



**CÁLCULO Y ANÁLISIS DE LAS ARTICULACIONES PLÁSTICAS PRODUCIDAS  
POR MOMENTO TORSIONAL.**

Santiago Bustamante Ruiz

Informe final de prácticas académicas para optar al título de ingeniero civil otorgado por la  
Universidad de Antioquia

Asesora

Isabel Kristina Cardona Giraldo

Universidad de Antioquia  
Facultad de Ingeniería  
Ingeniería Civil  
Medellín, Antioquia, Colombia  
2024

---

Cita

(Santiago Bustamante Ruiz, 2024)

---

Referencia

Santiago Bustamante Ruiz. (2024). *Cálculo y análisis de las articulaciones plásticas producidas por momento torsional* [Informe de práctica]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

---

Estilo APA 7 (2020)



**Repositorio Institucional:** <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - [www.udea.edu.co](http://www.udea.edu.co)

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

### **Dedicatoria**

A mis dos padres por darme todo lo que pudieron mientras pudieron, a mis dos hermanas las cuales nunca han dejado de estar ahí para mí y a mi abuela la cual también ha sido la persona que gracias a ella he podido culminar esta carrera, pero sobretodo se la dedico a mi trabajo y a mi compromiso con el conocimiento

### **Agradecimientos**

Quisiera comenzar expresando mi más sincero agradecimiento a mi familia, sobre todo a mis hermanas quienes han sido mi fuente inagotable de apoyo y amor a lo largo de este viaje académico. Me han impulsado a seguir adelante incluso en los momentos más desafiantes. No puedo pasar por alto agradecer a mi querida Universidad de Antioquia. Su compromiso con la excelencia académica y las oportunidades de aprendizaje han sido un factor crucial en mi formación. Estoy agradecido con la comunidad de estudiantes y profesores que conocí allí.

Gracias por formarme como persona y como profesional.

## Tabla de contenido

Resumen .....	7
Abstract .....	8
Introducción .....	9
1 Objetivos .....	10
1.1 Objetivo general .....	10
1.2 Objetivos específicos.....	10
2 Marco teórico .....	11
2.1 Definiciones: .....	11
2.2 Antecedentes .....	12
3 Metodología .....	23
4 Resultados .....	24
5 Conclusiones .....	32
Referencias .....	33

### Lista de figuras

Figuras 1 Representación geométrica de una articulación plástica tomado de Naughton et al. (2017) .....	11
Figuras 2 Superficie de interacción propuesta en Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004).....	13
Figuras 3 Ejemplo planteado por Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004) .....	13
Figuras 4 deformación en las rotulas plásticas con la interacción del torque, tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004).....	14
Figuras 5 deformación en las rotulas plásticas sin la interacción del torque, tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004).....	14
Figuras 6 cálculo de rotación tomado de Lopes y Bernardo (2009) .....	15
Figuras 7 curvas T- $\Theta$ tomado de Lopes Y Bernardo (2009).....	16
Figuras 8 Superficie de interacción propuesta en Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023) .....	19
Figuras 9 Efecto del torque en la superficie de capacidad tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023) .....	20
Figuras 10 Formulación F.A.M para rotulas plásticas con interacción de torque tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023).....	20
Figuras 11 Estructura a modelar tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023) .....	20
Figuras 12 Rotulas plásticas formadas tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023) .....	21
Figuras 13 Rotulas plásticas en cada una de las plantas sin el efecto del torque tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023).....	21
Figuras 14 Rotulas plásticas en cada una de las plantas con el efecto del torque tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023).....	22
Figuras 15 Formulación F.A.M para rotulas plásticas con interacción de torque tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023).....	27
Figuras 16 Matriz de rigidez para una columna con restricciones en ambos extremos a y b tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004) .....	28

### Lista de tablas

Tabla 1 propiedades de las vigas testeadas tomado de Lopes y Bernardo (2009) .....	15
Tabla 2 puntos clave, curvas T- $\Theta$ . Tomado de Lopes y Bernardo (2009) .....	16
Tabla 3 diferencias con las normas estudiadas tomado de Lopes Y Bernardo (2009).....	17
Tabla 4 límites de refuerzo transversal para las vigas testeadas tomado de y Lopes y Bernardo (2013). .....	18
Tabla 5 resumen comparativas del torsor critico normativo y el torsor critico experimental. Tomado de Lopes y Bernardo (2009) .....	24
Tabla 6 comparativa refuerzos máximos y mínimos de las diferentes normativas tomado de Lopes y Bernardo (2013) .....	25
Tabla 7 Comparación entre $T_{crexp}/T_{crCalc}$ y cuantías de normativas Fuente: elaboración propia .....	26
Tabla 8 diferentes grados de libertad tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004).....	29
Tabla 9 diferentes funciones de forma para vigas-columnas teniendo finales rigidos en a y b tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004) .....	30

### **Resumen**

Se abarco el comportamiento de las articulaciones plásticas formadas por momento torsional tanto en su modelación como en su manejo desde el diseño y predicción tanto del torsor como del ángulo crítico, lo primero es decir que ambos manejos pueden ser utilizados para cosas diferentes, la modelación más utilizado o enfocada al control estructural, con diferentes tipos de métodos, los cuales no están al alcance de este trabajo, y el torsor y ángulo crítico utilizados para el diseño estructural, y su aplicabilidad va desde la predicción del ángulo máximo tolerable que puede sufrir un elemento antes de su falla. Se hallo en primera instancia que la norma ACI 318R-05 es la más acercada a la hora de realizar este tipo de predicciones, y que en general los métodos de modelación actuales además de tener similitudes a la hora de solucionar la superficie de capacidad y matriz de rigidez de una estructura, sus resultados son bastante coherentes.

*Palabras clave:* Momento torsional, concreto reforzado, articulación plástica.

### **Abstract**

The behavior of plastic joints formed by torsional moment was addressed both in their modeling and handling from design and prediction perspectives, both for the torsor and the critical angle. Firstly, it should be noted that both approaches can be used for different purposes. Modeling is primarily focused on structural control, employing various methods, which are beyond the scope of this work. Torsor and critical angle are used for structural design, and their applicability ranges from predicting the maximum tolerable angle that an element can undergo before failure. It was found initially that the ACI 318R-05 standard is the most suitable for making such predictions, and that in general, current modeling methods, besides having similarities in solving the capacity surface and stiffness matrix of a structure, yield quite consistent results..

Keywords: Torsional moment, reinforced concrete, plastic hinge



## Introducción

Las articulaciones plásticas se producen cuando un elemento estructural llega a verse sometido a momentos muy altos, los cuales generan deformaciones excesivas en la estructura McIvor et al. (1977). La mayoría de normas de construcción actuales tienen en cuenta este tipo de articulaciones al momento de realizar los diseños por métodos de estado límite, y/o chequeos de estos. Los aspectos que influyen en este tipo de deformaciones que llamamos articulación plástica, son la ductilidad del elemento, las fuerzas a las que se vea sometido, por ejemplo flexión, torsión, cortante etc., en este documento nos enfocaremos principalmente en las articulaciones con torsión, es decir, si este tipo de articulaciones aumentan con la presencia de torsión o si no hay gran cambio con respecto a las que se pueden llegar a tener teniendo en cuenta solo la flexión.

La torsión fuerza es la que se menciona como principal en este proyecto, no se presenta de manera común en las estructuras de forma estática, o no muchas de ellas son diseñadas para tenerlas en cuenta debido a la incertidumbre que se tiene sobre esta en muchas ocasiones, sin embargo en los casos de dinámica estructural, no es una opción y la torsión pasa a ser una fuerza importante a tener en cuenta, más cuando intentamos predecir qué tipo de rotulas plásticas se generan en el concreto debido a este tipo de eventos.

Se tiene la idea de que las fallas que son producidas por torsión son frágiles, sin embargo, algunos estudios recientes sugieren que es posible tener fallas por cortante y torsión dúctiles S Lopes, R carmo y L Bernardo (2008) y (2003), esto hace que al momento de realizar análisis torsionales el concreto reforzado no se tenga muy en cuenta debido a que su ductilidad muchas veces no permite presenciar este tipo de deformaciones, y la mayoría de estudios se vean basados en el análisis del acero, sin embargo para el concreto reforzado se puede hacer el análisis y de hecho normativas como la CEB FIP MODEL CODEL 1990 (MC90) y el EUROCODE2 (EC2) lo incorporan dentro de su posibilidad como una forma de chequeo de estado límite, el cual unifican tanto para torsión como para cortante, y como veremos a lo largo del documento puede tener influencias a la hora de estimar o predecir las articulaciones plásticas sufridas durante un evento sísmico.

Este proyecto se centrará en analizar las diferentes bibliografías que podemos encontrar actualmente sobre las articulaciones plásticas que son formadas en concreto reforzado con la

influencia de la torsión, y llegar a una conclusión sobre cuál de ellas dentro de sus mismos estudios han podido tener mejor precisión a la hora de predecir las mismas, se analizarán algunas bibliografías que se centran en casos estáticos sin embargo la mayor parte de las que se encuentran por motivos ya mencionados son para casos de dinámica estructural, se mirará la influencia de la torsión en la generación de estas rótulas, comparándolas con casos como flexión como nos lo plantean Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023) y Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004), finalmente se comparará las formas en las que se ha ido abordando el problema a lo largo de los últimos años, teniendo en cuenta principalmente la manera de calcular el ángulo que se produce como manera de analizar la rótula.

## **1 Objetivos**

### **1.1 Objetivo general**

Analizar las rótulas plásticas en concreto reforzado debido a la influencia del momento torsional, tanto matemática como analíticamente.

