



Extremos locales y globales de funciones de varias variables

Camilo Jose Cancio Meza
Hugo Samuel Aduen Muskus

Monografía presentada para optar al título de Matemático.

Tutor
Hugo Samuel Aduen Muskus, doctor en matemáticas.

Universidad de Antioquia
Facultad de ciencias exactas y naturales, instituto de matemáticas.
Matemáticas
Caucasia
2022

Cita	Aduen Muskus y Cancio Meza, 2022 [1]
Referencia	[1] Aduen Muskus, H. S, y Cancio Meza, C. J. “Extremos locales y globales de funciones de varias variables”, [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Cauca, Colombia, 2022.
Estilo IEEE (2020)	



Biblioteca Seccional Bajo Cauca (Caucasia)

Repositorio Institucional: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes.

Decano/Director Adriana Patricia Echavarría Isaza.

Jefe departamento: Cristhian Darío Zuluaga Herrera.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

Dedicatoria

Dedico con gran orgullo este trabajo a mis padres, y a mis seres queridos: mi hermana Maria Camila y mi familia.

Agradecimientos

Ofrezco mi más sincera gratitud a el profesor Hugo Aduén Muskus por la guía en el desarrollo de este trabajo.

Quiero agradecer a todos los profesores que me acompañaron en esta trayectoria académica, en especial al profesor Sebastian Builes por inspirarme en estudiar estos temas.

Resumen

En esta monografía se exponen criterios para determinar la naturaleza de un punto crítico, es decir, determinar cuando un punto crítico es un punto de máximo o de mínimo. También trataremos de extender el siguiente resultado a funciones de varias variables; uno sabe que si una función diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo local en su único punto crítico, entonces ese mínimo local se convierte en un mínimo global. En general el resultado análogo no es cierto en varias variables, sin embargo expondremos algunos casos donde esto si es cierto y algunos problemas abiertos.

Palabras clave: Extremos, punto crítico.

Abstract

In this monograph we present criteria for determine the nature of a critical point, i.e, we determine when a critical point is a point of maximum or minimum. Also we will try to extend the following result for functions of several variables; If $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ has a local minimum at a certain point, and has no other critical points, then the local minimum becomes in a global minimum. In general, the analogous result is not true in several variables, however we will present some cases where this is true and some open problems.

Keywords: Extrema, critical point.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Producto interior, Longitud y ortogonalidad.	1
1.2. Coordenadas en \mathbb{R}^n y cambio de base	5
1.3. Valores propios y vectores propios	7
1.4. Semejanza de matrices y diagonalización	11
1.5. Formas cuadráticas	16
1.5.1. descomposición espectral	18
1.5.2. Diagonalización de una forma cuadrática	20
1.5.3. Clasificación de las formas cuadráticas	21
1.6. Conjuntos Convexos	22
1.7. Diferenciación de funciones real valuadas	25
1.7.1. La diferencial	28
1.7.2. Gradiente	32
1.7.3. gradiente de una forma cuadrática	33
2. Extremos relativos	35
2.1. Extremos locales con algunas notas históricas	35
2.2. Formula de Taylor de segundo orden para funciones de varias variables	39
2.3. Criterio de la segunda derivada	42
2.4. Un criterio usando solo la primera derivada	44
3. Algunas generalidades de los extremos locales	49

3.1. Caso función de una variable real	49
3.2. Funciones convexas y cóncavas	51
3.3. Caso polinomio	53
3.3.1. Polinomio de grado 2 en dos o más variables	55

Introducción

En matemáticas el problema del estudio de máximos y mínimos comienza en el siglo III A.C, estos matemáticos se preguntaban por escoger la solución más optima, los griegos fueron quizás los más interesados en este tipo de problemas, ellos formularon los primeros problemas de este tipo y dieron solución a algunos de ellos, sin embargo se hicieron necesarios métodos más potentes para resolver este tipo de problemas, y así con el desarrollo del cálculo se dieron solución a problemas de la época como el de la curva braquistócrona, el problema de Newton, entre otros. Las necesidades de la tecnología, y en particular la exploración del espacio, dieron lugar a otra serie de problemas que eran igualmente irresolubles por los métodos del cálculo de variaciones, de este modo, otra nueva teoría, conocida como el control optimo fue desarrollado en las décadas de 1950 y 1960 por los matemáticos soviéticos L. S. Pontryagin y sus colegas. Esta nueva teoría proporcionó un nuevo impulso para futuras investigaciones en la teoría de los problemas extremos.

Esta monografía consta de tres capítulos; en el primer capítulo se dan algunas nociones de álgebra lineal como: formas cuadráticas y la técnica de diagonalización, además se definen los conceptos de diferenciación. En el segundo capítulo se presentan varios criterios para determinar la naturaleza de un punto crítico, en especial se destacan dos de ellos, el primero, hace uso de las segundas derivadas parciales y es conocido como el criterio de la Hessiana, el segundo criterio tiene la particularidad de hacer uso de solo la primera derivada y además tiene una funcionalidad especial en los puntos críticos degenerados, como veremos más adelante, el criterio de la Hessiana no siempre funciona, en tales casos optamos por usar el criterio de la primera derivada y en el tercer capítulo tratamos de extender el hecho de que para funciones diferenciables de una variable real si la función tiene un mínimo local en su único punto crítico entonces ese mínimo local se convierte en un mínimo global, este hecho se discute para funciones de varias variables.

Capítulo 1

Preliminares

Para los fines deseados, nos encargaremos en primer lugar en construir el concepto de matrices simétricas y formas cuadráticas, las matrices simétricas surgen en las aplicaciones de manera natural y con mayor frecuencia que otro tipo de matrices, la teoría es rica, y depende, esencialmente, tanto de la técnica de diagonalización como la de ortogonalidad.

1.1. Producto interior, Longitud y ortogonalidad.

Los conceptos geométricos de longitud, distancia y perpendicularidad, que son bien conocidos para \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , se definen aquí para \mathbb{R}^n . Estos conceptos proporcionan potentes herramientas geométricas para resolver muchos problemas aplicados. Las tres nociones se definen en términos del producto interior de dos vectores.

Definición 1.1.1. Si u y v son vectores en \mathbb{R}^n , entonces u y v se consideran como matrices de $n \times 1$. La transpuesta u^T es una matriz de $1 \times n$. Al número $u^T v$ se le llama **producto interior** de u y v , y se escribe a menudo como $u \cdot v$.

Teorema 1.1.2. Sean u , v y w vectores en \mathbb{R}^n , y sea c un escalar. Entonces,

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- $(cu) \cdot v = c(u \cdot v) = u \cdot (cv)$

- $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0$ si, y sólo si, $u = 0$

Definición 1.1.3. La **longitud o norma** de v es el escalar no negativo $\|v\|$ definido mediante:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}, \quad \text{y} \quad \|v\|^2 = v \cdot v.$$

Un vector cuya longitud es 1 se llama **vector unitario**.

Definición 1.1.4. Para u y v en \mathbb{R}^n , la **distancia entre u y v** , escrita como $\text{dist}(u, v)$ es la longitud del vector $u - v$. Esto es,

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\|.$$

Definición 1.1.5. Dos vectores u y v en \mathbb{R}^n son **ortogonales** si $u \cdot v = 0$.

Decimos también que una matriz A de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si $P^{-1} = P^T$

Teorema 1.1.6. *Dos vectores u y v son ortogonales si, y sólo si, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$*

Demostración.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) \\ &= (u \cdot u) + (u \cdot v) + (v \cdot u) + (v \cdot v) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Introducimos ahora el concepto de **conjuntos ortogonales**:

Definición 1.1.7. Se dice que un conjunto de vectores $\{u_1, \dots, u_p\} \in \mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortogonal** si cada par de vectores distintos en el conjunto es ortogonal, esto es, si $u_i \cdot u_j = 0$ siempre que $i \neq j$.

Teorema 1.1.8. *Si $S = \{u_1, \dots, u_p\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero en \mathbb{R}^n , entonces S es linealmente independiente y, por tanto, es una base del subespacio generado por S .*

Demostración. Si $0 = c_1u_1 + \dots + c_pu_p$ para algunos escalares c_1, \dots, c_p entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= 0u_1 = (c_1u_1 + \dots + c_pu_p) \cdot u_1 \\ &= (c_1u_1) \cdot u_1 + (c_2u_2) \cdot u_1 + \dots + (c_pu_p) \cdot u_1 \\ &= c_1(u_1 \cdot u_1) + \dots + c_p(u_p \cdot u_1) \\ &= c_1(u_1 \cdot u_1). \end{aligned}$$

Note que aquí $u_1 \cdot u_1$ no es cero y, por lo tanto, $c_1 = 0$. De manera similar, c_2, \dots, c_p deben ser cero. Así que S es linealmente independiente. \square

Definición 1.1.9. Una **base ortogonal** para un subespacio W de \mathbb{R}^n es una base para W que también es un conjunto ortogonal.

El teorema siguiente sugiere por qué una base ortogonal es mucho mejor que otras bases:

Teorema 1.1.10. Sea $\{u_1, \dots, u_r\}$ una base ortogonal para un subespacio W de \mathbb{R}^n . Para cada $y \in W$, los coeficientes en la combinación lineal $y = c_1u_1 + \dots + c_pu_r$ están dados por:

$$c_i = \frac{y \cdot u_i}{u_i \cdot u_i} \quad \text{para cada } i = 1, \dots, r.$$

Demostración. Igual que en la demostración anterior, la ortogonalidad de $\{u_1, \dots, u_r\}$ demuestra que:

$$y \cdot u_1 = (c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_pu_p) \cdot u_1 = c_1(u_1 \cdot u_1)$$

Como $u_1 \cdot u_1$ no es cero, la ecuación anterior puede resolverse para c_1 . Para encontrar c_i para $i = 2, \dots, r$, se calcula $y \cdot u_i$ y se despeja c_i . \square

Para los fines deseados, introducimos una herramienta que nos servirá más adelante, **El proceso de Gram-Schmidt**, éste nos otorga un algoritmo sencillo para producir una base ortogonal u ortonormal para cualquier subespacio diferente de cero de \mathbb{R}^n .

Teorema 1.1.11 (Proceso de Gram-Schmidt). Dada una base $\{x_1, \dots, x_r\}$ para un

subespacio W de \mathbb{R}^n , defina:

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 \\ v_2 &= x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{\|v_1\|} v_1 \\ v_3 &= x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{\|v_1\|} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{\|v_2\|} v_2 \\ &\vdots \\ v_r &= x_r - \frac{x_r \cdot v_1}{\|v_1\|} v_1 - \frac{x_r \cdot v_2}{\|v_2\|} v_2 - \cdots - \frac{x_r \cdot v_{r-1}}{\|v_{r-1}\|} v_{r-1} \end{aligned}$$

Entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base ortogonal para W .

Demostración. Véase [8] □

Ejemplo 1.1.12. Sean $x_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $x_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 1]$, $x_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]$. Entonces, resulta claro que $\{x_1, x_2, x_3\}$ es linealmente independiente y, por lo tanto, es una base para un subespacio W de \mathbb{R}^4 . Estructure una base ortogonal para W .

Solución. paso 1 Sean $v_1 = x_1$ y $W_1 = \text{span}\{x_1\} = \text{span}\{v_1\}$.

Paso 2. Sea v_2 el vector producido al restar de x_2 su proyección sobre el subespacio W_1 .

Esto es, sea:

$$\begin{aligned} v_2 &= x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{\|v_1\|} v_1 \quad \text{Puesto que } v_1 = x_1 \\ &= [0 \ 1 \ 1 \ 1]^T - \frac{3}{4} [1 \ 1 \ 1 \ 1] \\ &= [-3/4 \ 1/4 \ 1/4 \ 1/4] \end{aligned}$$

Nótese que v_2 es la componente de x_2 ortogonal a x_1 , y $\{v_1, v_2\}$ es una base ortogonal para el subespacio W_2 generado por x_1 y x_2 .

Paso 2. Si es apropiado, escale v_2 para simplificar los cálculos posteriores. Como v_2 tiene entradas fraccionarias, es conveniente, escalarlo mediante un factor de 4 y reemplazar a $\{v_1, v_2\}$ empleando la base ortogonal:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v'_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

Paso 3. Sea v_3 el vector producido al restar de x_3 su proyección sobre el subespacio W_2 :

$$\begin{aligned}\text{proj}_{W_2} x_3 &= \frac{x_3 \cdot v_1}{\|v_1\|} v_1 + \frac{x_3 \cdot v'_2}{\|v'_2\|} v'_2 \\ &= \frac{2}{4} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] + \frac{2}{12} [-3 \quad -1 \quad 1 \quad 1] \\ &= [0 \quad 2/3 \quad 2/3 \quad 2/3]\end{aligned}$$

Entonces v_3 es la componente de x_3 ortogonal a W_2 , a saber,

$$\begin{aligned}v_3 &= x_3 - \text{proj}_{W_2} x_3 \\ &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1] - [0 \quad 2/3 \quad 2/3 \quad 2/3] \\ &= [0 \quad -2/3 \quad 1/3 \quad 1/3]\end{aligned}$$

Entonces, $\{v_1, v'_2, v_3\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero y, por lo tanto, un conjunto linealmente independiente en W . Observe que W es tridimensional, pues fue definido con una base de tres vectores. Por tanto $\{v_1, v'_2, v_3\}$ es una base ortogonal para W .

1.2. Coordenadas en \mathbb{R}^n y cambio de base

En esta sección tratamos el concepto general de coordenadas para los elementos de \mathbb{R}^n respecto a una base, como también el efecto que tiene en esas coordenadas al realizar un cambio de base.

Sea $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base de \mathbb{R}^n , la cual consideramos ordenada con el orden indicado por las posiciones relativas de los vectores: x_1 es el primer elemento, x_2 es el segundo, etc.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ sabemos que existen escalares a_1, \dots, a_n en \mathbb{R} únicos tales que:

$$x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \tag{1.1}$$

Definición 1.2.1. El escalar a_i en la ecuación 1.1, será llamado **i-ésima coordenada del vector x respecto a la base B** y el vector columna:

$$x_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Se dirá **el vector de coordenadas de x respecto a la base B** .

