

Ciclos reales de negocios: una nota didáctica

Wilman Arturo Gómez Muñoz

El presente documento es una nota didáctica preparada para el curso de Macroeconomía II y del curso de Dinámica Económica del Departamento de Economía de la Universidad de Antioquia.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS

DEPARTAMENTO DE
ECONOMÍA

Medellín - Colombia

Comité editorial:

Carlos Andrés Vasco Correo M.Sc
Ramon Javier Mesa Callejas



© Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Antioquia. 2021

Jair Albeiro Osorio Agudelo
Decano de Facultad

Ramon Javier Mesa Callejas
Jefe de Departamento de Economía

Carlos Andrés Vasco Correa
Director Revista Lecturas de Economía.

Ciclos reales de negocios: una nota didáctica

Wilman Arturo Gómez Muñoz ¹

Introducción. – I. – El modelo neoclásico de crecimiento. – II. La normalización y estacionarización de la economía. – III. El estado estacionario y la dinámica de la economía hipotética. – IV. Desviaciones y la convergencia al estado estacionario. – V. Una simulación para la economía colombiana. – VI. Los choques tecnológicos. – Referencias.

Resumen

Este documento es una nota didáctica que muestra como el modelo de crecimiento neoclásico conocido como modelo Ramsey-Cass-Koopmans es la base para los modelos RBC y DSGE. Se hace énfasis en detalles técnicos que requieren ser entendidos por el lector para que esta metodología de trabajo sea más asequible a quien quiera aprenderla. Se propone además una calibración y se presentan simulaciones para la economía colombiana.

Palabras clave: RBC, Ramsey, Ciclos, aproximación de funciones.

Abstract

This document is a teaching note that shows how the neoclassical growth model known as the Ramsey-Cass-Koopmans model is the basis for the RBC and DSGE models. Emphasis is placed on technical details that need to be understood by the reader so that this work methodology is more accessible to those who want to learn it. A calibration is also proposed and simulations for the Colombian economy are presented.

Key words: RBC, Ramsey, Cycles, approximation of functions.

Clasificación JEL: E32

¹ Profesor Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Antioquia, Director Grupo de Macroeconomía Aplicada, e-mail: wilman.gomez@udea.edu.co.

Introducción

El presente documento es una nota didáctica acerca de la teoría y metodología de los ciclos reales de negocios. En él se presentan los fundamentos teóricos del modelo de crecimiento neoclásico en conjunción con lo que se conoce como teoría de los ciclos económicos reales.

Las economías crecen sostenidamente a lo largo de períodos de tiempo de acuerdo a un patrón conocido como tendencia de largo plazo. Pero esa trayectoria no es del todo estable, en el sentido de que las economías no están todo el tiempo sobre esa “senda estable”, sino que fluctúan alrededor de ella. Puesto que la teoría básica de los ciclos económicos reales está construida en parte con sobre la teoría del crecimiento económico, el primer elemento a exponer en esta nota es un modelo sencillo de crecimiento neoclásico en tiempo discreto, conocido como del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, que tiene fundamento en el artículo seminal de Ramsey (1928) sobre el ahorro óptimo.

I. El modelo neoclásico de crecimiento

1. Las firmas

La producción de esta economía es llevada a cabo por firmas (o empresas) representativas (iguales) que contratan factores a precios de mercado y que maximizan beneficios sujetos a una restricción tecnológica resumida en su función de producción.

La función de producción de la firma representativa tiene rendimientos marginales decrecientes y rendimientos constantes de escala, es decir, su función de producción es homogénea de grado uno y cumple las condiciones de Inada. Para resumir, es una función de producción neoclásica.

Matemáticamente, todo lo anterior se puede escribir como:

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t Z_t) \quad (1)$$

Siendo:

Y_t : el producto agregado de la economía

K_t : el capital agregado de toda la economía

L_t : la población (supondremos pleno empleo).

Z_t : la efectividad del trabajo

A_t : la cantidad de tecnología de que dispone la economía

Puesto que la función de producción es homogénea de grado uno, podemos escribir el producto por unidad efectiva de trabajo de la siguiente forma:

$$\frac{Y_t}{L_t Z_t} = \frac{A_t F(K_t, L_t Z_t)}{L_t Z_t} = y_t = A_t F\left(\frac{K_t}{L_t Z_t}, 1\right) = A_t f\left(\frac{K_t}{L_t Z_t}\right) = A_t f(k_t) \quad (2)$$

Siendo $k_t = \frac{K_t}{Z_t L_t}$ la razón capital trabajo efectivo o el capital por unidad de trabajo efectivo.

la maximización de beneficios de la firma representativa se puede formalizar como:

$$\max \Pi_t = Y_t - r_t K_t - w_t L_t Z_t - \delta K_t \quad (3)$$

sujeta a : $Y_t = A_t F(K_t, L_t Z_t)$

Entonces, puede mostrarse que las condiciones de primer orden son²:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = 0, \Rightarrow r_t = A_t f'(k_t) - \delta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t Z_t} = 0, \Rightarrow w_t = A_t f(k) - k_t A_t f'(k_t) \quad (5)$$

r_t es la tasa de interés real y w_t es la tasa de salario real.

La consecuencia directa del supuesto de competencia perfecta y de rendimientos constantes de escala de la función de producción es que el producto total de la economía se reparte completamente en la remuneración de los factores productivos³

La economía que estamos modelando tiene la característica de que sólo tiene precios reales es decir las remuneraciones de los factores, y no tiene ningún precio nominal, y puesto que en esta economía el producto se destina para consumir o para ahorrar, el precio de una unidad de producto en el momento “t” en términos de una unidad de consumo en ese mismo momento es uno. Esta es la justificación de que en la función de beneficios no aparece la variable “P” correspondiente al precio del producto.

² Queda bajo el cuidado del estudiante la derivación de estas condiciones de primer orden, puesto que este trabajo ya hubo de ser desarrollado en los cursos básicos de microeconomía del productor.

³ La comprobación se deja al estudiante.

2. Los agentes

Nuestra economía hipotética está poblada de familias representativas conformadas por agentes representativos. Estos agentes representativos tienen vida infinita, son racionales, tomadores de precios, no enfrentan externalidades ni restricciones de crédito, tienen información completa y perfecta, y previsión perfecta. Nuestros agentes representativos son aversos al riesgo, y por tanto prefieren sendas de consumo suaves antes que sendas de consumo bruscas. Los agentes representativos son poseedores de las firmas y ofrecen cada uno, de forma inelástica una unidad de trabajo; por tanto, en cada período, reciben ingresos salariales como remuneración a su trabajo, y rendimientos del capital que han invertido en las empresas.

Los agentes de la familia representativa tienen una función utilidad intertemporal.

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) \frac{L_t}{H} \quad (6)$$

Siendo, H el número constante de familias de la economía y $u(C_t)$ la función de utilidad instantánea. Esta función de utilidad es creciente en el consumo, mientras que la utilidad marginal es decreciente, es decir:

$$\frac{\partial u(C)}{\partial C} = u'(C) > 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u(C)}{\partial C^2} = u''(C) < 0 \quad (8)$$

Tenemos que $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ es el factor de descuento de la utilidad.

$\rho > 0$: tasa subjetiva de descuento, C_t el consumo per cápita en el período t .

La inclusión de ρ en la función de utilidad intertemporal, se debe al hecho de que el agente cuando hace su planeación de consumo valora diferentemente los consumos (y por tanto las utilidades) en cada momento del tiempo. Obsérvese que puesto que $\beta < 1$, los consumos en el futuro lejano recibirán una menor valoración dentro del total de la utilidad intertemporal, mientras que lo contrario ocurre para consumos en períodos de tiempo más cercanos al momento inicial de planeación de los agentes.

Ya que el agente representativo es poseedor del capital que alquila a las firmas y también de su fuerza de trabajo, las tenencias agregadas de activos evolucionan por medio de la acumulación de capital. Esta acumulación se hace por medio del ahorro, y puesto que nuestra

economía está cerrada (no tiene ninguna relación con el resto del mundo), se cumple que el ahorro es igual a la inversión. Por tanto, el stock de capital para el período “t+1” será igual al capital poseído en “t”, más el ahorro efectuado en “t”. Podemos escribir entonces:

$$K_{t+1} = S_t + K_t = Y_t - \tilde{C}_t + K_t \quad (9)$$

$$K_{t+1} = r_t K_t + w_t L_t Z_t - \tilde{C}_t + K_t = (1 + r_t) K_t + w_t L_t Z_t - \tilde{C}_t \quad (10)$$

Siendo

\tilde{C}_t el consumo agregado.

S_t el ahorro agregado.

II. La normalización y estacionarización de la economía

Hasta aquí entonces, el problema del agente representativo consiste en maximizar (6) sujeto a que sus activos evolucionen según (10).

Sin embargo, hasta este momento, la economía está expresada en términos agregados, es decir, producto total, consumo total, etc. Puede notarse que, para períodos de tiempo suficientemente largos, las economías presentan tendencias crecientes en el tiempo (aunque no determinísticas necesariamente), a lo que se le puede llamar crecimiento de largo plazo y según los estudiosos del crecimiento económico éste está determinado por el crecimiento poblacional, el crecimiento tecnológico y el crecimiento de la eficiencia del trabajo.

Recuérdese que la función de producción de las firmas representativas de esta economía hipotética tiene tres argumentos: la tecnología (A_t , de la cual se tratará más adelante), el capital (K_t) y el trabajo efectivo ($L_t Z_t$). De manera que, si la población y la fuerza de trabajo crecen de forma exógena y sostenidamente, también lo harán la producción agregada y, por tanto, el capital agregado de la economía (como se vio en la restricción de presupuesto de los agentes esta variable está determinada endógenamente en el modelo). Todo esto quiere decir que para el largo plazo (cuando $t \rightarrow \infty$) la producción y en general las variables agregadas de la economía tomarán un valor infinito. Resulta entonces claro que no podremos hacer un análisis cuantitativo de nuestra economía hipotética puesto que no tendremos valores conocidos para sus variables principales.

En vista de lo anterior, lo procedente es re-expresar el modelo matemático de nuestra economía hipotética en valores por unidades de trabajo o mejor aún en unidades efectivas de trabajo. Esto se hace dividiendo todas las variables agregadas por la cantidad de trabajo efectivo de la economía en cada momento del tiempo.

Definamos c_t como el consumo por unidad efectiva de trabajo, de manera que $c_t = \frac{\tilde{C}_t}{L_t Z_t}$ o también $C_t = \frac{\tilde{C}_t}{L_t} = c_t Z_t$.

Si suponemos que $L_t = L_0(1+n)^t$ y $Z_t = Z_0(1+g)^t$ siendo n y g las tasas de crecimiento de la población y de la efectividad del trabajo, entonces, las unidades de trabajo efectivo se pueden escribir como:

$L_t Z_t = L_0 Z_0 (1+n)^t (1+g)^t = L_0 Z_0 g_{LZ}^t$, $g_{LZ} = (1+n)(1+g) = g_L g_Z$. Siendo g_L , g_Z y g_{LZ} la tasa de crecimiento bruta la población, de la eficiencia del trabajo y de la fuerza efectiva de trabajo respectivamente.

Con estos elementos, podemos proceder a transformar nuestra economía.

La nueva función de utilidad de la economía para los agentes viene a ser:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t Z_t) \frac{L_t}{H} \quad (11)$$

Como los activos agregados de la economía evolucionan de acuerdo con (10) también tenemos que reexpresarlos en términos de las cantidades de trabajo eficiente:

$$\frac{K_{t+1}}{L_t Z_t} = \frac{r_t K_t + w_t L_t Z_t - \tilde{C}_t + K_t}{L_t Z_t} = \frac{(1+r_t)K_t + w_t L_t Z_t - \tilde{C}_t}{L_t Z_t}$$

$$\frac{K_{t+1}}{Z_t L_t} = r_t k_t + w_t - c_t + k_t = (1+r_t)k_t + w_t - c_t \quad (10.a)$$

Podemos notar que la ecuación (10.a) no está completamente transformada, pues al lado izquierdo no aparece la expresión $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1} Z_{t+1}}$, sin embargo, si recordamos la ley de evolución de las unidades efectivas de trabajo, sabremos que $L_t Z_t = \frac{L_{t+1} Z_{t+1}}{g_{LZ}}$, por tanto, podemos escribir:

$$k_{t+1} = \frac{r_t k_t + w_t - c_t + k_t}{g_{LZ}} = \frac{(1+r_t)k_t + w_t - c_t}{g_{LZ}} \quad (12)$$

la ecuación (12) también se puede escribir como:

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)k_t + i}{g_{LZ}} \quad (13)$$

Siendo δ la tasa de depreciación periódica de cada unidad de capital e i la inversión bruta por unidad de trabajo efectivo. De acuerdo con esto, el nuevo problema es maximizar (11) sujeto a (13).

