Morfismos, Vol. 12, No. 2, 2008, pp. 17–32

Vértices simpliciales y escalonabilidad de grafos

Roberto Cruz Mario Estrada

Resumen

Dado un grafo simple no dirigido G, se le asocia un complejo simplicial Δ_G cuyas caras corresponden a los conjuntos independientes de G. Van Tuyl y Villarreal definieron un grafo G como escalonable si el complejo simplicial asociado Δ_G es escalonable en el sentido no puro de Björner y Wachs. Estos autores demostraron que todos los grafos triangulados son escalonables y que los grafos bipartidos escalonables son precisamente los grafos bipartidos secuencialmente Cohen-Macaulay. En el presente artículo se prueba que el concepto de vértice simplicial de un grafo permite, no solo demostrar estos resultados, sino dar otras condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de un grafo. Además se demuestra que todo grafo simplicial es escalonable y que todo grafo arco-circular que contenga al menos un vértice simplicial es escalonable.

2000 Mathematics Subject Classification:13F55, 13D02, 05C38, 05C75.
Keywords and phrases: grafos escalonables, vértices simpliciales, secuencialmente Cohen-Macaulay, grafos simpliciales, grafos arco-circulantes.

1 Introducción

Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo simple (sin lazos ni aristas múltiples) no dirigido, $V_G = \{x_1, \ldots, x_n\}$ su conjunto de vértices y E_G su conjunto de aristas. Identificando cada vértice x_i con la variable x_i en el anillo de polinomios $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ sobre el campo k, se le asocia a G un ideal de monomios libres de cuadrados $I(G) = (\{x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E_G\})$. El ideal $I(G)$ se denomina *ideal de aristas del grafo G*. Utilizando la correspondencia de Stanley - Reisner, se le asocia al grafo G el complejo simplicial Δ_G tal que $I_{\Delta_G} = I(G)$, es decir que el ideal de Stanley-Reisner del complejo simplicial coincida con el ideal de aristas del grafo.

En este caso, las caretas de Δ_G son los conjuntos independientes o conjuntos estables maximales de G.

Se dice que el grafo G es *escalonable* si su complejo simplicial asociado Δ_G es escalonable. Esta definición fue introducida por Van Tuyl y Villarreal [15] y se utiliza la definición de escalonabilidad no pura introducida por Björner y Wachs [1]. Para los grafos, la generalización natural de la propiedad Cohen-Macaulay es la de ser secuencialmente Cohen-Macaulay. Un teorema de Stanley [13] afirma que la escalonabilidad implica la propiedad de ser secuencialmente Cohen-Macaulay. En el mencionado trabajo de Van Tuyl y Villarreal [15] se prueban los siguientes teoremas:

Teorema 1.1 [15, Teorema 2.12] *Sea G un grafo triangulado. Entonces G es escalonable.*

Teorema 1.2 [15, Teorema 3.8] *Sea G un grafo bipartido. Entonces G es escalonable si y solo si G es secuencialmente Cohen-Macaulay.*

El argumento central en la prueba del teorema 1.1 es la existencia de un vértice x en un grafo triangulado G cuya vecindad induce un subgrafo completo *[15, Lema 2.11]*. Por otra parte, la demostración del teorema 1.2 se basa en que todo grafo bipartido, conexo y secuencialmente Cohen-Macaulay tiene un vértice con grado 1 y en la siguiente afirmacion que da condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de un grafo que contiene un vértice de grado 1:

Teorema 1.3 [15, Teorema 2.9] *Sea G un grafo y sean x_1,y_1 dos vértices adyacentes de G con $deg(x_1) = 1$. Sean*

$$G_1 = G \setminus (\{x_1\} \cup N_G(x_1)) \quad y \quad G_2 = G \setminus (\{y_1\} \cup N_G(y_1)),$$

entonces G es escalonable si y solo si G_1 y G_2 son escalonables.

Curiosamente la introducción del concepto de vértice simplicial permite sustituir las condiciones del anterior teorema por la condición más general de que el grafo G contenga un vértice simplicial. Un vértice x de un grafo G se denomina simplicial si su vecindad $N_G(x)$ induce un subgrafo completo.

En la Sección 2 se demuestra el siguiente teorema que generaliza el teorema 1.3 de Van Tuyl y Villarreal.

Teorema 1.4 (Teorema 2.5) *Sea G un grafo, x_1 un vértice simplicial, $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_r\}$ y $G_i = G \setminus (\{x_i\} \cup N_G(x_i))$, para $i = 1, \ldots, r$. G es escalonable si y solo si G_i es escalonable para todo $i = 1, \ldots, r$.*

Este resultado es ideal para establecer la escalonabilidad de grafos que tengan al menos un vértice simplicial y ofrece otra demostración para el teorema de Van Tuyl y Villarreal sobre la escalonabilidad de los grafos triangulados y para el teorema de los mismos autores sobre la equivalencia para grafos bipartidos entre la escalonabilidad y la condición de ser secuencialmente Cohen-Macaulay. Este último teorema puede extenderse a los grafos que contienen al menos un vértice simplicial.

