



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1803

Facultad de Educación

**La Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia en el
Marco de la Enseñanza para la Comprensión**

Trabajo presentado para optar al título de Magíster en Educación. Línea en
Educación Matemática.

Jaime Antonio Castilla Peñate

Asesor

Mg. John Henry Durango Urrego

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1803
Medellín 2016

Dedicatoria

*Dedico este trabajo de investigación a mi esposa y mi
hijo, quienes me hacen sentir el ser más afortunado del
mundo*



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Agradecimientos

“Dios no manda cosas imposibles, sino que, al mandar lo que manda, te invita a hacer lo que puedas y pedir lo que no puedas y te ayuda para que puedas”.

San Agustín

Ante todo, quiero agradecer a Dios por darme las fuerzas necesarias para afrontar este trabajo de investigación.

Gracias a:

Mi familia, por el amor que ellos me brindan a diario.

Los profesores que aportaron a la construcción de esta investigación, en especial a John Henry Durango Urrego, quien con su personalidad, dedicación, paciencia y conocimientos, me apoyó de forma continua.

Los compañeros de trabajo que siempre me animaron para que no desfalleciera en este proceso de cualificación, en especial a Pacho Niger y Álvaro Lara.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

ACTA DE APROBACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

En la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores John Henry Durango Urrego (Asesor) y Luz Helena Caraballo Martínez y Juan David González Molina en calidad de Jurados del Trabajo de Investigación titulado: "**LA EXPRESIÓN MATEMÁTICA DE LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA EN EL MARCO DE LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN**", presentado por el estudiante **JAIME ANTONIO CASTILLA PEÑATE** de la II Cohorte de la Maestría en Educación, Línea Educación Matemática, Región Urabá quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (según artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación, se firma esta Acta con la calificación de **APROBADO**.

Atendiendo a lo estipulado en el Artículo 46 y correspondientes parágrafos del Acuerdo Superior 122 de 1997, para el presente Trabajo de Investigación:

NO PROCEDE DISTINCIÓN

SE RECOMIENDA DISTINCIÓN MERITORIA

SE RECOMIENDA DISTINCIÓN
SOBRESALIENTE

Para constancia, se firma en Medellín al séptimo (07) día del mes de julio del año 2016.


JOHN HENRY DURANGO URREGO
Presidente del Jurado


LUZ HELENA CARABALLO
MARTÍNEZ
Jurado


JUAN DAVID GONZÁLEZ MOLINA
Jurado

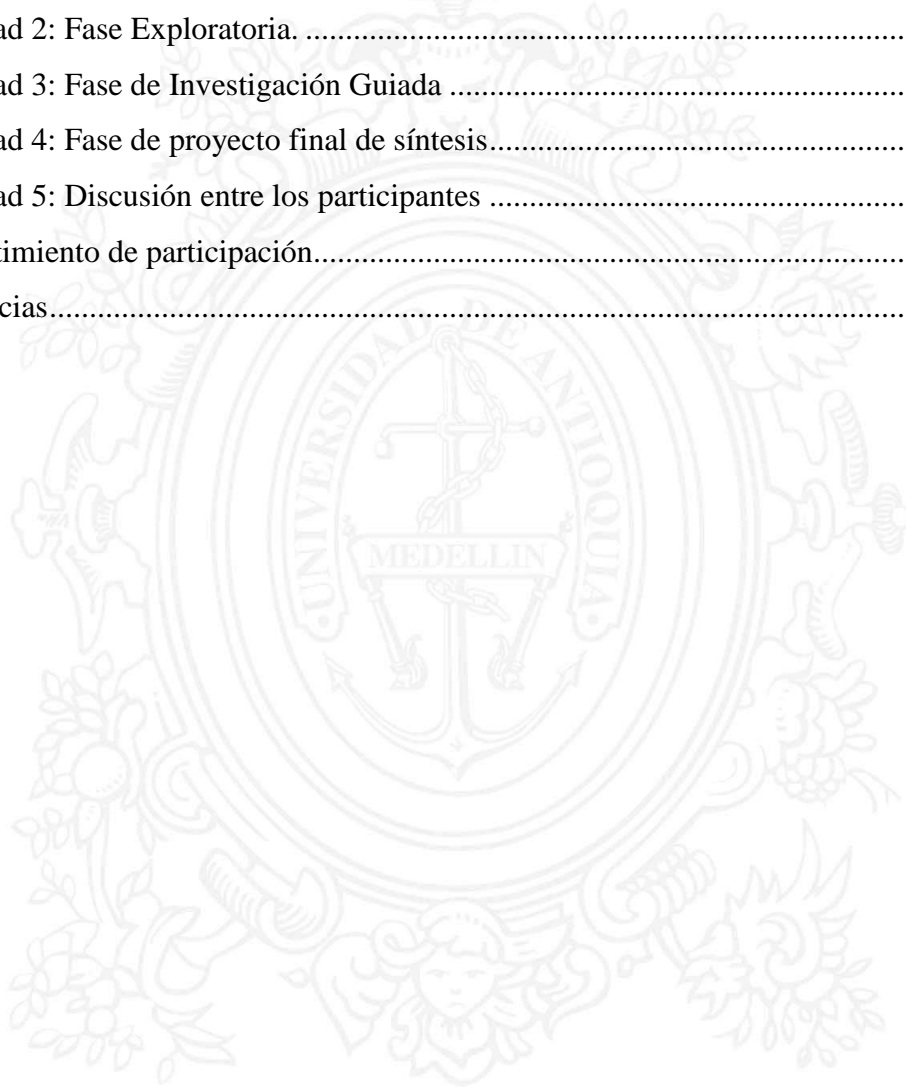
Índice de Contenido

1.	Planteamiento del problema de investigación.....	12
1.1.	Justificación	12
1.2.	El problema de investigación.....	13
1.3.	Pregunta de Investigación.....	17
1.4.	Objetivo General.....	18
1.5.	Objetivos Específicos	18
2.	Revisión de literatura en Educación Matemática.....	19
2.1.	Sobre la Enseñanza de la Geometría.....	20
2.2.	Aproximación a la literatura sobre la comprensión en matemática.....	21
2.3.	Investigaciones que aportan al estudio de la geometría.....	24
2.4.	Investigaciones en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión	26
2.5.	Investigaciones conexas al tema objeto de estudio.....	27
2.6.	Comprensión del objeto matemático de la presente investigación	29
2.7.	¿Por qué la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia?.....	30
2.8.	Contexto histórico.....	31
3.	Marco Teórico.....	36
3.1.	El Marco de la Enseñanza para la Comprensión	36
3.1.1.	<i>Pertinencia.</i>	36
3.1.2.	<i>¿Qué es la Comprensión?</i>	37
3.1.3.	<i>¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión?</i>	38
3.1.3.1.	<i>Los tópicos generativos.</i>	39
3.1.3.2.	<i>Las metas de comprensión.</i>	39
3.1.3.3.	<i>Los desempeños de comprensión.</i>	40
3.1.3.4.	<i>Evaluación diagnóstica continua.</i>	41
3.1.3.5.	<i>Dimensiones de la comprensión.</i>	42
3.1.3.5.1.	<i>Contenido o conocimiento.</i>	42
3.1.3.5.2.	<i>Método.</i>	43

3.1.3.5.3.	<i>Praxis o propósito.....</i>	43
3.1.3.5.4.	<i>Formas de comunicación.....</i>	43
3.1.3.6.	<i>Niveles de comprensión.....</i>	44
3.1.3.6.1.	<i>Nivel de Ingenuo.....</i>	44
3.1.3.6.2.	<i>Nivel de Novato.....</i>	45
3.1.3.6.3.	<i>Nivel de Aprendiz.....</i>	45
3.1.3.6.4.	<i>Nivel de Maestría.....</i>	45
3.1.3.7.	<i>Relación entre las dimensiones y los niveles de comprensión.....</i>	46
4.	Diseño Metodológico	51
4.1.	Paradigma	52
4.2.	El Estudio de Casos como Método	53
4.2.1.	<i>Orígenes.....</i>	53
4.2.2.	<i>Características.....</i>	54
4.2.3.	<i>Selección de los Participantes.....</i>	54
4.2.4.	<i>Información de los estudiantes seleccionados.....</i>	55
4.2.5.	<i>Selección de los casos.....</i>	55
4.3.	El contexto de la investigación	56
4.3.1.	<i>Contexto Institucional.....</i>	56
4.3.2.	<i>Contexto Municipal.....</i>	57
4.4.	Los casos.....	58
	<i>Caso I: Naty</i>	58
	<i>Caso II: Cristian.....</i>	58
	<i>Caso III: Stefa</i>	59
4.5.	Técnicas de recolección de la información.....	60
4.5.1.	<i>La Observación.....</i>	60
4.5.2.	<i>Discusión entre los participantes.....</i>	61
4.5.3.	<i>Revisión documental.....</i>	61
4.5.4.	<i>Análisis de la información.....</i>	61
4.6.	Camino Metodológico	62
4.7.	La Unidad Curricular	63

4.7.1.	<i>Tópico generativo.</i>	63
4.7.2.	<i>Metas de comprensión.</i>	64
4.7.3.	<i>Desempeños de comprensión.</i>	64
4.7.3.1.	<i>Fase de exploración.</i>	65
4.7.3.2.	<i>Fase de investigación guiada.</i>	67
4.7.3.3.	<i>Fase del proyecto final de síntesis.</i>	69
4.7.3.4.	<i>Discusión entre los participantes.</i>	71
4.7.3.4.1.	<i>Discusión Fase Exploratoria.</i>	71
4.7.3.4.2.	<i>Discusión Fase de Investigación Guiada.</i>	71
4.7.3.4.3.	<i>Discusión Fase proyecto final de síntesis.</i>	72
4.7.4.	<i>Evaluación Diagnóstica Continua.</i>	73
4.7.5.	<i>Descriptor de Desempeño.</i>	75
4.8.	<i>Validación.</i>	77
5.	<i>Análisis y Resultados</i>	79
5.1.	<i>Descripción y análisis</i>	79
	<i>CASO I. Naty</i>	82
	<i>CASO II. Cristian</i>	95
	<i>CASO III. Stefa</i>	110
6.	<i>Conclusiones y sugerencias</i>	124
6.1.	<i>Alcance de los objetivos</i>	125
6.2.	<i>Descriptor de la comprensión y clasificación de los estudiantes por nivel</i>	126
6.2.1.	<i>Matriz dimensión de contenido.</i>	126
6.2.2.	<i>Matriz dimensión de método.</i>	128
6.2.3.	<i>Matriz dimensión de praxis.</i>	129
6.2.4.	<i>Matriz dimensión de formas de comunicación.</i>	130
6.3.	<i>Aportes y sugerencias.</i>	131
6.4.	<i>Investigaciones futuras.</i>	131

ANEXOS	133
Actividad 1: Fase Exploratoria	133
Actividad 2: Fase Exploratoria	134
Actividad 3: Fase de Investigación Guiada	135
Actividad 4: Fase de proyecto final de síntesis.....	136
Actividad 5: Discusión entre los participantes	137
Consentimiento de participación.....	138
Referencias.....	144



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Índice de Tablas

Tabla 1: Relación I. Dimensiones y niveles de comprensión.....	47
Tabla 2: Relación II. Dimensiones y niveles de comprensión	48
Tabla 3: Relación III. Dimensiones y niveles de comprensión	49
Tabla 4: Relación IV. Dimensiones y niveles de comprensión.....	50
Tabla 5. Desempeños de Comprensión Fase Exploratoria.....	73
Tabla 6. Desempeños de Comprensión Fase de Investigación Guiada	74
Tabla 7. Desempeños de Comprensión Fase Proyecto Final de Síntesis	74
Tabla 8. Categorías Dimensión de Contenido.....	75
Tabla 9. Categoría Dimensión de Métodos.....	76
Tabla 10. Categoría Dimensión de Praxis.....	76
Tabla 11. Categoría Dimensión de Formas de Comunicación.....	77
Tabla 12. Nivel de Comprensión inicial por estudiante.....	81
Tabla 13. Nivel de comprensión por estudiante. Dimensión de Contenido	127
Tabla 14. Nivel de comprensión por estudiante. Dimensión de método.....	129
Tabla 15. Nivel de comprensión por estudiante. Dimensión de Praxis.....	130
Tabla 16. Nivel de comprensión por estudiante. Dimensión Formas de Comunicación....	131

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1: Ruta Planteamiento del problema.....	12
Ilustración 2: Algunas Investigaciones en Educación Matemática	19
Ilustración 3: Elementos de la Enseñanza para la Comprensión	38
Ilustración 4: Dimensiones de la Comprensión	42
Ilustración 5: Niveles de Comprensión	44
Ilustración 6: Ruta Diseño Metodológico.....	51
Ilustración 7: Ubicación del Municipio de Arboletes.....	56
Ilustración 8: Elementos de la Unidad Curricular	63
Ilustración 9: Elementos de la Circunferencia.....	65
Ilustración 10: Momento 1- actividad 2- fase exploratoria	66
Ilustración 11: Momento 2 actividad 2 fase exploratoria	67
Ilustración 12: Problema 1-proyecto final de síntesis	69
Ilustración 13: Problema 2 -proyecto final de síntesis	70
Ilustración 14: Problema 3-proyecto final de síntesis	70
Ilustración 15: Primera actividad fase exploratoria. Realizada por Naty	82
Ilustración 16: Actividad 2 fase exploratoria. Momento 1. Realizada por Naty	83
Ilustración 17: Actividad 2 fase exploratoria. Momento 2. Realizada por Naty	84
Ilustración 18: Producción Fase Investigación Guiada. Realizada por Naty	86
Ilustración 19. Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Naty.....	87
Ilustración 20: Actividad Proyecto Final de Síntesis. Realizada por Naty.....	93
Ilustración 21: Actividad 1. Fase Exploratoria. Realizada por Cristian.	96
Ilustración 22: Actividad 2 Fase Exploratoria. Momento 1. Realizada por Cristian.....	97
Ilustración 23: Actividad 2 Fase Exploratoria. Momento 2. Realizada por Cristian.....	97
Ilustración 24: Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Cristian.....	100
Ilustración 25: Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Cristian.....	101
Ilustración 26: Actividad Proyecto Final de Síntesis. Realizada por Cristian.....	107
Ilustración 27: Actividad 1. Fase Exploratoria. Realizada por Stefa.....	110
Ilustración 28: Actividad 2. Fase Exploratoria. Momento 1. Realizada por Stefa.	111
Ilustración 29: Actividad 2. Fase Exploratoria. Momento 2. Realizada por Stefa.....	112

Ilustración 30: Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Stefa 114
Ilustración 31: Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Stefa. 115
Ilustración 32: Actividad Proyecto final de Síntesis. Realizada por Stefa 121



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

CAPÍTULO I

1. Planteamiento del problema de investigación

La ilustración 1 muestra la ruta del texto relacionado con el planteamiento del problema de la presente investigación, el cual consiste en describir la realidad objeto de estudio, ubicándola en un contexto que permite comprender su naturaleza y relaciones.



Ilustración 1: Ruta Planteamiento del problema.

1.1. Justificación

Tradicionalmente la enseñanza de la Geometría en la Educación Básica se ha planteado a partir de un enfoque deductivo, en donde se promueve el aprendizaje memorístico de conceptos, teoremas, fórmulas y algoritmos (MEN, 1998)¹. En las clases de geometría que se imparten en la Institución Educativa José Manuel Restrepo del municipio de Arboletes esta realidad no es ajena, ya que precisamente es la forma convencional como se afronta el proceso para la comprensión de los conceptos matemáticos. Esto se percibe en la pasividad de los estudiantes frente a las distintas actividades propuestas por los docentes, dado que no se considera la habilidad de pensar, argumentar y actuar a partir de lo que los

¹ MEN: Ministerio de Educación Nacional.

estudiantes conocen. Por ejemplo, los estudiantes presentan dificultad para diferenciar la circunferencia del círculo e identificar algunos de sus elementos; tales como: radio, diámetro, cuerda, arco, rectas tangentes y secantes. Confunden los conceptos de perímetro y área, y sus expresiones matemáticas $2\pi r$ y πr^2 , en especial, no reconocen a pi (π) como número irracional, ni como un valor constante para el cociente entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia; aún más, desconocen los procesos que están inmersos en la expresión matemática² de la longitud de la circunferencia, entre los cuales encontramos: medición y razonamientos.

Esta propuesta investigativa busca analizar la Comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, en un grupo de estudiantes de octavo grado (8°) de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes, en el marco de la enseñanza para la comprensión, a partir de una representación imprecisa³ que los estudiantes tienen de su entorno, la cual se pretende comprender. Esta representación contribuye al desarrollo de ideas, relaciones, conjeturas y patrones, propios de la experiencia del ser humano y brinda soluciones a situaciones problemáticas presentes en el entorno propio del estudiante. Lo anterior apunta para que en esta investigación se reporten nuevos conocimientos, se validen y se realicen aportes al Marco de la Enseñanza para la Comprensión.

1.2. El problema de investigación

Uno de los asuntos problemáticos percibidos a través de mi labor como docente de Matemática de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes,

² Consiste en la relación matemática que surge al dividir la longitud de una circunferencia y su respectivo diámetro, obteniendo una constante llamada pi (π).

³ Falta de información adecuada para comprender un hecho o fenómeno.

se refiere a la dificultad que presentan los estudiantes de grado octavo (8°) para comprender algunos conceptos geométricos. Mi experiencia en esta Institución me ha permitido identificar que la Geometría se ha enseñado de manera tradicional⁴, debido a la metodología utilizada por algunos docentes para enseñar los conceptos matemáticos, en especial los geométricos, a partir de definiciones, algoritmos, aplicaciones, pruebas escritas, tiza y tablero. Lo anterior impide que se genere un interés por parte del estudiante, en donde él piense, reflexione, razone, argumente y actúe, a partir de lo que sabe.

Por lo expresado anteriormente, en correspondencia con lo que sustenta el MEN (2003)⁵, considero pertinente abordar como objeto de conocimiento, la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia para su estudio en esta investigación. Esto pretende favorecer el desarrollo de la comprensión de los estudiantes y construir nuevos conocimientos a partir de la realidad en la que se encuentran inmersos.

Cabe anotar que, dentro de esta metodología tradicional de enseñanza de la Geometría, he observado algunos estudiantes con destrezas para resolver situaciones problemas y desarrollar ágilmente la parte algorítmica, pero se les dificulta la comprensión de dichos conceptos. Así por ejemplo, si un estudiante realiza actividades con base en la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, no garantiza que se haya apropiado de la teoría relacionada con este concepto; pero ¿qué sucede si ese estudiante, desde su entorno o experiencia, evidencia situaciones concretas con las que está familiarizado? Específicamente, a partir de la manipulación de objetos circulares y de la

⁴ En esta metodología prevalece la transmisión de los conocimientos existentes sobre un determinado tema por parte del docente y el estudiante es simplemente un receptor de ellos.

⁵ El estudiante al finalizar quinto grado de básica primaria estará en capacidad de: reconocer en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) para compararlos y ordenarlos, realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto, analizar y explicar sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición, realizando estimaciones de medidas, requeridas en la solución de problemas.

medición de los mismos, podría encontrar regularidades, que lo conduzcan a mejorar la comprensión del tema objeto de estudio, de acuerdo con el desarrollo de dichas actividades; de hecho; por ejemplo, para Barrantes (2002) la Geometría es una herramienta para “comprender, describir e interactuar con el espacio en el que vivimos” (p. 348).

En este orden de ideas, considero que el proceso para la comprensión de los conceptos geométricos requiere ser replanteado a partir del currículo y de la pedagogía. En relación con el currículo de la institución, al indagar sobre las mallas curriculares del área de Matemática, se evidenció que el pensamiento Geométrico-Métrico, es considerado una unidad más de su contenido y es emprendida en el último tramo del año escolar.

En cuanto a la pedagogía, he notado que la Geometría no ha sido enseñada de manera que los estudiantes comprendan los diferentes conceptos geométricos, y de esta manera sean protagonistas de la construcción y apropiación del conocimiento.

Estos obstáculos percibidos desde mi práctica como docente, conllevan al fracaso escolar de estudiantes en el área de Matemática, debido a la dificultad para comprender los conceptos planteados, que se reflejan en la desmotivación y bajos resultados en las pruebas internas y externas, en el componente Geométrico-Métrico. Martínez-Otero (2009), define el fracaso escolar como: “toda insuficiencia detectada en los resultados alcanzados por los estudiantes en las instituciones educativas respecto de los objetivos propuestos para su nivel, edad y desarrollo, y que habitualmente se expresa a través de calificaciones escolares negativas” (p. 3).

La afirmación anterior se evidencia en eventos como: las olimpiadas del conocimiento matemático institucional y departamental⁶, pruebas escritas trimestrales, donde se evalúan los contenidos vistos durante el periodo y la prueba SABER realizada por el Ministerio de Educación Nacional cada año. Por tanto, se hace necesario que el docente diseñe y proponga a sus estudiantes situaciones coherentes con su entorno, de tal manera que los conocimientos adquiridos generen solución a los problemas planteados.

Lo expuesto anteriormente, me permite considerar que los estudiantes de grado octavo (8°) de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes presentan dificultad para comprender la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia. Esta dificultad se evidencia a través de la confusión que presentan respecto a los conceptos de perímetro y área contenida en la circunferencia, sus expresiones matemáticas $2 \pi r$ y πr^2 , los elementos asociados a ella, en especial a la concepción que tienen del número pi (π), al no reconocerlo como un decimal infinito no periódico y asociarlo al concepto de número irracional, y con su concepción de constante para un cociente entre el perímetro y el diámetro de cada circunferencia. Los estudiantes desconocen que para obtener un número irracional del cociente entre dos cantidades, por lo menos una de estas cantidades debe ser irracional.

Por consiguiente, consideré necesario diseñar e implementar una unidad curricular que contribuya a la comprensión de dicha expresión y los conceptos asociados. Esto lo hice a la luz del marco teórico de la enseñanza para la comprensión, ya que da herramientas a los docentes para la organización de sus experiencias en el aula. Esta teoría tiene en cuenta la

⁶ Son estrategias académicas cuyo propósito es afianzar el conocimiento adquirido por los estudiantes durante su etapa escolar y, facilitar su preparación para la presentación de las pruebas saber e ingreso a la vida universitaria.

habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que el estudiante conoce, y permite ubicar su comprensión en diversos niveles. Al respecto, Perkins y Blythe (1994) plantean una relación entre conocimiento y comprensión.

Todos tenemos una concepción relativamente clara de lo que es el conocimiento. Cuando un estudiante conoce, lo produce cuando se le pide, explica el conocimiento o demuestra la habilidad. La comprensión es un asunto complejo y va más allá de la mera reducción al conocimiento. (p. 2)

En la misma línea de ideas, afirman que para lograr comprensión se debe realizar una variedad de actividades que requieren pensamiento mediante la explicación, el hallazgo de evidencias y ejemplos, la aplicación y la representación de una manera nueva.

Por tanto, plantear una propuesta relacionada con la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, a la luz del Marco de la Enseñanza para la Comprensión, en un grupo de estudiantes de grado (8°), cuyo producto sea el diseño y la implementación de una unidad curricular, se constituye en un campo importante de investigación, en donde se pretende que los estudiantes afiancen su comprensión respecto al tema objeto de estudio.

1.3. Pregunta de Investigación

Esta investigación pretende indagar en los estudiantes, la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, para ayudar a resolver situaciones adversas en el proceso de formación de los estudiantes, mediante el diseño de actividades pertinentes, en correspondencia con las fases⁷ propias del Marco en mención, los estudiantes desarrollarían la capacidad para resolver problemas de su entorno y el proceso para la comprensión de los conceptos propuestos en el aula mejoraría significativamente, al

⁷ Fase exploratoria, de investigación guiada y proyecto final de síntesis. Estas fases hacen parte de uno de los elementos del marco de la enseñanza para la comprensión (los desempeños de comprensión).

consolidar los descriptores de nivel y dimensión para la comprensión del objeto matemático en estudio. Debido a lo anterior, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo los estudiantes de octavo grado (8°) de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes comprenden la Expresión Matemática de Longitud de la Circunferencia, en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión?

1.4. Objetivo General

Analizar cómo los estudiantes de octavo grado (8°) de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes comprenden la Expresión Matemática de Longitud de la Circunferencia, en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión.

1.5. Objetivos Específicos

Objetivo específico uno

Diseñar actividades de enseñanza para una Unidad Curricular, en correspondencia con las fases propias del Marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Objetivo específico dos

Consolidar descriptores de nivel y dimensión para la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia en los tres participantes de la investigación.

CAPÍTULO II

2. Revisión de Literatura en Educación Matemática

En este apartado se presenta la revisión de algunas investigaciones en Educación Matemática, que son pertinentes para el presente trabajo de investigación, ya que contienen teorías y resultados que permiten reforzar los argumentos dados a lo largo de este proceso investigativo. Además, se recopiló información relacionada con el objeto de estudio. La Ilustración 2 muestra una ruta a seguir, de acuerdo con la información anterior.



Ilustración 2: Algunas Investigaciones en Educación Matemática

2.1. Sobre la Enseñanza de la Geometría

En la Matemática, la Geometría es una rama perceptiva, concreta y asociada a la realidad que conocemos, por tal motivo es necesario replantear la manera cómo actualmente se enseña este conocimiento dentro y fuera del aula de clases.

En algunos casos los procesos de enseñanza de la Geometría privilegian el objeto de conocimiento y concede un papel pasivo al sujeto (MEN, 1998). Esta dificultad se percibe en la forma como algunos docentes enseñan los conceptos Geométricos. De igual forma, autores como Martínez (1989) manifiesta que:

La geometría impartida en la escuela ha fomentado el aprendizaje memorístico de conceptos, fórmulas o teoremas, al tratar de acelerar la adquisición de dichos conceptos, y ha eliminado de forma temprana la percepción y los conocimientos previos, que son la primera y principal herramienta de acceso al conocimiento geométrico. (p. 39)

Lo anterior indica que no todo proceso de enseñanza produce comprensión. El docente podría realizar un esfuerzo para que el estudiante comprenda, sin poder lograrlo, ya que comprender es un proceso que se da en el estudiante, a través de sus conocimientos previos, los cuales son las herramientas esenciales de acceso al conocimiento. Por otra parte, Guillén y Figueras (2003), como se citó en Pérez (2009) afirman:

No se imparte toda la Geometría porque se priorizan otros contenidos y queda poco tiempo a fin de año; otros Docentes admiten no impartirla por no dominarla, otros por no disponer de recursos adecuados. Esto evidencia que el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos Geométricos es limitado a partir del currículo y de lo pedagógico. (p. 247)

De acuerdo a lo anterior, el proceso para la comprensión de los conceptos geométricos requiere ser replanteado a partir del currículo y de la pedagogía, con el fin de que se genere una apropiada comprensión por parte de los estudiantes. Respecto a esto, Brousseau (1986) afirma:

Comprender matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas, [...] Una buena reproducción por parte del estudiante de una actividad científica exigirá que él actúe, formule, observe y construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura y que tome las que le son útiles. (p. 96)

Por tanto, la necesidad de la enseñanza de la Geometría en la escuela, debería responder a la tarea que esta desempeña en la vida cotidiana, en donde el estudiante construye su conocimiento, a partir de su forma de pensar e interpretar una situación determinada. De esta manera, el estudiante es un ser que participa activamente en su proceso de aprendizaje, en busca de soluciones a situaciones problemas presentados. En esta misma línea de ideas, el MEN (1998) expresa:

Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista. (p. 18)

Esto implica despertar un interés por desarrollar actividades pertinentes, que permitan lograr en los estudiantes niveles cada vez más altos de comprensión y una visión transversal sobre el conocimiento geométrico, proporcionándoles probablemente una gama de posibilidades de exploración, conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos.

2.2. Aproximación a la literatura sobre la comprensión en matemática

La comprensión de Conceptos Geométricos, en particular la Comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la circunferencia, hace parte de esta propuesta investigativa, y plantearla desde un marco teórico basado en la enseñanza para la comprensión sería pertinente para que los estudiantes comprendan y adquieran determinado conocimiento, a través de sus conocimientos previos, que les permita desenvolverse en

situaciones reales que sean de su contexto y otros, atendiendo con ello a las características de la comprensión en el marco teórico que fundamenta esta investigación..

Aún, cuando el término “comprensión” se ha usado de diversas formas en la literatura de la Educación Matemática, durante años, algunos investigadores han indagado definiciones diversas del término “comprensión”. En particular, Brownell y Sims (1946, p. 163), como se citó en Meel (2003), sintieron que la comprensión matemática era un proceso difícil de definir y explicaron que es complejo encontrar y formular una definición técnicamente exacta de “comprender” o “comprensión”.