Teorema 1.2.2. *Sea $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base de \mathbb{R}^n . La aplicación $C_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C_B(x) = x_B$ es una transformación lineal, esto es, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para cada $s, k \in \mathbb{R}$, $(sx + ky)_B = sx_B + ky_B$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Digamos que: $x_B = [a_1, \dots, a_n]^T$ y que $y_B = [b_1, \dots, b_n]^T$ es decir $x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ y $y = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$, entonces si $s, k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} sx + ky &= s(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) + k(b_1x_1 + \dots + b_nx_n) \\ &= (sa_1 + kb_1)x_1 + \dots + (sa_n + kb_n)x_n \end{aligned}$$

por tanto,

$$(sx + ky)_B = \begin{bmatrix} sa_1 + kb_1 \\ \vdots \\ sa_n + kb_n \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = sx_B + ky_B.$$

□

Suponga que $B_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $B_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ son dos bases ordenadas para \mathbb{R}^n y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Digamos que:

$$x_{B_1} = [a_1, \dots, a_n]^T \text{ esto es } x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

$$x_{B_2} = [b_1, \dots, b_n]^T = \text{ esto es } x = b_1y_1 + \dots + b_ny_n$$

¿Cómo se relacionan los vectores de coordenadas x_{B_1} y x_{B_2} ? Para dar respuesta a esta pregunta, expresemos cada $y_i (i \in \mathbb{J}_n)$ en la base B_1 . Digamos que $(y_i)_{B_1} = P_i \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= (b_1y_1 + \dots + b_ny_n)_{B_1} \\ &= b_1(y_1)_{B_1} + \dots + b_n(y_n)_{B_1} \\ &= b_1p_1 + \dots + b_np_n \\ &= [p_1 \dots p_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= Px_{B_2} \end{aligned}$$

Donde $P = [p_1 \dots p_n]$, esta matriz se dirá la matriz de cambio de base (o de paso) en la base B_2 a la base B_1 .

1.3. Valores propios y vectores propios

Los valores propios sirven para estudiar ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos continuos, brindan información crítica en diseños de ingeniería, y se originan de manera natural en campos de la física y la química. Para nuestros objetivos el concepto de valor propio tomará relevancia cuando exponamos el criterio de la segunda derivada.

Definición 1.3.1. Sea A una matriz $n \times n$. Un escalar λ se dice **valor propio** de A si existe algún vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. en este caso \mathbf{x} se dirá un **vector propio** de A , correspondiente o asociado al valor propio λ .

El cálculo de los valores propios de una matriz se basa en el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2. Sea A una matriz $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. λ es un valor propio de A si, y sólo si, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Demostración. Supongase que λ es un valor propio de A , esto equivale a decir que existe un $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $Ax = \lambda x$, equivalentemente $(A - \lambda I)x = 0$, de donde se sigue el hecho de que $A - \lambda I$ no es invertible y por tanto $\det(A - \lambda I) = 0$. \square

Si $A = [a_{ij}]$;

$$\det(A - \lambda I_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

Es un polinomio de grado n en λ con coeficientes en \mathbb{R} . Lo llamaremos **el polinomio característico de A** y lo notaremos por $f_A(\lambda)$. Se tiene que:

$$f_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0,$$

con

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A), c_0 = \det A.$$

A la ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ se le llama **ecuación característica de A** . De acuerdo con el **teorema fundamental del álgebra**, existen reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que:

$f_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$ Los números $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son entonces los valores propios de A , pudiendo ocurrir que algunos de ellos sean iguales. Convenimos en que cada matriz A de orden n , tiene n valores propios, los cuales son las n raíces en \mathbb{R} de su ecuación característica, alguno de los cuales pueden repetirse. Llamaremos **multiplicidad algebraica** del valor propio λ_i de A , al número de veces que el factor $\lambda_i - \lambda$ aparezca en la factorización.

Teorema 1.3.3. *Los valores propios de una matriz triangular son las entradas de su diagonal principal.*

Demostración. Supongamos que A es una matriz triangular $n \times n$, por tanto, $A - \lambda I$ también será triangular, el determinante de una matriz triangular es el producto de los números en la diagonal principal (véase la proposición 2.90 en [5]), entonces, el polinomio característico está dado por:

$$f_{A-\lambda I} = \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda).$$

Donde los a_k son los elementos de la diagonal principal de la matriz A , así, es evidente que sus raíces (valores propios) son los elementos del conjunto $\{a_k\}_{k=1}^n$. \square

Teorema 1.3.4. *Si v_1, \dots, v_r son vectores propios que corresponden a distintos valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de una matriz A de $n \times n$, entonces el conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente dependiente. Como v_1 es distinto de cero, tenemos que uno de los vectores presentes en el conjunto es una combinación lineal de los vectores precedentes. Sea p el índice mínimo tal que v_{p+1} es una combinación lineal de los vectores precedentes (linealmente independientes). Entonces existen escalares c_1, \dots, c_p tales que:

$$c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = v_{p+1}. \quad (1.2)$$

Si se multiplican ambos lados de (1.2) por A y se usa el hecho de que $Av_k = \lambda_k v_k$ para cada k , se obtiene:

$$c_1 Av_1 + \dots + c_p Av_p = Av_{p+1}. \quad (1.3)$$

$$c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_p \lambda_p v_p = \lambda_{p+1} v_{p+1}. \quad (1.4)$$

Multiplicando ambos lados de (1.2) por λ_{p+1} y se resta el resultado a (1.3) y (1.4), se tiene:

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{p+1}) v_1 + \dots + c_p (\lambda_p - \lambda_{p+1}) v_p = 0. \quad (1.5)$$

Como $\{v_1, \dots, v_p\}$ es linealmente independiente, se tiene que los $c_i(\lambda_i - \lambda_{p+1}) = 0$ para cada $i = 1, \dots, p$, pero note que ninguno de los factores $\lambda_i - \lambda_{p+1}$, es cero, porque los valores propios son distintos. De aquí que, $c_i = 0$ para $i = 1, \dots, p$. Pero entonces (1.2) demuestra que $v_{p+1} = 0$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\{v_1, \dots, v_r\}$ no puede ser linealmente dependiente, y por lo tanto, deben ser linealmente independientes. \square

Si λ es un valor propio de una matriz A de orden n , los vectores propios de A correspondientes a λ son todos los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$, tales que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, es decir, todas las soluciones en \mathbb{R}^n no triviales, del sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = 0$.

Teorema 1.3.5. *Si λ es un valor propio de la matriz A de orden n , el conjunto*

$$E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)x = 0\}$$

*es un subespacio de \mathbb{R}^n (lo llamaremos el **espacio propio de A correspondiente al valor propio λ**) de dimensión mayor que cero.*

Demostración. $E(\lambda)$, es por definición, el espacio nulo de $A - \lambda I_n$ (considerado este subespacio como subespacio de \mathbb{R}^n). Si λ es valor propio de A , por definición de valor propio, $E(\lambda) \neq \{0\}$ y por tanto, $\dim(E(\lambda)) > 0$. \square

Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Es fácil ver que su polinomio característico esta dado por:

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

El cual tiene raíces complejas ($\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$) Note que la matriz A tiene entradas reales, sin embargo sus valores propios son complejos, para evitar este fenómeno daremos el concepto de matriz simétrica y probaremos más adelante que en una matriz simétrica real los valores propios son reales.

Definición 1.3.6. Una matriz **simétrica** es una matriz A tal que $A^T = A$. Una matriz de este tipo es necesariamente cuadrada. Sus entradas en la diagonal principal son arbitrarias, pero sus otras entradas ocurren en pares.

Teorema 1.3.7. *Los valores propios de una matriz simétrica real son reales.*

Demostración. Como A es simétrica, entonces, $A = A^T$, si A tuviese valores propios complejos, entonces podemos escribir

$$Ax = \lambda x$$

$$A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

Además:

$$\bar{x}^T Ax = \bar{x}^T \lambda x = \lambda \|x\|^2 \quad (1.6)$$

$$x^T A\bar{x} = x^T \bar{\lambda} x = \bar{\lambda} \|x\|^2 \quad (1.7)$$

Dado que A es simétrica:

$$\begin{aligned} \bar{x}^T Ax &= (Ax)^T \bar{x} \\ &= x^T A^T \bar{x} \\ &= x^T A\bar{x} \end{aligned}$$

Restando (1.6) de (1.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \|x\|^2 - \lambda \|x\|^2 &= 0 \\ (\bar{\lambda} - \lambda) \|x\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

Pero esto es posible si y sólo si $\lambda = \bar{\lambda}$, lo que demuestra el hecho de que $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Teorema 1.3.8. *Si A es simétrica, entonces cualesquiera dos vectores propios de espacios propios diferentes son ortogonales.*

Demostración. Sean v_1 y v_2 vectores propios correspondientes a distintos valores propios, por ejemplo, λ_1 y λ_2 . Para demostrar que $v_1 \cdot v_2 = 0$ calculamos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 \cdot v_2 &= (\lambda_1 v_1)^T v_2 = (Av_1)^T v_2 \quad \text{Puesto que } v_1 \text{ es un vector propio} \\ &= (v_1^T A^T) v_2 = v_1^T (Av_2) \quad \text{Puesto que } A^T = A \\ &= v_1^T (\lambda_2 v_2) \quad \text{Puesto que } v_2 \text{ es un vector propio} \\ &= \lambda_2 v_1^T v_2 = \lambda_2 v_1 \cdot v_2 \end{aligned}$$

Por lo que $(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 \cdot v_2 = 0$. Pero $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, así $v_1 \cdot v_2 = 0$. □

1.4. Semejanza de matrices y diagonalización

Definición 1.4.1. Si A y B son matrices de $n \times n$, entonces A es semejante a B si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = B$, o de manera equivalente, $A = PBP^{-1}$. Si se escribe Q en vez de P^{-1} , se tiene que $Q^{-1}BQ = A$. Así que B también es semejante a A , y simplemente se dice que A y B son semejantes.

El teorema siguiente ilustra un uso del polinomio característico y proporciona la base para varios métodos iterativos que aproximan valores propios.

Teorema 1.4.2. Si las matrices A y B de $n \times n$ son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios (con las mismas multiplicidades).

Demostración. Si $B = P^{-1}AP$, entonces

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(AP - \lambda P) = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

luego,

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) \end{aligned}$$

De aquí se deduce fácilmente que

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I).$$

□

En muchos casos, la información vector propio-valor propio contenida dentro de una matriz A puede representarse mediante una útil factorización de la forma $A = PDP^{-1}$.

La factorización permite calcular rápidamente A^k para valores grandes de k , una idea fundamental en varias aplicaciones del álgebra lineal.

Nos encargaremos ahora de establecer condiciones (necesarias y/o suficientes) para que una matriz dada A sea semejante a una matriz diagonal, en vez de “ A es semejante, a una matriz diagonal” también diremos “ A es **diagonalizable**”.

Definición 1.4.3. Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal, esto es, si $A = PDP^{-1}$ para alguna matriz diagonal D .

El siguiente teorema, proporciona una caracterización de las matrices diagonalizables e indica una forma de estructurar una factorización adecuada.

Teorema 1.4.4. *Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si, y sólo si, A tiene n vectores propios linealmente independientes. De hecho, $A = PDP^{-1}$, con D como una matriz diagonal, si, y sólo si, las columnas de P son n vectores propios de A linealmente independientes. En este caso, las entradas diagonales de D son valores propios de A que corresponden, respectivamente, a los vectores propios de P .*

En otras palabras, A es diagonalizable si y sólo si, hay suficientes vectores propios para formar una base de \mathbb{R}^n . A una base de este tipo se le denomina **base de vectores propios**.

Demostración. Primero, observe que si P es cualquier matriz de $n \times n$ con columnas v_1, \dots, v_n y si D es cualquier matriz diagonal con entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces:

$$AP = A[v_1 \cdots v_n] = [Av_1 \quad Av_2 \quad \cdots \quad Av_n] \quad (1.8)$$

mientras que:

$$PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \cdots \quad \lambda_n v_n] \quad (1.9)$$

Ahora suponga que A es diagonalizable e igual a PDP^{-1} . Entonces, al multiplicar por la derecha esta relación por P , se tendrá $AP = PD$. En este caso usando (1.8) y (1.9), vemos que:

$$[Av_1 \quad Av_2 \quad \cdots \quad Av_n] = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \cdots \quad \lambda_n v_n] \quad (1.10)$$

Igualando las columnas se tiene que:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad \dots, \quad Av_n = \lambda_n v_n \quad (1.11)$$

Como P es invertible, sus columnas v_1, \dots, v_n deben ser linealmente independientes. También, como sus columnas son diferentes de cero, (1.11) muestra que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son valores

propios y que v_1, \dots, v_n son los vectores propios correspondientes. Este argumento demuestra las partes “solo si” del primero, segundo y tercer enunciados del teorema.

Por último, dados cualesquiera n vectores propios v_1, \dots, v_n estos se usan para estructurar las columnas de P y luego utilizamos los valores propios correspondientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ para conformar D . de acuerdo con (1.8), (1.9), (1.10) $AP = DP$. Esto es válido sin condición alguna para los vectores propios. Si, de hecho, los vectores propios son linealmente independientes, entonces P es invertible (por el teorema de la matriz invertible), y $AP = DP$ implica que $A = PDP^{-1}$. \square

Ejemplo 1.4.5. Diagonalice la siguiente matriz, si es posible.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es, encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$

solución:

Se requieren cuatro pasos para implementar la descripción del Teorema 1.4.4

Paso 1: encontrar los valores propios de A

En el presente caso, resulta que la ecuación característica contiene un polinomio cúbico al cual se puede factorizar:

$$0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$

Paso 2: Encontrar tres vectores propios de A linealmente independientes.

Se necesitan tres vectores porque A es una matriz 3×3 . éste es el paso crítico. Si falla, entonces el teorema anterior postula que A no puede diagonalizarse.