Teorema 1.5 (Corolario 2.7) *Sea G un grafo que contiene un vértice simplicial. Entonces G es escalonable si y solo si es secuencialmente Cohen - Macaulay.*

En la Sección 3 se aplica la multiplicación de vértices simpliciales para obtener nuevas condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de un grafo. Dado un grafo G y x un vértice simplicial de G, el grafo $G \circ x$ se obtiene mediante la multiplicación del vértice x, agregando un nuevo vértice x' que se conecta a todos los vértices de la vecindad de x. En el trabajo se prueba el siguiente

Teorema 1.6 (Teorema 3.2) *Sea G un grafo, x un vértice simplicial de G y $G \circ x$ el grafo obtenido por la multiplicación del vértice x. Entonces G es escalonable si y solo si $G \circ x$ es escalonable.*

En la sección 4 y final se establece la escalonabilidad de los grafos simpliciales y de los grafos arco-circulares que tienen un vértice simplicial. En un grafo simplicial cada vértice es un vértice simplicial o es adyacente a un vértice simplicial.

Teorema 1.7 (Teorema 4.3)*Sea G un grafo simplicial, entonces G es escalonable.*

Finalmente se demuestra el siguiente teorema sobre la escalonabilidad de los grafos arco-circulares:

Teorema 1.8 (Teorema 4.9) *Sea G un grafo arco-circular que tiene al menos un vértice simplicial. Entonces G es escalonable.*

2 Escalonabilidad de grafos que contienen vértices simpliciales

En esta sección se generaliza el teorema de Van Tuyl y Villarreal [15, Teorema 2.9] sobre las condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de un grafo, reemplazando la condición sobre la existencia de un vértice de grado 1, por la existencia de un vértice simplicial.

Definición 2.1 *Se dice que un complejo simplicial Δ es escalonable si sus caretas pueden ordenarse $F_1, \ldots, F_s$ de forma tal que para todo $1 \leq i < j \leq s$, existe un vértice $v \in F_j \backslash F_i$ y un número $l \in \{1, \ldots, j-1\}$ tal que $F_j \backslash F_l = \{v\}$. La secuencia $F_1, \ldots, F_s$ se denomina escalonamiento de Δ.*

Aqui se utiliza la definición de escalonabilidad 'no pura' introducida por Bjöner and Wachs [1]. Se dirá que Δ es escalonable puro si todas las caretas tienen la misma dimensión.

Definición 2.2 *Sea G un grafo simple no dirigido y Δ_G su complejo simplicial asociado. Se dice que G es un grafo escalonable si Δ_G es un complejo simplicial escalonable.*

La anterior definición fue introducida por Van Tuyl y Villarreal [15]. En el referido artículo se demuestra que todo grafo triangulado es escalonable [15, Teorema 2.12]. Un grafo se denomina triangulado si todo ciclo de longitud estrictamente mayor que 3 posee una cuerda, es decir, una arista entre dos vértices no consecutivos del ciclo. La demostración se basa en el lema de Dirac [4] que asegura que todo grafo triangulado posee un vértice, denominado simplicial, cuya vecindad induce un subgrafo completo o clique.

Dado un subconjunto $S \subset V_G$, por $G \backslash S$ se denota el grafo formado a partir de G eliminando todos los vértices de S y todas las aristas incidentes en cada vértice de S. Si x es un vértice de G, por $N_G(x)$ se denota la vecindad de x, es decir, el conjunto de todos los vértices de G que son adyacentes a x.

Definición 2.3 *Sea G un grafo simple no dirigido. Un vértice x de G se denomina simplicial si su vecindad $N_G(x)$ induce un subgrafo completo de G.*

Dado un grafo G y $S \subset V_G$, denotemos por $\langle S \rangle$ el subgrafo inducido por el conjunto de vértices S. Notemos que si x es un vértice simplicial de G, el subgrafo inducido $\langle \{x\} \cup N_G(x) \rangle$ es un clique maximal, además es el único clique maximal que contiene a x. El siguiente teorema de Dirac afirma que todo grafo triangulado tiene un vértice simplicial.

