LA GENERALIZACIÓN COMO PROCESO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA ELEMENTAL.

Por

JOHN JAIRO PÉREZ PEÑA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

MEDELLÍN

2005

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Tesis

Entre presidente y jurados del Trabajo de Investigación **"LA GENERALIZACIÓN COMO PROCESO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL"**, presentado por el estudiante, **John Jairo Pérez Peña**, como requisito para optar al título de **Magister en Educación** con énfasis en **Docencia de las Matemáticas,** hemos acordado calificar este, después de su presentación y sustentación como:

Aprobado: SI
No aprobado:

A los Trabajos de investigación que merecieren ser destacados, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

Sobresaliente:
Meritorio:

Medellín, 25 de enero de 2006

Gustavo Gallego Girón
Presidente

Luis Oscar Londoño Bustamante
Jurado

Jesús Ángel Castro Cárdenas
Jurado

LA GENERALIZACIÓN COMO PROCESO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA ELEMENTAL.

Por

JOHN JAIRO PÉREZ PEÑA

Asesor

Gustavo Gallego Girón

Trabajo de grado para optar a título de Magíster en la educación matemática

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

MEDELLÍN

2005

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Un papel fundamental para el desarrollo del pensamiento lógico – matemático de los estudiantes le dan a la generalización matemática algunos autores como Mason J. y Socas M. entre otros, proponiéndola como un medio importante para iniciar al estudiante en el estudio del álgebra elemental o para reafirmar conceptos como el de función y expresiones algebraicas, introducir al estudiante en el concepto de variable y en sistemas de representación más abstractos como lo es el algebraico. La generalización también aparece en los Lineamientos Curriculares como parte del razonamiento en los procesos de pensamiento matemático, y se sugiere su implementación en la resolución de problemas, dándose así una pauta hacia donde orientar la actividad de los estudiantes, si se quiere enfatizar en los procesos, más que en los contenidos. Se propone entonces potenciar las actividades de generalización para el trabajo algebraico y reconocer los procesos propios de la matemática, que se generan en el aula durante el desarrollo de estas actividades, y enfatizar en elementos de la misma tales como, la formulación y verificación de conjeturas y su representación a nivel cada vez más suscinto, además de contribuir a la generación de espacios que promueven ambientes de discusión, en torno a ideas matemáticas.

Basado en lo anterior se concibe el presente trabajo, el cual hace referencia a las dificultades que presentan los estudiantes de 9° grado de educación básica del INEM José Félix de Restrepo de la ciudad de Medellín para la ejecución de procesos cognitivos tales como la abstracción y la generalización, considerándose esta última como un proceso que se induce de lo particular, se identifican características comunes y se extiende a un contexto mas amplio. Para lo cual dentro del trabajo, se desarrollan una serie de referentes teóricos y metodológicos que permiten implementar en el aula algunas situaciones problema con el propósito de movilizar en los estudiantes su pensamiento lógico – matemático y desarrollar habilidades para resolver situaciones que involucran generalizaciones; tratando así de que el alumno desarrolle su potencial matemático, incluyendo en este término las capacidades de comunicarse matemáticamente, razonar, explorar, formular hipótesis, conjeturar, plantear variables, relaciones y leyes generales a partir de la observación de regularidades. Además de que mejore la capacidad para manejar expresiones algebraicas, amplíe el campo de estudio de funciones en todas sus vertientes (numérica, gráfica, verbal y algebraica); Así como la resolución de secuencias tanto gráficas como numéricas.

En este trabajo enmarcado dentro de una concepción constructivista y de la sicología cognitiva de la enseñanza de la matemática se muestra cómo utilizar la estrategia de las situaciones problema como metodología para realizar intervenciones pedagógicas significativas, entendiendo esto último como una forma de interrelacionar docente con estudiante, permitiendo a este último un razonamiento libre de manera que descubra por si mismo las relaciones involucradas en la situación.

El trabajo está compuesto principalmente por cuatro partes:

La primera la componen los aspectos preliminares que describen la problemática, la justificación y los objetivos de la investigación.

La segunda parte la componen los marcos de referencia: El marco legal presenta los aspectos que fundamentan la propuesta desde los documentos emitidos por el MEN, especialmente la Ley general de Educación, los Lineamientos y los Estándares curriculares. El marco contextual presenta la descripción del escenario y los actores que intervienen en la investigación. El marco teórico presenta la construcción conceptual del objeto de estudio, en este caso la generalización matemática, desde sus aspectos más relevantes como los que tienen que ver con el razonamiento matemático; la teoría básica de la resolución de problemas; las situaciones problema como metodología importante para trabajar en el aula procesos de generalización matemática; y finalmente la teoría que tiene que ver con el aprendizaje de la generalización matemática.

La tercera parte suministra la información correspondiente a la caracterización de la investigación, población y muestra, instrumento de evaluación, aplicación y plan de análisis. Se compone de la aplicación y análisis de los resultados obtenidos en la prueba inicial, la cual consta de 5 problemas que involucran generalización matemática; la intervención pedagógica, que mediante la metodología de las situaciones problema busca que el alumno adquiera habilidades para generalizar y supere las falencias presentadas en la prueba inicial; y la prueba final elaborada de la misma forma que la prueba inicial, en donde se trata de comprobar que con la intervención pedagógica se alcanzaron los objetivos esperados. Por último la presentación y análisis de resultados de lecturas estadísticas de los datos arrojados por las pruebas y el análisis descriptivo del comportamiento de los estudiantes en ellas, lo mismo que la forma como los estudiantes expresan sus respuestas.

La cuarta parte la componen las conclusiones, las recomendaciones, la bibliografía y los anexos.

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Descripción del problema

La motivación inicial por el estudio de la problemática se da al indagar acerca de las estrategias que utiliza el estudiante de noveno del INEM José Félix de Restrepo de educación básica para construir su pensamiento lógico-matemático, mediante actividades que involucran procesos de generalización que realiza en el aula y que son promovidas por el docente. En este nivel de la educación básica, se espera que el estudiante adquiera un manejo adecuado del álgebra, en lo que respecta al uso de la simbología, el manejo de las operaciones, el planteamiento de variables y relaciones y a la formulación de estructuras generales; pero los resultados obtenidos en diferentes pruebas – Saber, de diagnóstico que realiza la institución y las regulares en el aula de clase - demuestran lo contrario, destacándose a la vez una serie de dificultades u obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje del álgebra escolar.

Entre estas dificultades sobresalen las experimentadas por los alumnos cuando se avanza de lo particular a lo general, a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto la utilización del lenguaje simbólico como el grado de abstracción. Tal circunstancia se da, por ejemplo, cuando las letras sustituyen a los números, es decir, elementos concretos como los objetos y los mismos números (son elementos concretos en los procesos aritméticos) que han sido básicos en el trabajo matemático hasta el momento, pasan a ser representados por letras como incógnitas, números generalizados, parámetros o variables. Estas dificultades se manifiestan, entre otras, en errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operativamente con las expresiones algebraicas, errores de traducción cuando se quiere pasar problemas escritos en lenguaje cotidiano a simbología algebraica, interpretaciones erróneas de expresiones algebraicas, errores de planteamiento de variables y relaciones cuando se quiere pasar de expresiones numéricas, aritméticas y geométricas, a expresiones algebraicas, como en el caso de las fórmulas.

Todo esto evidencia una falta de acercamiento al álgebra elemental desde los mismos procesos aritméticos y geométricos, la enseñanza – aprendizaje de estas ramas de la matemática se dan como si fueran ajenas entre sí y no se pudieran interrelacionar para lograr mejores resultados. Se necesita de un eje transversal que relacione estos tres contenidos a la vez que promueva el desarrollo del pensamiento lógico – matemático de los alumnos y el desarrollo de habilidades para plantear y manejar variables, la aplicación correcta de procedimientos y algoritmos, que permita un mejor nivel en la resolución de problemas y en el aprendizaje del álgebra elemental.

1.2. Formulación del problema

La investigación de la presente problemática en el ámbito de la educación básica, surge primero de la experiencia sobre esta materia en la práctica pedagógica y del conocimiento formado a través del estudio sobre diferentes investigaciones de varios autores: Mason J. (1985), Grupo Azarquiel (1993), Socas M. (1996), entre otros. En particular, sobre algunas que han tomado como objeto de estudio los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra en secundaria, el álgebra y su lenguaje, el simbolismo algebraico, la abstracción y generalización en álgebra, y las estrategias de enseñanza en álgebra. Todas ellas realizan el estudio de las dificultades u obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje del álgebra escolar.

Con base en lo anterior, se da una revisión a los planteamientos del sistema curricular Colombiano y las Pruebas Saber correspondiente a este nivel en lo correspondiente a los procesos de pensamiento, que muestran elementos como: el razonamiento, la comunicación, la modelación, elaboración y ejercitación de procedimientos y el planteamiento y resolución de problemas que impliquen actividades importantes como seriación, representación, análisis, síntesis y generalización. Además, se precisan los supuestos cognitivos y constructivistas que conforman el soporte del estudio y su interpretación en el desarrollo evolutivo de los estudiantes; y se analiza a la luz de la enseñanza de la matemática el proceso de aprendizaje dentro del aula.

Todos estos elementos teóricos sirven para construir la plataforma teórico - conceptual que permite la interpretación de los procesos de aprendizaje del álgebra elemental, centrando el interés del estudio en cómo el estudiante de noveno grado adquiere habilidades de pensamiento lógico-matemático con actividades de generalización.

Con estas ideas se plantea el problema de investigación de la siguiente manera:

¿Cómo desarrollar habilidades de pensamiento lógico – matemático con actividades que involucran situaciones de generalización en estudiantes de noveno grado de educación básica del INEM José Félix de Restrepo en la enseñanza – aprendizaje del álgebra?

2. JUSTIFICACIÓN

La investigación consiste en estudiar cómo desarrolla el estudiante de noveno de educación básica del INEM José Félix de Restrepo su pensamiento matemático a través de situaciones de generalización. Los motivos que dieron pie para seleccionar este tema de estudio están relacionados con la importancia que tienen para el estudiante, los procesos generales del pensamiento en el aprendizaje de la matemática, así como la inquietud de cómo el docente puede propiciar dicho aprendizaje de una manera intencional y organizada. El considerar esquemas y resolver problemas que vayan de lo particular a lo general, de lo más simple a lo más complejo, de lo estrictamente numérico a lo formalizado en forma algebraica, es una vía inestimable para que el estudiante comprenda la verdadera dimensión del álgebra: por que debe estudiarse y su gran utilidad para simplificar y desarrollar procesos matemáticos que se dificultarían utilizando solamente estructuras aritméticas.

En la enseñanza de las matemáticas no se trata tanto de resolver problemas en forma mecánica, limitados al dominio de técnicas en las que se aprende una simbología y unos procesos para inducir al estudiante en la búsqueda de un resultado, resalta la importancia de hacer hincapié en el proceso mismo de explorar, de crear hipótesis, abstraer, generalizar y desarrollar procesos de pensamiento útiles en las diferentes áreas del conocimiento. En las mismas pruebas que hace el Estado en la actualidad se nota un gran cambio en la forma como son planteados los problemas, ya no son enunciados puntuales donde se debe hallar una respuesta que lo haga verdadero, si no, enunciados abiertos donde se tiene que hacer uso del razonamiento para analizar la situación que se presenta y proponer la mejor o mejores soluciones, argumentar el porque de sus respuestas y avanzar hacia estados mas complejos que regularmente son actividades que involucran procesos de generalización. Si bien es cierto que a largo plazo este estilo de problemas puede traer grandes beneficios para los estudiantes, en la actualidad los resultados son desastrosos y evidencian la poca preparación hacia este estilo de pruebas. Veamos algunos de ellos:

“En las evaluaciones de las Pruebas SABER realizadas entre los años 1998 y 2000, se encontró que en el área de Matemáticas solamente el 11% de los estudiantes era capaz de resolver adecuadamente problemas matemáticos, ellos no comprenden un texto más allá de explicar lo que dice con sus propias palabras. (MEN. 2002,42)

En otras pruebas realizadas, los resultados no son muy halagadores:

“En el Tercer Estudio Internacional de Ciencias y Matemáticas, TIMSS, realizado entre 1991 y 1997 con la participación de 41 países Colombia ocupó el penúltimo puesto. El estudio revela notables diferencias en desempeños relacionados con el razonamiento abstracto, la solución de problemas y la comunicación escrita, al extremo de que solamente el 15 % de los estudiantes de grado octavo respondieron las preguntas que exigían razonamiento abstracto.....”.(Ibíd. 42)

Una breve mirada a los resultados obtenidos en algunas preguntas de las pruebas Saber 2003, sobre razonamiento matemático, hace notar la insuficiencia de los alumnos de 9º grado en las que involucran generalización, se toma como ejemplo solamente las dadas por los numerales 22, 23, 24 y 25. Estas cuatro preguntas se dan por un enunciado donde se pide al estudiante que halle la regla de formación en la variación del radio y la longitud de la circunferencia en una secuencia de círculos, además de la fórmula general que determina el radio en cualquier figura. En estas preguntas, clasificadas en el nivel de complejidad E y F (Problemas Complejos con estrategia de solución múltiple)[1], se hizo uso de letras como números generalizados, la respuesta correcta sólo fue dada por la quinta parte de los estudiantes (en Antioquia, fueron unas de las preguntas de mas bajo puntaje: con un porcentaje de acierto del 21.30%, 29.05%, 26.77%,

[1] En esta clase de problemas no se insinúa una estrategia a seguir, el estudiante debe reorganizar la información para establecer un camino de solución al problema. Implica la búsqueda de una regularidad o patrón. Debe descubrir en el enunciado relaciones no explícitas que le permitan establecer una estrategia para encontrar la solución. Estas relaciones implican dos o más variables que se ponen en juego en la situación o que no aparecen en ella, pero son requeridas. Requiere establecer sub-metas y utilizar estrategias que involucren distintas dimensiones del conocimiento matemático. Se pone en juego un conocimiento matemático que da cuenta de un mayor nivel de conceptualización, como formular generalizaciones.
MEN-ICFES. Programa de Evaluación de la Educación Básica. Pruebas Saber Lenguaje y Matemáticas grados 3, 5, 7 y 9. Bogotá. Enero de 2003. Pág. 23

9.69%, respectivamente). El responderlas exigía reconocer un patrón para la variación de la longitud del radio respecto del orden de la figura.