Al encontrar los tres vectores propios (asociados a los valores propios correspondientes), obtenemos:

$$v_1 = [1 \quad -1 \quad 1]^T, v_2 = [-1 \quad 1 \quad 0]^T, v_3 = [-1 \quad 0 \quad 1]^T$$

De igual forma es fácil comprobar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Paso 3: construir P a partir de los vectores del paso 2

El orden de los vectores no tiene importancia. Al usar el orden elegido en el paso 2, forma

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

paso 4: Estructurar D a partir de los valores propios correspondientes

En este paso, resulta esencial que el orden de los valores propios corresponda al orden elegido para las columnas de P . En nuestro caso utilizaremos el valor propio $\lambda = -2$ dos veces, una para cada uno de los vectores propios correspondientes a $\lambda = -2$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora resta probar que $A = PDP^{-1}$ por simplicidad, probaremos que $AP = PD$:

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4.6. Diagonalice la siguiente matriz, si es posible.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de A resulta ser exactamente la misma que que la del ejemplo anterior:

$$0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$. Sin embargo, al buscar los vectores propios, se encuentra que cada uno de los espacios propios tiene solo una dimensión: para λ_1 tenemos

$v_1 = [1 \ -1 \ 1]^T$, para λ_2 tenemos $v_2 = [-1 \ 1 \ 0]^T$. No existen otros valores propios y cada vector propio de A es un múltiplo ya sea de v_1 o de v_2 . Por lo tanto, es imposible construir una base de \mathbb{R}^3 usando vectores propios de A . Por el Teorema 1.4.4, A no es diagonalizable.

El teorema siguiente proporciona una condición suficiente para que una matriz sea diagonalizable.

Teorema 1.4.7. *Una matriz A de $n \times n$ con n valores propios distintos es diagonalizable.*

Demostración. Sean v_1, \dots, v_n los vectores propios correspondientes a los n valores propios distintos de una matriz A . Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, y por el teorema 1.4.4 A es diagonalizable. \square

Por ser diagonalizable, no es necesario que una matriz $n \times n$ tenga n valores propios distintos.

Ejemplo 1.4.8. determine si la siguiente matriz es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución: Dado que la matriz es triangular, sus valores propios son, evidentemente, 5, 0 y -2. Puesto que A es una matriz 3×3 con tres valores propios distintos, A es diagonalizable.

Si una matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, con vectores propios correspondientes v_1, \dots, v_n y si $P = [v_1, \dots, v_n]$ entonces P es automáticamente invertible porque sus columnas son linealmente independientes. Cuando A es diagonalizable, pero tiene menos de n valores propios distintos, aún es posible estructurar a P de alguna forma que la vuelva automáticamente invertible, como lo muestra el teorema siguiente:

Teorema 1.4.9. *Sea A una matriz de $n \times n$ cuyos valores propios distintos son $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.*

a. Para $1 \leq k \leq p$, la dimensión del espacio propio para λ_k es menor o igual que la multiplicidad del valor propio λ_k .

b. La matriz A es diagonalizable, si y sólo si, la suma de las dimensiones de los distintos espacios propios es igual a n , y esto sucede si, y sólo si, la dimensión del espacio propio para cada λ_k es igual a la multiplicidad de λ_k .

c. Si A es diagonalizable, y B_k es una base para el espacio correspondiente a λ_k para cada k , entonces la colección total de vectores en los conjuntos B_1, \dots, B_p forma una base de vectores propios para \mathbb{R}^n .

Demostración. La demostración del teorema es un poco larga pero no difícil, para ver este hecho, véase [5] □

1.5. Formas cuadráticas

Definición 1.5.1. Una matriz A es **Diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal P ($P^{-1} = P^T$) y una matriz diagonal D tales que:

$$A = PDP^{-1} = PDP^T \quad (1.12)$$

Para diagonalizar ortogonalmente una matriz de $n \times n$, deben encontrarse n vectores propios linealmente independientes y ortonormales. ¿Cuándo es posible esto? Si A es diagonalizable ortogonalmente como en 1.12, entonces:

$$A^T = (PDP^T)^T = PDP^T = A$$

Por lo tanto A es simétrica. Esto nos hace enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.5.2. Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente si, y sólo si, A es una matriz simétrica.

Demostración. La primera implicación ya fue probada en la discusión anterior, para la otra implicación, necesitamos probar que una matriz simétrica real $n \times n$ A , es diagonalizable ortogonalmente.

Esto es claramente verdadero para las matrices 1×1 , si $A = [a]$, entonces, $A = [1][a][1] = UAU^T$, asumamos ahora que toda $(n - 1) \times (n - 1)$ matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable y veamos que una matriz simétrica $n \times n$ es también diagonalizable:

Considere una matriz simétrica A de orden $n \times n$ entonces, podemos encontrar un valor propio (real) λ_1 de A con su respectivo vector propio v_1 , normalizando este vector podemos asumir que v_1 es un vector propio unitario, siguiendo con este mismo proceso, podemos

añadir vectores a $\{v_1\}$ para extenderlo a una base de \mathbb{R}^n y usando el proceso de Gram-Schmidt se obtiene una base ortonormal para \mathbb{R}^n : $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Sea $P = P_B = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ la matriz de cambio de base para B . Como P es ortogonal, $P^{-1} = P^T$, observando la matriz $P^{-1}AP$, note que esta última resulta siendo simétrica, pues:

$$(P^{-1}AP)^T = (P^T AP)^T = P^T A^T P^{TT} = (P^T AP)^T = P^{-1}AP$$

y la primera columna es

$$\begin{aligned} P^{-1}APe_1 &= P^{-1}Av_1 = P^{-1}\lambda_1v_1 \\ &= \lambda_1P^{-1}v_1 = \lambda_1[v_1]_B \\ &= [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T = [\lambda_1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \end{aligned}$$

Usando la simetría y particionando $P^{-1}AP$ por bloques tenemos:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Donde 0 es un bloque con $n - 1$ ceros, y B es una matriz simétrica. Entonces como B es de tamaño $(n - 1) \times (n - 1)$ por la hipótesis inductiva, B es ortogonalmente diagonalizable:

Esto es, existe una matriz diagonal D' y una $(n - 1) \times (n - 1)$ matriz ortogonal Q para el cual $B = QD'Q^{-1}$ o $Q^{-1}BQ = D'$

Definase una matriz particionada $n \times n$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ Vemos que R es invertible con inversa

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix}$$

Dado $U = PR$, entonces U es ortogonal (es el producto de dos matrices ortogonales) En-

tonces:

$$\begin{aligned}
 U^{-1}AU &= (R^{-1}P^{-1})A(PR) \\
 &= R^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} R \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q^{-1}BQ \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{bmatrix} \\
 &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{bmatrix} U^{-1}
 \end{aligned}$$

Como $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal, tenemos $A = UDU^{-1} = UDU^T$, lo que demuestra la ortogonalidad de A . □

1.5.1. descomposición espectral

Suponga que $A = PDP^{-1}$, donde las columnas de P son vectores propios ortonormales u_1, \dots, u_n de A y los valores propios correspondientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ están en la matriz diagonal D . Entonces, como $P^{-1} = P^T$,

$$\begin{aligned}
 A = PDP^T &= [u_1, \dots, u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \\
 &= [\lambda u_1 \cdots \lambda_n u_n] \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \cdots + \lambda_n u_n u_n^T$$

Esta descomposición de A se llama **descomposición espectral** de A porque divide a A en fragmentos determinados por el espectro (valores propios de A).

Ejemplo 1.5.3. Estructuremos una descomposición espectral de la matriz A que tiene la diagonalización ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Solución. Denote las columnas de P mediante u_1 y u_2 . Entonces

$$A = 8u_1u_1^T + 3u_2u_2^T$$

Para verificar esta descomposición de A calcule:

$$\begin{aligned} u_1u_1^T &= \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} [2/\sqrt{5} \quad 1/\sqrt{5}] = \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \\ u_2u_2^T &= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} [-1/\sqrt{5} \quad 2/\sqrt{5}] = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix} \\ 8u_1u_1^T + 3u_2u_2^T &= \begin{bmatrix} 32/5 & 16/5 \\ 16/5 & 8/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 & -6/5 \\ -6/5 & 12/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

□

Definición 1.5.4. Una **forma cuadrática en \mathbb{R}^n** es una función $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(x) = xAx^T$, donde A es una matriz simétrica de orden $n \times n$. La matriz A se denomina **matriz de la forma cuadrática**.

El ejemplo más sencillo de una forma cuadrática diferente de cero es $Q(x) = xIx^T = \|x\|^2$

Ejemplo 1.5.5. Sea $x = (x_1, x_2)$. Calcular xAx^T para las siguientes matrices:

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

Solución. 1.

$$xAx^T = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4x_1^2 + 3x_2^2$$

2. Existen dos entradas -2 en A . Observe cómo aparecen en los cálculos.

$$\begin{aligned} xAx^T &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1(3x_1 - 2x_2) + x_2(-2x_1 + 7x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 \end{aligned}$$

La presencia de $-4x_1x_2$ en la forma cuadrática se debe a las entradas -2 fuera de la diagonal en la matriz A . En contraste, la forma cuadrática asociada con la matriz diagonal A del ejemplo ítem 1 no tiene ningún término de producto cruzado x_1x_2 . El siguiente teorema dará una forma de resolver este fenómeno

□

1.5.2. Diagonalización de una forma cuadrática

Teorema 1.5.6 (Teorema de los ejes principales). *Sea A una matriz simétrica de orden $n \times n$. Considere la forma cuadrática $Q(x) = xAx^T$, entonces, existe una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D (cuyas entradas de la diagonal principal son los valores propios de A) tales que al efectuar el cambio de variable $x = yP^T$ la forma cuadrática toma la siguiente forma:*

$$Q(x) = xAx^T = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Demostración. Dado que A es una matriz simétrica, sabemos, por el Teorema 1.5.2 que A es diagonalizable ortogonalmente, es decir, existe una matriz ortogonal P ($P^{-1} = P^T$) y una matriz diagonal D (cuyas entradas son los valores propios de A) tales que

$$A = PDP^T.$$

Un cálculo sencillo muestra que $D = P^TAP$. Sea $x = yP^T$ entonces

$$Q(x) = xAx^T = (yP^T)A(yP^T)^T = y(P^TAP)y^T = yDy^T.$$

Sean $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ los valores propios de A , $y = (y_1, \dots, y_n)$ entonces:

$$Q(x) = Q(yP^T) = yDy^T = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Obtenemos entonces una nueva forma cuadrática sin términos de producto cruzado. \square

1.5.3. Clasificación de las formas cuadráticas

Cuando A es una matriz de $n \times n$, la forma cuadrática $Q(x) = xAx^T$ es una función de valores reales con dominio en \mathbb{R}^n . Se distinguen varias clases importantes de formas cuadráticas por el tipo de valores que asumen para diversos $x \in \mathbb{R}^n$:

Definición 1.5.7. Una forma cuadrática $Q(x) = xAx^T$ es:

1. **Definida positiva** si $Q(x) > 0$ para todo $x \neq 0$
2. **Definida negativa** si $Q(x) < 0$ para todo $x \neq 0$
3. **indefinida** Si $Q(x)$ toma valores tanto positivos como negativos.

Asimismo, se afirma que Q es **semidefinida positiva** si $Q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y Q es **semidefinida negativa** si $Q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema caracteriza algunas formas cuadráticas en términos de los valores propios.

Teorema 1.5.8. *Sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Entonces una forma cuadrática $x^T Ax$ es:*

1. *Definida positiva si, y sólo si, todos los valores propios de A son positivos,*
2. *Definida negativa si, y sólo si, todos los valores propios de A son negativos, o*
3. *Indefinida si, y sólo si, A tiene valores propios tanto positivos como negativos.*

Demostración. De acuerdo con el teorema de los ejes principales, existe un cambio de variable ortogonal $x = yP^T$ tal que:

$$Q(x) = xAx^T = yDy^T = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \quad (1.13)$$

Donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A . Como P es invertible, existe una correspondencia uno a uno entre todos los $x \neq 0$ y todos los y distintos de cero. Entonces los valores de $Q(x)$ para $x \neq 0$ coinciden con los valores de la expresión del lado derecho de 1.13, que están obviamente controlados por los signos de los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de las tres maneras descritas en el teorema. \square

Teorema 1.5.9 (Sylvester). *Sea A una matriz simétrica de orden $n \times n$. La forma cuadrática $Q(x) = xAx^T$ es definida positiva si y sólo si se cumplen,*

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Análogamente, la forma cuadrática $Q(x) = xAx^T$ es definida negativa si y sólo si se cumplen;

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^n > 0.$$

1.6. Conjuntos Convexos

En esta sección, daremos una breve introducción a la teoría de conjuntos convexos, la cual nos será muy útil más adelante en la teoría de puntos críticos.

Dados dos puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, considere el conjunto:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : (x_1 - x_2) \cdot (x - x_2) = 0\}$$

Tal conjunto P es llamado un **hiperplano** alrededor de x_2 . Geométricamente, uno puede pensar a P como sigue: si l denota la línea que pasa por x_1 y x_2 , y l' la línea que pasa por x_2 y x . l y l' son perpendiculares si $(x_1 - x_2) \cdot (x - x_2) = 0$. Así P está hecha por todas las líneas perpendiculares a l . Si ponemos $z = x_1 - x_2$ y $c = z \cdot x_2$, entonces:

$$(x_1 - x_2) \cdot (x - x_2) = z \cdot x - c$$

Así la definición de hiperplano puede ser convenientemente formulada como sigue:

Definición 1.6.1. Un **hiperplano** en \mathbb{R}^n es un conjunto de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : z \cdot x = c\}$, donde $z \neq 0$ y c está dado.

Un hiperplano es un punto para $n = 1$, una línea para $n = 2$, un plano para $n = 3$. Para cualquier escalar no nulo b , $\{x \in \mathbb{R}^n : z \cdot x = c\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (bz) \cdot x = bc\}$. Así el vector z y el escalar c definen un hiperplano determinado por un múltiplo escalar.

Ejemplo 1.6.2. Encuentre el hiperplano P en \mathbb{R}^4 el cual contiene los puntos $e_1, e_1 + 2e_2, e_2 + 3e_3, e_3 + 4e_4$.

Todo $x \in P$ satisface la ecuación $z \cdot x = c$, donde z y c deben ser encontrados, tomando sucesivamente $x = e_1, x = e_1 + 2e_2, \dots$, obtenemos:

$$\begin{aligned} c &= z \cdot e_1 = z_1, & c &= z \cdot (e_2 + 3e_3) = z^2 + 3z^3, \\ c &= z \cdot (e_2 + 3e_3) = z^2 + 3z^3, & c &= z \cdot (e_3 + 4e_4) = z^3 + 4z^4 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, las componentes z^1, \dots, z^4 de vectores z satisfacen

$$z^1 = c, \quad z^2 = 0, \quad z^3 = \frac{c}{3}, \quad z^4 = \frac{c}{6}$$

Tomando por conveniencia $c = 6$, tenemos:

$$P = \{x : 6x^1 + 2x^3 + x^4 = 6\}$$

Definición 1.6.3. Dado $z \neq 0$. Un **semiespacio** es un conjunto de la forma $\{x : z \cdot x \geq c\}$, y un **semiespacio abierto** es un conjunto de la forma $\{x : z \cdot x > c\}$.