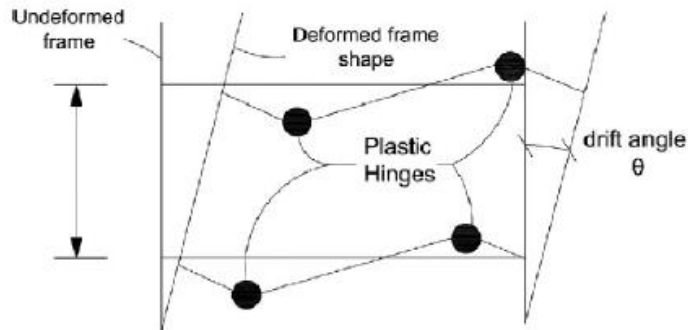
### **1.2 Objetivos específicos**

- 1- Analizar cuál de los análisis matemático planteado en la bibliografía actual funciona mejor para predecir las articulaciones plásticas producidas por torsión.
- 2- Analizar el comportamiento de la torsión frente a las articulaciones plásticas

## 2 Marco teórico

### 2.1 Definiciones:

Articulación plástica: “Las articulaciones o rotulas plásticas son grandes deformaciones inelásticas causadas por cargas extremas como los terremotos, desempeñan un papel importante en la evaluación de las capacidades máximas de deformación” Bae, S. W., Miseses, A. M., & Bayrak, O. (2005) Estado que podemos ver en la figura 1



*Figuras 1 Representación geométrica de una articulación plástica tomado de Naughton et al. (2017)*

Momento torsional: El término "momento torsional" se refiere a la fuerza de torsión o rotación aplicada a un objeto. En ingeniería y mecánica, suele estar asociado al concepto de torsión, que es la deformación causada por tales fuerzas de torsión.

Matemáticamente, el momento torsional (también conocido como torque) se define como el producto de la fuerza aplicada y la distancia desde el eje de rotación. Se suele denotar con el símbolo "T" y se puede expresar de la siguiente manera:

$$T = F * r$$

Donde:

T es el momento torsional (torque)

F es la fuerza aplicada

r es la distancia desde el eje de rotación hasta el punto donde se aplica la fuerza (brazo de palanca).

En muchas aplicaciones de ingeniería, la unidad de momento torsional es el newton-metro (Nm) en el Sistema Internacional de Unidades (SI). Hibbeler, R. C. (2016). "Mecánica para Ingenieros: Estática." Pearson.

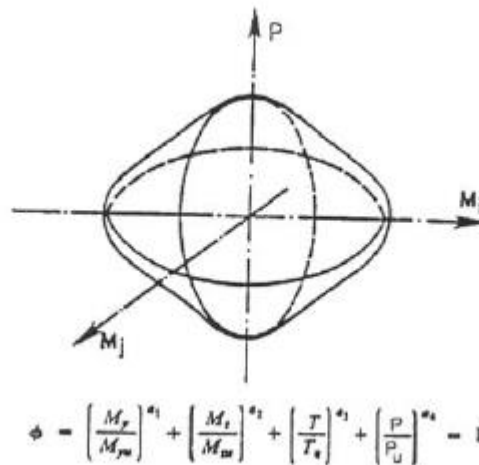
Concreto reforzado: El término "Concreto reforzado" se refiere a un tipo de construcción que utiliza hormigón con barras de acero u otros elementos estructurales para mejorar su resistencia y capacidad de carga. En este método de construcción, el hormigón, que es fuerte a compresión pero débil a tracción, se combina con acero para crear un material compuesto que puede resistir tanto fuerzas de compresión como de tracción. Este tipo de construcción se utiliza comúnmente en estructuras como vigas, columnas y losas, proporcionando una mayor durabilidad y resistencia a la estructura.

Nilson, A. H., Darwin, D., & Dolan, C. W. (2015). "Diseño de Estructuras de Concreto". McGraw-Hill.

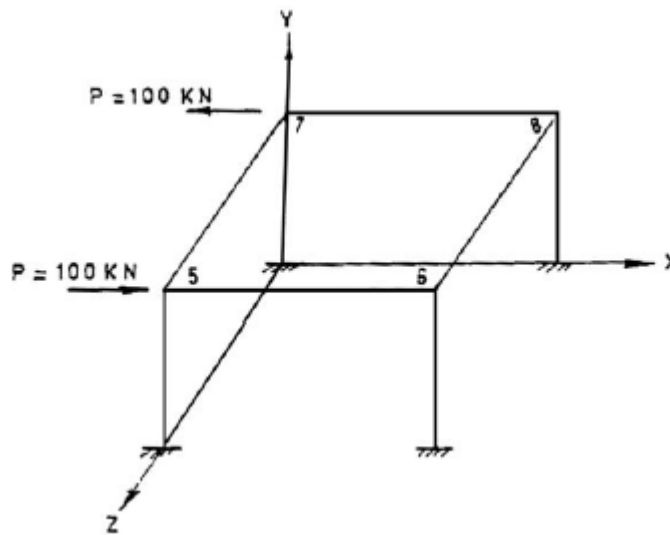
## **2.2 Antecedentes**

El concepto de chequear las estructuras por métodos plásticos para conocer el estado límite y el hecho de que esté ligado este al concepto mismo de rótula o articulación plástica se tiene bien establecido desde hace 50 años o más tal como lo menciona McIvor et al. (1977) y desde entonces se ha tenido el interés por predecir estas articulaciones lo cual se hace de manera más efectiva por medio de experimentos.

A partir de esto tenemos otra visión del mismo problema que nos plantea Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004) el cual debido al avance que se ha conseguido en la modelación y los diferentes programas que tenemos para realizar este tipo de modelaciones como lo puede ser MATLAB se empieza a trabajar teniendo mucho más en cuenta la superficie de interacción del elemento y/o estructura para poder realizar correctamente las predicciones sobre las rotulas tal como podemos ver en la figura 4 y ecuación 1 que en base a la superficie de interacción se plantea como un equilibrio de fuerzas, este nos plantea la torsión de manera más estática simplemente tal como podemos observar en la figura 4, se trabajan con diferentes grados de libertad y a cada uno de los frames modelados se les asignan diferentes funciones, y a partir de esto se saca una matriz de rigidez con la cual se va a modelar los diferentes elementos



Figuras 2 Superficie de interacción propuesta en Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004)



Figuras 3 Ejemplo planteado por Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004)

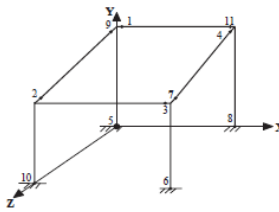
$$\left(\frac{m_y}{m_{yp}}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{m_{zp}}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_{u0}}\right) = 1$$

$$\text{or } f(p_u, m_y, m_z, T, m_{z0}, m_{y0}, T_{u0}, a_i, b_i) = 1$$

Ecuación 1 tomada de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004)

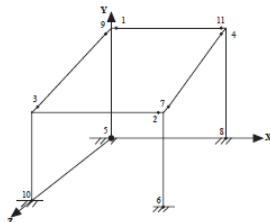
En este primer método de análisis se llega al resultado de que las rotulas plásticas son mayores y más cuando se tienen en cuenta en la estructura el efecto de la torsión, comparación que podemos ver en las figuras 6 y 7

P.H. no.	Load factor	Deflection $\delta_1$ (mm)	Deflection $\delta_2$ (mm)	Sequence of plastic hinge formations
1	1.65	9.220	3.037	
2	2.45	13.199	4.580	
3, 4	2.55	13.996	4.905	
5	2.65	14.990	5.215	
6	2.81	16.570	6.021	
7	2.85	17.367	6.263	
8	2.93	18.989	7.022	
9	2.95	19.500	7.336	
10	3.01	21.870	8.520	
11	3.23	50.167	19.870	



Figuras 4 deformación en las rotulas plásticas con la interacción del torque, tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004)

P.H. no.	Load factor	Deflection $\delta_1$ (mm)	Deflection $\delta_2$ (mm)	Sequence of plastic hinge formations
1	1.65	9.226	3.03	
2	2.58	13.780	4.68	
3	2.76	15.100	4.97	
4	2.87	15.900	5.30	
5	2.99	16.960	6.58	
6	3.26	19.020	6.47	
7	3.35	20.250	6.81	
8	3.37	20.570	6.88	
9	3.43	21.223	7.24	
10	3.58	23.570	8.00	



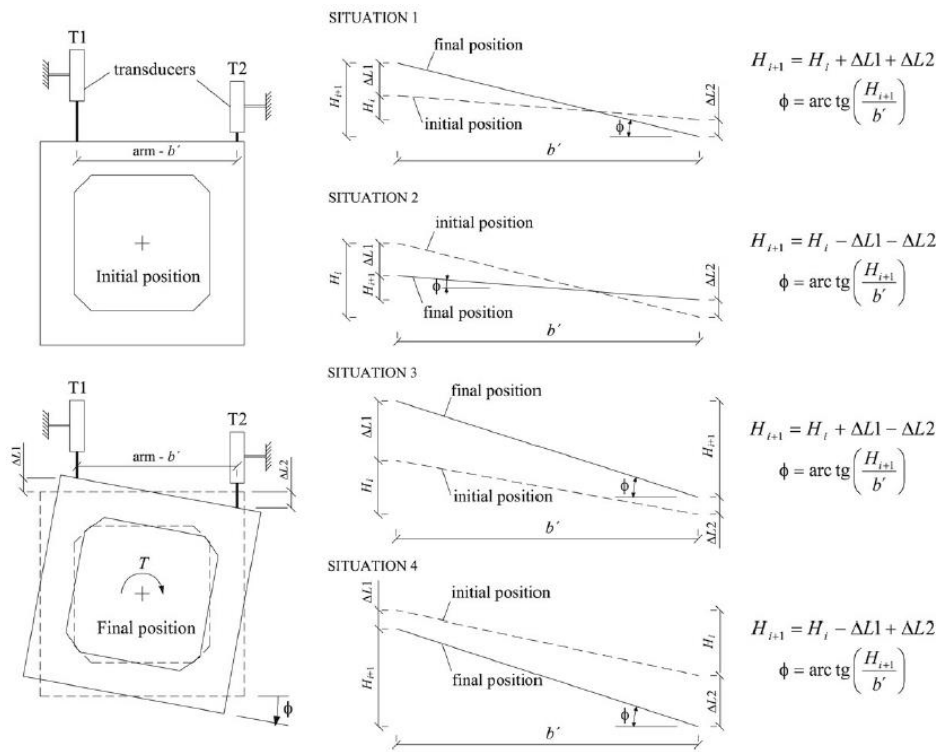
Figuras 5 deformación en las rotulas plásticas sin la interacción del torque, tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004)