Supongamos ahora una función de utilidad específica, que recoge las características de una función de utilidad bien comportada⁴.

$$\text{Sea } u(C) = \frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta}, \theta > 0 \quad (14)$$

Esta función se conoce con el nombre de función de utilidad de Aversión Relativa al Riesgo Constante (CRRA por sus siglas en inglés). Esta función recibe su nombre gracias a que recoge la aversión de los agentes y por tanto permite la derivación de una función de ahorro precautelatorio, basándose en un hecho muy importante: los agentes prefieren sendas de consumo suaves y no sendas de consumo con cambios bruscos, es decir, prefieren consumos relativamente uniformes para cada período de tiempo, en vez de períodos con grandes cantidades de consumo y periodos con poca o ninguna cantidad de consumo (véase figura 1).

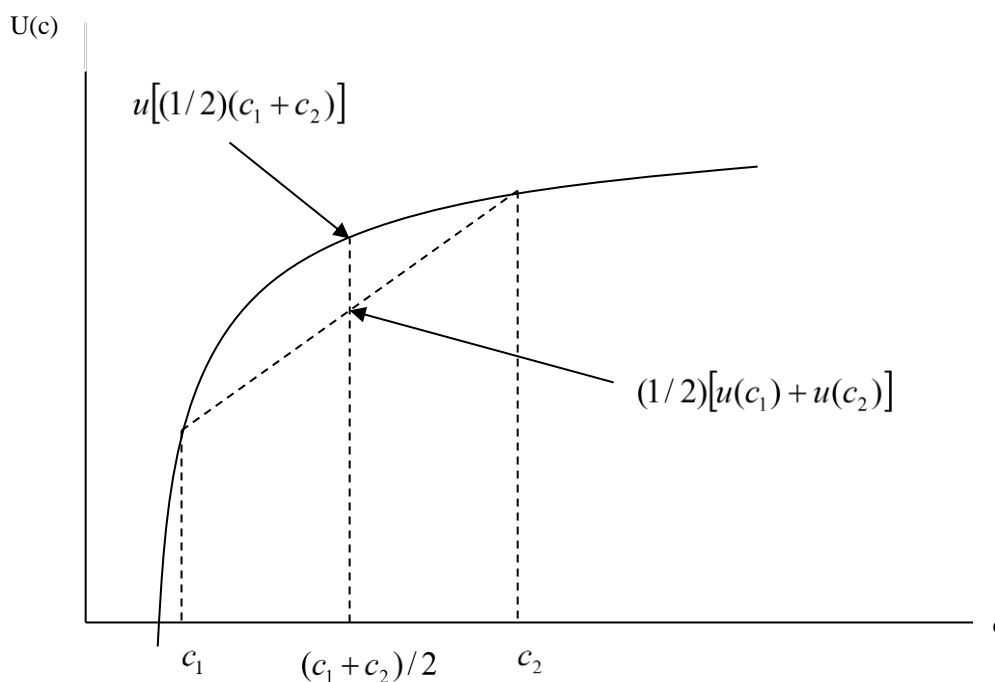
Adicionalmente, se puede mostrar que θ es el inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, por lo que puede decirse que cuanto más alto sea θ , más alto es el deseo de los agentes de alisar o suavizar consumo en el tiempo, o en sentido contrario, cuanto más pequeño sea θ , mayor es la deseabilidad de los agentes de permitir que el consumo presente grandes variaciones entre períodos y por tanto más baja será la caída de la utilidad marginal cuando hay aumentos del consumo⁶. La función de utilidad CRRA tiene dos casos especiales: cuando $\theta \rightarrow 0$ y cuando $\theta \rightarrow 1$. Para el primer caso, la función tiende a hacerse lineal, mientras que, para el segundo, la función tiende a transformarse en una función logarítmica⁷.

⁴ Esta característica es resumida por las ecuaciones (7) y (8).

⁵ El estudiante debe encontrar la primera y segunda derivadas de esta función y comprobar que cumple con las condiciones (7) y (8).

⁶ Esto es fácilmente comprobable y queda como ejercicio. Como estrategia de solución suponga una economía con dos períodos, encuentre la condición de primer orden para el problema de maximización del agente y a partir de allí encuentre la elasticidad de sustitución intertemporal.

⁷ Este último hecho puede comprobarse haciendo uso de la regla de l'Hopital.

Figura 1⁸

Con esta función de utilidad y dadas las transformaciones hechas a nuestra economía hipotética podemos reescribir el problema de la economía de la siguiente forma:

$$\max_{c_t} U = Z_0^{1-\theta} L_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{*t} \frac{(c_t)^{1-\theta}}{1-\theta} H \quad (15)$$

$$\text{s.a. } k_{t+1} = \frac{(1+r_t)k_t + w_t - c_t}{g_{LZ}} \quad (16)$$

Siendo $\beta^* = \beta g_L g_Z^{1-\theta}$

En este punto, debemos detenernos brevemente y reflexionar sobre una cuestión importante: ¿es posible ser infinitamente feliz? Es decir, ¿la ecuación (11) puede tomar un valor infinito?

⁸ Esta gráfica es tomada d Sala-i-Martin (2000).

Este problema de maximización se puede re-expresar de una forma más sencilla, despejando c_t de la ecuación de evolución de activo del agente, y reemplazándolo en la función de utilidad:

$$\max_{c_t} U = Z_0^{1-\theta} L_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{*t} \frac{(k_t(1+r_t) + w_t - g_{LZ}k_{t+1})^{1-\theta}}{1-\theta} \frac{1}{H} \quad (17)$$

si en el primer momento del horizonte de planeación los agentes tienen un nivel inicial de capital k_0 , entonces la decisión de consumo de ese período es equivalente a la decisión de ahorro y por tanto igual a la decisión sobre la cantidad de capital que se tendrá para el período uno (obsérvese nuevamente las ecuaciones 12 y 13). Entonces, para cada momento “t” del horizonte de vida del agente la elección de consumo es equivalente a la elección de capital para el período “t+1”. Es por esto que podemos re-expresar el problema de maximización según la ecuación (17). La condición de primer orden para este problema es⁹:

$$g_{LZ}u'(c_t) = (1+r_t)u'(c_{t+1})\beta^* \quad (18)$$

Y según la forma que elegimos para la función de utilidad, la ecuación (18) queda como

$$g_{LZ}c_t^{-\theta} = (1+r_t)c_{t+1}^{-\theta}\beta^* \quad (19)$$

Esta condición de primer orden, aunque en un contexto intertemporal, tiene la misma interpretación de una condición de primer orden en un contexto estático en el cual un agente cualquiera toma la decisión sobre qué bienes desea consumir; él estará optimizando siempre que la tasa marginal de sustitución (el cociente de utilidades marginales) sea igual a la relación de precios de esos dos bienes¹⁰.

Para el caso de la elección en un problema intertemporal, el precio de una unidad de consumo anticipada (vía endeudamiento o adelanto de consumo) o pospuesta (vía ahorro) es la tasa de interés. Esto es, si una persona pospone su consumo (renuncia al consumo presente) en una cantidad Δc , tal disminución tiene una utilidad marginal de $\beta^{*t}c_t^{-\theta}$ y por tanto tiene asociada una pérdida de utilidad de $\Delta c\beta^{*t}c_t^{-\theta}$. Puesto que el agente está recibiendo una tasa de interés r_t por la cantidad ahorrada Δc luego de que ha pasado un período, y puesto que la fuerza efectiva de trabajo ha crecido en la cantidad g_{LZ} , el agente tiene una cantidad extra de

⁹ Esta condición de primer orden se obtiene fácilmente tomando la primera derivada de la función de utilidad intertemporal con respecto a k_{t+1} .

¹⁰ Hágase una revisión breve de la microeconomía básica del consumidor para recordar este resultado.

recursos para consumir $\frac{(1+r_t)\Delta c}{g_{LZ}}$; la cantidad de consumo del período “t+1” le produce una utilidad marginal de $\frac{\beta^{*t+1}c_{t+1}^{-\theta}}{g_{LZ}}$; por tanto el agente obtiene una ganancia de utilidad de $(1+r_t)\frac{\beta^{*t+1}c_{t+1}^{-\theta}}{g_{LZ}}\Delta c$. Luego, manteniendo todo lo demás constante, cuando el agente está tomando decisiones óptimas, la pérdida de utilidad del período “t” causada por el aplazamiento del consumo en una unidad debe ser compensada exactamente por la utilidad ganada en el próximo período a causa del monto superior de consumo, y traída a valor presente mediante su tasa subjetiva de descuento¹¹.

III. El estado estacionario y la dinámica de la economía hipotética

La ecuación (18) también es conocida como la ecuación de Euler para el consumo y expresa la relación del consumo entre un período, y el siguiente, cuando el agente está tomando decisiones de consumo óptimas y, por tanto, representa la evolución intertemporal del consumo. Esta ecuación puede ser re-expresada de la siguiente forma¹²:

$$c_{t+1} = c_t \left[\frac{(1+r_t)\beta^*}{g_{LZ}} \right]^{1/\theta} \quad (20)$$

Nótese que si en la ecuación anterior dividimos ambos lados por c_t , obtendremos la tasa de crecimiento bruta del consumo por unidad efectiva de trabajo, por lo cual podremos decir que esta tasa de crecimiento bruta puede tomar valores menores que uno, iguales a uno y mayores que uno. Si es menor que uno, significa que el consumo está decreciendo, si es igual a uno el consumo no está cambiando en el tiempo y si es mayor que uno estará creciendo.

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left[\frac{(1+r_t)\beta^*}{g_{LZ}} \right]^{1/\theta} = g_c \quad (21)$$

Denotando por g_c la tasa de crecimiento bruta del consumo por unidad efectiva de trabajo.

Cuando la economía está en estado estacionario, g_c es igual a uno y esto es posible solamente cuando se cumple que

¹¹ Véase Romer (2001) para conocer la versión en tiempo continuo de esta explicación intuitiva.

