

LA MODELACIÓN COMO PROCESO EN EL AULA DE MATEMÁTICAS: UN MARCO DE REFERENCIA Y UN EJEMPLO¹

JHONY ALEXÁNDER VILLA OCHOA²

Resumen

La Educación Matemática, como disciplina científica, aborda las matemáticas desde diferentes contextos educativos. En el caso particular del aula de clase, uno de sus elementos de abordaje es el estudio de estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En este documento se presentan algunos elementos que permiten reflexionar sobre el proceso de modelación como estrategia didáctica para abordar la construcción de conceptos matemáticos en el aula de clase. Estos elementos se convierten en un avance de la investigación “El proceso de modelación en las matemáticas escolares³”, desarrollado en la Universidad de Antioquia con el apoyo del Programa de Educación de Adultos del ITM.

¹ Una versión resumida de este documento fue presentada en la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME XXI), en la ciudad de Maracaibo-Venezuela entre el 22 y el 26 de julio de 2007.

² Licenciado en Matemáticas y Física, Especialista en enseñanza de las Matemáticas, Magíster en Educación (línea Educación Matemática) y Estudiante de Doctorado en Educación, línea de investigación en Educación Matemática de la Universidad de Antioquia. Becario Colciencias 2007. Coordinador Académico del programa de Educación de Adultos del ITM y del Grupo de investigación FORDAD. Investigador miembro del grupo “Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit)” clasificado en Categoría A en Colciencias. Profesor de la UdeA. Correo electrónico: E-mail: javo@une.net.co

³ Este proyecto fue aprobado por la Dirección de Regionalización y por el Comité para el Desarrollo de la Investigación (CODI) de la Universidad de Antioquia, según el Acta N° 559 de diciembre de 2007.

Palabras clave

Modelación matemática, Modelización matemática, Funciones por parte.

Abstract

Mathematical education as a scientific discipline faces mathematics from diverse educational contexts. In the particular case of a classroom, one of its working objects is the study of strategies for mathematics teaching and learning. This paper presents some elements leading to think about the modeling process as a teaching strategy to tackle the construction of mathematical concepts in the classroom. Such elements become a progress of the research project called *The modeling process in school mathematics* developed by the Universidad de Antioquia with the support of ITM's Adult education program.

Key words

Mathematical modelling in the sciences, Mathematical modelling in the school.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las matemáticas en el transcurso de la historia ha dado cuenta de las múltiples relaciones entre las matemáticas y el mundo real (Posada, F. & Villa, J., 2006, p. 5). En las últimas décadas esta relación ha cobrado vital importancia, materializándose especialmente en el campo educativo mediante el proceso denominado *modelación matemática*. Muchos de los productos en este proceso han comenzado a permear las aulas de clase en los diversos niveles y en muchas instituciones del sistema educativo.

La inclusión de la modelación en el aula de matemáticas en Colombia se propone desde 1998 con la presentación de los Lineamientos Curriculares, quienes, además, proponen el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la implementación de otros cuatro procesos, a saber: *el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*. MEN (1998, p. 18). En este documento se presentan algunos elementos sobre la forma como la modelación se convierte en una herramienta didáctica para la construcción de conceptos matemáticos y se muestra, a manera de ejemplo, una situación que permitiría abordar el concepto de función por partes (o a tramos) en el aula de clase.

MARCO DE REFERENCIA

El proceso de modelización matemática es considerado como una actividad científica en matemáticas que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias. En los últimos años se han venido adelantando investigaciones (Bassanezi, 2002; Biembengut, M.; Hein, N. 2004) que posibilitan la adaptación de esta actividad científica en la enseñanza de las matemáticas, de tal manera, que se convierta en estrategia didáctica para abordar conceptos matemáticos en el aula de clase. Para iniciar, es necesario precisar los términos en los cuales se han de entender los conceptos de modelo y modelación matemática en el desarrollo de este documento.

El concepto de Modelo Matemático

El concepto de Modelo Matemático ha estado presente en muchos de los campos de las ciencias en las cuales la matemática tiene amplia aplicación en la resolución de problemas. Al respecto se han planteado algunas definiciones como:

- Modelo Matemático es un sistema axiomático constituido por términos indefinidos que son obtenidos por la abstracción y cualificación de ideas del mundo real. (Maki e Thompson, 1973, p. 14, Gazzetta citado por Leal, 1999⁴).
- Se define un Modelo Matemático como una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del “mundo-real”. Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales. (Giordano F., Weir M., Fox W., 1997, p. 34).
- Un Modelo Matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. (Biembengut, M.; Hein, N., 2004, p. 106).
- Se define como Modelo Matemático de un sistema prototipo S (físico, biológico, social, químico, etc.) a un completo y consistente sistema de ecuaciones matemáticas Σ , que es formulado para expresar las leyes de S y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento. (Rutherford, 1978, p. 5).