Las pruebas de Estado, en la actualidad, no miden solamente los conocimientos que el estudiante ha adquirido en los grados escolares, sino también, la forma de razonar y proponer alternativas de solución que vayan de lo más simple a lo complejo, de lo particular a lo general. Esto se nota en la fundamentación conceptual que da el MEN y el ICFES respecto a las pruebas Saber en matemáticas en donde se afirma que "la matemática escolar debe promover el desarrollo del pensamiento matemático, el cual posibilita al estudiante describir, organizar, interpretar, formular generalidades y relacionarse con determinadas situaciones a través de la matemática". Y se hace referencia al planteamiento que hacen algunos investigadores en matemáticas como Rico L.:

"Los fines que nosotros consideramos prioritarios en la educación matemática son los siguientes: 1) desarrollar la capacidad del pensamiento del alumno, permitiéndole determinar hechos, establecer relaciones, deducir consecuencias, y, en definitiva, potenciar su razonamiento y su capacidad de acción. 2) Promover la expresión, elaboración y apreciación de patrones y regularidades, así como su combinación para obtener eficacia... 3) Lograr que cada alumno participe en la construcción de su conocimiento matemático... "(Ibíd. 12)

La resolución de ejercicios con determinados niveles de exigencias, de abstracción y generalización, constituye una vía de inestimable valor para alcanzar niveles superiores en el desarrollo del pensamiento de los alumnos, su utilización puede potenciar el adiestramiento lógico lingüístico, el manejo de variables de los alumnos y el desarrollo de procesos mentales como análisis - síntesis, concreción – abstracción, inducción - deducción, además de propiciar el desarrollo de cualidades positivas del pensamiento como son: movilidad en los procesos del pensamiento, reconocimiento de analogías y relaciones, generalización, entre otras.

El trabajo pretende tomar distintas temáticas de la aritmética y la geometría que permitan establecer conexiones con el álgebra, que ayude a los estudiantes acceder a la comprensión de la estructura del álgebra y potenciar el pensamiento lógico - matemático a partir de la generalización de las propiedades de los números, las operaciones aritméticas, la manipulación de figuras y secuencias numéricas y geométricas.

El trabajo desde el punto de vista didáctico es importante porque presenta una metodología para reforzar conceptos algebraicos, estudiar otras temáticas y permitir el desarrollo de habilidades para resolver problemas abiertos, de una estructura más compleja que los de respuesta única, y mejorar procesos de pensamiento matemático como el razonamiento y el lenguaje matemático. Desde el punto de vista teórico por que reúne diversas teorías que hablan del tema de la generalización que la colocan como un medio importante para lograr un mejor desempeño de los alumnos en algunos temas de la matemática como es el de las funciones. Y desde lo metodológico presenta la situación problema como el más indicado para lograr que el estudiante participe activamente en su aprendizaje, proponga y sustente sus ideas.

3. PREGUNTAS ORIENTADORAS DE LA INVESTIGACIÓN

Del planteamiento del problema surgen una serie de preguntas que orientan el desarrollo de la investigación:

¿Cómo adquieren los estudiantes de noveno de educación básica secundaria las habilidades de generalización en procesos de pensamiento lógico-matemático?

¿Que estrategias utilizan los estudiantes para desarrollar su pensamiento lógico-matemático mediante actividades de generalización?

¿Qué aspectos didáctico – pedagógicos puede aplicar el docente para propiciar el afianzamiento en los conceptos y procesos algebraicos a través de situaciones de generalización?

¿Cómo diseñar e implementar una propuesta didáctica alternativa para el desarrollo de destrezas de generalización en estudiantes de educación básica?

4. OBJETIVOS

4.1. OBJETIVO GENERAL

Desarrollar habilidades de pensamiento lógico - matemático en los estudiantes de noveno grado de educación básica del INEM José Félix de Restrepo con actividades que involucran situaciones de generalización como estrategia para la enseñanza – aprendizaje del álgebra.

4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

El desarrollo del presente trabajo, con los alumnos de 9° grado del INEM José Félix de Restrepo, pretende:

1. Identificar las formas de razonar de los estudiantes en situaciones que implican algún nivel de generalización.

2. Analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver actividades matemáticas que vinculan algún nivel de generalización

3. Analizar las formas de comunicar su pensamiento lógico – matemático en situaciones de generalización.

4. Clasificar las respuestas dadas por los estudiantes en problemas que involucran generalización y establecer niveles de generalización matemática.

5. Evaluar la movilización de esquemas cognitivos para establecer generalizaciones mediante la aplicación de la estrategia de intervención pedagógica.

5. MARCOS DE REFERENCIA

El conocimiento matemático es considerado como modelo de conocimiento científico, ya que ningún otro tipo de ciencia alcanza su objetivo propio con tanta eficacia, evidencia y certeza. Es quizás, el único indispensable en las demás ramas de la ciencia para su desarrollo, y es el conocimiento que más dificultades presenta a los estudiantes para ser alcanzado, lo cual es tema de investigación de estudiosos de las diferentes ramas. Es por esto que para abordar cualquier tema de estudio que tenga que ver con el conocimiento matemático y sobre todo los que tienen que ver con su enseñanza – aprendizaje, es necesario hacer referencia a las diferentes temáticas que tienen que ver con él y que ayudan de alguna forma a explicar las diferentes problemáticas que puede originar.

La generalización matemática no es ajena a esta situación y por tanto para realizar un estudio de ella y la forma como puede ser trabajada por los estudiantes se hace alusión a marcos referenciales como los siguientes: El marco legal: Enuncia los conceptos del ministerio de educación nacional al tema de estudio. Este aspecto resulta importante debido a que es el MEN, el que regula el currículo matemático en los establecimientos educativos. El marco contextual: Donde se hace una descripción del espacio, el tiempo y las personas que intervienen en la problemática existente en la enseñanza – aprendizaje del tema en la institución educativa INEM José Félix de

Restrepo, del escenario y los actores que intervienen, la forma como se presenta en la_actualidad y lo que se ha hecho para solucionarlo. El marco teórico: Se refiere a las teorías de algunos investigadores que apoyan el estudio del tema en sus diferentes formas y acepciones. Entre los aspectos importantes por tratar están: el aspecto conceptual: que habla de la teoría matemática referente a la generalización; el cognitivo: que hace alusión a la forma como el estudiante aprende a generalizar y el didáctico: que mira cómo puede enseñarse eficazmente la temática en el aula de clase.

5.1. MARCO LEGAL

La generalización matemática hace parte importante de la resolución de problemas complejos, está ligada estrechamente al razonamiento matemático y necesita de un lenguaje exclusivo para su expresión, lo que la coloca como parte importante dentro de los procesos de pensamiento matemático y hace que su enseñanza se fundamente en algunos documentos legales como la Ley general de Educación, los Lineamientos curriculares y los Estándares curriculares.

El MEN (Ley 115 de febrero 8 de 1994, artículo 20, numeral c) plantea que uno de los objetivos generales de la educación básica debe ser “Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana”. Lo cual implica que la enseñanza de las materias básicas no debe basarse solamente en el relleno de contenidos que a la postre pueden ser olvidados por el estudiante, se deben realizar actividades que propendan por el desarrollo del pensamiento de manera que cuando les toque enfrentar la solución de determinados problemas se desenvuelvan de la mejor manera posible.

De igual forma uno de los objetivos específicos orientadores del ciclo de secundaria de la misma ley (artículo 22, numeral c) plantea: "El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos, de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana." Aparece otra vez el llamado a desarrollar el razonamiento lógico del estudiante como estrategia para que desenvuelva bien en cada uno de los sistemas en que se dividen los contenidos matemáticos.

En los Lineamientos Curriculares (pag. 35) se enuncia respecto a los procesos de pensamiento como eje transversal en la enseñanza de las matemáticas: "Se propone una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender......El objetivo de enseñar las habilidades del pensamiento no se debería considerar, por tanto, como algo opuesto al de enseñar el contenido convencional sino como un complemento de éste.” Se observa pues, que en los parámetros que da el MEN a través de este documento se propone que además de los contenidos tradicionales para cada grado se le presenten a los estudiantes situaciones que permitan el desarrollo de la capacidad de pensamiento y reflexión lógica de manera que puedan resolver problemas variados y de diferente grado de complejidad.

Se deben resaltar también los planteamientos que hace el MEN en los Estándares curriculares (1998, 16) respecto a los procesos matemáticos, encasillando la generalización dentro de estos en sus tres formas: resolución de problemas, razonamiento y comunicación matemática:

Procesos matemáticos

a. Planteamiento y resolución de problemas

La capacidad para plantear y resolver problemas de diversa índole debe ser una de las prioridades del currículo de matemáticas... También es importante desarrollar un espíritu reflexivo acerca del proceso que ocurre cuando se resuelve un problema o se toma una decisión.

b. Razonamiento matemático

El currículo de matemáticas de cualquier institución debe reconocer que el razonamiento, la argumentación y la demostración constituyen piezas fundamentales de la actividad matemática. Además de estimular estos procesos en los estudiantes, es necesario que se ejerciten en la formulación e investigación de conjeturas y que aprendan a evaluar argumentos y demostraciones matemáticas.

c. Comunicación matemática

Mediante la comunicación de ideas, sean de índole matemática o no, los estudiantes consolidan su manera de pensar. Para ello, el currículo deberá incluir actividades que les permitan comunicar a los demás sus ideas matemáticas de forma coherente, clara y precisa.

Igualmente los Estándares para el grado 9° de educación básica (Ibíd. Pág. 37), en cuanto a los procesos de matemáticas, enuncian como logros del estudiante:

- Resuelve problemas cada vez más complejos, descomponiéndolos en partes más sencillas y aplicando una diversidad de estrategias.
- Hace generalizaciones de las soluciones que obtiene.
- Establece la validez de conjeturas geométricas mediante la deducción.
- Explica y justifica cómo llegó a una conclusión o a la solución de un problema.
- Utiliza el lenguaje matemático de manera precisa y rigurosa en sus trabajos escritos y presentaciones orales.

Se precisa en los Estándares de una enseñanza de la matemática basada en la resolución de problemas que inviten al razonamiento y a la utilización precisa del lenguaje matemático, problemas que desarrollen un espíritu critico y reflexivo, donde se pueden hacer y comprobar conjeturas, donde se puedan realizar generalizaciones de manera que se estimule en los estudiantes un pensamiento matemático más formal.

5.2. MARCO CONTEXTUAL

La institución educativa INEM (Instituto Nacional de Educación Media) José Félix de Restrepo está ubicada en una zona central de la ciudad de Medellín en el sector del Poblado (Avenida Las vegas N° 1 – 125) con fácil acceso desde cualquier parte de la ciudad debido a las avenidas que cruzan a su alrededor que sirven de ruta a muchas empresas de transporte tanto urbanas como rurales, además de la línea férrea del metro con la estación Poblado, con gran afluencia de usuarios. Alrededor de la institución se encuentran importantes centros comerciales y universitarios que hacen del sector uno de los más importantes y concurridos de la ciudad.