¹² Esta expresión tiene la forma de una ecuación en primeras diferencias no lineal, y su método de solución no corresponde al nivel de este curso por lo que se deja a la curiosidad del estudiante el estudio de esta.

$$\ln(1) = \ln \left\{ \left[\frac{(1+r_t)\beta^*}{g_{LZ}} \right]^{1/\theta} \right\}$$

$$0 = \frac{1}{\theta} [\ln(1+r) + \ln \beta^* - \ln g_{LZ}]$$

$$-\ln(1+r) = \ln \beta^* - \ln g_{LZ}$$

$$-\ln(1+r) = \ln(\beta g_L g_Z^{1-\theta}) - \ln g_{LZ}$$

$$-\ln(1+r) = \ln \beta + \ln g_L + (1-\theta) \ln g_Z - \ln g_L - \ln g_Z$$

$$-\ln(1+r) = \ln \beta - \theta \ln g_Z$$

$$-\ln(1+r) = \ln(1) - \ln(1+\rho) - \theta \ln(1+g)$$

Y usando el hecho de que $\ln(1+x) \approx x$ para valores muy pequeños de x resulta que

$$r_t = \rho + \theta g \quad (22)$$

o también

$$A_t f'(k) - \delta = \rho + \theta g \quad (23)$$

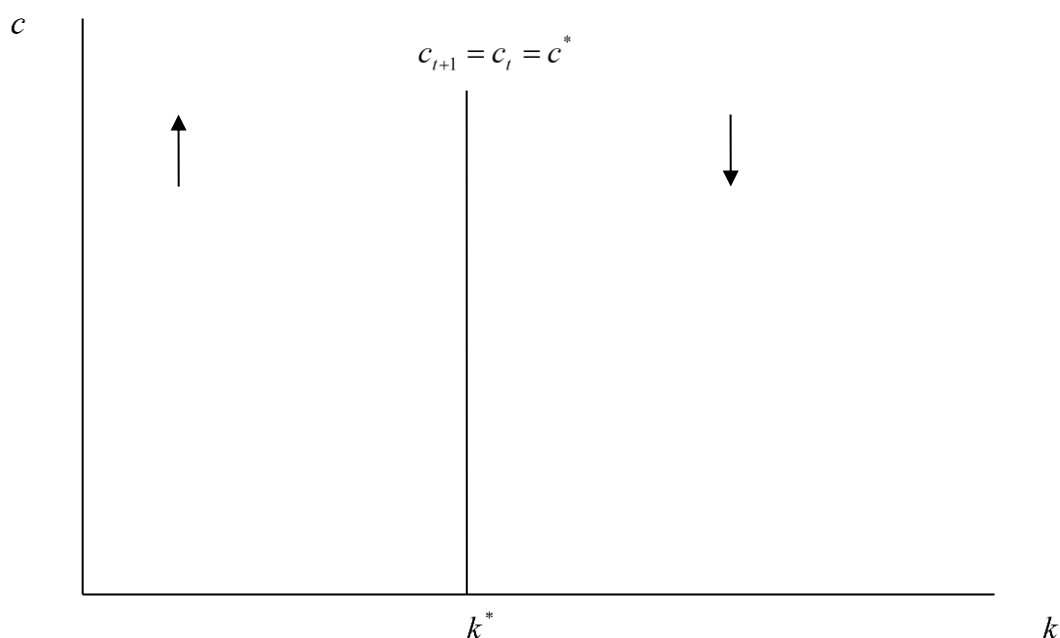
En cualquiera de estas dos últimas ecuaciones podemos ver la clave del movimiento de las variables de esta economía para cualquier situación diferente al largo plazo, o situación conocida como transición. La expresión $\rho + g\theta$ es conocida como tasa subjetiva de descuento aumentada y plantea que cuando la economía se encuentra en su estado estacionario, el agente valora los recursos de igual forma que el mercado, y por tanto él no está dispuesto ni a adelantar ni a aplazar consumo. Por el contrario, cuando la tasa de interés del mercado es superior a la tasa subjetiva de descuento, el agente representativo, dado que es más alto el costo de oportunidad del consumo, deseará ahorrar y por tanto el consumo en los períodos posteriores aumentará; todo lo contrario, ocurre cuando la tasa de interés del mercado es inferior a la tasa subjetiva de descuento del agente.

Siempre que estas discrepancias en estas tasas de valoración de los recursos se presenten, la economía se moverá ya que las decisiones de ahorro, como se dijo generan acumulación o desacumulación de capital y por tanto variaciones consistentes en la producción y en las remuneraciones factoriales.

De la ecuación (23) puede deducirse que puesto que δ, θ, g son constantes, entonces, necesariamente $A_t f'(k_t)$ es un valor constante. Por lo que podemos decir que de esta ecuación podremos obtener un valor para el stock de capital por unidad efectiva de trabajo que por lo tanto también será un valor constante.

En la figura 2 se hace el análisis gráfico de este resultado, lo que se conoce como diagrama de fases, es decir, representamos en una gráfica bidimensional la relación entre las variables más importantes de nuestra economía (capital y consumo) y en ese plano dibujamos las curvas correspondientes a la situación de largo plazo o de estado estacionario de la economía. Cualquier punto por fuera de esas curvas representa una situación de transición o de corto plazo. La línea vertical en esta figura indica que, en el largo plazo, para cualquier nivel de consumo, se tendrá un único nivel de capital por unidad de trabajo, que llamaremos k^* y que puede ser hallado a partir de la ecuación (23). Notamos también que la figura tiene dos pequeñas flechas a cada lado de la curva $\Delta c = 0$. A la izquierda de esta curva, la flecha que señala hacia arriba indica que cuando $k_t < k^*$ el consumo aumenta, puesto que la tasa de interés es superior a la de estado estacionario y por tanto los agentes ahorran y pueden consumir más en el futuro. La flecha de la derecha, que señala hacia abajo, indica todo lo contrario.

Figura 2



Para el caso del movimiento del capital por unidad de trabajo efectivo, la ecuación (13)¹³ nos dice que si i_t es la inversión por unidad de trabajo efectivo, entonces es igual al ahorro en una economía cerrada. Por tanto, podemos deducir que, en el estado estacionario, cuando $k_{t+1} = k_t$ entonces

$$^{13} k_{t+1} = \frac{(1 - \delta)k_t + i}{g_{LZ}}$$

$$y_t^* - c_t^* = i = [(1 + g)(1 + n) - (1 - \delta)]k^* \quad (24)$$

Y por tanto

$$c_t^* = y_t^* - [(1 + g)(1 + n) - (1 - \delta)]k^* \quad (25)$$

Esta ecuación dice que, en el estado estacionario, el consumo es igual al ingreso menos la inversión necesaria para mantener un nivel constante de capital por unidad efectiva de trabajo; a su vez, este nivel de inversión debe ser igual a la cantidad depreciada por el uso del capital y la cantidad necesaria para mantener ocupada a la nueva fuerza efectiva de trabajo de la economía.

La ecuación (25) muestra las cantidades de consumo y producción consistentes con una situación de estado estacionario para el capital. Nótese que esta ecuación está compuesta en su lado derecho de un término variable no-lineal (y_t) y un término variable lineal. Si quisiéramos representar esta ecuación en el plano de dos dimensiones similar al que se usó para el caso de la curva del consumo, entonces debemos preguntarnos cual es la forma de dicha ecuación. El hecho de que se trate de una resta entre una forma lineal y una no-lineal indica que la curva tiene una forma no-lineal y que probablemente por tanto tendrá un punto máximo o un punto mínimo. Si tomamos la primera derivada de c_t con respecto a k_t y la igualamos a cero, se tendrá que:

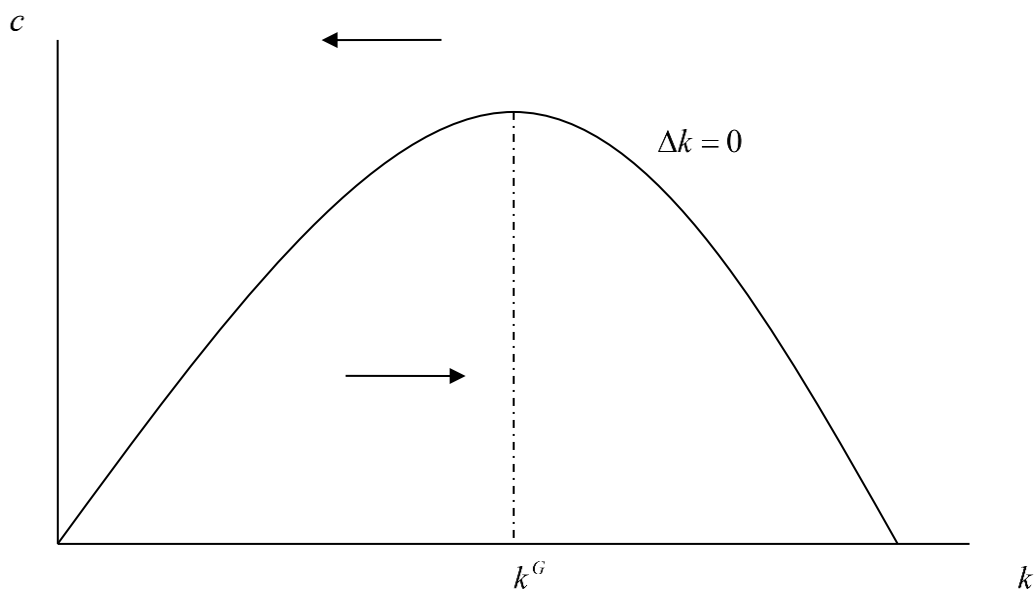
$$\frac{dc_t}{dk_t} = f'(k_t) - [(1 + g)(1 + n) - (1 - \delta)] = 0$$

Siendo, por tanto

$$f'(k_t) = [(1 + g)(1 + n) - (1 - \delta)] \quad (26)$$

Nótese que el lado derecho de esta ecuación es una constante y por tanto su lado izquierdo también lo es, y puesto que la función de producción es cóncava, entonces podremos decir que el valor de k_t para el cual se cumple esta igualdad es un máximo. Por tanto, podemos representar esta ecuación como una línea curva que tiene origen en cero, un punto máximo y una nueva intercepción con el eje correspondiente a la variable k_t (Figura 3). Si la economía está teniendo niveles de consumo superiores a los ubicados por encima de esta línea estará desacumulando capital por lo cual la tasa de crecimiento bruta del capital será menor que uno lo cual señalamos con una flecha que apunta a la izquierda. Por el contrario, cuando la economía está teniendo niveles de consumo por debajo de los niveles ubicados sobre la línea, está experimentando una acumulación de recursos superior a la necesaria para reponer la depreciación y mantener ocupada a la nueva fuerza efectiva de trabajo; por tanto, el capital aumenta, por lo cual aparece una flecha horizontal que apunta hacia la derecha.

Figura 3



Al nivel de capital de estado estacionario que garantiza el cumplimiento de la ecuación (26) se le conoce en la literatura del crecimiento económico como regla dorada del capital, es decir, el nivel de capital por unidad efectiva de trabajo que la economía debe acumular para lograr el máximo nivel de consumo. Obsérvese que para valores relativamente pequeños de n y g la ecuación (26) se puede re-escribir como:

$$f'(k) = g + n + \delta \quad (27)$$

De la ecuación (27), dada una forma específica para la función de producción, podremos conocer el valor k^G .

¿Puede ser el capital de la regla de oro igual al capital de estado estacionario que garantiza que el consumo se mantenga en su nivel del estado estacionario? La respuesta a este interrogante puede ser encontrada con ayuda de la condición de convergencia o de acotamiento para la utilidad intertemporal del agente representativo:

Imponiendo que

$$\beta^* = \beta g_L g_Z^{1-\theta} < 1$$

$$\text{Tendremos que } -\rho + n + (1-\theta)g < 0 \quad (28)$$

Responder la pregunta de si k^G puede ser igual a k^* es equivalente a responder si sus productos marginales pueden llegar a ser iguales, si así ocurriera, su diferencia por tanto sería cero, por lo que podemos escribir lo siguiente:

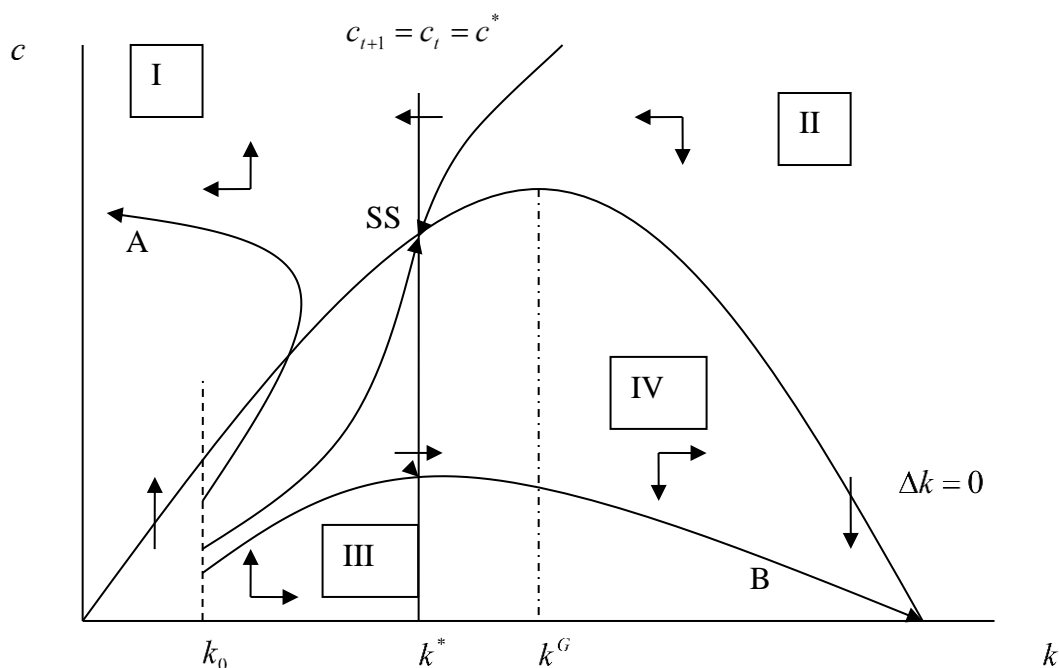
$$A_t f'(k^G) - A_t f'(k^*) = n + g + \delta - (\rho + \theta g + \delta)$$

$$A_t f'(k^G) - A_t f'(k^*) = -\rho + n + (1 - \theta)g \quad (29)$$

Pero si el lado derecho de (29) fuera igual o mayor a cero sería violada la condición de convergencia expresada en (28), por tanto, el producto marginal de k^G es menor que el de k^* , lo que a su vez indica que $k^G > k^*$ (la figura 4 muestra este hecho).

