: <https://github.com/tkrajina/srtm.py>.

## Todas las Referencias

---

- [Lec+20] Thomas Lecocq, Stephen Hicks, Koen Van Noten, Kasper Van Wijk, Raphael S M De Plaen, Gregor Hillers, Maria-theresia Apoloner y Mario Arroyo-sol. «Global quieting of high frequency seismic noise due to COVID-19 pandemic lockdown measures». En: 2438.07 (2020), págs. 1-10.
- [SAT20] Federico Gustavo Enrique Späth, Ezequiel Darío Antokoletz y Claudia Noemí Tocho. *Tópicos de gravimetría*. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata (EDULP), 2020. ISBN: 978-950-34-1897-0. DOI: 10.35537/10915/97536. URL: <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/97536>.
- [YIN20] Suguru Yabe, Kazutoshi Imanishi y Kiwamu Nishida. «Two-step seismic noise reduction caused by COVID-19 induced reduction in social activity in metropolitan Tokyo, Japan». En: *Earth, Planets Sp.* 72.1 (dic. de 2020), pág. 167. ISSN: 1880-5981. DOI: 10.1186/s40623-020-01298-9. URL: <https://doi.org/10.1186/s40623-020-01298-9> <https://earth-planets-space.springeropen.com/articles/10.1186/s40623-020-01298-9>.
- [Abi+21] Abubakar Abid, Ali Abdalla, Ali Abid, Dawood Khan, Abdulrahman Alfozan y James Zou. «Gradio». En: *arXiv preprint arXiv:1906.02569* (2021). URL: <https://github.com/gradio-app/gradio>.
- [cor21] Michael Piatek corrieann Craig Citro. *Google Colaboratory*. 2021. URL: <https://github.com/googlecolab>.
- [DAN21] DANE. *Marco Geoestadístico Nacional*. 2021. URL: <https://geoportal.dane.gov.co/servicios/descarga-y-metadatos/descarga-mgn-marco-geoestadistico-nacional/>.
- [21] et. al. jasongrout et. al. *IPyWidgets*. 2021. URL: <https://github.com/jupyter-widgets/ipywidgets>.
- [Mid+21] Richard P. Middlemiss, Paul Campsie, William Cunningham, Rebecca Douglas, Victoria McIvor, James Hough, Sheila Rowan, Douglas J. Paul, Abhinav Prasad y G. D. Hammond. «A MEMS gravimeter with multi-axis gravitational sensitivity». En: (feb. de 2021), págs. 1-30. arXiv: 2102.05528. URL: <http://arxiv.org/abs/2102.05528>.
- [Tie+21] Eite Tiesinga, Peter J. Mohr, David B. Newell y Barry N. Taylor. «CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018». En: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 50.3 (2021), pág. 033105. DOI: 10.1063/5.0064853. eprint: <https://doi.org/10.1063/5.0064853>. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0064853>.
- [Wik21] Wikipedia. *Lucien LaCoste — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2021. URL: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lucien\\_LaCoste&oldid=1053848488](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lucien_LaCoste&oldid=1053848488).
- [ZR21] Juan Camilo Zapata y Johans Restrepo. «Self-Adaptive Acceptance Rate-Driven Markov Chain Monte Carlo Method Applied to the Study of Magnetic Nanoparticles». En: *Computation* 9.11 (nov. de 2021), pág. 124. ISSN: 2079-3197. DOI: 10.3390/computation9110124. URL: <https://www.mdpi.com/2079-3197/9/11/124>.
- [Pin22] Philippe Pinard. *matplotlib-scalebar*. 2022. URL: <https://github.com/ppinard/matplotlib-scalebar>.