De acuerdo con Sierpinska (1990), estas dificultades surgían de la falta de capacidad de la comunidad matemática educativa para distinguir entre el conocimiento y la comprensión, hasta antes de Skemp (1976), quien propuso dos tipos de comprensión: la “comprensión instrumental y relacional”, las cuales se definen más adelante. En particular, fue sólo hasta 1978, que la distinción de Skemp (1976) entre el conocimiento y la comprensión llamó la atención de la comunidad de educadores matemáticos.

Antes de 1978, la comprensión se identificaba generalmente con el conocimiento y se confrontó con el desarrollo de las conexiones en el contexto de la realización de operaciones algorítmicas y la resolución de problemas (Meel, 2003). Por otra parte, Polya (1962) identificó cuatro niveles de comprensión como una regla matemática: “mecánica, inductiva, racional e intuitiva”. Dichos niveles calificaban la comprensión como conocimiento asociado a reglas matemáticas.

Después del año 1978, Skemp introdujo en su trabajo relacionado con los tipos de comprensión la distinción entre dos modalidades de comprensión matemática: un saber qué hacer y por qué hacer (comprensión relacional) y un saber de reglas sin una razón explícita (comprensión instrumental). Este investigador, agregaría dos modalidades más (lógica y

simbólica), pero de las primeras se mantendría una tradición investigativa que contrapondría términos análogos para las modalidades relacional e instrumental. Estos términos son: procedimiento y concepto, concreto y simbólico, intuitivo y formal.

Otro de los marcos teóricos importante en el campo investigativo, es la Enseñanza para la Comprensión (Perkins y Blythe, 1994), en el cual apoyaré esta propuesta de investigación, sin dejar a un lado los diferentes aportes hechos por los autores antes mencionados, los cuales han trabajado los procesos de enseñanza-aprendizaje de tal manera que los estudiantes puedan comprender los conceptos que se les plantean y los docentes se desenvuelvan no solo en su saber específico, sino, también en su saber pedagógico.

Esta investigación es procedente en el marco de la Enseñanza para la Comprensión, ya que permite que el proceso de enseñanza tenga en cuenta el contexto social⁸ de los estudiantes, elemento que contribuye cuando se pretende comprender el concepto de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, y oriente al maestro a reflexionar sobre su práctica pedagógica. El marco de la Enseñanza para la Comprensión aborda cuatro preguntas claves: ¿Qué tópicos vale la pena comprender?, ¿Qué conocimientos se deben de comprender?, ¿Cómo debemos enseñar para lograr la comprensión?, ¿Cómo sabe el maestro lo que los estudiantes comprenden?, las cuales se responden en un marco de cuatro partes. Sus elementos son: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y valoración continua (Stone, 1999).

Con los elementos mencionados anteriormente se busca lograr la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia a través de cuatro niveles de

⁸ Entorno en el cual se considera un hecho o situación determinada. Este contexto implica a un grupo de individuos que interactúan entre sí.

comprensión (ingenuo, principiante, aprendiz y experto) para cada una de las dimensiones de la comprensión (contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación), como un aporte teórico que puede servir a los docentes en el momento de planear sus experiencias de aula, para que todas ellas estén dirigidas a que el estudiante avance de un nivel a otro de comprensión.

2.3. Investigaciones que aportan al estudio de la geometría

Los siguientes autores, realizan aportes significativos al estudio de la geometría, a través de sus investigaciones, las cuales, se encuentran fundamentadas por teorías que promueven la construcción del conocimiento.

Villarroel y Sgreccia (2011) proponen identificar y caracterizar materiales didácticos concretos que pueden utilizarse en la enseñanza de los contenidos geométricos en primer año de la Educación Secundaria. Además, se interesan por reconocer las habilidades geométricas que tales materiales permiten desarrollar al ser aplicados. Mediante un enfoque cualitativo de alcance exploratorio-descriptivo, se distinguen siete grandes grupos de materiales: modelos fijos 2D y 3D⁹, rompecabezas geométricos, tangram, geoplano, transformaciones dinámicas¹⁰, origami o papiroflexia¹¹, objetos del entorno real. Los mismos, dependiendo de la intencionalidad didáctica, favorecen el desarrollo de variadas habilidades geométricas.

⁹ Se refiere a los materiales didácticos concretos de dos y tres dimensiones, que pueden utilizarse en la enseñanza de los contenidos geométricos

¹⁰ Se refiere a materiales didácticos concretos que se pueden transformar, sin alterar totalmente todas sus características esenciales.

¹¹ Consiste en el arte o la habilidad de doblar un papel adecuadamente para obtener figuras variadas.

Blanco y Barrantes (2003) asumen que las concepciones de los estudiantes aparecen y se desarrollan durante la etapa escolar y son estables y resistentes a los cambios; y, como consecuencia de ello, se parte de la premisa de que para aprender a enseñar matemáticas debemos considerar las exigencias que proceden de las propias concepciones y conocimientos sobre la matemática escolar. Esta investigación tiene como objetivo describir y analizar las concepciones sobre la geometría escolar y su enseñanza – aprendizaje de los estudiantes para maestro. Para ello se considera la hipótesis de que los recuerdos y las expectativas de los estudiantes suministran información para caracterizar sus concepciones en el campo de la geometría y su enseñanza – aprendizaje en primaria.

Avilés (2012) establece el resultado de una investigación sobre una propuesta de implementación de la metodología indagatoria en geometría, la cual consiste en la búsqueda de aprendizajes significativos en el desarrollo cognitivo del estudiantado, a través de situaciones de aprendizaje constructivistas, que les permita reflexionar sobre sus propios aprendizajes. El estudio tiene como propósito fundamental identificar la relación que existe entre la aplicación de la metodología indagatoria y el desarrollo de habilidades cognitivas, capacidad de síntesis, reversibilidad, memoria activa y el desarrollo del pensamiento lógico, relacionadas al aprendizaje de la geometría. La metodología utilizada, para la realización de esta propuesta consiste en análisis de textos, artículos con información actualizada sobre la metodología indagatoria y la teoría constructivista de Piaget, que la sustenta.

Osuna (2007) plantea que la planificación de la enseñanza problematizada de los temas requiere seleccionar: una meta orientadora, es decir, lo que se espera conseguir con los estudiantes en el tema a tratar, un problema estructurante e identificar grandes pasos que permiten avanzar en su solución y posibles obstáculos asociados. En este artículo los autores

presentan los resultados de un proceso, que se da, a través de una secuencia de actividades en el aula para la enseñanza del modelo de visión de Kepler en la etapa secundaria, cuya apropiación han considerado la meta orientadora de la enseñanza de la óptica geométrica en este nivel educativo.

2.4. Investigaciones en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión

Los siguientes autores realizan aportes significativos, por medio de sus investigaciones, las cuales se encuentran fundamentadas en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. Estos aportes, sirven de insumo para nutrir la presente investigación, basada bajo el mismo marco teórico.

En González (2014) se expone la comprensión de los conceptos de perímetro y área por parte de algunos estudiantes de grado quinto (5) pertenecientes a una institución educativa de una región cafetera antioqueña de Colombia en el contexto de la siembra del café. De acuerdo con Santa, Londoño y González, (2013), la intencionalidad de la investigación es encontrar una relación entre el lenguaje geométrico y el lenguaje cotidiano de los estudiantes dentro de la agricultura del café, y teniendo en cuenta que el segundo puede influir en la comprensión del primero, el estudio se enmarca dentro del paradigma cualitativo. La motivación para abordar este trabajo radica en las dificultades que los estudiantes manifiestan en el aprendizaje de conceptos matemáticos, porque carecen de un manejo adecuado de ese lenguaje. (p. 61)

En Acevedo (2011), se diseñó una unidad curricular con el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión sobre el concepto de probabilidad. Este enfoque facilita la construcción de estrategias que potencializan el desarrollo de la comprensión, generando en el estudiante

la motivación e interés hacia el aprendizaje de la probabilidad a partir de las relaciones que puede establecer entre este concepto y su cotidianidad.

La unidad curricular se construyó, a través del trabajo directo, con un grupo de estudiantes de décimo grado de una institución educativa de Medellín. Esta experiencia permitió una aproximación a la caracterización de la comprensión del concepto objeto de estudio.

En Rendón (2009) se realiza una descripción y análisis a una propuesta, que busca cargar de significado conceptual y contextual, la razón de cambio, esto a partir de los fundamentos de la Enseñanza para la Comprensión. La investigación fue realizada con un grupo de estudiantes de grado noveno (9°) de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa del municipio de Caldas (Antioquia), con ellos se implementó una guía de actividades que vinculó las concepciones del cambio (cualitativo y cuantitativo) con situaciones reales. Los estudiantes para el desarrollo de estas actividades se apoyaron en representaciones geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas que dieron pie al desarrollo comprensivo de este concepto.

2.5. Investigaciones conexas al tema objeto de estudio

Los trabajos realizados por Díaz (2014), Carmona (2011) y Kerlegand (2008), tratan la Circunferencia como Objeto Matemático, a través del uso del software Geogebra y CABRI, así como el uso de medios como la regla y compás, respectivamente, para la construcción y comprensión de dicho concepto.

En Díaz (2014) se tiene como objetivo analizar, a través de una secuencia de actividades que siguen las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto, y mediada por el

software Geogebra, la construcción del concepto Circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica en estudiantes de quinto de secundaria. El software Geogebra fue importante como instrumento mediador en el proceso de construcción y comprensión del concepto Circunferencia, ya que los estudiantes por medio de este instrumento, lograron consolidar su definición como lugar geométrico, a través de la percepción dinámica de los infinitos puntos que la constituyen, y de sus representaciones gráfica y algebraica.

En el trabajo realizado por Carmona (2011) se fundamenta una propuesta didáctica que utiliza la geometría dinámica, la visualización y el Modelo de Van Hiele para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula de clases, la apropiación del Concepto Circunferencia por parte de los estudiantes y un aporte a la profundización del tema para los docentes.

En Kerlegand (2008) se muestra el desarrollo y los resultados de una investigación sobre la construcción de dos propiedades de la Circunferencia en el marco teórico del Modelo de Van Hiele y la Visualización, apoyándose para ello en el uso de una herramienta tecnológica: el software de geometría dinámica Cabri-Géometre. Las etapas seguidas en la investigación fueron: exploración del contexto escolar, delimitación del marco teórico, análisis a priori, diseño de la actividad didáctica, análisis de resultados y conclusiones.

2.6. Comprensión del objeto matemático de la presente investigación

Las dificultades que poseen los estudiantes de grado octavo (8°) de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes para comprender el objeto matemático planteado en esta investigación, me permiten presentar a través de diversos autores, algunos aspectos importantes sobre su evolución. Estos, proporcionan información necesaria para abordar y comprender el grado de desarrollo que ha tenido el tema objeto de estudio desde sus orígenes.

Díaz (2014) señala que: “los problemas geométricos planteados en la educación básica requieren para su solución una clara comprensión de los conceptos matemáticos involucrados” (p. 9). En efecto, esto sucede con los estudiantes a la hora de afrontar una situación determinada, muchas veces lo hacen de forma errónea, sin saber cómo plantearla y que fórmulas aplicar, por lo que se podría decir que no conocen los procesos y conceptos asociados a dicha situación.

De igual forma, Gutiérrez y Jaime (1996) señalan que la comprensión del concepto matemático es un problema complejo, pues depende del tipo de material usado, la metodología de enseñanza, la organización del conocimiento matemático y del tipo de actividades que se generan. Esto invita a replantear la manera como se ha impartido la enseñanza de la Geometría en el aula, en la que se da prioridad a la memorización de conceptos, fórmulas o teoremas, dejando de lado los conocimientos previos de los estudiantes. En relación a esto mismo, Sierpiska (1990) manifiesta:

Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto.

Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27).

Como ya se ha visto, en el contexto de la Educación Matemática existen trabajos de investigación que permiten captar el significado del objeto Circunferencia. Para lograrlo, consideran pertinente tener en cuenta los conocimientos y experiencias previas de los estudiantes como punto de partida para la comprensión de dicho objeto.

En la presente investigación se consideran diversos objetos circulares conocidos y encontrados por los estudiantes en su contexto, como medio para la Comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia. Si un estudiante desde su entorno o experiencia evidencia situaciones concretas¹², con las que está familiarizado, por ejemplo, a partir de la manipulación de objetos circulares y a través de procesos asociados con la medición, se podría encontrar regularidades, que lo conduzcan a mejorar su comprensión.

2.7. ¿Por qué la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia?

Consideré pertinente para esta investigación abordar como objeto matemático la Expresión Matemática de la longitud de la Circunferencia, ya que no solo la vincula con el contexto, a través de los diferentes objetos circulares conocidos, sino también, con otros conceptos matemáticos subyacentes, y desde su estudio se podría evidenciar la comprensión de los estudiantes. Esto, en base al Marco de la Enseñanza para la Comprensión.

¹² Situaciones reales que se pueden determinar de un modo preciso o específico.

2.8. Contexto histórico

La Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia cobra relevancia a la hora de relacionarse con la concepción del número pi, su naturaleza irracional, su concepción de constante para un cociente entre el perímetro y el diámetro de cada circunferencia. Al respecto, Dunham (1995, p. 49) señala que la circunferencia, seguramente ha sido, un concepto geométrico importante: “las circunferencias son sencillas, elegantes y bellas, dotadas de una auténtica perfección en dos dimensiones”.

Entre los pueblos que contribuyeron notablemente al desarrollo de la Geometría, se encuentran: los babilonios, los egipcios y los griegos. Probablemente la rueda sea uno de los inventos importantes de la historia. Prácticamente, cualquier máquina construida desde el comienzo de la revolución industrial posee en mayor o menor medida la presencia de la rueda, por lo que es difícil imaginar un sistema mecanizado sin la presencia de esta o un componente simétrico moviéndose de forma circular alrededor de un eje.

Los diagramas de antiguas tablillas de arcilla, prueban que la primera rueda fue usada en Ur, Mesopotamia alrededor del año 3.500 a.C. Y aunque no se registran evidencias arqueológicas, se cree que las primeras ruedas pudieron aparecer en Sumeria alrededor del año 8.000 a.C. Su invención es el resultado de una lenta evolución de la combinación del rodillo y el trineo (Milhaud, 2010.)

Los egipcios trazaban las circunferencias mediante una cuerda atada a un punto fijo, a mayor cuerda mayor era la Circunferencia obtenida, así como el área del círculo que está delimitada. Tomaron la longitud de la cuerda y la superpusieron sobre la Circunferencia y aproximaron cuantas veces cabía en ella, llegando a la conclusión de más de seis (6) y un

cuarto de veces, independiente de la Circunferencia y su cuerda. Los Egipcios plantearon un valor aproximado de la Longitud de la Circunferencia de 6.28 veces mayor que el radio.

En cuanto al área del círculo, los egipcios tomaron como base el área de un cuadrado que ya conocían y observaron cuantas veces cabía en el área del círculo, con la condición que el lado del cuadrado coincidiera con el radio de la circunferencia, llegando a una aproximación entre tres (3) y cuatro (4), más exactamente tres (3) y un séptimo, es decir, más o menos 3,14 veces. Concluyeron entonces que el área de un círculo equivale al área de un cuadrado construido sobre la longitud del radio multiplicado por 3,14. (Carmona, 2011).

De acuerdo con Parra (2009), se estudian los resultados sobre la equivalencia entre el círculo y el triángulo de base la circunferencia del círculo y altura el radio (es decir, reducción de la cuadratura del círculo a la rectificación de la circunferencia), y cálculo aproximado de la razón entre la circunferencia y el diámetro (valor aproximado del número π). Entre los resultados está: El área del círculo es al cuadrado de su diámetro 11 a 14 (el círculo es los $11/14$ del cuadrado circunscrito si la longitud de la circunferencia es $31/7$ veces el valor del diámetro).

Brisón (450 A.C) como se citó en Morales (2002), se basó en la prueba de Antífanos, al inscribir y circunscribir polígonos en un círculo, y concluyó que el círculo es mayor que todos los polígonos inscritos y menor que los circunscritos, en relación con su área. Afirmó, con razón, que el área del círculo está comprendida entre la de los polígonos inscritos y circunscritos. A él se atribuye el agregado erróneo de que el área del círculo estaba dada por el valor medio proporcional entre las áreas de los cuadrados inscrito y circunscrito; esto equivale a adoptar para π (π) la aproximación de $2\sqrt{2} = 2.828$.

Arquímedes (siglo II A.C) en su libro sobre la Medida del Círculo en el Teorema I de esa obra nos ofrece una bella "cuadratura" del círculo con su método de exhaución; y en el Teorema III obtiene la famosísima aproximación del número pi (π), la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, la fracción $22/17$. La enorme influencia que la obra arquimediana ejerció sobre la comunidad científica a lo largo de la Edad Media árabe y latina, así como en el Renacimiento italiano, tuvo en la Medida del círculo el representante más eficaz e iniciático, tanto por la fascinación de lo circular, como por la sencillez de los enunciados de sus teoremas y el magistral desarrollo de sus demostraciones (Montesinos, s.f).

En el año 1706, Jones utiliza por primera vez en un texto matemático el símbolo para representar la constante que relaciona al perímetro de una circunferencia con su diámetro. Diversas figuras habían sido adoptadas antes para representar esa constante, las cuales obedecían principalmente a criterios personales de cada uno de los autores, sin que, por ende, pudiera tenerse un consenso en este sentido. Se cree que la elección de Jones surgió de la inicial de la palabra en griego que significa perímetro. La adopción definitiva del símbolo pi (π) sólo se logró, a partir de 1737, cuando Euler lo utiliza en sus trabajos posteriores (Reif, 2000).

En 1776 el alemán Lambert, presenta su prueba de que tanto e como π son números irracionales, lo que en otras palabras significa que ninguno de los dos puede ser solución de una ecuación de primer grado con coeficientes enteros. Esta demostración empezaba a cerrar las puertas de la solución al problema de la cuadratura del círculo o, de que, en cierta manera, la aparición de las cifras decimales de pi (π) fuera un hecho cuantitativamente previsible. Algunos trabajos del siglo XIX mostraron que dicha solución sería posible si pudiera

expresarse como cualquier tipo de combinación finita de radicales o términos de raíces cuadradas, es decir, si π resultara como solución de un grupo de ecuaciones de segundo grado. De esta manera el problema geométrico se convertiría en uno puramente algebraico, el cual tendría inmediata solución (Reif, 2000).

La probabilidad así planteada pronto dejó de tener cualquier vigencia, cuando Liouville demuestra en 1840 la existencia de los números trascendentales, es decir, aquellos que no son solución de ninguna ecuación algebraica de cualquier grado con coeficientes enteros, y cuando posteriormente Lindemann encuentra en 1882 que π es uno de ellos. El problema había sido por fin resuelto: la cuadratura del círculo es imposible; el hombre tardó más de veinticinco (25) siglos para demostrarlo (Reif, 2000).

Una curiosidad respecto al número π radica en lo que podrían llamarse elucubraciones filosóficas trascendentales sobre este número. Una de ellas se refiere a la sabiduría infinita que podría estar escondida en el número π (Vélez, 1988) como se citó en (Reif, 2000), y se basa en una codificación particular de los elementos propios de la escritura, consistente en sustituir cada letra o signo de puntuación por medio de un número previamente convenido. De esta manera, un texto cualquiera podría convertirse en una secuencia numérica tan extensa como el texto mismo, o viceversa. Dado el inmenso e infinito desarrollo de los decimales de π , existiría la posibilidad de encontrar allí codificada toda clase de información, pasada, presente y futura, literaria y científica, pública y personal, verdadera o falsa. Esto como especulación resulta válido; desde el punto de vista práctico, inútil y muy poco menos que utópico. Otros apuntes de diferentes direcciones hacen más "deliciosa" la historia de π . Por ejemplo, en la construcción de la famosa pirámide de Kheops; sus dimensiones originales son de 232.805 metros de base y 148.208 metros de altura. Si se

divide el doble de la primera de estas cifras por la segunda se obtiene un valor de π con cinco decimales exactos, y un error inferior a seis millonésimas. Sin embargo, este hecho ha sido considerado simplemente una coincidencia... una asombrosa coincidencia (Reif, 2000).

Por otra parte, se puede mencionar el libro de Records Guinness, que en su edición de 1988, consigna en la categoría de memoria la "hazaña" de un japonés, Hideaki Tomoyori (nacido en 1932), quien el 9 y el 10 de marzo de 1987 recitó en la University Club House de T'Sukuba las primeras 40.000 cifras decimales de pi (π) en un tiempo de 17 horas y 21 minutos, incluyendo 4 horas y 15 minutos en total de descanso. De esta manera, él mismo superó su propia marca de 15.151 cifras, establecida en 1979, y que constituyó, en su momento, el mayor registro numérico al respecto (Reif, 2000).

La historia de la Circunferencia es tan amplia, que el reciente escrito sólo puede describir una pequeña parte de ella. Esto muestra la importancia del tema objeto de estudio de la presente investigación.

Capítulo III

3. Marco Teórico

3.1. El Marco de la Enseñanza para la Comprensión

En este capítulo presento La Enseñanza para la Comprensión como marco teórico del presente trabajo de investigación. Se describen los elementos que la conforman, al igual que las dimensiones y los niveles de comprensión. La manera como se tiene en cuenta este marco teórico en la presente investigación, se presenta en el siguiente capítulo, a través del diseño metodológico, el cual incluye una unidad curricular, en la que el estudiante dará cuenta de su comprensión respecto al tema objeto de estudio.

Las bases teóricas de este marco, descansan sobre décadas de trabajo dirigido por investigadores, tales como: David Perkins, Howard Gardner y Vito Perrone, los cuales dieron inicio al proyecto, al convocar a un seminario de docentes reflexivos e investigadores universitarios interesados en una investigación conjunta tendiente a una pedagogía de la comprensión¹³ en los Estados Unidos. Este marco estructura la investigación para ayudar a los docentes a analizar, diseñar, poner en práctica y evaluar experiencias centradas en el desarrollo de la comprensión de los estudiantes (Stone, 1999).

3.1.1. Pertinencia.

El Marco de la Enseñanza para la Comprensión además de que fortalece la experiencia docente, direcciona el currículo, al proponer la comprensión de los conceptos de acuerdo con las necesidades e intereses de los estudiantes, que a su vez participan en la

¹³ La pedagogía de la comprensión se basa en la manera como el docente orienta los procesos de enseñanza con sus estudiantes, respecto a un tema determinado.

construcción de su propio conocimiento. Esto implica para los docentes la posibilidad de repensar su práctica pedagógica y para los estudiantes la posibilidad de despertar un interés reflexivo hacia lo que comprenden. Acevedo (2011, p. 24), afirma: “el marco de Enseñanza para la Comprensión, además de dar un aporte teórico sobre la comprensión, brinda a los docentes herramientas para la planificación y diseño de sus prácticas de aula y así fomentar la comprensión”. Por tanto, es conveniente abordar el concepto de comprensión para detallar el marco teórico que fundamenta la presente investigación.

3.1.2. ¿Qué es la Comprensión?

Perkins y Blythe (1994) plantean que la comprensión se presenta cuando el estudiante puede pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que sabe. A diferencia, de lo que sucede cuando un estudiante no puede ir más allá de la memorización y el pensamiento, y las acciones rutinarias, esto indica falta de comprensión.

Lo anterior es un manifiesto de que la memorización y la repetición de los procesos algorítmicos no son suficientes para desarrollar una comprensión adecuada sobre un tópico dado, por tanto es fundamental que el estudiante se involucre en actividades en donde piense, reflexione y explique, desde lo que sabe. En este sentido, Perkins y Blythe (1994) afirman que la comprensión es poder realizar una gama de actividades que requieren pensamiento en cuanto a una situación dada. De esta forma, el aprendizaje puede estar al nivel de la comprensión y no al de memorización.

Los supuestos anteriores, indican que para llevar a cabo un aprendizaje para la comprensión, es necesario que los estudiantes desarrollen actividades que no sean rutinarias

y produzcan solo conocimiento, más bien, que les permita justificar, comparar, vincular, aplicar y reflexionar de manera profunda sobre sus desempeños.

3.1.3. ¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión?

“La enseñanza para la comprensión involucra a los estudiantes en desempeños de comprensión. Pero los esfuerzos por enseñar para la comprensión revelan que la tarea es compleja. Una pedagogía de la comprensión necesita más que una idea acerca de la naturaleza de la comprensión y su desarrollo; este marco conceptual aborda cuatro preguntas: ¿Qué tópicos vale la pena comprender? ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos? ¿Cómo podemos promover la comprensión? y ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los estudiantes? Estas preguntas se responden en un marco de cuatro partes. Sus elementos son: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua” (Stone, 1999, p.94). La ilustración 3 transmite el mensaje del texto anterior.



Ilustración 3: Elementos de la Enseñanza para la Comprensión

3.1.3.1. *Los tópicos generativos.*

Los tópicos generativos tienen que ver con los temas esenciales dentro de una o más disciplinas o áreas de estudios, comprensibles para los estudiantes, y que además, proporcionen relaciones significativas con el contexto en el que se desenvuelven los estudiantes. Estas características apoyan el desarrollo de las comprensiones por parte de los estudiantes y les da la posibilidad de contar con recursos adecuados para abordar el tópico planteado.

De acuerdo con Stone (1999), los tópicos generativos promueven conocimientos que brindan significado y sirven de apoyo para el desarrollo de las comprensiones de los estudiantes. Los tópicos generativos son centrales para uno o más dominios o disciplinas, son de interés para los docentes y se conectan con otros temas presentes en la misma disciplina o fuera de ella.

3.1.3.2. *Las metas de comprensión.*

De acuerdo con Blythe (2002, p. 45) las metas de comprensión se definen como enunciados que contienen conceptos y procesos; y que además, promueven destrezas en los estudiantes. Estos enunciados pueden plantearse a través de preguntas, en las que se refleje lo que deben comprender los estudiantes. Las metas de comprensión, denominadas hilos conductores, manifiestan lo que el docente considera que sus estudiantes deberían comprender.

Respecto a lo anterior, considero pertinente que los estudiantes conozcan las metas de comprensión. Estas metas, les mostrará en qué dirección se orienta su aprendizaje y cuáles son las cosas más importantes que deben comprender.

3.1.3.3. *Los desempeños de comprensión.*

Los desempeños de comprensión son actividades desarrolladas por los estudiantes, que van más allá de la memorización y la rutina, es decir, demuestran lo que comprenden los estudiantes, de acuerdo a las metas de comprensión planteadas. Un desempeño de comprensión, además de exigir, permite avanzar a los estudiantes en su aprendizaje, permitiéndoles usar lo que saben de nuevas maneras. (Stone, 1999)

Los desempeños de comprensión no le quitan significación al conocimiento y a las destrezas básicas alcanzadas por los estudiantes, debido a que, aspectos como la memorización y la práctica, apoyan el aprendizaje de los mismos. Sin embargo, la comprensión de los estudiantes va más allá. Este elemento del Marco de la Enseñanza para la Comprensión se desarrolla en tres fases:

Fase uno. De exploración: Desempeños que le permiten a los estudiantes conectarse con el tópico generativo, a través de los conocimientos previos que poseen.

Fase dos. De investigación guiada: Desempeños que se enfocan en las actividades, que les permiten a los estudiantes generar conocimientos que contribuyan a la comprensión del tópico generativo.

Fase tres. De proyecto final de síntesis: Desempeños que le permiten a los estudiantes demostrar su comprensión, respecto al tópico elegido.

3.1.3.4. Evaluación diagnóstica continua.

De acuerdo a Blythe (2002, p. 45), la evaluación diagnóstica continua se define como el proceso por el cual los estudiantes obtienen realimentación continua para sus desempeños de comprensión con el fin de mejorarlos.

Con respecto a esto, la evaluación diagnóstica continua se puede concebir como un proceso que posibilita evidenciar los desempeños de los estudiantes, con el fin de avanzar en su comprensión. Por tanto, los criterios para evaluar cada desempeño de comprensión deben ser: claros. Concretamente al inicio de cada desempeño de comprensión. Pertinentes. Estrechamente relacionados con las metas de comprensión. Y públicos. Todos los participantes de la investigación deben conocerlos y comprenderlos (Stone, 1999).

Por otra parte, el marco de la enseñanza para la comprensión, a su vez destaca cuatro dimensiones de la comprensión: contenido, métodos, praxis y formas de comunicación (Stone, 1999), tal como se muestra en la ilustración 4.