Hasta aquí hemos visto que nuestra economía tiene un estado estacionario, falta saber si se trata de un estado estacionario único y estable. La figura 4 representa el diagrama de fases de toda la economía, es decir muestra conjuntamente la dinámica del consumo y del capital, puesto que son las variables más importantes de la economía al ser estas las que determinan el movimiento de todas las demás. El diagrama de fases de la figura cuatro está dividido en cuatro regiones. Las flechas de la región I muestran que, para cualquier punto ubicado allí, el capital estará decreciendo mientras que el consumo estará aumentando, hasta el punto en el cual se ha desacumulado tanto que ya no hay capital para producir y por tanto no habrá ingreso para consumir, violándose entonces el supuesto de sendas de consumo suaves. En virtud de esto, este tipo de trayectorias son excluidas. En la cuarta región las flechas indican que los puntos ubicados allí conducen a una situación en la cual los agentes habrán acumulado una gran cantidad de capital, pero no estarán consumiendo nada, o cual también contradice los supuestos, pues al no consumir, los agentes no estarán maximizando su utilidad intertemporal, y por tanto las trayectorias que por allí transitan son también excluidas del análisis.

Figura 4



Finalmente nos quedan solo dos regiones en las cuales se puede encontrar una y solo una trayectoria estable, ellas son las regiones III y II. Nótese que en la región III las flechas indican que existe un punto (niveles iniciales del capital y el consumo) a partir del cual el consumo y el capital crecen simultáneamente y se dirigen hacia el punto “SS”. Por su parte en la región II, existe también un punto desde el cual el consumo y el capital decrecen simultáneamente y se dirigen hacia el punto “SS”.

IV. Desviaciones y la convergencia al estado estacionario

Las ecuaciones básicas del modelo¹⁴ conforman un sistema de ecuaciones simultáneas en primeras diferencias no lineales lo cual dificulta obtener una solución analítica para la trayectoria temporal de la economía. Una solución para esto es hacer una linealización de las ecuaciones del sistema usando un polinomio de Taylor de primer orden en la vecindad del estado estacionario.¹⁵

¹⁴ La ecuación (20) que es la ecuación de transición para el consumo y la ecuación (13) en la cual se reemplaza i por el ahorro que a su vez es $y - c = f(k) - c$.

¹⁵ Recuérdese que un polinomio de Taylor de primer orden para aproximar una ecuación no lineal en la vecindad de un punto específico se escribe como: $f(x_1, \dots, x_n) \approx f(X^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0)$, siendo X el vector de variables independientes y X^0 el vector de valores en cuya vecindad se hace la aproximación.

$$\tilde{c}_{t+1} = \tilde{c}_t + \frac{c^* \beta^* f''(k)}{\theta g_{ZL}} \left[\frac{(1+r)\beta^*}{g_{ZL}} \right]^{1/\theta-1} \tilde{k}_t$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{-1}{g_{ZL}} \tilde{c}_t + \frac{(1-\delta) + f'(k)}{g_{ZL}} \tilde{k}_t$$

Siendo $\tilde{c}_t = c_t - c^*$ y $\tilde{k}_t = k_t - k^*$ las desviaciones con respecto al nivel de estado estacionario del consumo y del capital respectivamente.

Este sistema lineal puede ser representado entonces de forma matricial

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_{t+1} \\ \tilde{k}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c^* \beta^* f''(k)}{\theta g_{ZL}} \left[\frac{(1+r)\beta^*}{g_{ZL}} \right]^{1/\theta-1} \\ -1 & \frac{(1-\delta) + f'(k)}{g_{ZL}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \end{bmatrix}$$

De forma compacta podemos escribir:

$$\tilde{X}_{t+1} = B \tilde{X}_t$$

Si esta relación es estable, entonces para varios períodos en el futuro podremos saber cuál es el valor del vector \tilde{X}_t :

$$\tilde{X}_{t+j} = B^j \tilde{X}_t$$

Siendo j la cantidad de periodos en el futuro para los cuales estamos interesados en conocer el valor de \tilde{X}_t .

En general, si tenemos un valor inicial para el vector de desviaciones de las variables claves de la economía X_0 podemos conocer el valor de tal brecha en “ t ” períodos en el futuro:

$$\tilde{X}_t = B^t \tilde{X}_0$$

Además, si la matriz B es diagonalizable¹⁶ la solución a este sistema de ecuaciones puede escribirse como¹⁷:

¹⁶ Debe recordarse que la condición para que una matriz sea diagonalizable es que su determinante sea diferente de cero.

¹⁷ Véase Alfa C. Chiang (1987) para una explicación más amplia y detallada de la solución de sistemas de ecuaciones simultáneas en primeras diferencias.

$$\tilde{X}_t = Z\Lambda'Z^{-1}\tilde{X}_0$$

Siendo Λ la matriz diagonal que contiene los valores propios de la matriz B y Z la matriz que agrupa los vectores propios de B

Los vectores propios de la matriz B se pueden calcular a partir de la siguiente ecuación característica:

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

Al efectuar las operaciones debidas, puede verse que las raíces características o valores propios de este problema tienen la forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(g_{ZL} + 1 + \rho + \theta g)}{g_{ZL}} \pm \sqrt{\left(\frac{(g_{ZL} + 1 + \rho + \theta g)}{g_{ZL}} \right)^2 - \frac{4c^* \beta^* f''(k)}{\theta g_{ZL}^2} \left[\frac{(1+r)\beta^*}{g_{ZL}} \right]^{1/\theta-1} - \frac{4(1+\rho+\theta g)}{g_{ZL}}} \right]$$

Puede comprobarse fácilmente que¹⁸

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{(g_{ZL} + 1 + \rho + \theta g)}{g_{ZL}} + \sqrt{\left(\frac{(g_{ZL} + 1 + \rho + \theta g)}{g_{ZL}} \right)^2 - \frac{4c^* \beta^* f''(k)}{\theta g_{ZL}^2} \left[\frac{(1+r)\beta^*}{g_{ZL}} \right]^{1/\theta-1} - \frac{4(1+\rho+\theta g)}{g_{ZL}}} \right] > 1$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{(g_{ZL} + 1 + \rho + \theta g)}{g_{ZL}} - \sqrt{\left(\frac{(g_{ZL} + 1 + \rho + \theta g)}{g_{ZL}} \right)^2 - \frac{4c^* \beta^* f''(k)}{\theta g_{ZL}^2} \left[\frac{(1+r)\beta^*}{g_{ZL}} \right]^{1/\theta-1} - \frac{4(1+\rho+\theta g)}{g_{ZL}}} \right] < 1$$

Puesto que $\lambda_2 < 1$, se dice que es la raíz estable de la matriz B, mientras que $\lambda_1 > 1$ es la raíz inestable.

Después de calcular los valores propios es necesario calcular los vectores propios para poder tener la solución del sistema, lo cual se hará de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & \frac{c^* \beta^* f''(k)}{\theta g_{ZL}} \left[\frac{(1+r)\beta^*}{g_{ZL}} \right]^{1/\theta-1} \\ -1 & \frac{(1-\delta) + f'(k)}{g_{ZL}} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¹⁸ Se deja esta comprobación a la curiosidad y cuidado del estudiante.

Renombramos las entradas de la matriz para que sea más manejable el álgebra:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & a \\ b & c-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resolvemos para z_{11} y z_{21}

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & a \\ 0 & (c-\lambda_1) - \frac{ab}{1-\lambda_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por definición, la última fila de este sistema está compuesta de ceros, de lo que podemos concluir que m_{21} puede tomar cualquier valor, y si normalizamos este vector propio de manera que $m_{21} = 1$ o dividiendo por m_{21} cada entrada del vector propio, entonces este quedará expresado como:

$$\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a}{1-\lambda_1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El vector propio asociado a la otra raíz λ_2 se encuentra de forma análoga, por lo que podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a}{1-\lambda_1} & \frac{-a}{1-\lambda_2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la solución de forma matricial puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{k}_0 \end{bmatrix}$$

Se puede mostrar que es lícito suponer $\lambda_1 = 0$ y que además es equivalente a imponer convergencia en el largo plazo sobre la dinámica de la economía¹⁹.

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{k}_0 \end{bmatrix}$$

¹⁹ Véase por ejemplo Gómez y Posada (2004) y King, Plosser y Rebelo (1987) entre otros, para una comprobación ampliada y de esta técnica de solución.

y luego de hacer las debidas multiplicaciones nos queda que

$$\tilde{c}_t = \lambda_2^t z_{12} (s_{21} \tilde{c}_0 + s_{22} \tilde{k}_0)$$

$$\tilde{k}_t = \lambda_2^t (s_{21} \tilde{c}_0 + s_{22} \tilde{k}_0)$$

Renombrando términos.

$$\tilde{c}_t = \lambda_2^t z_{12} c_1 + \lambda_2^t z_{12} c_2$$

$$\tilde{k}_t = \lambda_2^t c_1 + \lambda_2^t c_2$$

ya conocemos el valor de z_{12} y es necesario conocer entonces el valor de c_1 y c_2 , que son dos constantes. Esto se logra evaluando las anteriores expresiones en $t = 0$:

$$\tilde{c}_0 = z_{12} (c_1 + c_2)$$

$$\tilde{k}_0 = c_1 + c_2$$

de lo tenemos entonces como resultado que:

$$\tilde{k}_t = \lambda_2^t \tilde{k}_0 \text{ y que } \tilde{c}_t = \lambda_2^t z_{12} \tilde{k}_0 = \lambda_2^t \tilde{c}_0$$

Con estas expresiones, está puesta de forma más clara la evolución temporal de las variables claves de la economía. Nótese además, que puesto que hemos redefinido la evolución de las variables en términos de sus brechas o alejamientos con respecto a su nivel de estado estacionario, entonces podemos hallar su trayectoria ya no en términos de desviaciones sino en términos de niveles, es decir, una vez conocida la trayectoria temporal de la variable $\tilde{x}_t = x_t - x^*$, conocer x_t es tan fácil como hacer $x_t = \tilde{x}_t + x^*$.

V. Una simulación para la economía colombiana.

Lo primero que debe hacerse para efectuar una simulación es la calibración del modelo, que no es otra cosa que el cálculo de los valores más plausibles tanto para los parámetros de la función de utilidad como de la función de producción. Este proceso se lleva a cabo usando información de cuentas nacionales como fuente primaria, estimaciones econométricas de tales parámetros, y, cuando no sea posible obtener información, puede recurrirse a usar estimaciones contenidas en la literatura referente al tema que hayan sido usadas para otros países, en lo posible, lo más parecidos a la economía para la cual se esté haciendo el estudio o simulación.

La calibración del modelo se hace sobre las ecuaciones de transición de la economía imponiéndoles condiciones de estado estacionario. Para el caso de la economía colombiana,

podemos usar información de largo plazo sobre consumo, PIB, inversión, capital físico, etc. Además, se puede usar otra información macroeconómica como las tasas de interés (nominal y real), la tasa de depreciación del capital, la tasa de crecimiento poblacional, etc.