Estas definiciones de modelo hacen referencia, en gran medida, a la visión que se tiene de la matemática en relación con el mundo real. Sin embargo, existen diferencias entre dichas definiciones de acuerdo con la forma en cómo se “materializa” matemáticamente dicha relación, es decir, en la forma de representación matemática

⁴ Este documento es una tesis de Maestría en Ingeniería de Producción a la cual el lector puede acceder en <http://www.eps.ufsc.br/disserta99/leal/> . consultado el 1 de febrero de 2007.

del concepto o relación. La verdadera importancia de un modelo desde el punto de vista didáctico radica (Bassanezi 2002, citado en Posada y Villa 2006, p. 74), en tener un lenguaje conciso que expresa las ideas de manera clara y sin ambigüedades, además de proporcionar gran cantidad de resultados (teoremas) que propician el uso de elementos computacionales para calcular sus soluciones numéricas. Por ello, se llama simplemente modelo matemático, *a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación.*

La construcción de un modelo no se hace de manera automática ni inmediata, por el contrario, requiere de cierto periodo de tiempo en el cual el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y de la situación y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las “cantidades”, de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático. Al proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un fenómeno real es a lo que se llama: *modelización matemática.*

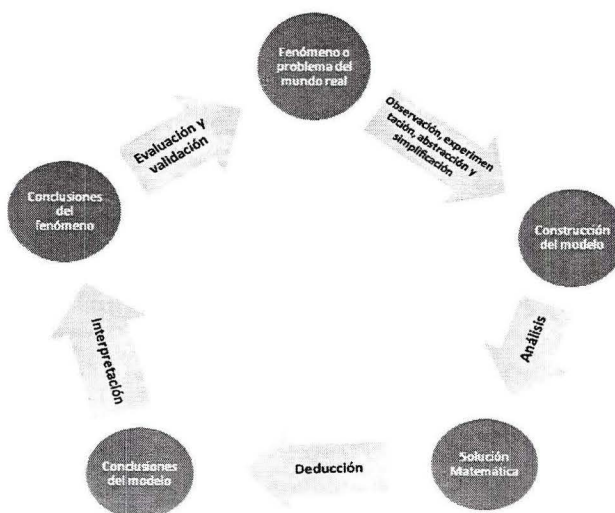
La modelización puede ser considerada como herramienta de representación de situaciones o fenómenos del “mundo real”, el cual se convierte en el sistema objeto de estudio. Como el propósito es obtener conclusiones del fenómeno objeto de estudio, se somete éste a un procedimiento de observación de su comportamiento, que será estudiado para identificar los factores que allí parecen estar involucrados. Desde esa perspectiva, la modelización matemática se considera como un ciclo que, de acuerdo con Berry, J., & Davies, A., (1996) citado en Crouch, R. & Haines, C. (2004, p. 198), se desarrolla a través de unas etapas; ellas son: *la declaración del problema en el mundo real; formulación de un modelo; solución matemática; interpretación de los resultados; evaluación de la solución; refinamiento del modelo y [nuevamente] la declaración del problema en el mundo real.*

Buscando construir una reinterpretación más profunda de este ciclo, es posible afirmar que éste comienza con la determinación

de un fenómeno o problema del mundo real, el cual es observado y sometido a un proceso de experimentación que intenta profundizar en su comprensión y en la búsqueda de datos; como no es posible considerar y/o identificar todos los factores involucrados en el fenómeno, se hacen las simplificaciones y supuestos que eliminen algunos de éstos, para con ello construir un modelo que representa el fenómeno.

Construido el modelo, se generan todos los análisis posibles y se utilizan las herramientas matemáticas para construir una solución matemática y sacar de ella conclusiones del modelo, las cuales deben ser interpretadas a la luz del fenómeno. En la búsqueda de la coherencia entre las conclusiones del modelo y del fenómeno mismo se plantean estrategias de evaluación y validación. Si después de la validación, el modelo está acorde con el fenómeno problema, finaliza el ciclo; en caso contrario, comienza de nuevo partiendo de la evaluación del fenómeno enriquecido con los análisis, se hace una observación, se ajustan los datos, las variables y se continúa la reforma del modelo y así sucesivamente. En la siguiente figura se esquematiza el procedimiento.

