ELIPTICAS—EULERIANAS

Por: Rodrigo Peñaloza Arias
Departamento de Ingeniería Química
Facultad de Ingeniería. Universidad de Antioquia

Con motivo de haberse cumplido en el año de 1983 el segundo centenario del fallecimiento de LEONARDO EULER, me he animado a desempolvar unos viejos manuscritos (18 años), y a organizar unas cuantas ideas para rendirle un pequeño pero justo homenaje a tan insigne matemático. A mi entender, Euler no ha sido bien tratado por la historia, como podemos apreciarlo en los siguientes párrafos tomados de EL DESARROLLO DE LA MATEMATICA de E. T. BELL(1) en los cuales el autor está acusando a EULER cuando afirma que:

"el progreso durante los cuarenta años posteriores a su muerte en 1783 siguiera una dirección errónea. En la introducción a una memoria de 1764, Euler defendía la incorporación de *arcos* elípticos al análisis bajo un pie de igualdad con los logaritmos y los *arcos* circulares. (Obsérvese la palabra en bastardilla). Abandonando los esfuerzos estériles de sus predecesores y contemporáneos para integrar diferenciales elípticas en términos finitos por medio de las funciones entonces conocidas, Euler propuso resueltamente que se reconocieran las integrales elípticas como *primitivas* trascendentes nuevas que debían investigarse por sus propios méritos. Si no es esto lo que quiso significar, procedió en todo su análisis propio como si lo fuera. Tan grande fue el impulso del ingenio algorítmico de Euler que antes de que pudiera darse cuenta de su error inicial había sido arrastrado y había perdido de vista el recodo correcto que no había sabido seguir. Que Euler, entre todos los matemáticos, se extraviara en este tema particular es uno de los misterios de la evolución de las matemáticas que resultan incomprensibles. El maestro que había iniciado la moderna teoría de las *funciones* circulares, no observó la superior oportunidad que su Providencia ponía a su disposición y que, con que le hubiera dedicado sólo una atención casual hubiera parecido a un matemático de su calidad como la cosa más natural del mundo. En lugar de considerar los *arcos* elípticos como las nuevas trascendentes básicas, dotando así a un cálculo integral ya sobrecargado con una nueva superabundancia de fórmulas engorrosas, Euler podría haber seguido fácilmente la dirección que le marcaba la trigonometría. El hecho de que no adoptara las *integrales elípticas* en lugar de sus correspondientes *funciones inversas* como los datos de su problema le condujo a un atolladero de álgebra enmarañada, precisamente como si hubiera intentado desarrollar la trigonometría mediante el uso exclusivo de las funciones circulares inversas –sus "arcos circulares".– $\operatorname{sen}^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, etc. La complejidad mucho mayor de la teoría de los arcos elípticos por comparación con la de los arcos circulares hacía que se atascara más profundamente con cada paso que daba".

"Más sistemático que Euler, y dedicando más tiempo a su trabajo, Legendre redujo su caos de maternal refractario a un conjunto tan coherente como parecía posible. A él se deben las tres formas clásicas de las integrales elípticas a las que puede reducirse cualquier integral elíptica. Las integrales de Legendre no son, por supuesto, las únicas formas académicas posibles, y se han propuesto otras muchas; pero las de Legendre conservan su utilidad. Cuarenta años de labor infatigable por un maestro no podían dejar de producir muchas cosas útiles, aunque no fuera más que por su sugestividad. En particular, los trabajos de Legendre relacionados con la transformación algebráica de las integrales elípticas inspiraron directamente el primer éxito notable de Jacobi".