A partir de acá los métodos para realizar el análisis de articulaciones plásticas empiezan a tener un comportamiento muy similar en base a la modelación, en los que su base son la superficie de interacción y la matriz de rigidez del elemento a analizar para realizar la predicción, lo que genera que las conclusiones sean muy parecidas, sin embargo hay algunos cambios característicos en la manera de obtener la superficie de interacción lo que genera un poco mejor de precisión a la hora de hacer las predicciones, sin embargo cuando a la hora de intentar conseguir la gráfica de torsión vs ángulo de deformación, para mirar el torsor ultimo del elemento seguimos en la necesidad de realizarlo de manera experimental, esto debido a que las teorías actuales sobre la torsión en concreto reforzado debido a su ductilidad aun no son muy precisas con las predicciones del torsor ultimo. Esto lo podemos ver en Lopes y Bernardo (2009) donde se nos muestran las diferentes curvas y su respectivo torsor último para diferentes tipos de refuerzo, demostrando así la importancia de la ductilidad que nos plantean los mismo autores y la comparativa con los diferentes refuerzos que nos pueden brindar ciertas normas, las vigas que fueron utilizadas se pueden ver en la tabla 1

Tabla 1 propiedades de las vigas testeadas tomado de Lopes y Bernardo (2009)

Beam	Longitudinal reinforcement	Transversal reinforcement ( $\phi@s$ )	$x_1$ (mm)	$y_1$ (mm)	$A_{sl}$ (mm <sup>2</sup> )	$A_{st}$ (mm <sup>2</sup> )	$f_c$ (MPa)	$\rho_l$ (%)	$\rho_t$ (%)	$\rho_{tot}$ (%)	$m_b$
A1	4 $\phi$ 8 + 16 $\phi$ 6	$\phi$ 6@90 mm	537	547	653	28	48.4	0.18	0.19	0.37	0.96
A2	4 $\phi$ 12 + 12 $\phi$ 10	$\phi$ 8@80 mm	538	531	1395	50	47.3	0.39	0.37	0.76	1.04
A3	16 $\phi$ 12	$\phi$ 10@95 mm	540	535	1810	79	46.2	0.50	0.49	1.00	1.02
A4	4 $\phi$ 16 + 20 $\phi$ 10	$\phi$ 10@7 m	520	525	2375	79	54.8	0.66	0.65	1.31	1.01
A5	4 $\phi$ 16 + 20 $\phi$ 12	$\phi$ 12@80 mm	528	528	3066	113	53.1	0.85	0.83	1.68	1.03
B1	20 $\phi$ 6	$\phi$ 6@110 mm	539	544	565	28	75.6	0.16	0.14	0.30	1.11
B2	4 $\phi$ 12 + 20 $\phi$ 8	$\phi$ 8@75 mm	533	534	1458	50	69.8	0.41	0.40	0.80	1.02
B3	4 $\phi$ 16 + 20 $\phi$ 10	$\phi$ 10@70 mm	535	537	2375	79	77.8	0.66	0.67	1.33	0.99
B4	16 $\phi$ 16	$\phi$ 12@75 mm	523	536	3217	113	79.8	0.89	0.89	1.78	1.01
B5	20 $\phi$ 16	$\phi$ 12@60 mm	518	518	4021	113	76.4	1.12	1.09	2.20	1.03
C1	4 $\phi$ 8 + 16 $\phi$ 6	$\phi$ 6@90 mm	540	549	653	28	91.7	0.18	0.19	0.37	0.96
C2	4 $\phi$ 12 + 12 $\phi$ 10	$\phi$ 8@80 mm	532	533	1395	50	94.8	0.39	0.37	0.76	1.04
C3	4 $\phi$ 16 + 20 $\phi$ 10	$\phi$ 10@70 mm	545	540	2375	79	91.6	0.66	0.63	1.29	1.05
C4	4 $\phi$ 16 + 20 $\phi$ 12	$\phi$ 12@80 mm	546	545	3066	113	91.4	0.85	0.86	1.71	0.99
C5	4 $\phi$ 20 + 12 $\phi$ 16	$\phi$ 12@65 mm	540	543	3669	113	96.7	1.02	1.05	2.07	0.97
C6	24 $\phi$ 16	$\phi$ 12@50 mm	533	529	4825	113	87.5	1.34	1.34	2.68	1.00

Para el experimento se tiene una viga empotrada a un lado y se le aplica un torque al otro, y a partir de acá se analizan cada 60cm el ángulo de rotación y las fuerzas aplicadas. Realizando este cálculo dependiendo de 4 situaciones diferentes.



Figuras 6 cálculo de rotación tomado de Lopes y Bernardo (2009)

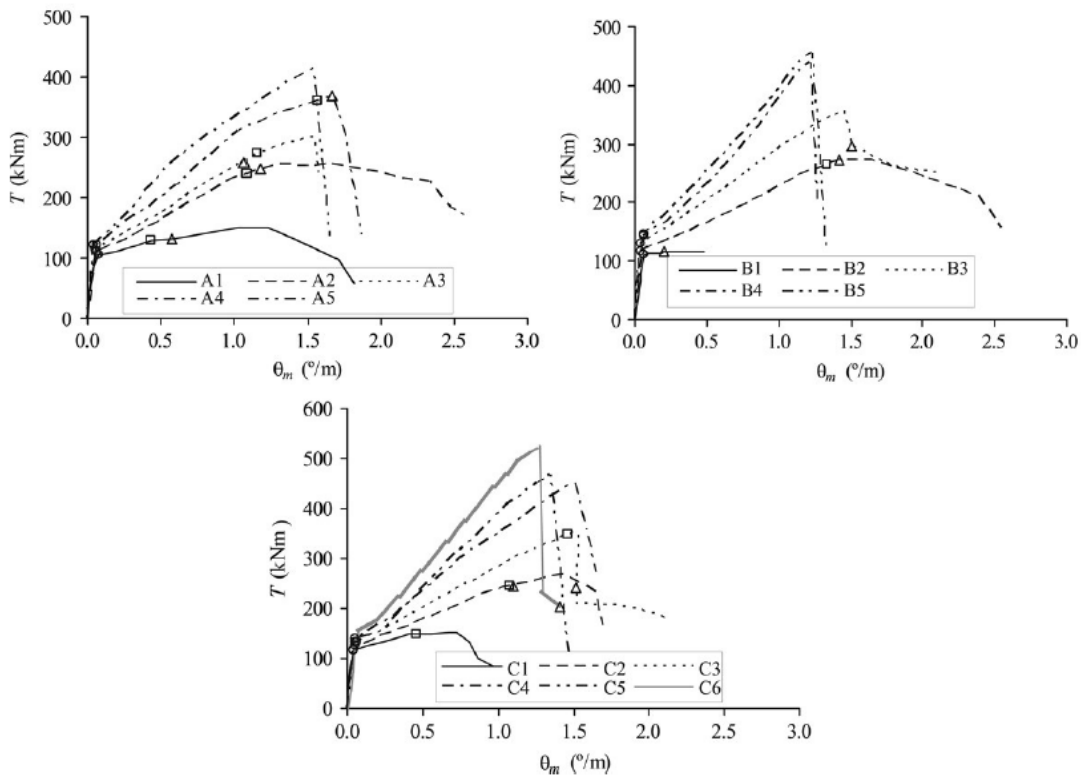
Y podemos observar que dependiendo de la ductilidad del elemento podemos evitar la falla frágil por torsión en concreto reforzado tal como podemos observar en la tabla 2

Tabla 2 puntos clave, curvas T- $\Theta$ . Tomado de Lopes y Bernardo (2009)

Beam	$T_{cr}$ (k Nm)	$\theta_{cr}$ ( $^{\circ}$ /m)	(GC) <sup>I</sup> (k Nm <sup>2</sup> )	(GC) <sup>II</sup> (k Nm <sup>2</sup> )	$T_{Iy}$ (k Nm)	$\theta_{Iy}$ ( $^{\circ}$ /m)	$T_{Iy}$ (k Nm)	$\theta_{Iy}$ ( $^{\circ}$ /m)	$T_r$ (k Nm)	$\theta_r$ ( $^{\circ}$ /m)
A1	104.1	0.071	84070	3807	128.4	0.44	131.8	0.57	150.8	1.18
A2	109.5	0.064	97950	7559	239.4	1.08	247.1	1.17	254.8	1.66
A3	113.3	0.057	113315	8337	272.7	1.16	259.2	1.07	299.9	1.54
A4	120.9	0.063	109485	11100	360.9	1.56	368.2	1.66	368.2	1.66
A5	120.9	0.044	159702	14398	-	-	-	-	412.2	1.53
B1	111.5	0.060	107198	612	-	-	115.4	0.21	116.0	0.23
B2	116.7	0.044	151621	6715	265.8	1.33	273.3	1.42	273.3	1.42
B3	130.5	0.043	172940	9790	-	-	-	-	355.9	1.45
B4	142.9	0.061	134251	16590	-	-	-	-	437.9	1.24
B5	146.3	0.066	126968	15698	-	-	-	-	456.2	1.24
C1	117.3	0.038	177073	4523	150.0	0.46	-	-	151.8	0.72
C2	124.5	0.049	146640	6924	244.8	1.07	246.6	1.10	266.1	1.44
C3	131.9	0.064	118473	9209	347.7	1.46	-	-	351.2	1.53
C4	132.6	0.051	148258	12989	-	-	-	-	450.3	1.50
C5	138.3	0.051	156268	16371	-	-	-	-	467.3	1.34
C6	139.1	0.054	146963	19294	-	-	-	-	521.3	1.27

Nota: (-) vigas con falla frágil

Y las diferentes curvas se tienen los  $T_r$  utilizados como  $T_r$  experimental más adelante.