FIGURA 1. ESQUEMA QUE ILUSTRAS LOS MOMENTOS DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN



Todos los elementos esgrimidos hasta aquí hacen referencia a la modelización como actividad científica (por ejemplo, del matemático aplicado). Sin embargo, es posible que los estudiantes en el aula de clase recreen, en cierta forma, este proceso para la construcción de conceptos matemáticos. En la tabla 1, se presentan algunos

TABLA 1. ALGUNAS DIFERENCIAS ENTRE LOS PROCESOS DE MODELIZACIÓN Y DE MODELACIÓN EN EL CAMPO DE LAS MATEMÁTICAS

Criteriono	Como actividad científica	Como herramienta en el aula de clase
Propósito del modelo	El modelo se construye para solucionar un problema de otras ciencias (naturales, sociales, humanas...) o para avanzar en una teoría o ciencia.	El modelo se elabora para construir un concepto matemático dotado de un significado y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a su carácter aplicativo.
Los conceptos matemáticos	Emergen de la situación a través de un proceso de abstracción y simplificación del fenómeno.	Deben haber sido considerados a priori con base en la preparación y selección del contexto por parte del maestro y de acuerdo con los propósitos de la clase.
Contextos	Obedecen a problemas que comúnmente no han sido abordados o se abordan de una manera diferente al interior de la ciencia.	Deben obedecer a problemas abordados previamente por el docente de la clase con el objeto de evaluar su pertinencia con los propósitos educativos.
Otros factores	Se presenta generalmente en un ambiente propio de la ciencia en la cual se aplica y generalmente es externo a factores educativos.	Se presenta regularmente en el aula de clase bajo una motivación propia de contextos cotidianos y de otras ciencias.

aspectos que diferencian al proceso de modelización matemática como actividad científica y como herramienta para construir conceptos matemáticos en el aula de clase.

Ante estos aspectos, parece pertinente hacer una diferenciación entre la implementación del proceso de modelización en el aula de clase y como actividad científica. Algunos investigadores ya se han percatado de esta necesidad, por ejemplo, Hein, N.; Biembengut, M. (2006. p. 3) plantean que:

En la enseñanza formal, algunos factores como currículo, horario de las clases, número de alumnos por curso, disponibilidad de tiempo para que el profesor efectúe un acompañamiento simultáneo de los trabajos de los alumnos, nos llevaron a efectuar algunas adaptaciones en el proceso de modelización matemática como metodología de enseñanza, estableciendo un método que denominamos Modelación Matemática.

Esta diferencia se hace necesaria debido a que, en la mayoría de los casos, el proceso de modelización matemática no se puede desarrollar en todo su sentido en el aula de clase, en parte, porque algunas de las situaciones del mundo real a las que se pueden ver enfrentados los estudiantes, requieren de herramientas matemáticas que no siempre se encuentran en correspondencia con su desarrollo del pensamiento; por lo tanto, el docente debe realizar un proceso direccionado en dos sentidos: primero, el de descontextualización y segundo, el de recontextualización, de tal manera que la situación, sin perder su esencia e intencionalidad, se transforme de tal manera que propicie el aprendizaje de los estudiantes.

En este sentido, se entiende por *modelación matemática* la actividad que se realiza en la clase de matemáticas cuya *naturaleza* se deriva de la actividad científica de la modelización matemática. La modelación matemática, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un "micromundo" (contexto dotado de relaciones y significados) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real.

Entre los elementos comunes que guardan los procesos de modelación y modelización están: *la experimentación, la abstracción y simplificación*⁵ (en cuanto a que la idea se trabaja con un fragmento de la realidad), *el uso de representaciones*⁶, y en las diferentes *fases* que incluyen el recorrido desde el planteamiento del fenómeno hasta la construcción, evaluación, validación y modificación del modelo. Por esta razón, cuando se habla de modelación no se trata de una “*elementalización*” del proceso de modelización, sino todo lo contrario, una re-significación de este proceso con fines educativos. Con seguridad que esta distinción entre ambos términos carece de sentido dentro de la *narrativa* en el interior del aula, pero sí puede ayudar a los maestros a tomar conciencia de los elementos en los que convergen y divergen estos dos procesos, cuando son observados desde la panorámica de la educación.

El proceso de modelación desde una perspectiva del maestro

Una vez valorada la importancia de la modelación en la construcción de significados de conceptos matemáticos en el aula de clase, el maestro debe tomar conciencia de su papel dentro de la dinámica del proceso. La función del maestro en este aspecto se centra, básicamente, en diferentes momentos agrupados en dos fases. La primera de ellas, denominada en este documento como “*a priori*” se presenta ante la necesidad de establecer criterios claros que posibiliten la selección de las situaciones y contextos que puedan representar importancia para los estudiantes. La segunda fase, denominada “*ejecución*”, consiste en una serie de momentos que el maestro podría atravesar en el desarrollo de la situación de modelación en aula de clase. En este documento,

⁵ En términos de Bassanezi (2002, p 27-29) la *abstracción* es un proceso que debe llevar a la formulación de los modelos matemáticos. Dicho proceso incluye la selección de las variables, la formulación del problema en un lenguaje especializado, la formulación de hipótesis y la *simplificación*, dado que en muchos casos los fenómenos son lo suficientemente complejos como para ser considerados en todos sus detalles.