"Abel revolucionó el tema y al mismo tiempo abrió las compuertas del análisis del siglo XIX, en 1827 con una sencilla observación, "Propongo que se estudien las funciones inversas". En lugar de considerar la integral elíptica.

$$\alpha \equiv \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

como el objeto fundamental de la investigación en la que α se considera como una función $\alpha(x)$ de x, Abel invirtió el problema y consideró x como una función que designó por $\phi(\alpha)$, de α. Esta *inversión* de la integral fue el primer paso esencial que no habían dado los predecesores de Abel. Su "naturalidad", después que se hubo dado, era evidente por la analogía con (x debidamente restringida).

$$\beta \equiv \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x, \ \operatorname{sen} \beta = x."$$

"El primer descubrimiento capital de Abel concerniente a las nuevas funciones fue su doble periodicidad: $\phi(x+p_1) = \phi(x)$, $\phi(x+p_2) = \phi(x)$, en la que p_1, p_2 son constantes cuya razón no es un número real. Por consiguiente, la *función elíptica* $\phi(x)$ es doblemente *periódica*".

"Impresionado por la enorme abundancia de nuevas ideas que penetraron en las matemáticas como una consecuencia directa de la sencilla observación de Abel. Jacobi, algunos años después de la muerte..."

Estos párrafos reflejan claramente la ubicación que la historia ha dado a EULER dentro de ese gran problema que fue el de las integrales elípticas y lo que ello significó para la matemática hasta el advenimiento de la histórica propuesta de Abel (1827). Obviamente que una referencia tan indirecta, como la que presento en la cita anterior, no constituye elemento de juicio confiable para llegar a una correcta interpretación del pensamiento Euleriano; sinembargo, obrando con un poco de lógica y siguiendo, (como lo dice Bell), "la dirección que marca la trigonometría", podríamos aceptar que la sugerencia de Euler significa que es necesario que busquemos unas funciones con propiedades semejantes a las trigonométricas pero que, en lugar de utilizar argumentos circulares debemos hacerlo con arcos elípticos. A este problema planteado de esa manera, podemos darle una solución tan sencilla que se encontraría al alcance de cualquiera de nuestros estudiantes de cálculo diferencial. Es tan extrañamente simple comparado con ese gran problema como fue el de las integrales elípticas, que al conocerla queda la impresión de que, o bien se trata de un sofisma o bien de algo que ya se estudió y se desechó por inútil. Pero de todos modos sorprende que de ello no se tenga alguna referencia, así fuera a mero título de curiosidad matemática. (Al menos en los textos que me ha sido posible consultar). Particularizando para la elipse podemos detallar esa solución de la siguiente manera:

TRANSFORMACION PARAMETRICA

Sean las funciones zeno ϕ y kozeno ϕ, (o bien zen ϕ o koz ϕ), en las que ϕ representa un arco de la elipse:

(I) $x^2 + r^2y^2 = r^2$ y tal que

(II) $d\phi = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2}$

Transformar la ecuación (I) al sistema paramétrico:

$$\begin{array}{l} y = \text{zen}\,\phi \\ x = \text{koz}\,\phi \end{array} \qquad \text{(III)}$$

y encontrar las propiedades de zenϕ y koz ϕ.

Solución

de (I) es fácil deducir que $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{r^2y}{x}$

$$\text{y que } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{r^2y} \qquad \text{(IV)}$$

Además de (II) se obtiene que:

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dx/dy)^2}}$$

que con (III) y (IV) se llega a:

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{dzen\,\phi}{d\phi} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + r^4 (y/x)^2}}$$

$$= \frac{\pm x}{\sqrt{x^2 + r^4 y^2}}$$

o sea que:

$$\frac{dzen\phi}{d\phi} = \frac{\pm koz\,\phi}{\sqrt{koz^2\phi + r^4 zen^2\phi}}$$

operando de manera similar

$$\frac{dkoz\phi}{d\phi} = \frac{\mp r^2 zen\phi}{\sqrt{koz^2\phi + r^4 zen^2\phi}}$$