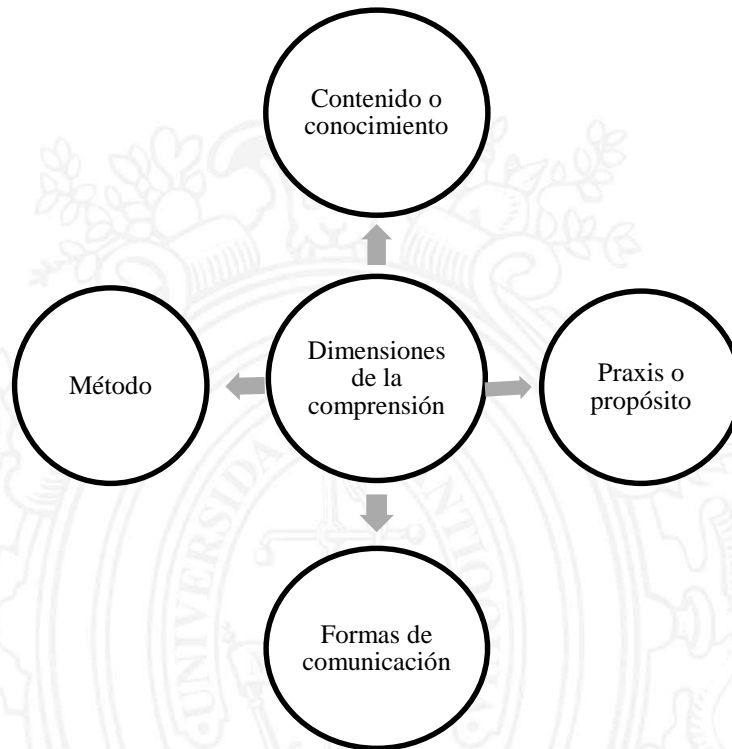


Ilustración 4: Dimensiones de la Comprensión

3.1.3.5. Dimensiones de la comprensión.

De acuerdo con Stone (1999) “las dimensiones de la comprensión permiten concebir la definición de comprensión de una manera delimitada. Es esta dimensión se describen cuatro aspectos de la comprensión que se pueden desarrollar en cualquier dominio o disciplina”. Las dimensiones de la comprensión son tenidas en cuenta en la presente investigación, con el fin de enriquecer la comprensión de los estudiantes, respecto al tema objeto de estudio.

3.1.3.5.1. Contenido o conocimiento.

En esta dimensión se evalúa en qué proporción los desempeños de los estudiantes muestran el avance de las ideas o conceptos específicos de una disciplina, a partir de sus

creencias intuitivas. Además, se evalúa la capacidad de los estudiantes para razonar de manera flexible sobre los conceptos o teorías ricamente organizadas. En relación con esta dimensión es fundamental plantearse la pregunta: ¿Qué se pretende que el estudiante comprenda? Lo anterior indica que la comprensión hace referencia a contenidos específicos y organizados, que conforman la teoría.

3.1.3.5.2. Método.

En esta dimensión se mide la manera en la que los estudiantes desarrollan una actitud sana, hacia sus propias creencias, es decir, acerca de lo que piensan, saben, oyen, leen y hacia el conocimiento que surge de diversas fuentes. Esta dimensión se relaciona con la manera como se construye el conocimiento en determinada área, a través de la manipulación o elaboración de elementos que permitan lograr la comprensión por parte de los estudiantes.

3.1.3.5.3. Praxis o propósito.

En esta dimensión se mide la forma como los estudiantes reconocen una diversidad de aplicaciones posibles de lo que comprenden. Este proceso le da sentido al conocimiento porque lo relaciona con las posibilidades de aplicarlo en la vida cotidiana. En relación con esta dimensión es pertinente plantearse la pregunta: ¿Para qué pretendemos que el estudiante comprenda?

3.1.3.5.4. Formas de comunicación.

Esta dimensión comunica el conocimiento por medio de una variedad de sistemas simbólicos, los cuales pueden ser verbales y corporales, permitiendo a los estudiantes expresar sus ideas. Lo anterior, permite considerar, en qué medida los estudiantes muestran

dominio de los desempeños en los que se encuentran involucrados, como por ejemplo, hacer presentaciones en público.

3.1.3.6. Niveles de comprensión.

De acuerdo con Stone (1999), el Marco de la Enseñanza para la Comprensión plantea cuatro dimensiones, las cuales fueron definidas en párrafos anteriores. Dentro de cada dimensión, el marco describe cuatro niveles de comprensión: ingenuo, novato, aprendiz y maestría, tal como se muestra a través de la ilustración 5.

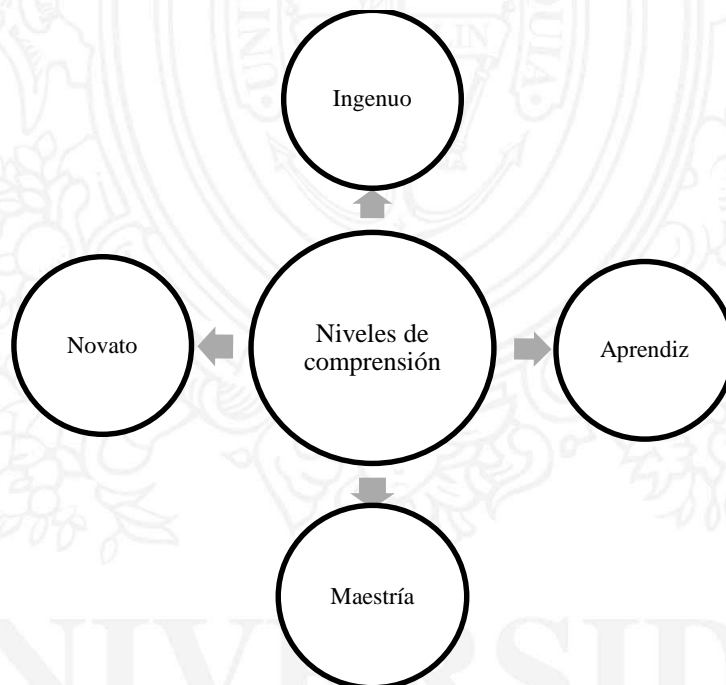


Ilustración 5: Niveles de Comprensión

3.1.3.6.1. Nivel de Ingenuo.

Este nivel se caracteriza por la manera como el estudiante emprende la construcción del conocimiento como un proceso no problemático, respecto a la información suministrada.

Este nivel de comprensión, expresa el conocimiento intuitivo, no reflexivo, con respuestas donde los términos empleados no son los correctos.

3.1.3.6.2. Nivel de Novato.

El nivel de novato está integrado por el desarrollo de conocimientos básicos y la posibilidad de establecer relaciones entre ellos. En este nivel, los estudiantes conciben la construcción del conocimiento como un proceso mecánico, apoyado en conexiones simples de ideas y conceptos; además, está estrechamente influenciado por las explicaciones del docente.

3.1.3.6.3. Nivel de Aprendiz.

En este nivel se empieza a mostrar un uso flexible de los conceptos aprendidos dentro de una disciplina. También aquí se perciben relaciones entre el conocimiento escolar y la vida diaria. Durante la construcción del conocimiento, el estudiante es capaz de argumentar procesos, al utilizar conceptos propios de una disciplina, al igual que su experiencia, es decir que relaciona el conocimiento adquirido con su entorno escolar.

3.1.3.6.4. Nivel de Maestría.

De acuerdo con Stone (1999) los desempeños de comprensión de maestría son predominantemente integradores, creativos y críticos. En este nivel, los estudiantes son capaces de moverse con flexibilidad entre dimensiones, vinculando los criterios por los cuales se construye y se convalida el conocimiento. En este nivel de comprensión, los estudiantes desarrollan habilidades que permiten interpretar el conocimiento en función de su entorno escolar. El conocimiento es expresado y comunicado a otros de manera creativa.

Los desempeños en este nivel a menudo van más allá, demostrando comprensión disciplinaria: “pueden reflejar la conciencia crítica de los estudiantes acerca de la construcción del conocimiento en el dominio”.

3.1.3.7. *Relación entre las dimensiones y los niveles de comprensión.*

A continuación, en las Tablas 1 a 4, se presenta la relación entre las dimensiones y los niveles de comprensión propuesta en Boix-Mansilla y Gardner (1999), la cual establece un apoyo importante para el análisis de la información.

Tabla 1: Relación I. Dimensiones y niveles de comprensión

1ª Dimensión	Comprensión Ingenua	Comprensión Novato	Comprensión Aprendiz	Comprensión Maestría
<p>Creencias intuitivas transformadas</p> <p>¿En qué medida muestran los desempeños de los estudiantes que teorías y conceptos garantizados del dominio han transformado las creencias intuitivas de los estudiantes?</p>	<p>Faltan conceptos disciplinarios; prevalecen las creencias intuitivas.</p>	<p>Los estudiantes mezclan creencias intuitivas con fragmentos de conocimiento disciplinario, pero siguen dominando las visiones intuitivas.</p>	<p>Prevalecen las teorías y los conceptos disciplinarios. Pueden aparecer algunas creencias intuitivas. El conocimiento disciplinario sigue considerándose no vinculado con el sentido común.</p>	<p>Prevalecen los conceptos disciplinarios. Los estudiantes reconocen su importancia para refinar las creencias del sentido común y su importancia para inspirar, desarrollar y criticar el conocimiento disciplinario.</p>
<p>Redes conceptuales ricas y coherentes</p> <p>¿En qué medida son capaces los estudiantes de razonar dentro de redes conceptualmente organizadas?</p>	<p>Fragmentos o partes del conocimiento parecen aburridos, borrosos o no diferenciados. Los ejemplos y generalizaciones están desconectados.</p>	<p>Los estudiantes afirman conexiones simples, frágiles o ensayadas entre conceptos o ideas. Los estudiantes se extienden en ejemplos, pero no son capaces de vincularlos con generalizaciones</p>	<p>Los estudiantes demuestran una sutil red de ideas o puntos de vista dentro de un dominio.</p> <p>Los estudiantes todavía no demuestran la capacidad de razonar creativamente dentro de estos marcos disciplinarios.</p>	<p>Los estudiantes muestran redes altamente organizadas de ideas o puntos de vista dentro de un dominio.</p>

Tabla 2: Relación II. Dimensiones y niveles de comprensión

2ª Dimensión	Comprensión Ingenua	Comprensión Novato	Comprensión Aprendiz	Comprensión Maestría
<p>Sano escepticismo.</p> <p>¿En qué medida despliegan los estudiantes un sano escepticismo hacia sus propias creencias y hacia el conocimiento de fuentes tales como sus libros de texto, las opiniones de la gente y los mensajes de los medios de comunicación?</p>	<p>Conocimiento y mundo no se distinguen. Los estudiantes ven el mundo como inmediatamente captable, por lo tanto ningún método específico es necesario para probar las afirmaciones.</p>	<p>El conocimiento es información sobre el mundo. El escepticismo no es muy evidente. Los estudiantes ven la necesidad de respaldar sus afirmaciones, sin embargo es cuestión de demostrar que están acertados, no de averiguar si sus creencias son correctas.</p>	<p>El conocimiento es humanamente construido. Con apoyo, los estudiantes pueden dudar y ser autocríticos o escépticos acerca de lo que piensan, saben, oyen, leen y toman por contenido disciplinario. En la mayoría de los casos las críticas son escasas. Pueden aparecer malas concepciones.</p>	<p>El conocimiento es humanamente construido, racionalmente discutible, provisional y guiado por un marco. Los estudiantes dudan y son autocríticos o escépticos acerca de lo que piensan, saben, oyen, leen y toman por contenido disciplinario.</p>
<p>Construir conocimiento en el dominio</p> <p>¿En qué medida los estudiantes usan estrategias, métodos y procedimientos similares a los usados por los profesionales del dominio para construir un conocimiento confiable?</p>	<p>Ningún método de construcción del conocimiento es evidente más allá del ensayo y el error.</p>	<p>Los estudiantes empiezan a comprender que los métodos son útiles para construir conocimiento, pero aplican mecánicamente los procedimientos.</p>	<p>El conocimiento es construido humanamente por medio de métodos. Los estudiantes tienden a usar un solo y simple método o procedimiento para construir conocimiento en el dominio.</p>	<p>Los estudiantes usan una variedad de métodos efectivamente o usan métodos simples en forma sofisticada. Algunos estudiantes perciben que los métodos emergen a través de una discusión pública y racional.</p>

Tabla 3: Relación III. Dimensiones y niveles de comprensión

3ª Dimensión	Comprensión Ingenua	Comprensión Novato	Comprensión Aprendiz	Comprensión Maestría
Praxis				
Múltiples usos del conocimiento y sus consecuencias	Los estudiantes no exploran el potencial de lo que aprenden más allá de las tareas prescritas.	Los estudiantes exploran el potencial de lo que aprenden en la escuela cuando se supone que lo hagan.	Con apoyo, los estudiantes usan lo que aprenden en la escuela de muchas formas originales en la vida cotidiana para resolver problemas prácticos, generar explicaciones, interpretarse a sí mismos y a los demás y modificar situaciones.	Los estudiantes espontáneamente usan el conocimiento de maneras nuevas y múltiples.
¿En qué medida reconocen los estudiantes una variedad de usos posibles de lo que aprenden? ¿En qué medida consideran los estudiantes las consecuencias de usar su conocimiento?	Sus desempeños demuestran poca o ninguna relación entre lo que aprenden en la escuela y las experiencias de la vida cotidiana.	Con apoyo, los estudiantes empiezan a conectar lo que aprenden en la escuela con las experiencias cotidianas.		Claramente perciben al conocimiento como una herramienta para predecir y controlar la naturaleza, orientar la acción humana o mejorar su entorno social o el mundo físico.
Dominio y autonomía	El uso del conocimiento por parte de los estudiantes requiere considerable apoyo y depende de la instrucción de la autoridad.	Al principio, los estudiantes necesitan ayuda para usar el conocimiento en situaciones nuevas, pero luego son capaces de hacerlo solos.	Los estudiantes usan lo que han aprendido libremente, pero sus realizaciones siguen sin considerar los intereses de los demás. Algunos estudiantes perciben cómo las posiciones, objetivos e intereses personales afectan la forma en que se construye el conocimiento.	Los estudiantes demuestran que son dueños de lo que han aprendido. Se sienten más poderosos para usar el conocimiento al margen de las preocupaciones autoritarias o las relaciones de poder. Lo hacen considerando cuidadosamente múltiples perspectivas y preocupaciones.
¿En qué medida evidencian los estudiantes buen manejo y autonomía para usar lo que saben?	No hay pruebas de un crecimiento durable.			

Tabla 4: Relación IV. Dimensiones y niveles de comprensión

4ª Dimensión	Comprensión Ingenua	Comprensión Novato	Comprensión Aprendiz	Comprensión Maestría
Formas de Comunicación				
Dominio de las formas de desempeño. ¿En qué medida despliegan los estudiantes dominio de las formas de desempeños en los que se comprometen, tales como escribir informes o hacer presentaciones?	Las formas o tipos de desempeños por medio de los cuales los estudiantes comunican sus ideas parecen poco importantes para ellos. Los estudiantes no son conscientes de que las formas tienen reglas específicas.	Los estudiantes siguen los cánones de desempeños específicos ritualmente; por ejemplo, las presentaciones son asunto de seguir ciertas pautas e instrucciones.	Los estudiantes se comprometen en ricos desempeños de comprensión y se mueven con flexibilidad y expresivamente dentro de la forma o tipo de desempeño en cuestión.	Los estudiantes emprenden ricos desempeños de comprensión y se mueven con flexibilidad y expresividad dentro de la forma o tipo de desempeño en cuestión. Algunos estudiantes demuestran dominio de la forma al manifestar un claro estilo o voz personal.

Capítulo IV

4. Diseño Metodológico

Este capítulo expone el diseño metodológico que fundamenta la presente investigación. En este, se da cuenta de: el paradigma, el estudio de casos como método, el contexto de la investigación, los casos, las técnicas de recolección de la información, el camino metodológico, la implementación de una unidad curricular y la validación de la investigación; con el fin de ubicar a los participantes en un nivel de comprensión, respecto al tema objeto de estudio, en concordancia con el marco de la enseñanza para la comprensión. La siguiente ilustración transmite el mensaje del texto anterior.

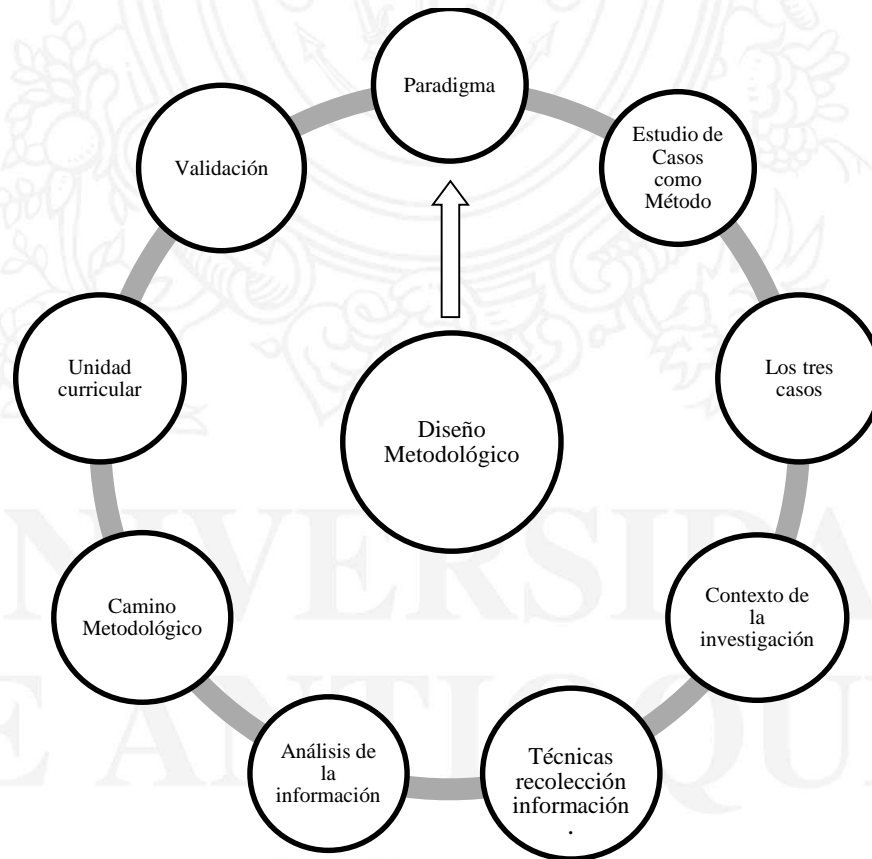


Ilustración 6: Ruta Diseño Metodológico

4.1. Paradigma

La presente investigación está orientada bajo una metodología cualitativa, ya que se interesa, por medio de la subjetividad, en conocer la realidad de los participantes (Sandoval, 2002, p. 29) Desde este punto de vista, se busca analizar la manera como los estudiantes comprenden la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, a partir del desarrollo de actividades propuestas en la implementación de una unidad curricular. En la subjetividad se destaca la interacción comunicativa entre tres (3) estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa José Manuel Restrepo y el investigador, respecto a la comprensión del objeto matemático en mención.

Yo como investigador participante, soy el principal instrumento de investigación, con el fin de conocer y describir los elementos que incurren en la comprensión de los estudiantes, a partir de sus experiencias. Esto concuerda con Shaw (1999): el investigador debe adoptar el papel de “instrumento para la recolección de datos”, lo cual le permite acercarse al fenómeno que se investiga y ser capaz de interpretar la perspectiva de la realidad social de los participantes. Esto se logra en la presente investigación mediante las observaciones, las discusiones generadas de las diferentes actividades de la unidad curricular y la revisión del material suministrado por los estudiantes. De igual forma, Sandoval (2002, p.29), afirma que:

El conocimiento es una creación compartida a partir de las interacciones entre el investigador y el investigado, en la cual, los valores median o influyen en su construcción; lo que hace necesario “estar inmerso en la realidad”, objeto de análisis, para poder comprenderla.

Por tanto, esta metodología busca la comprensión de la realidad y la manera como se manifiesta en el marco de la enseñanza para la comprensión, pretendiendo describir las experiencias de manera natural; además, se interesa en saber cómo los participantes de esta

investigación comprenden y qué significado poseen sus puntos de vista en el problema que se investiga, es decir, en qué nivel de comprensión se ubican, realizar explicaciones con base en los hechos estudiados y permite recoger datos durante todo el proceso investigativo, mediante el desarrollo de las diferentes actividades propuestas en la unidad curricular.

4.2. El Estudio de Casos como Método

De acuerdo al paradigma cualitativo, se considera pertinente implementar el “estudio de casos”, como método, con el fin de darle respuesta a la pregunta y alcanzar el objetivo propuesto, en la presente investigación, mediante el desarrollo de las actividades propuestas en cada una de las fases de la unidad curricular. Las razones por las cuales se optó por este tipo de estudio se presentan a continuación.

4.2.1. Orígenes.

El estudio de casos se define como “una búsqueda empírica que investiga un fenómeno contemporáneo dentro de un contexto de vida real, especialmente cuando las fronteras entre fenómeno y contexto no son claramente evidentes” (Yin, 1984). Por tanto, en esta investigación, se busca describir las experiencias de tres (3) estudiantes de grado octavo (8°) respecto al tema objeto de estudio, con el fin de ubicarlos en un nivel de comprensión, de acuerdo al marco teórico que la fundamenta, el estudio de casos es un método apropiado para llevarla a cabo, además, se utilizan los resultados de la investigación para poner a prueba teorías preexistentes.

4.2.2. Características.

El estudio de casos presenta las siguientes características: Una, su meta primaria es obtener una interpretación en profundidad de un fenómeno complejo, tanto en sí mismo como en relación con su contexto más amplio. Dos, el investigador de estudio de casos analiza el fenómeno dentro de su ambiente más habitual. Tres, utiliza métodos diferentes simultáneamente (Stake, 1999), como observaciones, discusión de las actividades propuestas a lo largo de la unidad curricular y revisión documental, los cuales fueron tenidos en cuenta para la triangulación y análisis de la información de la presente investigación. Cuatro, según Yin (1989), se puede estudiar tanto un caso único como múltiples casos. En esta investigación se estudiaron tres casos de manera individual (múltiples casos) al tener en cuenta los desempeños mostrados por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades propuestas en las distintas fases de la unidad curricular, implementada en esta investigación, en el marco de la enseñanza para la comprensión.

4.2.3. Selección de los Participantes.

Esta investigación está dirigida a estudiantes de octavo grado (8°) de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del municipio de Arboletes, los cuales, desarrollaron actividades planteadas a lo largo de una unidad curricular fundamentada en los elementos del marco de la enseñanza para la comprensión. Los tres estudiantes se eligieron a través de actividades previas relacionadas con algunos conceptos básicos de Geometría plana. Se tuvo en cuenta los siguientes criterios de selección de los participantes: Uno, se realizaron observaciones que evidenciaron los desempeños de los estudiantes y permitieron el análisis

de sus afirmaciones. Dos, se escogieron aquellos estudiantes que demostraron interés¹⁴ por el desarrollo de las actividades propuestas, realizando aportes desde sus conocimientos previos. Tres, aprobación de los padres de familia respecto a la participación voluntaria de sus hijos en la investigación, a través de un consentimiento informado. Lo anterior posibilitó la selección de los participantes, y fue tenido en cuenta para la selección de los casos.

4.2.4. Información de los estudiantes seleccionados.

Los estudiantes seleccionados, los cuales son dos niñas y un niño, tienen edades que oscilan entre los 12 y 14 años. Las dos niñas: Stefa y Naty, viven con su mamá, les gusta el voleibol, escuchar música y expresan que son alegres. El niño: Cristian vive con sus padres, juega fútbol, escucha música y comenta que es alegre y responsable. Viven en barrios ubicados en estratos 1 y 2. Los tres estudiantes participaron de manera voluntaria en esta investigación, al manifestar que les atraen las matemáticas y les gustaría comprenderla de manera significativa; por tal razón, sus padres o representantes legales firmaron un consentimiento informado.

4.2.5. Selección de los casos.

Además de los aportes anteriores, en los que percibí algunas habilidades cognitivas entre los participantes para argumentar desde sus concepciones lo que saben acerca de algunos conceptos geométricos y el interés que tienen por aprender matemáticas, realicé una serie de observaciones durante el desarrollo de las actividades propuestas en las fases de la unidad curricular. Estas fueron tenidas en cuenta para la identificación y selección de los casos, al proporcionar la información necesaria para obtener una interpretación en

¹⁴ Inclinación o deseo por comprender matemática.

profundidad del tema objeto de estudio, y así, lograr su comprensión. Los casos seleccionados pertenecen a un contexto, con características propias que se exponen a continuación, con el fin de establecer aquellas que contribuyen a la comprensión de los casos.

4.3. El contexto de la investigación

A continuación, presento el contexto en el cual se ubican los estudiantes seleccionados para esta investigación: contexto institucional y municipal. La ilustración 7 muestra el municipio y departamento, en el que se desarrolló la presente investigación.

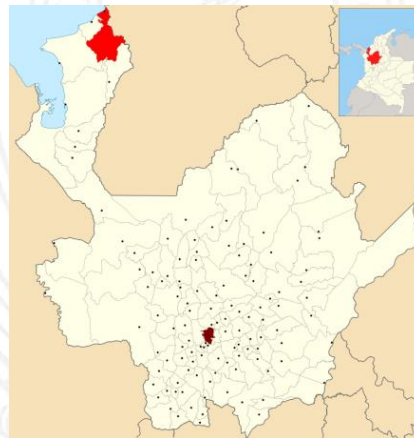


Ilustración 7: Ubicación del Municipio de Arboletes¹⁵

4.3.1. Contexto Institucional.

La Institución Educativa José Manuel Restrepo es de carácter público y está ubicada en el municipio de Arboletes, Barrio Kennedy-la playa (Zona Urbana), cerca del río Volcán, el cual considero, está contaminado por sus aguas negras y con mal olor. Cuenta con dos sedes y dos jornadas: una en la mañana y otra en la tarde. La jornada de la mañana sede uno, está conformada por estudiantes de secundaria, y la jornada de la tarde, por estudiantes de

¹⁵ <https://es.wikipedia.org/wiki/Arboletes#/media/File:Colombia - Antioquia - Arboletes.svg>

primaria. En la sede dos, ambas jornadas cuentan con estudiantes de primaria. La mayoría de sus estudiantes son de estrato uno (1) y dos (2), afrodescendientes, desplazados y de bajos recursos. Cabe anotar, que gran parte de los padres de familia, poseen un bajo nivel académico, limitándolos a tener una participación continua en el proceso educativo de sus hijos.

En la Institución, sede uno (1), hay en total diecisiete (17) grupos con aproximadamente treinta y ocho (38) estudiantes en promedio. La planta física cuenta con dieciocho (18) aulas de clases, de las cuales, dos son improvisadas, un aula de informática con problemas de conectividad a internet, un aula múltiple (en donde se realizan diferentes actividades que promueven la formación integral de los estudiantes), un patio (en donde los estudiantes no se pueden recrear debido a sus malas condiciones), un restaurante y una tienda escolar. No se cuenta con: laboratorios, biblioteca, sala y baños para los docentes.

4.3.2. Contexto Municipal.

Arboletes es un municipio del departamento de Antioquia, que se encuentra ubicado en la región de Urabá. Posee una extensión territorial de setecientos diez kilómetros cuadrados (710 km²) y limita por el norte con el mar caribe, al oriente, con el departamento de Córdoba, por el sur, con el municipio de San Pedro y Turbo, y al occidente, con los municipios Necoclí y San Juan. Estos municipios también se encuentran localizados en la región del Urabá. Su principal fuente económica, se basa en la actividad ganadera, seguida de la producción agrícola (Alcaldía de Arboletes, 2016).

4.4. Los casos

A continuación, expongo las características de cada uno de los estudiantes participantes en esta investigación, con el fin de identificar aquellas que aportan a la comprensión del tema objeto de estudio.

Caso I: Naty

Desde mi práctica como docente, he observado que Naty es una estudiante responsable con los compromisos adquiridos durante el desarrollo de las clases de matemática, es participativa, y cuando no comprende, pregunta al docente casi que de forma inmediata. De igual manera, expone argumentos válidos al explicar una situación problema, ya que relaciona conceptos involucrados en la situación. Por otra parte, expresa desde sus saberes previos algunas características y propiedades de objetos físicos que contribuyen a la comprensión de conceptos matemáticos. Por ejemplo, objetos circulares como los utilizados en esta investigación.

Por lo general, muestra un aprendizaje fundamentado en la memorización de conceptos, sin comprender su significado, basándose en múltiples repeticiones algorítmicas, para así, poder recordarlo. Por último, manifiesta que le atraen las matemáticas y que además, tiene acompañamiento académico en casa.