Teorema 2.4 *(Dirac, [4]) Todo grafo triangulado G tiene un vértice simplicial. Además, si G no es un clique, entonces tiene dos vértices simpliciales no adyacentes entre si.*

En el teorema 2.9 de [15] el vértice x_1, al ser de grado 1, es un vértice simplicial ya que este vértice junto con su vecindad induce un subgrafo completo maximal que además es el único que contiene a x_1 (la arista $\{(x_1, y_1\})$. Este hecho y la utilización de los vértices simpliciales en la demostración de la escalonabilidad de los grafos triangulados sugieren la siguiente generalización:

Teorema 2.5 *Sea G un grafo, x_1 un vértice simplicial de G y su vecindad $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_r\}$. Sea $G_i = G \setminus (\{x_i\} \cup N_G(x_i))$ para $i = 1, \ldots, r$. G es escalonable si y solo si G_i es escalonable para todo $i = 1, \ldots, r$.*

Demostración. Sea G escalonable. El teorema 2.6 del artículo de Van Tuyl y Villarreal[15], asegura que si G es escalonable y x cualquier vértice de G, entonces el grafo $G' = G \setminus (\{x\} \cup N_G(x))$ es escalonable. Por tanto, los grafos G_i son escalonables.
La prueba en la otra dirección es practicamente idéntica a la prueba del teorema 2.9 de [15] sobre la escalonabilidad de los grafos triangulados. Sea G_i escalonable y $F_{i1}, \ldots, F_{is_i}$ un escalonamiento de Δ_{G_i} para cada $i = 1, \ldots, r$. El subgrafo $\langle \{x_1\} \cup N_G(x_1) \rangle = \langle \{x_1, \ldots, x_r\} \rangle$ es el único subgrafo maximal que contiene a x_1. Además cada careta de Δ_G, es decir, cada conjunto independiente maximal de G, intersecta a $\{x_1, \ldots, x_r\}$ exactamente en un vértice. Por el argumento anterior, la lista completa de caretas de Δ_G es

$$F_{11} \cup \{x_1\}, \ldots, F_{1s_1} \cup \{x_1\}; \ldots ; F_{r1} \cup \{x_r\}, \ldots, F_{rs_r} \cup \{x_r\}.$$

Se demuestra que la lista con ese orden lineal es un escalonamiento de Δ_G. Se consideran dos casos:

1. $F' = F_{ik} \cup \{x_i\}$, $F = F_{jt} \cup \{x_j\}$, $i < j$. Se tiene que $x_j \in F \setminus F'$. Además, el conjunto $F_{jt} \cup \{x_1\}$ es un conjunto independiente de G, por tanto está contenido en una de las caretas de Δ_G que contiene a x_1, es decir, existe l, $1 \leq l \leq s_1$, tal que $F_{jt} \cup \{x_1\} \subset F_{1l} \cup \{x_1\}$. Denotando por $F'' = F_{1l} \cup \{x_1\}$, se tiene que $\{x_j\} = F \setminus F''$ y F'' es anterior a F.

2. $F' = F_{ik} \cup \{x_i\}$, $F = F_{it} \cup \{x_i\}$, $k < t$. Este caso se demuestra a partir de la escalonabilidad del grafo G_i. □

El teorema anterior generaliza el teorema 2.9 de [15] al usar que todo vértice de grado 1, es un vértice simplicial. Este resultado además puede servir para dar otra demostración de que los grafos triangulados son escalonables *[15, Teorema 2.12]*. Todo subgrafo inducido de un grafo triangulado es triangulado, además todo grafo triangulado por el lema de Dirac (teorema 2.4) o es un clique o contiene dos vértices simpliciales. Aplicando la inducción en $n = |V_G|$ y suponiendo que el vértice x_1 de G es simplicial, los subgrafos G_i son triangulados al ser subgrafos inducidos de G y son escalonables por la hipótesis de inducción. Por el teorema 2.5 el grafo G es escalonable. De igual forma, en la demostración de que la condición de un grafo bipartido de ser secuencialmente Cohen-Macaulay implica la escalonabilidad del mismo, *[15, Teorema 3.8]* se puede utilizar el teorema 2.5. Asumiendo que G es bipartido y secuencialmente Cohen-Macaulay y aplicando la inducción en el número de vértices, el lema 3.7 de [15] asegura la existencia en G de un vértice x_1 de grado 1 (es decir, un vértice simplicial). Por el teorema 3.3 del mismo artículo los subgrafos $G_1 = G \setminus (\{x_1\} \cup N_G(x_1))$ y $G_2 = G \setminus (\{y_1\} \cup N_G(y_1))$, donde y_1 es el vértice adyacente a x_1, son secuencialmente Cohen-Macaulay. Por la hipótesis de inducción estos grafos son escalonables y por el teorema 2.5 se obtiene que G es escalonable.