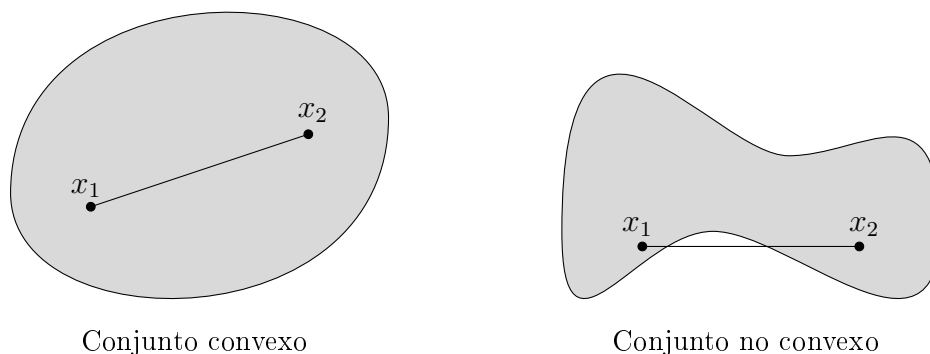
Definición 1.6.4. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$. Entonces K es convexo si el segmento de línea que une dos puntos de K está en K , es decir, para todo $x_1, x_2 \in K$ y $t \in [0, 1]$, el punto $x = tx_1 + (1-t)x_2$ también pertenece a K . En la definición, asumimos que $x_1 \neq x_2$. Pero si $x_1 = x_2$ es trivial que $x \in K$, dado que $x = x_1 = x_2$.

Ejemplo 1.6.5. Cualquier semiespacio cerrado es un conjunto convexo. Dado $H = \{x : z \cdot x \geq c\}$, $z \neq 0$. Dado $x_1, x_2 \in H$ y $x = tx_1 + (1-t)x_2$, donde $t \in [0, 1]$. Entonces

$$z \cdot x_1 \geq c \text{ y } z \cdot x_2 \geq c$$

Como $t \geq 0$, $tz \cdot x_1 \geq tc$; y como $1-t \geq 0$, $(1-t)z \cdot x_2 \geq (1-t)c$. Consecuentemente,

$$z \cdot x = tz \cdot x_1 + (1-t)z \cdot x_2 \geq tc + (1-t)c = c$$



Esto prueba que $x \in H$. Por tanto, H es un conjunto convexo. Similarmente, cualquier hiperplano es un conjunto convexo y cualquier semiespacio es un conjunto convexo.

Ejemplo 1.6.6. Dado $U = \{x : |x - x_0| < \delta\}$, para algún x_0 y $\delta > 0$. Para mostrar que U es convexo, sean $x_1, x_2 \in U$ y $x = tx_1 + (1 - t)x_2$, donde $t \in [0, 1]$. Entonces, $|x_1 - x_2| < \delta$ y $|x_2 - x_0| < \delta$, además $x = t(x_1 - x_0) + (1 - t)(x_2 - x_0)$, por tanto,

$$|x - x_0| \leq t|x_1 - x_0| + (1 - t)|x_2 - x_0| < \delta$$

lo que significa que $x \in U$.

Proposición 1.6.7. Si K_1, \dots, K_m son conjuntos convexos, entonces, su intersección $K_1 \cap \dots \cap K_m$ también es convexa.

Demostración. Dados x_1, x_2 dos puntos de $K_1 \cap \dots \cap K_m$, $x_1 \neq x_2$, sea l la línea que denota el segmento que une x_1 y x_2 . Para cada $j = 1, \dots, m$, $x_1, x_2 \in K_j$. Como cada K_j es convexo, $l \subset K_j$ para cada $j = 1, \dots, m$. Así $l \subset K_1 \cap \dots \cap K_m$. \square

En esta prueba no usamos el hecho de que el número de K_j fuera finito por tanto tenemos que la intersección de cualquier colección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

La definición de conjuntos convexos es expresada en términos de un par de puntos, pero también puede ser definida en términos de combinaciones convexas de cualquier número m finito de puntos. Dado x_1, \dots, x_m puntos distintos ($x_j \neq x_k$) si $j \neq k$.

Definición 1.6.8. Un punto x es una combinación convexa de x_1, \dots, x_m si existen escalares t^1, \dots, t^m tales que:

$$x = \sum_{j=1}^m t^j x_j, \quad 1 = \sum_{j=1}^m t^j, \quad t^j \geq 0 \text{ para } j = 1, \dots, m$$

Para decir que x es una combinación convexa de dos puntos de S es simplemente decir que x está en algún segmento de línea con puntos finales en S , por ejemplo, si S es el círculo con ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, entonces todo punto en el disco circular $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ acotado por S es una combinación convexa de dos puntos de S .

Proposición 1.6.9. *Un conjunto K es convexo si y sólo si toda combinación convexa de puntos de K es un punto de K .*

Demostración. Sea K un conjunto convexo. Probaremos por inducción sobre m que si x es cualquier combinación convexa de $x_1, \dots, x_m \in K$, entonces $x \in K$, el caso $K = 2$ es la definición de convexidad. Asumamos que el resultado es verdad para todo entero $m \geq 2$, dada x una combinación convexa de puntos x_1, \dots, x_{m+1} de K ,

$$x = \sum_{j=1}^{m+1} t^j x_j, \quad 1 = \sum_{j=1}^{m+1} t^j, \quad t^j \geq 0 \text{ para } j = 1, \dots, m+1$$

Si $t^{m+1} = 1$, entonces $t^j = 0$ para $j \leq m$ y $x = x_{m+1}$ está en K . Si $t^{m+1} < 1$, dado

$$t = 1 - t^{m+1}, \quad s^j = t^j / t \text{ para } j = 1, \dots, m$$

$$y = \sum_{j=1}^m s^j x_j$$

Entonces y es una combinación convexa de x_1, \dots, x_m , por hipótesis inductiva, $y \in K$.

Pero;

$$x = ty + (1 - t)x_{m+1} \text{ y } t \in [0, 1]$$

Por tanto, $x \in K$.

Recíprocamente, asuma que toda combinación convexa de puntos de K es un punto de K , en particular, esto es cierto para combinaciones convexas de cualquier par de puntos x_1, x_2 de puntos de K . Por tanto K es convexo. \square

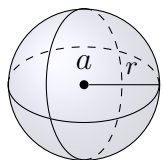
1.7. Diferenciación de funciones real valuadas

Por motivos de notación definamos antes algunas nociones topológicas básicas de \mathbb{R}^n .

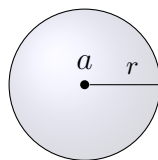
Sea a un punto dado en \mathbb{R}^n y $r > 0$. El conjunto:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

Es llamado la bola de centro a y radio r , en algunas ocasiones solo diremos n -bola o también una vecindad de a . En \mathbb{R} es simplemente un intervalo abierto con punto medio en a . En \mathbb{R}^2 es un disco circular, y en \mathbb{R}^3 es una esfera con centro a y radio r .



Esfera



Disco circular

Definición 1.7.1. Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n y $x \in A$, x es llamado un **punto interior** de A si existe una bola de centro x y radio $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Si existe un $r > 0$ tal que $B(x, r)$ esté contenida en el complemento de A entonces decimos que x es un **punto exterior** de A . Si toda vecindad de x contiene al menos un punto de A y un punto de A^c , entonces x está en la frontera de A denotada por ∂A .

Un conjunto S de \mathbb{R}^n es abierto si tiene todos sus puntos interiores, diremos también que un conjunto S es cerrado si S^c es abierto.

Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es acotado cuando existe un $c > 0$ tal que $\|x\| < c$ para todo $x \in X$.

Cuando se estudian funciones reales de n variables, esto es, definidas en un subconjunto de un espacio de \mathbb{R}^n es natural intentar definir una noción de derivada que tenga propiedades análogas a la derivada de una función, la idea que se presenta más naturalmente es la de **derivada parcial** que definiremos ahora.

Definición 1.7.2. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, dado un punto $a \in U$, la **i -ésima derivada parcial** de f en el punto a donde $1 \leq i \leq n$ es el límite:

$$D_i f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

A veces usaremos la notación

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Cuando $U \subset \mathbb{R}^2$, una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se llama función real de dos variables y escribimos $f(x, y)$ para indicar su valor en el punto $z = (x, y)$. De esta forma, las derivadas parciales de f en un punto $c = (a, b) \in U$ pueden ser también representadas por $\frac{\partial f}{\partial x}(c)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(c)$.

Tenemos entonces que:

$$D_1 f(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(c) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t}$$

$$D_2 f(c) = \frac{\partial f}{\partial y}(c) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

Observación 1.7.3. Las derivadas parciales, son conceptos puntuales, es decir, se habla de la derivada parcial de una función en un punto dado (de su dominio). Es por eso que, en general, se debe hacer explícito el punto $z = (x, y)$ donde están evaluados $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, escribiendo $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ o $\frac{\partial f}{\partial x}(z)$. Sin embargo, muchas veces calculamos las derivadas parciales en un punto cualquiera (x, y) de su dominio. En tal caso, basta escribir $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ejemplo 1.7.4. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y^3$. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 y^3 - x^2 y^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2xy^3 + hy^3) \\ &= 2xy^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2(y+h)^3 - x^2 y^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 y^2 + 3x^2 y h + x^2 h^3) \\ &= 3x^2 y^2 \end{aligned}$$

En este ejemplo se observa que, como era de esperarse, las derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$ se obtienen derivando parcialmente cada una de las variables, y conservando la otra como constante (es decir, pensando en la función f como dependiente sólo de x o de y).

Dado que las derivadas parciales nos ofrecen información sobre una función a lo largo de rectas paralelas a los ejes, intentamos extender la noción de derivada a otras direcciones deseadas. Esto nos lleva al importante concepto de derivada direccional.

Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto U de \mathbb{R}^n , $a \in U$, y $v \in \mathbb{R}^n$, la **derivada direccional** de f en el punto a en la dirección v , es por definición, el límite:

$$f'(a; v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

cuando el límite exista.

La primera observación que debemos hacer de la definición anterior es que el concepto de derivada direccional es un concepto que generaliza el de derivada parcial, en efecto, si $v = e_i$, tenemos que, efectivamente $\|v\| = \|e_i\| = 1$ y:

$$\begin{aligned} D_i f(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7.5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la función $f(x, y, z) = 2x^3 + 7y^2 + 9z^2$ y sea $v = (a, b, c)$ un vector unitario. La derivada direccional de esta función en un punto $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ arbitrario en la dirección de v es:

$$\begin{aligned} f'(u; v) &= \frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(x + ta)^3 + 7(y + tb)^2 + 9(z + tc)^2 - (2x^3 + 7y^2 + 9z^2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (6x^2a + 6xta^2 + 2t^2a^3 + 14yb + 7tb^2 + 18zc + 9zc^2) \\ &= 6x^2a + 14yb + 18zc. \end{aligned}$$

1.7.1. La diferencial

En cálculo de una variable, la existencia de la derivada de una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $c \in I$ implica la continuidad en c , esto puede probarse fácilmente de la siguiente forma;

Para todo $x \in I - \{c\}$, tenemos:

$$f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) (x - c)$$

Dado que $f'(c)$ existe tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) &= \left(\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \left(\lim_{x \rightarrow c} (x - c) \right) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ lo que demuestra la continuidad en c .

El siguiente ejemplo, probará que la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto no implican la continuidad en él. Por esta razón, las derivadas direccionales no constituyen una extensión satisfactoria del concepto unidimensional de derivada.

Ejemplo 1.7.6. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida del siguiente modo:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \text{ si } x \neq 0, \quad f(0, y) = 0.$$

Sea $z = (0, 0)$ e $v = (a, b)$ cualquier vector. Si $a \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}f'(0; v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + tv) - f(z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 ab^2}{t^3 a^2 + t^5 b^4} \\ &= \frac{b^2}{a}\end{aligned}$$

Si $v = (0, b)$ se obtiene fácilmente que $f'(0; v) = 0$ por tanto, $f'(0; v) = 0$ existe para todas las direcciones y sin embargo si tomamos el camino $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, m \geq 0 : x = my^2\}$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{my^4}{(m^2 + 1)y^4} \\ &= \frac{m}{m^2 + 1}\end{aligned}$$

Nótese que si $m=1$ entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1/2$$

pero tomando $m=0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

Esto demuestra que la función no es continua en 0.

Sin embargo, existe una generalización más conveniente que implica la continuidad y al mismo tiempo nos permite extender los principales teoremas de derivadas en una variable a el caso de dos o más variables. Esa es la llamada **diferencial total** o **diferencial**.

En el caso uni-dimensional una función f que tiene derivada en a puede ser aproximada en un entorno de a mediante un polinomio de Taylor de primer grado. Si existe $f'(a)$ designemos con $E(a, h)$ la diferencia:

$$E(a, h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \text{ si } h \neq 0 \quad (1.14)$$

y definamos $E(a, 0) = 0$ de 1.14 obtenemos la fórmula

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + hE(a, h),$$

válida también para $h = 0$. Ésta es la fórmula de Taylor de primer orden para aproximar $f(a+h) - f(a)$ por medio de $f'(a)h$. El error cometido es $hE(a, h)$. De 1.14 resulta que $E(a, h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Esta propiedad de aproximar una función diferenciable mediante una función lineal sugiere un método de extender el concepto de diferenciabilidad al caso de un número cualquiera de dimensiones.

Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un conjunto S de \mathbb{R}^n . Sea a un punto interior de S y $B(a, r)$ una n -bola contenida en S . Sea v un vector tal que $\|v\| < r$, de modo que $a + v \in B(a, r)$.