Caso II: Cristian

Teniendo en cuenta mi experiencia docente, considero que Cristian es un estudiante dedicado, que cumple con sus compromisos en el área de matemática, haciendo un poco más de lo esperado; esto se debe a que piensa, reflexiona, muestra dedicación y expone argumentos válidos a la hora de enfrentarse a una situación de aprendizaje. Posee la habilidad

de identificar características y propiedades de objetos físicos que contribuyen a la comprensión de conceptos matemáticos. Además, desarrolla un aprendizaje memorístico, al hacer uso de fórmulas y algoritmos, sin impedirle observar, formular, construir y aplicar conocimientos en situaciones cotidianas. Manifiesta que le atraen las matemáticas y que por eso se esfuerza dentro y fuera del aula, para comprenderlas.

Caso III: Stefa

Desde mi experiencia docente en el aula de clase, he observado que Stefa es una estudiante responsable con los compromisos adquiridos durante el desarrollo de las actividades propuestas en el área de matemáticas. En el marco de Enseñanza para la comprensión, el aspecto relacionado con la evaluación continua permite observar la actitud de los estudiantes con respecto al desarrollo de las actividades en las clases de matemática, para poder mirar de cerca cómo es su compromiso y el grado de responsabilidad que asumen en su formación; esto permitiría a Stefa cuestionarse sobre sus falencias y a valorar sus logros (Stone, 1999).

De igual manera en lo relacionado con el aspecto del lenguaje, la Enseñanza para la comprensión menciona que este tiene que ver con la forma como se comunica lo comprendido, es decir, cómo se expresa lo que se sabe; y en este caso, se observa que Stefa expresa escasos argumentos para explicar una situación matemática, ya que no relaciona los conceptos involucrados en dicha situación. En ocasiones da cuenta de las características y propiedades de objetos físicos que contribuyen a la comprensión de conceptos matemáticos. Esto se relaciona con los desempeños de comprensión en su fase de exploración, los cuales

pretenden dar cuenta de los conocimientos previos de los estudiantes, a través del desarrollo de actividades propuestas en esta fase.

Por otra parte, muestra un aprendizaje memorístico de conceptos, al hacer uso exclusivo de fórmulas y algoritmos, que le impiden observar, formular, construir y aplicar conocimientos en situaciones cotidianas, lo que indica falta de comprensión de los conceptos planteados de acuerdo al marco teórico que fundamenta esta investigación. Por último, Stefa manifiesta que le atraen las matemáticas, pero que tiene poco acompañamiento académico en casa.

4.5. Técnicas de recolección de la información

En la presente investigación se emplea las técnicas de observación, discusión y el material del estudiante para apoyar mi papel como investigador, el cual se expuso en el apartado 4.1 (paradigma). Estas técnicas son indispensables para la recolección de la información en el estudio de casos, relacionada con el objeto de estudio.

4.5.1. La Observación.

Como su nombre lo indica, esta técnica me permitió realizar observaciones a los estudiantes de octavo grado (8°) seleccionados para esta investigación, a través de las diferentes actividades propuestas a lo largo de la unidad curricular, y así, explorar sus conocimientos básicos en geometría, exactamente a lo que se refiere con la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia. El objetivo se centra en identificar como se desempeñan los estudiantes durante las actividades propuestas. De acuerdo con lo anterior, (Stake, 1999) propone, que la observación me guía como investigador hacia una mejor comprensión de cada caso.

4.5.2. Discusión entre los participantes.

Como investigador participante, planteé una discusión a través de una serie de preguntas relacionadas con las actividades propuestas a los estudiantes, en las distintas fases de la Unidad Curricular, con el fin de obtener una información y una construcción conjunta de significados respecto al objeto matemático estudiado, y así conocer sus comprensiones e interpretaciones; lo que contribuyó para la ubicación de los estudiantes en un nivel de comprensión.

Esta técnica de investigación cualitativa, permite generar un rango amplio de ideas, opiniones y experiencias en torno al objeto investigado (Morgan, 1997) como se citó en (Fàbregues y Paré, s.f). Por tanto, la discusión entre los participantes permite intercambiar ideas sobre un tópico de interés, con el fin de comprenderlo.

4.5.3. Revisión documental.

Durante el proceso investigativo, recolecté y analicé el material de los estudiantes seleccionados para el estudio de casos, el cual surgió de las observaciones y de las discusiones entre los participantes.

4.5.4. Análisis de la información.

El análisis de datos cualitativos reconoce temas y conceptos inmersos en la información recolectada. A medida que se progresa en el análisis de los datos, esos temas y conceptos se relacionan en una explicación más amplia de importancia teórica o práctica, que luego orienta el resultado final (Rubin y Rubin, 1995).

En la presente investigación, el análisis de la información se hizo por medio de categorías emergentes y de forma individual, al triangular varias fuentes principales de información, entre estas: la observación, la discusión entre los participantes y la revisión del material del estudiante, con base en los elementos del Marco de la Enseñanza para la Comprensión y de mi postura como investigador participante. El análisis de la información tuvo como finalidad ubicar a los estudiantes en determinado nivel de comprensión y se desarrolló de la siguiente manera:

Transcripción de las observaciones realizadas a lo largo de la unidad curricular.

Revisión del material de los estudiantes que surgió de las discusiones entre los participantes, para corroborar algunos conceptos básicos indispensables para la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia.

Categorización de la información recolectada, a través de una rúbrica, denominada Descriptores de la comprensión y clasificación de los estudiantes por nivel, para compararla y comprobarla (Ver apartado 6.2).

4.6. Camino Metodológico

Después de la selección de los estudiantes participantes para llevar a cabo el proceso de investigación, se procedió, teniendo en cuenta los elementos del Marco de la Enseñanza para la Comprensión, con el desarrollo de las actividades propuestas y un análisis de la comprensión de cada uno de ellos. Dicho análisis se hizo con base en categorías emergentes, producto de la recolección de los datos, para luego ubicarlos en un nivel de comprensión en concordancia con dicho marco.

4.7. La Unidad Curricular

La unidad curricular se refiere al conjunto de contenidos, metas, procesos, desempeños y evaluación, que orienta una actividad académica, en la que el estudiante da cuenta de su comprensión. De acuerdo al Marco de la Enseñanza para la Comprensión implementé una Unidad Curricular, en la que se propuso diferentes actividades a los estudiantes seleccionados en la investigación, con el fin de que comprendieran el tema objeto de estudio. La Unidad Curricular contiene los elementos del Marco de la Enseñanza para la Comprensión, unos descriptores de desempeño de acuerdo a las dimensiones y niveles, que surgen de algunas categorías emergentes, producto de la recolección de los datos, y un análisis de la comprensión de cada uno de los estudiantes participantes en el proceso investigativo. La ilustración 8 muestra el mensaje del texto anterior.

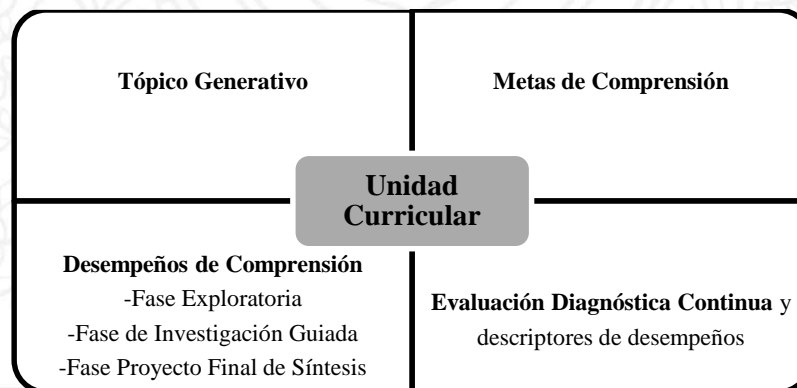


Ilustración 8: Elementos de la Unidad Curricular

4.7.1. Tópico generativo.

Los tópicos generativos proporcionan relaciones significativas que sirven de apoyo para el desarrollo de las comprensiones de los estudiantes. Su nombre se debe a que buscan generar conocimientos (Blythe, 2002, p. 45), por tanto, el tópico generativo que planteé en esta investigación, es el siguiente:

¿Cómo comprender la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia desde la medición de objetos circulares en el entorno y su relación con algunos conceptos subyacentes?

4.7.2. Metas de comprensión.

Las metas de comprensión resumen los tópicos generativos. Blythe (2002, p. 45) las define como enunciados que contienen conceptos y procesos; y que además, promueven destrezas en los estudiantes, por tanto, las metas de comprensión que planteé en esta investigación, son las siguientes:

- Los estudiantes comprenderán el proceso para determinar la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, a partir de la medición de objetos circulares en su entorno.
- Los estudiantes comprenderán la relación entre la Longitud de la circunferencia y su radio; y la relación entre la Longitud de la circunferencia y su diámetro.
- Los estudiantes comprenderán la naturaleza irracional del número pi (π) y su concepción de constante para un cociente entre el perímetro y el diámetro de cada circunferencia.

4.7.3. Desempeños de comprensión.

Los desempeños de comprensión, además de exigir, permiten avanzar a los estudiantes en su aprendizaje, permitiéndoles usar lo que saben de nuevas maneras. (Stone, 1999), para que tanto él como el docente evidencien el progreso en el nivel de comprensión del tema objeto de estudio. A continuación, se presenta las actividades propuestas en cada una de las fases relacionadas con los desempeños de comprensión.

4.7.3.1. Fase de exploración.

Actividad # 1

En clase, se generó un debate argumentativo en el cual, los estudiantes a partir de sus conocimientos previos, contribuyeron con lo que conocen sobre los elementos de la circunferencia. Para esto, les mostré una imagen proyectada de una circunferencia con sus elementos (sin nombrarlos). Realicé las siguientes preguntas con el propósito de indagar sobre sus conocimientos o concepciones con respecto al objeto de estudio.

¿Qué observas en la imagen?

¿Qué nombre reciben los siguientes elementos mostrados en la ilustración 9?

\overline{AB} : _____

\overline{OC} : _____

\overline{GH} : _____

\overleftrightarrow{RS} : _____

\overleftrightarrow{EF} : _____

AOC: _____

AC: _____

O: _____

El borde de la figura: _____

El espacio limitado por el borde de la figura: _____

La medida del borde de la figura: _____

La medida del espacio limitado por el borde de la figura: _____

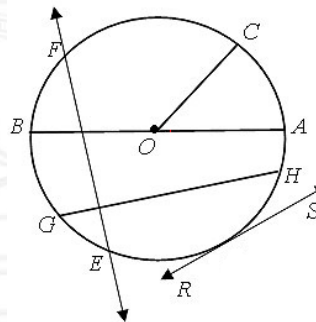


Ilustración 9: Elementos de la Circunferencia

Actividad # 2

Primer momento

A través de esta actividad, se generó un debate argumentativo en el cual, los estudiantes a partir de sus conocimientos previos, contribuyeron con la comprensión del concepto relacionado con la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia. Para esto les proyecté una imagen con una situación del contexto.

Problema 1

El diámetro de una arepa paisa mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio y el perímetro de la arepa? Ver la ilustración 10.



Ilustración 10: Momento 1- actividad 2- fase exploratoria¹⁶

Segundo momento

A través de esta actividad, se generó un debate en el cual, los estudiantes a partir de sus conocimientos previos, contribuyeron con la comprensión del concepto relacionado con la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia. Para esto les proyecté la imagen anterior, con algunas sugerencias.

¹⁶

https://www.google.com.co/search?q=arepa+paisa&espv=2&biw=1242&bih=606&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwie2dHy3avNAhWGqR4KHa0YCskQ_AUIBigB#imgrc=Azd9ZelSgygVKM%3A

Problema 1

El diámetro de una arepa paisa mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio y el perímetro de la arepa? Ver ilustración 11.



Ilustración 11: Momento 2 actividad 2 fase exploratoria

Tenga en cuenta la siguiente expresión matemática para la solución del problema:

$L_c = \pi * D$, donde L_c corresponde a la longitud de la circunferencia y D el diámetro de la circunferencia.

$D = 2r$, donde r es el radio de la circunferencia.

4.7.3.2. *Fase de investigación guiada.*

Los estudiantes comenzaron a indagar sobre el tópico elegido y algunas posibles soluciones. Además, les propuse algunas actividades para explorar las distintas concepciones a cerca de la de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia. Estas se desarrollaron con el fin de generar aportes importantes que permitieran afianzar la comprensión de los estudiantes respecto al tema objeto de estudio.

A continuación, planteo el tópico generativo elegido para este trabajo de investigación, a través de la siguiente pregunta: ¿Cómo comprender la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia desde la medición de objetos circulares en el entorno y

su relación con algunos conceptos subyacentes? Por lo tanto, con el propósito de obtener respuestas a esta pregunta, propuse la siguiente actividad:

Actividad

1. ¿Qué objetos circulares de tu entorno conoces?
2. ¿Podrías medir el borde de dichos objetos? ¿Qué instrumentos de medición utilizarías para medir sus bordes?
3. Dentro de los objetos circulares encontrados, ¿hay alguno que tenga su centro definido? Si los hay, mide el borde de algunos de estos objetos circulares. ¿Cuál es el resultado?
4. Mide la distancia que hay desde el borde hasta el centro del objeto, ¿Cuál es el resultado?
5. Halla el cociente entre la longitud del borde del objeto y el doble de la distancia entre el borde y el centro del objeto. ¿Cuál es el resultado?
6. ¿Qué puedes concluir del proceso anterior?
7. Mide la distancia que hay desde un punto cualesquiera del borde hasta otro punto del mismo, de tal manera que dicha medición pase por el centro del objeto, ¿Cuál es el resultado?
8. Halla el cociente entre la longitud del borde del objeto y la distancia anterior. ¿Cuál es el resultado?
9. ¿Qué conclusión puedes expresar de los numerales 7 y 8?
10. A partir de lo anterior, ¿podrías determinar una expresión matemática para hallar el perímetro o la Longitud de una circunferencia? ¿Cómo lo harías?

4.7.3.3. Fase del proyecto final de síntesis.

En esta fase, los estudiantes mostraron la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, a través de la presentación y socialización de algunos problemas y de sus respectivas soluciones. Cabe anotar que, al iniciar la aplicación de la unidad curricular, los estudiantes no fueron capaces de darle solución al problema que se les planteó; lo que permite identificar la pertinencia de la actividad propuesta en esta fase, ya que, a través de ella, se le da sentido al conocimiento adquirido, relacionándolo con las posibilidades de aplicarlo en la vida cotidiana e indicando de esta manera el avance en sus comprensiones. A continuación, se muestran los problemas que los estudiantes resolvieron.

Problema 1

El diámetro de una arepa paisa mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio y el perímetro de la arepa? Ver ilustración 12.



Ilustración 12: Problema 1-proyecto final de síntesis

Problema 2

Cristian ha medido la longitud de la circunferencia de un tanque cilíndrico y el diámetro de su base. Responde la siguiente pregunta en forma aproximada: ¿Cuánto es mayor la longitud de la circunferencia del tanque que su diámetro? ¿Cuánto mide la longitud de una circunferencia cuyo diámetro es 30cm? Ver ilustración 13.



Ilustración 13: Problema 2 -proyecto final de síntesis¹⁷

Problema 3

Stefa ha comprado un queso, cuya base tiene forma de círculo, con un radio de 15cm. Ha cortado un cuarto del queso y se lo ha dado al docente. Hallar el perímetro de la base del queso que le quedó a Stefa. Ver ilustración 14.



Ilustración 14: Problema 3-proyecto final de síntesis¹⁸

¹⁷

https://www.google.com.co/search?q=barril&espv=2&biw=1242&bih=606&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjDs-nX3qvNAhXEIh4KHVdwAmEQ_AUIBigB#tbm=isch&q=cilindro+para+basura&imgsrc=xCyD2JAjlxBBxM%3A

¹⁸

https://www.google.com.co/search?q=barril&espv=2&biw=1242&bih=606&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjDs-nX3qvNAhXEIh4KHVdwAmEQ_AUIBigB#tbm=isch&q=queso+circular&imgsrc=WomUI2sH9-tT8M%3A

4.7.3.4. *Discusión entre los participantes.*

A lo largo de la Unidad Curricular se realizó una discusión, en la cual, los estudiantes participantes de la presente investigación afianzaron la comprensión de los conceptos involucrados en las diferentes actividades propuestas. La discusión se hizo a través de una serie de preguntas relacionadas con las actividades planteadas a los estudiantes, en las distintas fases de la Unidad Curricular.

4.7.3.4.1. *Discusión Fase Exploratoria.*

Después de finalizado el desarrollo de las actividades propuestas en la fase exploratoria y las consultas posteriores realizadas por los estudiantes seleccionados para esta investigación, se generó a través de las siguientes preguntas una discusión en la que los participantes dieron cuenta de sus avances, respecto a la comprensión.

¿Qué elementos de la circunferencia considera necesarios para hallar su perímetro?

¿Conoces el valor numérico de π ? ¿Cuál es? ¿A qué conjunto numérico pertenece?

4.7.3.4.2. *Discusión Fase de Investigación Guiada.*

Después de finalizado el desarrollo de las actividades propuestas en la fase de investigación guiada, se generó a través de las siguientes preguntas, una discusión en la que los estudiantes dieron cuenta de sus avances, respecto a la comprensión.

Después de hallar el cociente entre la longitud del borde de un objeto circular y el doble de la distancia entre el borde y el centro del objeto, ¿Dentro de qué conjunto numérico puedes representar el resultado? (Relacionado con la pregunta cinco (5) de la fase de investigación guiada). ¿Qué sucede con el cociente anterior si los objetos medidos son de diferentes tamaños?

Después de obtener tus conclusiones respecto al proceso anterior, ¿Qué nombre le darías matemáticamente a dicho borde? (Relacionado con la pregunta seis (6) de la fase de investigación guiada).

¿Qué nombre le darías matemáticamente a la medición del borde de estos objetos circulares?

¿Qué nombre le darías matemáticamente a la distancia que hay desde el borde de un objeto circular hasta el centro del mismo?

¿Qué nombre le darías matemáticamente a la distancia que hay entre un punto cualesquiera del borde de un objeto circular hasta otro punto del mismo, de tal manera que dicha medición pase por el centro del objeto? (Relacionado con la pregunta siete (7) de la fase de investigación guiada)

¿Qué nombre darías al cociente hallado durante el proceso? (Relacionado con la pregunta ocho (8) de la fase de investigación guiada).

4.7.3.4.3. *Discusión Fase proyecto final de síntesis.*

Después de finalizada la socialización de las situaciones problemas propuestas en la fase del proyecto final de síntesis por parte de los estudiantes, se generó a través de la siguiente pregunta, una discusión en la que los estudiantes participantes dieron cuenta de sus avances, respecto a los niveles de comprensión del concepto objeto de estudio.

¿Qué otras situaciones de la vida cotidiana, relacionadas con el perímetro de la circunferencia propones para afianzar tu comprensión?

4.7.4. Evaluación Diagnóstica Continua.

De acuerdo a lo expresado en el apartado 3.1.3.4, la evaluación diagnóstica continua brinda realimentaciones a los estudiantes para mejorar sus desempeños de comprensión. En este elemento de la Enseñanza para la Comprensión, los estudiantes recolectaron sus producciones, en las diferentes actividades desarrolladas. También se describe los desempeños de comprensión que se aplicaron durante la fase de exploración, la fase de investigación guiada y a la fase del proyecto final de síntesis; y la manera como se hace la valoración de cada uno de ellos en cada una de estas fases, según criterios y su respectiva realimentación. La información anterior se muestra en las tablas 5 a 7.

Tabla 5. Desempeños de Comprensión Fase Exploratoria

Desempeños fase exploratoria	Criterios de evaluación	Realimentación
Generar un debate argumentativo en el cual, los estudiantes a partir de sus conocimientos previos, contribuirán con lo que conocen sobre los elementos de la circunferencia.	Verificación de los aportes conceptuales de los estudiantes.	Debate entre los participantes para refinar los conceptos previos. Escrito de las observaciones realizadas por el docente.
Indagar sobre la diferencia que existe entre circunferencia y círculo, y los elementos que componen la circunferencia, con el fin de debatirlos en clase.	Especificación y ampliación en las ideas consultadas	Socialización entre los participantes sobre las consultas realizadas, y así generar conclusiones. Observaciones escritas realizadas por el docente.
Resolver problemas relacionados con el tema objeto de estudio, y así, verificar los aportes de los estudiantes.	Profundización y pertinencia del problema resuelto.	Validación de los problemas resueltos y explicados por los estudiantes. Escrito de las observaciones realizadas por el docente.
Consultar sobre el perímetro de la circunferencia, el valor numérico de π y el conjunto numérico al que pertenece, con el fin de avanzar en la comprensión de las categorías presentes en la dimensión de contenidos.	Especificación y ampliación en las ideas consultadas	Socialización sobre las consultas realizadas. Observaciones escritas realizadas por el docente, para evidenciar los avances.

Tabla 6. Desempeños de Comprensión Fase de Investigación Guiada

Desempeños fase investigación guiada	Criterios de evaluación	Realimentación
Responder a preguntas relacionadas con el tema objeto de estudio, a través de la manipulación de objetos circulares hallados en el entorno.	Coherencia y dedicación durante el desarrollo del trabajo propuesto en esta fase.	Socialización de las comprensiones entre los participantes, y así, generar conclusiones.
Determinar las relaciones entre algunos conceptos subyacentes al tema objeto de estudio; entre estos: radio, diámetro y longitud de la circunferencia.	Participación y claridad en los aportes, por parte de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad propuesta en esta fase.	Socialización de las comprensiones entre los participantes, para generar conclusiones.
Los estudiantes indagarán sobre las relaciones halladas en el desempeño anterior, con el fin de avanzar en la comprensión de la categoría presente en la dimensión de métodos.	Socialización de las ideas consultadas para la ampliación de la actividad planteada.	Socialización entre los participantes sobre las consultas realizadas, con el fin de evidenciar los avances respecto al tema objeto de estudio.

Tabla 7. Desempeños de Comprensión Fase Proyecto Final de Síntesis

Desempeños fase proyecto final de síntesis	Criterios de evaluación	Realimentación
Resolver problemas relacionados con el tema objeto de estudio, haciendo uso de los conceptos adquiridos por los estudiantes durante el proceso de comprensión, con el fin de socializarlos de manera detallada.	<p>Contenido: Uso de los conceptos adquiridos para la solución de los problemas planteados.</p> <p>Métodos: Formula diferentes estrategias para llevar a cabo la solución de los problemas planteados.</p> <p>Praxis: Articula los conceptos adquiridos con situaciones de la vida cotidiana.</p> <p>Formas de comunicación: Coherencia e interacción con el público al momento de comunicar los conocimientos aprendidos durante el desarrollo de las actividades propuestas en las distintas fases.</p>	Validación de los problemas resueltos y explicados por los estudiantes, a través de las dimensiones del marco teórico que fundamenta la presente investigación.

4.7.5. Descriptores de Desempeño.

Los descriptores de desempeños indican lo que se desea alcanzar en la investigación. Tienen la finalidad de que se van a evaluar en cada dimensión, al realizar las actividades propuestas en la unidad curricular. Ver tablas 8 a 11.

Tabla 8. Categorías Dimensión de Contenido

Categorías	Niveles de comprensión			
	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Concepto de perímetro.	No se evidencia en el desarrollo de las actividades una descripción de los elementos necesarios para hallar el perímetro de una circunferencia. Su concepción sobre la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, es errónea.	Vincula sus conceptos previos o intuitivos en la relación que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.	Da cuenta de la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, pero lo hace de manera algorítmica.	Reconoce la importancia de la relación entre longitud de la circunferencia y diámetro, refinando así sus concepciones previas o intuitivas.
Reconocimiento de π como número irracional.	Sus aportes iniciales no le permiten reconocer al número π en su naturaleza de irracional. Prevalen las creencias intuitivas.	Manifiesta algunas ideas importantes que le ayudan a reconocer a π como número irracional.	Reconoce conceptos subyacentes involucrados en el estudio del número π como irracional.	Muestra un dominio de los conceptos subyacentes involucrados en el estudio del número (pi) π como irracional.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Tabla 9. Categoría Dimensión de Métodos.

Categorías	Niveles de comprensión			
	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Proceso para determinar el perímetro de una circunferencia.	No se evidencia en el desarrollo de las actividades un proceso constructivo que le permita determinar el perímetro de una circunferencia.	Comienza a realizar un proceso constructivo para determinar el perímetro de una circunferencia, pero aplica mecánicamente los procesos.	Reflexiona acerca de lo que piensa, sabe, oye y lee sobre el proceso de construcción que permite determinar el perímetro de una circunferencia, y así afianzar su comprensión.	Valida con coherencia el proceso que permite determinar el perímetro de una circunferencia.

Tabla 10. Categoría Dimensión de Praxis.

Categorías	Niveles de comprensión			
	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Aplicación del concepto de perímetro en situaciones cotidianas.	Sus conocimientos previos no le permiten relacionar el perímetro de una circunferencia en situaciones cotidianas.	Con apoyo, empieza a relacionar la longitud de una circunferencia en situaciones cotidianas.	Aplica de diversas formas el concepto de perímetro en situaciones cotidianas, para resolver problemas prácticos, generar explicaciones, interpretarse a sí mismo y a los demás.	Espontáneamente usa el concepto de perímetro de múltiples y nuevas maneras, con el fin de solucionar situaciones cotidianas.

Tabla 11. Categoría Dimensión de Formas de Comunicación.

Categorías	Niveles de comprensión			
	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Coherencia expositiva	Explica sin dominio los conceptos involucrados en la exposición y se expresa siempre al mismo ritmo y con el mismo tono de voz.	Prepara de manera clara sus exposiciones y aunque se expresa siempre con ritmo y tono de voz cambiante, le falta dominio sobre el tema.	Prepara de manera clara sus exposiciones y las explica con buen dominio, aunque se expresa siempre al mismo ritmo y con el mismo tono de voz.	Prepara sus exposiciones y las explica con buen dominio, expresándose siempre con ritmo y tono de voz cambiante.
Interacción con el público.	La interacción con el público es escasa, al no establecer un contacto visual que le permitiera interactuar con ellos durante la exposición.	La interacción con el público es limitada. Esto se evidencia en el poco contacto visual que tuvo con ellos durante la exposición.	Establece una buena interacción con el público, al lograr un notable contacto visual con ellos durante la exposición.	Establece una excelente interacción con el público, por medio de una oportuna y eficaz conexión visual con ellos durante la exposición.
Buen uso de los términos matemáticos.	No se evidencia un buen uso de los términos matemáticos durante la exposición, para que esta, sea comprensible, amena y eficaz.	En ocasiones, hace buen uso de los términos matemáticos, limitando la comprensión del problema por parte del público.	Se evidencia un buen uso de los términos matemáticos durante la exposición, para que esta, sea comprensible.	Se evidencia de forma categórica un buen uso de los términos matemáticos durante la exposición, para que esta, sea comprensible, amena y eficaz.

4.8. Validación.

Además de contrastar los datos proporcionados por los estudiantes participantes de la presente investigación, por medio de las observaciones realizadas durante las distintas fases de la unidad curricular, la discusión entre los participantes y la revisión del material suministrado por ellos, y al triangular estas fuentes, que también me permitieron refinar los

descriptores de desempeños, se llevó a cabo la validación de esta investigación. Esto en base al marco de la enseñanza para la comprensión y de mi postura como investigador participante.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

CAPÍTULO V

5. Análisis y Resultados

Este capítulo aborda la descripción y el análisis de los resultados obtenidos en el desarrollo de las diferentes actividades propuestas a lo largo de la unidad curricular. Estas actividades se presentaron en la fase exploratoria, de investigación guiada y proyecto final de síntesis, con base en los desempeños de comprensión de los estudiantes participantes de la investigación.

Como manifesté en el capítulo anterior, los instrumentos que utilicé para recolectar la información fueron: las observaciones realizadas durante el desarrollo de las actividades propuestas en la unidad curricular, una discusión entre los participantes -a través de preguntas relacionadas con el tema objeto de estudio- y sus producciones escritas, correspondientes a cada una de las actividades desarrolladas. Además, para dar cuenta de la comprensión de los estudiantes respecto al tema objeto de estudio, tuve presente algunas categorías que emergieron en el transcurso del trabajo de campo, unos descriptores de desempeños y la triangulación de las diferentes fuentes de información ya mencionadas, con base en el marco de la enseñanza para la comprensión.