Fue inscrito y puesto en marcha como INEM mediante los decretos 1962 del 20 de diciembre de 1968 y 363 de marzo de 1970. Inicialmente bajo la atención del Instituto Colombiano de Construcciones Escolares y a partir de 1976 incorporado a la planta del Ministerio de Educación Nacional en la división Especial de Enseñanza Diversificada. En la actualidad, para dar cumplimiento a la ley 715 de 2001 el INEM es una Institución Educativa adscrita a la secretaría de educación del Municipio de Medellín. Es una institución oficial caracterizada desde su creación por una estructura organizacional propia que brinda educación formal en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media vocacional a través de tres ciclos: Exploración vocacional, Orientación vocacional y Educación media vocacional, durante las cuales el estudiante puede elegir entre las ramas técnicas de Artes, Industrial, Comercial, Promoción social y Académica de acuerdo con sus necesidades, intereses y habilidades, de manera que pueda desempeñarse laboralmente o continuar estudios superiores. Su proyecto educativo institucional propende por conservar el carácter de institución de educación media diversificada y proyectarse como centro piloto de innovación e investigación pedagógica hacia los diferentes niveles del servicio educativo. Entre los objetivos del quehacer institucional está la formación integral de los educandos como ciudadanos autónomos, críticos creativos y democráticos que valoren el saber social y cultural.

El colegio cuenta con una planta física muy grande, con un área total de 60.000 m^2, de los cuales el 80% está construido y el resto en zonas verdes, distribuida en bloques en donde funcionan los diferentes estamentos de la institución: El bloque administrativo, el de industrial, de ciencias, de artes, de sistemas, el de la biblioteca, capilla y auditorios, el del aula múltiple y restaurante escolar, el coliseo, el de educación física y unidad deportiva (con canchas de cemento y de fútbol), el de la piscina, 3 bloques para la rama académica distribuidos así: el bloque de los sextos y séptimos, de octavos y novenos, de décimos y onces; el bloque donde están los talleres de mantenimiento y por último el parqueadero, además de tres escuelas anexas que funcionan en la parte alta del sector del Poblado donde se atiende preescolar y básica primaria. Cuenta con grandes patios para el descanso y ocho tiendas escolares que ofrecen diversidad de productos a los estudiantes. Las aulas donde reciben las clases los estudiantes son amplias, con tableros y sillas adecuadas para tal fin.

Para su funcionamiento el colegio cuenta con un personal de 305 personas, entre directivos, docentes y empleados de apoyo logístico, de los cuales 245 son profesores de las diferentes asignaturas y primaria, y de estos 32 son de matemáticas. Los docentes se distribuyen en los diferentes bloques del colegio por departamentos de acuerdo con la especialidad que cada uno ejerce. Es un personal idóneo, capacitado para dictar la asignatura correspondiente, el 70% de ellos está en el 14° categoría del escalafón docente con buen tiempo de antigüedad en la institución y por tanto con gran experiencia en la labor educativa. Los docentes del departamento de matemáticas y que orientan clase en los diferentes grados de la básica secundaria son licenciados en la materia con buena trayectoria en educación, algunos con postgrados de especialista y magíster en esta rama del conocimiento y capacitados para emprender proyectos de enseñanza aprendizaje de la matemática. A nivel del departamento se han hecho proyectos, sobre todo en lo que toca con el currículo. En general el perfil humano del docente del INEM es de calidad y buenas relaciones humanas, permitiéndole esto una adecuada valoración de sí mismo y de los demás al igual que el trabajo en equipo en la institución.

El número actual de estudiantes es de 7004, de los cuales 4500 son de secundaria distribuidos de la siguiente manera: 24 grupos en 11°, 26 en 10°, 21 en 9°, 25 en 8°, 26 en 7° y 20 en 6°; el resto de estudiantes son de primaria y reciben sus clases en las escuelas anexas a la institución. Los alumnos del INEM proceden de todos los sectores de Medellín. Por estar en un punto estratégico y central, de fácil acceso y ofrecer tanta diversidad en el pensum de estudios, la institución presenta gran demanda en cupos. Es por esto que se tiene estudiantes de todos los estratos socio – económicos y variadas características: Hay alumnos de estrato uno que vienen de los sectores populares de la ciudad que pasan muchas necesidades para poder estudiar, pero como les atrae el colegio hacen lo posible por estudiar allí: hay alumnos de estrato 5 que vienen de sectores como Laureles y el poblado que tienen la forma de estudiar en colegio privado pero les llama la atención el INEM; se encuentran alumnos de diferentes grupos étnicos, grupos religiosos, culturales, deportivos, etc.

En general el rendimiento académico de los estudiantes es Aceptable, fuera del 5% que reprueban el año estipulado por el MEN, aproximadamente otro 10% se queda en actividades de refuerzo lo cual muestra dificultades en las diferentes asignaturas. De este 15 % entre alumnos que reprueban y refuerzan cerca del 80% lo hace en matemáticas lo que evidencia problemas en la enseñanza – aprendizaje de esta materia, sobre todo en los grados 8° a 11°.

En lo que respecta al grado 9°, se cuenta con un total de 945 estudiantes en este nivel con en 21 grupo de 45 estudiantes cada uno y distribuidos de la siguiente manera de acuerdo con las ramas técnicas que ofrece la institución: 1 grupo en artes, 1 en promoción social, 5 en comercial, 6 en académica y 8 en industrial. Estos estudiantes se encuentran en una edad promedio de 14 años, en una etapa de crecimiento donde se dan los principales cambios de la adolescencia y se reafirma la personalidad individual de cada estudiante. En general se notan deficiencias en la aplicación de conceptos matemáticos de grados anteriores y en la resolución de problemas, sobre todo de los que hace referencia a aspectos generales.

5.3. MARCO TEORICO

La generalización es la esencia de la matemática y se podría decir que de las ciencias, desde que el hombre empezó a observar los fenómenos de la naturaleza no se contentó con estudiar solamente casos particulares, su deseo fue mucho mas allá, intentar expresar un conjunto de experiencias bajo un modelo, esto es generalizar lo hallado en un caso especial, para un conjunto de casos con características similares. La matemática moderna está compuesta precisamente de fórmulas, teoremas y definiciones aplicables a un conjunto determinado de entes matemáticos, como pueden ser los conjuntos numéricos, las cuales fueron definidas por los matemáticos después de ensayarlas para casos particulares.

De igual manera se puede pensar que una forma adecuada de abordar la enseñanza de la matemática elemental sea por medio de la generalización, ya que es semejante al método científico. En este trabajo se hace una propuesta de este tipo y para que quede bien fundamentada, el estudio de la generalización se hace desde diferentes tópicos: Se inicia con la definición de generalización y la forma como se presenta en diferentes casos de la vida real, en las otras ciencias y en la misma matemática. Se describe el proceso que sigue la generalización y la generalización matemática. Las etapas por las que debe pasar todo proceso de generalización, sobre todo los que tienen que ver con la matemática, en especial las de tipo numérico – geométrico y que llevan a expresiones algebraicas. Se da una mirada a los procesos de pensamiento, ya que la generalización implica por si misma un razonamiento y este es uno de los procesos de pensamiento matemático más importante. Se hace alusión al aprendizaje de la matemática y en ella al de generalización desde la teoría constructivista ya que puede representar de un modo eficaz lo que sucede cuando los conocimientos son aprendidos significativamente con base en las experiencias del alumno. Siendo la generalización matemática una de las características más importantes de los problemas complejos, no se puede pasar de lado sin hablar de la resolución de problemas y la forma como se deben afrontar lo mismo que de las dificultades que se presentan debido al lenguaje que se debe utilizar en su resolución. Y por último se hace un desarrollo teórico sobre las situaciones problema debido a que se presentan como una metodología que favorece el desarrollo de habilidades para generalizar y de aplicación de las competencias básicas de la matemática.

5.3.1. LA GENERALIZACIÓN

La generalización permite pasar del análisis de hechos, datos u objetos particulares, al establecimiento de leyes, que se cumplen bajo ciertas condiciones, para un conjunto de elementos dados. Una tentativa de generalización parte de un esfuerzo por comprender los hechos observados, se parte de la analogía con otros hechos o por visualización de reglas de formación, se verifica en nuevos casos particulares, se hacen conjeturas y se llega a reglas generales, este proceso es llamado inducción.

Para Polya (1954, 97), la generalización consiste en pasar del examen de un objeto, al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado.

La generalización se da en todas las actividades de los individuos y en las diferentes ramas del saber, pero especialmente en las matemáticas.

A continuación se presentan algunos casos donde se pueden apreciar situaciones de generalización:

En la vida cotidiana: La generalización aparece en las diversas situaciones de la vida cotidiana, todas las personas tienden a generalizar y sobre todo los niños, por estar en una etapa de formación y descubrimiento del entorno, de caracterización de los objetos que le rodean.

Por ejemplo cuando un niño se pincha un dedo con una aguja, piensa “Todas las agujas pinchan”, es mas, sus conjeturas van mucho mas allá, hace la generalización: “Todos los objetos puntiagudos pinchan”

Cuando alguien va a comprar cierta cantidad de artículos de la misma clase y pregunta por el valor de uno de ellos, con la respuesta del vendedor, inmediatamente se hace una idea general de lo que cuesta la cantidad que va a comprar y de si le alcanza la plata; si salen caros o no. Radford L.[2] confirma estos planteamientos cuando afirma: “Seguramente la generalización no es específica a las matemáticas: desde un cierto punto de vista es, quizás, una de las más profundas características de todo conocimiento cotidiano no científico...”

Otra forma de la generalización es la **identificación de invariantes** en una serie de situaciones que llevan a una formulación general de la serie. En este caso se trata de distinguir las relaciones que hay entre cada elemento de la secuencia.

Hay dos contextos dentro de los cuales se presentan con mayor frecuencia este tipo de generalización el campo de los números y el de las figuras

---

[2] Algunas reflexiones sobre la enseñanza del álgebra a través de la generalización cap. 7
En Aproximaciones al álgebra. Perspectivas para la investigación y enseñanza. Nadine Bednarz, Carolyn Kieran y Lesley Lee.
Traducción libre de Urbano Rengifo H., en el marco de la Red en Educación Matemática, en el curso Conceptos básicos del álgebra coordinado por el Grupo de Educación Matemática de la Universidad del valle. 2002.

geométricas. En esta clase de generalización prima mucho la experiencia del alumno para obtener el elemento general. “Para adquirir ese conocimiento que permita reconocer y diferenciar los elementos estructurales de los particulares es necesario que el alumno esté en contacto con múltiples situaciones en las que pueda confrontar las hipótesis particulares que construye sobre cada situación, a fin que pueda encontrar las características generales que estructuran el concepto que se estudia, independiente de la forma como este sea presentado. “(Obando G. 2001, 78)

El álgebra como generalización de la aritmética: Muchos textos de matemática elemental presentan el álgebra como una aritmética generalizada. “Las reglas del álgebra constituyen expresiones que expresan generalidades, los patrones que se observan aparecen en las mismas colecciones de números, y en las operaciones comunes que se hacen con estos números.” (Mason J. 1988, 91)

Por ejemplo:

2+2+2=6	a+a+a= 3a
2+3+7=12	a+b+c=d

En la experimentación física: En los resultados de un determinado experimento, por ejemplo el que se hace para obtener el valor de la gravedad (g) en un lugar determinado. Después de un número dado de casos el promedio de ellos llevará a generalizar que en ese lugar todos los objetos caen con la misma aceleración hallada. Esta es la generalización de las leyes físicas.

Las definiciones matemáticas: Una definición matemática es la generalización de una(s) característica(s) que cumplen algunos elementos matemáticos.

Por ejemplo: la definición de progresión aritmética se refiere a todas las sucesiones que cumplen una característica especial, la razón se obtiene restando dos términos sucesivos de la sucesión.

Los teoremas y corolarios: Igual que las definiciones, son generalizaciones para algún grupo de entes matemáticos que cumplen ciertas características.

Generalización avanzada (análisis matemático o matemáticas avanzadas): Generalización de alguna característica que cumple un conjunto de expresiones algebraicas. Por ejemplo: Se nota que las funciones que son derivables en algún punto son continuas en ese punto, esto es, el límite por ambos lados existe y es igual a su evaluación en ese punto. Entonces se generaliza y se define la deriva en ese punto.

En la Estadística: Cuando se analiza un conjunto de datos tomados de una población determinada y se hace una inferencia sobre estos, se está generalizando para toda la población en estudio.

Los problemas: Otra forma es escribir una formulación general de un tipo determinado de situaciones (pueden ser problemas), esto es, dado un conjunto de situaciones, que presentan características comunes, reconocer en ellas una expresión o ley general que las abarque a todas.