Para el caso particular de nuestra economía hipotética usaremos las ecuaciones (4), (23) y (25) para hacer la calibración de los parámetros e identidades macroeconómicas básicas. Supongamos que $A_t = 1$ y que la función de producción es Cobb-Douglas:

$$r_t = f'(k_t) - \delta = \alpha k^{\alpha-1} - \delta \quad (30)$$

Para la economía colombiana, el promedio de largo plazo de la tasa de interés real es 13.68% (para 1950-2000), y la tasa de depreciación de capital físico es de 2.7% según cuentas nacionales DANE. Luego a partir de la ecuación (30) podemos calcular el stock de capital de por unidad efectiva de trabajo:

$$k^* = \left[\frac{r + \delta}{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left[\frac{\alpha}{r + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Con esta estimación para el stock de capital podemos calcular el producto de estado estacionario.

Seguidamente debemos hacer cálculos para conocer los parámetros de la función de utilidad, lo cual se hace utilizando la ecuación (23). En esta ecuación vemos que tenemos que estimar dos parámetros: ρ y θ . Para el ejercicio aquí presentado se supone un valor para ρ de 0.02, lo cual nos da un factor de descuento $\beta = 0.9803^{20}$.

$$f'(k) - \delta = \rho + \theta g \quad (31)$$

$$c_t^* = y_t^* - [(1+g)(1+n) - (1-\delta)]k^* \quad (32)$$

Entonces tendremos un valor calculado $\theta = 5.99$. Después de estimados estos valores de parámetros, con la ecuación (25) podemos obtener los valores para el consumo y el ahorro; las tablas 1 y 2 recogen los valores de los parámetros y los valores de los agregados macroeconómicos básicos respectivamente.

²⁰ En Posada y Gómez (2002) se hace un proceso de calibración para la economía colombiana, similar la efectuado aquí, de allí, se han tomado los datos estimados para las tasas de crecimiento poblacional y tecnológico. Véase además. GRECO (2002).

Tabla 1
Parámetros básicos

α	0.400
ρ	0.020
θ	5.990
$g\pi$	0.015
δk	0.027
$g L$	0.022

Tabla 2
Identidades básicas

k^*	5.976
y^*	2.044
$(s/y)^*$	0.188
ahorro	0.384
C^*/y^*	0.812
consumo	1.660
$fk(\cdot)$	0.136845
$fk(\cdot)-dk$	0.1098

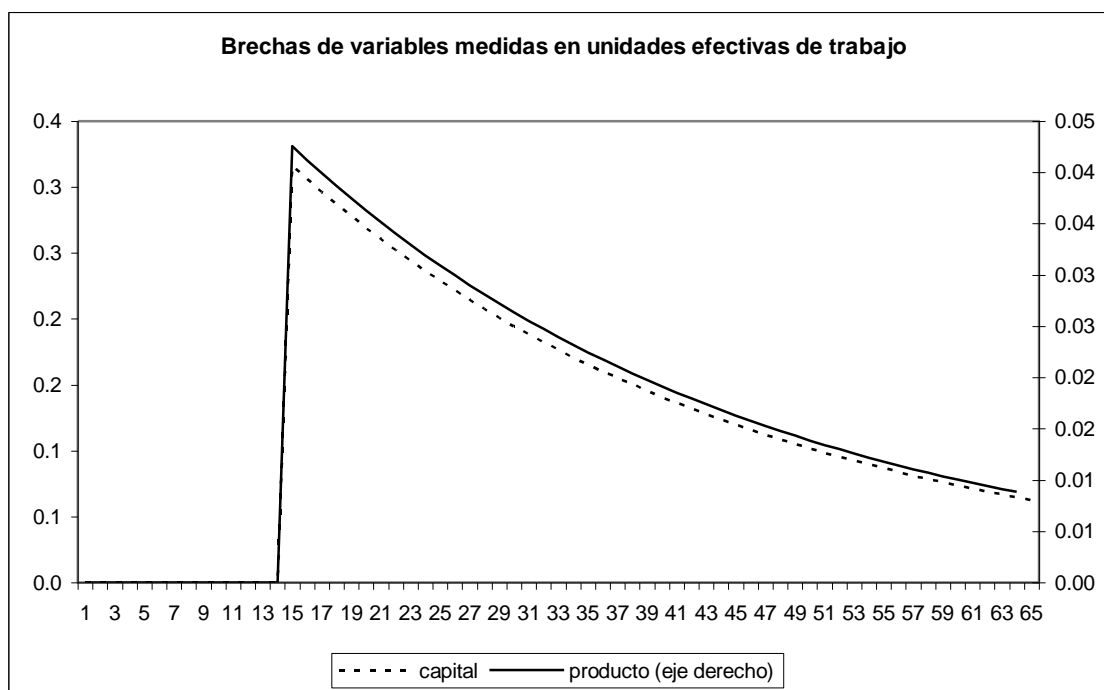
Los gráficos 1 a 4 resumen los resultados para algunas de las variables básicas de la economía de una simulación de un choque por una sola vez al stock de capital por unidad efectiva de trabajo, consistente con el crecimiento que la economía colombiana observó en el año 1994. Tal y como lo predice el modelo, cuando hay un aumento del capital por unidad efectiva de trabajo hay un aumento en el producto y en el consumo, mientras que a la vez hay una caída de la tasa de interés real, hechos que son consistentes con una fase de auge típica de una economía de mercado.

Sin embargo, a pesar de lo bueno que parezca el modelo, este tiene básicamente dos defectos. En primer lugar, puesto que se ha hecho una simulación para ver cómo responde la economía después de un solo choque, esta muestra una senda suave de ajuste tanto para los agregados macroeconómicos como para sus tasas de crecimiento, mientras que en la economía real se observan trayectorias no suaves, explicadas porque la economía real recibe choques continuamente según la teoría de los ciclos económicos reales. Es por esto que, si nos fijamos con detenimiento en la gráfica 4, podemos observar que, al principio de la simulación, da la impresión de que la tasa de crecimiento observada para el PIB real agregado de Colombia estuviera oscilando en torno a la senda suave de crecimiento que predice la economía hipotética. Sin embargo, después de 1997, la economía real se aleja considerablemente de la economía hipotética, explicado esto en parte por la frecuencia de los choques que recibe la economía en la realidad, además de que la economía hipotética deja por fuera muchos fenómenos como los institucionales, los políticos, los de orden público, entre otros.

Esta última consideración nos lleva al segundo defecto que tiene este modelo formulado aquí. Nuestro modelo no puede darnos cuenta del desempleo pues está suponiendo que hay pleno

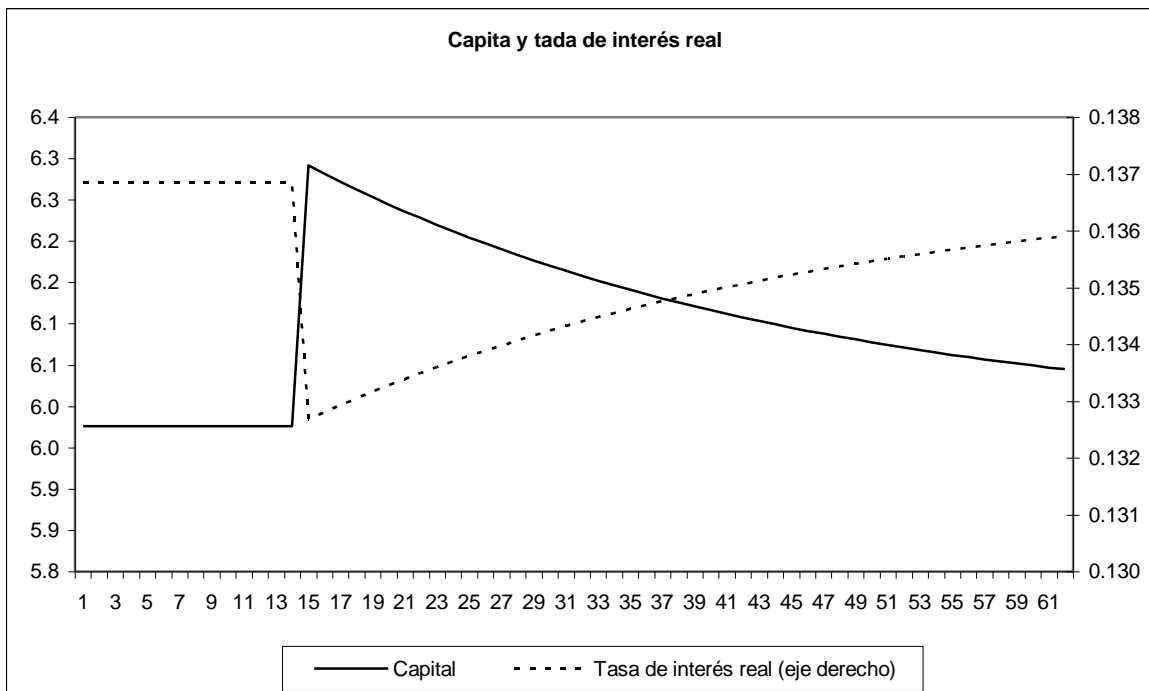
empleo, y ya que los agentes ofrecen empleo de manera inelástica²¹; no nos ofrece una aproximación ni siquiera de lejos al problema del desempleo que ha sufrido la economía colombiana en los últimos años y particularmente en 1999 año en el cual la economía colombiana sufrió una de las crisis más grandes de su historia económica reciente.

Gráfica 1

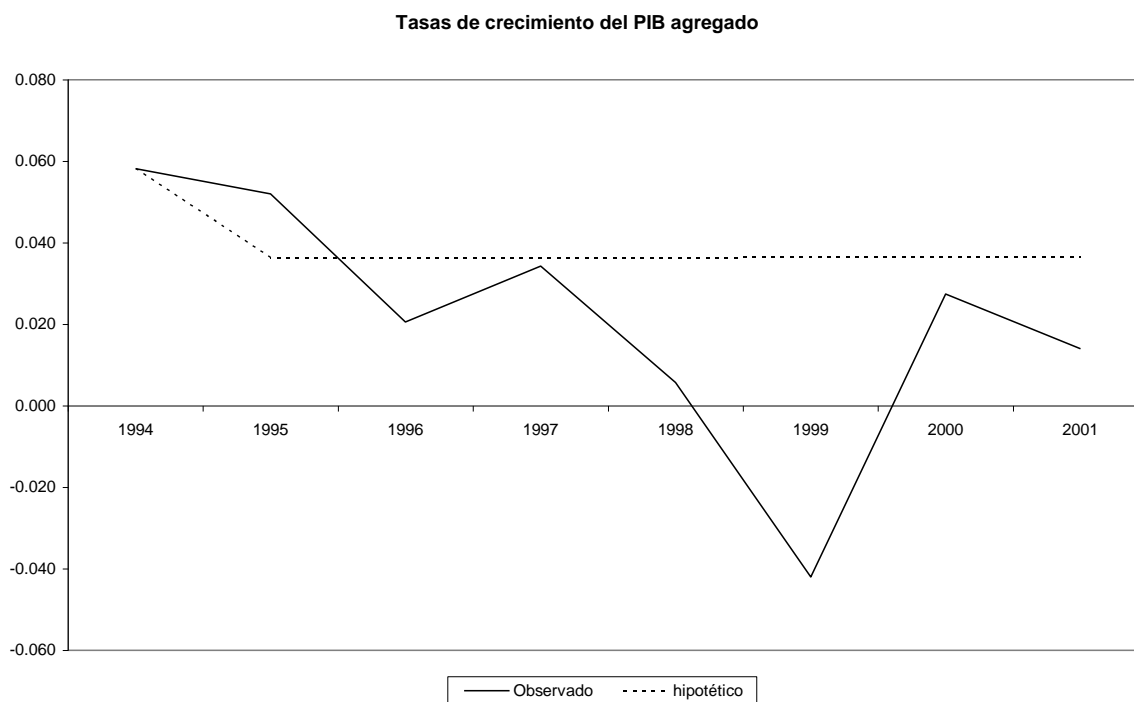


²¹ Esto se ve claramente en la función de utilidad puesto que en ella los agentes no están incorporando decisiones de consumo de ocio, por lo que se deduce que están dispuestos a ofrecer todo su tiempo de trabajo, es decir, en este modelo ni siquiera hay espacio para el desempleo voluntario. Como consecuencia de esto, ya que nuestra economía supone precios flexibles, el equilibrio en el mercado de trabajo se mantiene vía ajustes del salario real.