Figuras 7 curvas T- $\Theta$  tomado de Lopes Y Bernardo (2009)

Además este autor entra en la comparativa con diferentes normas acerca de la predicción del torque último, donde concluyo que la norma ACI 318R-05 es la más apta para predecir el torque ultimo del elemento. Esto lo podemos observar en la tabla 3



Tabla 3 diferencias con las normas estudiadas tomado de Lopes Y Bernardo (2009)

Beam	$T_{r,exp}$ (kN m)	ACI 318R-05 [7]		EC 2 [10]		CAN3-A23.3-04 [11]	
		$T_{r,calc}$ (kN m)	$\frac{T_{r,exp}}{T_{r,calc}}$	$T_{r,calc}$ (kN m)	$\frac{T_{r,exp}}{T_{r,calc}}$	$T_{r,calc}$ (kN m)	$\frac{T_{r,exp}}{T_{r,calc}}$
A1	150.8	101.6	1.48	106.7	1.41	109.7	1.38
A2	254.8	212.2	1.20	221.3	1.15	234.6	1.08
A3	299.9	284.9	1.05	292.6	1.03	324.2	0.93
A4	368.2	298.1 <sup>a</sup>	1.24	411.0	0.90	415.8	0.89
A5	412.2	302.9 <sup>a</sup>	1.36	507.0	0.81	499.9	0.83
B1	116.0	78.3	1.48	81.4	1.42	82.2	1.41
B2	273.3	223.3	1.22	232.7	1.17	249.1	1.10
B3	355.9	383.6 <sup>a</sup>	0.93	405.2	0.88	437.6	0.81
B4	437.9	373.3 <sup>a</sup>	1.17	523.1	0.84	535.2	0.82
B5	456.2	343.1 <sup>a</sup>	1.33	645.1	0.71	641.6	0.71
C1	151.8	102.5	1.48	107.1	1.42	110.9	1.37
C2	266.1	211.0	1.26	225.6	1.18	232.9	1.14
C3	351.2	386.5	0.91	399.3	0.88	418.4	0.84
C4	450.3	438.2 <sup>a</sup>	1.03	508.9	0.89	533.6	0.84
C5	467.3	440.8 <sup>a</sup>	1.06	593.6	0.79	647.2	0.72
C6	521.3	395.4 <sup>a</sup>	1.32	835.5	0.62	870.9	0.60

<sup>a</sup> Brittle failure due to insufficient concrete compressive strength expected in these beams.

El mismo autor pero en Bernardo y Lopes (2013) analiza los mismos datos experimentales obtenidos en base a la teoría plástica y elástica conocida, sin embargo como teoría elástica se asume una articulación plástica perfecta en la zona de fallo 45°, realizando que la diferencia entre  $\Theta_{local}$  y el  $\Theta_{total}$  siempre sea la misma. Cosa que en las otras vigas no se aprecia de la misma forma para la teoría plástica se usó la ecuación 3

$$\theta = \frac{T}{K(GC)^I}$$

Ecuación 3 tomado de Lopes Y Bernardo (2013)

Donde  $K$  es un factor de corrección y va de 0.7 a 1

$T$  es el torio aplicado

$GC$  es la rigidez elástica torsional.

Los Torque últimos para el análisis fueron sacados de las ecuaciones 4 y 5

$$T_{cr} = 2A_{ct} \left( 2.5 \sqrt{f'_c(\text{psi})} \right) = 2A_{ct} \left( 0.2076 \sqrt{f'_c(\text{MPa})} \right)$$

Ecuación 4 tomado de Lopes Y Bernardo (2013)

$$T_{cr,ef} = [1 + 4(\rho_l + \rho_t)]T_{cr}$$

Ecuación 5 tomado de Lopes Y Bernardo (2013)

En este artículo el autor vuelve a realizar la comparativa de las mismas vigas y su refuerzo con el refuerzo propuesto por las diferentes normas como vemos en la tabla 4

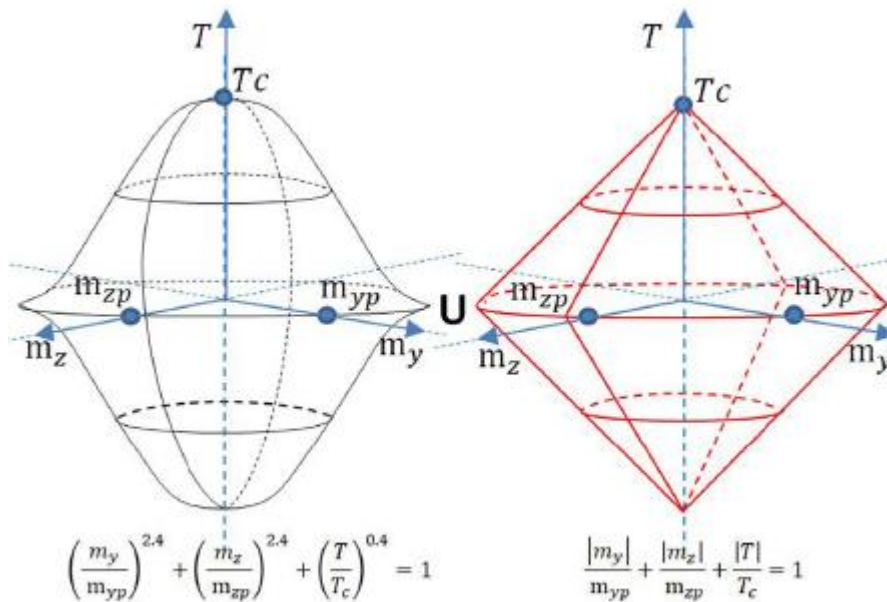
Tabla 4 límites de refuerzo transversal para las vigas testeadas tomado de y Lopes y Bernardo (2013).

		ACI 318R-89 [10]		ACI 318R-05 [11]		MC 90 [13]		EC 2 [14]		CAN3-A23.3-04 [15]	
$A_{t,min}$ $A_{swi,min}$ (MC 90)		$25 \frac{b_w s}{f_y}$		$0.375 \sqrt{f_c} \frac{b_w s}{f_y} \geq 25 b_w s / f_y$		$\rho_{w,min} s b_w s e n \alpha$		$\rho_{w,min} s b_w s e n \alpha$		$0.06 \sqrt{f_c} \frac{b_w s}{f_y}$	
$A_{t,max}$ $A_{swi,max}$ (MC 90)		$\frac{A_{t,r}}{90 s_1 \gamma_c f_c}$		$\frac{8 \sqrt{f_c} A_{w,s}}{b_w f_y c o t \theta}$		$\frac{f_{c,r} s e n^2 \theta s}{f_y}$		$\frac{v f_{c,r} s \sin \theta \cos \theta}{f_y c o t \theta}$		$\frac{0.25 f_c 1.7 A_{w,s}}{2 \rho_w A_{t,r} c o t \theta}$	
Beam	$\frac{A_{t,r}}{s}$ cm <sup>2</sup> /m	$\frac{A_{t,min}}{s}$	$\frac{A_{t,max}}{s}$	$\frac{A_{t,min}}{s}$	$\frac{A_{t,max}}{s}$	$\frac{A_{t,min}}{s}$	$\frac{A_{t,max}}{s}$	$\frac{A_{t,min}}{s}$	$\frac{A_{t,max}}{s}$	$\frac{A_{t,min}}{s}$	$\frac{A_{t,max}}{s}$
A1	3.11	1.62	14.02	2.04	9.53	1.37	15.04	0.86	17.52	0.75	16.80
A2	6.25	1.48	14.31	1.84	8.72	1.49	14.99	0.84	17.53	0.80	16.34
A3	8.32	1.44	13.87	1.77	8.68	1.53	15.54	0.83	17.52	0.81	15.84
A4	11.29	1.44	15.21	1.93	8.88 <sup>a</sup>	1.56	15.98	0.86	18.79	0.86	17.99
A5	14.13	1.54	15.61	2.02	9.02 <sup>a</sup>	1.56	16.25	0.90	18.56	0.84	18.50
B1	2.33	1.62	18.14	2.55 <sup>b</sup>	11.59	2.03	21.42	1.11	23.78	1.00	27.07
B2	6.67	1.48	17.57	2.24	10.66	1.94	20.33	1.04	23.59	1.02	24.38
B3	11.29	1.44	18.04	2.30	11.00 <sup>a</sup>	2.18	20.92	1.08	24.61	1.09	26.71
B4	15.07	1.54	20.40	2.48	11.18 <sup>a</sup>	2.25	23.05	1.19	26.17	1.14	30.00
B5	18.83	1.54	21.81	2.42	10.60 <sup>a</sup>	2.33	23.81	1.21	26.40	1.16	29.84
C1	3.11	1.62	18.86	2.81	13.23	2.23	22.36	1.17	26.03	1.06	31.43
C2	6.25	1.48	19.10	2.61	12.27	2.31	22.05	1.12	25.77	1.12	30.79
C3	10.53	1.44	18.04	2.50	11.74	2.36	20.68	1.10	24.42	1.12	29.56
C4	14.13	1.54	18.98	2.65	12.42 <sup>a</sup>	2.37	22.52	1.17	25.71	1.13	31.48
C5	17.38	1.54	19.93	2.73	13.30 <sup>a</sup>	2.49	23.80	1.21	28.00	1.17	33.59
C6	22.60	1.43	18.40 <sup>a</sup>	2.41	11.34 <sup>a</sup>	2.28	22.76	1.07	24.73	1.11	28.24

<sup>a</sup> Brittle failure due to insufficient concrete compressive strength expected in these beams.  
<sup>b</sup> Failure due to insufficient reinforcement expected in these beams.

Y con estos datos tanto de Lopes y Bernardo (2009) y Lopes y Bernardo (2013) se tienen datos para concluir que la ACI 318R-05 es la más acertada para el diseño de estas vigas sometidas a torsión de los códigos estudiados en estos dos artículos.

Estos métodos son bastante eficientes para tener la seguridad acerca de las normas aplicadas y de cómo estas nos pueden ayudar con la predicción del torque último y en base los diferentes aceros que disponemos en la viga, sin embargo volvemos a la modelación y mostramos como de esta manera gracias a la capacidad computacional se tiene una forma más exacta y más confiable de encontrar o predecir la cantidad de articulaciones plásticas producidas por torsión y la localidad de estas como lo veremos en Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023), donde volvemos a ver la superficie de interacción del elemento como parte principal para la modelación.