5.1. Descripción y análisis

De acuerdo con las actividades propuestas en la *fase exploratoria*, comencé la exploración con dos actividades donde se pretendió describir los elementos de la circunferencia y evidenciar la comprensión de la expresión matemática de su longitud, por parte de los estudiantes; así de esta manera mostrar el nivel de comprensión de cada uno de ellos en esta fase.

Para el desarrollo de la primera actividad de la fase exploratoria, les mostré en el aula una imagen proyectada de una circunferencia con sus elementos sin nombrarlos (ver el capítulo 4, actividad 1, fase de exploración). Los estudiantes leyeron el enunciado, el cual contenía dos preguntas, a saber: ¿Qué observas en la imagen? y ¿Qué nombre reciben los elementos mostrados en la imagen?, luego procedieron a responder. Las preguntas anteriores probaron la comprensión de los estudiantes participantes en la investigación, con base en sus conocimientos previos.

En esta primera parte, los estudiantes Naty y Cristian al dar respuesta a las preguntas planteadas, reconocieron la circunferencia como el borde de una figura circular, pero sin describir explícitamente sus elementos, entre ellos: radio y diámetro. Cristian relacionó: el concepto de área al espacio limitado por el borde de la figura circular y el de superficie a la medida del espacio limitado por el borde de la figura circular. Naty relacionó el concepto de área con el de longitud, además, le dio al perímetro y longitud de la circunferencia distintos significados. Stefa no describió los elementos de la circunferencia, ni la reconoce como el borde de una figura circular. No dio cuenta de los conceptos de área, superficie y perímetro. Por lo anterior, se identificó que presentaron una comprensión ingenua, al no mostrar dominio de la actividad planteada (Boix-Mansilla y Gardner, 1999).

Para el desarrollo de la segunda actividad de la fase exploratoria, la cual se planteó en dos momentos, los participantes de la investigación a partir de sus conocimientos previos, contribuyeron con la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia. Para esto, les proyecté en ambos momentos una imagen con un problema (ver el capítulo 4, actividad 2, fase de exploración). Con base al primer momento, los estudiantes no relacionaron los datos suministrados en la actividad, con excepción de algunos

que reconocieron al diámetro de la circunferencia como el doble de su radio. Por lo anterior, no fueron capaces de darle solución a la actividad planteada.

Al afrontar el segundo momento, los estudiantes tuvieron en cuenta las sugerencias dadas en la actividad para tratar de darle solución (ver el capítulo 4, actividad 2, fase de exploración). Se evidenció que algunos estudiantes presentan habilidades para manejar procesos algorítmicos, identificaron el símbolo que representa a pi, y expresaron que su valor era 3,14, desconociendo su naturaleza irracional. Al final resolvieron la actividad con base en la parte algorítmica, sin ir más allá de la memorización y las acciones rutinarias, por lo que su comprensión en esta segunda actividad también fue ingenua. Lo anterior valida lo dicho por Perkins (1999, p.3), que cuando un estudiante no va más allá de los procedimientos algorítmicos, la memorización y las acciones rutinarias, significa que presenta dificultad en la comprensión.

Por lo tanto, se concluye que la comprensión de los estudiantes en la dimensión de contenido, es ingenua al iniciar la aplicación de esta unidad curricular, ya que no muestran dominio de las actividades planteadas, ni ir más allá de los actos rutinarios y la memorización. Ver tabla 12.

Tabla 12. Nivel de Comprensión inicial por estudiante.

Actividades fase exploratoria	Niveles de comprensión			
	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Actividad 1	Comprensión de Naty			
Actividad 2, momento 1	Comprensión de			
Actividad 2, momento 2	Cristian			
	Comprensión de Stefa			

Posteriormente, luego de que los estudiantes consultaran sobre las preguntas planteadas en la fase exploratoria, se generó una discusión argumentativa en el aula, en la cual se refinaron sus conocimientos previos y manifestaron algunas conclusiones, que mostraron el avance en la comprensión de las categorías presentes en la dimensión de contenido, las cuales están relacionadas con la identificación de los elementos necesarios para hallar el perímetro de la circunferencia, como lo son: el radio, el diámetro, el reconocimiento del número pi (π) como irracional y su valor aproximado a dos cifras decimales (3,14).

CASO I. Naty

A continuación, presento la producción escrita de las actividades de Naty en la fase exploratoria y la relatoría de sus resultados en la discusión entre los participantes, con el fin de evidenciar su comprensión, respecto al tema objeto de estudio. “Lo que los estudiantes responden no sólo demuestra su nivel de comprensión actual, sino que lo más probable es que los haga avanzar (Perkins, 1999, p. 2). La siguiente ilustración muestra la producción de Naty respecto a la primera actividad de la fase exploratoria.

Primera actividad-Fase Exploratoria	Transcripciones
A) $AB =$ Segmento	A) $AB =$ Segmento
B) $OC =$ Radio	B) $OC =$ Radio
I) El borde de la figura = Circunferencia	I) El borde de la figura = Circunferencia
J) El espacio limitado por el borde de la figura = Área	J) El espacio limitado por el borde de la figura = Área
K) La medida del borde de la figura = Longitud	K) La medida del borde de la figura = Longitud
L) La medida del espacio limitado por el borde de la figura = Perímetro	L) La medida del espacio limitado por el borde de la figura = Perímetro

Ilustración 15: Primera actividad fase exploratoria. Realizada por Naty

En esta primera actividad de la fase exploratoria, Naty da cuenta de la representación de un segmento, una recta y un punto, pero no los relaciona con los elementos de la circunferencia, a excepción del radio. Reconoce la circunferencia como el borde de una figura circular, pero confunde el concepto de área con el de superficie. Interpreta los términos perímetro y longitud de la circunferencia con distintos significados. Basado en lo anterior, se puede afirmar que se encuentra en un nivel ingenuo de comprensión, en tanto que no exhibe un dominio de la actividad planteada (Boix-Mansilla y Gardner, 1999).

Con base en la segunda actividad de la fase exploratoria, precisamente en el primer momento, la estudiante trata de relacionar el radio de la arepa circular con la mitad de su diámetro, pero lo hace sin argumentos explícitos al respecto. Con relación al perímetro, afirma que es igual a treinta y dos (32), ya que, se debe multiplicar dieciséis por dos (16×2). Ver ilustración 16.

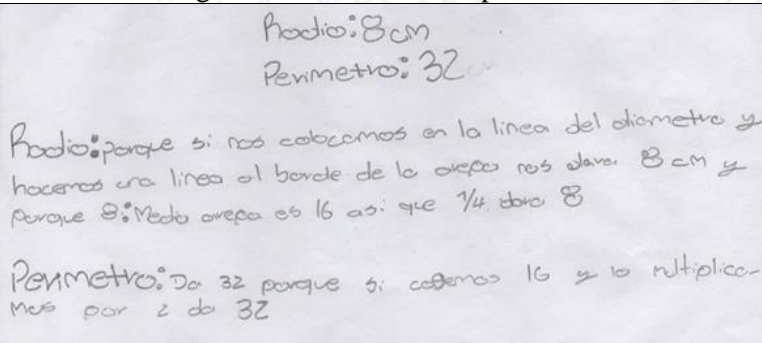
Segunda actividad-Fase exploratoria	Transcripción
 <p>Radio: 8 cm Perímetro: 32</p> <p>Radio: porque si nos colocamos en la línea del diámetro y hacemos una línea al borde de la arepa nos dará 8 cm y porque 8: media arepa es 16 así que $\frac{1}{4}$ dará 8</p> <p>Perímetro: da 32 porque si cogemos 16 y lo multiplicamos por 2 da 32</p>	<p>Radio: 8 cm Perímetro: 32</p> <p>Radio: porque si nos colocamos en la línea del diámetro y hacemos una línea al borde de la arepa nos dará 8 cm y porque 8: media arepa es 16 así que $\frac{1}{4}$ dará 8</p> <p>Perímetro: da 32 porque si cogemos 16 y lo multiplicamos por 2 da 32</p>

Ilustración 16: Actividad 2 fase exploratoria. Momento 1. Realizada por Naty

En el segundo momento de la actividad anterior, el valor que la estudiante le da al radio es aproximado al doble de su perímetro, lo cual no es correcto. Reconoce un valor para pi de 3,14, pero no lo relaciona con su naturaleza irracional, luego lo multiplicó por el valor del diámetro y le dio como resultado el perímetro de la arepa, sin hacer uso de las unidades

involucradas en el problema. La estudiante no fue más allá de los procedimientos algorítmicos, lo cual significa, que presenta dificultad en la comprensión (Perkins, 1999, p.3). Ver ilustración 17.

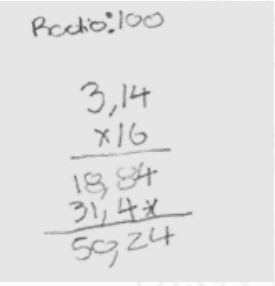
Segunda actividad-Fase exploratoria	Transcripción
	<p>Radio: 100 3,14 X 16 ----- 18,84 31,4x ----- 50,24</p>

Ilustración 17: Actividad 2 fase exploratoria. Momento 2. Realizada por Naty

Para cerrar esta fase exploratoria, propuse una discusión entre los participantes, con el fin de avanzar en la comprensión de cada uno de ellos, respecto al tema objeto de estudio. A continuación, presento la relatoría de los resultados obtenidos en la discusión, la cual se grabó y se transcribió, y se adjunta en los anexos. En esta discusión, se tuvo en cuenta las categorías presentes en la dimensión de contenido (ver apartados 4.7.5 y 6.2.1), que emergieron de los datos suministrados por la estudiante y se evaluaron para analizar su comprensión. Lo anterior contribuyó para ubicarla en un nivel de comprensión en dicha dimensión.

En las siguientes discusiones se usará, por ejemplo, la etiqueta: “L4” la cual corresponde a la línea cuatro (4) de la transcripción de la discusión, y la abreviatura “Inv”, que significa investigador, con el fin de orientar al lector.

En esta discusión entre los participantes, se evidenció el nivel de comprensión por parte de la estudiante, a través de las siguientes preguntas:

L1- 3 Inv.: *¿Qué elementos de la circunferencia considera necesarios para hallar su perímetro?, ¿conoces el valor numérico de π ?, ¿cuál es? y ¿a qué conjunto numérico pertenece?*

Al respecto, Naty afirma:

L4 Naty: *La longitud de la circunferencia y su diámetro.*

En este fragmento del discurso, relacionado con la primera pregunta, Naty muestra que los términos perímetro y longitud de la circunferencia poseen distintos significados, ya que, a este último lo considera un elemento necesario para hallar el perímetro de la circunferencia. Lo expresado por Naty en la línea cuatro (L4) coincide con lo descrito por ella, en la primera actividad de la fase exploratoria, ratificando que su comprensión es ingenua en esta fase. Respecto a la segunda pregunta, Naty afirma:

L5 Naty: *Sí, su valor es 3,14 y pertenece a los decimales infinitos.*

El texto de la línea cinco permite observar que Naty reconoce un valor para pi (π) de 3,14, pero no lo relaciona con su naturaleza irracional, ya que se limita a decir que pertenece a los decimales infinitos, sin explicitar si son periódicos o no periódicos.

Por tanto, se evidencia en esta fase exploratoria, que la estudiante identifica desde sus conocimientos previos algunos elementos importantes, como radio y circunferencia, pero aún no se observa de forma explícita ninguna relación entre estos elementos y el tema objeto de estudio. Estos conocimientos previos fueron contrastados posteriormente a través de consultas relacionadas con los elementos necesarios para comprender la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia. Estas consultas arrojaron algunas conclusiones como: el diámetro es igual a dos veces el radio, el cociente entre la longitud de la circunferencia y su respectivo diámetro da como resultado el valor numérico de pi (π), sin

aún reconocerlo como número irracional. Lo anterior llevó a la estudiante a mostrar algunas relaciones nuevas que no tenía al iniciar esta fase exploratoria.

En la fase de investigación guiada, se les propuso a los estudiantes una actividad, con el fin de indagar sobre el tópico elegido. (Ver capítulo 4, numeral 4.7.3.2). Con la actividad anterior, los estudiantes generaron aportes importantes para su desarrollo y comprensión.

A continuación, presento la producción escrita de la actividad desarrollada por Naty en la fase de investigación guiada y la relatoría de sus resultados en la discusión entre los participantes, en esta fase, con el fin de evidenciar su comprensión, respecto al tema objeto de estudio. Ver ilustración 18.

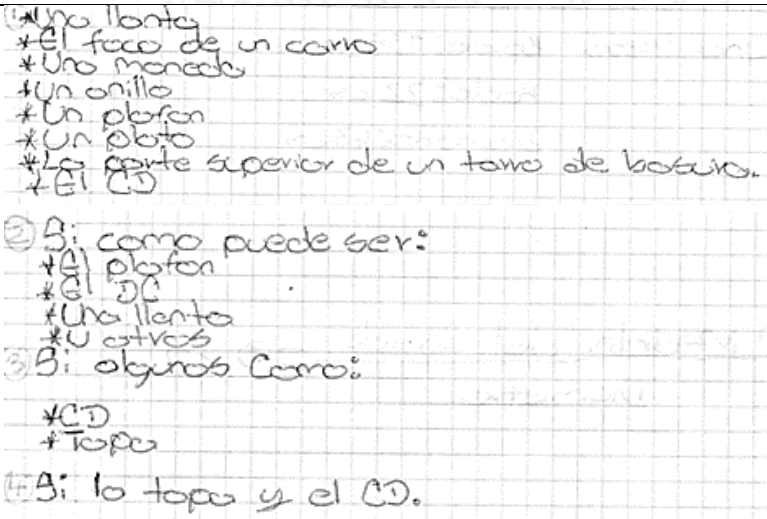
Actividad-Fase investigación guiada	Transcripción
	<ul style="list-style-type: none"> *Una llanta * El foco de un carro *Un anillo *Un plafón *Un plato * La parte superior de un tarro de basura. * El CD. <p>Sí como puede ser:</p> <ul style="list-style-type: none"> * El plafón * El DC * Una llanta * U otros <p>Sí algunos como:</p> <ul style="list-style-type: none"> * CD * Tapa <p>Sí la tapa y el CD</p>

Ilustración 18: Producción Fase Investigación Guiada. Realizada por Naty

En esta actividad de la fase de investigación guiada, Naty reconoció diferentes objetos circulares de su entorno: una llanta, un plafón, una moneda, un disco compacto (CD), un anillo, un plato, la parte superior de un tarro de basura. Utilizó la cinta métrica para medir el

borde de dichos objetos, además, identificó el centro de algunos de estos objetos, entre ellos: el del disco compacto (CD), el de la tapa, y afirma que tienen su centro definido.

Naty, además de medir algunos bordes de estos objetos circulares, también midió: la distancia que hay desde un punto del borde hasta su centro (radio) y el doble de dicha distancia (diámetro). Estas mediciones las realizó con los objetos circulares que tienen su centro definido. Luego halló el cociente entre la longitud de uno de los bordes y el doble de la distancia entre dicho borde y su centro, obteniendo un resultado aproximado al número pi (π). Por último, propuso una expresión matemática para hallar el valor aproximado de pi (π). La información anterior se muestra en la siguiente ilustración.

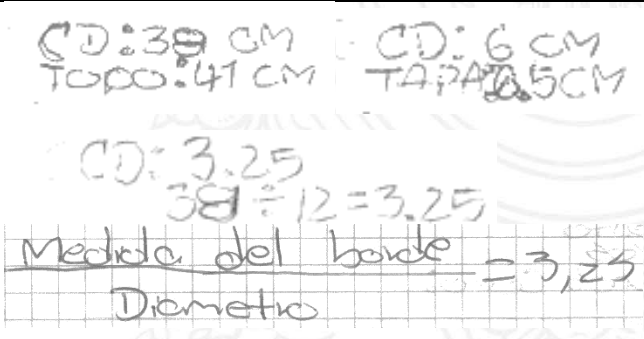
Actividad-Fase investigación guiada	Transcripción
 <p>CD: 38 cm CD: 6 cm Tapa: 41 cm TAPA: 5 cm</p> <p>CD: 3.25 38 ÷ 12 = 3.25</p> <p>$\frac{\text{Medida del borde}}{\text{Diámetro}} = 3,25$</p>	<p>CD: 38 cm CD: 6 cm Tapa: 41 cm TAPA: 6.5 cm</p> <p>CD: 3.25 38 ÷ 12 = 3.25</p> <p>$\frac{\text{medida del borde}}{\text{Diámetro}} = 3,25$</p>

Ilustración 19. Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Naty

La información suministrada por la estudiante permitió concluir, que los resultados de los cocientes fueron números decimales aproximados a pi (π). En ese momento, no fue capaz de proponer una expresión matemática para hallar el perímetro de la circunferencia; solo mostró un cociente cuyo resultado se aproximaba al valor de pi (π).

La información anterior fue contrastada por medio de las consultas realizadas por la estudiante y la realimentación suministrada por los participantes. Esta consulta la llevó a

mostrar algunas relaciones nuevas que no tenía inicialmente, por ejemplo, de la expresión matemática para hallar el valor aproximado de pi (π), obtuvo la expresión matemática para hallar la longitud de la circunferencia, a través de la transposición de términos¹⁹.

Para cerrar esta fase de investigación guiada, propuse una discusión argumentativa entre los estudiantes participantes, con el fin de avanzar en la comprensión de cada uno de ellos, respecto al tema objeto de estudio. A continuación, presento la relatoría de los resultados obtenidos por Naty, en esta discusión, en la que se tuvo en cuenta las categorías presentes en la dimensión de contenido y de métodos (ver apartados 4.7.5, 6.2.1 y 6.2.2), las cuales emergieron de los datos suministrados por la estudiante y se evaluaron para analizar su comprensión. Lo anterior contribuyó para ubicar a la estudiante en un nivel de comprensión en dichas dimensiones.

En esta discusión entre los participantes, en la que se propusieron inicialmente las preguntas del apartado 4.7.3.4.2, emergieron nuevas preguntas a medida que avanzaba la discusión, con el fin de ajustar los conceptos involucrados en el estudio. Lo anterior evidenció el avance en la comprensión por parte de Naty.

Una de las preguntas realizadas en las líneas L6–7, después de hallar el cociente entre la longitud del borde de un objeto circular y el doble de la distancia entre el borde y el centro del objeto es la siguiente:

L6-7 Inv.: *¿Dentro de qué conjunto numérico puedes representar el resultado?*

A lo que Naty respondió:

¹⁹ La transposición de términos es un procedimiento que consiste en pasar algunos elementos de un lugar a otro, en una ecuación dada, con el fin de resolverla.

L8 Naty: *Yo pienso que está dentro de los decimales infinitos.*

En este fragmento del discurso, Naty, al expresar la conjugación “yo pienso”, considera que el cociente anterior se encuentra dentro de los números decimales infinitos, pero no especifica si es a los números decimales infinitos periódicos o no periódicos. Esto, generó una nueva pregunta por parte del investigador:

L9-11 Inv.: *¿Será que esos números infinitos son irracionales? o ¿bajo qué condición los decimales infinitos son Irracionales?*

A lo que Cristian respondió, ya que, ningún otro participante lo hizo:

L12-13 Cristian: *Que no sean periódicos. Los decimales infinitos periódicos son racionales.*

En este fragmento del discurso, Cristian afirma que los números irracionales no pueden ser infinitos periódicos. En la línea 2 (L13) expresa: “*son racionales*”, lo que indica que ningún número irracional puede ser racional.

En este orden de ideas y teniendo en cuenta que el resultado del cociente entre la longitud del borde y el doble de la distancia desde el borde hasta el centro del objeto circular, es un número irracional, surgió la siguiente pregunta:

L14–15 Inv.: *¿Dentro de qué conjunto numérico podrías ubicar la longitud del borde y el doble de la distancia desde el borde hasta el centro del objeto circular?*

En relación a esta pregunta, Cristian expresó que “*por lo menos uno de los elementos mencionados debe ser irracional*”. A lo que Naty respondió:

L16 Naty: *Puede ser que sí.*

En este fragmento del discurso, Naty manifiesta “*duda*” sobre las respuestas emitidas por su compañero, al expresar en la línea dieciséis (L16) “*puede ser que sí*”. Esto

significa que aún no reconoce a pi (π) como número irracional, al parecer, presenta falta de comprensión sobre la naturaleza de pi (π).

En las líneas L17 a L18, se realiza una pregunta relacionada con la medición y división entre longitudes de objetos circulares de diferentes tamaños. Esto ocurrió durante el desarrollo inicial de la fase de investigación guiada.

L17–L18 Inv.: *¿Qué sucede con el cociente hallado si los objetos medidos son de diferentes tamaños?*

A lo que Naty respondió:

L19 Naty: *Los resultados pueden ser aproximados.*

En la línea 1 (L19), el adjetivo “aproximados” indica que al medir objetos circulares de diferente tamaño y, al hallar el cociente entre la longitud del borde y el doble de la distancia desde el borde hasta el centro de cada objeto circular, obtuvo un resultado cercano a pi (π).

De acuerdo al análisis realizado hasta el momento y la realimentación dada sobre el tema objeto de estudio, la estudiante obtuvo algunas conclusiones que se muestran a través de las siguientes preguntas: L20 – 21, L23 – 24, L27 – 29, L31 – 33.

L20–21 Inv.: *¿Qué nombre le darías matemáticamente a dicho borde?*

A lo que Naty respondió:

L22 Naty: *Se llama circunferencia.*

En este fragmento del discurso, Naty está de acuerdo con lo expresado por uno de sus compañeros, al manifestar que el borde de un objeto circular se le llama circunferencia. Esto coincide con lo expresado por Naty en la fase exploratoria.

L23-24 Inv.: *¿Qué nombre le darías matemáticamente a la medición de dicho borde?*

A lo que Naty respondió:

L25-26 Naty: *¡Eh! yo profe, estoy de acuerdo con uno de mis compañeros, se llama longitud de la circunferencia.*

En este fragmento del discurso, Naty solo está de acuerdo con uno de sus compañeros sobre la respuesta a la pregunta anterior. Esto indica que no relaciona la longitud de la circunferencia con el perímetro de la misma. Esto se evidencia en la respuesta de otro de sus compañeros, el cual dice que se llama perímetro.

L27–29 Inv.: *¿Qué nombre le darías matemáticamente a la distancia que hay desde el borde de un objeto circular hasta el centro del mismo?*

A lo que Naty respondió:

L30 Naty: *Estoy de acuerdo con mis compañeros, se llama radio.*

En este fragmento del discurso, Naty valida lo dicho en la fase exploratoria; que dicha distancia se llama radio.

L31–33 Inv.: *¿Qué distancia hay desde un punto cualesquiera del borde hasta otro punto del mismo, de tal manera que pase por el centro?*

A lo que Naty respondió:

L34 Naty: *Se llama diámetro.*

En la línea treinta y cuatro (L34), se evidencia un avance en la comprensión de Naty, ya que, este es uno de los elementos que no reconocía durante el desarrollo de la fase exploratoria. Lo anterior concuerda con lo expresado por Perkins (1999, p. 2): “Los estudiantes al responder no sólo demuestran su nivel de comprensión actual, sino que lo más probable es que los haga avanzar”, como sucedió en este caso.

En este orden de ideas, se sigue con la última pregunta de esta discusión, relacionada con la primera actividad de la fase de investigación guiada.

L35–36 Inv: *¿Qué nombre le darías al cociente hallado durante el proceso realizado en la fase de investigación guiada?*

A lo que Naty respondió:

L37 Naty: *¡Eh!... el nombre de pi. Infinito no periódico.*

En la línea treinta y siete (L37), Naty muestra un avance en la comprensión, al reconocer a pi (π) como un número decimal infinito no periódico, es decir, como número irracional. Esto indica que se encuentra en un nivel de comprensión diferente al ingenuo, ya que, en este no se muestra dominio de lo que se plantea (Boix-Mansilla y Gardner, 1999).

El desarrollo de las actividades anteriores, llevaron a Naty, a comprender cada una de las categorías presentes en la dimensión de contenido y de método (ver apartados 4.7.5, 6.2.1 y 6.2.2), y a ubicarla en un nivel de comprensión diferente al que mostró inicialmente (ingenuo), tal como se precisa en el marco de la enseñanza para la comprensión. Los niveles de comprensión permiten distinguir desempeños débiles de otros más avanzados (Boix-Mansilla y Gardner, 1999).

Con base a la fase del *proyecto final de síntesis*, los estudiantes resolvieron algunos problemas relacionados con la expresión matemática de la longitud de la circunferencia, para luego exponerlos ante sus compañeros de clase, y así, poner en evidencia su comprensión. A continuación, presento uno de los problemas propuestos en el capítulo 4, numeral 4.7.3.3 y su respectiva solución, por parte de Naty. Ver ilustración 20.

El diámetro de una arepa paisa mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio y el perímetro de la arepa?

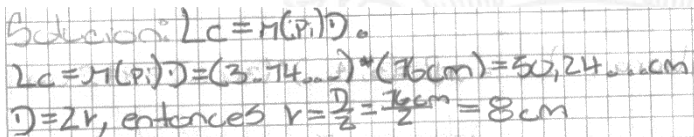
Actividad-Fase proyecto final de síntesis	Transcripción
 <p>Solución: $L_c = \pi(\pi)D$ $L_c = \pi(\pi)D = (3.14...) * (16cm) = 50,24...cm$ $D = 2r$, entonces $r = \frac{D}{2} = \frac{16cm}{2} = 8cm$</p>	<p>Solución: $L_c = \pi(\pi)D$. $L_c = \pi(\pi)D = (3.14...) * (16cm) = 50,24... cm$ $D = 2r$, entonces $r = \frac{D}{2} = \frac{16cm}{2} = 8cm$</p>

Ilustración 20: Actividad Proyecto Final de Síntesis. Realizada por Naty.

Para resolver la actividad planteada en esta fase, la estudiante identificó lo indagado en el problema, al parecer, sabía a donde quería llegar o lo que quería hallar, lo cual fue fundamental para la solución de la actividad. Reconoció a pi (π) como número irracional y le colocó tres puntos suspensivos a su valor para indicar que se trataba de un decimal infinito no periódico.

Otro aspecto importante en esta fase, estuvo relacionada con la aplicación de operaciones matemáticas durante la solución de problema. En este punto, Naty no tuvo en cuenta las propiedades de los números reales para despejar la incógnita²⁰ (radio) y se apoyó en la transposición de términos.

Luego de comprender el problema, la estudiante dio cuenta de los datos que se le entregaron, hizo un planteamiento de acuerdo a las operaciones que le servían y aplicó la expresión matemática correspondiente para solucionar el problema. Por último, revisó el proceso que la llevó a comprobar la solución del problema.

²⁰ La incógnita es un valor desconocido, el cual se puede simbolizar a través de una letra.

Por otra parte, Naty, al igual que Cristian y Stefa, socializó ante sus compañeros de clase, uno de los problemas propuestos en esta fase. Preparó de manera clara el problema y explicó con dominio los conceptos involucrados, haciendo buen uso de los términos matemáticos durante la exposición, para que esta, fuera comprensible; aunque se expresó siempre al mismo ritmo y con el mismo tono de voz; esto, posiblemente incidió en la distracción de algunos integrantes del público y se evidenció a través de las observaciones realizadas por mí como investigador. Dejó tiempo suficiente para las preguntas por parte de sus compañeros, ya que, su presentación no duró más de veinte (20) minutos. Inicialmente dio a conocer lo que se pretendía con la exposición y logró establecer una buena comunicación con ellos. Esto se evidenció al finalizar la exposición, ya que, surgieron algunas preguntas interesantes, respecto a algunos conceptos relacionados con el problema expuesto, a las cuales le supo dar respuestas coherentes.

De igual forma, Naty, al igual que Cristian y Estefa, propusieron otras situaciones problemas relacionadas con el tema objeto de estudio. Esto se evidencia en la discusión que se dio entre los participantes, en esta fase, lo que muestra que hubo avances en su comprensión. La discusión se llevó a cabo, a través de la siguiente pregunta: ¿Qué otras situaciones de la vida cotidiana relacionada con el perímetro de la circunferencia propones para afianzar tu comprensión? A lo que Naty respondió:

L38-40 Naty: *Mi exposición fue en [con] base a una arepa paisa y la forma era circular, pero también propongo la llanta de una bicicleta.*

En la línea treinta y nueve (L39), el presente indicativo “propongo”, se refiere a exponer una idea que esté relacionada con algo específico; en este caso, la longitud de la circunferencia. Lo anterior evidencia que Naty reconoce objetos del medio que conllevan a

la solución de problemas relacionados con la longitud de la circunferencia. De acuerdo a la información anterior, resultó una nueva pregunta:

L40 Inv.: ¿Cuál sería el radio de esa llanta?