Gráfica 2



Gráfica 3



VI. Los choques tecnológicos

Hasta el momento hemos supuesto una función de producción en la cual la tecnología “A” se ha supuesto constante e igual a uno. ¿Cómo podemos re-escribir este modelo para tomar en cuenta las variaciones o choques aleatorios a dicha tecnología? Lo que supondremos ahora es que la tecnología oscila en torno a un valor que supondremos igual a uno, y que su proceso aleatorio en el tiempo no tiene tendencia alguna ni ningún tipo de persistencia, lo que equivale a decir que $A_t \sim n(1, \sigma_A^2)$. Linealicemos una vez más las funciones de transición dinámica de la economía en torno al estado estacionario del consumo, el capital y la tecnología:

$$\tilde{c}_{t+1} = \tilde{c}_t + \frac{c^* \beta^* f''(k)}{\theta g_{ZL}} \left[\frac{(1+r)\beta^*}{g_{ZL}} \right]^{1/\theta-1} \tilde{k}_t + \frac{c^* \beta^*}{\theta g_{ZL}} \left[\frac{(1+r)\beta^*}{g_{ZL}} \right]^{1/\theta-1} \frac{f'(k)}{g_{ZL}} \tilde{A}_t$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{-1}{g_{ZL}} \tilde{c}_t + \frac{(1-\delta) + f'(k)}{g_{ZL}} \tilde{k}_t + \frac{f(k)}{g_{ZL}} \tilde{A}_t$$

Si ponemos este sistema en forma matricial tendremos, o de forma más compacta:

$$\tilde{X}_{t+1} = B\tilde{X}_t + \Phi\tilde{A}_t$$

$$\text{Sendo } \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c^* \beta^*}{\theta g_{ZL}} \left[\frac{(1+r)\beta^*}{g_{ZL}} \right]^{1/\theta-1} \frac{f'(k)}{g_{ZL}} \\ \frac{f(k)}{g_{ZL}} \end{bmatrix}$$

Supongamos ahora que iniciamos la observación de la economía en un período cualquiera, llamémosle período cero $t=0$, en el cual tenemos el valor de \tilde{X}_0 y \tilde{A}_0 , entonces para el siguiente período tendremos:

$$\tilde{X}_1 = B\tilde{X}_0 + \Phi\tilde{A}_0$$

para el período $t=2$ tendremos:

$$\tilde{X}_2 = B\tilde{X}_1 + \Phi\tilde{A}_1 = B(B\tilde{X}_0 + \Phi\tilde{A}_0) + \Phi\tilde{A}_1 = B^2\tilde{X}_0 + B\Phi\tilde{A}_0 + \Phi\tilde{A}_1$$

y así sucesivamente, hasta que en un momento t cualquiera, podremos tener:

$$\tilde{X}_t = B^t \tilde{X}_0 + B^{t-1} \Phi \tilde{A}_0 + B^{t-2} \Phi \tilde{A}_1 + \dots + \Phi \tilde{A}_{t-1}$$

$$\tilde{X}_t = B^t \tilde{X}_0 + \sum_{i=1}^t B^{i-1} \Phi \tilde{A}_{t-i}$$

Siendo que la tecnología gira en torno a su nivel de estado estacionario, 1, sus desviaciones con respecto a este nivel tienen una media de cero y (se puede probar) la misma varianza que \tilde{A}_t , es decir: $\tilde{A}_t \sim n(0, \sigma_A^2)$, y el supuesto de no tendencias ni de persistencias en \tilde{A}_t es equivalente a decir que un valor de \tilde{A}_t no tiene ningún tipo de relación con los valores de tal variable en períodos anteriores. Lo cual facilita tremendamente la solución y simulación de este modelo.

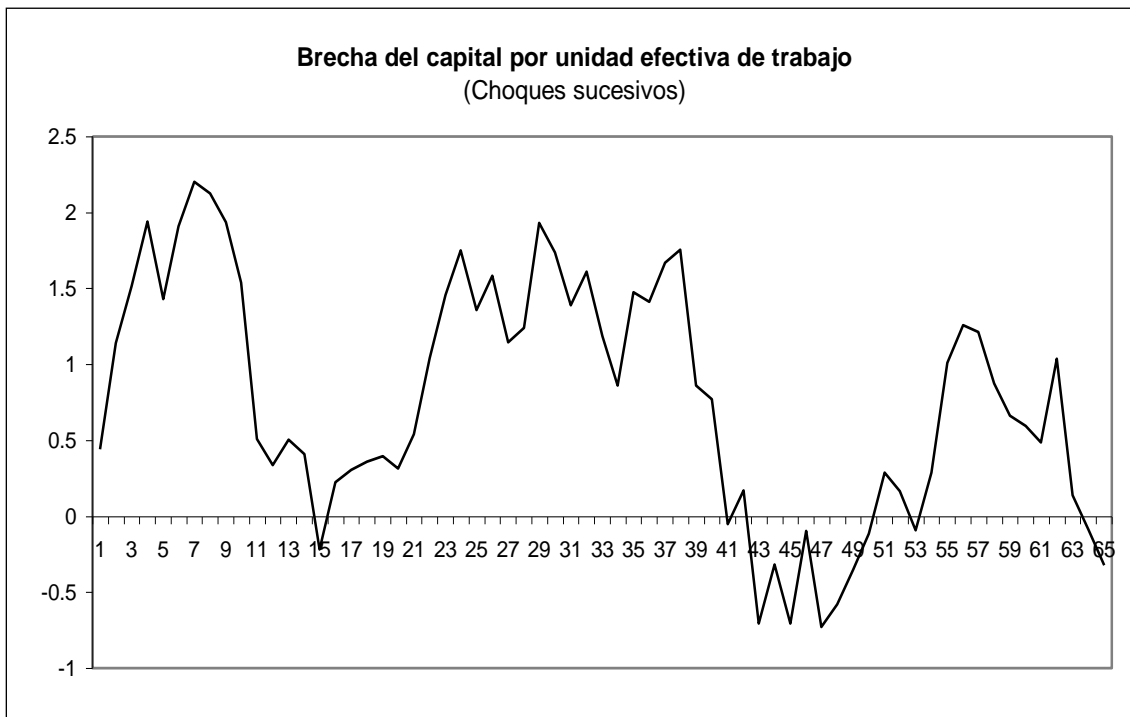
Aprovechándonos una vez más de las propiedades de la diagonalidad de la matriz B podemos reescribir la ecuación para la solución de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_t \\ \tilde{k}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{k}_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^t \left\{ \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \tilde{A}_{t-i} \right\}$$

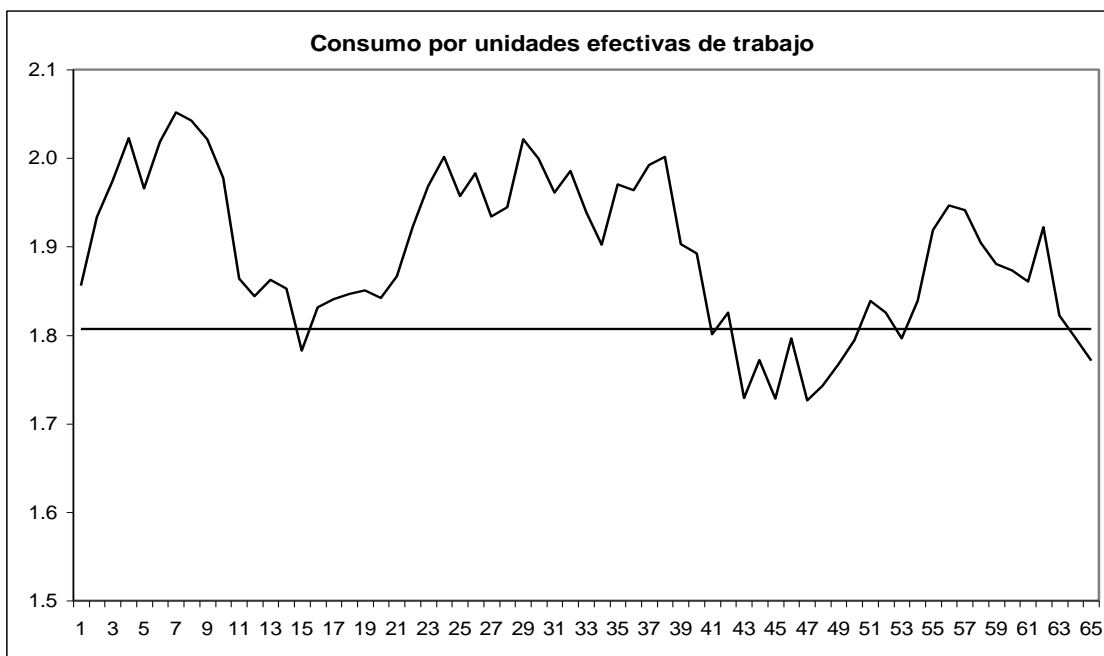
De esta forma, si la economía recibe un choque a la tecnología por una sola vez, el comportamiento de ajuste será, similar al mostrado en las simulaciones anteriores para una desviación de capital con respecto a su estado estacionario. En efecto, un choque tecnológico positivo por una sola vez, genera un aumento del producto, el cual a su vez genera aumentos del capital y del consumo; posteriormente, en ausencia de choques, la economía retornará lentamente a su situación de estado estacionario.

Cuando la economía recibe choques tecnológicos constantemente, tal y como es la propuesta de los teóricos de los ciclos reales de negocios, esta comienza a fluctuar periódicamente, mostrando un patrón aleatorio influenciado por tales choques tecnológicos.