⁶ Se entiende en este aspecto el término *representación* en el sentido Duval (1999) como una representación semiótica.

se desarrollarán los diversos momentos correspondientes a la primera fase. El lector podrá remitirse a las fuentes bibliográficas, (en particular a Biembengut, M.; Hein, N., 2004), para observar algunas sugerencias en torno a la ejecución de la modelación con los estudiantes en el aula de clase.

Como se indicó anteriormente, a la fase 1 pertenecen todos aquellos criterios que el maestro debe tener presente para la elección y análisis de los contextos y fenómenos que se convertirán en el objeto por modelar. Algunos de los momentos que el maestro debe afrontar son:

- 1. Observación y experimentación:** Consiste, básicamente, en la identificación de un problema, fenómeno o conjunto de fenómenos particulares susceptibles de ser modelados. El maestro ha de tener presente criterios como los conceptos previos que se deben seguir para abordar inicialmente la situación, la familiaridad con el contexto del fenómeno o problema, ser un problema o fenómeno del “mundo real”, pero sobre todo, que tenga coherencia con el concepto o conjunto de conceptos que se pretenden re-crear con el fenómeno. Tener el cuidado que no sea una situación que sólo permita una traducción literal del lenguaje verbal al lenguaje simbólico, (i.e. el doble de un número aumentado en 3, para que el estudiante escriba inmediatamente $2x + 3$).
 - 2. Delimitación del problema:** Todo problema o fenómeno presenta inicialmente un conjunto de elementos y variables que deben ser modelados. El maestro debe tomar la decisión de cómo ha de organizar el grupo de estudiantes, de tal manera que se aborden los diferentes elementos o, por el contrario, debe buscar las estrategias que promuevan en los estudiantes decisiones para la delimitación de las cantidades que interviene y la simplificación del fenómeno de acuerdo con las exigencia del grupo.
 - 3. Selección de estrategias:** El maestro debe tomar la decisión sobre las estrategias, recursos, metodologías, que debe usar
-

con el fin de organizar una secuencia didáctica que involucre representaciones, conceptos a repasar, etc. que vaya desde la identificación de las cantidades hasta la construcción de diversos “modelos intermedios” y modelos deseados.

4. **Evaluación y validación:** Debe tener presente diversas formas de cómo se debe evaluar la pertinencia del modelo construido; las más comunes son: el cumplimiento de las condiciones con el conjunto de datos obtenidos experimentalmente, la confrontación de sus resultados con los compañeros, la confrontación con personas especialistas en el tema y las influencias del cambio en los comportamientos de las variables en la consistencia del modelo. La idea, en esta etapa, es que los estudiantes busquen estrategias alternativas de confrontación y validación, y no sólo apelen a la autoridad del maestro en este aspecto.
5. **Conexión con otros modelos y situaciones:** Una vez construido y validado el modelo, ¿cuáles deben ser los pasos por seguir? Primero, tratar de encontrar otros fenómenos en los cuales se puedan establecer relaciones entre los mismos conceptos, pero bajo nuevas interpretaciones; la idea es no quedarse en una visión única del campo de aplicación del concepto. Es a través de la identificación de invariantes, en una gama de situaciones, como el estudiante encuentra sentido a los conceptos.

À MANERA DE EJEMPLO

En este apartado se ofrecerá, a manera de ejemplo, una situación propia de la economía (mercadeo o consumo) la cual puede convertirse en un motivo para abordar un estudio de la *función por tramos o partes* en el interior del aula de clase.

A continuación se presenta un análisis que permite ilustrar los diferentes momentos que el docente debe abordar para hacer un análisis *a priori* de la situación.

1. **Observación y experimentación:** El maestro debe identificar un conjunto de problemas que posibiliten la construcción del

concepto en mención, en este caso, el concepto de *función por tramos o partes*. Por ejemplo, problemas como:

- a. Servicios públicos de energía, teléfono, acueducto, etc.
- b. Planes tarifarios presentados en diversos consumos: telefonía móvil, turismo, etc.
- c. En general, cualquier tipo de problemas sujeto a cambios en las condiciones y en la forma de relacionar dos variables.