El teorema 2.5 también puede usarse para establecer la escalonabilidad de grafos que tengan vértices simplicales. Se toma el vértice simplicial x_1, se hallan los subgrafos G_i, si alguno de estos no es escalonable, entonces el grafo inicial no es escalonable. Si todos son escalonables entonces el grafo original es escalonable y su escalonamiento puede construirse a partir de los escalonamientos de los subgrafos G_i.

Los grafos G (a la derecha) y H (a la izquierda)

Ejemplo 2.6 *Sean G y H los grafos indicados en la figura anterior. El vértice g del grafo G es simplicial y su vecindad es $N_G(g) = \{c, d\}$. Los grafos G_g, G_c, G_d son escalonables con escalonamientos:*

$$\Delta_{G_g} = \langle \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, e\}, \{b, f\} \rangle; \ \Delta_{G_c} = \langle \{b, f\} \rangle; \ \Delta_{G_d} = \langle \{a, e\} \rangle.$$

Por el teorema 2.5 se obtiene que G es escalonable y que

$$\Delta_G = \langle \{a, e, g\}, \{a, f, g\}, \{b, e, g\}, \{b, f, g\}, \{b, f, c\}, \{a, e, d\} \rangle,$$

es un escalonamiento de G. Por otra parte, el vértice a es un vértice simplicial del grafo H y su vecindad es $N_H(a) = \{b, c\}$. El grafo $H_a = H \setminus (\{a\} \cup N_H(a))$ no es escalonable y por el teorema 2.5, el grafo H no es escalonable.

Van Tuyl y Villarreal demostraron la equivalencia entre la escalonabilidad y la propiedad de ser secuencialmente Cohen - Macaulay para los grafos bipartidos [15, Teorema 3.8]. Como consecuencia del teorema 2.5, puede obtenerse un resultado análogo para los grafos que contienen al menos un vértice simplicial.

Corolario 2.7 *Sea G un grafo que contiene un vértice simplicial. Entonces G es escalonable si y solo si es secuencialmente Cohen - Macaulay.*

Demostración. Si G es escalonable entonces es secuencialmente Cohen - Macaulay según se deriva de un resultado de Stanley [13]. Sea ahora G secuencialmente Cohen - Macaulay y supongamos que todo grafo secuencialmente Cohen - Macaulay con un número menor de vértices es escalonable. Sea x_1 un vértice simplicail de G, $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_r\}$. Los grafos $G_i = G \setminus (\{x_i\} \cup N_G(x_i))$ para $i = 1, \ldots, r$, son secuencialmente Cohen - Macaulay [15, Teorema 3.3] y por la hipotesis de inducción son escalonables. El teorema 2.5 asegura la escalonabilidad del grafo G. $\square$

3 Multiplicación de vértices simpliciales

En esta sección se aplica la multiplicación de vértices simpliciales a grafos escalonables con el fin de obtener nuevos grafos escalonables. La multiplicación de vértices es la clave de la demostración dada por Lovász [7] del teorema de los grafos perfectos, que afirma que un grafo es perfecto si y solo si lo es su complemento. Un grafo G es perfecto si para todo subgrafo inducido, se cumple que su número cromático es igual a su número clique. Tanto los grafos bipartidos como los grafos triangulados son grafos perfectos. En la sección se utiliza la definición de multiplicación de vértices dada por Golumbic[6].

Definición 3.1 *[6] Sea G un grafo, x un vértice de G. El grafo $G \circ x$ se obtiene de G agregando un nuevo vértice x' que se conecta a todos los vértices de $N_G(x)$. En este caso se dice que el grafo $G \circ x$ se obtiene por multiplicación del vértice x.*

Teorema 3.2 *Sea G un grafo, x un vértice simplicial de G y $G \circ x$ el grafo obtenido por la multiplicación del vértice x. Entonces G es escalonable si y solo si $G \circ x$ es escalonable.*

Demostración. Sea x un vértice simplicial de G, x' el nuevo vértice que se conecta a todos los vértices de $N_G(x)$, $G' = G \circ x$ y $N_G(x) = \{x_1, \ldots, x_r\} = N_{G'}(x')$. El vértice x' es simplicial en G'. Para $i = 1, \ldots, r$ sea

$$G_i = G \setminus (\{x_i\} \cup N_G(x_i)) = G'_i = G' \setminus (\{x_i\} \cup N_{G'}(x_i)).$$

Los grafos obtenidos al quitar los vértices x' y x junto con sus vecindades de los respectivos grafos G' y G cumplen la relación:

$$G'_{x'} = G' \setminus (\{x'\} \cup N_{G'}(x')) = G \setminus (\{x\} \cup N_G(x)) \cup \{x\} = G_x \cup \{x\},$$

es decir, el grafo $G'_{x'}$ es el mismo grafo G_x agregandole el vértice aislado $\{x\}$.