Definición 1.7.7. Decimos que f es **diferenciable** en a si existe una transformación lineal

$$T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

y una función escalar $E(a, v)$ tal que

$$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\|E(a, v), \quad (1.15)$$

para $\|v\| < r$ de manera que $E(a, v) \rightarrow 0$ cuando $\|v\| \rightarrow 0$. La transformación lineal T_a se llama diferencial de f en a .

Observación 1.7.8. La diferencial T_a es una transformación lineal, no un número. El valor $T_a(v)$ es un número real; está definido para todo $v \in \mathbb{R}^n$. La diferencial fue introducida por W.H.Young en 1908 y por M.Frechet en 1911 en forma más general.

La ecuación 1.15, válida para $\|v\| < r$, se llama fórmula de Taylor de primer orden para $f(a+v)$. Nos proporciona una aproximación lineal, $T_a(v)$, para la diferencia $f(a+v) - f(a)$. El error en la aproximación es $\|v\|E(a, v)$.

El teorema que sigue demuestra que si la diferencial existe, es única. Así mismo nos dice como calcular $T_a(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.7.9. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de \mathbb{R}^n y a un punto interior de U , si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en a con diferencial T_a entonces existe la derivada $f'(a; y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y tenemos:*

$$T_a(y) = f'(a; y). \quad (1.16)$$

Además $f'(a; y)$ es una combinación lineal de los componentes de y . Efectivamente, si $y = (y_1, \dots, y_n)$ tenemos:

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^n D_k f(a) y_k \quad (1.17)$$

Demostración. La ecuación 1.16 es trivial si $y = 0$ puesto que $T_a(0) = 0$ y $f'(a, 0) = 0$. Por consiguiente podemos suponer que $y \neq 0$.

Puesto que f es diferenciable en a tenemos una fórmula de Taylor,

$$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\|E(a, v) \quad (1.18)$$

Para $\|v\| < r$ para algún $r > 0$ y donde $E(a, v) \rightarrow 0$ cuando $\|v\| \rightarrow 0$. En esta fórmula tomemos $v = hy$, siendo $h \neq 0$ y $|h|\|y\| < r$, entonces $\|v\| < r$. Puesto que T_a es lineal, $T_a(v) = T_a(hy) = hT_a(y)$, por la fórmula de Taylor:

$$\frac{f(a+hy) - f(a)}{h} = T_a(y) + \frac{|h|\|y\|}{h} E(a, v). \quad (1.19)$$

Como $\|v\| \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ y dado que $|h|/h = \pm 1$, el segundo miembro de 1.19 tiende al límite $T_a(y)$ cuando $h \rightarrow 0$. Por consiguiente el primer miembro tiene el mismo límite, esto demuestra 1.16.

Para deducir 1.17 utilizamos la linealidad de T_a . Si $y = (y_1, \dots, y_n)$ tenemos $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$, luego:

$$T_a(y) = T_a\left(\sum_{k=1}^n y_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n y_k T_a(e_k) = \sum_{k=1}^n y_k f'(a; e_k) = \sum_{k=1}^n y_k D_k f(a)$$

□

1.7.2. Gradiente

La fórmula del teorema 1.7.9, que expresa $f'(a; y)$ como una combinación lineal de los componentes de y , puede escribirse como un producto escalar,

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^n D_k f(a) y_k = \nabla f(a) \cdot y,$$

Donde $\nabla f(a)$ es el vector cuyos componentes son las derivadas parciales de f en a ,

$$\nabla f(a) = (D_1 f(a), \dots, D_n f(a)).$$

Este es llamado **gradiente** de f . El gradiente ∇f es un campo vectorial definido en cada punto de a en el que existen las derivadas parciales $D_1 f(a), \dots, D_n f(a)$.

La fórmula de Taylor de primer orden 1.18 puede escribirse en la forma:

$$f(a + v) = f(a) + \nabla f(a) \cdot v + \|v\| E(a, v), \quad (1.20)$$

En donde $E(a, v) \rightarrow 0$ cuando $\|v\| \rightarrow 0$. En esta forma se parece a la fórmula de Taylor unidimensional desempeñando el vector gradiente $\nabla f(a)$ el papel de la derivada $f'(a)$.

A partir de la fórmula de Taylor podemos deducir que la diferenciabilidad implica la continuidad en a .

Teorema 1.7.10. *Si un campo escalar f es diferenciable en a , entonces f es continua en a .*

Demostración. De 1.20 resulta:

$$|f(a + v) - f(a)| = |\nabla f(a) \cdot v + \|v\| E(a, v)|$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz encontramos:

$$0 \leq |f(a + v) - f(a)| \leq \|\nabla f(a)\| \|v\| + \|v\| |E(a, v)|$$

Esto prueba que $f(a + v) \rightarrow f(a)$ cuando $\|v\| \rightarrow 0$, así que f es continua en a . □

Cuando y es un vector unitario, la derivada direccional $f'(a; y)$ tiene una sencilla relación geométrica con el vector gradiente. Supongamos que $\nabla f(a) \neq 0$ y designemos θ el ángulo formado por $\nabla f(a)$ e y . Tenemos entonces:

$$f'(a; y) = \nabla f(a) \cdot y = \|\nabla f(a)\| \|y\| \cos(\theta) = \|\nabla f(a)\| \cos(\theta)$$

Esto nos dice que la derivada direccional es el componente del vector gradiente en la dirección de y , es fácil ver que la derivada alcanza el valor máximo cuando $\cos(\theta) = 1$, esto es, cuando y tiene la misma dirección que $\nabla f(a)$ y note además que este máximo es igual a la longitud del vector gradiente.

Ejemplo 1.7.11. Hallemos todos los puntos (x, y) y las direcciones para las que la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ tiene el valor máximo, si (x, y) está en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Sabemos que en general,

$$\max_{\|y\|=1} \{f'(a; y)\} = \|\nabla f(a)\| \text{ para todo } a \in \mathbb{R}^n.$$

Hallemos entonces el gradiente $\nabla f(x, y)$; note que $D_1 f(x, y) = 6x$ y $D_2 f(x, y) = 2y$ por tanto Las direcciones para las cuales la derivada direccional toma su valor máximo están dados por $\nabla f(x, y) = (6x, 2y)$ con $x = \sqrt{1 - y^2}$ e $-1 \leq y \leq 1$ y cuya magnitud o norma es $\sqrt{36x^2 + 4y^2}$.

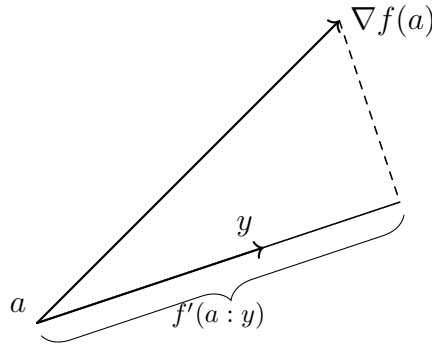


Figura 1.2: Relación entre el gradiente y la derivada direccional

1.7.3. gradiente de una forma cuadrática

Sea $f(x) = xAx^T$ donde A es una matriz de orden $n \times n$, sean $\{a_{ij}\}_{ij=1}^n$ las entradas de A , entonces podemos reescribir la forma cuadrática $f(x) = xAx^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$.

Notemos primero que

$$f(x) = a_{nn}x_n^2 + \sum_{j \neq n} a_{nj}x_n x_j + \sum_{i \neq n} a_{in}x_i x_n.$$

Derivando parcialmente obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_n} &= 2a_n x_n^2 + \sum_{j \neq n} a_{nj} x_j + \sum_{i \neq n} a_{in} x_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_{in} x_i + \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j.\end{aligned}$$

Luego, es claro que $\nabla f(x) = Ax + A^T x$ si A es simétrica

$$\nabla f(x) = 2Ax. \tag{1.21}$$

Capítulo 2

Extremos relativos

2.1. Extremos locales con algunas notas históricas

La historia de solución de problemas extremos es tan antigua como la historia de la matemática misma, los primeros matemáticos que trabajaron este tipo de problemas fueron los griegos (Arquimedes, Euclides, Heron), ellos formularon y encontraron solución a algunos de los problemas de máximos o mínimos. Uno de los más famosos problemas es el **problema de Heron**; *dados dos puntos A y B en un mismo lado de una línea ¿cual es el punto C en la línea tal que $\overline{AC} + \overline{CB}$ es minimal?* La figura 2.1 da una representación gráfica de este problema.

El desarrollo del cálculo durante los siglos 18 y 20 dieron un potente y sistemático método para resolver problemas extremos.

Durante mucho tiempo, cada problema extremo se resolvió de manera individual. En el siglo XVII, había una clara conciencia de la necesidad de crear algunos métodos generales. Tales métodos fueron desarrollados por Fermat, Newton, Leibniz, y otros; se dieron métodos para funciones de una y varias variables, y, en última instancia, para un número infinito de variables. Estos métodos llevaron a la formulación de las divisiones básicas de la teoría de problemas extremos: programación matemática (es decir, la teoría de los problemas de optimización de dimensión finita), programación convexa (incluyendo programación lineal donde se estudian problemas de optimización convexa), el cálculo de variaciones y la teoría del control óptimo.

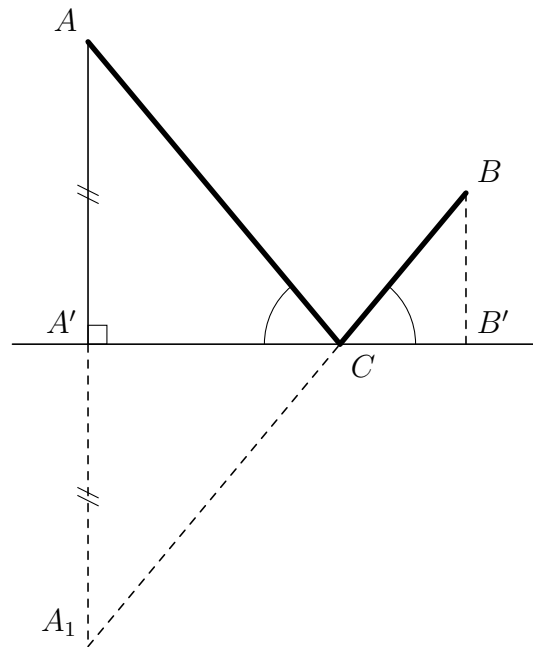


Figura 2.1: Problema de Heron

El estudio de máximos y mínimos tiene muchas aplicaciones en diversas áreas como economía, física, geometría entre otras, en economía, por ejemplo, suponga que usted cuenta con varios centros de abastecimiento de un determinado producto, tiendas y un deposito de camiones ¿Cómo debería organizar el despachador del deposito de camiones el abastecimiento de los productos necesarios a las tiendas para minimizar costos? los problemas de este tipo son llamados problemas de transporte, uno de las desarrollos matemáticos que aportaron a los problemas de economía fue la noción de convexidad, la cual juega un papel importante a la hora de resolver este tipo de problemas, el estudio de la teoría de conjuntos y funciones convexas es conocido como el análisis convexo. Este desarrollo facilitó el camino hacia nuevas direcciones acerca del estudio de la teoría de problemas extremos llamado programación lineal y convexa, la cual fue iniciada por el matemático soviético L.V. Kantorovic. Veremos a continuación algunos de los más importantes resultados acerca de la teoría de extremos relativos.

Sea A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. consideraremos el problema de minimizar o maximizar f en A .

Definición 2.1.1. Si x_0 es un punto de A tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in A$, entonces

f tiene un **mínimo global** en x_0 . El número:

$$f(x_0) = \min\{f(x) : x \in A\}$$

es el mínimo valor de f en A . Diremos también que f tiene un **mínimo relativo o mínimo local** en x_0 si existe un $r > 0$ tal que $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in B(x_0, r) \subset A$.

La noción de máximo absoluto y máximo relativo es definida de manera análoga pero intercambiando el sentido de la desigualdad. Cuando f tenga un mínimo o un máximo local diremos que f tiene un extremo local.

En algunos casos los extremos pueden ser encontrados por simple inspección. Por ejemplo, si $A = \mathbb{R}^n$ y $f(x) = \|x\|$, entonces $f(0) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Por tanto, f tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. Dado que esta función no es diferenciable en $x = 0$, el mínimo no puede ser encontrado usando las herramientas del cálculo.

Definición 2.1.2. Supongamos que f es diferenciable en x_0 , un punto x_0 es un **punto crítico** de f si $\nabla f(x_0) = 0$. Un punto crítico x_0 se llama **silla** si para todo $r > 0$, $B(a, r)$ contiene puntos x tales que $f(x) < f(x_0)$ y otros para los que $f(x) > f(x_0)$.

La definición es análoga a la del caso uní-dimensional en el que los puntos críticos de una función se clasifican en máximos, mínimo y puntos de inflexión. La siguiente proposición nos dice donde encontrar los extremos de una función.

Proposición 2.1.3. *Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en U , si además f tiene un extremo relativo en $x_0 \in U$ entonces x_0 es un punto crítico de f .*

Demostración. Dado $v \in \mathbb{R}^n$ y t suficientemente pequeño, sea $\phi(t) = f(x_0 + tv)$, entonces ϕ tiene un extremo en 0, y consecuentemente por calculo elemental $\phi'(0) = 0$. Usando regla de la cadena se sigue que $\phi'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$, esto implica que $\nabla f(x_0) = 0$. \square

Es sencillo encontrar ejemplos en los que la anulación de todas las derivadas parciales en a no implica necesariamente un extremo en a . Esto sucede en los llamados **puntos silla**.

En los ejemplos que siguen se consideran varios tipos de puntos críticos. En cada caso el punto crítico que se considera es el origen.