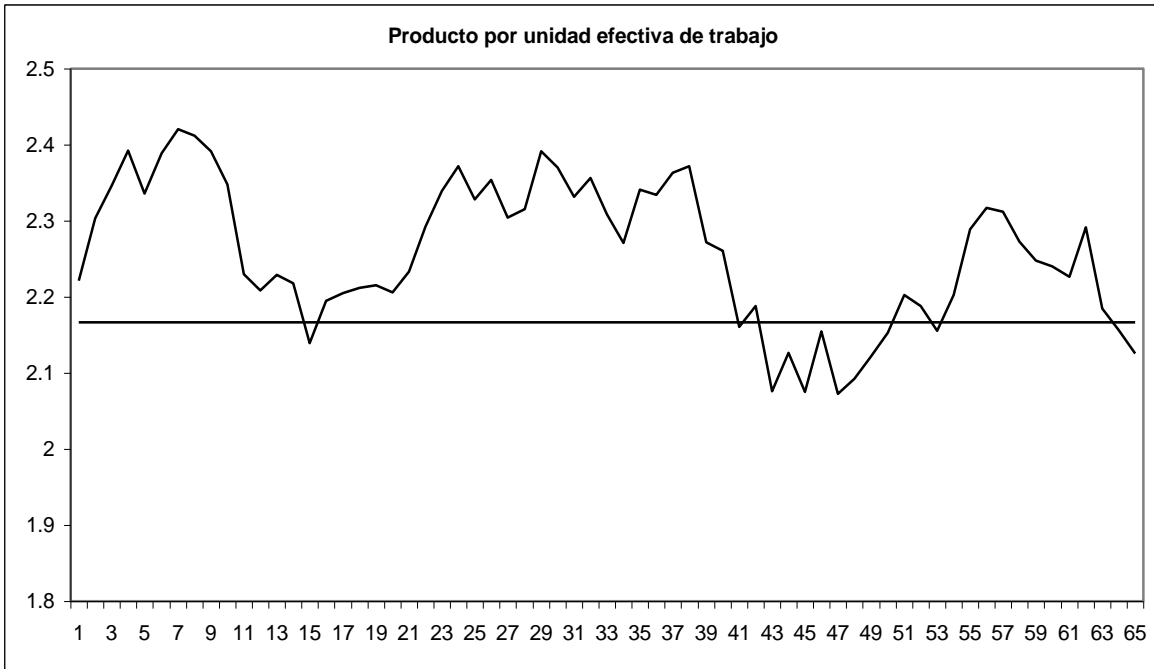
Gráfica 4



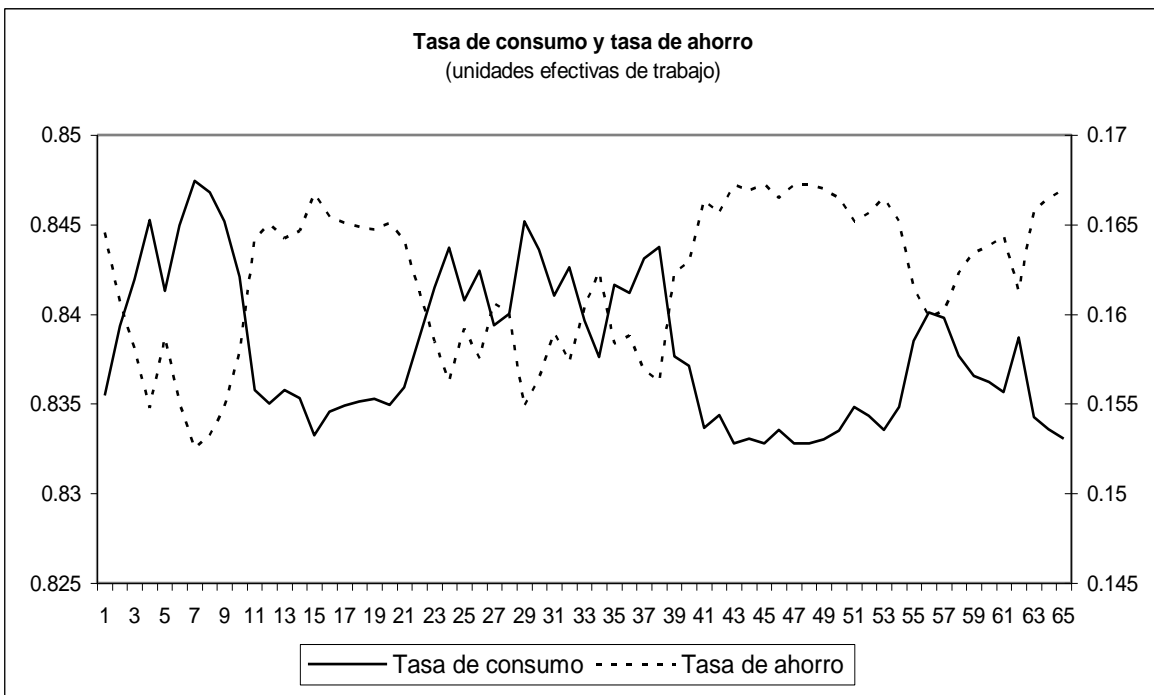
Gráfica 5



Gráfica 6



Gráfica 7



En las gráficas 4 a 7 se presenta una simulación de choques sucesivos a la tecnología. Puede notarse el patrón fluctuante de las variables macroeconómicas, además de la variabilidad de la tasa de ahorro y de consumo a lo largo del tiempo.

Puesto que la propuesta teórica es tratar de explicar las fluctuaciones económicas vía choques aleatorios sobre la tecnología, una de las fases importantes del estudio es entonces comparar las características muestrales o momentos de las variables de la economía simulada con los de la economía real y a partir de allí derivar conclusiones sobre la relevancia y ajuste de la teoría a los datos, etc., por lo que el próximo paso será entonces establecer una comparación de varianzas, índices de correlación, etc.

Referencias

- Barro, Robert J. and Xavier Sala-i-Martin (1995). *Economic Growth*, McGraw-Hill.
- Blanchard, Olivier J. y C. Kahn (1980). “The solution of linear difference models under rational expectations”. *Econometría*, #48.
- Chiang, Alpha C. (1987). *Métodos fundamentales de economía matemática*. McGraw-Hill.
- Gómez, Wilman y Posada, Carlos E. (2004). Un “choque” del activo externo y el ciclo económico colombiano 1994-2001.
- Greco (2002). *El crecimiento económico colombiano en el siglo XX*. Banco de la República-Fondo de Cultura Económica.
- King, Robert; C. Plosser, y S. Rebelo (1987). “Production, Growth and business cycles: Technical appendix”, Working paper, University of Rochester.
- Posada, Carlos E. y Gómez Wilman (2002). “crecimiento económico y gasto público: un modelo para el caso colombiano”. *Ensayos Sobre Política Económica*. #41-42, Junio-Diciembre. Banco de la República.
- Ramsey, F.P. (1928). A mathematical theory of savings. *Economic journal*, 38: 543-559.
- Romer, David (2001). *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill.
- Sala-i-Martin, Xavier (2000). *Apuntes de crecimiento económico*, Antoni Bosch editor.

Borradores del CIE

No.	Título	Autor(es)	Fecha
01	Organismos reguladores del sistema de salud colombiano: conformación, funcionamiento y responsabilidades.	Durfari Velandia Naranjo Jairo Restrepo Zea Sandra Rodríguez Acosta	Agosto de 2002
02	Economía y relaciones sexuales: un modelo económico, su verificación empírica y posibles recomendaciones para disminuir los casos de sida.	Marcela Montoya Múnera Danny García Callejas	Noviembre de 2002
03	Un modelo RSDAIDS para las importaciones de madera de Estados Unidos y sus implicaciones para Colombia	Mauricio Alviar Ramírez Medardo Restrepo Patiño Santiago Gallón Gómez	Noviembre de 2002
04	Determinantes de la deserción estudiantil en la Universidad de Antioquia	Johanna Vásquez Velásquez Elkin Castaño Vélez Santiago Gallón Gómez Karoll Gómez Portilla	Julio de 2003
05	Producción académica en Economía de la Salud en Colombia, 1980-2002	Karem Espinosa Echavarría Jairo Humberto Restrepo Zea Sandra Rodríguez Acosta	Agosto de 2003
06	Las relaciones del desarrollo económico con la geografía y el territorio: una revisión.	Jorge Lotero Contreras	Septiembre de 2003
07	La ética de los estudiantes frente a los exámenes académicos: un problema relacionado con beneficios económicos y probabilidades	Danny García Callejas	Noviembre de 2003
08	Impactos monetarios e institucionales de la deuda pública en Colombia 1840-1890	Angela Milena Rojas R.	Febrero de 2004
09	Institucionalidad e incentivos en la educación básica y media en Colombia	David Fernando Tobón Germán Darío Valencia Danny García Guillermo Pérez Gustavo Adolfo Castillo	Febrero de 2004
10	Selección adversa en el régimen contributivo de salud: el caso de la EPS de Susalud	Johanna Vásquez Velásquez Karoll Gómez Portilla	Marzo de 2004
11	Diseño y experiencia de la regulación en salud en Colombia	Jairo Humberto Restrepo Zea Sandra Rodríguez Acosta	Marzo de 2004
12	Economic Growth, Consumption and Oil Scarcity in Colombia: A Ramsey model, time series and panel data approach	Danny García Callejas	Marzo de 2005
13	La competitividad: aproximación conceptual desde la teoría del crecimiento y la geografía económica	Jorge Lotero Contreras Ana Isabel Moreno Monroy Mauricio Giovanni Valencia Amaya	Mayo de 2005
14	La curva Ambiental de Kuznets para la calidad del agua: un análisis de su validez mediante raíces unitarias y cointegración	Mauricio Alviar Ramírez Catalina Granda Carvajal Luis Guillermo Pérez Puerta Juan Carlos Muñoz Mora Diana Constanza Restrepo Ochoa	Mayo de 2006
15	Integración vertical en el sistema de salud colombiano: Aproximaciones empíricas y análisis de doble marginalización	Jairo Humberto Restrepo Zea John Fernando Lopera Sierra Sandra Rodríguez Acosta	Mayo de 2006
16	Cliometrics: a market account of a scientific community (1957-2005)	Angela Milena Rojas	Septiembre de 2006
17	Regulación ambiental sobre la contaminación vehicular en Colombia: ¿hacia dónde vamos?	David Tobón Orozco Andrés Felipe Sánchez Gandur Maria Victoria Cárdenas Londoño	Septiembre de 2006

18	Biology and Economics: Metaphors that Economists usually take from Biology	Danny García Callejas	Septiembre de 2006
19	Perspectiva Económica sobre la demanda de combustibles en Antioquia	Elizeth Ramos Oyola María Victoria Cárdenas Londoño David Tobón Orozco	Septiembre de 2006
20	Caracterización económica del deporte en Antioquia y Colombia: 1998-2001	Ramón Javier Mesa Callejas Rodrigo Arboleda Sierra Ana Milena Olarte Cadavid Carlos Mario Londoño Toro Juan David Gómez Gonzalo Valderrama	Octubre de 2006
21	Impacto Económico de los Juegos Deportivos Departamentales 2004: el caso de Santa Fe De Antioquia	Ramón Javier Mesa Callejas Ana Milena Olarte Cadavid Nini Johana Marín Rodríguez Mauricio A. Hernández Monsalve Rodrigo Arboleda Sierra	Octubre de 2006
22	Diagnóstico del sector deporte, la recreación y la educación física en Antioquia	Ramón Javier Mesa Callejas Rodrigo Arboleda Sierra Juan Francisco Gutiérrez Betancur Mauricio López González Nini Johana Marín Rodríguez Nelson Alveiro Gaviria García	Octubre de 2006
23	Formulación de una política pública para el sector del deporte, la recreación y la educación física en Antioquia	Ramón Javier Mesa Callejas Rodrigo Arboleda Sierra Juan Francisco Gutiérrez Betancur Mauricio López González Nini Johana Marín Rodríguez Nelson Alveiro Gaviria García	Octubre de 2006
24	El efecto de las intervenciones cambiarias: la experiencia colombiana 2004-2006	Mauricio A. Hernández Monsalve Ramón Javier Mesa Callejas	Octubre de 2006
25	Economic policy and institutional change: a context-specific model for explaining the economic reforms failure in 1970's Colombia	Angela Milena Rojas	Noviembre de 2006
26	Definición teórica y medición del Comercio Intraindustrial	Ana Isabel Moreno M. Héctor Mauricio Posada D	Noviembre de 2006
Borradores Departamento de Economía			
27	Aportes teóricos al debate de la agricultura desde la economía	Marleny Cardona Acevedo Yady Marcela Barrero Amortegui Carlos Felipe Gaviria Garcés Ever Humberto Álvarez Sánchez Juan Carlos Muñoz Mora	Septiembre de 2007
28	Competitiveness of Colombian Departments observed from an Economic geography Perspective	Jorge Lotero Contreras Héctor Mauricio Posada Duque Daniel Valderrama	Abril de 2009
29	La Curva de Engel de los Servicios de Salud En Colombia. Una Aproximación Semiparamétrica	Jorge Barrientos Marín Juan Miguel Gallego Juan Pablo Saldarriaga	Julio de 2009
30	La función reguladora del Estado: ¿qué regular y por qué?: Conceptualización y el caso de Colombia	Jorge Hernán Flórez Acosta	Julio de 2009
31	Evolución y determinantes de las exportaciones industriales regionales: evidencia empírica para Colombia, 1977-2002	Jorge Barrientos Marín Jorge Lotero Contreras	Septiembre de 2009
32	La política ambiental en Colombia: Tasas retributivas y Equilibrios de Nash	Medardo Restrepo Patiño	Octubre de 2009
33	Restricción vehicular y regulación ambiental: el programa "Pico y Placa" en Medellín	David Tobón Orozco Carlos Vasco Correa Blanca Gómez Olivo	Mayo de 2010