Sea G escalonable. Por teorema 2.5, los grafos $G_x, G_1, \ldots, G_r$, son escalonables. El grafo $G_x \cup \{x\}$ es también escalonable, basta agregar el vértice x a todas las caretas de Δ_{G_x}. Esto significa que los grafos $G'_{x'}, G'_1, \ldots, G'_r$ son escalonables y por el teorema 2.5, $G' = G \circ x$ es escalonable.

Sea ahora G' escalonable. Los grafos $G'_{x'}, G'_1, \ldots, G'_r$ son escalonables por el teorema 2.5. Notemos que si $G'_{x'} = G_x \cup \{x\}$ es escalonable, entonces G_x es escalonable, basta quitar al vértice x de todas las caretas de $\Delta_{G'_{x'}}$, pues x aislado. Entonces los grafos $G_x, G_1, \ldots, G_r$ son escalonables y por el teorema 2.5, el grafo G es escalonable. □

Si G es un grafo que tiene dos vértices simpliciales no adyacentes con la misma vecindad, se puede considerar uno de estos vértices como multiplicación del otro, por tanto podemos eliminarlo del grafo y analizar la escalonabilidad del grafo reducido.

La multiplicación de vértices simpliciales puede generalizarse agregando más de un vértice a cada vértice simplicial.

Definición 3.3 *Sea G un grafo, $S = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset V_G$ un conjunto vértices simpliales tales que $N_G(x_i) \neq N_G(x_j)$ para $i \neq j$ y sea $h = (h_1, \ldots, h_r)$ un vector de enteros positivos. El grafo $H = G \circ h$ se obtiene de G por multiplicación de los vértices de S, si por cada vértice simplicial x_i, $i = 1, \ldots, r$, se agregan a G h_i nuevos vértices $x_i^1, \ldots, x_i^{h_i}$ y cada uno de estos vértices se conecta a todos los vértices de $N_G(x_i)$.*

Corolario 3.4 *Sea G un grafo y $S = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset V_G$, conjunto de vértices simpliciales tales que $N_G(x_i) \neq N_G(x_j)$ para $i \neq j$ y sea $h = (h_1, \ldots, h_r)$ un vector de enteros positivos. Entonces G es escalonable si y solo si el grafo $H = G \circ h$ es escalonable.*

Demostración. Para cada vértice x_i de S, se aplica h_i veces el teorema 3.2. □

Nota 3.5 *Dado un grafo escalonable G que contiene varios vértices simpliciales, el corolario anterior permite obtener nuevos grafos escalonables multiplicando cada uno de los vértices simpliciales de G. Si se tiene un escalonamiento de G, sería conveniente contar con un procedimiento sencillo que permita construir un escalonamiento del grafo multiplicado. La demostración del teorema 2.5 garantiza que si x es un vértice simplicial, se puede construir un escalonamiento de Δ_G, $F_1, \ldots, F_s, F'_1, \ldots, F'_r$, tal que las caretas $F_1, \ldots, F_s$, en las cuales x está contenido, ocupan las primeras posiciones. Por otra parte, la demostración del teorema 3.2 garantiza que el grafo $G \circ x$ tiene un escalonamiento que se obtiene agregando el nuevo vértice a las caretas $F_1, \ldots, F_s$. Sin embargo, cuando el grafo escalonable H es producto de la multiplicación de más de un vértice simplicial del grafo escalonable G y partiendo de un escalonamiento de G se agregan los nuevos vértices a las caretas en las cuales están contenidos los vértices simpliciales correspondientes, se puede obtener una lista de caretas que no constituye un escalonamiento de H como se muestra en el ejemplo 3.6.*

Sea G un grafo escalonable, $x_1, \ldots, x_r$ vértices simpliciales de G, $h = (h_1, \ldots, h_r)$ un vector de enteros positivos y $F_1, \ldots, F_s$ es un escalonamiento de Δ_G. El escalonamiento del grafo escalonable $H = G \circ h$ se puede obtener de la siguiente forma.

Sea $F_{t_1} \ldots, F_{t_p}$ la subsucesión de las caretas que contienen a x_1 y sea $F_{r_1} \ldots, F_{r_q}$ la subsucesión de las caretas que no contienen a x_1 donde $p + q = s$. La demostración del teorema 2.5 garantiza que

$$F_{t_1} \ldots, F_{t_p}, F_{r_1} \ldots, F_{r_q}$$

es un escalonamiento de Δ_G. Sean ahora $F'_{t_1} \ldots, F'_{t_p}$ las caretas obtenidas al agregarles a las caretas $F_{t_1} \ldots, F_{t_p}$ los h_1 nuevos vértices correspondientes a x_1; la demostración del teorema 3.2 garantiza que