5.3.2. PROCESO DE GENERALIZACIÓN

Regularmente los profesores de matemáticas piensan que las abstracciones y generalizaciones matemáticas son habilidades que el estudiante sólo aplica cuando ha sido ejercitado lo suficiente. Piensan que el estudiante, con su repertorio de conocimientos, sólo es capaz de presentar casos particulares de diferentes situaciones matemáticas y que la generalización se obtiene después de un largo bagaje y entrenamiento por parte del docente. Pero el generalizar es algo común a todas a las personas y se da en todas las situaciones de la naturaleza y la vida diaria, sólo hay que saberlo encausar para sacarle un buen provecho y lograr así desarrollo de habilidades en pensamiento matemático. "...la generalización es una actividad continua en la actividad intelectual y se da en todos los niveles. Hay secuencias, regularidades que se dan en la naturaleza y en la vida diaria que pueden ayudar a tomar conciencia de generalidades..." (Grupo Azarquiel 1993, 36). Esto es comprobado cuando se enfrenta a los estudiantes a un problema con objetos reales: En efecto, cuando se les coloca a trabajar con objetos nuevos, desconocidos, una caja con instrumentos o juegos, por ejemplo, su primera acción o hacer instintivo consiste en abrir la caja y observar su contenido, las piezas o partes que lo componen. Generalmente se trata de acciones manipulativas que canalizan el aprendizaje a través de sus órganos sensoriales: vista, oído etc. Toman los objetos, piezas o instrumentos, los observan atentamente, los palpan, miran su forma, color y apariencia, elaboran algunas hipótesis acerca de la materia con que están construidos y del posible uso que puede hacerse de ellos, planifican algunas experiencias sensoriales básicas como por ejemplo, ponerlos en fila, ordenarlos por altura, golpearlos entre sí para oír su sonido, agitarlos para notar si en su interior existen partes movibles, dejarlos caer al suelo, etc. Es, claramente, una etapa de descubrimiento no guiado que dependerá de la naturaleza de los objetos, de la información previa que puede tenerse sobre ellos y de la experiencia que se haya acumulado en acciones anteriores semejantes. Esta es una primera etapa que podemos decir, es característica a todos los seres humanos y es la base o el inicio de cualquier conocimiento, pues de esta forma las civilizaciones antiguas dieron los primeros pasos en la construcción de lo que es la matemática y la ciencia moderna. Cuando se estima que estas acciones ya no pueden entregar mayor información o conocimiento sobre los objetos en sí, la naturaleza inquisitiva o "estructura cognoscitiva"[3] impulsa a continuar la cadena de acciones, pero ahora con una nueva característica que permite distinguir en él a una segunda etapa. En efecto,

[3] Según Ausubel, Novak y Hanessian (1976, 171) la transferencia en el aprendizaje escolar consiste principalmente en moldear la estructura cognoscitiva del alumnado manipulando el contenido y la disposición de sus experiencias de aprendizajes previas de modo que se facilite al máximo las experiencias de aprendizaje subsiguiente.

habiendo logrado una satisfactoria aproximación a la naturaleza física de los componentes u objetos del conjunto que estaban examinando, la secuencia de acciones continua en forma natural buscando relaciones entre los objetos, leyes que los manejen o que permitan hacer algo con ellos, propiedades que se cumplan en estos objetos, reglas estructuradas que amplíen el campo anterior y lo transformen en uno más amplio con perspectivas de acciones más complejas y con un sentido propio, que puede ser de carácter utilitario (¿para qué pueden servir estas piezas?). Es la etapa de la búsqueda y del conocimiento de las instrucciones o reglas que permitan usar las piezas recientemente conocidas con un propósito y sentido práctico amplio. En esta etapa se da un proceso de abstracción, el niño hace a un lado las características físicas de los objetos y trata de dar relaciones a través de lenguaje simbólico o verbal de las propiedades encontradas. Por ejemplo si está manipulando triángulos, no dirá como en la etapa anterior: “esta figura tiene tres lados”; en esta etapa podrá ir mas lejos y decir: “todos los triángulos tienen tres lados”, lo cual indica que está haciendo una generalización para estas figuras. Esta segunda etapa corresponde propiamente a las generalizaciones matemáticas, que corresponden a aquellas estructuras o armados lógico-matemáticos, construidos con conceptos y susceptibles de ser aplicados a situaciones concretas.

Una vez que el estudiante ya tiene armado, “a su modo” (todo estudiante puede expresar relaciones entre las características de un objeto, estas expresiones pueden no ser correctas, pueden contener errores o ser completamente falsas), un conjunto de reglas y relaciones definidas para estos objetos comienza una tercera etapa en la secuencia del aprendizaje, la cual tiene que ver con la aplicabilidad de lo hecho en las anteriores etapas. Lo aprendido sobre las piezas y sus reglas o propiedades permitirán emplearlas, de manera pertinente, tras los fines propios para los cuales fueron diseñadas. Esta tercera etapa involucra la utilización práctica, de carácter terminal, que con frecuencia reconocemos como la aplicación o uso práctico del conjunto de piezas. Esta etapa comprende la utilización de las generalizaciones en situaciones concretas y específicas. Es la etapa que aparece fuertemente considerada en las pruebas formales.

5.3.3. PROCESO DE GENERALIZACIÓN MATEMÁTICA

5.3.3.1. Esquema del proceso de generalización

En el desarrollo conceptual que se ha venido haciendo de la generalización se nota, que no es una actividad libre de contextos, no hay una forma única de expresarla y que depende de la situación y de los objetos matemáticos con los que se está trabajando. El interés en este trabajo prima en aquellas generalizaciones basadas en modelos numéricos – geométricos, la forma como se desarrollan y la importancia que pueden tener para el afianzamiento en el aprendizaje del álgebra.

Un objetivo en la generalización de patrones numérico – geométricos es el de obtener un nuevo resultado. Concebida en esta forma, la generalización no es un concepto, es un procedimiento que propicia la generación de nuevos resultados.

Un esquema del proceso del procedimiento de generalización, según Radford L. es el siguiente:

Un procedimiento de generalización **g** lleva a una conclusión α, comenzando por una secuencia de hechos observados, $a_1, a_2, \ldots a_n$, Lo cual se puede escribir como:

$a_1, a_2, \ldots a_n \rightarrow \alpha$ (α, es derivada de $a_1, a_2, \ldots a_n$)

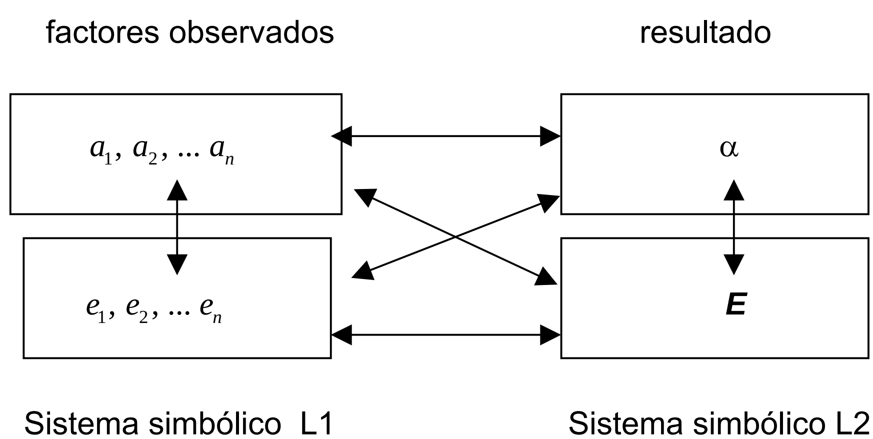
Los hechos $a_1, a_2, \ldots a_n$ son interpretados de acuerdo con una cierta manera de pensamiento dependiendo del conocimiento y los propósitos del observador. Esta forma de pensamiento resulta de la conceptualización de los objetos matemáticos que tiene el observador y las relaciones involucradas entre los hechos a_i, y lleva a una particular forma de pensamiento matemático.

Es preciso resaltar, además, que los a_i pueden ser escritos de diversas formas dependiendo del pensamiento matemático del estudiante, algunos pueden utilizar una notación verbal y describir por medio de palabras el hecho observado, otros realizar gráficos y dibujos para mostrar detalles de sus observaciones y otros utilizar de una vez simbología matemática.

Ahora, cuantos a_i son necesarios para llegar a una conclusión α adecuada?. Radford plantea que debido a la naturaleza lógica de la generalización matemática, lo cual hace posible llegar a la conclusión α, el número de a_i depende de la forma particular de pensamiento matemático de cada estudiante. Por ejemplo, muchos estudiantes después de algunos ejemplos (uno o dos) tratan de proponer la conclusión α, otros necesitan de muchas más y tratan de asegurarse primero que todo que lo que están concluyendo si es correcto. Igualmente pasa cuando se pide justificar la conclusión hallada, algunos piensan que con dos o tres ejemplos de prueba es suficiente, otros creen que la validez de la conclusión α es perfecta si ésta es probada con un término especial de la secuencia, digamos el 100º (centésimo) o el 1000º (milésimo) término.

Otro aspecto para resaltar es el uso de representaciones externas como símbolos en la generalización matemática, estas son importantes por que crean un ambiente favorable para introducir al estudiante hacia una estructura matemática más formal, de más rigor y con formulaciones útiles para resolver conjuntos de problemas en 9° grado de educación básica, debido al manejo que ya debe tener un alumno del lenguaje algebraico para responder a las exigencias de las temáticas correspondientes. Así algunos autores como Mason y Lee digan que “el simbolismo algebraico no es el principal objetivo de la generalización" [4], una simbología adecuada en los procesos de generalización debe ser una exigencia.

Son varios los esquemas que se pueden dar para la forma como se realiza la simbolización en un proceso de generalización, Radford propone el siguiente: Sean $e_1, e_2, ... e_n$ las expresiones simbólicas de los hechos $a_1, a_2, ... a_n$. Las e_i son afirmaciones en un sistema simbólico L_1 y sea ***E*** la expresión simbólica de α en un cierto sistema de símbolos L_2 (cada sistema de simbología varía también de acuerdo con el pensamiento matemático de cada estudiante), entonces un procedimiento de generalización puede ser visto como está ilustrado en la siguiente figura:



Se consideran ahora la clase de conceptos que se movilizan en los problemas de generalización, específicamente en los numéricos – geométricos:

[4] Radford l. Op. Cit

Cuando se trata de resolver un problema de generalización, para empezar, se debe tener una idea muy precisa de lo que se pregunta, lo cual puede ser aclarado realizando casos particulares. Aunque la *particularización* es algo que por naturaleza todos los individuos tienden a hacer cuando hay poco entendimiento de algo, con el proceso de generalización se perfecciona llegando incluso a hacerse mentalmente. Estas particularizaciones permitirán observar aspectos variables e invariantes dentro del proceso de resolución de la situación, lo cual permitirá observar los diferentes hechos $a_1, a_2, ... a_n$ que pueden ser enunciados verbalmente como *reglas de formación* - una forma de hacerlo es llevando a cabo un análisis de los distintos ejemplos de los que se dispone inicialmente, estudiando sus características y propiedades - las cuales llevan finalmente a una regla más general α, considerada una generalización de las anteriores. Como El propósito de estas generalizaciones es encontrar una expresión ***E*** que represente la conclusión α y la expresión ***E*** es, de hecho, una *fórmula general* y se construye sobre la base, no de números concretos involucrados en los primeros hechos observados, sino con la idea de un número general, ***E*** representa de hecho el objetivo final del proceso de generalización y se enuncia como una ley que se cumple para ciertos elementos y bajo ciertas condiciones, la cual después de ser evidenciada, se puede utilizar para resolver un conjunto de problemas enmarcados dentro del que originó esta formulación general. Algunas características que cumple esta fórmula general son las siguientes:

a) Todas incluyen, en forma explícita o implícita, el cuantificador universal.

b) Poseen variables que están definidas sobre dominios determinados. Estos dominios condicionan el valor de verdad de la generalización.

c) Son susceptibles de asociarles un determinado valor de verdad. Establecer y reconocer una justificación este valor de verdad se llama: "demostrar la generalización".

d) Son susceptibles de ser instanciadas escogiendo valores específicos desde los dominios de las variables." (González H. 2002)

Para llegar a la conclusión ***E*** se hace necesario el *planteamiento de variables* y *de relaciones* que permitan llevar a cabo tal objetivo. La utilización de variables y el plantear relaciones entre éstas, son actividades fundamentales en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. La adquisición de este concepto es un proceso muy lento y a largo plazo que requiere de mucho trabajo por parte del estudiante y las actividades de generalización pueden ayudar a resolver estas dificultades; hallar el término general de una sucesión de números o de figuras se presenta como una buena manera de abordar una variable: el lugar de orden es la variable independiente y los casos particulares pueden interpretarse como valores de la variable. Una forma para facilitar la observación y la producción de la variación, es el uso de tablas. "Las tablas de datos permiten analizar como varían los conjuntos de números... y si ha sido el propio alumno el que ha obtenido los datos representados en la tabla, la relación entre las magnitudes y la variabilidad se le presenta como algo muy próximo, muy concreto..”(Grupo Azarquiel. 1993, 55)