El radical que aparece en los denominadores de estas dos expresiones es de continua aparición en los muy diversos procesos operatorios que con estas funciones podemos efectuar. Para simplificar estas operaciones se encuentra muy conveniente definir una nueva función, (que por razones de eufonía se denomina *benzeno* ϕ, o ben ϕ), mediante la siguiente expresión:

$$ben\,\phi = + \sqrt{koz^2\phi + r^4 zen^2\phi} = B(\phi)$$

Omitiendo por ahora toda discusión sobre signos de las derivadas, usando la nueva función benϕ y utilizando notación simplificada tendremos que:

$$ben\phi.dzen\phi = +koz\phi d\phi \Rightarrow$$
$$B(\phi)Z'(\phi) = + K(\phi)$$

$$ben\phi.dkoz\phi = -r^2 zen\phi d\phi \Rightarrow$$
$$B(\phi)K'(\phi) = -r^2 Z(\phi)$$

Estas ecuaciones tienen la importante propiedad de que: $(Z'\phi)^2 + (K'\phi)^2 = 1$

También es fácil ver que: $B'(\phi) = e^2 L'(\phi) Z'(\phi)$ (con $e^2 = 1-r^2$)

Las tres funciones fundamentales (zenϕ, kozϕ y benϕ) lo mismo que las funciones de relación (tanϕ, kotϕ, zecϕ y kzcϕ) tienen una interesante interpretación geométrica (muy semejante a la conocida en trigonometría ordinaria) que se incluye al final de este escrito pero sin ninguna discusión.

Para el caso $r=1$ la elipse se convierte en un círculo y las ecuaciones anteriores toman la siguiente forma:

$$ben\phi = + \sqrt{(koz^2\phi + 1.zen^2\phi)} = 1$$

(el benϕ es constante e igual a 1)

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow zen^2\phi + koz^2\phi = 1$$

$$dzen\phi = + koz\phi d\phi$$

$$dkoz\phi = - zen\phi\, d\phi$$

Salvo la peculiar ortografía, cualquiera de nuestros estudiantes reconocería en estas expresiones a las funciones circulares. Es importante observar que para llegar a estos resultados no fue necesario utilizar la fórmula de adición en la trigonometría, ni tampoco tuvimos que definir límites esencialmente nuevos. Podemos pensar que en esta transformación ha ocurrido un *paso trascendente*.

ELIPTICAS EULERIANAS
(o Trigonometría Elíptica)

En un sentido riguroso, las tres funciones que nos acaba de entregar la transformación paramétrica de la elipse son funciones de las variables "ϕ" y "r" (ϕ un arco elíptico y "r" la relación de ejes en esa elipse). Dichas funciones se denominan: zeno(ϕ, r); kozeno (ϕ, r); benzeno (ϕ, r) las que en notación simplificada y subentendiendo la variable "r" quedarían: zenϕ, kozϕ, benϕ (o Zϕ, Kϕ, Bϕ) en base "r".

Estas tres funciones, (que llamaremos fundamentales y que son las que generan esta nueva trigonometría), se encuentran ligadas entre sí por medio de las siguientes leyes:

(I) $\text{koz}^2\phi + r^2\text{zen}^2\phi = r^2$
(Primera ley)

(II) $\text{koz}^2\phi + r^4\text{zen}^2\phi = \text{ben}^2\phi$
(Segunda ley, forma benzénica)
Y poseen las siguientes propiedades:

$$B(\phi)\, Z'(\phi) = +\, \text{koz}\phi$$

$$B(\phi)\, K'(\phi) = -\, r^2\, \text{zen}\phi$$

Fórmulas para la derivación

$$B'(\phi) = +\, e^2\, Z'(\phi)K'(\phi)$$
$$(\text{con } e^2 = 1 - r^2)$$

$(K')^2 + (Z')^2 = 1$ (forma proyectiva de la *segunda ley*).

Aunque ello no ha sido demostrado todavía, seguramente estas funciones son periódicas y también deben existir las fórmulas de adición, conformando así una *"verdadera trigonometría"*. Es a este conjunto de funciones y propiedades al que estamos denominando ELIPTICAS EULERIANAS, o trigonometría elíptica, para distinguirla de las funciones elípticas de ABEL JACOBI, que son bien diferentes.