En este caso se tomó la decisión de analizar el fenómeno de consumo de Internet⁷, en la ciudad. La decisión por la situación es tomada debido a criterios como:

- Involucra en su construcción los conceptos de las funciones polinómicas de grado cero y uno.
- Requiere tener un control de las variables y de la forma en cómo ellas varían.
- Permite el uso de diversos registros de representación, a saber: lenguaje verbal, tablas, ecuaciones simbólicas y gráficos cartesianos.
- Permite el uso de software de matemáticas en su solución.
- La situación permite desarrollar en sentido amplio al ciclo de la modelización presentado en la Figura 1.
- Porque es un problema de actualidad. El número de personas en la ciudad que comienza a hacer uso de este tipo de servicios está en aumento y generalmente la selección de sus planes de consumo no obedece a criterios claros.

La situación puede presentarse a los estudiantes en los siguientes términos:

⁷ La situación aquí presentada pretende ilustrar el tipo de análisis que el maestro debe realizar para tomar la decisión sobre un contexto o fenómeno como “motivo”, en la construcción de un concepto matemático a través de la modelación. No se pretende presentar la situación en un sentido totalitario ni absolutista, ni afirmar que no existan otras situaciones o problemas con iguales o mejores características para su modelación.

Se desea adquirir un plan de acceso Internet; para ello es necesario buscar entre las diferentes propuestas para la ciudad, aquella que mejor se ajuste a las necesidades. ¿Cuál de las propuestas existentes en el mercado será la más conveniente para las diferentes necesidades de los compañeros del grupo?

Una vez tomada la decisión sobre el problema y su contexto, se inicia el proceso de aproximación de búsqueda de las principales ofertas que existen en el mercado, y las fuentes a las cuales se pueden remitir los estudiantes para poder acceder a la información. Por ejemplo, páginas web de las empresas, avisos en periódicos, promociones en medios de comunicación, etc.

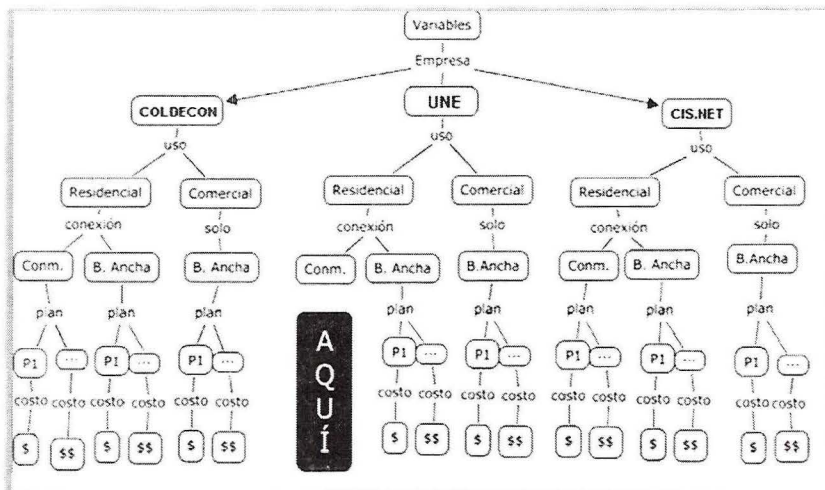
Entre las empresas que a nivel local tienen un mayor nivel de aceptación en el mercado se tienen: UNE (www.une.net.co), CIS (www.cis.net.co) y COLDECON (www.coldecon.net.co/html/sitio)

2. Delimitación de problema: En un análisis inicial de la situación se pueden identificar las siguientes variables:

- Empresa
- Uso (comercial o residencial)
- Tipo de conexión (banda ancha, conmutado)
- Velocidad de conexión
- Plan
- Tiempo de conexión (consumo)
- Costo

Por lo tanto, es necesario iniciar un estudio de las posibles relaciones que existen entre dichas variables y en la forma como se pretende ayudar a los estudiantes a construirlas. En la Figura 2, se encuentra un mapa de las posibles relaciones entre las variables que intervienen en el problema objeto de estudio.

FIGURA 2. MAPA DE LAS POSIBLES RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES DEL PROBLEMA



Observando el mapa, el maestro puede tomar la decisión de modelar el problema simplificando las variables empresa, uso y conexión, y encargarse, inicialmente, de establecer las relaciones entre el costo y el consumo para el uso residencial conmutado en la empresa UNE. Como otra opción, el maestro puede asignar organizar a los estudiantes en diferentes grupos y solicitarles que cada uno de ellos realice el mismo proceso, pero con otras variables del sistema.

3. **Selección de estrategias:** Para la modelación de este trabajo por parte de los estudiantes, se hace necesario que el maestro tome decisiones como:
 - a. La secuencias de preguntas que debe diseñar con el ánimo de orientar el trabajo de los estudiantes y ayudarles a tomar conciencia de las relaciones existentes entre las variables.
 - b. Las representaciones semióticas que se deben utilizar para la construcción del modelo.