El MEN, también destaca la importancia de las tablas:

“La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. ....La tabla se constituye en un elemento para iniciar el estudio de la función, pues es un ejemplo concreto de función presentada numéricamente. La exposición repetida de construcciones de fórmulas, como expresiones que explicitan un patrón de variación, ayudan a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas que aparecerán después del estudio del álgebra. La tabla también se constituye en una herramienta necesaria para la comprensión de la variable, pues el uso de filas con variables ayuda a que el estudiante comprenda que una variable puede tener un número infinito de valores de reemplazo. Además, el uso de variables en la tabla también ayuda a la escritura de las expresiones algebraicas, tipo retórico o fórmulas para describir la variación o el cambio.”(MEN. 1998, 72-73)

La utilización adecuada de variables trae consigo otro concepto importante como es la *simbolización*. “ El proceso de simbolización es el camino que se sigue para incorporar el uso de símbolos algebraicos a las situaciones en que resultan necesarios: expresión de reglas, escritura de fórmulas, resolución de problemas, interpretación de expresiones, comprobaciones, etc.” (Ibíd. 59). En el caso de la generalización matemática es el medio que permitirá enunciar las variables, las relaciones entre estas y la fórmula que generaliza el problema. La exigencia de una simbolización rigurosa puede depender del nivel de abstracción que tengan los estudiantes y de la necesidad que se tenga de ella, y se debe trabajar en forma apropiada para lograr buenos resultados. “El movimiento hacia la notación matemática formal se debe trabajar en forma gradual, a la velocidad individual de quien aprende. Los alumnos necesitan ver que los símbolos se usan para expresar generalidades pero sólo los emplearán en forma exitosa cuando están listos para hacerlo, y cuando perciban una necesidad de hacerlo” (Mason J. 1988, 52).

5.3.3.2. Estatus epistemológico de la generalización

Son muchos los casos en las diferentes ciencias y situaciones cotidianas que nos muestran la generalización como algo inherente al sujeto y al conocimiento. Todos los individuos después de un número determinado de sucesos de algún fenómeno tienden a sacar conclusiones generales sobre lo que experimentan, estas conclusiones de acuerdo con la teoría Ausbeliana quedan en la memoria del individuo como un repertorio de ideas o conocimiento, el cual saldrá a relucir cuando se presente nuevamente dicho fenómeno. En las matemáticas es donde más se nota esta tendencia hacia lo general, tanto así que muchos autores le dan un estatatus epistemológico a la generalización, Radford L.[5] en un escrito sobre la enseñanza del álgebra a través de la generalización hace referencia a los comentarios que hacen algunos de ellos:

"Mason J., dice que "la generalización es la esencia, el corazón de las matemáticas". Lee L. afirma que las más importantes actividades relacionadas con el álgebra pueden ser vistas como actividades de generalización; "no es un gran reto", dice ella, "demostrar que las funciones, la modelización y la resolución de problemas, son todas, tipos de actividades generalizantes; que el álgebra y en últimas, todas las matemáticas se fundamentan en patrones de generalización. El argumento básico (más o menos implícito) de ambos autores es que esta característica del desarrollo "interno" de la actividad matemática, mostrado en particular por la historia de las matemáticas puede ser transferido en el campo de la educación y usado como herramienta didáctica cuando las matemáticas son concebidas como una materia para ser enseñada. ... Una mirada superficial a la historia de las matemáticas deja la impresión de que todas las matemáticas tratan sobre generalizaciones. Una mirada más cercana sugiere que si se acepta la generalización como una norma epistémica, ésta no podría funcionar sola, sino que puede estar relacionada con otra probable norma epistémica, a

---

[5]Radford L. Op. Cit

saber, la norma epistémica de resolución de problemas.”

5.3.3.3. La generalización y el álgebra

La generalización está fuertemente ligada al proceso de abstracción y de ahí se desprenden algunas de sus dificultades. A la vez este proceso de abstracción conlleva al registro de relaciones y expresiones en las cuales el lenguaje natural no siempre es tan claro. Los significados y términos empleados por cada persona pueden ser diferentes, de ahí que se tenga que recurrir a un lenguaje accesible para todo el mundo. Aparece entonces el lenguaje algebraico como el medio adecuado para escribir sin ambigüedades las abstracciones o formulaciones que las personas pueden hacer de un fenómeno determinado, además de expresar simbólicamente lo general. “Lo que proporciona en muchos casos mayor potencia al lenguaje algebraico con respecto al natural es precisamente, la posibilidad de expresar lo general utilizando los símbolos. Los símbolos y las reglas usuales para utilizarlos aumentan su funcionalidad y permiten expresar las relaciones con mayor precisión y simplicidad..” (Grupo Azarquiel, 1993).

“Una de las vías por la que un principiante puede encontrarse con el álgebra, y quizá de las más naturales y constructivas, es precisamente el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general y sobre todo, expresarlo. Al intentar describir relaciones o propiedades relativas a un conjunto de números, se puede conseguir que las letras aparezcan en un contexto, después de un proceso en el que se trata de dar sentido progresivamente a las interpretaciones personales. Se puede convertir así en una necesidad del alumno, en un instrumento propio para explicar y manejar sus ideas.” (Grupo Azarquiel, 1993)

Cuando un alumno se enfrenta al problema:

¿Cuál es el área de un rectángulo de lados 3 y 4?, ¿y de lados 4 y 5?, ¿y de lados 10 y 11? Investiga casos similares. Expresa lo que hay de común en estos casos, después de varias comprobaciones y tanteos puede obtener alguna expresión del tipo “se multiplica un número por el siguiente”, o bien, “un número por otro, mas uno”, u otro similar. Si consigue representar un número con una letra, el alumno puede llegar a las expresiones:

$x.(x+1)$ ó $(x-1).x$

Los símbolos y sus operaciones tienen así una referencia, un sentido. El hecho de construir símbolos para expresar generalizaciones propias hace que estas constituyan una forma específica y precisa de escritura. La interpretación de símbolos en términos de series numéricas permite que no se vean como simples objetos, sino como auténticas variables. Así, puede ir formándose el concepto de variable, central en el aprendizaje del álgebra. La adquisición del concepto de variable exige el dominio de procedimientos relacionados con la percepción y expresión de lo general. (Azarquiel G. 1993)

5.3.3.4. Etapas del proceso de generalización matemática

Los procesos de generalización, y sobre todo aquellos que tienen relación con el álgebra, permiten una visión en fases que conviene desde el punto de vista didáctico. Se pueden observar tres fases bien diferenciadas: *ver*, *decir* y *registrar* (Mason, 1999).

a) **Ver**: La visión de la regularidad
b) **Describir**: La exposición verbal o descripción de lo observado
c) **Registrar**: Su expresión escrita

En la primera etapa, en la observación de una generalidad, se trata de distinguir lo que es propio de cada caso específico y lo que es común a todos ellos, lo que no varía, se trata de encontrar lo que se mantiene en cada caso, para luego construir una regla que permita expresar lo general sin hacer referencia a los casos concretos. Un aspecto de relevancia en esta etapa es el contexto en el cual se presenta la situación. Hay dos contextos dentro de las matemáticas que se prestan para este trabajo: los geométricos y aritméticos; los primeros, ya que facilitan la manipulación de la información tanto como la percepción de las características de la situación; por su parte, las series numéricas tienen la ventaja de permitir aprovechar la mayor experiencia de los estudiantes en el trabajo con los números y sus propiedades. Una ayuda importante para ver lo que presenta el problema es particularizar. ”El proceso de particularización se usa para reunir el grado de evidencia necesario sobre el que se va a basar el proceso de generalización.” (Mason J. 1989, 22).

Una segunda etapa es el intento de describir la regularidad percibida, de enunciar las reglas de formación que rigen la situación planteada. “Esta descripción en el lenguaje natural es un paso que se da habitualmente al generalizar, y que permite posteriormente expresar por escrito, con precisión, la propiedad general que se ha obtenido.” (Azarquiel. 1993, 37).

Aunque en las dos primeras etapas no es explícita la sintaxis formal algebraica, sí es fundamental dedicarle en el trabajo escolar suficiente tiempo a ellas; el paso apresurado al registro simbólico de una regularidad conlleva a una pérdida de sentido y significado de la expresión general y a un obstáculo para el manejo adecuado de las expresiones algebraicas resultantes. Particularizar da una idea de lo que está pasando: el detectar alguna ley oculta y formularla en palabras da lugar a una conjetura que puede ser examinada, cuestionada y modificada. “El proceso de hacer conjeturas ocupa el centro del razonamiento matemático.” (Mason J. 1989, 77). Un aspecto que es necesario afrontar en la etapa de la percepción de la regularidad, es el problema de la validez de las conjeturas hechas sobre las características de los casos específicos y si se trata o no de patrones generales de comportamiento. Es importante tener en cuenta que las conjeturas deben ser probadas para ver si expresan propiedades de todos los casos que se podrían observar o si simplemente son un resultado de ejemplos particulares.

La tercera fase corresponde al registro y tiene como objetivo, según Azarquiel G., la expresión escrita, en forma simbólica, de las relaciones cuantitativas que se observan. Lo que significa que el planteamiento de las variables y de las relaciones entre estas y la formulación final de la generalización pertenecen a esta etapa, lo cual la hace más dificultosa a los estudiantes. El paso del *ver* y del *decir* al *registrar* es un paso difícil y por tanto debe ser realizado a través de suficientes y variadas situaciones diseñadas para tal fin.

Es pertinente destacar que el proceso de generalización, de acuerdo con lo planteado, que va de lo particular a lo general, es un proceso de razonamiento inductivo, como lo plantea Socas M. :"la inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones...."(Socas M. 1996,151)

5.3.4. LA GENERALIZACIÓN COMO PROCESO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

Una de las tendencias generales más difundidas hoy, en cuanto a la enseñanza de la matemática, consiste en hacer hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de esta área, que en la transferencia de contenidos. La matemática debe ser, ante todo, un saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones que tocan con la sicología cognitiva y que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas.

La matemática, pensada en razón de su enseñanza escolar y considerada más como un proceso de pensamiento que como una acumulación de resultados logrados por otras personas implica hacer conjeturas y verificarlas, construir alternativas generales que simplifiquen el trabajo con particulares y aplicar ideas conectadas lógicamente, ideas que en la mayoría de los casos surgen de la necesidad de resolver problemas de la vida material, la tecnología o la ciencia.

De acuerdo con los lineamientos curriculares los procesos generales que tienen que ver con la actividad matemática son la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (algoritmos). De estos los que más tienen que ver con la generalización matemática son el razonamiento, la comunicación y la resolución de problemas.

El **razonamiento** es fundamental en toda la matemática, hace referencia a acciones como intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y si es posible demostrar, sin exigencias de formalización extremas, como se acostumbra en la presentación acabada de resultados en la matemática. Se presentan principalmente, dos métodos de razonamiento: la inducción y la deducción. La inducción es el método que usan la mayoría de las ciencias para corroborar que ciertas proposiciones son verdaderas. El razonamiento inductivo se basa en la elaboración de conjeturas o hipótesis (palabra utilizada con distinto sentido en la deducción matemática) nacidas de la generalización de propiedades que se dan en un conjunto de observaciones. A lo largo de toda la educación básica, el contraste de conceptos y relaciones, la búsqueda de regularidades en un conjunto de datos (hechos, formas, números, expresiones algebraicas, gráficos, etc.) y la formulación de generalizaciones con base en lo observado, a la experiencia o a la intuición, apuntarán a la formación del razonamiento inductivo. La matemática usa la inducción como punto de partida, pero la verdad de sus proposiciones se demuestra a través de la deducción.

El razonamiento deductivo demuestra la verdad de sus conclusiones como derivación necesaria de sus premisas. Probar una generalización requiere de la deducción que la independiza de la experiencia y la torna universal. El razonamiento deductivo no está necesariamente unido a una presentación formal del mismo, y en este nivel no es condición necesaria tal presentación, pero sí es interesante que los alumnos de noveno reconozcan las diferencias entre las distintas formas de validación y puedan usarlas.

Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el

tratamiento de problemas.

- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones. Encontrar contrajemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (M.E.N. 1998, 77)

La **resolución de problemas** no debe pensarse como un tópico distinto sino como un proceso que debe penetrar todo el diseño curricular y proveer el contexto en el cual los conceptos y habilidades pueden ser aprendidos. Los problemas ponen en juego: procedimientos de rutina (destrezas) tales como contar, calcular, graficar, transformar, medir, etc. y procedimientos más complejos (estrategias) como conjeturar, estimar, organizar, comparar, contrastar, relacionar, clasificar, analizar, interpretar, inferir, deducir, generalizar, etc.