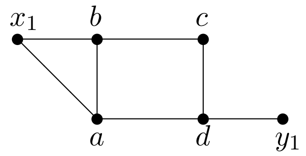
$$F'_{t_1} \ldots, F'_{t_p}, F_{r_1} \ldots, F_{r_q}$$

es un escalonamiento del grafo escalonado $H_1 = G \circ (h_1, 0, \ldots, 0)$. *Si aplicamos sucesivamente el procedimiento descrito a los grafos*

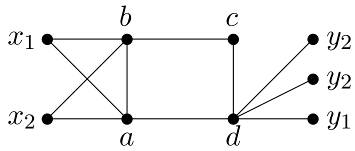
$$\begin{aligned} H_2 = H_1 \circ (0, h_2, 0, \ldots, 0),\ H_3 &= H_2 \circ (0, 0, h_3, 0, \ldots, 0), \ldots, \\ H &= H_r = H_{r-1} \circ (0, 0, \ldots, 0, h_r) \end{aligned}$$

se obtiene el escalonamiento buscado.

Ejemplo 3.6 *Sean los grafos* G *y* $H = G \circ h$, *donde* $S = \{x_1, y_1\}$ *y* $h = (1, 2)$.



G



H

Es fácil ver que el grafo G *es escalonable y que*

$$\Delta_G = \langle \{x_1, c, y_1\}, \{x_1, d\}, \{a, c, y_1\}, \{b, y_1\}, \{b, d\} \rangle,$$

es un escalonamiento de Δ_G.

El vértice x_2 *y los vértices* y_2, y_3 *del grafo* H *son producto de la multiplicación de los vértices* x_1, y_1 *respectivamente. Por el corolario anterior el grafo* H *es escalonable, sin embargo si en el escalonamiento anterior agregamos el vértice* x_2 *a las caretas que contienen* x_1 *y los vértices* y_2, y_3 *a las caretas que contienen* y_1, *es fácil ver que la lista obtenida*

$$\langle \{x_1, x_2, c, y_1, y_2, y_3\}, \{x_1, x_2, d\}, \{a, c, y_1, y_2, y_3\}, \{b, y_1, y_2, y_3\}, \{b, d\} \rangle,$$

no es un escalonamiento de Δ_G.

Como las caretas que contienen x_1 *ocupan las primeras posiciones, siguiendo la demostración del teorema 3.2 podemos agregar a estas caretas el vértice* x_2, *para obtener un escalonamiento del grafo* $H_1 = G \circ (1, 0)$ *producto de la multiplicación del vértice* x_1. *El escalonamiento obtenido es:*

$$\Delta_{H_1} = \langle \{x_1, x_2, c, y_1\}, \{x_1, x_2, d\}, \{a, c, y_1\}, \{b, y_1\}, \{b, d\} \rangle.$$

Se puede reorganizar el escalonamiento anterior, tomando todas las caretas que contienen el vértice simplicial y_1 *en su orden y colocandolas en las primeras posiciones*

$$\Delta_{H_1} = \langle \{x_1, x_2, c, y_1\}, \{a, c, y_1\}, \{b, y_1\}, \{x_1, x_2, d\}, \{b, d\} \rangle.$$

Agregando ahora a estas caretas los vértices y_2, y_3 se obtiene un escalonamiento del complejo simplicial asociado a $H = H_1 \circ (0,2) = G \circ (1,2)$:

$$\Delta_H = \langle \{x_1, x_2, c, y_1, y_2, y_3\}, \{a, c, y_1, y_2, y_3\}, \{b, y_1, y_2, y_3\}, \{x_1, x_2, d\}, \{b, d\} \rangle.$$

4 Grafos simpliciales y arco-circulares.

En esta sección se establece la escalonabilidad de los grafos simpliciales y de los grafos arco-circulares que contienen al menos un vétice simplicial.

Los grafos simpliciales fueron introducidos en [2] y en [3] se estudian varias propiedades de estos grafos que pueden ser establecidas con algoritmos polinomiales. En un grafo simplicial cada vértice es simplicial o es adyacente a un vértice simplicial.

Definición 4.1 *Dado un grafo G, un clique de G se denomina simplejo si contiene uno o más vértices simpliciales. El grafo G se denomina simplicial si cada vértice está contenido en un simplejo, es decir, cada vértice es simplicial o pertenece a la vecindad de un vértice simplicial.*

Lema 4.2 *Sea G un grafo simplicial. Para cualquier vértice v de G, el grafo $G_v = G \backslash (\{v\} \cup N_G(v))$ es simplicial.*

Demostración. Notemos que si G es un grafo simplicial, x un vértice simplicial de G y v un vértice de G tal que $x \notin N_G(v)$, entonces x es simplicial en el subgrafo $G_v = G \backslash (\{v\} \cup N_G(v))$. En efecto, al quitar del grafo G el vértice v y su vecindad, pueden eliminarse algunos vértices del simplejo que contiene a x, no obstante x y los vecinos de x que quedan en G_v inducen un simplejo en G_v.