Ejemplo 2.1.4 (Máximo local). $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. Esta superficie es un paraboloides de revolución. Puesto que $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2) \leq 2 = f(0, 0)$ para todo (x, y) , resulta que f no tan solo tiene en $(0, 0)$ un máximo relativo, sino también un máximo absoluto en todo conjunto que contenga al origen, es fácil comprobar que las derivadas parciales se anulan en el origen. Ver Figura 2.2

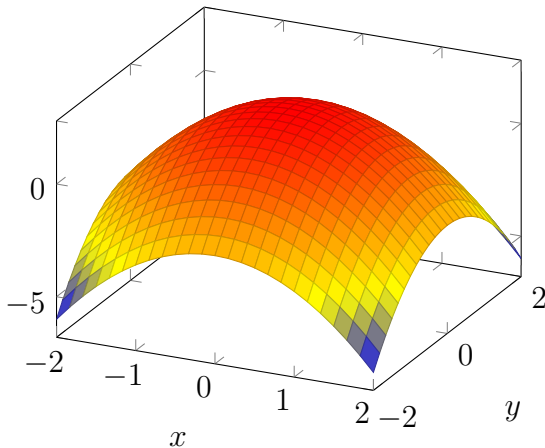


Figura 2.2: Paraboloides de revolución

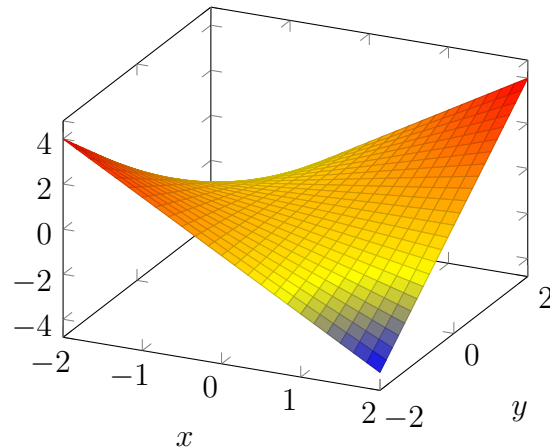


Figura 2.3: Paraboloides hiperbólico

Ejemplo 2.1.5 (Mínimo local). $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. En este ejemplo, otro paraboloides de revolución, es en esencia el mismo que el ejemplo anterior, salvo que en el origen hay un mínimo en lugar de un máximo.

Ejemplo 2.1.6 (Punto de silla). $z = f(x, y) = xy$. Esta superficie es un paraboloides hiperbólico (ver figura 2.3). Cerca del origen es parecida a una silla de montar, las dos derivadas parciales $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ son nulas en el origen pero no existe en el ni máximo ni mínimo. En efecto, para puntos (x, y) del primero o tercer cuadrante, x e y tienen el mismo signo, dándonos $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$, mientras que para puntos del segundo y cuarto cuadrantes x e y tienen signos opuestos, y es $f(x, y) < 0 = f(0, 0)$. Por tanto, en todo entorno del origen hay puntos en los que la función es menor que $f(0, 0)$ y puntos en los que es mayor que $f(0, 0)$, de modo que el origen es un punto de silla.

2.2. Formula de Taylor de segundo orden para funciones de varias variables

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Un campo escalar es una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ en la que a cada punto $x \in U$ se le asigna un escalar $f(x)$.

Si un campo escalar diferenciable f tiene un punto crítico en a , la naturaleza de este queda determinada por el signo algebraico de la diferencia $f(x) - f(a)$ para x próximo a a . Si $x = a + y$, tenemos la formula de Taylor de primer orden:

$$f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \|y\|E(a, y), \text{ donde } E(a, y) \rightarrow 0 \text{ cuando } y \rightarrow 0$$

En un punto crítico, la formula de Taylor tiene la siguiente forma:

$$f(a + y) - f(a) = \|y\|E(a, y)$$

Para determinar el signo algebraico de $f(a + y) - f(a)$ necesitamos mas información relativa al término de corrección $\|y\|E(a, y)$. El teorema que sigue nos dice que si f tiene en a derivadas parciales de segundo orden continuas, el término de corrección o complementario es igual a la forma cuadrática:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}f(a)y_i y_j$$

más un término de orden menor que $\|y\|^2$. Los coeficientes de la forma cuadrática son las derivadas parciales de segundo orden $D_{ij}f(x) = D_i(D_j(f))$, calculadas en a . La matriz $n \times n$ de las derivadas segundas $D_{ij}f(x)$ es la llamada **Matriz Hessiana** y se designa por $H(x)$. Así pues, tenemos:

$$H(x) = [D_{ij}f(x)]_{i,j=1}^n$$

Con tal de que existan las derivadas. La forma cuadrática puede escribirse mas sencillamente en forma matricial como sigue:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}f(a)y_i y_j = yH(a)y^T$$

Definamos la anterior forma cuadrática de la siguiente forma:

Definición 2.2.1. Sea f una función diferenciable con segundas derivadas parciales continuas sobre un conjunto abierto A de \mathbb{R}^n y sea:

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}f(x)y_i y_j = yH(x)y^T \text{ con } x \in A, y \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos además que por el Teorema de Clairaut la matriz $H(x)$ es simétrica, escribiremos:

1. $Q(x, \cdot) \geq 0$ si $Q(x, y) \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, en este caso la forma cuadrática se dice semidefinida positiva.
2. $Q(x, \cdot) > 0$ si $Q(x, y) > 0$ para todo $y \neq 0$, en este caso se dice que la forma cuadrática es definida positiva.

De forma análoga se definen:

3. $Q(x, \cdot) \leq 0$ si $Q(x, y) \leq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.
4. $Q(x, \cdot) < 0$ para todo $y \neq 0$.

La formula de Taylor que da una aproximación cuadrática para $f(a + y) - f(a)$, toma la siguiente forma.

Teorema 2.2.2 (Formula de Taylor de segundo orden para campos escalares).

Dado $\epsilon > 0$, si f es un campo escalar con derivadas parciales segundas $D_{ij}f$ continuas en $B(a, \epsilon)$, entonces para todo $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $a + y \in B(a, \epsilon)$ tenemos

$$f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} y H(a + cy) y^T \text{ donde } 0 < c < 1 \quad (2.1)$$

También puede escribirse en la forma

$$f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} y H(a) y^T + \|y\|^2 E_2(a, y) \quad (2.2)$$

en donde $E_2(a, y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow 0$

Demostración. Mantengamos y fijo y definamos $g(u)$ para $u \in \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$g(u) = f(a + uy) \text{ para } -1 \leq u \leq 1$$

Entonces $f(a + y) - f(a) = g(1) - g(0)$. Demostremos el teorema aplicando la formula de Taylor de segundo orden a g en el intervalo $[0, 1]$. Obtenemos

$$g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2!} g''(c), \text{ donde } 0 < c < 1, \quad (2.3)$$

Aquí hemos utilizado para el resto la forma de Lagrange. (Véase la sección 7.7 de [1]).

Puesto que g es una función compuesta dada por $g(u) = f[r(u)]$, siendo $r(u) = a + uy$ podemos calcular la derivada mediante la regla de la cadena. Tenemos $r'(u) = y$ así que la regla de la cadena nos da:

$$g'(u) = \nabla f[r(u)] \cdot r'(u) = \nabla f[r(u)] \cdot y = \sum_{j=1}^n D_j f[r(u)] y_j$$

con tal que $r(u) \in B(a, \epsilon)$. En particular, $g'(0) = \nabla f(a) \cdot y$. Aplicando una vez mas la regla de la cadena encontramos

$$g''(u) = \sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n D_j f[r(u)] y_j \right) y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} f[r(u)] y_i y_j = y H[r(u)] y^T$$

Luego $g''(c) = y H(a + cy) y^T$ con lo que la ecuación 2.3 se convierte en 2.1. Para demostrar 2.2 definamos $E_2(a, y)$ por la ecuación

$$\|y\|^2 E_2(a, y) = \frac{1}{2!} y [H(a + cy) - H(a)] y^T \text{ si } y \neq 0 \quad (2.4)$$

y sea $E_2(a, 0) = 0$. Entonces la ecuación 2.1 toma la forma:

$$f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} y H(a) y^T + \|y\|^2 E_2(a, y)$$

Para completar la demostración necesitamos probar que $E_2(a, y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow 0$. De 2.4 tenemos:

$$\begin{aligned} \|y\|^2 E_2(a, y) &= \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{D_{ij} f(a + cy) - D_{ij} f(a)\} y_i y_j \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |D_{ij} f(a + cy) - D_{ij} f(a)| \|y\|^2 \end{aligned}$$

Dividiendo por $\|y\|^2$ obtenemos la desigualdad:

$$|E_2(a, y)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |D_{ij} f(a + cy) - D_{ij} f(a)|$$

para $y \neq 0$. Puesto que cada derivada parcial segunda $D_{ij} f$ es continua en a , tenemos $D_{ij} f(a + cy) \rightarrow D_{ij} f(a)$ cuando $y \rightarrow 0$, así que $E_2(a, y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow 0$. Esto completa la demostración. \square

2.3. Criterio de la segunda derivada

En un punto crítico tenemos $\nabla f(a) = 0$, así que la fórmula de Taylor de la ecuación 2.2 toma la forma

$$f(a + y) - f(a) = \frac{1}{2}yH(a)y^T + \|y\|^2 E_2(a, y).$$

Puesto que el término de corrección $\|y\|^2 E_2(a, y)$ tiende hacia cero más rápidamente que $\|y\|^2$, parece razonable pensar que para y pequeño el signo algebraico de $f(a + y) - f(a)$ es el mismo que el de la forma cuadrática $yH(a)y^T$; por lo que la naturaleza del punto crítico podrá determinarse mediante el signo algebraico de la forma cuadrática. Esta sección se dedica a mostrar este hecho.

El teorema que sigue relaciona la naturaleza de un punto estacionario con el signo algebraico de la forma cuadrática $yH(a)y^T$

Teorema 2.3.1. *Sea f un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas $D_{ij}f$ en una n -bola $B(a)$, y designemos con $H(a)$ la matriz Hessiana en el punto crítico a . Tenemos entonces:*

1. *Si todos los valores propios de $H(a)$ son positivos, f tiene un mínimo local en a .*
2. *Si todos los valores propios de $H(a)$ son negativos, f tiene un máximo local en a .*
3. *Si $H(a)$ tiene valores propios positivos y negativos, f tiene un punto de silla en a .*

Demostración. Pongamos $Q(y) = yH(a)y^T$. La fórmula de Taylor nos da

$$f(a + y) - f(a) = \frac{1}{2}Q(y) + \|y\|^2 E_2(a, y) \tag{2.5}$$

En donde $E_2(a, y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow 0$. Vamos a demostrar que existe un número positivo r tal que, si $0 < \|y\| < r$, el signo algebraico de $f(a + y) - f(a)$ es el mismo que el de $Q(y)$.

Supongamos primero que todos los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $H(a)$ son positivos. Sea h el valor propio más pequeño. Si $u < h$, los números

$$\lambda_1 - u, \dots, \lambda_n - u$$

son también positivos. Esos números son los valores propios de la matriz real simétrica $H(a) - uI$ siendo I la matriz identidad $n \times n$. Según el teorema 1.5.8, la forma cuadrática $y[H(a) - uI]y^T$ es definida positiva, y por tanto $y[H(a) - uI]y^T > 0$ para todo $y \neq 0$,

por lo tanto

$$yH(a)y^T > y(uI)y^T = u\|y\|^2 \text{ para todo valor real } u < y.$$

Tomando $u = \frac{1}{2}h$ obtenemos la desigualdad

$$Q(y) > \frac{1}{2}h\|y\|^2 \text{ para todo } y \neq 0.$$

Puesto que $E_2(a, y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow 0$, existe un número positivo r tal que $|E_2(a, y)| < \frac{1}{4}h$ con tal que $0 < \|y\| < r$. Para tal y tenemos:

$$0 \leq \|y\|^2|E_2(a, y)| < \frac{1}{4}h\|y\|^2 < \frac{1}{2}Q(y)$$

y la fórmula de Taylor 2.5 demuestra que:

$$f(a + y) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(y) - \|y\|^2|E_2(a, y)| > 0$$

Por consiguiente f tiene un mínimo relativo en a , lo que demuestra la parte 1. para demostrar 2. se puede usar un razonamiento parecido, o aplicando 1. a $-f$.

Para demostrar 3. Sean λ_1 y λ_2 dos valores propios de $H(a)$ de signos opuestos. Pongamos $h = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. Entonces para cada valor real u que satisfaga $-h < u < h$ los números

$$\lambda_1 - u \text{ y } \lambda_2 - u$$

son valores propios de signos opuestos de la matriz $H(a) - uI$. Por consiguiente, si $u \in (-h, h)$, la forma cuadrática $y[H(a) - uI]y^T$ toma valores positivos y negativos en todo entorno de $y = 0$. Elijamos, como antes, $r > 0$ de modo que $|E_2(a, y)| < 1/4h$ siempre que $0 < \|y\| < r$. Razonando, entonces, como antes vemos que para tal y el signo de $f(a + y) - f(a)$ es el mismo que el de $Q(y)$. Puesto que para $y \rightarrow 0$, se presentan valores positivos y negativos, f tiene en a un punto de silla. Esto completa la demostración. \square

Lema 2.3.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 , y $H(a)$ la matriz Hessiana de f en el punto $a \in \mathbb{R}^n$, los valores propios de $H(a)$ son positivos si y sólo si para todo vector unitario $y = (y_1, \dots, y_n)$ se tiene que:*

$$yH(a)y^T = \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} > 0.$$

Demostración. Vamos a computar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
yH(a)y^T &= (y_1 \dots, y_n) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} (y_1, \dots, y_n)^T \\
&= y_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + y_1 y_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} + \dots + y_1 y_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} + \dots + y_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \\
&= \sum_{i=1}^n y_i \left(y_1 \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_i} + \dots + y_n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.
\end{aligned}$$

Dado y un vector unitario, Sea $Q(y) = yH(a)y^T$ la forma cuadrática asociada a $H(a)$.

Note que los valores propios de $H(a)$ son positivos si y sólo si $Q(y) > 0$ y esto se da, por lo anterior, si y sólo si $\sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} > 0$. Esto prueba nuestro resultado.

Notese además que en particular por el teorema 2.3.1 si $\sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} > 0$ para todo vector unitario y entonces la función f tiene un mínimo local en a . \square

Observación 2.3.3. Si todos los valores propios de $H(a)$ son cero, el Teorema 2.3.1 no nos da información relativa al punto crítico.

2.4. Un criterio usando solo la primera derivada

Nuestro propósito es establecer y demostrar un criterio para estudiar extremos locales de funciones de varias variables usando solo la primera derivada.

Teorema 2.4.1. *Dada f una función real-valuada continua en una vecindad D centrada en $a \in \mathbb{R}^n$ y diferenciable en $D \setminus \{a\}$ entonces:*

1. f tiene un máximo local en a si $(x - a) \cdot \nabla f(x) < 0$ para cada $x \in D \setminus \{a\}$.
2. f tiene un mínimo local en a si $(x - a) \nabla f(x) > 0$ para todo $x \in D \setminus \{a\}$

Estas conclusiones son intuitivamente claras si notamos que $(x - a) \cdot \nabla f(x)$ es el producto de $\|x - a\|$ y la derivada direccional de f en la dirección $\frac{x-a}{\|x-a\|}$.