A lo que Naty respondió:

L41 Naty: Estoy de acuerdo con mi compañero Cristian.

En este fragmento del discurso, Naty valida la respuesta dada por Cristian: “*Es el que va desde el borde hasta el centro de la llanta*”. Esta respuesta también concuerda con lo expresado en L27–29 y L30 presentadas anteriormente.

El análisis anterior permitió evidenciar el avance en la comprensión de Naty, a través de los procesos realizados en la solución de problemas relacionados con la expresión matemática de la longitud de la circunferencia; además, identificó otra situación de su cotidianidad en las que se puede aplicar dicha expresión.

El desarrollo de la actividad anterior, ubica las comprensiones de Naty en las categorías de las dimensiones de praxis y formas de comunicación, y en un nivel de comprensión distinto al ingenuo en estas dimensiones, tal como se precisa en el marco de la enseñanza para la comprensión (ver apartados 4.7.5, 6.2.3 y 6.2.4).

CASO II. Cristian

A continuación, presento la producción escrita de las actividades de Cristian en la fase exploratoria y la relatoría de sus resultados en la discusión entre los participantes, en esta fase, con el fin de evidenciar su comprensión, respecto al tema objeto de estudio. “Lo que los estudiantes responden no sólo demuestra su nivel de comprensión actual, sino que

lo más probable es que los haga avanzar” (Perkins, 1994, p. 2). La siguiente ilustración muestra la primera actividad desarrollada por Cristian en la fase exploratoria.

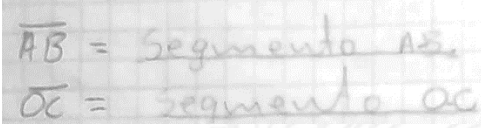
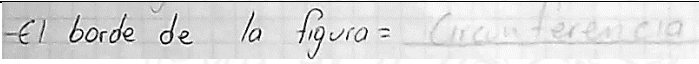
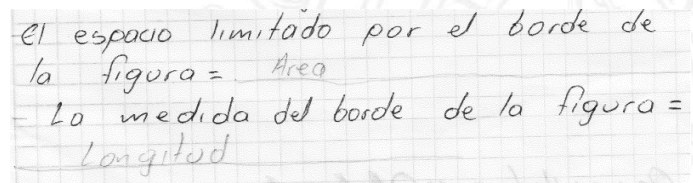
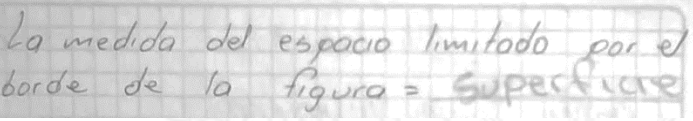
Primera actividad-Fase Exploratoria	Transcripciones
	AB= Segmento AB OC= Segmento OC
	El borde de la figura = Circunferencia
	El espacio limitado por el borde de la figura = Área La medida del borde de la figura = Longitud
	La medida del espacio limitado por el borde de la figura = Superficie.

Ilustración 21: Actividad 1. Fase Exploratoria. Realizada por Cristian.

En esta primera actividad de la fase exploratoria, Cristian da cuenta de la representación de un segmento y una recta, pero no los relaciona con los elementos de la circunferencia. Reconoce la circunferencia como el borde de una figura circular y su longitud como la medida de dicho borde. Confunde los conceptos de área y superficie. El concepto de área se lo atribuye al espacio limitado por el borde de la figura circular y el concepto de superficie se lo atribuye a la medida del espacio limitado por el borde de la figura circular. Lo anterior muestra que su comprensión es de nivel ingenuo, al no describir los elementos de la circunferencia, como son el radio y diámetro, los cuales son esenciales para la comprensión de la expresión matemática de la circunferencia. Cuando un estudiante no muestra dominio de una actividad planteada, se puede afirmar que presenta una comprensión ingenua (Boix-Mansilla y Gardner, 1999).

Con base en la segunda actividad de la fase exploratoria, precisamente en el primer momento, Cristian, a través de argumentos válidos relaciona el radio de la arepa circular con la mitad de su diámetro. Con relación al perímetro, afirma que es igual a doscientos seis centímetros (206 cm), justificando que es la suma del borde. Ver ilustración 22.

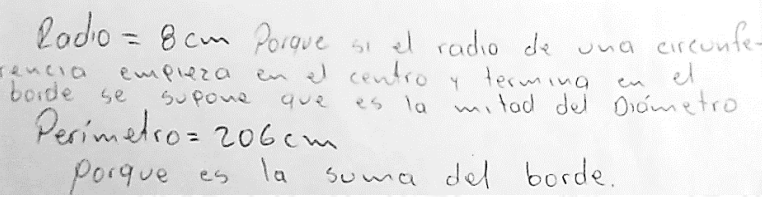
Segunda actividad-Fase exploratoria	Transcripción
 <p>Radio = 8 cm Porque si el radio de una circunferencia empieza en el centro y termina en el borde se supone que es la mitad del Diámetro Perímetro = 206 cm porque es la suma del borde.</p>	<p>Radio: 8 cm porque si el radio de una circunferencia empieza en el centro y termina en el borde se supone que es la mitad del diámetro. Perímetro = 206 cm Porque es la suma del borde.</p>

Ilustración 22: Actividad 2 Fase Exploratoria. Momento 1. Realizada por Cristian.

En el segundo momento de la actividad anterior, el valor que Cristian le da al radio equivale a la mitad de su diámetro, lo cual es correcto. Reconoce un valor para pi de 3,14, pero no lo relaciona con su naturaleza irracional, luego lo multiplicó por el valor del diámetro y le dio como resultado el perímetro de la arepa, sin hacer uso de las unidades involucradas en el problema. El estudiante no fue más allá de los procedimientos algorítmicos, lo cual significa, que presenta dificultad en la comprensión (Perkins, 1999, p.3). Ver ilustración 23.

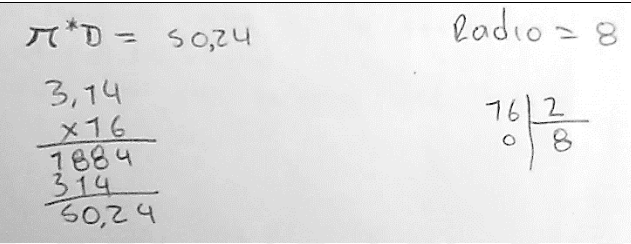
Segunda actividad-Fase exploratoria	Transcripción
 <p>$\pi * D = 50,24$ $\begin{array}{r} 3,14 \\ \times 16 \\ \hline 1884 \\ 314 \\ \hline 50,24 \end{array}$ Radio = 8 $\begin{array}{r} 76 \overline{) 2} \\ 0 \\ \hline 8 \end{array}$</p>	<p>$\pi * D = 50,24$ $\begin{array}{r} 3,14 \\ \times 16 \\ \hline 1884 \\ 314 \\ \hline 50,24 \end{array}$ Radio = 8 $16 \div 2 = 8$</p>

Ilustración 23: Actividad 2 Fase Exploratoria. Momento 2. Realizada por Cristian.

Para cerrar esta fase exploratoria, propuse una discusión entre los participantes, con el fin de avanzar en la comprensión de cada uno de ellos, respecto al tema objeto de estudio.

A continuación, presento los resultados obtenidos por Cristian en la discusión, la cual se grabó y se transcribió, y se adjunta en los anexos. En esta discusión, se tuvo en cuenta las categorías presentes en la dimensión de contenido (ver apartados 4.7.5 y 6.2.1), las cuales emergieron de los datos suministrados por los estudiantes y se evaluaron para analizar su comprensión. Esto contribuyó para ubicarlo en un nivel de comprensión, de acuerdo al marco de la Enseñanza para la Comprensión. En las siguientes discusiones se usará, por ejemplo, la etiqueta: L42 la cual corresponde a la línea cuarenta y dos (42) de la transcripción de la discusión, con el fin de orientar al lector.

En esta discusión entre los participantes se evidenció el nivel de comprensión por parte de Cristian, a través de las siguientes preguntas:

Respecto a la pregunta: *¿Qué elementos de la circunferencia considera necesarios para hallar su perímetro?, ¿conoces el valor numérico de π ?, ¿cuál es? y ¿a qué conjunto numérico pertenece?*, Cristian afirma:

L42-45 Cristian: *Es necesario conocer el radio, el diámetro y el valor de π , para hallar el perímetro de la circunferencia. El valor de π es 3,14..., y es un número irracional, ya que, se trata de un decimal infinito no periódico.*

En este fragmento del discurso, relacionado con la primera pregunta, Cristian reconoce los elementos necesarios para hallar el perímetro de la circunferencia. Además, en la línea (L44) argumenta a través del conector “ya que”, por qué π es un número irracional, es decir, reconoce su naturaleza irracional. Lo anterior evidencia el avance en la comprensión de Cristian respecto al tema objeto de estudio, en la fase exploratoria. “Los estudiantes al responder no sólo demuestran su nivel de comprensión actual, sino que lo más probable es que los haga avanzar” (Perkins, 1999, p. 2).

Por tanto, se evidencia en esta fase, que el estudiante desde sus conocimientos previos no mostró ninguna relación entre los elementos de la circunferencia y el tema objeto de estudio. Posteriormente, estos conocimientos previos fueron contrastados a través de consultas relacionadas con los elementos necesarios para comprender la expresión matemática de la longitud de la circunferencia. Estas consultas arrojaron algunas conclusiones como: el diámetro es igual a dos veces el radio, el cociente entre la longitud de la circunferencia y su respectivo diámetro da como resultado el valor numérico de pi (π), reconociendo su naturaleza irracional. Lo anterior llevó al estudiante a mostrar algunas relaciones nuevas que no tenía al iniciar la fase exploratoria. Esto se reflejó en la discusión entre los participantes.

En la fase de investigación guiada, se les propuso a los estudiantes una actividad, con el fin de indagar sobre el tópico elegido. (Ver capítulo 4, numeral 4.7.3.2). Con la actividad anterior, los estudiantes generaron aportes para su desarrollo y comprensión.

A continuación, en la ilustración 24, presento la producción escrita de la actividad desarrollada por Cristian en la fase de investigación guiada y los resultados de la discusión entre los participantes, en esta fase, con el fin de evidenciar su comprensión, respecto al tema objeto de estudio.

Actividad-Fase investigación guiada

Transcripción

- * Un plafón.
- * Una rueda.
- * Mesa circular.
- * Un plato de bicicleta.
- * Una moneda.
- * Un CD.
- * Una argolla.
- * Una pulcera.
- * La boca de un tubo.
- * Una tapa.

- *Un plafón.
- * Una rueda.
- *Mesa circular.
- *Un plato de bicicleta.
- *Una moneda.
- * Un CD.
- * Una argolla.
- * Una pulcera.
- * La boca de un tubo.
- *Una tapa.

De algunos. Si, algunos si y otros no,

- El CD.
 - El anillo.
 - El plafón.
 - El LP.
- Si tienen su centro Definido.

De algunos
Si, algunos si y otros no.
El CD
El anillo
El plafón
El LP
Si tienen su centro definido.

- La moneda.
 - La boca de un tubo.
 - Una tapa.
- no tienen su centro Definido.

La moneda
La boca de un tubo
Una tapa.
No tienen su centro definido.

Ilustración 24: Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Cristian

En esta actividad de la fase de investigación guiada, Cristian reconoció diferentes objetos circulares de su entorno: una rueda, un plafón, una mesa circular, un CD, una argolla, la boca de un tubo, una tapa. Utilizó la cinta métrica para medir el borde de dichos objetos, además, identificó el centro de algunos de ellos: el CD, el LP, el anillo y el plafón y dice que tienen su centro definido.

Cristian al igual que Naty, además de medir algunos bordes de estos objetos circulares, también midió: la distancia que hay desde un punto del borde hasta su centro (radio) y el doble de dicha distancia (diámetro). Estas mediciones las realizó con los objetos

circulares que tienen su centro definido. Luego halló el cociente entre la longitud de uno de los bordes y el doble de la distancia entre dicho borde y su centro, obteniendo un resultado aproximado al número pi (π). Por último, propuso una expresión matemática para hallar el valor aproximado de pi (π). Ver ilustración 25.

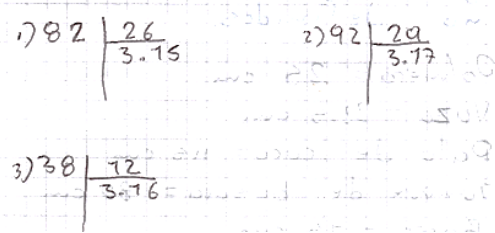
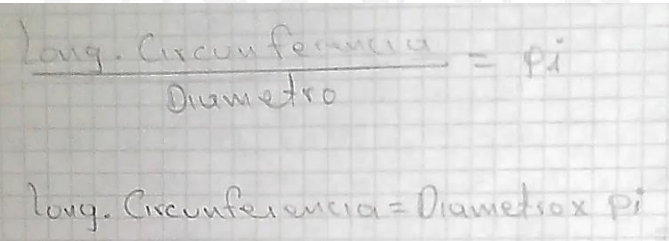
Actividad-Fase investigación guiada	Transcripción
<p>5= Una tapa. Longitud del borde = 82.5 cm Diámetro = 26 cm Radio = 13 cm</p>	<p>5= Una tapa: Longitud del borde = 82.5 cm Diámetro = 26 cm Radio = 13 cm</p>
<p>LP. Longitud del borde = 92 cm Diámetro = 29 cm Radio = 14.5 cm</p>	<p>LP Longitud del borde = 92 cm Diámetro = 29 cm Radio = 14.5 cm</p>
<p>CD. Longitud del borde = 38 cm Diámetro = 12 Radio = 6</p>	<p>CD Longitud del borde = 38 cm Diámetro = 12 cm Radio = 6 cm</p>
	<p>Tapa $82 \div 26 = 3.15$ LP $92 \div 29 = 3.17$ CD $38 \div 12 = 3.16$</p>
	<p> $\frac{\text{Long. Circunferencia}}{\text{Diámetro}} = \pi$ $\text{Long. Circunferencia} = \text{Diámetro} \times \pi$ </p>

Ilustración 25: Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Cristian.

La información suministrada por Cristian permitió concluir, que los resultados de los cocientes fueron números decimales aproximados a pi (π). Además, fue capaz de proponer una expresión matemática para hallar el perímetro de la circunferencia, a partir del cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

La información anterior fue contrastada a través de las consultas realizadas por el estudiante y la realimentación suministrada por los participantes. Esto le permitió avanzar en su comprensión respecto al tema objeto de estudio.

Para cerrar esta fase de investigación guiada, propuse una discusión entre los participantes, con el fin de avanzar en la comprensión de cada uno de ellos, respecto al tema objeto de estudio. A continuación, presento la relatoría de los resultados obtenidos por Cristian en esta discusión, en la que se tuvo en cuenta las categorías presentes en la dimensión de contenido y de métodos (ver apartados 4.7.5, 6.2.1 y 6.2.2), las cuales emergieron de los datos suministrados por él. Lo anterior contribuyó para ubicarlo en un nivel de comprensión distinto al ingenuo.

En esta discusión entre los participantes, en la que se propusieron inicialmente las preguntas del apartado 4.7.3.4.2, emergieron nuevas preguntas a medida que avanzaba la discusión, con el fin de ajustar los conceptos involucrados en el estudio. Lo anterior evidenció el avance en la comprensión por parte de Cristian.

Una de las preguntas realizadas en esta discusión se registra en la línea cuarenta y seis (L46), la cual surgió como resultado de hallar el cociente entre la longitud del borde de un objeto circular y el doble de la distancia entre el borde y el centro del objeto.

L46

Inv:

¿Cuál es el resultado del cociente anterior?

A lo que Cristian respondió:

L47 Cristian: 3,14...

En este fragmento del discurso, Cristian muestra como resultado del cociente anterior el decimal 3,14 seguido de tres puntos suspensivos (...), los cuales indicó con un dedo de la mano, manifestando así, que se trataba de un número decimal infinito.

Esto, generó nuevas preguntas por parte del investigador y se muestran en las líneas cuarenta y ocho a cincuenta, y cincuenta y tres (L48-50) y (L53).

L48-50 Inv.: *¿Será qué esos números infinitos son irracionales? o ¿bajo qué condición los decimales infinitos son Irracionales?*

A lo que Cristian respondió, ya que, ningún otro participante lo hizo:

L51-52 Cristian: *Que no sean periódicos. Los decimales infinitos periódicos son racionales.*

En estas dos líneas, Cristian afirma que los números irracionales no pueden ser infinitos periódicos. En la línea cincuenta y dos (L52) expresa: “*son racionales*”, lo que indica que ningún número irracional puede ser racional.

L53 Inv: *¿3.14 es un decimal finito o infinito?*

A lo que Cristian respondió:

L54-56 Cristian: *profe el número exacto sería 3.141592 puntos suspensivos, porque el número no termina ahí. Es un decimal infinito no periódico.*

En este fragmento del discurso, Cristian evidencia que reconoce a pi (π) como número irracional. En la línea cincuenta y cinco (L55), al expresar: “*el número no termina ahí*”, es una muestra de que π no es finito. Además, en las líneas L55-56, da a conocer que π es un *decimal infinito no periódico*, reconociendo su naturaleza de irracional.

En esta orden de ideas ya que el resultado del cociente entre la longitud del borde y el doble de la distancia desde el borde hasta el centro del objeto circular, es un número irracional, surgió la siguiente pregunta:

L57-58 Inv.: *¿Dentro de qué conjunto numérico podrías ubicar la longitud del borde y el doble de dicha distancia?*

En relación a esta pregunta, Cristian respondió:

L59-60 Cristian: *“bueno profe, principalmente, alguno de los dos tiene que ser irracional para que de ese Resultado”*

En la línea cincuenta y nueve (L59), la frase “*alguno de los dos*”, se refiere a que por lo menos uno de los elementos mencionados en L58, debe ser irracional, es decir, la longitud de la circunferencia es irracional o el diámetro es irracional, o ambos son irracionales, para obtener un cociente irracional. Lo anterior evidencia que el estudiante comprende de manera argumentativa la naturaleza de π .

En las líneas sesenta y uno y sesenta y dos (L61 a L62), se realiza una pregunta relacionada con la medición de objetos circulares de diferentes tamaños. Esto ocurrió durante el desarrollo inicial de la fase de investigación guiada.

L61-L62 Inv.: *¿Qué sucede con el cociente hallado si los objetos medidos son de diferentes tamaños?*

A lo que Cristian respondió:

L63-64 Cristian: *profe para complementar serían aproximados al número pi.*

En la línea sesenta y tres (L63), el verbo transitivo “complementar”, indica que el estudiante busca mejorar su comprensión respecto a la pregunta realizada en las líneas sesenta y uno, y sesenta y dos (L61-L62), ya que, su compañera Naty había respondido: “*los resultados pueden ser aproximados*”. Cristian complementó: “*al número pi (π)*” (L64).

De acuerdo al análisis realizado hasta el momento y la realimentación dada sobre el tema objeto de estudio, Cristian obtuvo algunas conclusiones que se muestran a través de las preguntas realizadas en las líneas: L20–21, L23–24, L27–29, L31–33.

La pregunta realizada en las líneas veinte y veintiuno (L20–21) fue: *¿Qué nombre le darías matemáticamente a dicho borde?* A lo que Cristian respondió:

L65-66 Cristian: *¡claro profe!, yo también estoy de acuerdo con los compañeros, es el nombre de dicho borde.*

En este fragmento del discurso, Cristian está de acuerdo con lo expresado por sus compañeros, al manifestar que el borde de un objeto circular se le llama circunferencia. Esto coincide con lo expresado por él, en la fase exploratoria.

La pregunta realizada en las líneas veintitrés y veinticuatro (L23–24) fue: *¿Qué nombre le darías matemáticamente a la medición de dicho borde?* A lo que Cristian respondió:

L67 Cristian: *“También se podría llamar perímetro”.*

En este fragmento del discurso, el condicional indicativo “*se podría*”, indica que Cristian le da a los términos longitud de la circunferencia y perímetro, el mismo significado, lo cual es correcto. Naty y Stefa, habían respondido: “*se llama longitud de la circunferencia*”.

La pregunta realizada en las líneas veintisiete a veintinueve (L27–29) fue: *¿Qué nombre le darías matemáticamente a la distancia que hay desde el borde de un objeto circular hasta el centro del mismo?* A lo que Cristian respondió:

L68 Cristian: *“Estoy de acuerdo con Stefa, se llama radio”.*

En la línea sesenta y ocho (L68), Cristian da cuenta de un concepto que no describió en la fase exploratoria. Esto demuestra el avance de su comprensión respecto al tema objeto de estudio.

La pregunta realizada en las líneas treinta y uno a treinta y tres (L31–33) fue: *¿Qué distancia hay desde un punto cualesquiera del borde hasta otro punto del mismo, de tal manera que pase por el centro?* A lo que Cristian respondió:

L69 Cristian: *“¡Yo profe!, se le da el nombre de diámetro”.*

En la línea sesenta y nueve (L69), se evidencia un avance en la comprensión de Cristian, ya que, este es uno de los elementos que no reconocía durante el desarrollo de la fase exploratoria. Lo anterior concuerda con lo expresado por Perkins (1999, p. 2): “Los estudiantes al responder no sólo demuestran su nivel de comprensión actual, sino que lo más probable es que los haga avanzar”, como sucedió en este caso.

En este orden de ideas, se sigue con la última pregunta de esta discusión, relacionada con la actividad de la fase de investigación guiada. La pregunta se realizó anteriormente, en las líneas treinta y cinco y treinta y seis (L35–36). *¿Qué nombre le darías al cociente hallado durante el proceso realizado en la fase de investigación guiada?* A lo que Cristian respondió:

L70 Cristian: *Pi (π). Decimal infinito no periódico.*

En la línea setenta (L70), Cristian muestra un avance en la comprensión, al reconocer a pi (π) como un número decimal infinito no periódico, es decir, como número irracional. Esto indica que se encuentra en un nivel de comprensión diferente al ingenuo, ya que, en este no se muestra dominio de lo que se plantea (Boix-Mansilla y Gardner, 1999).

El desarrollo de las actividades anteriores, llevaron a Cristian, a comprender cada una de las categorías presentes en la dimensión de contenido y de método, y a ubicarlo en un nivel de comprensión diferente al que mostró inicialmente (ingenuo), tal como se precisa en el marco de la enseñanza para la comprensión. Los niveles de comprensión permiten distinguir desempeños débiles de otros más avanzados (Boix-Mansilla y Gardner, 1999).

Con base a la fase del *proyecto final de síntesis*, el estudiante resolvió algunos problemas relacionados con la expresión matemática de la longitud de la circunferencia, para luego exponerlos ante sus compañeros de clase, y así, poner en evidencia su comprensión. A continuación, presento uno de los problemas propuestos en el capítulo 4, numeral 4.7.3.3 y su respectiva solución, por parte de Cristian. Ver ilustración 26.

Cristian ha medido la longitud de la circunferencia de un tanque cilíndrico y el diámetro de su base. Responde la siguiente pregunta en forma aproximada: ¿Cuánto es mayor la longitud de la circunferencia del tanque que su diámetro? ¿Cuánto mide la longitud de una circunferencia cuyo diámetro es 30 cm?

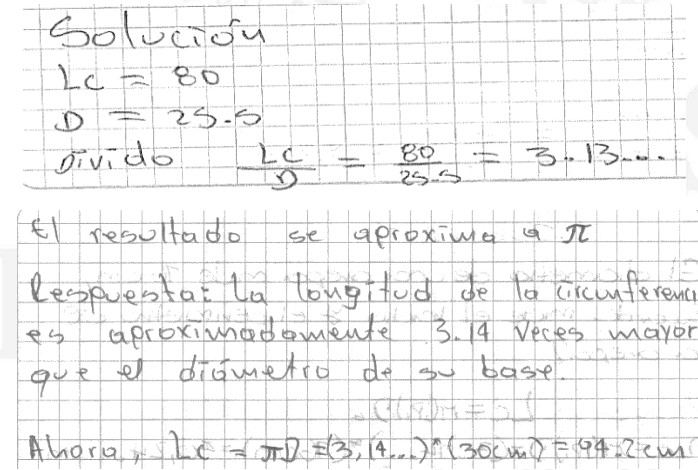
Actividad-Fase proyecto final de síntesis	Transcripción
	<p>Solución</p> <p>$L_c = 80$</p> <p>$D = 25.5$</p> <p>Divido $\frac{L_c}{D} = \frac{80}{25.5} = 3.13\dots$</p> <p>El resultado se aproxima a π.</p> <p>Respuesta: La longitud de la circunferencia es aproximadamente 3.14 veces mayor que el diámetro de su base.</p> <p>Ahora, $L_c = \pi D = (3.14\dots) \cdot (30 \text{ cm}) = 94.2 \text{ cm}$</p>

Ilustración 26: Actividad Proyecto Final de Síntesis. Realizada por Cristian

Para resolver la actividad planteada en esta fase, el estudiante midió la longitud de la circunferencia de un tanque cilíndrico y el diámetro de su base. Identificó lo que se le pidió en el problema, sabía a donde quería llegar o lo que quería hallar, lo cual fue fundamental para la solución de la actividad. Además, reconoció a pi (π) como número irracional.

Otro aspecto en esta fase, estuvo relacionada con la aplicación de operaciones matemáticas durante la solución de problema. Para responder la primera pregunta, Cristian realizó una división entre la longitud de la circunferencia y su respectivo diámetro, luego empleó la expresión matemática de la longitud de la circunferencia para hallar la longitud de una circunferencia de diámetro 30 cm y aproximó el resultado a una cifra decimal.

Después de comprender el problema, el estudiante dio cuenta de los datos que se le entregaron, hizo un planteamiento de acuerdo a las operaciones que le servían y aplicó la expresión matemática correspondiente para solucionar el problema. Por último, revisó el proceso que lo llevó a comprobar la solución del problema.

Por otra parte, Cristian, al igual que Naty y Stefa, socializó ante sus compañeros uno de los problemas propuestos en esta fase. Preparó de manera clara el problema y explicó con buen dominio los conceptos involucrados, haciendo un correcto uso de los términos matemáticos durante la exposición, para que esta, fuera comprensible. Además se expresó al mismo ritmo y con un tono de voz que permitió enfatizar los aspectos claves del problema y llamar la atención del público. Esto se evidencia a través de las observaciones realizadas por mí como investigador durante esta actividad. Dejó tiempo suficiente para las preguntas por parte del público, ya que, su presentación no duró más de veinte (20) minutos. Inicialmente dio a conocer lo que se pretendía con la exposición y logró establecer una buena comunicación con ellos. Esto se evidenció al finalizar la exposición, ya que, surgieron

algunas preguntas interesantes, respecto a algunos conceptos relacionados con el problema expuesto, a las cuales le supo dar respuestas coherentes.

De igual forma, Cristian, al igual que Naty y Stefa, propusieron otras situaciones relacionadas con el tema objeto de estudio. Esto se evidencia en la discusión que se dio entre los participantes, en esta fase, lo que muestra que hubo avances en su comprensión. La discusión se llevó a cabo, a través de la pregunta realizada anteriormente, en las líneas treinta y ocho a cuarenta (L38-40) del presente capítulo: ¿Qué otras situaciones de la vida cotidiana relacionada con el perímetro de la circunferencia propones para afianzar tu comprensión?

A lo que Cristian respondió:

L71-72 Cristian: *Yo profe! estoy de acuerdo con Naty, ya que al dividir la longitud de una llanta y su radio, da como resultado 2π .*

En la línea setenta y uno (L71), la expresión “estoy de acuerdo”, indica que Cristian reconoce objetos del medio que conllevan a la solución de problemas relacionados con la longitud de la circunferencia. Además, en estas líneas, el estudiante da cuenta que el número (2π) surge del cociente entre la longitud de una circunferencia y su respectivo radio. Validando así, su avance en la comprensión respecto al tema objeto de estudio.

El análisis anterior permitió evidenciar el avance en la comprensión de Cristian, a través de los procesos realizados en la solución de problemas relacionados con la expresión matemática de la longitud de la circunferencia; además, identificó otra situación de su cotidianidad en las que se puede aplicar dicha expresión.

El desarrollo de la actividad anterior, ubica las comprensiones de Cristian en las categorías de las dimensiones de praxis y formas de comunicación, y en un nivel de

comprensión distinto al ingenuo en estas dimensiones, tal como se precisa en el marco de la enseñanza para la comprensión (ver apartados 4.7.5, 6.2.3 y 6.2.4).