Figuras 8 Superficie de interacción propuesta en Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023)

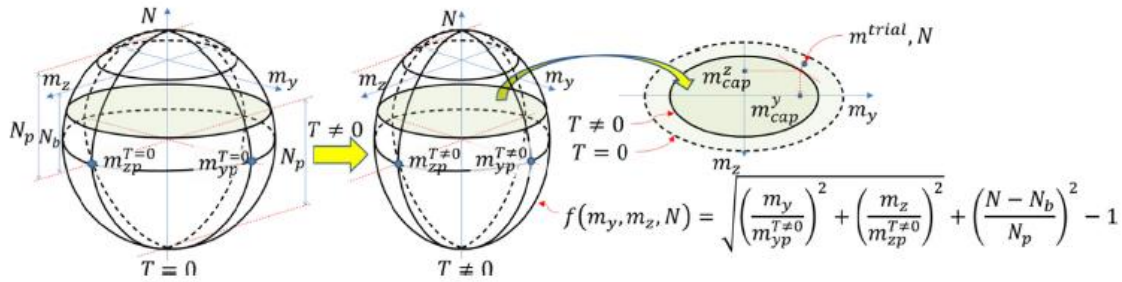
$$\frac{|m_y|}{m_{yp}} + \frac{|m_z|}{m_{zp}} + \frac{|T|}{T_c} = 1$$

$$\left(\frac{m_y}{m_{yp}}\right)^{2.4} + \left(\frac{m_z}{m_{zp}}\right)^{2.4} + \left(\frac{T}{T_c}\right)^{0.4} = 1$$

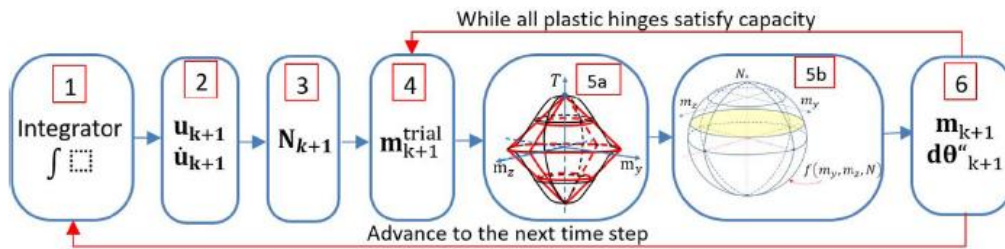
Ecuación 2 tomada de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023)

Sin embargo una diferencia que encontramos con respecto al análisis anterior es que este se enfoca en la dinámica estructural, donde el sismo es el encargo de distribuir las fuerzas torsionales por la estructura, un análisis que tiene más utilidad real, además en este artículo podemos observar cómo nos indican de una forma mucho más enfocada a la modelación las influencias del torque en la superficie de capacidad de un elemento como se muestra en la figura 9 y utiliza la metodología FAM o Force Analogy Method enfocado al 3D método el cual nos indica Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023) que fue empleado por primera vez en el análisis 3D por Munteanu et al. (2022), el cual el mismo nos explica que “A diferencia de los métodos clásicos empleados por software comercial, en los cuales la rigidez es el parámetro variable principal, el FAM se centra en un cambio en el desplazamiento para proporcionar el mismo nivel de fuerza” (Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V.)(2023) por lo que se utiliza siempre la

misma matriz de rigidez. La metodología planteada se puede observar de manera más gráfica en la figura 10

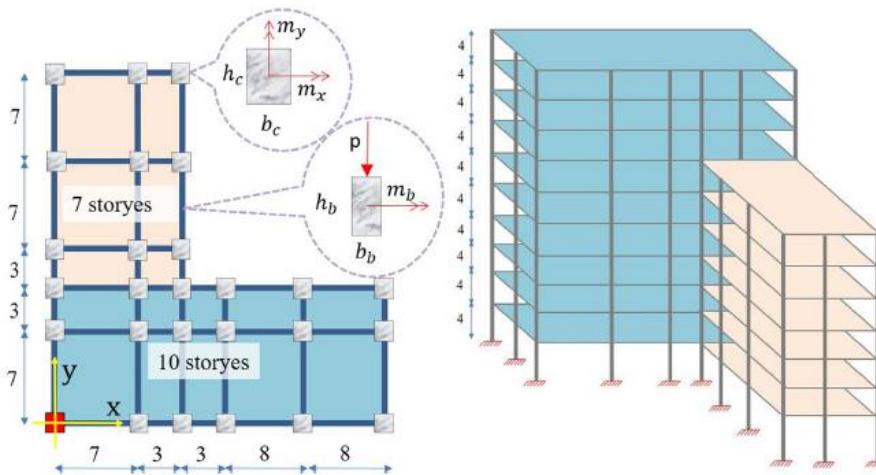


Figuras 9 Efecto del torque en la superficie de capacidad tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023)



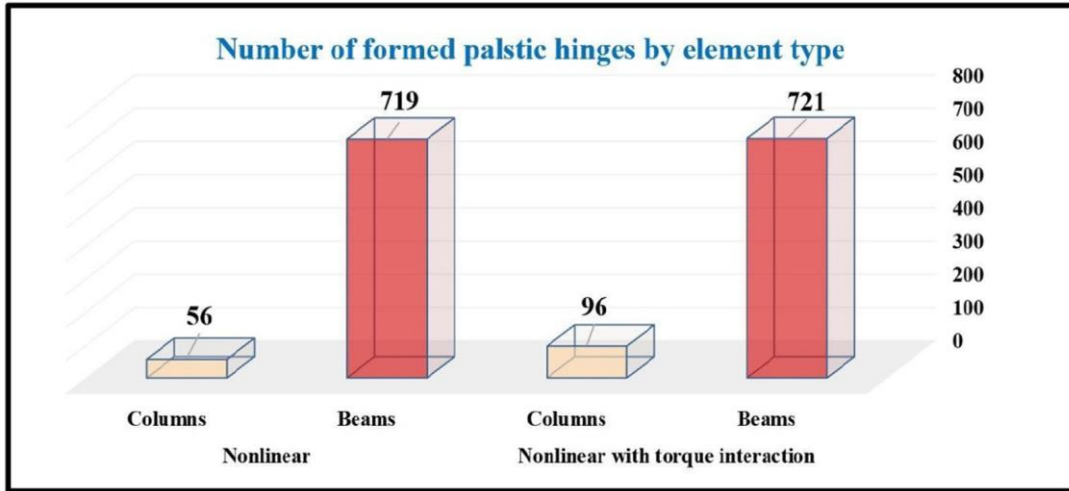
Figuras 10 Formulación F.A.M para rotulas plásticas con interacción de torque tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023)

Con este método que está enfocado en la dinámica estructural plantean una estructura de 10 y 7 plantas conectadas, tal como lo muestra en la figura 11 donde podríamos ver una elevación y una planta de la estructura planteada

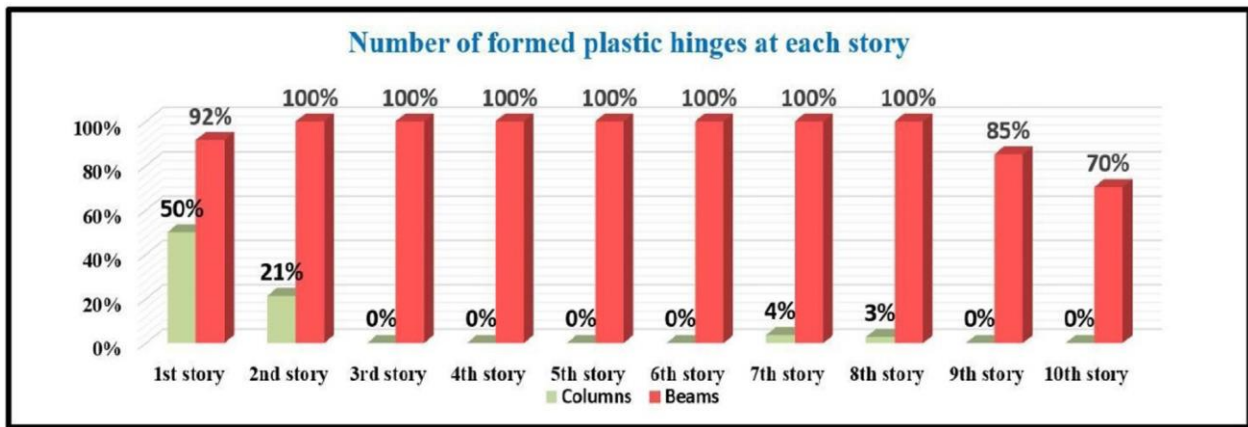


Figuras 11 Estructura a modelar tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023)

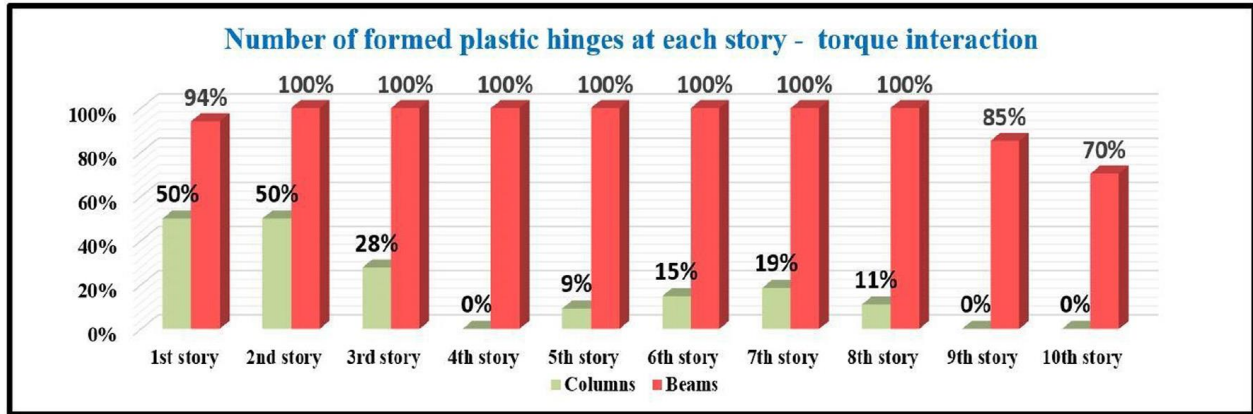
En el artículo se da una descripción más detallada del modelado con los grados de libertad que se tiene y la cantidad de nodos para mayor entendimiento del planteamiento, dentro de los resultados obtenidos en este artículo los que más nos interesan son los que nos presentan las diferencias entre la generación de rotulas plásticas tanto por planta como la estructura en general, resultados que podemos observar en las figuras 12,13 y 14



Figuras 12 Rotulas plásticas formadas tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023)



Figuras 13 Rotulas plásticas en cada una de las plantas sin el efecto del torque tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023)



Figuras 14 Rotulas plásticas en cada una de las plantas con el efecto del torque tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023)

Como era de esperarse el efecto del torque tiene mayor importancia en el análisis de las columnas, ya que en ambos resultados las vigas tienen las rotulas plásticas bastante similares, esto puede ser reducido gracias a un control torsional lo cual lo plantean en el mismo artículo sin embargo se sale del alcance del proyecto.