Demostración. Vamos a probar la primera parte de la conclusión. Supongase que

$(x - a) \cdot \nabla f(x) < 0$ en $D \setminus \{a\}$ y sea $x \in D \setminus \{a\}$.

Definase $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(t) = f(a + t(x - a))$. Claramente F es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$ con:

$$F'(t) = (x - a) \cdot \nabla f(a + t(x - a))$$

Por el teorema del valor medio, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $F(1) - F(0) = F'(t_0)$. Lo cual implica que

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (x - a) \cdot \nabla f(a + t_0(x - a)) \\ &= \frac{1}{t_0}(t_0(x - a)) \cdot \nabla f(a + t_0(x - a)) \end{aligned}$$

Sea $y = a + t_0(x - a)$. Como

$$0 < \|y - a\| = t_0\|x - a\| < \|x - a\| < r$$

donde r es el radio de D , por tanto $y \in D \setminus \{a\}$. Como $y - a = t_0(x - a)$. La ecuación anterior se convierte en

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{t_0}(y - a) \cdot \nabla f(y)$$

y como $\frac{1}{t_0}(y - a) \cdot \nabla f(y) < 0$ (por hipótesis), tenemos que $f(x) < f(a)$ por tanto, $f(x) \leq f(a)$ para todo $y \in D$ esto significa que f tiene un mínimo local en a para el segundo ítem la prueba es análoga. \square

Ejemplo 2.4.2. Considere la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \psi(a \cdot x)$ donde $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 . Denotemos $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ como $a = (a_1, \dots, a_n)$. Por regla de la cadena, tenemos que $\nabla f(x) = \psi'(a \cdot x) \cdot a$, además $D_i f(x) = a_i \psi'(a \cdot x)$. Dado que $a \neq 0$, entonces $\nabla f(x) = 0$ siempre que $\psi'(a \cdot x) = 0$, así los puntos críticos de f es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \psi'(a \cdot x) = 0\}$.

Hallemos ahora la matriz Hessiana de f . Nótese que

$$D_{ii} f(x) = a_i^2 \psi''(a \cdot x) \text{ y } D_{ij} f(x) = D_{ji} f(x) = a_i a_j \psi''(a \cdot x) \quad i \neq j.$$

Por tanto;

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} a_1^2 \psi''(a \cdot x) & \cdots & a_1 a_n \psi''(a \cdot x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 a_n \psi''(a \cdot x) & \cdots & a_n^2 \psi''(a \cdot x) \end{bmatrix}$$

$$\det(H(f(x))) = \psi''(a \cdot x) \det \begin{bmatrix} a_1^2 & \cdots & a_1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 a_n & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix} = \psi''(a \cdot x) \cdot 0 = 0$$

Es decir, $\det(Hf(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, esto demuestra en particular que todo punto crítico es degenerado.

A modo de ejemplificar más este hecho considere $f(x, y) = (x - y)^2$, en este caso, $a = (1, -1)$ y $\psi(x) = x^2$. Sea $z = (x, y)$, entonces $f(x, y) = \psi(a \cdot z)$. Por lo hecho anteriormente los puntos críticos de f son los $z \in \mathbb{R}^2$ tales que $\psi'(a \cdot z) = 0$. Esto es, $\psi'(a \cdot z) = 2(a \cdot z)a$ y como $a \neq 0$ entonces $a \cdot z = 0$ lo cual implica que $x - y = 0$ y por tanto $x = y$, es decir, los puntos críticos están sobre la recta $y = x$ (ver figura 2.4)

La Hessiana de $f(x, y)$ está dada por:

$$Hf(z) = \psi''(a \cdot z) \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

Note que $\det(H(f(z))) = 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$ pues basta con multiplicar la primera fila por a_2 y la segunda fila por a_1 y por tanto la primera y segunda fila serían equivalentes. Dado que $\det(H(f(z))) = 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$ en particular para los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x = y$, por tanto todos los puntos críticos son degenerados. En este caso no es posible determinar la naturaleza del punto crítico usando el criterio de la segunda derivada, sin embargo el criterio de la primera derivada establece que el punto crítico es un mínimo local, en efecto, sea a un punto crítico de f (es decir de la recta $y = x$), $x = (x_1, x_2)$ y $z = (1, -1)$, notemos primero que $\nabla f(x) = \psi'(z \cdot x)z = \psi'(x_1 - x_2)z = 2(x_1 - x_2)(1, -1) = 2(x_1 - x_2, x_2 - x_1)$

$$\begin{aligned} (x - a)\nabla f(x) &= (x_1 - y, x_2 - y) \cdot \psi'(z \cdot x)z \\ &= (x_1 - y, x_2 - y) \cdot 2(x_1 - x_2, x_2 - x_1) \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Puesto que $0 < (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ siempre que $x_1 \neq x_2$ lo cual es cierto puesto que $x \in D - \{a\}$. Por el teorema 2.4.1 se sigue que f tiene un mínimo local en a .

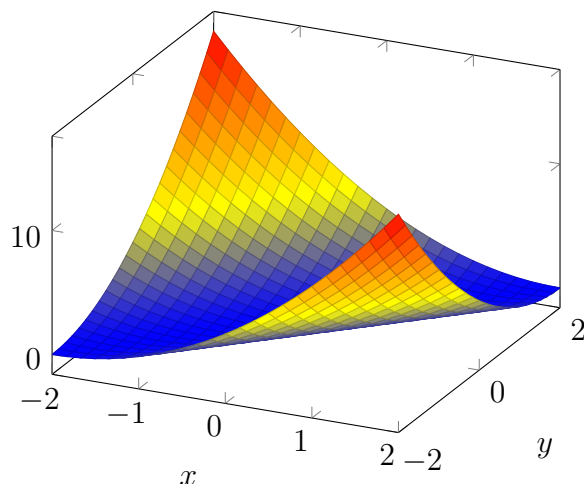


Figura 2.4

No es difícil mostrar que si un punto crítico puede ser clasificado como un máximo o un mínimo usando el Teorema 2.3.1 entonces también puede ser clasificado usando el Teorema 2.4.1. Para ver esto, sea a un punto crítico de $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde $D := B(a, r)$ para algún $r > 0$ supongamos que todas las derivadas parciales segundas de f son continuas en D y supongamos también que para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $Q(y) = yH(a)y^T = \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} > 0$. Sea

$$m = \min \left\{ \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} : \|y\| = 1 \right\}.$$

Claramente, m existe pues usando el teorema de Weirestrass como

$Q(y) = yH(a)y^T = \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}$ es una función continua de y en el conjunto cerrado y acotado; $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| = 1\} \in \mathbb{R}^n$. Además, $m > 0$. Como todas las segundas derivadas parciales de f son continuas en a y como:

$$\left| \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} \right|$$

para todo vector unitario y , por definición existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} \right| < \frac{m}{2}$$

Siempre $\|x - a\| \leq \delta$ y $\|y\| = 1$. Así:

$$-\frac{m}{2} < \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} < \frac{m}{2},$$

lo cual implica que:

$$\sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} > \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{m}{2} \geq m - \frac{m}{2} > 0$$

si $\|x - a\| < \delta$ y y es cualquier vector unitario. Por tanto, $\sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} > 0$ siempre que $\|x - a\| < \delta$ y $\|y\| = 1$. Ahora dado $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta$. Sea $F(t) = f(a + t(x - a))$ para $0 \leq t \leq 1$. Claramente

$$F'(t) = (x - a) \cdot \nabla f(a + t(x - a))$$

y

$$F''(t) = Q(x - a, a + t(x - a)).$$

Definamos $y = \frac{x - a}{\|x - a\|}$ y por tanto

$$F''(t) = \|x - a\|^2 y H(a + t(x - a)) y^T > 0.$$

Esto demuestra que $F'(t)$ es creciente. Como $F'(0) = 0$ tenemos que $F'(t) > 0$ si $0 < t \leq 1$. Así $F'(1) > 0$, esto es, $(x - a) \cdot \nabla f(x) > 0$. Por tanto, $(x - a) \cdot \nabla f(x) > 0$ para $0 < \|x - a\| < \delta$. Así, la hipótesis en la parte 2 del teorema 2.4.1 se satisface.

Capítulo 3

Algunas generalidades de los extremos locales

Como veremos en el Teorema 3.1.1, si una función tiene un mínimo local en su único punto crítico, entonces ese mínimo local se convierte en un mínimo global; sin embargo esto no es cierto en general para funciones de varias variables, el propósito de este capítulo es encontrar condiciones suficientes para las cuales un mínimo local se convierte en un mínimo global. En el contraejemplo 3.3.1 mostraremos que un polinomio de dos o más variables y de grado mayor o igual a 5, el mínimo local no implica un mínimo global.

Trataremos de responder la siguiente pregunta; ¿qué pasa entonces para los polinomios de grado menor o igual a 4 de dos o más variable? Por supuesto, para polinomios de grado uno el resultado es cierto, para polinomios de grado dos el resultado se sigue de la teoría de formas cuadráticas, también, el Teorema 3.2.3 confirma que el resultado también es válido para funciones convexas.

3.1. Caso función de una variable real

En esta sección demostraremos que si una función f tiene un mínimo local en un único punto crítico entonces ese mínimo local se convierte en mínimo global, este hecho de globalizar un extremo local da lugar a muchas aplicaciones que veremos a continuación.

Teorema 3.1.1. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un único punto crítico x_0 . Si f tiene un*

mínimo local en x_0 , entonces x_0 es un mínimo global.

Demostración. Sea $r > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r) =: U$. Supongamos que existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(y) < f(x_0)$, entonces necesariamente $|y - x_0| \geq r$ y para fijar ideas, digamos que $y > x_0$. Ahora bien, existe $\zeta \in U$ tal que $f(x_0) < f(\zeta)$, pues en caso contrario se tendría que $f(x_0) = f(\zeta)$ para todo $\zeta \in U$ y por tanto $f' = 0$ en U ; lo cual contradice la unicidad del punto crítico x_0 . Luego $f(y) < f(x_0) < f(\zeta)$. Además, como $\zeta \neq y$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\zeta > y$. De la continuidad de f en $[y, \zeta]$ y del teorema del valor intermedio, se sigue que $f(c) = f(x_0)$ para algún $c \in (y, \zeta)$ tal que y por el teorema de Rolle, existirá un $h \in (x_0, c)$ tal que $f'(h) = 0$ con $h \neq x_0$; lo cual es una contradicción. En consecuencia, f tiene un mínimo global en x_0 . \square

Ejemplo 3.1.2. Consideremos la función diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^x$. Nótese que $f'(x) = (x + 1)e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por tanto $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = -1$. O sea que $x_0 := -1$ es el único punto crítico de f . Como $f''(-1) = e^{-1} > 0$, entonces en $x_0 = -1$ hay un mínimo global, a la luz del Teorema 3.1.1.

Una aplicación interesante del ejemplo anterior es:

$$xe^{x(1+y^2)^2} \geq -e^{-1} \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

En efecto, sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = xe^{x(1+y^2)^2}$. Calculando las derivadas parciales obtenemos:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^{x(1+y^2)^2} + x(1+y^2)^2 e^{x(1+y^2)^2} = e^{x(1+y^2)^2} (1 + x(1+y^2)^2).$$

Luego, si $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$, entonces

$$1 + x(1+y^2)^2 = 0.$$

De esta ecuación se deduce que $x \neq 0$. Por otro lado, la derivada parcial de f con respecto a y es:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2x^2(1+y^2)e^{x(1+y^2)^2}(2y) = 4x^2y(1+y^2)e^{x(1+y^2)^2}.$$

Así, si $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, entonces, $y = 0$ y por tanto $x = -1$, es decir, el único punto crítico de g es $(-1, 0)$ y así $\nabla f(-1, 0) = (0, 0)$ es un mínimo local, en efecto, el determinante de la matriz Hessiana está dado por:

$$D(x, y) = -8x^4(y^2 + 1)^2(3y^2 - 1)e^{2x^2(y^2+1)^2}(2x^2(y^2 + 1)^2 + 3)$$

Evaluando el punto crítico obtenemos; $D(-1, 0) = 40e^2 > 0$. Un cálculo extenso pero sencillo mostrará que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(-1, 0) = e^{-1} > 0$ lo que prueba el hecho de que $(-1, 0)$ es un punto de mínimo local. Fijemos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sea $z = x(1 + y^2)^2$ entonces $x = \frac{z}{(1+y^2)^2}$, así:

$$xe^{x(1+y^2)^2} = \frac{z}{(1+y^2)^2} e^z = \frac{1}{(1+y^2)^2} ze^z.$$

Es claro que $0 < \frac{1}{(1+y^2)^2} \leq 1$ y por el ejemplo anterior $\min\{ze^z : z \in \mathbb{R}\} = -e^{-1}$.

Luego

$$\frac{1}{(1+y^2)^2} ze^z \geq -\frac{1}{(1+y^2)^2} e^{-1} \geq -e^{-1}.$$

3.2. Funciones convexas y cóncavas

Las funciones convexas surgen naturalmente con el estudio de los conjuntos convexas. Estas funciones están presentes en muchas aplicaciones del cálculo. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 3.2.1. La función f es convexa en K , si para cada $x_1, x_2 \in K$ y $t \in [0, 1]$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \quad (3.1)$$

Si la desigualdad es estricta siempre que $x_1 \neq x_2$ y $0 < t < 1$, diremos que f es estrictamente convexa en K . La hipótesis de que K es un conjunto convexo es necesaria para garantizar que el punto $tx_1 + (1-t)x_2$ pertenezca a el dominio de f .

La definición de función cóncava es obtenida al invertir el signo de la desigualdad en 3.1: f es cóncava en K si, para cada $x_1, x_2 \in K$ y $t \in [0, 1]$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \quad (3.2)$$

La desigualdad es estricta siempre que $x_1 \neq x_2$ y $0 < t < 1$, en este caso decimos que f es estrictamente cóncava en K .