CASO III. Stefa

A continuación, presento la producción escrita de las actividades de Stefa en la fase exploratoria y los resultados de la discusión entre los participantes, en esta fase, con el fin de evidenciar su comprensión, respecto al tema objeto de estudio. “Al trabajar por medio de la comprensión de los estudiantes en respuesta a un desafío particular, llegan a comprender mejor” (Perkins, 1994, p. 2). Ver ilustración 27.

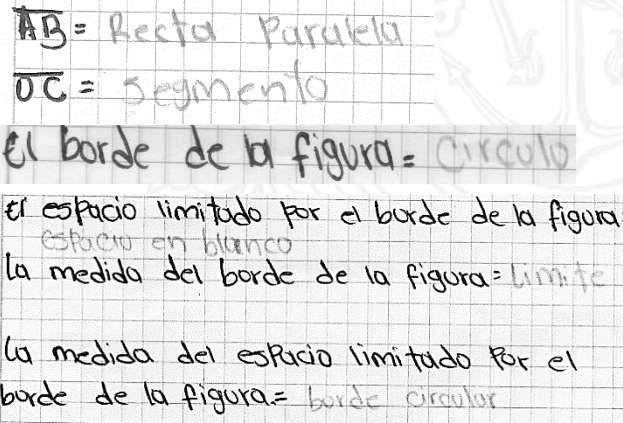
Primera actividad-Fase Exploratoria	Transcripciones
	<p>AB= Recta Paralela</p> <p>OC = Segmento</p> <p>El borde la figura = Círculo</p> <p>El espacio limitado por el borde la figura: Espacio en blanco</p> <p>La medida del borde la figura = Límite</p> <p>La medida del espacio limitado por el borde de la figura = borde circular.</p>

Ilustración 27: Actividad 1. Fase Exploratoria. Realizada por Stefa.

En esta primera actividad de la fase exploratoria, Stefa no relaciona algunos elementos de la circunferencia. Al diámetro le da el nombre de recta paralela y al radio el nombre de segmento. No reconoce la circunferencia como el borde de una figura circular, dándole a este el nombre de círculo. Además, no da cuenta de los conceptos de superficie (espacio en blanco), de perímetro (límite) y área (borde circular). Lo anterior muestra que su comprensión es ingenua, al no mostrar dominio de la actividad planteada (Boix-Mansilla y Gardner, 1999).

Con base en la segunda actividad de la fase exploratoria, precisamente en el primer momento, la estudiante no relaciona el radio de la arepa circular con la mitad de su diámetro, al darle un valor de 20 cm. Con relación al perímetro, afirma que “*es todo lo de adentro de una figura circular*” y le da un valor de treinta y dos centímetros (32cm), lo cual no es correcto. Este último resultado lo infirió de manera errónea, argumentando que: “*el diámetro es 16 cm y es solamente una parte*” de todo lo de adentro. Ver ilustración 28.

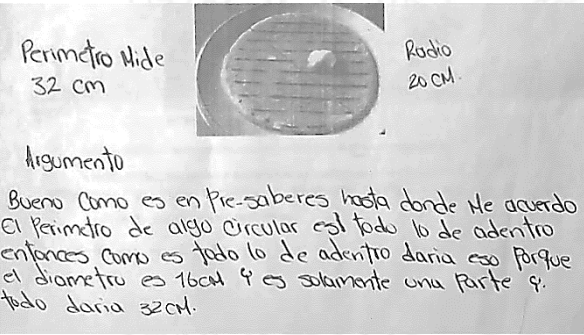
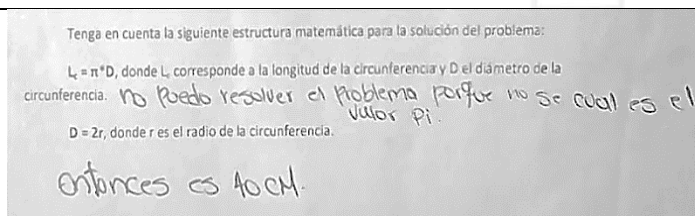
Segunda actividad-Fase Exploratoria (momento 1)	Transcripciones
	<p>Perímetro mide 32cm</p> <p>Radio 20cm</p> <p>Argumento Bueno como es en pre-saberes hasta donde me acuerdo. El perímetro de algo circular es todo lo de adentro entonces como es todo lo de adentro daría eso porque el diámetro es 16cm y es solamente una parte y todo daría 32cm.</p>

Ilustración 28: Actividad 2. Fase Exploratoria. Momento 1. Realizada por Stefa.

En el segundo momento de la actividad anterior, el valor que la estudiante le da al radio corresponde a los $\frac{5}{2}$ de su diámetro, lo cual no es correcto. Además, no reconoce el valor de pi (π), lo que significa que desconoce su naturaleza irracional. Lo anterior permite concluir que Stefa no muestra dominio de la actividad planteada, por lo que su comprensión en esta fase sigue siendo ingenua (Boix-Mansilla y Gardner, 1999). Ver ilustración 29.



No pude resolver el problema porque no se cual es el valor pi

Entonces es 40cm.

Ilustración 29: Actividad 2. Fase Exploratoria. Momento 2. Realizada por Stefa

Para cerrar esta fase exploratoria, propuse una discusión entre los participantes, con el fin de avanzar en la comprensión de cada uno de ellos, respecto al tema objeto de estudio. A continuación, presento los argumentos suministrados por Stefa en la discusión, la cual se grabó y se transcribió, y se adjunta en los anexos. En esta, se tuvo en cuenta las categorías presentes en la dimensión de contenido (ver apartados 4.7.5 y 6.2.1), las cuales emergieron de los datos suministrados por la estudiante y se evaluaron para analizar su comprensión. Lo anterior contribuyó para ubicarla en un nivel de comprensión. En las siguientes discusiones se usará, por ejemplo, la etiqueta: “L73” la cual corresponde a la línea setenta y tres (73) de la transcripción de la discusión, con el fin de orientar al lector.

En esta discusión entre los participantes se evidenció el nivel de comprensión por parte de la estudiante, a través de las preguntas relacionadas anteriormente, en las líneas uno a tres (L1-3) del presente capítulo: *¿Qué elementos de la circunferencia considera necesarios para hallar su perímetro? ¿Conoces el valor numérico de π ? ¿Cuál es? y ¿a qué conjunto numérico pertenece?*

Respecto a la primera pregunta, Stefa afirma:

L73 Stefa: *Diámetro y radio.*

En este fragmento del discurso, relacionado con la primera pregunta, Stefa da cuenta de dos (2) elementos necesarios para hallar la longitud de la circunferencia. Lo expresado por Stefa en la línea setenta y tres (L73) demuestra que su comprensión avanzó, en relación a lo descrito por ella, en la primera actividad de la fase exploratoria.

Respecto a las siguientes preguntas, Stefa afirma:

L74 Stefa: *Su valor es 3,14 y pertenece a los números decimales.*

En línea setenta y cuatro (L74), Stefa reconoce un valor para pi (π) de 3,14 y aunque expresa que es un número decimal, no lo relaciona con su naturaleza irracional; es decir, no explicita que se trata de un decimal infinito no periódico.

Por tanto, se evidencia en la fase exploratoria, un avance en la comprensión por parte de Stefa, por las siguientes razones: Uno, en el desarrollo de las actividades propuestas en esta fase, mostró una comprensión ingenua, al no dar cuenta de los elementos necesarios para hallar el perímetro de la circunferencia. Dos, en la discusión entre los participantes da a conocer estos elementos.

Los conocimientos mostrados en esta fase, fueron contrastados a través de consultas relacionadas con los elementos necesarios para comprender la expresión matemática de la longitud de la circunferencia. Estas consultas arrojaron algunas conclusiones como: el diámetro es igual a dos veces el radio, el cociente entre la longitud de la circunferencia y su respectivo diámetro da como resultado el valor numérico de pi (π), sin aún reconocerlo como número irracional. Lo anterior llevó a la estudiante a mostrar algunas relaciones nuevas que no tenía al iniciar la fase exploratoria.

En la fase de investigación guiada, se les propuso a los estudiantes una actividad, con el fin de indagar sobre el tópico elegido. (Ver capítulo 4, numeral 4.7.3.2). Con esta actividad, los estudiantes generaron aportes importantes para su desarrollo y comprensión.

A continuación, presento la producción escrita de la actividad desarrollada por Stefa en la fase de investigación guiada y los argumentos suministrados por ella en la discusión entre los participantes, en esta fase, con el fin de evidenciar su comprensión respecto al tema objeto de estudio. Ver ilustración 30.

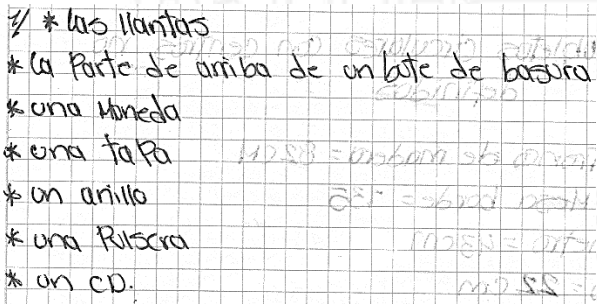
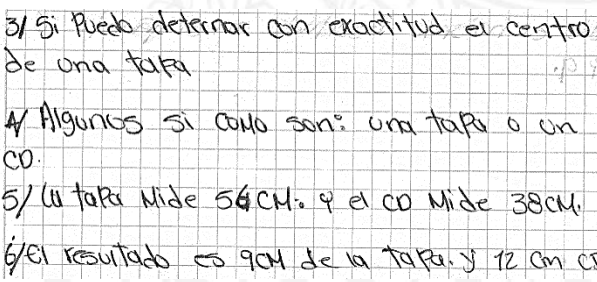
Actividad-Fase Investigación Guiada	Transcripciones
	<p>1/ * Las llantas * Una moneda * Una tapa * Un anillo * Una pulsera * Un CD</p>
	<p>3/ Sí puedo determinar con exactitud el centro de una tapa. 4/ Algunos sí como son: una tapa o un CD 5/ La tapa mide 56cm. Y el CD mide 38cm. 6/ El resultado es 9cm de la tapa y 12cm el CD.</p>

Ilustración 30: Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Stefa

En esta actividad de la fase de investigación guiada, Stefa reconoció diferentes objetos circulares de su entorno: una llanta, la parte superior de un bote de basura, una moneda, un disco compacto (CD), un anillo, una tapa, una pulsera. Utilizó la cinta métrica para medir el borde de dichos objetos, además, identificó el centro de algunos de estos objetos

circulares, entre ellos: el del disco compacto (CD) y el de la tapa. Afirma que tienen su centro definido.

Stefa, además de medir algunos bordes de estos objetos circulares, también midió: la distancia que hay desde un punto del borde hasta su centro (radio) y el doble de dicha distancia (diámetro). Estas mediciones las realizó con los objetos circulares que tienen su centro definido. Luego halló el cociente entre la longitud de uno de los bordes y el doble de la distancia entre dicho borde y su centro, obteniendo un resultado aproximado al número pi (π). Por último, propuso una expresión matemática para hallar el valor aproximado de pi (π), la cual, se muestra a continuación. Ver ilustración 31.

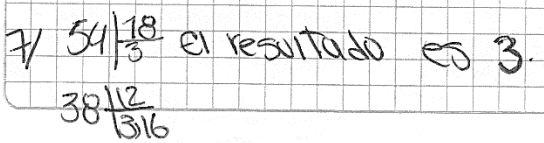
Actividad-Fase Investigación Guiada	Transcripciones
	$7/54 \div 18 = 3$ el resultado es 3 $38 \div 12 = 3,16$

Ilustración 31: Producción Fase de Investigación Guiada. Realizada por Stefa.

La información suministrada por la estudiante permitió concluir, que uno de los resultados de los cocientes fue un número decimal aproximado a pi (π), ya que el otro dio tres (3). En ese momento, la estudiante no fue capaz de proponer una expresión matemática para hallar el perímetro de la circunferencia; solo mostró un cociente cuyo resultado se aproximaba al valor de pi (π), sin dar cuenta de su naturaleza irracional.

La información anterior fue contrastada a través de las consultas realizadas por la estudiante y la realimentación suministrada por los participantes. Esta consulta la llevó a mostrar algunas relaciones nuevas que no tenía inicialmente, por ejemplo, de la expresión matemática para hallar el valor aproximado de pi (π), se obtuvo la expresión matemática para

hallar la longitud de la circunferencia. Esto, a través de la transposición de términos. Cabe anotar que, al culminar la fase exploratoria, la estudiante, aún no reconoce a pi (π) como número decimal infinito no periódico, es decir, como número irracional.

Para cerrar esta fase de investigación guiada, propuse una discusión entre los participantes, con el fin de avanzar en la comprensión de cada uno de ellos, respecto al tema objeto de estudio. A continuación, presento los resultados obtenidos por Stefa, en esta discusión, en la que se tuvo en cuenta las categorías presentes en la dimensión de contenido y de métodos (ver apartados 4.7.5, 6.2.1 y 6.2.2), las cuales emergieron de los datos suministrados por la estudiante. Lo anterior contribuyó para ubicarla en un nivel de comprensión.

En esta discusión entre los participantes, en la que se propusieron inicialmente las preguntas del apartado 4.7.3.4.2, emergieron nuevas preguntas a medida que avanzaba la discusión, con el fin de ajustar los conceptos involucrados en el estudio. Lo anterior evidenció el avance en la comprensión por parte de Stefa.

Una de las preguntas se realizó en las líneas L6–7 del presente capítulo, después de hallar el cociente entre la longitud del borde de un objeto circular y el doble de la distancia entre el borde y el centro del objeto.

A lo que Stefa respondió:

L75 Stefa: *Números decimales.*

En este fragmento del discurso, Stefa considera que el cociente anterior se encuentra dentro de los números decimales, pero no especifica si es a los números decimales finitos o infinitos, y tampoco, si pertenece a los decimales infinitos periódicos o no periódicos. Lo

anterior coincide con lo expresado por ella en la línea setenta y cuatro (L74); lo que significa que aún, sigue sin reconocer la naturaleza irracional de pi (π).

Seguidamente, surgieron nuevas preguntas en las que el participante Cristian dio a conocer algunos resultados esenciales para la comprensión del tema objeto de estudio. Entre estos: Uno, el valor numérico de pi (π) es 3.14... y corresponde a un decimal infinito no periódicos. Dos, los números irracionales corresponden a decimales infinitos no periódicos, ya que los periódicos pertenecen a los números racionales. Tres, si pi (π) es irracional, por lo menos uno de los siguientes elementos es irracional: Longitud de la circunferencia y diámetro. Los resultados anteriores le permitieron a Stefa afianzar su comprensión respecto al tema objeto de estudio.

Posteriormente, en las líneas L17 a L18 del presente capítulo, se realizó una pregunta relacionada con la medición de objetos circulares de diferentes tamaños. Esto ocurrió durante el desarrollo inicial de la fase de investigación guiada.

A lo que Stefa respondió:

L76 Stefa: *Son algo diferentes.*

En la línea setenta y seis (L76), la estudiante indica que, al medir objetos circulares de diferente tamaño, obtuvo resultados “*algo diferentes*”. Esto se evidencia en el cociente hallado entre la longitud del borde y el doble de la distancia desde el borde hasta el centro de cada objeto circular. Los resultados obtenidos por Stefa fueron: tres (3) y tres punto dieciséis (3.16). Este último aproximado al valor de pi (π).

De acuerdo al análisis realizado hasta el momento y la realimentación dada sobre el tema objeto de estudio, la estudiante obtuvo algunas conclusiones que se muestran a través de las siguientes preguntas:

L77-78 Inv.: *¿Qué nombre le darías matemáticamente a dicho borde?*

A lo que Stefa respondió:

L79 Stefa: *Se puede llamar circunferencia.*

En este fragmento del discurso, Stefa manifiesta que al borde de un objeto circular se le llama circunferencia. Esto muestra un avance en su comprensión, ya que, en la fase exploratoria no pudo relacionar este concepto con el borde una figura circular.

L80-81 Inv.: *¿Qué nombre le darías matemáticamente a la medición de dicho borde?*

A lo que Stefa respondió:

L82-83 Stefa: *Yo estoy de acuerdo, se llama longitud de la circunferencia.*

En las líneas ochenta y dos (L82) y ochenta y tres (L83), Stefa reconoce la longitud de la circunferencia como la medición del borde de una figura circular, lo cual, no ocurrió en la fase exploratoria. Esto evidencia el avance en la comprensión de Stefa respecto al tema objeto de estudio.

L84-85 Inv.: *¿Qué nombre le darías matemáticamente a la distancia que hay desde el borde de un objeto circular hasta el centro del mismo?*

A lo que Stefa respondió:

L86 Stefa: *Estoy de acuerdo con mis compañeros, se llama radio.*

En este fragmento del discurso, Stefa reconoce al radio de una circunferencia como la distancia que hay desde el borde de un objeto circular hasta el centro del mismo, lo cual, no ocurrió en la fase exploratoria. Esto evidencia el avance en la comprensión de Stefa respecto al tema objeto de estudio.

L87–89 Inv.: *¿Qué distancia hay desde un punto cualesquiera del borde hasta otro punto del mismo, de tal manera que pase por el centro?*

A lo que Stefa respondió:

L90 Stefa: *Estoy de acuerdo con mis compañeros. Se llama Diámetro.*

En la línea noventa (L90), se evidencia un avance en la comprensión por parte de Stefa, ya que, este es otro de los elementos que no reconocía durante el desarrollo de la fase exploratoria. Lo anterior concuerda con lo expresado por Perkins (1994, p. 2): “Los estudiantes al responder no sólo demuestran su nivel de comprensión actual, sino que lo más probable es que los haga avanzar”, como sucedió en este caso.

En este orden de ideas, se sigue con la última pregunta de esta discusión, relacionada con la primera actividad de la fase de investigación guiada.

L91–92 Inv.: *¿Qué nombre le darías al cociente hallado durante el proceso realizado en la fase de investigación guiada?*

A lo que Stefa respondió:

L93 Stefa: *Número decimal.*

En la línea noventa y tres (L93), Stefa reconoce al número pi (π) como resultado del cociente hallado entre la longitud de una circunferencia y su respectivo diámetro. Se limita llamar a este resultado “número decimal”, sin especificar si es periódico o no periódico. De acuerdo con las respuestas dadas por Stefa en la línea noventa y tres (93) y por Naty en la línea treinta y siete (L37), respecto a la pregunta anterior, surgió un nuevo interrogante, con el fin de ubicar a Stefa en un nivel de comprensión diferente al ingenuo.

L94-95 Inv.: *¿Qué relación existe entre pi (π) y los números decimales?*

A lo que Stefa respondió:

L96 Stefa: *Es infinito no periódico.*

En este fragmento del discurso, Stefa da cuenta de la relación que tiene pi (π) con los números decimales, al reconocer que es un decimal infinito no periódico.

El desarrollo de las actividades anteriores, llevaron a Stefa, a comprender cada una de las categorías presentes en la dimensión de contenido y de método, y a ubicarla en un nivel de comprensión diferente al que mostró inicialmente (ingenuo), tal como se precisa en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. Los niveles de comprensión permiten distinguir desempeños débiles de otros más avanzados (Boix-Mansilla y Gardner, 1999).

Con base a la fase del *proyecto final de síntesis*, los estudiantes resolvieron algunos problemas relacionados con la expresión matemática de la longitud de la circunferencia, para luego exponerlos ante sus compañeros de clase, y así, poner en evidencia su comprensión. A continuación presento uno de los problemas propuestos en el capítulo 4, numeral 4.7.3.3 y su respectiva solución, por parte de Stefa. Ver ilustración 32.

Stefa ha comprado un queso, cuya base tiene forma de círculo, con un radio de 15cm. Ha cortado un cuarto del queso y se lo ha dado al docente. Hallar el perímetro de la base del queso que le quedó a Stefa.

Solución	Solución
$r = 15\text{cm}$ $L_c = 2\pi r$ $L_c = 2\pi * (15\text{cm})$ $L_c = 2 * (3,14) * (15\text{cm})$ $L_c = 94,2\text{cm}$ <p>Se cortó $\frac{1}{4}$ de queso, es decir.</p> $\frac{1}{4} \text{ de } 94,2\text{cm} = \frac{1 * 94,2\text{cm}}{4} = 23,5\text{cm}$ <p>Se regaló 23,5cm de queso a su profesor</p> <p>Stefany le quedó:</p> $94,2\text{cm} - 23,5\text{cm} + 2r$ $= 70,7\text{cm} + 2 * 15\text{cm}$ $= 70,7\text{cm} + 30\text{cm}$ $= 100,7\text{cm}.$	$r = 15\text{cm}$ $L_c = 2\pi r$ $L_c = 2\pi * (15\text{cm})$ $L_c = 2 * (3,14) * (15\text{cm})$ $L_c = 94,2\text{cm}$ <p>Se cortó $\frac{1}{4}$ de queso, es decir</p> $\frac{1}{4} \text{ de } 94,2\text{cm} = \frac{1 * 94,2\text{cm}}{4} = 23,5\text{cm}$ <p>Regaló 23,5cm de queso al profesor</p> <p>Stefa le quedó:</p> $94,2\text{cm} - 23,5\text{cm} + 2r$ $= 70,7\text{cm} + 2 * 15\text{cm}$ $= 70,7\text{cm} + 30\text{cm}$ $100,7\text{cm}$

Ilustración 32: Actividad Proyecto final de Síntesis. Realizada por Stefa

Para resolver la actividad planteada en esta fase, la estudiante identificó lo que se le pidió en el problema, sabía a donde quería llegar o lo que quería hallar, lo cual fue fundamental para la solución de la actividad. Otro aspecto importante en esta fase, estuvo relacionada con la aplicación de operaciones matemáticas durante la solución de problema, lo cual fue tenido en cuenta por Stefa, al hacer uso de algunas propiedades de los números reales, operaciones con fracciones y números decimales.

Luego de comprender el problema, la estudiante dio cuenta de los datos que se le entregaron, hizo un planteamiento de acuerdo a las operaciones que le servían y aplicó la expresión matemática correspondiente para solucionar el problema. Por último, revisó el proceso que la llevó a comprobar dicha solución.

Por otra parte, Stefa, al igual que Cristian y Naty, socializó ante sus compañeros uno de los problemas propuestos en esta fase. Preparó de manera clara el problema y dio a conocer lo que se pretendía, al exponerlo. Demostró que tenía dominio sobre el tema objeto de estudio, haciendo buen uso de los términos matemáticos durante la exposición, para que esta, fuera comprensible; pero se le notó un poco nerviosa. Además, centraba en repetidas ocasiones su mirada hacia el tablero digital donde tenía su exposición, logrando establecer poco contacto visual con sus compañeros. Su pronunciación se entrecortaba por momentos y repetía algunas palabras. Dejó tiempo suficiente para las preguntas por parte del público, limitándose a contestar solo algunas de ellas. Lo anterior se evidencia a través de las observaciones realizadas por mí como investigador durante la actividad.

De igual forma, Stefa, al igual que Cristian y Naty, propuso otras situaciones relacionadas con el tema objeto de estudio. Esto se evidencia en la discusión que se dio entre los participantes, en esta fase, lo que muestra que hubo avances en su comprensión. La discusión se llevó a cabo, a través de la siguiente pregunta: ¿Qué otras situaciones de la vida cotidiana relacionada con el perímetro de la circunferencia propones para afianzar tu comprensión?

A lo que Stefa respondió:

L97-98 Stefa: *Mi exposición fue sobre un queso redondo, pero yo propongo una pizza circular.*

En la línea noventa y ocho (L98), Stefa propone una pizza circular, como una situación que relaciona al perímetro de la circunferencia y su expresión matemática. Esto evidencia que la estudiante reconoce situaciones del medio que conllevan a la solución de problemas relacionados con el concepto anterior.

De acuerdo a la información anterior, resultaron otras preguntas:

L99 Inv.: *¿Y qué le podría medir a esa pizza?*

L100 Stefa: El borde.

L101 Inv: *¿Y qué más?*

L102 Stefa: *Y el diámetro.*

En las líneas cien (L100) y ciento dos (L102), Stefa da cuenta de su avance en la comprensión respecto al tema objeto de estudio. Esto se evidencia en la fase exploratoria, donde la estudiante no describía estos elementos.

El análisis anterior permitió evidenciar el avance en la comprensión de Stefa, a través de los procesos realizados en la solución de problemas relacionados con la expresión matemática de la longitud de la circunferencia; además, identificó otra situación de su cotidianidad en las que se puede aplicar dicha expresión. El desarrollo de la actividad propuesta en esta fase, ubica las comprensiones de Stefa en las categorías de las dimensiones de praxis y formas de comunicación, y en un nivel de comprensión distinto al ingenuo en estas dimensiones, tal como se precisa en el marco de la enseñanza para la comprensión (ver apartados 4.7.5, 6.2.3 y 6.2.4).

Capítulo VI

6. Conclusiones y sugerencias

En este capítulo presento las principales conclusiones que emergieron durante el desarrollo de la investigación, la cual tuvo como objetivo general, analizar la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, en un grupo de estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes, en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión. Doy cuenta del alcance de los objetivos y de la pregunta de investigación, de acuerdo a las cuatro dimensiones para la comprensión propuestas en dicho marco. Además, presento a través de este trabajo, algunos aportes al campo de la educación matemática y su proyección hacia futuras investigaciones.

Los tres estudiantes participantes en esta investigación, presentaron rasgos diferentes en algunos casos y en otros no, en cuanto a su comprensión. Estos rasgos se evidenciaron durante la aplicación de la unidad curricular y se reflejaron en las cuatro dimensiones para la comprensión, a través del diseño de algunas matrices, en las que se describen los desempeños de los estudiantes, en cuanto a la comprensión de la expresión matemática de la longitud de la circunferencia.

Cabe anotar, que la unidad curricular diseñada e implementada bajo el Marco de la Enseñanza para la Comprensión, brindó a los estudiantes la posibilidad de avanzar de un nivel a otro de comprensión, esto se evidenció durante el desarrollo de las diferentes actividades propuestas en cada una de las fases: exploratoria, guiada y de síntesis, donde el estudiante pensó, actuó, reflexionó y construyó conocimiento, a partir de lo que inicialmente sabía. Estas actividades se construyeron, teniendo en cuenta unos descriptores de desempeño, que indicaron lo que se quería alcanzar en la investigación al examinar la comprensión de los

estudiantes, por medio de algunas categorías emergentes, que fueron evaluadas en las dimensiones promovidas por el marco teórico en mención. Además, se tuvo en cuenta diferentes fuentes de información que apoyaron mi papel como investigador y las realimentaciones continuas que se proporcionaron en cada una de las fases, y que permitieron a los estudiantes mejorar sus desempeños de comprensión, respecto a la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia.

6.1. Alcance de los objetivos

Para el alcance de los objetivos de la investigación, se desarrollaron varias actividades en las distintas fases de la unidad curricular propuesta a los estudiantes participantes, con base al marco de la enseñanza para la comprensión. En la fase exploratoria se desarrollaron dos actividades, en la que se generó un debate argumentativo en el cual, los estudiantes a partir de sus conocimientos previos, contribuyeron con lo que conocen sobre la circunferencia (sus elementos) y la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia (ver apartado 4.7.3.1). En la fase de investigación guiada se desarrolló otra actividad, en la que los estudiantes comenzaron a indagar sobre las distintas concepciones acerca de la de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia (ver apartado 4.7.3.2). En la fase de proyecto final de síntesis, los estudiantes mostraron la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, a través de la presentación de algunos problemas y de sus respectivas soluciones (ver apartado 4.7.3.3).

Posteriormente, se llevó a cabo una discusión entre los participantes, a través de una serie de preguntas relacionadas con las actividades propuestas en cada una de las fases mencionadas, en la que los estudiantes afianzaron su comprensión (ver apartado 4.7.3.4).

Por último, se analizó las cuatro dimensiones de la comprensión, a través de algunas categorías que emergieron de la recolección de los datos y que fueron evaluadas por medio de unos descriptores de desempeños (ver apartado 4.7.5). Además, se describieron los cuatro niveles de comprensión: ingenuo, novato, aprendiz y maestría, lo que permitió evaluar el avance de la comprensión de cada uno de los estudiantes con relación al tema objeto de estudio.

6.2. Descriptores de la comprensión y clasificación de los estudiantes por nivel

A continuación, presento las matrices correspondientes a cada una de las dimensiones, en las que se evidencia el proceso de comprensión de la expresión matemática de la longitud de la circunferencia. Esto, como resultado del análisis de cada estudiante, respecto a las categorías de cada dimensión.

6.2.1. Matriz dimensión de contenido.

En esta dimensión se describen los diferentes conceptos asociados a la expresión matemática de la longitud de la circunferencia, los cuales fueron construidos por los estudiantes durante el desarrollo de las diferentes actividades propuestas a lo largo de la unidad curricular. Esto en base a los elementos del marco de la enseñanza para la comprensión.