34	Corruption, Economic Freedom and Political Freedom in South America: In Pursuit of the missing Link	Danny García Callejas	Agosto de 2010
35	Karl Marx: dinero, capital y crisis	Ghislain Deleplace	Octubre de 2010
36	Democracy and Environmental Quality in Latin America: A Panel System of Equations Approach, 1995-2008	Danny García Callejas	Noviembre de 2010
37	Political competition in dual economies: clientelism in Latin America	Angela M.Rojas Rivera	Febrero de 2011
38	Implicaciones de Forward y Futuros para el Sector Eléctrico Colombiano	Duvan Fernando Torres Gómez Astrid Carolina Arroyave Tangarife	Marzo de 2011
39	Per Capita GDP Convergence in South America, 1960-2007	Danny García Callejas	Mayo de 2011
40	Efectos del salario mínimo sobre el estatus laboral de los jóvenes en Colombia	Yenny Catalina Aguirre Botero	Agosto de 2011
41	Determinantes del margen de intermediación en el sector bancario colombiano para el periodo 2000 – 2010	Perla Escobar Julián Gómez	Septiembre de 2011
42	Tamaño óptimo del gasto público colombiano: una aproximación desde la teoría del crecimiento endógeno	Camilo Alvis Cristian Castrillón	Septiembre de 2011
43	Estimación del stock de capital humano bajo la metodología Jorgenson-Fraumeni para Colombia 2001-2009	Juan David Correa Ramírez Jaime Alberto Montoya Arbeláez	Septiembre de 2011
44	Estructura de ingresos para trabajadores asalariados y por cuenta propia en la ciudad de Ibagué	José Daniel Salinas Rincón Daniel Aragón Urrego	Noviembre de 2011
45	Identificación y priorización de barreras a la eficiencia energética: un estudio en microempresas de Medellín	Juan Gabriel Vanegas Sergio Botero Botero	Marzo de 2012
46	Medición del riesgo sistémico financiero en estudios de historia económica. Propuesta metodológica y aplicación para la banca libre en Antioquia, 1888	Javier Mejía Cubillos	Mayo de 2012
47	El tiempo, el éter que lo cubre todo: Un análisis de la temporalidad en la economía política de Karl Marx	Germán Darío Valencia Agudelo	Septiembre de 2012
48	Características de la Población Ocupada en Colombia: Un análisis del perfil de los formales e informales	José Daniel Salinas Rincón Sara Isabel González Arismendy Leidy Johana Marín	Octubre de 2012
49	Desarrollo económico Territorial: El caso del Cluster TIC, Medellín y Valle de Aburrá. Propuesta de fomento y consolidación de la industria de Contenidos Digitales	Felipe Molina Otálvaro Pablo Barrera Bolaños Tulio Montemiranda Aguirre	Noviembre de 2012
50	Análisis de la interacción entre las autoridades monetaria y fiscal en Colombia (1991-2011). Una aplicación desde la teoría de juegos	Sebastián Giraldo González Edwin Esteban Torres Gómez Ana Cristina Muñoz Toro	Enero de 2013
51	Tangible Temptation in the Social Dilema: Cash, Cooperation, and Self Control	Kristian Ove R. Myrseth Gerhard Riener Conny Wollbrant	Mayo de 2013
52	Análisis de las disparidades regionales en Colombia: una aproximación desde la estadística espacial, 1985 – 2010	Jhonny Moncada Osmar Leandro Loaiza Quintero	Octubre de 2013
53	Modelo VECM para estimar relaciones de largo plazo de un indicador de liquidez y sus determinantes	Wilman A. Gómez John F. Lopera	Noviembre de 2013
54	Informality and Macroeconomic Volatility: Do Credit Constraints Matter?	Catalina Granda Carvajal	Enero de 2015
55	¿Debería la Historia del Pensamiento Económico ser incluida en los Planes de Estudio de Economía en Pregrado?	Alessandro Roncaglia	Junio de 2015
56	A Comparative Analysis of Political Competition and Local Provision of Public Goods: Brazil, Colombia and Mexico (1991-2010)	Ángela M. Rojas Rivera Carlos A. Molina Guerra	Octubre de 2015

57	Economía, gestión y fútbol: de la pasión a la sostenibilidad financiera	Ramón Javier Mesa Callejas Jair Albeiro Osorio Agudelo Carlos Eduardo Castaño Ríos	Julio de 2016
58	Desarrollo económico y espacial desigual: panorama teórico y aproximaciones al caso colombiano	Angela Milena Rojas Rivera Juan Camilo Rengifo López	Noviembre de 2016
59	Extent of Expected Pigouvian Taxes and Permits for Environmental Services in a General Equilibrium Model with a natural capital constraint	David Tobón Orozco Carlos Molina Guerra John Harvey Vargas Cano	Noviembre de 2016
60	Riesgo idiosincrático y retornos en el mercado accionario de Colombia	Carlos Andrés Barrera Montoya	Enero de 2017
61	Incidencia de los flujos de capital en la política monetaria de Colombia, 1996-2011	Deivis Agudelo Hincapié Alexis Arias Saavedra Julián Jiménez Mejía	Enero de 2017
62	Sobre los fundamentales del precio de la energía eléctrica: evidencia empírica para Colombia	Jorge Barrientos Marín Monica Toro Martínez	Marzo de 2017
63	Desarrollo económico local y género en ámbitos territoriales rurales: el caso de la zona Liborina-Sabanalarga, Antioquia, Colombia	Harold Cardona Trujillo Jorge Lotero Contreras Paula Andrea Galeano Morales Alix Bibiana Gómez Robinson Garcés Marín	Mayo de 2017
64	Recursos y capacidades para el desarrollo económico local en Buriticá Antioquia	Tatiana María Colorado Marín Juan David Franco Henao Yesica Rangel Villada	Junio de 2017
65	Panel de VAR: Una aplicación en la movilidad de factores de producción en la integración económica Alianza del Pacífico	Carlos Andrés Villarreal Restrepo	Junio de 2017
66	Cálculo de un WACC diferenciado por región para proyectos de generación de electricidad con fuentes renovables en Colombia	Jorge Barrientos Marín Fernando Villada Duque	Agosto de 2017
67	La determinación de los precios en la teoría económica de Sir James Steuart	Alexander Tobon Arias	Agosto de 2017
68	La teoría macroeconómica de John Maynard Keynes	Ghislain Deleplace	Octubre de 2017
69	Revisión general de la producción académica en historia empresarial colombiana publicada en revistas académicas 1984-2016	Tatiana González Lopera	Noviembre de 2017
70	Una regla empírica de tasa de interés de política monetaria para una economía emergente, pequeña y abierta	Jaime Montoya Ramirez	Noviembre de 2017
71	Los salarios y la fatiga acumulada: una revisión de la teoría de la oferta de trabajo	Carlos Andrés Vasco Correa	Diciembre de 2017
72	Modelo cualitativo para estudiar la internacionalización de las multilatinas colombianas	Ramón Javier Mesa Callejas Mauricio Lopera Castaño Paola Melisa Valencia Guzmán Mónica Andrea Álvarez Marín Paula Andrea Uribe Polo	Febrero de 2018
73	Mediciones del crecimiento económico regional y local en Colombia, 1950-2017: una revisión	Jaime Vallecilla G.	Febrero de 2018
74	Planteamiento de la cuestión agraria en la historiografía agraria colombiana: 1936 – 2016	Juan Carlos Velásquez Torres	Marzo de 2018
75	Los estudios en historia fiscal de Colombia sobre el siglo XX	Angela Milena Rojas R.	Noviembre de 2018
76	Can environmental taxes and payments for ecosystem services regulate pollution when the resilience of water bodies is surpassed?	David Tobón-Orozco Carlos Molina Harvey Vargas	Noviembre de 2018
77	Sobre la estructura de gasto y la curva de Engel de los hogares urbanos: evidencia empírica para Medellín	Jorge Barrientos Marín Efraín Arango Sánchez	Noviembre de 2018

78	Determinantes de la productividad multifactorial: los casos de las principales economías latinoamericanas y emergentes de Asia (1960 - 2015)	Wilman Arturo Gómez Carlos Esteban Posada Remberto Rhenals	Diciembre de 2018
79	Implementación de una evaluación por competencias académicas en el pregrado de Economía de la Universidad del Magdalena, Colombia	Rafael García José González Porto Luz Helena Díaz Álvaro Acevedo Alexander Tobón	Mayo de 2019
80	Determinantes del ahorro interno en Colombia: un acercamiento desde las Cuentas Nacionales Trimestrales para el período 1994-2017	Jaime Montoya Ramirez	Junio de 2019
81	Álgebra de un modelo simple IS-MR-AD-AS: Notas de clase	Jaime Alberto Montoya Remberto Rhenals	Agosto de 2019
82	¿Las diferencias importan? Heterogeneidad y dilemas sociales en recursos naturales, aportes desde la Economía experimental y del comportamiento	Yady Marcela Barrero	Septiembre de 2019
83	Concentración de tierras, paz territorial e impuesto predial rural en Antioquia	Cristian Sánchez Salazar	Septiembre de 2019
84	Una breve aplicación a la predicción de la fragilidad de empresas colombianas, mediante el uso de modelos estadísticos	Jorge Iván Pérez García Mauricio Lopera Castaño Fredy Alonso Vásquez Bedoya	Septiembre de 2019
85	Diseño e implementación de resultados de aprendizaje para pregrados en Economía	Alexander Tobón	Octubre de 2019
86	Corrupción, incentivos y contrabando técnico en Colombia, 1998 – 2013	Edwin Esteban Torres Gómez Luis Ricardo Argüello Cuervo	Noviembre de 2019
87	Efecto de los programas educativos en pruebas estandarizadas. Un análisis por cuartiles de la política educativa "Antioquia la más educada".	Diana Lucia López López Edwin Esteban Torres Gómez Cristian Sánchez Salazar	Diciembre de 2019
88	Identificación de las principales restricciones operativas al crecimiento en Antioquia, Caldas, Risaralda y Quindío	Harold Cardona-Trujillo Estefany Peña Rojas	Diciembre de 2020
89	La teoría económica: ¿un monumento en peligro?	Jean Cartelier	Febrero de 2021
90	Caída y convergencia mundial de las tasas de inflación	Wilman Gómez Carlos Esteban Posada Remberto Rhenals	Marzo de 2021
91	¿Es posible explicar la crisis colombiana de 1998-2003 a partir de la teoría austríaca del ciclo económico?	Andrés Mauricio Rosero Sánchez	Mayo de 2021
92	La estructura de la propiedad de la tierra y su relación con la inversión social local en Colombia, 2000 – 2010	Mariana Rincón Orozco	Junio de 2021
93	Conferencia de Carlo Benetti con motivo de su investidura como Doctor Honoris Causa de la Universidad Metropolitana de México en 2015	Carlo Benetti	Septiembre de 2021
94	Crédito, producción y consumo en la teoría monetaria de Hawtrey (1919)	Carlos Andrés Villarreal Restrepo	Octubre de 2021
95	Entre el poder y la resistencia. Asesinato de líderes sociales y restitución de tierras en Colombia	Juan Fernando Zabala Hincapié	Diciembre de 2021
96	La estructura lógica de la teoría del equilibrio general dinámico estocástico	Alexander Tobón	Agosto de 2022
97	Transición demográfica, acumulación y uso del capital humano: ¿por qué muchos países siguen siendo pobres?	Ana Isabel Suárez García	Octubre de 2023
98	Metodología para la construcción y evaluación de resultados de aprendizaje para programas de pregrado y posgrado	Alexander Tobón Arias	Abril de 2024
99	La interacción gráfica en Python como herramienta para mejorar el aprendizaje en microeconomía y macroeconomía	Carlos Andrés Palacio Gómez	Octubre de 2024

100	Sector informal como amortiguador del ciclo económico: el papel de la aversión a la pérdida	Wilman Gómez M. Cristian Castrillón G. Jaime Montoya A.	Octubre de 2024
101	Evaluación de reglas fiscales a través de un modelo de equilibrio general dinámico estocástico DSGE estimado para la economía colombiana	Geraldine Grimaldo Álvarez Wilman Arturo Gómez Muñoz Juan Pablo Saldarriaga Muñoz	Octubre de 2024
102	Notas sobre el marxismo de Maurice Dobb	Ramon Boixadera Bosch	Noviembre de 2024
103	Ciclos reales de negocios: una nota didáctica	Wilman Arturo Gómez Muñoz	Noviembre de 2024

**LECTURAS
DE
ECONOMÍA**

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Económicas
Departamento de Economía