La siguiente proposición sugiere que la convexidad de una función diferenciable f es equivalente al hecho de que f se encuentra por encima de su hiperplano tangente en cada punto $(x_0, f(x_0))$.

Proposición 3.2.2. *Sea f una función diferenciable en un conjunto convexo K . Entonces f es convexo en K si y solo si:*

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ para cada } x_0, x \in K. \quad (3.3)$$

Demostración. Sea f convexo en K , y sea x_0, x dos puntos cualesquiera de K sea $h = x - x_0$ y $t \in (0, 1)$ por definición de función convexa

$$\begin{aligned} f(x_0 + th) &= f(x_0 + tx - tx_0) \\ &= f(tx + (1-t)x_0) \\ &\leq tf(x_0 + h) + (1-t)f(x_0). \end{aligned}$$

Esta desigualdad puede ser reescrita como

$$f(x_0 + th) - f(x_0) \leq t[f(x_0 + h) - f(x_0)]. \quad (3.4)$$

Restando $t\nabla f(x_0) \cdot h$ de ambos lados y dividiendo por t se obtiene

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - t\nabla f(x_0) \cdot h}{t} \leq f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h$$

Nótese ahora que

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - t\nabla f(x_0) \cdot h}{t} \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow 0^+$$

Esto demuestra que $0 \leq f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h$ y por tanto

$$f(x) = f(x_0 + h) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ para todo } x_0, x \in K.$$

Recíprocamente, supongamos que 3.3 se cumple para todo $x_0, x \in K$. Sea $x_1, x_2 \in K$ con $x_1 \neq x_2$ y sea $t \in (0, 1)$. Dados

$$x_0 =, tx_1 + (1-t)x_2 \quad h = x_1 - x_0,$$

entonces despejando x_2 obtenemos que

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_0 - tx_1}{1-t} \\ &= \frac{(1-t)x_0 - tx_1 + tx_0}{1-t} \\ &= x_0 - \frac{tx_1 - tx_0}{1-t} \\ &= x_0 - \frac{t}{1-t}h. \end{aligned}$$

Por 3.3 tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_1) &\geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h \\ f(x_2) &\geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot \left(-\frac{t}{1-t}h\right) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $t/(1-t)$ en la primera desigualdad y sumando ambos lados $f(x_2)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{t}{1-t}f(x_1) + f(x_2) &\geq \frac{t}{1-t}f(x_0) + \frac{t}{1-t}\nabla f(x_0) \cdot h + f(x_2) \\ &\geq \frac{t}{1-t}f(x_0) + \frac{t}{1-t}\nabla f(x_0) \cdot h + f(x_0) - \frac{t}{1-t}\nabla f(x_0) \cdot h \\ &= \left(\frac{t}{1-t} + 1\right) f(x_0). \end{aligned}$$

De donde se deduce que $tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(x_0) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$ esto demuestra la convexidad de f . \square

El siguiente teorema es una caracterización del comportamiento de los puntos críticos en funciones convexas.

Teorema 3.2.3. *Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ donde K es un subconjunto abierto y convexo de \mathbb{R}^n y sea $x_0 \in K$ un punto crítico. Entonces f tiene un mínimo global en x_0 .*

Demostración. Dado que x_0 es un punto crítico entonces $\nabla f(x_0) = 0$ y por la proposición 3.2.2 se sigue que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in K$. \square

Similarmente, cualquier función cóncava tiene un máximo global en cualquier punto crítico.

3.3. Caso polinomio

El panorama en varias variables no es alentador como lo demostrará el siguiente contraejemplo.

Teorema 3.3.1 (Contraejemplo). *Para todo $p \geq 5$ y $q \geq 2$, $p, q \in \mathbb{Z}$ existe un polinomio en $x = (x_1, \dots, x_q)$ de grado p con un mínimo local en su único punto crítico $x = 0$ pero que no es un mínimo global.*

Demostración. Fijemos, $m, n \in \mathbb{N}$ ($n, m \geq 1$), defínase $p := \max\{2m + 3, 2n\}$ y sea $f : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ $q \geq 2$ por

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{2m} \left(1 + \sum_{i=2}^q x_i\right)^3 + \sum_{i=2}^q x_i^{2n}$$

Es fácil ver que

$$D_1 f(x) = 2mx_1^{2m-1} \left(1 + \sum_{i=2}^q x_i\right)^3 \quad (3.5)$$

$$D_j f(x) = 3x_1^{2m} \left(1 + \sum_{i=2}^q x_i\right)^2 + 2nx_j^{2n-1}, \quad j = 2, \dots, q \quad (3.6)$$

Veamos que:

1. $x_0 = 0$ es el único punto crítico de f . Para ello, supongamos que $x_1 \neq 0$, entonces por 3.5, $(1 + \sum_{i=2}^q x_i)^3 = 0$ y por 3.6 $x_j = 0$, $j = 2, \dots, q$ lo cual es una contradicción. Además note que si $x_1 = 0$ entonces $x_j = 0$ para $j = 2, \dots, q$ lo que demuestra lo deseado.

2. f tiene un mínimo local en su único punto crítico $x_0 = 0$. Sea $r > 0$ tal que

$0 < r < \frac{1}{2(q-1)}$, veamos que si $x = (x_1, \dots, x_q) \in B(0, r)$ entonces $\sum_{i=2}^q x_i > -\frac{1}{2}$, en efecto, dado que $x \in B(0, r)$ entonces $\|x\| < r$, esto implica que $x_i > -r$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, así;

$$\sum_{i=2}^q x_i \geq (q-1)(-r) > \frac{-1}{2} \text{ para todo } x \in B(0, r).$$

Luego, $1 + \sum_{i=2}^q x_i \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in B(0, r)$ por tanto:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^{2m} \left(1 + \sum_{i=2}^q x_i\right)^3 + \sum_{i=2}^q x_i^{2n} \\ &\geq \frac{1}{8} x_1^{2m} + \sum_{i=2}^q x_i^{2n} \\ &\geq 0 = f(x_0) \end{aligned}$$

Note que en realidad, en $x_0 = 0$ hay un mínimo local estricto.

3. f no tiene un mínimo global en $x_0 = 0$.

Para ver esto, note que en primer lugar $2m + 3 \neq 2n$, entonces pueden ocurrir dos casos, en el caso en que $2m + 3 > 2n$ considere el polinomio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grado $2m + 3$ dado por:

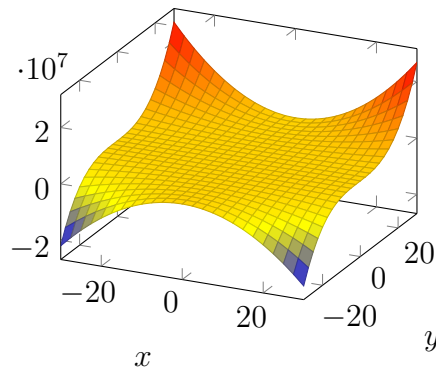
$$h(\xi) = \xi^{2m}(1 + \xi)^3 + \xi^{2n}.$$

Claramente, $h(\xi) \rightarrow -\infty$ cuando $\xi \rightarrow -\infty$. Por tanto, existe un $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(\xi_0) < 0$, ahora bien, considere $x \in \mathbb{R}^q$ dado por $x = (\xi_0, \xi_0, 0, \dots, 0)$ vemos que $f(x) = f(\xi_0, \xi_0, 0, \dots, 0) = h(\xi_0) < 0$.

En el caso en que $2n > 2m + 3$ note en primer lugar que $4nm + 3 > 2n$, sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el polinomio de grado $4nm + 3$ dado por $g(\xi) = \xi^{4nm}(1 + \xi)^3 + \xi^{2n}$, dado que $4nm + 3$ es impar entonces $g(\xi) \rightarrow -\infty$ cuando $\xi \rightarrow -\infty$. Sea $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(\xi_0) < 0$. Haciendo $x = (\xi_0^{2n}, \xi_0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q$ vemos que $f(x) = g(\xi_0) < 0$.

□

El siguiente gráfico ilustra el caso para $n = m = 1$ es decir, para $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$



3.3.1. Polinomio de grado 2 en dos o más variables

Dado que para polinomios de grado mayor o igual a 5 en dos o más variables el resultado en general no es cierto, entonces nuestra atención está dirigida para polinomios de grado menor o igual a 4, veremos ahora que para polinomios de grado 2 en dos o más variables, el hecho de que el polinomio tenga un mínimo local en su único punto crítico, entonces el mínimo local se convierte en un mínimo global.

Pero antes necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 3.3.2. *La función $f(x) = xAx^T + bx^T + c$ es convexa si y sólo si A es semidefinida positiva.*

Demostración. Supongamos que $f(x)$ no es semidefinida positiva, entonces, por definición, existe un $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $yAy^T < 0$, fijemos un $\theta \in \mathbb{R}$ y considérese $x = \theta y$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\theta y) \\ &= (\theta y)A(\theta y)^T + b(\theta y)^T + c \\ &= \theta^2 yAy^T + \theta by^T + c \end{aligned}$$

es estrictamente cóncava en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : x = \theta y\}$. Así f no es convexa.

Supongamos ahora que A es semidefinida positiva, y sea $\lambda \in [0, 1]$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= f(y + \lambda(x - y)) \\ &= (y + \lambda(x - y))A(y + \lambda(x - y))^T + b(y + \lambda(x - y))^T + c \\ &\leq yAy^T + \lambda xAx^T + \lambda bx^T + by^T - \lambda by^T - \lambda yAy^T + c \\ &= \lambda(xAx^T + by^T + c) + (1 - \lambda)(yAy^T + by^T + c) \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

Esto demuestra la convexidad de f . □

Teorema 3.3.3. *Sea f una función diferenciable con segundas derivadas parciales continuas en un conjunto convexo y abierto K . Entonces*

1. *f es convexo en K si y sólo si la forma cuadrática $Q(x, y) = yH(x)y^T \geq 0$ para todo $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^n$ donde H es la matriz Hessiana de la función f .*

Demostración. Supongamos que f es convexa en K , sabemos que para todo $x \in K$, $\lambda > 0$ (suficientemente pequeño) y $y \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $x + \lambda y \in K$. Usando Taylor;

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda \nabla f(x) \cdot y + \frac{\lambda^2}{2} yH(x + \lambda y)y^T. \quad (3.7)$$

Por Proposición 3.2.2 se tiene que $f(x + \lambda y) \geq f(x) + \lambda \nabla f(x) \cdot y$, esto implica que

$$0 \leq f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda \nabla f(x) \cdot y$$

y por 3.7

$$0 \leq yH(x + \lambda y)y^T \text{ para todo } x \in K, y \in \mathbb{R}^n.$$

Por definición, $Q(x + \lambda y, y) \geq 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^n, x \in K$. Haciendo $\lambda \rightarrow 0^+$ se sigue que $Q(x, y) \geq 0$ para todo $x \in K, y \in \mathbb{R}^n$

Supongamos ahora que $Q(x, y) \geq 0$ para todo $x \in K, y \in \mathbb{R}^n$. Usando Taylor de orden 2 tenemos que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda \nabla f(x) \cdot y + \frac{\lambda^2}{2} yH(x + \lambda y)y^T. \quad (3.8)$$

Por hipótesis, $yH(x + \lambda y)y^T \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, así

$$f(x + \lambda y) \geq f(x) + \lambda \nabla f(x) \cdot y$$

y por la Proposición 3.2.2 f es convexa en K . □

El siguiente teorema demuestra el hecho de que para polinomios de grado 2 en dos o más variables el resultado es cierto:

Teorema 3.3.4. *Sea A una matriz simétrica de orden $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xAx^T + bx^T + c$ tiene un mínimo local en su único punto crítico $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces f tiene un mínimo global en x_0 .*

Demostración. Sabemos por 1.21 que el gradiente de f está dado por $\nabla f(x) = 2Ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, los puntos críticos de f son la solución al sistema $Ax = -\frac{1}{2}b$.

Por hipótesis, dicho sistema tiene única solución x_0 y por tanto A es invertible. De otro lado, existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in B := B(x_0, r)$, dado que f es diferenciable y B es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n por Proposición 3.2.2 f es convexa en B aplicando el Teorema 3.3.3 la función $Q(x, y) \geq 0$ para cada $x \in B$, en particular, $Q(x_0, y) \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, recordemos que $Q(x_0, y) = \sum_{i,j=1}^n D_{ij}y_i y_j = yH(x_0)y^T$. Ahora bien es claro que $D_{ij}f(x) = 2a_{ij}$ para todo $i \in \mathbb{J}_n$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, y por tanto,

$$0 \leq Q(x_0, y) = \sum_{ij=1}^n 2a_{ij}y_i y_j = 2yAy^T \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n.$$

Usando el Teorema 3.3.2 se tiene que f es convexa en \mathbb{R}^n y por el Teorema 3.2.3 f tiene un mínimo global en x_0 . □

Hemos visto que para polinomios de grado dos en dos o más variables el resultado se satisface, el artículo de Bruce Calvert muestra que para polinomios de grado 3 en dos y tres variables el resultado se cumple y también es cierto para polinomios de grado 4 en dos variables, para demostrar este hecho se hace un uso intensivo de la teoría de grados, invitamos al lector interesado en estos casos ver [4]. Los casos restantes son preguntas abiertas aún.

Bibliografía

- [1] Tom Apostol. *CALCULUS vol 1*. Reverte, 2 edition, 2002.
- [2] Tom Apostol. *CALCULUS vol 2*. Reverte, 2 edition, 2002.
- [3] Michael W. Botsko. A first derivative test for functions of several variables. *Amer. Math. Monthly*, 93:558–561, 1986.
- [4] M. K. Vamanamurthy Bruce Calvert CALVERT. Local and global extrema for functions of several variables. *J. Austral. Math. Soc.*, 29:362–368, 1980.
- [5] E.B.Vinberg. *A Course in Algebra*. American Mathematical Society, 2003.
- [6] Wendell Fleming. *Functions of several variables*. Springer-Verlang, second edition, 1977.
- [7] Serge Lang. *Calculus of several variables*. Springer, 3 edition, 1987.
- [8] David C. Lay. *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson Educacion, 3 edition, 2007.
- [9] Elon Lagues Lima. *Curso de análise volume 2*. IMPA, 11 edition, 2018.
- [10] V. M. Tikhomirov. *Stories about maxima and minima*. American Mathematical Society, second edition, 1986.