Categorías: Concepto de perímetro y Reconocimiento de π como número irracional.

Al hablar de perímetro, nos referimos a la distancia alrededor de una figura bidimensional. En el caso de la circunferencia, se trata de su longitud. Uno de los aspectos importantes en la comprensión de este concepto, radica en el reconocimiento de sus

elementos: radio, diámetro y pi; este último, como decimal infinito no periódico, es decir, como número irracional.

Para el análisis de estas categorías, se tuvo en cuenta el desarrollo de las actividades propuestas en la fase exploratoria, su realimentación y la discusión que se dio entre los participantes, a través de las siguientes preguntas: ¿Qué elementos de la circunferencia considera necesarios para hallar su perímetro? ¿Conoces el valor numérico de π ? ¿Cuál es? ¿A qué conjunto numérico pertenece? Ver tabla 8 (numeral 4.7.5) relacionada con las comprensiones de los estudiantes en la dimensión de contenido.

Los resultados registrados en la tabla 13 muestran que los estudiantes participantes en esta investigación avanzaron en la comprensión de los conceptos relacionados con la expresión matemática de la longitud de la circunferencia. Esto se evidencia tanto en el desarrollo de las actividades realizadas a lo largo de la unidad curricular, donde se puede confrontar los conocimientos previos de los estudiantes, con la comprensión adquirida al finalizar la aplicación de dicha unidad, como en el acompañamiento continuo por parte del investigador durante el proceso de comprensión de cada uno de los participantes.

Tabla 13. Nivel de comprensión por estudiante. Dimensión de Contenido

Categorías	Niveles de comprensión			
	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Concepto de perímetro.			Comprensión de Stefa	Comprensión de Naty Comprensión de Cristian
Reconocimiento de π como número irracional.		Comprensión de Stefa	Comprensión de Naty	Comprensión de Cristian

6.2.2. Matriz dimensión de método.

En esta dimensión de la comprensión, se evidenciaron los procesos realizados por los estudiantes, a partir de algunas actividades relacionadas con la expresión matemática de la longitud de la circunferencia. A continuación, presento la categoría relacionada con esta dimensión.

Categoría: Proceso para determinar el perímetro de una circunferencia.

Para el análisis de esta categoría, se tuvo en cuenta el desarrollo de la actividad propuesta en la fase de investigación guiada, su realimentación y la discusión que se dio entre los participantes, en esta fase. La discusión se basó en una serie de preguntas realizadas por mí como investigador participante, donde tuve la libertad de adicionar o quitar preguntas con el fin de ajustar los conceptos involucrados en el estudio. Los estudiantes respondieron de acuerdo a los conocimientos adquiridos en el desarrollo y la realimentación de las actividades propuestas sobre el tema objeto de estudio. Ver tabla 9 (numeral 4.7.5) relacionada con las comprensiones de los estudiantes en la dimensión de método.

Los resultados registrados en la tabla 14, muestran que los estudiantes participantes en esta investigación afianzaron su comprensión y avanzaron de nivel. Esto se evidencia a través del desarrollo de las actividades relacionadas con la expresión matemática de la longitud de la circunferencia; en la que respondieron de acuerdo a los conocimientos adquiridos y la realimentación suministrada sobre el tema objeto de estudio.

Tabla 14. Nivel de comprensión por estudiante. Dimensión de método

Categorías	Niveles de comprensión			
	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Proceso para determinar el perímetro de una circunferencia.	.	Comprensión de Stefa	Comprensión de Naty	Comprensión de Cristian

6.2.3. Matriz dimensión de praxis.

En esta dimensión se evidenció la comprensión de la expresión matemática de la longitud circunferencia por parte de los estudiantes, a través de los procesos realizados en la solución de problemas relacionados con dicha expresión. Además, cada estudiante expuso un problema ante sus compañeros de clase, con el fin de mostrar su dominio respecto al tema objeto de estudio.

Categorías: Aplicación del concepto de perímetro en situaciones cotidianas.

Para el análisis de esta categoría, se tuvo en cuenta el desarrollo de los problemas propuestos en la fase del proyecto final de síntesis y la discusión que se dio entre los participantes, a través de la siguiente pregunta: ¿Qué otras situaciones de la vida cotidiana relacionada con el perímetro de la circunferencia propones para afianzar tu comprensión? Ver tabla 10 (numeral 4.7.5) relacionada con las comprensiones de los estudiantes en la dimensión de praxis.

Los resultados registrados en la tabla 15, muestran que los estudiantes participantes en esta investigación afianzaron su comprensión y avanzaron de nivel, en esta dimensión. Esto se evidencia a través de los procesos realizados en la solución de los problemas relacionados con el objeto de estudio y el dominio mostrado en la sustentación de los mismos.

Tabla 15. Nivel de comprensión por estudiante. Dimensión de Praxis

Categorías	Niveles de comprensión			
	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Aplicación del concepto de perímetro en situaciones cotidianas.			Comprensión de Naty Comprensión de Cristian Comprensión de Stefa	

6.2.4. Matriz dimensión de formas de comunicación.

En esta dimensión se observó y evaluó la manera en que los estudiantes comunicaron sus comprensiones por medio del uso de símbolos, para dar cuenta de lo comprendido (Ver capítulo II numeral 2.1.4.4).

Categorías: Coherencia expositiva, interacción con el público y Buen uso de los términos matemáticos.

Para el análisis de estas categorías, se tuvo en cuenta la exposición de los problemas propuestos en la fase del proyecto final de síntesis. Lo anterior evidenció la forma como los estudiantes expresaron sus conocimientos y los llevó a dar cuenta de su comprensión respecto a la expresión matemática de la longitud de la circunferencia. Ver tabla 11 (numeral 4.7.5) relacionada con las comprensiones de los estudiantes en la dimensión de formas de comunicación.

En la tabla 16 se muestra el avance en el nivel de comprensión de los estudiantes participantes en esta investigación, al mostrar dominio de los conceptos relacionados con el objeto de estudio en las exposiciones realizadas por ellos.

Tabla 16. Nivel de comprensión por estudiante. Dimensión Formas de Comunicación.

Categorías	Niveles de comprensión			
	Ingenuo	Novato	Aprendiz	Maestría
Coherencia expositiva			Comprensión de Naty Comprensión de Stefa	Comprensión de Cristian
Interacción con el público.		Comprensión de Stefa	Comprensión de Naty	Comprensión de Cristian
Buen uso de los términos matemáticos.			Comprensión de Stefa Comprensión de Naty	Comprensión de Cristian

6.3. Aportes y sugerencias.

Esta investigación realiza un aporte a la educación matemática, ya que, brinda herramientas a los docentes para la planificación y diseño de sus prácticas de aula, fomentando de esta manera la comprensión de los estudiantes, tal como lo expone el marco teórico de la enseñanza para la comprensión. Además, promueve la participación de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento, tal como ocurrió en este trabajo de investigación, en el que se analizó la comprensión de estudiantes de grado octavo (8°), respecto a la expresión matemática de la longitud de la circunferencia, a partir de sus conocimientos previos, y permitió que avanzaran de un nivel a otro de comprensión.

6.4. Investigaciones futuras.

A partir de este trabajo, se podría realizar nuevas investigaciones fundamentadas en el marco teórico de la enseñanza para la comprensión, especialmente a lo que concierne con la comprensión de los diferentes conceptos geométricos propuestos en la educación básica y media. Entre estos, se plantean los siguientes:

- Estudiar procesos de Comprensión en los estudiantes de décimo grado, relacionados con el Estudio del Concepto de la Ecuación de la Recta.
- Estudiar el diseño de actividades que le permitan al docente, desde la reflexión crítica, promover la construcción del conocimiento, dejando de lado el rol de transmisionista, en el que se promueve el aprendizaje memorístico de conceptos. Esto en base a los resultados obtenidos en esta investigación.
- Estudiar estrategias para desarrollar la Comprensión en los estudiantes de básica primaria con dificultades en el aprendizaje de la Geometría.

ANEXOS

Actividad 1: Fase Exploratoria

Esta actividad se llevó a cabo al inicio del trabajo de campo, con el fin de explorar los conocimientos previos de los estudiantes, respecto a lo que conocen sobre la circunferencia (sus elementos).

Elementos de la circunferencia. Descripción

¿Qué observas en la imagen?

¿Qué nombre reciben los siguientes elementos mostrados en la imagen?

\overline{AB} = _____

\overline{OC} = _____

\overline{GH} = _____

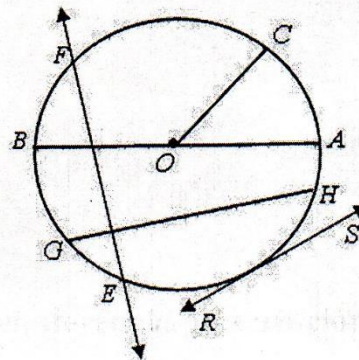
\overleftrightarrow{RS} = _____

\overleftrightarrow{EF} = _____

$\angle AOC$ = _____

AC = _____

O = _____



El borde de la figura = _____

El espacio limitado por el borde de la figura = _____

La medida del borde de la figura = _____

La medida del espacio limitado por el borde de la figura = _____

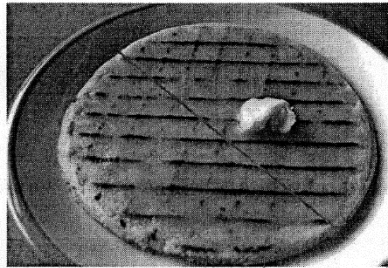
Actividad 2: Fase Exploratoria.

A través de esta actividad se generó un debate argumentativo en el cual, los estudiantes a partir de sus conocimientos previos, contribuyeron con el concepto de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia.

Problema: Indagando sobre la expresión matemática de la longitud de la circunferencia.

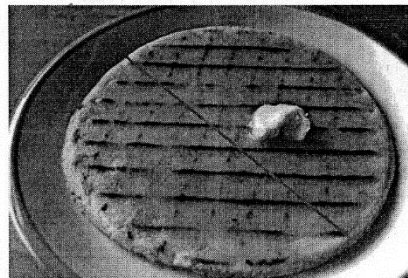
Momento 1.

El diámetro de una arepa paisa mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio y el perímetro de la arepa?



Momento 2.

El diámetro de una arepa paisa mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio y el perímetro de la arepa?



Tenga en cuenta la siguiente expresión matemática para la solución del problema:

$L_c = \pi \cdot D$, donde L_c corresponde a la longitud de la circunferencia y D el diámetro de la circunferencia.

$D = 2r$, donde r es el radio de la circunferencia.

Actividad 3: Fase de Investigación Guiada

A través de esta actividad los estudiantes comenzaron a indagar sobre el tópico elegido y algunas posibles soluciones. Además, generaron aportes importantes que permitieron afianzar sus comprensiones respecto al tema objeto de estudio.

Estudio de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia.

¿Cómo determinar la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia desde la medición de objetos circulares en el entorno y su relación con algunos conceptos subyacentes?

Actividad

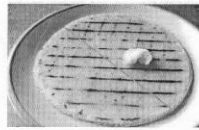
1. ¿Qué objetos circulares de tu entorno conoces?
2. ¿Podrías medir el borde de dichos objetos? ¿Qué instrumentos de medición utilizarías para medir sus bordes?
3. Dentro de los objetos circulares encontrados, ¿hay alguno que tenga su centro definido? Si los hay, mide el borde de algunos de estos objetos circulares. ¿Cuál es el resultado?
4. Mide la distancia que hay desde el borde hasta el centro del objeto, ¿Cuál es el resultado?
5. Halla el cociente entre la longitud del borde del objeto y el doble de la distancia entre el borde y el centro del objeto. ¿Cuál es el resultado?
6. ¿Qué puedes concluir del proceso anterior?
7. Mide la distancia que hay desde un punto cualquiera del borde hasta otro punto del mismo, de tal manera que dicha medición pase por el centro del objeto, ¿Cuál es el resultado?
8. Halla el cociente entre la longitud del borde del objeto y la distancia anterior. ¿Cuál es el resultado?
9. ¿Qué conclusión puedes expresar de los numerales 7 y 8?
10. A partir de lo anterior, ¿podrías determinar una expresión matemática para hallar el perímetro o la Longitud de una circunferencia? ¿Cómo lo harías?.

Actividad 4: Fase de proyecto final de síntesis

Con esta actividad los estudiantes mostraron la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, a través de la presentación de algunos problemas y de sus respectivas soluciones. A continuación, se muestran los problemas que los estudiantes resolvieron.

Problema 1

El diámetro de una arepa paisa mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio y el perímetro de la arepa?



Problema 2

Cristian ha medido la longitud de la circunferencia de un tanque cilíndrico y el diámetro de su base. Responde la siguiente pregunta en forma aproximada: ¿Cuánto es mayor la longitud de la circunferencia del tanque que su diámetro? ¿Cuánto mide la longitud de una circunferencia cuyo diámetro es 30cm?



Problema 3

Stefa ha comprado un queso, cuya base tiene forma de círculo, con un radio de 15cm. Ha cortado un cuarto del queso y se lo ha dado al docente. Hallar el perímetro de la base del queso que le quedó a Stefa.



Actividad 5: Discusión entre los participantes

Con esta actividad los estudiantes participantes de la investigación afianzaron la comprensión de los conceptos involucrados en las diferentes actividades propuestas a lo largo de la unidad curricular.

Discusión entre los participantes

Preguntas:

Discusión Fase Exploratoria.

¿Qué elementos de la circunferencia considera necesarios para hallar su perímetro?

¿Conoces el valor numérico de π ? ¿Cuál es? ¿A qué conjunto numérico pertenece?

Discusión Fase de Investigación Guiada.

Después de hallar el cociente entre la longitud del borde de un objeto circular y el doble de la distancia entre el borde y el centro del objeto, ¿Dentro de qué conjunto numérico puedes representar el resultado? (Relacionado con la pregunta 6 fase guía)

¿Qué sucede con el cociente anterior si los objetos medidos son de diferentes tamaños? (Relacionado con la pregunta 6 fase guía)

Después de obtener tus conclusiones respecto al proceso anterior, ¿Qué nombre le darías matemáticamente a dicho borde? (Relacionado con la pregunta 7 de la fase guía).

¿Qué nombre le darías matemáticamente a la medición del borde de estos objetos circulares?

¿Qué nombre le darías matemáticamente a la distancia que hay desde el borde de un objeto circular hasta el centro del mismo?

Consentimiento de participación

A través de este instrumento se solicitó el consentimiento de los padres de familia para que los estudiantes seleccionados en el estudio de casos participaran en las diferentes actividades propuestas en la unidad curricular.

Consentimiento de Participación

Yo Dilson Ozuna Garcés identificado(a) con cédula de ciudadanía n° 71784549 de Medellin padre, madre y/o acudiente del estudiante Cristian Ozuna Villadiego, estoy de acuerdo que mi hijo(a) y/o acudido(a) participe en la investigación titulada "**La Expresión Matemática de la Circunferencia en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión**" que es dirigida por el docente **Jaime Antonio Castilla Peñate**, quien labora en la **Institución Educativa José Manuel Restrepo** y es estudiante de Maestría en Educación Matemática de la **Universidad de Antioquia**.

Teniendo en cuenta que la participación es voluntaria, es usted quien decide si su hijo(a) y/o acudido(a) puede participar o dejar de participar sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puede pedir que la información relacionada sea regresada o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de esta investigación es:

Analizar la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, en un grupo de estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes, en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Beneficios: como participante de esta investigación, el estudiante desarrollará actividades pertinentes, donde piense, actúe, reflexione, argumente y construya conocimiento, a partir de lo que sabe. De esta manera generará una adecuada comprensión de los conceptos matemáticos planteados.

Procedimiento: El participante en este estudio será observado en clase y se le tomarán algunas fotos que sirven como evidencia del proceso realizado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Como investigador y docente responderé cualquier pregunta relacionada con esta investigación, en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico jaimecas30@hotmail.com

Consentimiento: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo(a) y/o acudido(a) haga parte de esta investigación.

<u>Jaime A. Castilla P.</u>	<u>Jaime Castilla</u>	<u>22-04-2015</u>
Nombre del investigador	Firma	Fecha

<u>Dilson Osuna G.</u>	<u>[Firma]</u>	<u>22-04-2015</u>
Nombre acudiente	Firma	Fecha

<u>Cristian Osuna V.</u>	<u>[Firma]</u>	<u>22-04-2015</u>
Nombre del participante	Firma	Fecha

Consentimiento de Participación

Yo Ingrid Gubizo Alvarado identificado(a) con cédula de ciudadanía n° 426559161 de Arboletes padre, madre y/o acudiente del estudiante Nataly Hernandez Galaza estoy de acuerdo que mi hijo(a) y/o acudido(a) participe en la investigación titulada "**La Expresión Matemática de la Circunferencia en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión**" que es dirigida por el docente **Jaime Antonio Castilla Peñate**, quien labora en la **Institución Educativa José Manuel Restrepo** y es estudiante de Maestría en Educación Matemática de la **Universidad de Antioquia**.

Teniendo en cuenta que la participación es voluntaria, es usted quien decide si su hijo(a) y/o acudido(a) puede participar o dejar de participar sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puede pedir que la información relacionada sea regresada o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de esta investigación es:

Analizar la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, en un grupo de estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes, en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Beneficios: como participante de esta investigación, el estudiante desarrollará actividades pertinentes, donde piense, actúe, reflexione, argumente y construya conocimiento, a partir de lo que sabe. De esta manera generará una adecuada comprensión de los conceptos matemáticos planteados.

Procedimiento: El participante en este estudio será observado en clase y se le tomarán algunas fotos que sirven como evidencia del proceso realizado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivero con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Como investigador y docente responderé cualquier pregunta relacionada con esta investigación, en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico almeida.30@hotmail.com

Consentimiento: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo(a) y/o acudido(a) haga parte de esta investigación.

<u>Maire A. Restalla p.</u>	<u>Maire Restalla</u>	<u>22-04-2015</u>
Nombre del investigador	Firma	Fecha

<u>Ingrid Gabriela Dupuy</u>	<u>Ingrid Dupuy</u>	<u>22-04-2015</u>
Nombre acudiente	Firma	Fecha

<u>Notaly Hernandez</u>	<u>Notaly H.G</u>	<u>22-04-2015</u>
Nombre del participante	Firma	Fecha

Consentimiento de Participación

Yo Anda Selhes Díaz identificado(a) con cédula de ciudadanía n° 56918957 de Moricono padre, madre y/o acudiente del estudiante Aselfo Cruz Díaz estoy de acuerdo que mi hijo(a) y/o acudido(a) participe en la investigación titulada "**La Expresión Matemática de la Circunferencia en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión**" que es dirigida por el docente **Jaime Antonio Castilla Peñate**, quien labora en la **Institución Educativa José Manuel Restrepo** y es estudiante de Maestría en Educación Matemática de la **Universidad de Antioquia**.

Teniendo en cuenta que la participación es voluntaria, es usted quien decide si su hijo(a) y/o acudido(a) puede participar o dejar de participar sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puede pedir que la información relacionada sea regresada o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de esta investigación es:

Analizar la comprensión de la Expresión Matemática de la Longitud de la Circunferencia, en un grupo de estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa José Manuel Restrepo del Municipio de Arboletes, en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Beneficios: como participante de esta investigación, el estudiante desarrollará actividades pertinentes, donde piense, actúe, reflexione, argumente y construya conocimiento, a partir de lo que sabe. De esta manera generará una adecuada comprensión de los conceptos matemáticos planteados.

Procedimiento: El participante en este estudio será observado en clase y se le tomarán algunas fotos que sirven como evidencia del proceso realizado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

U
DE ANTIOQUIA

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivero con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Como investigador y docente responderé cualquier pregunta relacionada con esta investigación, en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico jaimecastilla2013@gmail.com

Consentimiento: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo(a) y/o acudido(a) haga parte de esta investigación.

<u>Jaime A. Castilla p</u>	<u>Jaime Castilla</u>	<u>22-04-2015</u>
Nombre del investigador	Firma	Fecha

<u>Juan Ariiz</u>	<u>Ariiz</u>	<u>22-04-2015</u>
Nombre acudiente	Firma	Fecha

<u>Stefania Ariiz</u>	<u>Stefania A.</u>	<u>22-04-2015</u>
Nombre del participante	Firma	Fecha

Referencias

- Acevedo, D. (2011). Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado. Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.
- Alcaldía de Arboletes (2016). Sitio oficial de Arboletes en Antioquia, Colombia. Recuperado de: <http://arboletes-antioquia.gov.co/index.shtml>
- Avilés, G. (2012). Implementando la metodología indagatoria en el aprendizaje de la geometría desde una concepción constructivista. VIII Festival Internacional de Matemáticas, 1-11.
- Barrantes, M. (2002). Recuerdos, Expectativas y Concepciones de los Estudiantes para Maestro sobre la Geometría Escolar y su Enseñanza - Aprendizaje. Tesis doctoral. España: Universidad de Extremadura.
- Blanco, L y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza - aprendizaje. *Relime* Vol. 6, Núm. 2, 107 - 132.
- Blythe, T. (2002). La Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Boix - Mansilla, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En M. Stone Wiske (comp). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 33-115.
- Carmona, J. (2011). La circunferencia. Una Propuesta Didáctica Usando Modelo De Van Hiele y Geometría Dinámica. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Díaz, R. (2014). La Construcción del Concepto Circunferencia desde la Dialéctica Herramienta-Objeto con el apoyo del Software Geogebra en Estudiantes de Quinto de Secundaria. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
- Dunham, W. (1995). *El Universo de las Matemáticas.* Madrid, España: Editorial Pirámides.

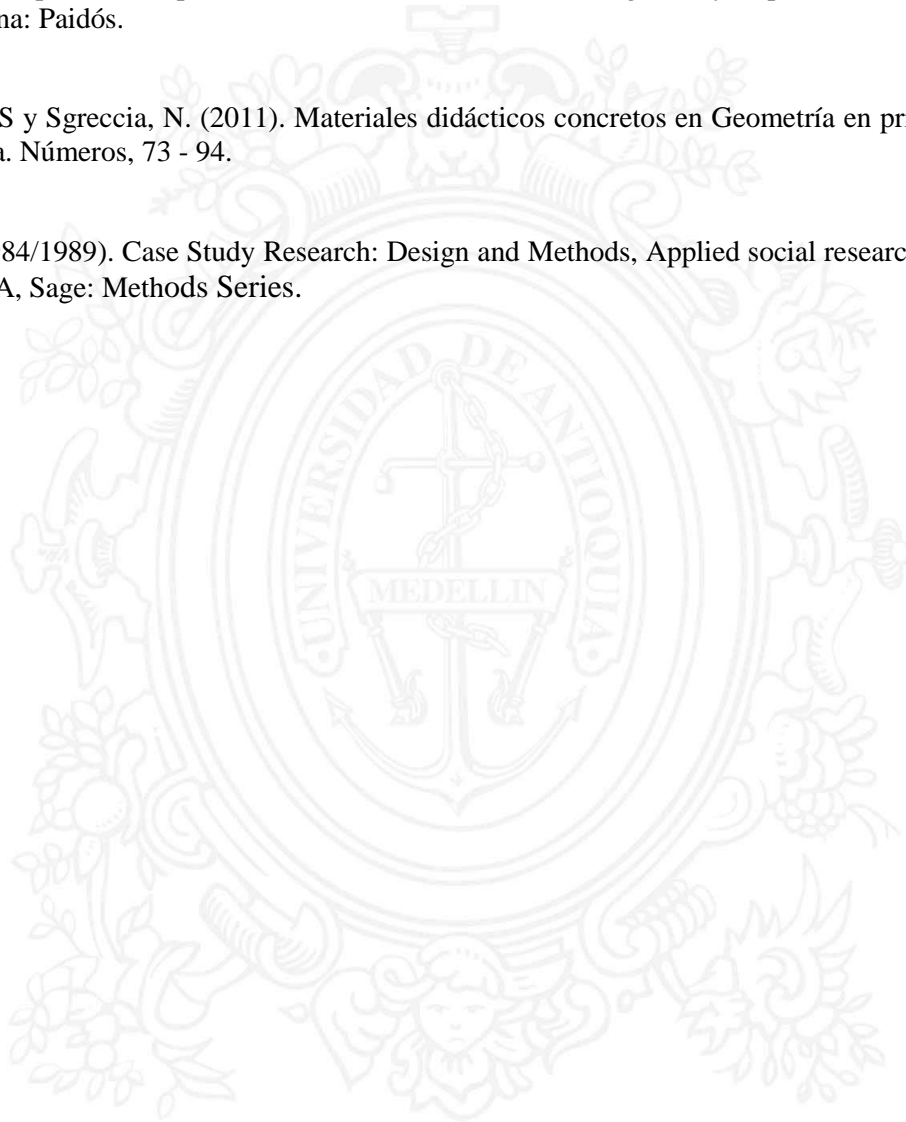
- Fàbregues, S. y Paré, M. (s.f.). El grupo de discusión y observación participante en psicología. UOC. Universitat Oberta de Catalunya, España.
- González, J. (2014). Comprensión de los conceptos de Perímetro y área en el contexto de la agricultura del café. Tesis de maestría, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de Definiciones e Imágenes de Conceptos Geométricos por los Estudiantes de Magisterio. Colección Mathema n°8, Universidad de Valencia, España: Ed. Comares, 143-170.
- Kerlegand, C. (2008). Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de Van Hiele y la visualización. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional, México.
- Martínez, A. (1989). La Enseñanza de la Geometría. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Martínez-Otero, V. (2009). Diversos Condicionantes del Fracaso Escolar en la Educación Secundaria. Revista Iberoamericana de Educación, N° 51, 67-85.
- Meel, D. (2003). Modelo y teoría de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría de Apoe. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa., 221-278.
- MEN. (2003). Estándares Básicos de Competencias. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.
- MEN. (1998). Serie Lineamientos curriculares de matemática. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.
- Milhaud. (2010). Recuerdos de pandora. Obtenido de Recuerdos de pandora. Tomado de: <http://recuerdosdepandora.com/historia/inventos/la-invencion-de-la-rueda/>
- Montesinos, J. ("s.f"). Arquímedes y la Medida del Círculo. Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia. I.E.S. Villalba Hervás ORATAVA., 339-352.
- Morales, L. (2002). La Cuadratura del Círculo y Otros Problemas de Geometría. Ciencias Universidad Nacional Autónoma de México. ISSN (Versión impresa): 0187-6376. México, 1-13.
- Osuna, L. (2007). Planificando la Enseñanza Problematizada: El Ejemplo de la Óptica Geométrica en Educación Secundaria. Enseñanza de las ciencias, 1-18.

- Parra, E. (2009). Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna. *Revista digital matemática, educación e internet*, (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 9, 1-40.
- Pérez, K. (2009). Enseñanza de la Geometría para un Aprendizaje Significativo a través de Actividades Lúdicas. Universidad de los Andes. Trujillo Venezuela.
- Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone Wiske (comp). *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires-Argentina: Paidós.
- Perkins, D., & Blythe, T. (1994). Ante todo la comprensión. *Material de Lectura para el Seguimiento Virtual sobre la Enseñanza para la Comprensión*. 1-5
- Polya, G. (1962). *Descubrimiento matemático: En la comprensión, el aprendizaje y la resolución de problemas de enseñanza*. Nueva York, USA: John Wiley.
- Reif, S. (2000). El Número Pi y su Historia. *Educación*. Volumen 2, No. 2, 47-62.
- Rendón, P. (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Rubin, H. y Rubín, I. (1995). *Qualitative interviewing. The art of hearing data*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Sandoval, C. (2002). *Investigación Cualitativa*. Bogotá-Colombia: ARFO Editores e Impresores Ltda.
- Santa, Z. Londoño, R, Gonzáles, J. (2013). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café*. *Uni-pluri/versidad*, Vol 13, 61-70.
- Shaw, E. (1999). *A guide to the Qualitative Research Process: Evidence from a Small Firm Study*. *Qualitative Market Research: An International Journal*, 2 (2), 59-70.
- Sierpinska, A. (1990). *Some remarks on understanding*. *For the Learning on mathematics*, vol. 10.3, 24-36.
- Skemp, R. (1976). *Relational understanding and instrumental understanding*. *Mathematics teaching*, vol 77, 20-26.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

Stone, M. (1999). ¿Qué es la Enseñanza para la comprensión? En M. Stone Wiske (comp). La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Villarroel, S y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de primaria. Números, 73 - 94.

Yin, R. (1984/1989). Case Study Research: Design and Methods, Applied social research. Newbury Park, CA, Sage: Methods Series.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3