Hasta el momento el método que más elementos a analizar ha dado es el método planteado por Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023), sin embargo siendo un método tan nuevo y utilizado tan poco se necesitaría tener evidencia experimental que compruebe lo planteado.

De los artículos encontrados el que más nos habla de términos normativos acerca de este problema es S Lopes, R carmo y L Bernardo (2008) el cual nos da una visión del problema basándonos en lo que la norma nos permite como deformaciones máximas y mínimas en estados límites, y como estas plantean la necesidad por lo tanto de un refuerzo mínimo o máximo para abarcar este problema. Tal como podemos ver en la MC90 y la EC2 donde se nos limite un ángulo de deflexión para la torsión el cual adaptan desde un análisis de cortante en estas normas

$$\frac{A_{sw,max}}{s} = \frac{v_{cd}^t}{f_{ywd} \cotg \theta (\cotg \theta + tg \theta)}$$

Ecuación 3 tomada de S Lopes, R carmo y L Bernardo (2008)

Donde  $0.4 \leq \cotg(\theta) \leq 2.5$  para hallar la cantidad de acero longitudinal y transversal o comparar estos con los estados limites presentados, estos análisis son coincidentes con la norma ACI del 2008.



### 3 Metodología

El actual proyecto se plantea de una forma muy analítica, en el cual nos enfocaremos en leer la bibliografía que se encuentra publicada sobre las articulaciones plásticas, se identificarán las diferentes formas en las que los distintos autores han utilizado para predecir tanto la creación como la geometría de las articulaciones plásticas producidas, comparando estas predicciones con experimentos realizados en situaciones controladas, realizando curvas de  $T-\Theta$  para vigas experimentales, comparando diferentes normas las cuales nos realizan una predicción del Torque último de la articulación y realizando esta comparativa con la modelación.

Los pasos necesarios para lograr cumplir con los objetivos planteados son:

1. Búsqueda y recopilación bibliográfica utilizando el sistema de bibliotecas de la UDEA junto con Scopus, que esté relacionada con las articulaciones plásticas producidas por momento torsional y se busca una bibliografía actual, pensando en su mayoría en los últimos 20 años.
2. Interpretación de la bibliografía relacionada con las articulaciones plásticas teniendo presente el enfoque del concreto reforzado, enfocándose en dos metodologías de actuación, siendo estas la modelación y metodologías de diseño normativo.
3. Resumen de la bibliografía encontrada enfocándose en el análisis matemático realizado, y/o informático, realizando comparativas entre normativas, y entre diferentes sistemas de modelación, viendo su evolución en el tiempo.
4. Realizar una comparativa entre los diferentes análisis para concluir acerca de sus diferentes métodos de análisis y la funcionalidad de cada uno, realizando para cada uno de los casos, como lo son modelación y diseño normativo.

## 4 Resultados

La bibliografía acerca de las articulaciones plásticas es amplia cuando se refiere a fuerzas de flexión, o si hablamos de materiales más dúctiles como lo podría ser el acero, sin embargo, en el concreto reforzado debido a que del refuerzo también depende su ductilidad y que en la falla a torsión no existe para todos los elementos una falla dúctil, no hay mucha bibliografía que nos explique una manera de calcular el torsor crítico por medio del ángulo de la rótula, por lo que lo más acertado a la hora de realizar estos análisis actualmente es la modelación estructural, sin embargo para conocer el torsor crítico del elemento es necesario referirse a las normas conocidas, como vemos en Lopes Y Bernardo (2009) y en Lopes Y Bernardo (2013) estas normas no son lo suficientemente precisas a la hora de predecir el torsor crítico, aun estando en situaciones controladas de laboratorio, sin embargo se realiza la misma recomendación que Lopes y Bernardo (2013) de si es necesario utilizar la ACI 318R-05 como norma para predecir el torsor crítico y el ángulo de deformación máximo que admisible por la estructura, en lo referente a la modelación, en general se obtienen buenos resultados sobre todo aplicados al control estructural, pudiendo aplicar diferentes métodos de disipación energética, por lo que este es su principal punto de aplicación, por lo que se utilizaran ambas visiones para el análisis realizado.

La tabla 5 nos muestra la comparativa del torsor crítico que podemos predecir utilizando los métodos planteados por la normativa para hallar el torsor crítico el más acertado para los diferentes refuerzos en vigas es la ACI 318R-05

*Tabla 5 resumen comparativas del torsor crítico normativo y el torsor crítico experimental. Tomado de Lopes y Bernardo (2009)*

Beam	$T_{r,exp}$ (kN m)	ACI 318R-05 [7]		EC 2 [10]		CAN3-A23.3-04 [11]	
		$T_{r,calc}$ (kN m)	$\frac{T_{r,exp}}{T_{r,calc}}$	$T_{r,calc}$ (kN m)	$\frac{T_{r,exp}}{T_{r,calc}}$	$T_{r,calc}$ (kN m)	$\frac{T_{r,exp}}{T_{r,calc}}$
A1	150.8	101.6	1.48	106.7	1.41	109.7	1.38
A2	254.8	212.2	1.20	221.3	1.15	234.6	1.08
A3	299.9	284.9	1.05	292.6	1.03	324.2	0.93
A4	368.2	298.1 <sup>a</sup>	1.24	411.0	0.90	415.8	0.89
A5	412.2	302.9 <sup>a</sup>	1.36	507.0	0.81	499.9	0.83
B1	116.0	78.3	1.48	81.4	1.42	82.2	1.41
B2	273.3	223.3	1.22	232.7	1.17	249.1	1.10
B3	355.9	383.6 <sup>a</sup>	0.93	405.2	0.88	437.6	0.81
B4	437.9	373.3 <sup>a</sup>	1.17	523.1	0.84	535.2	0.82
B5	456.2	343.1 <sup>a</sup>	1.33	645.1	0.71	641.6	0.71
C1	151.8	102.5	1.48	107.1	1.42	110.9	1.37
C2	266.1	211.0	1.26	225.6	1.18	232.9	1.14
C3	351.2	386.5	0.91	399.3	0.88	418.4	0.84
C4	450.3	438.2 <sup>a</sup>	1.03	508.9	0.89	533.6	0.84
C5	467.3	440.8 <sup>a</sup>	1.06	593.6	0.79	647.2	0.72
C6	521.3	395.4 <sup>a</sup>	1.32	835.5	0.62	870.9	0.60

<sup>a</sup> Brittle failure due to insufficient concrete compressive strength expected in these beams.



En base a esto se realiza la misma comparativa, pero basándonos en el mínimo y máximo de refuerzo que nos plantea las normas y se compara con el refuerzo dispuesto en el experimento como se muestra en la tabla 6

Tabla 6 comparativa refuerzos máximos y mínimos de las diferentes normativas tomado de Lopes y Bernardo (2013)

$A_{s,min}$ $A_{s,swi,min}$ (MC 90)		ACI 318R-89 [10]		ACI 318R-05 [11]		MC 90 [13]		EC 2 [14]		CAN3-A23.3-04 [15]	
$A_{s,max}$ $A_{s,swi,max}$ (MC 90)		$25 \frac{b_w s}{f_y}$		$0.375 \sqrt{f_c} \frac{b_w s}{f_y} \geq 25 b_w s / f_{yp}$		$\rho_{w,min} s b_w s e n \alpha$		$\rho_{w,min} s b_w s e n \alpha$		$0.06 \sqrt{f_c} \frac{b_w s}{f_y}$	
		$\frac{4 f_c s}{9 \alpha s_i \gamma_i f_y}$		$\frac{8 \sqrt{f_c} A_{s,i}}{\rho_{w,i} f_y \cot \theta_i}$		$\frac{f_{exp,i} s \pi^2 \theta_i s}{f_y s}$		$\frac{v f_c s \sin \theta \cos \theta}{f_{y,swi} \cot \theta}$		$\frac{0.25 f_c 1.7 A_{s,i} s}{2 \rho_{w,i} A_{s,i} f_y \cot \theta_i}$	
Beam	$A_{s,r}$ cm <sup>2</sup> /m	$A_{s,min}$	$A_{s,max}$	$A_{s,min}$	$A_{s,max}$	$A_{s,min}$	$A_{s,max}$	$A_{s,min}$	$A_{s,max}$	$A_{s,min}$	$A_{s,max}$
A1	3.11	1.62	14.02	2.04	9.53	1.37	15.04	0.86	17.52	0.75	16.80
A2	6.25	1.48	14.31	1.84	8.72	1.49	14.99	0.84	17.53	0.80	16.34
A3	8.32	1.44	13.87	1.77	8.68	1.53	15.54	0.83	17.52	0.81	15.84
A4	11.29	1.44	15.21	1.93	8.88 <sup>a</sup>	1.56	15.98	0.86	18.79	0.86	17.99
A5	14.13	1.54	15.61	2.02	9.02 <sup>a</sup>	1.56	16.25	0.90	18.56	0.84	18.50
B1	2.33	1.62	18.14	2.55 <sup>b</sup>	11.59	2.03	21.42	1.11	23.78	1.00	27.07
B2	6.67	1.48	17.57	2.24	10.66	1.94	20.33	1.04	23.59	1.02	24.38
B3	11.29	1.44	18.04	2.30	11.00 <sup>b</sup>	2.18	20.92	1.08	24.61	1.09	26.71
B4	15.07	1.54	20.40	2.48	11.18 <sup>a</sup>	2.25	23.05	1.19	26.17	1.14	30.00
B5	18.83	1.54	21.81	2.42	10.60 <sup>a</sup>	2.33	23.81	1.21	26.40	1.16	29.84
C1	3.11	1.62	18.86	2.81	13.23	2.23	22.36	1.17	26.03	1.06	31.43
C2	6.25	1.48	19.10	2.61	12.27	2.31	22.05	1.12	25.77	1.12	30.79
C3	10.53	1.44	18.04	2.50	11.74	2.36	20.68	1.10	24.42	1.12	29.56
C4	14.13	1.54	18.98	2.65	12.42 <sup>a</sup>	2.37	22.52	1.17	25.71	1.13	31.48
C5	17.38	1.54	19.93	2.73	13.30 <sup>a</sup>	2.49	23.80	1.21	28.00	1.17	33.59
C6	22.60	1.43	18.40 <sup>a</sup>	2.41	11.34 <sup>a</sup>	2.28	22.76	1.07	24.73	1.11	28.24