- c. Los tipos de modelos que pueden ser creados y la información que de ellos se puede desprender.

A continuación se presenta la información necesaria para la construcción del modelo, según la decisión tomada anteriormente y que se resalta en la Figura 2.

BENEFICIOS	PLANES
• Velocidad de 56 kbps	• Iniciadores (5 horas). Precio: *\$ 7.500
• 1 Login de conexión	• Plan A (20 horas). Precio: *\$ 16.500
• 1 Cuenta de correo	• Plan Ilimitado. Precio: *\$ 27.000
• Acceso remoto al correo	El valor de la hora adicional es de \$1.300.
• Cobertura 9 ciudades	La fracción de hora se cobra proporcional
• Roaming Internacional	al valor de la hora
	• Estos precios no incluyen IVA

Para iniciar la construcción de modelo matemático se propone la siguiente secuencia de preguntas, de tal manera que se permita al estudiante avanzar en sus niveles de comprensión del problema. Por ejemplo:

1. ¿Cuánto pagaría una persona por consumir 8 horas en cada uno de los tres planes?
2. Si una persona dispusiera de \$10.000, ¿cuánto tiempo podría navegar en el plan *Iniciadores*?
3. Con base en la información de los planes, llene la siguiente tabla.

Número de horas consumidas	Costo del consumo en el plan <i>Iniciadores</i>	Costo del consumo en el plan <i>Plan A</i>	Costo del consumo en el plan: <i>Ilimitado</i>
2	\$ 7.500	\$ 16.500	
4			
5			
6			
	\$ 11.400		
10			
	\$ 15.300		
12		\$ 16.500	
	\$ 17.900	\$ 16.500	
15			
	\$ 24.400	\$ 16.500	
20			
21			
		\$ 20.400	
	\$ 34.800		
28			
		\$ 28.200	
30			
	\$ 41.300		
		\$ 42.500	
	\$ 64.700		

4. Describa la relación que existe entre:
- El número de horas consumidas y el costo del consumo en el Plan Iniciadores.
 - El número de horas consumidas y el costo del consumo en el Plan A.

- c. El número de horas consumidas y el costo del consumo en el plan Ilimitado.
5. Exprese las anteriores relaciones, utilizando símbolos y, luego, gráfico cartesiano.
 6. ¿En qué se afectarían las anteriores representaciones, si la fracción de tiempo no se cobrara proporcional al consumo, sino que se hiciera en cobro por hora completa? Exprese en la gráfica los cambios que esto generaría⁸.

Esta situación, presentada en lenguaje natural y en un contexto real, inducirá al estudiante a que mediante el sistema de representación tabular, infiera una relación entre el cambio de las dos magnitudes y posibilite la construcción del modelo.

En un segundo momento, se propone que la relación entre las magnitudes sea expresada mediante otros sistemas de representación, tales como el gráfico y el simbólico. De igual manera, la situación exige al estudiante tener cierto control sobre las variables (magnitudes), de tal forma que, a través de su análisis, pueda anticipar situaciones favorables o desfavorables para los consumidores de Internet, con base en las condiciones generales del problema.

Se espera que los estudiantes, una vez llenen la tabla, reconozcan la existencia de la covariación entre las magnitudes, aunque es posible que en un primer momento no logren expresar cuantitativamente dicha relación, esto a pesar de que detectarán los algoritmos con los que se hiciera su registro tabular.

La situación pretende poner en claro la capacidad de los estudiantes para comunicar conceptos matemáticos, lo cual se hace evidente en los diferentes usos del lenguaje y los diferentes sistemas de representación.

⁸ Este numeral permite al maestro generar reflexiones con el fin de introducir el concepto de funciones *parte entera*.

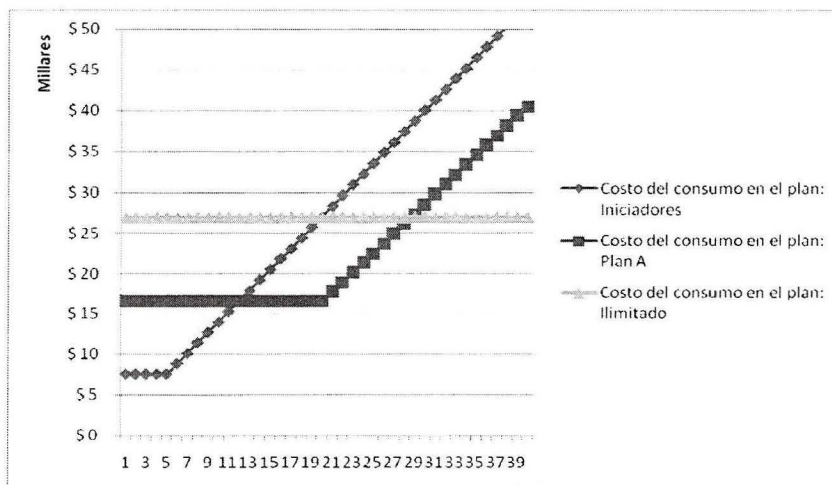
Con la implementación de la propuesta se espera promover en los estudiantes los siguientes desempeños:

- La identificación de las cantidades variables y constantes que intervienen en la situación.
 - Inicialmente los estudiantes podrían entender la razón de cambio constante, no como un cociente de diferencias, sino como el cociente aritmético entre los valores de la tabla. Esto permitirá proponer algunas ideas que ayuden a los estudiantes a identificar esta característica de la razón de cambio en el momento de la intervención.
 - Reconocimiento de la variación entre cantidades que intervienen en una situación y expresión en el registro tabular.
 - Identificación del papel que juega cada cantidad en la obtención de una cantidad de dinero, cuando se ofrecen varios planes de consumo.
 - Reflexión y argumentación sobre el proceso hecho para encontrar el costo de un consumo en cualquiera de los tres planes y del proceso inverso para encontrar el consumo dado, el plan y el costo.
 - Determinación de los cambios en la variación cuando el consumo se aproxima a los extremos de los intervalos que se pueden identificar en la situación.
 - Reconocimiento de diferentes relaciones de dependencia que intervienen en la situación. Este reconocimiento se puede manifestar en la verbalización de un procedimiento para calcular los valores de la tabla, para posteriormente determinar las expresiones simbólicas que reflejen tales dependencias.
 - Reinterpretación de la variación de las cantidades de identificación en las diferentes representaciones cuando se cambian o fijan cantidades que intervienen en el problema.
 - El reconocimiento del valor de la hora adicional como la razón de cambio (explícita) de las variables: consumo y costo del consumo en cada plan.
-

- Resolución de la situación a partir de ecuaciones lineales con una incógnita, por métodos numéricos (tablas) o simbólicos con la ayuda de la gráfica.
- La toma de decisiones acertadas con respecto al plan por adquirir, de acuerdo con los valores que asume la variable consumo.

A continuación se muestran los modelos matemáticos (en sus representaciones gráfica y simbólica-algebraica) que se espera construir en la ejecución dentro del aula de clase.

FIGURA 3. GRÁFICA CARTESIANA DE LA RELACIÓN ENTRE EL CONSUMO Y EL COSTO EN CADA UNO DE LOS PLANES



$$C(x) = \begin{cases} 7.500 & \text{Si } x \leq 5 \\ 7.500 - 1.300(x - 5) & \text{Si } x > 5 \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} 16.500 & \text{Si } x \leq 20 \\ 16.500 + 1.300(x - 20) & \text{Si } x > 20 \end{cases}$$

$$C(x) = 27.000$$

4. **Evaluación y validación:** En este caso, se pueden utilizar herramientas de tipo matemático como *la regresión lineal* para elaborar nuevos modelos y confrontarlos con los ya construidos. Adicionalmente, puede solicitarle a los estudiantes que realicen simulaciones con los compañeros del grupo y/o personas externas al mismo, de tal manera que ejecuten las conclusiones que ofrece el modelo y puedan confrontar los resultados del modelo con la situación. De la misma forma, pueden solicitar entrevistas con asesores comerciales de las empresas u otros especialistas en el tema. La confrontación de los datos experimentales con los datos arrojados por los modelos que van emergiendo durante el proceso se convierte en un elemento clave que permite ir justificando y modificando las propuestas de dichos modelos emergentes.
5. **Conexión con otros modelos y situaciones:** Este es un espacio para la confrontación del aprendizaje por parte de los estudiantes, ellos deberían estar en la capacidad de analizar diferentes fenómenos e identificar en ellos estructuras similares a la anteriormente realizada.

Además, en este momento se pone en práctica el ingenio de los estudiantes y se potencia el desarrollo de su creatividad. También se posibilita la formulación y validación de hipótesis en la búsqueda de conexiones con otros problemas.

CONSIDERACIONES FINALES

Este tipo de elaboraciones ha sido motivo de una reflexión continua en los cursos de Didáctica del Álgebra y Semilleros de Investigación de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemática, ofrecida por la Universidad de Antioquia. En estos espacios se han podido confirmar gran parte de los elementos esgrimidos de la revisión de la literatura hecha hasta el momento en esta investigación, a saber:

1. Se concibe la modelación como una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas, ya que proporciona una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, al tiempo que

permite constituirse en una herramienta motivadora en el aula de clase. A pesar de argumentos, la modelación no puede convertirse en la única estrategia para abordar los conceptos matemáticos en el aula de clase.