Existen para las Elípticas Eulerianas dos condiciones extremas a saber: el caso en que r=1, (e=0), como ya se hizo notar, corresponde a las funciones circulares corrientes y cuya importancia es superfluo destacarla. Por el otro lado está el caso en que r=0, (e=1), el cual es aparentemente muy interesante, pero todavía totalmente desconocido. Tal como sucede en la Trigonometría ordinaria, en las Eulerianas también ocurre que las funciones propiamente elípticas se encuentran estrechamente vinculadas con las hiperbólicas a través de una función que denominé "cuasi exponencial"(2), la cual genera ambas "trigonemetrías". Detrás de todo esto se encuentran las funciones "eliptinas e hiperborinas" de lo cual nada se conoce todavía y solamente quedó constancia de su probable existencia en(2) bajo el título de funciones hiperbolípticas (o simplemente hiperlípticas).

Cualquier lector reconocería casi que de inmediato en el argumento ϕ de estas funciones, a la integral de segunda especie. Un poco más elaborado sería llegar al resultado que se anotó en(2) para las integrales de primera especie. Aunque no lo haya logrado, es probable que exista alguna respuesta para las integrales de tercera especie, en términos de las elípticas eulerianas.

Quien haya tenido la oportunidad de operar con estas funciones, al leer a BELL(1) queda con la sensación de que más bien que hablar del "error inicial de EULER", lo que debe afirmarse es que se trata de una genial inspiración que le permitió vislumbrar el tal vez esplendoroso panorama que podría presentar las funciones hiperlípticas. Según la transcripción de BELL la sugerencia de Euler es la siguiente:

"Imprimis autem hic idoneus signandi modus desiderari videtur, cujus ope arcus elliptici aeque commode in calculo exprime queant, ac jam logarithmi et arcus circulares ad insigne Analyseos per idonea signa in calculum sunt introducti"

CONCLUSIONES

Después de 200 años de la muerte de Euler, a más de 150 de la histórica propuesta de Abel y 100 después de que todo ese gran problema elíptico quedó superado y agotado con los trabajos de Weirerstrass, parece anacrónico y fuera de lugar que se estén reviviendo estos temas, justamente cuando las necesidades y los problemas contemporáneos son de muy distinta naturaleza a los de antaño y nuestros matemáticos tienen comprometidos sus esfuerzos en el estudio de otros problemas y técnicas bien diferentes. Sinembargo, bien vale la pena hacer unas cuantas reflexiones y formular otros tantos interrogantes sobre lo que aquí se ha denominado la TRANSFORMACION PARAMETRICA.

Es en extremo curioso que entre lo que se ha logrado consultar, ningún texto trate el tema de la incorporación de los arcos no circulares en el Análi-, sis, así sea para que a renglón seguido se advierta que únicamente se estudiarán los circulares porque todos los demás carecen de importancia, si ese fuere el caso. Es también igualmente extraño que en los tratados de cálculo no se indique la manera como las derivadas de las funciones "seno x y coseno x" pueden hallarse sin tener que recurrir a la introducción de límites nuevos ni tener que apelar al teorema de adición. Cuando se estudian con algún detalle las funciones elípticas y se pretende hacer una comparación entre las elípticas de JACOBI y las EULERIANAS, se encuentra que en ambas aparecen las tres funciones fundamentales y que se encuentran enlazadas entre sí por dos leyes, pero difieren substancialmente porque las de ABEL-JACOBI utilizan la integral de primera especie como el argumento, (variable independiente), para sus funciones, mientras que las Eulerianas utilizan la integral de segunda especie (que es geométricamente más simple, puesto que es un arco elíptico)(2). Seguramente se puede afirmar que la Trigonometría corriente se extiende en dos direcciones: la Abeliana y la Euleriana. Pero en el caso de la Euleriana tal vez lo más apropiado es el de hablar de una "Trigonometría Elíptica" enmarcada dentro de dos situaciones extremas, la de "r=1" y la de "r=0" que ya se comentaron. Sigue siendo inexplicable que los textos no discutan estos hechos aunque enseguida se ignore la Euleriana por alguna razón.