<sup>a</sup> Brittle failure due to insufficient concrete compressive strength expected in these beams.

<sup>b</sup> Failure due to insufficient reinforcement expected in these beams.

Con esto podemos hacer una comparación en base a el  $T_{crExp}/T_{crCalc}$  y si el acero dispuesto se encuentra entre los mínimos y máximos permitidos por las normas a comparar

Tabla 7 Comparación entre  $T_{crexp}/T_{crCalc}$  y cuantías de normativas Fuente: elaboración propia

	ACI 318R-05 ( $T_{crexp}/T_{crCalc}$ )	esta entre el Asmin y Asmax	EC2 ( $T_{crexp}/T_{crCalc}$ )	esta entre el Asmin y Asmax	CAN3-A23.3-04 ( $T_{crexp}/T_{crCalc}$ )	esta entre el Asmin y Asmax
A1	1.48	si	1.41	si	1.38	si
A2	1.2	si	1.15	si	1.08	si
A3	1.05	si	1.03	si	0.93	si
A4	1.24	mayor	0.9	si	0.89	si
A5	1.36	mayor	0.81	si	0.83	si
B1	1.48	menor	1.42	si	1.41	si
B2	1.22	si	1.17	si	1.1	si
B3	0.93	mayor	0.88	si	0.81	si
B4	1.17	mayor	0.84	si	0.82	si
B5	1.33	mayor	0.71	si	0.71	si
C1	1.48	si	1.42	si	1.37	si
C2	1.26	si	1.18	si	1.14	si
C3	0.91	si	0.88	si	0.84	si
C4	1.03	mayor	0.89	si	0.84	si
C5	1.06	mayor	0.79	si	0.72	si
C6	1.32	mayor	0.62	si	0.6	si

con lo que ya se puede ver con mayor claridad que la norma ACI 318R-05 es la que en la materia de los casos maneja un buen factor de seguridad a la hora del torsor critico que puede llegar a aguantar el elemento, y además de eso limita de manera correcta los aceros de refuerzo para poder llegar a una fluencia del acero y evitar la falla frágil. Por lo que se sigue la recomendación planteada por los autores Sergio Lopez y Bernardo Luis.

Cuando ya necesitamos un enfoque de control estructural, y poder evaluar alternativas de disipación de energía la mejor forma de realizar el análisis es por el campo de la modelación, y en nuestro caso tenemos dos alternativas, las presentadas por en Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023) y Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004), en ambos casos podemos observar nos matrices de rigidez para la estructura bastante parecidas.

Tal como vemos en las ecuaciones 4 y 5, donde solo se manejan diferentes exponentes de las mismas.

Ecuación 4 matriz de interacción tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004),

$$\left(\frac{m_y}{m_{yp}}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{m_{zp}}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_{u0}}\right) = 1$$

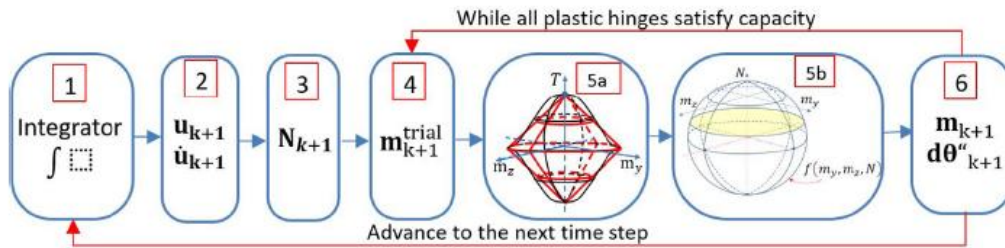
or  $f(p_u, m_y, m_z, T, m_{z0}, m_{y0}, T_{u0}, a_i, b_i) = 1$

Ecuación 5 matriz de interacción tomado de Munteanu, R., Enache, R., Baci, C., & Calofir, V. (2023)

$$\frac{|m_y|}{m_{yp}} + \frac{|m_z|}{m_{zp}} + \frac{|T|}{T_c} = 1$$

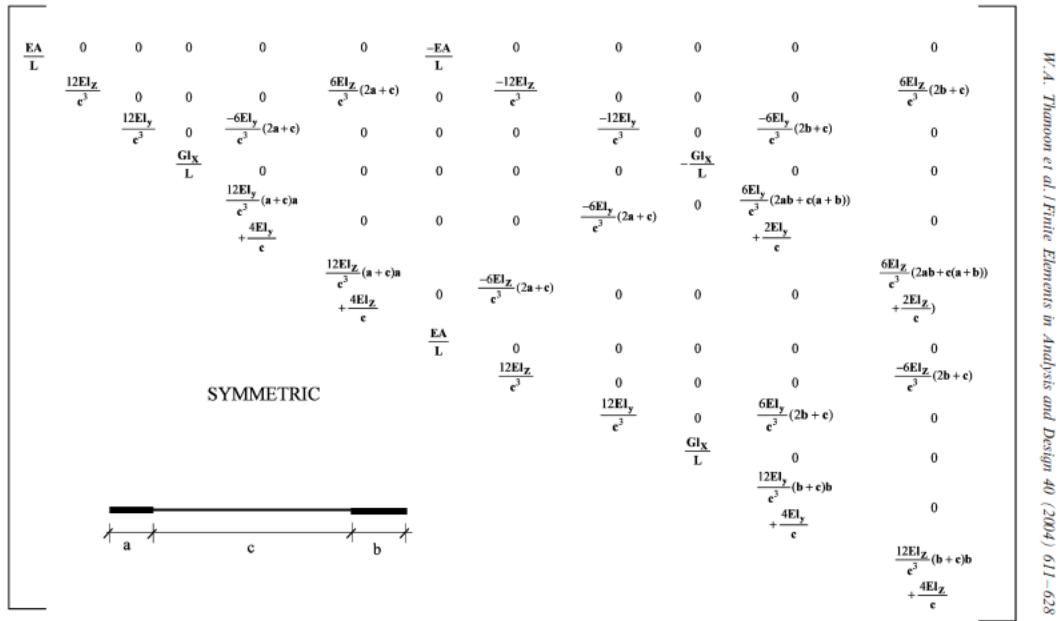
$$\left(\frac{m_y}{m_{yp}}\right)^{2.4} + \left(\frac{m_z}{m_{zp}}\right)^{2.4} + \left(\frac{T}{T_c}\right)^{0.4} = 1$$

La principal diferencia de estos métodos son la aplicación de la matriz de rigidez donde en Munteanu, R., Enache, R., Baci, C., & Calofir, V. (2023) se plantea una matriz de rigidez constante y un método bastante innovador conocido como FAM, donde la secuencia de programación planteada por esta misma esta basada en la figura 15



Figuras 15 Formulación F.A.M para rotulas plásticas con interacción de torque tomado de Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baci, C., & Calofir, V. (2023)

Y la matriz de rigidez para un análisis mas convencional donde esta es la base de la programación y va variando conforme se le aplican fuerzas a la estructura y su inercia cambia con su deformación se puede observar en la figura 16



Figuras 16 Matriz de rigidez para una columna con restricciones en ambos extremos a y b tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004)

La cual fue calculada utilizando la ecuación 6

Ecuación 6 matriz de rigidez

$$k_{rs} = \int_0^a EI\Psi_r(x)\Psi_s(x) dx + \int_0^c EI\Psi_r(x)\Psi_s(x) dx + \int_0^b EI\Psi_r(x)\Psi_s(x) dx$$

donde EI es la rigidez flexural del elemento y  $\Psi_r(x)$  y  $\Psi_s(x)$  son funciones específicas dependientes de los grados de libertad del elemento a analizar, grados de libertad que se simplifican en las tablas 8 y 9

Tabla 8 diferentes grados de libertad tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004)