- [tqd22] tqdm developers. *tqdm*. 2022. URL: <https://github.com/tqdm/tqdm>.
- [NASa] NASA . *Apolo 17 Press Kit*. Inf. téc. URL: [https://www.nasa.gov/specials/apollo50th/pdf/A17%7B%5C\\_%7DPressKit.pdf](https://www.nasa.gov/specials/apollo50th/pdf/A17%7B%5C_%7DPressKit.pdf).
- [NASb] NASA . *Lunar Surface Gravimeter*. URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/experiment/display.action?id=1972-096C-09>.
- [UTe] UTexas. *Texas Physics History*. Department of Physics - University of Texas at Austin. URL: [https://web2.ph.utexas.edu/utphysicshistory/UTexas\\_Physics\\_History/Lucien\\_LaCoste.html](https://web2.ph.utexas.edu/utphysicshistory/UTexas_Physics_History/Lucien_LaCoste.html).
- [ZH] Maria Zuber y R.S. Hildebrand. *GRAIL: Gravity Recovery and Interior Laboratory*. URL: <http://moon.mit.edu/index.html>.



# Índice Alfabético

## A

- Algoritmo
  - de Metropolis . . . . 59
  - de Shamos-Huey . 59
- Algoritmo de Metropolis . . . . . 50
- Anomalía
  - de aire libre . . 14, 72
  - de Bouguer . . . 16, 72
  - Isostática . . . . . 19
- Anomalía de
  - aire libre . . . . . 99
  - Bouguer . . . . . 99
- Arduino . . . . . 99

## C

- Centroide . . . . . 64
- CIPM . . . . . 1, 6
- Colab . . . . . 72, 94, 105
- Corrección
  - de aire libre . . . . . 14
  - de Bouguer . . . . . 16

- por deriva
  - instrumental . 20
- por Efecto Eötvös 22
- por mareas . . . . . 21
- por movimientos . 23
- por presión
  - atmosférica . . 23

## D

- DANE . . . . . 1, 84
- DEM . . . . . 1, 18, 74
- Densidad a Priori . . . . . 57

## E

- Ecuación
  - de Talwani . . . 51, 57
- EGM . . . . . 1, 10

## F

- FACom . . . . . 1, 99
- FCEN . . . . . 1

## Formula

- de 1930 . . . . . 8
- de 1948 . . . . . 8
- de 1967 . . . . . 8
- de 1980 . . . . . 8
- de 1980\* . . . . . 9
- de 1984 . . . . . 10
- Somigliana . . . . . 10
- FPGA . . . . . 99

## Función

- de Gauss . . . . . 57

## G

- GeoGebra . . . . . 95, 105
- GICM . . . . . 1, 99
- GitHub . . . . . 1, 59, 74, 94
- Gradio . . . . . 94, 105
- Gravímetro
  - Absoluto . . . . . 29
  - Relativo . . . . . 26
- GRS80 . . . . . 1, 72
- GRS84 . . . . . 1

## Índice Alfabético

---

### I

IA ..... *1*, 98  
IRIS ..... *1*, 99  
IV ..... *1*, 97

### J

JIT ..... 59  
Jupyter ..... 94

### K

Keras ..... 79, 82  
Kernel ..... 81

### L

LabVIEW ..... 97, 105  
LC&R ..... *1*, 32, 35  
LED ..... *1*, 40  
LiDAR ..... *1*, 18

### M

MEMS ..... *1*, 36  
MGN ..... *1*, 84  
ML ..... *1*, 72, 79  
MSE ..... *1*, 86

### N

NASA ..... *1*, 34  
NEMS ..... *1*, 36  
NIST ..... *1*, 6  
NOAA ..... *1*, 72  
Numpy ..... 59

### O

OVSM ..... *1*  
OVSP ..... *1*

### P

Probabilidad  
    de aceptación ..... 58  
Python ..... 59, 79

### Q

QPD ..... *1*, 40

### R

Raspberry ..... 99  
Red Neuronal ..... 83  
Resorte

    de cuarzo ..... 26  
    de longitud-0 . 26, 32  
RJMCMC ..... *1*, 57, 67

### S

SEAP ..... *1*, 99  
SGC ..... *1*  
SHIMA ..... 99  
SHIMIA ..... *1*, 94  
Sklearn ..... 73, 79  
Softplus ..... 83  
SRTM ..... *1*, 18, 74  
SVM ..... *1*, 79  
SVR ..... *1*, 79, 80

### T

TBB ..... *1*, 59

### U

UdeA ..... *1*, 96

### V

Verosimilitud ..... 57