Mediante la Transformación Paramétrica podemos introducir en el Análisis muchos arcos no circulares, o funciones de estos arcos y con las "transformadas" podemos operar de manera análoga a como lo hacemos corrientemente con la Trigonometría y constituye de por sí, una poderosa "máquina" para generar funciones trascendentes. A priori podemos aceptar que no todas las transformaciones posibles revisten algún interés o tienen alguna aplicación, pero no parece muy lógico aceptar a priori que la única transformación importante es la que conduce a las funciones circulares. Esta afirmación requeriría algún análisis. Alguien se ocuparía de ello? Si hay algunas otras transformaciones útiles, cuales son y cómo obtenerlas: Como una mera distracción pero que permite apreciar el poder de la transformación paramétrica, se sugiere imaginar lo que sucedería si en el ejemplo que se ha detallado aquí, se cambia la elipse por la parábola $y^2 = 2px$, o si la definición para ϕ se cambia por:

$$d\phi = \sqrt[3]{(dy)^3 + (dx)^3}$$

En(2) se han presentado los resultados de algunas primeras observaciones sobre transformaciones que parecen de interés; estarían entre otras las parabólicas, las hipocicloidales y las construidas sobre óvalos cuárticos de la forma: $x^4 + r^4 y^4 = r^4$

El resultado de estas transformaciones conduce a la formulación de tres funciones llamadas fundamentales, (excepto degeneraciones como la circular), dos de ellas enlazadas entre sí por la primera ley $F(x,y)=0$ y correlacionadas con la tercera por medio de una segunda ley que es consecuencia de la manera como se haya definido el argumento de las funciones fundamentales. Algunas de las "transformadas" son periódicas y otras además de periódicas, poseen un teorema de adición con lo cual conformarían así una "verdadera trigonometría". Cuántas de estas transformaciones conducen a funciones periódicas con teorema de adición? Podrían ser las cónicas en general? Sería privilegio exclusivo de las hiperlípticas? El teorema de adición de Euler valdría para estas funciones? Qué es lo que realmente significa la transformación paramétrica? y a propósito de todo esto, qué es una trigonometría? Todos estos interrogantes surgen espontáneamente cuando se profundiza un poco sobre estas transformaciones paramétricas. Meditando en todo esto, pienso que continúa teniendo validez la propuesta que hacía en mi conferencia de Bucaramanga durante el noveno Coloquio Nacional de Matemáticas en agosto de 1979.

Decía entonces:

"Bosquejadas estas ideas, así sea en forma muy fragmentaria y superficial, y en el supuesto de que el tema no hubiera sido ya agotado, propongo a los asistentes a este Congreso que la mencionada iniciativa euleriana sea revivida como un homenaje a su memoria en este próximo segundo centenario. Como contribución a esta iniciativa, y solicitando a ustedes me disculpen el atrevimiento, propongo reflexionar sobre los siguientes enunciados que tal vez, podrían ser también los de la TRIGONOMETRIA GENERAL".

"1. Estudiar las condiciones para que la función $F(x,y)=0$ sea representable paramétricamente por el sistema: $y=\text{zen}\phi$ $x=\text{koz}\phi$, en las que $\phi = \text{IE}(s)$, con s=arco de la curva (y) vs (x), y establecer las limitaciones de la función IE(s)".

"2. Construir la "trigonometría" generada por las funciones F y IE precisando las condiciones para que sea "verdadera trigonometría" ".

"Quizás estas ideas, juzgadas y tratadas por otras mentes mejor dispuestas y más ilustradas que la mía, pueden rendir algunos frutos que, eventualmente sirvan de homenaje a ese Gran Maestro que en vida se llamaba LEONARDO EULER".

BIBIOGRAFIA

(1) *The Development of Mathematics by E. T. BELL. McGraw-Hill Book Co.*

(2) *INTEGRALES ALGEBRAICAS Y TRIGONOMETRIA GENERAL (Catálogo de observaciones) por Rodrigo Peñaloza Arias. 1967, 15 pág. mimeógrafo; complemento a unas conferencias dadas por el autor ante la Sociedad Antioqueña de Matemáticos "Lino de Pombo".*