Supongamos que dado v un vértice cualquiera de G, el grafo $G_v = G \backslash (\{v\} \cup N_G(v))$ no es simplicial. Entonces existe un vértice u de G_v tal que u no es simplicial en G_v y no es adyacente a un vértice simplicial en G_v. Como G es simplicial pueden darse dos casos:

(Caso 1) u es simplicial en G. Como $u \notin N_G(v)$, por la anterior observación, u es simplicial en G_v, lo cual es una contradicción.

(Caso 2) u es adyacente a un vértice x simplicial en G. Evidentemente $x \notin N_G(v)$, de lo contrario $N_G(x) \subset N_G(v)$ y entonces u pertenecería a la vecindad de v. Por la anterior observación, x es simplicial en G_v lo cual es una contradicción. □

El lema 4.2, conjuntamente con el teorema 2.5 permiten establecer la escalonabilidad de los grafos simpliciales.

Teorema 4.3 *Sea G un grafo simplicial, entonces G es escalonable.*

Demostración. La prueba es por inducción en el número de vértices. Sea G un grafo simplicial y supongamos que todo grafo simplicial con menos vértices es escalonable.

Sea x_1 un vértice simplicial y $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_r\}$. Los grafos $G_i = G \setminus (\{x_i\} \cup N_G(x_i))$, son grafos simpliciales por el lema 4.2. Por la hipótesis de inducción estos grafos son escalonables. Por el teorema 2.5 el grafo G es escalonable. □

Si un grafo es escalonable, entonces es secuencialmente Cohen - Macaulay según se deriva del resultado de Stanley [13]. El teorema anterior implica que los grafos simpliciales son secuencialmente Cohen-Macaulay. Si además un grafo simplicial G es no mezclado, es decir, todos los cubrimientos-vértices de G tienen la misma cardinalidad, entonces el teorema 4.3 implica que G es escalonable puro y por tanto Cohen-Macaulay.

Dado un grafo G y $S \subset V_G$, se considera el grafo $G \cup W(S)$, obtenido mediante la adición de nuevos vértices $\{y_i \mid x_i \in S\}$ y nuevas aristas llamadas "bigotes"'(whiskers) $\{\{x_i, y_i\} \mid x_i \in S\}$. Un corolario del teorema anterior es el siguiente teorema de Villarreal[14]; ver también [12].

Corolario 4.4 *[12, Teorema 2.1] Sea G un grafo simple y V_G su conjunto de vértices. Entonces el grafo $G \cup W(V_G)$ es Cohen-Macaulay.*

Demostración. Cada uno de los vértices agregados es simplicial, por tanto $G \cup W(V_G)$ es un grafo simplicial y por el teorema 4.3 es escalonable. Como $G \cup W(V_G)$ es no mezclado, entonces $G \cup W(V_G)$ es Cohen - Macaulay. □

Los grafos bien cubiertos, fueron introducidos en [8] y han sido extensamente estudiados [9].

Definición 4.5 *Un grafo G es bien cubierto si todo conjunto independiente maximal es un conjunto independiente máximo.*

La clase de los grafos bien cubiertos coincide con la clase de los grafos no mezclados pues si todos los conjuntos independientes maximales de un grafo tienen la misma cardinalidad, los cubrimientos vértices minimales tambien tienen la misma cardinalidad. En [10], Prisner et al. caracterizan los grafos simpliciales y triangulados que son bien cubiertos.

Teorema 4.6 *[10, Teorema 1] Un grafo G es simplicial y bien cubierto si y solo si cada vértice v de G pertenece exactamente a un simplejo.*

Teorema 4.7 *[10, Teorema 2] Sea G un grafo triangulado. Entonces G es bien cubierto si y solo si cada vértice v de G pertenece exactamente a un simplejo.*

Aún cuando la clase de los grafos simpliciales y la clase de los grafos triangulados no son comparables entre sí, es decir, ninguna de estas dos clases de grafos es subclase de la otra, el teorema 4.7 implica que los grafos triangulados bien cubiertos (no mezclados) son grafos simpliciales bien cubiertos. Así la propiedad de los grafos triangulados no mezclados de ser Cohen-Macaulay es consecuencia de la propiedad de los grafos simpliciales no mezclados de ser Cohen-Macaulay.

Los grafos arco-circulares [6] son una clase de grafos que generalizan a los grafos de intervalos. Un grafo de intervalo es un grafo de intersección de un conjunto de intervalos en la recta real. Los grafos de intervalos son triangulados y por tanto escalonados y secuencialmente Cohen - Macaulay.