2. La modelación matemática potencia el desarrollo de capacidades en el estudiante, para posicionarse de manera crítica ante las diferentes demandas del contexto social junto con la capacidad para leer, interpretar, proponer y resolver situaciones problema.
3. La modelación matemática como proceso dentro del aula de clase, retoma su estructura de la modelización como actividad científica, por tanto, se espera que el estudiante alcance a desarrollar cierto grado de motivación y de destrezas frente a dicha actividad. De acuerdo con Ferrucci, B.; Carter, J. (2003, p. 665):

Mathematics provides one of the most powerful avenues for modelling problems across a wide range of subjects and topics. This great range of applications gives mathematical modelling the potential to improve students' motivation and attitudes related to mathematics. Societal and environmental issues are among the areas that use mathematical techniques to model situations and solve problems.

4. Desde la perspectiva del maestro, el proceso de modelación ofrece un espacio para enriquecer la creatividad y las capacidades del profesor para interpretar el contexto de los estudiantes y utilizarlos en el aula de clase. De igual manera, la ejecución del proceso de modelación, ofrece, particularmente, un medio para una ampliación de las visiones sobre las prácticas de los estudiantes, lo cual redundará en situar al maestro en un desarrollo profesional dentro del contexto de su propia aula de clase. Además, permite desarrollar las herramientas para interpretar, describir, explicar y documentar los niveles de comprensión de los estudiantes.

En una revisión de investigaciones realizadas frente a la modelación matemática en el aula de clase se valora que:

1. [...] mathematical modelling... [is]... an activity where students give meaning to ideas, problems [and] mathematical and non-mathematical concepts. Matos, J. F., 1998, citado en Crouch, R. and Haines, C, (2004 p. 197).
 2. La modelación puede considerarse como el puente entre las matemáticas y el mundo real. Sin embargo, se debe destacar que la complejidad del proceso de modelización matemática, tanto en su fase de formulación como en la de validación, obliga a tener en cuenta aspectos como:
 - Errores y aciertos en la experimentación y en la toma de datos.
 - La determinación de los tipos de magnitud involucrados en la situación y el papel de los mismos al interior del modelo
 - La observación y cuantificación de las relaciones entre las magnitudes involucradas en la situación.
 - La simplificación respecto a factores externos a la situación que la afectan.
 - El doble estatus que el objeto matemático juega cuando es tratado como modelo: por un lado, como propio de las ciencias matemáticas y, por el otro, como representante de un fenómeno de variación.
 - La generalidad de los resultados matemáticos frente a la particularidad de las situaciones.
 - El papel que juegan los sistemas de representación semiótica en la construcción de modelos matemáticos.
 - La validez de los resultados obtenidos. (Mesa, Y. & Villa, J. 2007, p. 8).
 3. [...] while written and oral reports in various forms are an established part of the scientific method adopted in engineering, science and technology, they also provide opportunities to consider communication in mathematics and communicating mathematics more directly and in particular, through the activity of mathematical modelling, communicating mathematical
-

meaning. Stephens, M., Waywood, A., Clarke, D., and Izard, J., (1993) retomado por Crouch, R. and Haines, C, (2004, p. 198).

BIBLOGRAFÍA

- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto.
- Biembengut, M., Hein, N. (2004). *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática*. Educación Matemática, 16 (002), 105-125.
- Crouch, R. & Haines, C. (2004). *Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model*. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 35 Issue 2, 197-206.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Ferrucci, B., Carter, J. (2003). *Technology-active mathematical modelling*. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 34 (5), 663-670.
- Giordano F., Weir M., Fox W. (1997). *A first Course in Mathematical Modelling*. Brooks/Cole Publishing Company.
- Hein, N. & Biembengut, M. (2006). *Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas*. In M. Murillo (Ed.), Memorias del V Festival Internacional de Matemática (pp. 1-25). Puntarenas: Colegio universitario de Puntarenas.
- Leal, S. (1999). *Modelação matemática uma proposta metodológica para o curso de economia*. Tesis de maestría no publicada. Florianópolis: Universidad Federal de Santa Catarina.
- Mesa, Y & Villa, J. (2007) *Aspectos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática*. En: Revista virtual RUCN Medellín: Universidad Católica del Norte. 21, 1-9.
- Ministerio de Educación Nacional. (2007). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Posada, F. & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Rutherford, A. (1978). *Mathematical Modelling Techniques*. New York: Dover Publications, INC.