La elaboración de estrategias de solución en problemas de generalización crea en los alumnos confianza en sus posibilidades de hacer matemática y de resolver otros más simples.

La **comunicación** es esencial en tanto posibilita: brindar y recibir información; crear lazos de conexión entre las nociones informales e intuitivas del estudiante y el lenguaje abstracto y simbólico de la matemática;

establecer conexiones entre las diferentes formas de representación concretas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de conceptos y relaciones matemáticas; ver la necesidad de precisar el vocabulario y compartir definiciones para evitar la ambigüedad que existe en el lenguaje común; La coherencia y la precisión en una exposición exigen coherencia y precisión en el pensamiento. A su vez la comunicación de ideas contribuye a clarificar, agudizar, precisar y consolidar el razonamiento.

5.3.5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE IMPLICAN GENERALIZACIÓN

Al considerar la generalización matemática no se puede dejar a un lado la resolución de problemas, pues esta hace parte de estos en sus niveles de resolución mas avanzados. Las situaciones de generalización, son en si mismas un problema de tipo complejo donde el estudiante debe utilizar con mayor razón los pasos de resolución de problemas; en problemas sencillos puede obtener la respuesta fácilmente, en los problemas que implican generalización debe aplicarlas, inclusive, varias veces y utilizar además, todo su ingenio matemático.

La NCTM (1970, 40) en un trabajo sobre resolución de problemas plantea que los problemas matemáticos que más movilizan el pensamiento de los estudiantes son aquellos que hacen énfasis sobre el descubrimiento y la generalización, hacen el aprendizaje más permanente y proporcionan una gran transferencia a otros problemas específicos. El éxito del alumno en esta clase de problemas depende en parte de su conocimiento y de su recuerdo de generalizaciones que se "acomoden" a la situación que se considera.

La capacidad para resolver problemas es una actividad de trascendental importancia en el aprendizaje escolar la cual involucra el pensamiento y la creatividad. "Resolver un problema es abordar la situación con un cierto número de esquemas de respuestas que se intentan aplicar, pero que muestran no ser eficaces y desean ser modificados o reemplazados por otro que el sujeto inventa. Existe un problema cuando el sujeto se encuentra verdaderamente desarmado ante los estímulos. De donde se deriva la importancia que se atribuye a la invención." (Polya G. 1954, 16)

5.3.5.1. Etapas en la resolución de problemas:

En general cuando se intenta resolver un problema, sea este de solución única, de respuestas variadas, de análisis, de manejo de datos, etc., se deben seguir unas etapas, las sugeridas por Polya (1954), son las siguientes:

Comprender el problema**:** El objetivo de esta etapa es identificar que es lo que pide el problema y cual es la información que se necesita para resolverlo. Si un problema no está bien definido puede traer consigo más dificultades y tropiezos para el estudiante, ya que puede llevar a contradicciones y resultados ilógicos.

Para la comprensión del problema es importante que el alumno sea capaz de separar los elementos: Determinar cuales son los datos (lo que se conoce), estos datos son llamados en algunos casos condiciones iniciales del problema; cuáles son las operaciones básicas que se deben manejar para resolverlo; cuáles son las incógnitas (datos desconocidos), o sea lo que se pregunta.

Concebir un plan**:** Después de analizar toda la información que nos proporciona el problema debemos organizarla en el orden que mejor convenga y compararla con la utilizada en algún problema que hallamos resuelto y así formar la estrategia o plan para su desarrollo. También se pueden hacer dibujos o gráficas para ilustrar la situación y expresar las ecuaciones algebraicas o relaciones matemáticas que pueden servir para solucionar el problema.

Ejecución del plan**:** Una vez que el estudiante ha concebido el plan de solución, debe ponerlo en ejecución. Es bueno que él mismo compruebe el desarrollo de cada paso, para ello es aconsejable:

- Examinar los razonamientos para tratar de detectar lagunas o errores lógicos.
- Analizar la resolución elegida y expresarla con suma claridad.
- Releer el enunciado del problema para luego expresar la respuesta adecuada.
- Si no se solucionó el problema, volver a concebir otro plan, revisar y seguir avanzando.

Verificación: En esta etapa nos daremos cuenta si la respuesta tiene sentido, si satisface las condiciones dadas en el problema, si el proceso seguido: ecuaciones, cálculos matemáticos, solución, unidades, etc. fueron los apropiados. Este es el momento de mirar atrás para:

- Comprobar la resolución: Que la solución corresponde al problema original
- Reflexionar en las ideas e instancias claves: Las implicaciones de las conjeturas y razonamientos.
- Generalizar la solución a un contexto más amplio: Buscar una modalidad distinta de resolverlo.

5.3.5.2. Algunos recursos a utilizar en la resolución de problemas

Cuando se trata de resolver problemas complejos (como los que involucran generalizaciones). Es bueno considerar herramientas como las siguientes:

La Heurística: Es la acción que pone en juego la creatividad del estudiante llevándolo a buscar diferentes caminos en la solución de un problema, nos permite poner en práctica la experiencia obtenida en la solución de problemas anteriores, en la solución del problema actual.

Según Polya (1954) “La heurística moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso”

“La heurística proporciona un esquema o plan para enfrentar los problemas pocos conocidos y pretende mejorar la capacidad personal de buscar soluciones con métodos eficientes. En términos generales, su objetivo no es establecer un método muy esquemático y sistemático pues se trata, más que de una ciencia, de un arte. (Rodríguez, M y otros 1999, 120)

Algunos aspectos que se deben considerar cuando se pretende establecer una heurística son los siguientes:

El Tanteo: Consiste en probar una o varias acciones, datos y soluciones, hasta encontrar las soluciones que más se acomoden al problema que estamos tratando de resolver o la solución única de este.

La Redefinición: Consiste en el planteamiento del problema en otros términos. La comprensión deficiente de un problema tiende a provocar una mala definición inicial del mismo, pero este se ira aclarando con los mismos intentos, hasta llegar a una definición adecuada.

La Relación: Muchas veces se debe apelar a la experiencia que se ha tenido en la resolución de problemas y hacer memoria si se han resuelto algunos del mismo tipo o que tengan alguna relación con el que estamos tratando de resolver, o porque es sobre el mismo tema y se pueden aplicar las mismas fórmulas, el procedimiento es similar, etc.

Los Subproblemas: Cuando se presentan problemas que exigen la utilización de varias fórmulas, o la respuesta se compone de varios datos, se pueden subdividir en varios subproblemas para simplificar un poco el proceso de solución y hacerlo parecer sencillo en su desarrollo.

***La Conjetura*:** Son afirmaciones que se originan en el desarrollo de la situación que se está trabajando, estas pueden ser falsas o verdaderas, su veracidad algunas veces, debe ser justificada con demostraciones matemáticas formales. Las conjeturas se originan por el deseo de formular leyes generales para ciertos tipos de problemas.

Según Brian (1988), Citado por Londoño Nevardo (1996, 24) “Una conjetura es una afirmación que parece razonable, pero cuya veracidad no ha sido demostrada, es decir, no se ha justificado convincentemente, ni tampoco hay ejemplos que la contradigan, ni se sabe que hayan consecuencias falsas. Las conjeturas nacen del deseo de reconocer una ley general cuando aún está brotando”.

Agrega además: “Conjeturar es la columna vertebral del razonamiento matemático: se piensa que una cierta propiedad tiene que ser verdadera y una conjetura sobre ella surge como un vago sentimiento en el fondo de la mente. Si se descubre que es falsa, se modifica o se abandona. Si se puede justificar convincentemente, entonces pasa a ocupar su lugar en el conjunto de conjeturas”

5.3.5.3. Lenguaje matemático y resolución de problemas que implican generalización

Intentar resolver un problema matemático, sin conocerse el conjunto de símbolos y expresiones propios del lenguaje matemático necesarios para modelar e interpretar correctamente los planteamientos numéricos y verbales en que estos son presentados, es algo difícil, y es uno de los factores que inciden en el no desarrollo del pensamiento matemático.

Según Resnik y Ford (citado por Beyer W. 1998). Uno de los principales factores que afectan la enseñanza – aprendizaje de la matemática es el lenguaje matemático, porque este permite formalizar, precisar, simplificar las ideas y conceptos abstractos, evitando las diferentes interpretaciones causadas por el lenguaje coloquial.

Poder leer, escribir e interpretar el lenguaje formal matemático es condición necesaria para que el estudiante pueda comprender el discurso matemático necesario para resolver situaciones que van más allá del simple planteamiento de casos particulares, es decir, de casos que conllevan generalización matemática.

Afirma también Pim (En Beyer W. 1998) Que el uso de sistemas de códigos y símbolos en el área matemática, como ciencia exacta, permite expresar ideas con alto grado de precisión. Esto conlleva a que los estudiantes, al no interpretarlos correctamente, fracasen en su intento de solución, convirtiéndose así, la matemática en un área de alta dificultad para su interpretación y comprensión.

Las matemáticas, siendo una ciencia exacta contiene un sistema de códigos y símbolos que permiten expresar las ideas de una forma muy singular y precisa, lo que la hace algo difícil para muchos estudiantes, y las dificultades se agrandan cuando el profesor no utiliza en su enseñanza este lenguaje de una manera apropiada, o no hace hincapié en el significado de las expresiones matemáticas. Si al estudiante no se le explica bien el significado de la simbología y del lenguaje formal utilizado en un determinado problema y de su utilización adecuada en su resolución, es poco lo que se avanza en este tipo de aprendizaje.

5.3.6. LAS SITUACIONES PROBLEMA COMO METODOLOGÍA PARA RESOLVER ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN MATEMÁTICA.

Algunos autores plantean que la mejor manera de llevar al aula temas que involucran procesos generales de pensamiento, es a través de las situaciones problemas. "...la situación problema, al propiciar espacios que permitan particularizar, conjeturar, verificar y argumentar (elementos característicos del pensamiento matemático), se convierte en escenario natural para el camino a la generalización." (Obando G. y Múnera J. 2003, 187). Llevar al aula de clase el tema de la generalización matemática, utilizarla en resolución de problemas, y conseguir una verdadera movilización del pensamiento matemático de los estudiantes sólo se puede lograr a través de situaciones problema diseñadas estratégicamente. La situación problema dinamiza la actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos.

Una situación problema es un espacio de diálogo y discusión, en donde se hace un intercambio de interrogantes, ideas e informaciones, tendientes al estudio detallado de un tema determinado. Se puede aplicar en las diferentes materias que se imparten en los colegios, su principal virtud en la aplicación en el aula, es que permite la participación activa tanto de los docentes como de los alumnos y la interrelación de las diferentes áreas del conocimiento.

En el área de las matemáticas una situación problema se presenta como un espacio pedagógico que posibilita el desarrollo de actividades que promueven la construcción y simbolización de conceptos y la aplicación de procesos algorítmicos y analíticos en la resolución de problemas matemáticos. Parafraseando al profesor Orlando Mesa: es un espacio para generar y movilizar procesos de pensamiento que permitan la construcción de aprendizajes matemáticos.

En los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN. 1998, 41) se resalta el planteamiento que hace Miguel de Guzmán (1993): "La enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto, dejar aun lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamientos eficaces".

A diferencia del modelo didáctico tradicional de enseñanza – aprendizaje (transmisión - recepción), las interacciones entre el estudiante, el contenido y el profesor deben ser consideradas como las grandes artífices del proceso, a través de una construcción del conocimiento ya establecido, el profesor debe tomar la iniciativa en la propuesta de ideas y en la búsqueda de alternativas que lleven a resolver los interrogantes que se vayan originando en tal construcción.

El contenido científico a enseñar debe ser procesado al máximo, nunca darse como algo terminado, por el contrario, siempre será susceptible de ampliación y profundización. Además, deben organizarse coherentemente, de modo que la construcción de los más elementales anteceda a los contenidos más complejos o de mayor análisis. El profesor juega un papel mas o menos secundario en el aprendizaje, dependiendo de las distintas opciones o variantes que se presenten durante el proceso. Es el encargado de mantener el interés en la actividad desarrollada, planteando nuevas preguntas que amplían el horizonte de la discusión y acompañando oportunamente las respuestas y las inquietudes. Un proceso de enseñanza – aprendizaje como situación problema involucra a los alumnos en su propio proceso, si somos capaces de que el alumno sea el protagonista de su propio aprendizaje y que juegue un rol activo dentro de él (constructor de conocimiento). “Sería ingenuo, en términos de Miguel de Guzmán, que nuestros estudiantes descubran en un par de semanas lo que la humanidad construyó durante largos siglos de trabajo intenso. Pero es cierto que la búsqueda orientada, posibilitando el placer de descubrir es uno de los logros de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, de estrategias útiles de pensamiento para el saber en cuestión y de su transmisión a los alumnos (Munera Córdoba J.J y Builes Gil G. 2000)

Toda situación problema necesita de un motivo o actividad inicial que de origen a la red de interrogantes y conceptos que permitan construir el tema requerido. Este motivo debe ser un problema que desencadene procesos de pensamiento. “Un problema clásico puede ser mediador para desencadenar aprendizajes significativos. Una de las dificultades en este campo, es que la solución de problemas ha sido llevada a cabo, al final de la presentación teórica del tema, a manera de ejercicios de aplicación, y lo que es peor resueltos a través de estrategias aceptados e impuestos” (Munera J.J y Builes G. 2000). Al afrontar un problema en un contexto adecuado, los alumnos desarrollan la capacidad de analizar dicho problema y de organizar la información. Las estrategias intuitivas que desarrollan pueden constituir un buen punto de partida natural hacia la evolución de las matemáticas más formales, de la búsqueda de sentido.