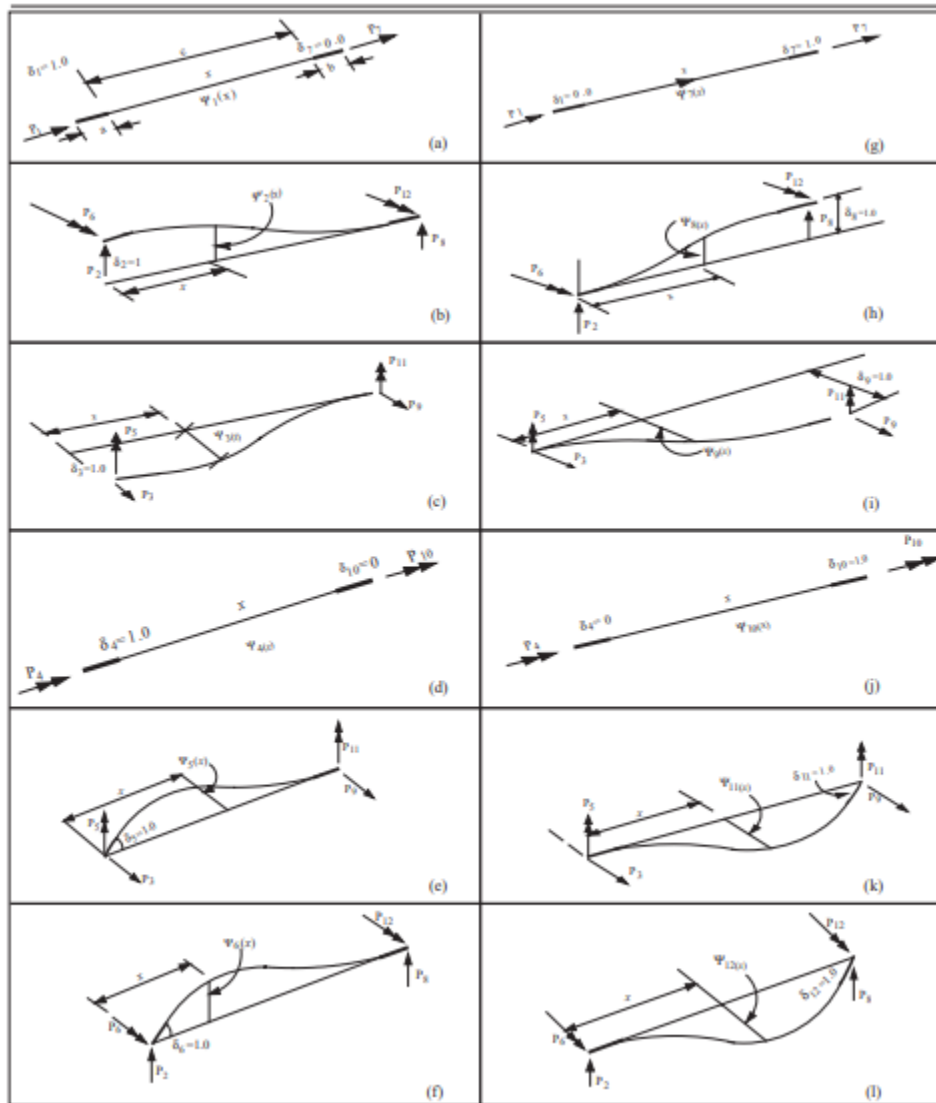
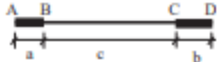


Tabla 9 diferentes funciones de forma para vigas-columnas teniendo finales rígidos en a y b tomado de Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004)

Different shape functions for beam-column element having two rigid ends a and b

Degree of freedom	Beam segment	Origin	Shape function
$\delta_1$	AD	A	$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$
$\delta_2$	AB	A	$\psi_2(x) = 1$
	BC	B	$\psi_2(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{c}\right)^3$
	CD	C	$\psi_2(x) = 0$
$\delta_3$	AB	A	$\psi_3(x) = 1$
	BC	B	$\psi_3(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{c}\right)^3$
	CD	C	$\psi_3(x) = 0$
$\delta_4$	AD	A	$\psi_4(x) = 1 - \frac{x}{L}$
$\delta_5$	AB	A	$\psi_5(x) = x$
	BC	B	$\psi_5(x) = -a\left[1 - 3\left(\frac{x}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{c}\right)^3\right] - x\left(1 - \frac{x}{c}\right)^2$
	CD	C	$\psi_5(x) = 0$
$\delta_6$	AB	A	$\psi_6(x) = x$
	BC	B	$\psi_6(x) = a\left[1 - 3\left(\frac{x}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{c}\right)^3\right] + x\left(1 - \frac{x}{c}\right)^2$
	CD	C	$\psi_6(x) = 0$
$\delta_7$	AD	A	$\psi_7(x) = \frac{x}{L}$
$\delta_8$	AB	A	$\psi_8(x) = 0$
	BC	B	$\psi_8(x) = 3\left(\frac{x}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{c}\right)^3$
	CD	C	$\psi_8(x) = 1$
$\delta_9$	AB	A	$\psi_9(x) = 0$
	BC	B	$\psi_9(x) = 3\left(\frac{x}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{c}\right)^3$
	CD	C	$\psi_9(x) = 0$
$\delta_{10}$	AD	A	$\psi_{10}(x) = \frac{x}{L}$
$\delta_{11}$	AB	A	$\psi_{11}(x) = 0$
	BC	B	$\psi_{11}(x) = -b\left(2\left(\frac{x}{c}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{c}\right)^2\right) + \frac{x^2}{c}\left(1 - \frac{x}{c}\right)$
	CD	C	$\psi_{11}(x) = -(x - b)$
$\delta_{12}$	AB	A	$\psi_{12}(x) = 0$
	BC	B	$\psi_{12}(x) = b\left(2\left(\frac{x}{c}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{c}\right)^2\right) + \frac{x^2}{c}\left(\frac{x}{c} - 1\right)$
	CD	C	$\psi_{12}(x) = (x - b)$

Notes: 

Como podemos ver los autores manejan diferentes formas de modelación para analizar las rotulas plásticas de la estructura, sin embargo con el análisis realizado por Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004) los resultados van encaminados al ángulo máximo alcanzado, y se comparan entre solo flexión y flexión con torsión, y los resultados presentados por en Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023) está enfocado en ver la cantidad de rotulas producidas y soportadas por la estructura, por lo que desde este proyecto se recomienda utilizar este segundo para realizar funciones de control a la estructura, y el primero para comprobar cálculos realizados para diferentes tipos de elementos, sobre todo los planteados como restricciones en vigas y columnas en ambos finales.

Los autores con mayor cantidad de información sobre torsor crítico como pudimos observar son Sergio Lopez y Bernardo Luis, los cuales llevan varios artículos dedicados al tema y con ellos bastante información útil si lo que se necesita es realizar una estimación desde diseño del torsor crítico de un elemento de concreto reforzado, sin embargo, acerca de la modelación se pueden encontrar varios artículos como los mencionados en este trabajo, donde la mayoría utiliza la matriz de rigidez y la superficie de capacidad de la estructura/elemento para predecir la ubicación y cantidad de rotulas plásticas producidas.

## 5 Conclusiones

Las formas matemáticas actuales para predecir las articulaciones plásticas tal como vemos en Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023) y Waleed A. Thanoon; D.K. Paul; M.S. Jaafar; D.N. Trikha (2004) , unidas con la modelación por medio de Matlab y otros programas pueden llegar a ser bastante acertadas, y dar con bastante precisión la información solicitada, además de servir para aplicar métodos de control estructurales, sin embargo si se necesita información sobre el torsor crítico de un elemento de concreto reforzado, la información actual en las normas de construcción no es la más óptima para la predicción de articulaciones plásticas por momento torsional ya que la predicción realizada por estas no es la más precisa, sin embargo si se necesita esta información se recomienda realizar los cálculos con la norma ACI 318R-05.

Las nuevas tecnologías como la FAM aplicada al 3D por sus siglas en ingles de método de analogía de fuerza, el cual consiste en trabajar con una matriz de rigidez constante y realizar un cambio en el desplazamiento para proporcional el mismo nivel de fuerza, puede llegar a ser un método de análisis fuerte en el futuro debido a que sus predicciones son bastante consistentes con lo esperado de manera estructural.



### Referencias

- Bae, S. W., Miseses, A. M., & Bayrak, O. (2005). Inelastic Buckling of Reinforcing Bars. *Journal Of Structural Engineering-asce*, 131(2), 314-321. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(2005\)131:2\(314\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2005)131:2(314))
- Bernardo, L., & Lopes, S. M. (2013). Plastic analysis and twist capacity of high-strength concrete hollow beams under pure torsion. *Engineering Structures*, 49, 190-201. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.10.030>
- CEB-FIP Model Code 1990: Design Code (1.a ed.). (1993). [Comité Euro-International du Béton (CEB) and Fédération Internationale de la Précontrainte (FIP)]. CEB-FIP Model Code 1990: Design Code.
- Eurocode 2: Design of concrete structures - part 1-1: General rules and rules for buildings (2.a ed.). (2004). [Brussels, Belgium: CEN (European Committee for Standardization)]. European Committee for Standardization.
- Lopes, S. M., & Bernardo, L. (2009). Twist behavior of high-strength concrete hollow beams—Formation of plastic hinges along the length. *Engineering Structures*, 31(1), 138-149. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.08.003>
- Hibbeler, R. C. (2016). "Mecánica para Ingenieros: Estática." Pearson
- Iacob Munteanu, R., Enache, R., Baciú, C., & Calofir, V. (2023). A new perspective into torsional inelastic response of actively controlled irregular multistorey buildings. *Alexandria Engineering Journal*, 71, 691–706. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2023.03.094>
- Lopes, Sérgio & Carmo, Ricardo & Bernardo, Luís. (2008). Plastic Rotation Capacity of Reinforced Concrete Beams.
- Lopes, S. M., & Bernardo, L. (2009). Twist behavior of high-strength concrete hollow beams—

Formation of plastic hinges along the length. *Engineering Structures*, 31(1), 138-149.  
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.08.003>

McIvor, I. K., Anderson, W. J., & Bijak-Żochowski, M. (1977). An experimental study of the large deformation of plastic hinges. *International Journal of Solids and Structures*.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(77\)90090-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(77)90090-7)

Nilson, A. H., Darwin, D., & Dolan, C. W. (2015). "Diseño de Estructuras de Concreto". McGraw-Hill.

Thanoon, W. A., Paul, D. K., Jaafar, M. S., & Trikha, D. N. (2004). Influence of torsion on the inelastic response of three-dimensional R.C. frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40(5-6), 611-628. [https://doi.org/10.1016/s0168-874x\(03\)00099-4](https://doi.org/10.1016/s0168-874x(03)00099-4)