Definición 4.8 *Un grafo G es arco-circular si sus vértices pueden ponerse en correspondencia uno a uno con un conjunto de arcos en un círculo de forma tal que dos vértices de G son adyacentes si y solo si sus arcos asociados se intersectan.*

Los grafos arco-circulares en general no son triangulados pues todos los ciclos son arco-circulares. Estos grafos no son escalonables en general, pues los ciclos pares no son escalonables. En el siguiente teorema mostraremos que si un grafo arco-circular contiene al menos un vértice simplicial, entonces es escalonable.

Teorema 4.9 *Sea G un grafo arco-circular que tiene al menos un vértice simplicial. Entonces G es escalonable.*

Demostración. Sea G un grafo arco-circular y v un vértice cualquiera de G. Entonces el grafo $G_v = G\setminus(\{v\} \cup N_G(v))$, es un grafo de intervalo. De hecho, quitar de G el vértice v y su vecindad, es equivalente a quitar del círculo el arco correspondiente y todos los arcos que se intersectan con este. Los arcos restantes se pueden entonces poner en correspondencia uno a uno con un conjunto de intervalos en la recta real, es decir, el grafo G_v es un grafo de intervalo.

Supongamos que G no es completo, (de lo contrario el grafo es obviamente escalonable), x_1 es un vértice simplicial de G y $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_r\}$. Los grafos $G_i = G \setminus (\{x_i\} \cup N_G(x_i))$, para $i = 1, \ldots, r$ son grafos de intervalos, por tanto son triangulados y escalonables. Por el teorema 2.5 el grafo G es escalonable. □

El teorema anterior implica que todos los grafos arco-circulares que tienen al menos un vértice simplicial son secuencialmente Cohen-Macaulay. Si G es un grafo arco-circular, con al menos un vértice simplicial y no mezclado, entonces G es Cohen-Macaulay.

Agradecimientos

El financiamiento de este trabajo está a cargo del Proyecto de Investigación "Álgebra conmutativa combinatoria, álgebras monomiales y grafos químicos", E01250, Universidad de Antioquia. El primer autor también agradece al Programa de Asociados del International Centre of Theoretical Physics (ICTP).

Roberto Cruz Rodes
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Antioquia,
Calle 67 N 53108 - A. A. 1226,
Medellín, Colombia
rcruz@matematicas.udea.edu.co

Mario Estrada Valdés
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Antioquia,
Calle 67 N 53108 - A. A. 1226,
Medellín, Colombia
mestrada@matematicas.udea.edu.co

Referencias

[1] Björner A. y Wachs M., *Shellable nonpure complexes and posets. I.* Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996), 1299-1327.

[2] Cheston G. C. A., Hare E. O., Hedetniemi S. T. y Laskar R. C., *Simplicial graphs*, Congressus Numerantium, 67 (1988), 241 - 258.

[3] Cheston G. A. y Jap T. S., *A survey of the algorithmic properties of simplicial, upper bound and midle graphs*, Journal of Graph Algorithms and Applications, 10 (2006), 159 - 190.

[4] Dirac G. A., *On rigid circuit graphs*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 25 (1961), 71-76.

[5] Fulkerson D.R. y Gross O.A., *Incidence matrices and interval graphs*, Pacific J. Math. 15 (1965), 835-855.

[6] Golumbic M. C., *Algorithmic graph theory and perfect graphs. Second edition.,* Elsevier, 2004.

[7] Lovász L., *A characterization of perfect graphs*, J. Combin. Theory B 13 (1972), 253 - 267.

[8] Plummer M. D., *Some covering concepts in graphs*, J. Combin. Theory, 8 (1970), 91 - 98.

[9] Plummer M. D., *Well covered graphs: a survey*, Quaest. Math., 16 (1993), 253 - 287.

[10] Prisner E., Topp J., Vestergaard P. D., W*ell covered simplicial, chordal and circular arc graphs*, J. of Graph Theory, 21 (1996), 113-119.

[11] Rose D. J., Tarjan R. E. y Leuker G. S., *Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs*, SIAM J. Comput., 5 (1976), 266-283.

[12] Simis A., Vasconcelos W. y Villarreal R., *On the ideal theory of graphs*, J. Algebra 167 (1994), 389 - 416.

[13] Stanley R. P., *Combinatorics and Commutative Algebra.Second Edition.* Progress in mathematics 41, Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[14] Villarreal R. H., *Cohen-Macaulay graphs*, Manuscripta Math., 66 (1990), 277-293.

[15] Van Tuyl A. y Villarreal R. H., *Shellable graphs and sequentially Cohen - Macaulay bipartite graphs*, (2007) Preprint. math CO/0701296v1.