5.3.6.1. Pautas para el diseño de situaciones problemas en matemáticas.

Entre los elementos que el profesor Mesa (1994), de acuerdo con su interpretación de la pedagogía activa, propone para abordar el diseño de situaciones problema para el aprendizaje matemático, están: la selección de un motivo o problema inicial, la selección de preguntas y actividades fundamentales, la estructuración de niveles de conceptualización, y la evaluación.- (Munera J.J. y Builes G. 2000)

Organización básica de los contenidos: Este elemento consiste, no sólo en seleccionar y jerarquizar los contenidos, sino en establecer relaciones entre los conceptos, a modo de redes conceptuales. Entendiéndose por red conceptual como una especie de malla donde los nudos son el centro de las distintas relaciones existentes entre los conceptos asociados a los contenidos temáticos que la situación permite trabajar. La red de relaciones entre conceptos y estructuras matemáticas es inagotable, permite generar continuamente nuevos procedimientos y algoritmos. La estructura y desarrollo de la misma dinamiza el currículo de la matemática, en el sentido que elimina el carácter absoluto y acabado de las temáticas.

Selección de un motivo o problema inicial: Este necesita de un profundo análisis por parte del docente, ya que todos los objetos o problemas no cumplen en si mismos, la función de ser mediadores de aprendizaje, es la mirada y la concepción del maestro que otorga o aprovecha un medio y lo transforma en mediador a partir de las actividades, las instrucciones, las preguntas y problemas que organiza y propone en torno al objeto o situación.

El problema inicial debe ser de tipo creativo y diseñarse de manera que incluya unidades conceptuales ya construidas por los alumnos en procesos anteriores y que sean necesarias para la construcción de la nueva unidad conceptual aún no aprendida por el estudiante.

La selección de preguntas y actividades fundamentales: Cuando el docente planea una situación problema, hace una descripción minuciosa de todos los elementos de esta, para que pueda llegarse con éxito a la meta propuesta, aún sabiendo que el desarrollo de la situación no se puede predeterminar con precisión; muchas de las actividades que se realizan surgen de la necesidad y la oportunidad para que los estudiantes comuniquen sus ideas matemáticas, y el profesor debe guiar, escuchar, discutir, sugerir y clasificar el trabajo de los alumnos a través de estas actividades, debe inducir por medio de preguntas. La pregunta es un componente obligado en esta forma de enseñanza y se puede considerar como la expresión lógica del problema y el motor que impulsa al sujeto a la solución del mismo.

La pregunta problémica: Tanto la situación problémica, como el problema central son abordados a través de preguntas, la pregunta se erige en el elemento de trabajo. El problema se desglosa en preguntas que orientan en el hallazgo y análisis de aquellos hechos necesarios para su solución. La pregunta problémica conduce a la reflexión del estudiante en la búsqueda de un conocimiento nuevo; ellas aparecen cuando las explicaciones al problema general se han agotado.

Niveles de conceptualización: Se presentan dos niveles fundamentalmente: un nivel de particularización, donde el estudiante plantea situaciones basado en cantidades concretas, este es el que regularmente, la mayoría de estudiantes alcanzan; y un nivel de abstracción o generalización, donde se hace la construcción formal de la teoría matemática propuesta como objetivo inicial.

Evaluación: El resultado obtenido en una situación problema se interpreta normalmente en términos de descubrimiento y puede basarse en el trabajo individual o en el trabajo colectivo. El trabajo individual se puede evaluar de acuerdo con su actitud, su interés, participación, su capacidad para asimilar y comprender informaciones y procedimientos, su inventiva para buscar nuevos métodos o respuestas a las situaciones presentadas. La evaluación del trabajo grupal puede hacerse con relación a la participación del grupo estudiantil y al tiempo requerido para llegar a la meta deseada.

Algunos elementos propuestos por el profesor Orlando Mesa para la evaluación son:

- Los cambios que se presentan en las concepciones mediante la participación activa de los estudiantes durante la construcción de los conocimientos.
- El estado de conceptualización alcanzado frente a los saberes formales
- Las formas de comunicación de concepciones y conceptos.
- La capacidad para aplicar conocimientos adquiridos.
- Las estrategias y procedimientos utilizados para plantear y resolver problemas, referentes al problema inicial.

5.3.7. CONSIDERACIONES SOBRE EL APRENDIZAJE

Los investigadores en didáctica de la matemática han sostenido que las creencias o ideas previas que traen los alumnos a la clase de matemáticas están tan ancladas en la mente de los estudiantes, que es muy difícil erradicarlas para sustituirlas por conocimiento formal. Efectivamente, según la teoría Ausbeliana sobre aprendizaje significativo, cada sujeto se apropia de aquello que se le enseña en la medida en que este nuevo conocimiento tenga un significado con lo que ya sabe.

Para Ausubel (1976), es en el aprendizaje en donde el alumno relaciona lo que ya sabe con los nuevos conocimientos, es decir sus experiencias representan un factor de mucha importancia. Es por ello que el docente debe enfocar su labor facilitadora hacia estas experiencias y enseñar a consecuencia de lo que descubra sobre lo que el alumno ya conoce. Para la matemática este tipo de aprendizaje puede representar un modo eficaz para lograr que los conocimientos sean aprendidos significativamente con base en las experiencias del alumno. Estas experiencias en términos de la generalización matemática, corresponden a los casos particulares que el alumno comprende y maneja con eficacia en la resolución de problemas, partiendo de esto, se puede lograr avanzar hasta estructuras más complejas. Ello significa que antes del aprendizaje de un concepto matemático el docente debe explorar lo que el alumno conoce sobre el tema, solo así determinará si los conocimientos previos le permitirán construir con mayor facilidad los nuevos conocimientos e integrarlos a sus estructuras cognitivas.

Ahora, en cuanto al procesamiento mental de la información, la ciencia cognitiva sugiere que las personas, lo hacen en forma de representaciones[6]; propone que las personas tienen procedimientos mentales que operan sobre las representaciones mentales para producir pensamiento y acción. La idea

---

[6] GODINO, Juan D. Marcos Teóricos de Referencia sobre la Cognición Matemática. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. España. 2002. Pág. 17 – 24. http://www.ugr.es/local/jgodino/

central es que la mente debería entenderse en términos de representaciones mentales y procesos con esas representaciones, en las cuales “predominan los constructos que designan los conocimientos del sujeto (representaciones mentales o internas) y sus relaciones con los objetos ostensivos (notaciones, símbolos, gráficos, materiales manipulativos, etc.), que se consideran como representaciones externas de los conocimientos individuales”[7].

Los sistemas de representaciones externas comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas tales como la numeración en base diez, notación formal algebraica, la recta numérica real, la representación en coordenadas cartesianas. También se incluyen entornos de aprendizaje, como los que utilizan materiales manipulativos concretos, o figurados como los basados en el uso de ordenadores. Se considera que una representación es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo (simbolizar, codificar, dar una imagen o representar).

Algunos sistemas de representación externos son principalmente notacionales y formales, como los sistemas de numeración, escritura de expresiones algebraicas, convenios de expresión de funciones, derivadas, integrales, lenguajes de programación, etc. Otros sistemas externos muestran relaciones de manera visual o gráfica, como las rectas numéricas, gráficos basados en sistemas cartesianos o polares, diagramas geométricos; las palabras y expresiones del lenguaje ordinario son también

[7] Ibíd. 17

representaciones externas.

Se consideran representaciones internas los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas, el lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y heurísticas de resolución de problemas, y también sus afectos con relación a las matemáticas.

Se considera que la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje. El interés primario del proceso de instrucción se centra sobre la naturaleza de las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes.

Las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, o la producción de representaciones externas. Se considera útil pensar que lo externo representa lo interno y viceversa. Un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas.

Los científicos cognitivos han adoptado en forma sistemática la teoría de las representaciones mentales como la principal teoría que ha contribuido a la comprensión de la mente. Desde sus diferentes campos han proporcionado contribuciones para la comprensión de las diversas funciones mentales importantes. Entender como funciona la mente es importante para muchas actividades prácticas. Para los educadores, conocer la naturaleza del pensamiento de sus estudiantes y como asimilan el conocimiento, les permite diseñar las mejores estrategias de enseñanza con el fin que sus alumnos adquieran aprendizajes significativos. Entender un problema matemático es poder hacer mentalmente una representación de la situación que plantea el problema, esto es, tener en la mente un modelo de lo que este dice. Después de que el alumno ha hecho esto el paso hacia la abstracción se torna más simple.

En conclusión, en lo que respecta al aprendizaje, el desarrollo de la capacidad del alumno para plantear generalizaciones, estará supeditada a la capacidad de este, para hacer representaciones mentales sobre el problema a resolver.

Con los referentes planteados, desde el punto de vista conceptual, cognitivo y didáctico, se tiene la plataforma teórica que permitirá diseñar una metodología pertinente para implementar actividades de generalización que movilicen el pensamiento lógico – matemático de los estudiantes de 9° grado de educación básica del colegio INEM José Félix de Restrepo como estrategia de aprendizaje en el álgebra elemental.

6. METODOLOGÍA

En el presente trabajo, que presenta como objetivo principal desarrollar habilidades de pensamiento lógico - matemático en los estudiantes de noveno grado de educación básica del INEM José Félix de Restrepo con actividades que involucran situaciones de generalización como estrategia para la enseñanza – aprendizaje del álgebra elemental, se ha diseñado hasta el momento un marco teórico desde lo conceptual, didáctico y cognitivo, que permitan llevar a cabo una propuesta metodológica compuesta principalmente por una prueba inicial, intervención pedagógica y prueba final, y luego analizar los logros alcanzados en cuanto a lo propuesto.

La propuesta se realiza ajustada al marco de las situaciones problema. Estas se presentan como una buena estrategia para movilizar el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato: desarrollar sus capacidades para establecer conjeturas y generalizaciones, aplicar procesos algorítmicos, definir variables, establecer relaciones, descubrir reglas de formación y resolver problemas. La situación problema como estrategia de intervención pedagógica: “Es un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático” (Mesa, 1994).

La investigación es un estudio experimental con un solo grupo, mediante la comparación de las manifestaciones o comportamientos del alumno en un estado inicial antes de la intervención pedagógica y un estado final posterior a ésta, proponiendo de esta manera actividades que favorezcan aprendizajes significativos y permitan analizar la movilización del pensamiento lógico – matemático y la construcción de significados pertinentes a la generalización matemática. Se concibió este tipo de investigación como el análisis sistemático de problemas en la realidad escolar en el área de matemáticas con el propósito de describirlos, interpretarlos y aplicar estrategias de solución.

La población con la cual se trabaja el proyecto son los alumnos de grado 9º de la Institución Educativa INEM José Félix de Restrepo de la ciudad de Medellín. La muestra es un grupo de 25 estudiantes escogidos al azar de entre todos los novenos de la institución, conformada por 14 varones y 11 mujeres, con los cuales se trabajó desde 19 de Marzo hasta el 27 de Agosto de 2004, los sábados en un horario de 10:00 a 12:00 a.m. Son estudiantes que están en plena adolescencia con un promedio de edad de 14 años correspondiente con la etapa de pensamiento formal, sus integrantes habitan en distintos sectores de la ciudad y son poseedores de características muy similares al del común de los estudiantes del bachillerato.

En la investigación se utiliza como instrumento de medición el test o prueba escrita, diseñada de tal forma que permita observar las formas de razonar de los estudiantes en los procesos de generalización, las estrategias que utilizan y como comunican sus observaciones en lenguaje matemático; y se presenta desde tres fases: la **prueba inicial** que nos indica las dificultades del estudiante para generalizar, la **intervención pedagógica** que permite corregir las falencias encontradas en la prueba inicial y una **prueba final** que demuestra que los estudiantes superaron tales dificultades.

La prueba inicial se hace en forma individual y se registran los resultados de los 25 alumnos del grupo 9º de educación básica. La prueba inicial está conformada por 5 problemas, cada uno estructurado de manera que se puedan evidenciar las tres etapas por las que debe pasar todo proceso de generalización: ***ver, describir y registrar*** y los aspectos que caracterizan cada una de las etapas: ***particularizar*** en la etapa ver, descubrimiento de ***reglas de formación*** en la etapa describir, ***definición de variables planteamiento de relaciones*** y ***formulación de la generalización*** en la etapa registrar. Los problemas fueron seleccionados de manera tal que reunieran ciertos requisitos: novedosos para los alumnos, interesantes en su contenido, motivantes, expresados en lenguaje sencillo y familiar, niveles de dificultad accesibles al tipo de estudiantes y de cierto modo desafiantes para ser resueltos. Es de notar que en cada uno de los problemas era tenido en cuenta de manera especial su proceso de solución, dado que sólo así es posible saber cómo el alumno aborda cada problema, cómo define las variables, qué manejo hace de los símbolos, cómo establece relaciones, cómo establece conjeturas, cómo verifica la validez de su solución, etc.

La intervención pedagógica se lleva a cabo mediante la estrategia didáctica de las situaciones problemas, en ella se propone un problema complejo como motivo inicial de manera que se puedan desarrollar y analizar cada una de las etapas y aspectos propuestos en la prueba inicial. En su mayor parte, los estudiantes son orientados a través de toda la situación mediante preguntas problémicas para que sean ellos mismos los que descubran lo que corresponde a cada etapa y aspecto.

La prueba final tiene la misma forma que la prueba inicial y está constituida por 5 problemas de contextos similares a los de esta. A diferencia de la prueba inicial donde se dan una serie de pautas para que el estudiante reconozca la etapa y conteste lo referente a cada aspecto, en esos problemas sólo se dará el enunciado, esto con el fin de no encasillar al estudiante a realizar siempre lo dispuesto por el profesor, que tenga pensamiento libre y se note la habilidad que tienen algunos para pasar de una etapa a la otra con sus propias estrategias.

En cada una de las fases descritas, en los problemas propuestos, se han utilizado contextos geométricos y aritméticos; los primeros, para analizar que tan importante puede ser para el estudiante la manipulación de la información tanto como la percepción de las características de la situación por medio de gráficos y dibujos, por su parte, las series numéricas permitirán analizar la ventaja y el aprovechamiento de la experiencia de los estudiantes en el trabajo con los números y sus propiedades y que tan importante puede ser la organización que se le den a los datos por medio de tablas u otras disposiciones. Los contenidos presentes en cada fase se clasifican en cognoscitivos y procedimentales:

1. Cognoscitivos: comprensión conceptual relacionada con los siguientes temas:

- Aritmética elemental
- Geometría elemental.
- Álgebra elemental

2. Procedimentales:

- **Ver**
  - Particularizar
- **Describir**
  - Descubrimiento de patrones y reglas de formación
- **Registrar**
  - Definición de variables
  - Establecimiento de relaciones
  - Formulación de la generalización.

Los aspectos cognoscitivos se refieren a los conceptos que se pondrán en juego en los diferentes problemas que se resolvieron en cada una de las etapas de la metodología. Ya sea que el estudiante los sabe y los pueda aplicar en el momento que los necesite o por que se le tengan que enseñar como parte del desarrollo de una situación.

Los procedimentales se refieren a los procesos o etapas que el estudiante debe cumplir para poder establecer generalizaciones. Mas que procedimientos son habilidades que el estudiante debe adquirir al término de la intervención, de manera que interiorice el proceso de generalización como herramienta útil en la resolución de problemas.

En la primera y tercera fase se realizan también, los análisis estadísticos: Cuantitativo y cualitativo sobre los resultados arrojados en las dos pruebas; se compararán estos entre sí mediante gráficos de barras lo cual nos dirá en que proporción o medida la intervención pedagógica tuvo éxito.

Veamos el desarrollo de cada fase:

PRUEBA INICIAL:

La presente prueba tiene como objetivo principal, además de permitir desarrollar habilidades de pensamiento lógico - matemático con las actividades de generalización que se presentan, establecer niveles en la habilidad para establecer generalizaciones en los estudiantes de 9° de educación básica del INEM.

Para la aplicación de la prueba inicial se seleccionaron 5 problemas de manera que reunieran ciertos requisitos y sirvieran para detectar la habilidad del estudiante en los aspectos procedimentales mencionados, además de que se pudieran evidenciar las etapas propuestas por Mason cuando se resuelven problemas de generalización: la etapa del *ver* se presenta cuando se pide al estudiante que particularice con números o que represente por medio de gráficos los primeros elementos de las secuencias hasta descubrir la regularidad, configuración o patrón del problema dado; la etapa del *describir* aparece cuando se pide al estudiante que enuncie en la secuencia las reglas de formación o las relaciones que observa en forma verbal y la etapa del *registrar* se evidencia cuando se pide organice los resultados, que defina variables y que establezca simbólicamente las relaciones encontradas, así mismo cuando se pide una fórmula general para resolver la situación. Estos problemas son enunciados en un lenguaje sencillo, de fácil comprensión para el estudiante y de un nivel adecuado para el grado y el tipo de estudiantes con los cuales se trabaja.

En cada problema se hace una serie de preguntas relacionadas con los aspectos por evaluar y que de alguna manera sirven de guía en la solución del problema. No se le darán parámetros al estudiante para nombrar las variables o establecer relaciones, cada uno lo hace de acuerdo con sus conocimientos y habilidades matemáticas. Además, inicialmente no se hará exigencia de un lenguaje simbólico y refinado, el estudiante puede utilizar, de acuerdo con su capacidad, desde expresiones escritas en lenguaje verbal hasta expresiones en simbología matemática.

Los problemas de la prueba inicial fueron:

1. Elija tres números enteros consecutivos, multiplique el primero por el tercero, eleve el segundo al cuadrado, reste el primer resultado del segundo.
   - Hágalo para varias tripletas de números.
   - Describe las características que encuentras entre los números que conforman cada terna.
   - Enuncie la regularidad presentada en forma verbal. ¿Por qué sucede esto?
   - Escriba la regularidad en forma de una relación simbólica. ¿qué variables puedes utilizar?
   - Enuncie la ley general para el problema.
   - Hágalo para números mayores que 100.

2. Suma los cuadrados de dos números enteros consecutivos con el cuadrado del producto entre estos. ¿Es el resultado un cuadrado perfecto? ¿Que número obtuviste?
   - Particulariza con los primeros números naturales: 1 y 2; 2 y 3; etc.
   - Hazlo para otros números más grandes. Describe lo que pasa en estos casos particulares.
   - Describe en forma verbal la situación presentada.
   - Simboliza las relaciones descritas.

- ¿Cuál es la regla general del problema?
- Hazlo para números mayores de 100

3. 50 personas se encuentran en una reunión y se saludan entre sí. Cuantos saludos hubo en total?[8]
   - ¿Si el encuentro fuera de dos personas, cuántos saludos surgirían?
   - ¿Y si fuera de 3, 4 y 5 personas? Describe lo que pasa
   - ¿Hay alguna regularidad entre los resultados obtenidos? Descríbela verbalmente.
   - Simboliza la relación encontrada. ¿Qué variables necesitas?
   - ¿Cual es la ley general para encontrar el total de saludos para cualquier número de personas.?
   - ¿Cuál es el total de saludos para 10 personas? ¿Y para 50?

4. De acuerdo con el número de lados de los polígonos, hallar el número de diagonales de estos[9].
   - Hazlo para los primeros tres polígonos. Describe cada situación. Puedes ayudarte de su representación geométrica.
   - Enuncia verbalmente la regla de formación del número de diagonales para los polígonos anteriores.
   - Simboliza las relaciones encontradas.

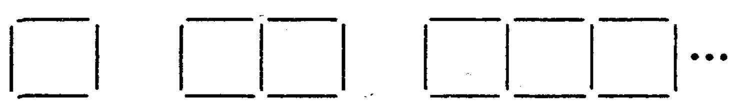
---

[8] Problema tomado y modificado de John Jairo Múnera. Las situaciones problema en la matemática escolar. Documento de trabajo en II Jornadas de talleres de Matemáticas y Física 2003.
[9] Problema tomado y modificado de John Jairo Múnera. Las situaciones problema en la matemática escolar. Documento de trabajo en II Jornadas de talleres de Matemáticas y Física 2003.

- Que ley general se puede escribir para el número de diagonales de un polígono de cualquier número de lados?
- Encuentre el número de diagonales de un polígono de 200 lados, de 300 lados

5. ¿Cuantos palillos de igual longitud se necesitan para construir un cuadrado de un palillo por cada lado?
   - ¿Para construir dos cuadrados consecutivos? ¿Para construir 3? Describe los casos particulares.
   - ¿Cuál es la regla de formación? Simbolízala.
   - ¿Cuál es la formulación general que resuelve el problema?
   - ¿Cuántos se necesitan para construir 1000 cuadrados?

   Observa el dibujo:



6.1.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS PRUEBA INICIAL.

Antes de hacer cualquier análisis de los resultados obtenidos en cada uno de los problemas de la prueba inicial, se muestran los parámetros utilizados para calificarlas:

En cada uno de los problemas se hace una serie de preguntas, las cuales dan cuenta de cada uno de los aspectos que caracterizan las etapas del proceso de generalización:

Ver: *Particularización*

Describir: *Descubrimiento de patrones* y *reglas de formación*

Registrar: *Definición de variables, establecimiento de relaciones y formulación de la generalización.*

Cada uno de estos aspectos, de acuerdo con lo que el estudiante conteste, será calificado así:

0 puntos si su respuesta es totalmente errada o dejó de contestarla.

5 puntos si su respuesta, en parte, presenta errores - pueden ser de procedimiento o de falta de atención – pero en su mayoría es correcta (por ejemplo cuando un estudiante particulariza puede equivocarse en algún caso específico pero acertar en los demás)

10 puntos si la respuesta es completamente correcta.

En los resultados presentes se tienen los siguientes puntajes:

- Puntaje en cada aspecto evaluado en cada uno de los problemas.
- Puntaje en cada una de las etapas: En la etapa registrar se tienen tres aspectos, el puntaje de esta etapa en cada problema se obtiene sumando y dividiendo por tres.
- Puntaje en cada uno de los problemas: Se obtiene sumando cada aspecto y dividiendo por 5.
- Puntaje total en cada aspecto evaluado: Se obtiene sumando el respectivo puntaje de cada aspecto en cada problema y dividiendo por 5.
- Puntaje total en cada etapa: Se obtiene sumando el respectivo puntaje en

cada etapa en cada problema y dividiendo por 5.

– Puntaje total de los problemas: Se obtiene sumando el respectivo puntaje en cada problema y dividiendo por 5.

Tanto en la prueba inicial como en la final los resultados que se obtienen son considerados en forma grupal, es decir, es el grupo completo el que obtiene un resultado positivo o negativo en la prueba, no se analizan puntajes individuales alcanzados por estudiantes ya que no se evalúan variables particulares por no ser objetivo de la investigación.

Un puntaje obtenido se considera positivo si es igual o superior al 60% del puntaje total posible, es decir, con una calificación de 6 puntos, se pone de tope este puntaje debido a que es un indicativo de que el estudiante generaliza pero comete errores que se pueden corregir con facilidad.

En cada una de las pruebas se realizan dos tipos de análisis:

Un análisis cuantitativo que de cuenta de los puntajes obtenidos en cada prueba, si fue superada o no, en que porcentaje se superó y el porque de estos resultados.

Un análisis cualitativo que da cuenta sobre las formas de razonar de los estudiantes en los procesos de generalización, las estrategias que utilizan y como comunican sus observaciones en lenguaje matemático, además de los errores que se cometen cuando se generaliza.

A continuación se presentan dos tablas de resultados y su respectivo comentario acerca de los resultados:

En la tabla 1 se tiene el puntaje obtenido (de 0 a 10) por cada estudiante en cada aspecto evaluado en cada una de las etapas y problemas.

En la tabla 2 se muestra la suma de puntos de cada estudiante en cada uno de los problemas, en los aspectos evaluados y en las etapas del proceso de generalización, como cada uno de los cinco aspectos se calificó de 0 a 10, la suma dará un número comprendido entre 0 y 50. Se muestra además, la suma de estos puntajes, el promedio y el puntaje obtenido por el grupo en cada problema, aspecto evaluado y etapa.

Se utilizó la siguiente simbología:

N° E: Número de encuesta.

Cada problema se enumeró del 1 al 5: P1, P2, P3, P4, P5

VER, DES Y REGISTRAR: Corresponde a las etapas de Ver, Describir y Registrar, respectivamente.

P, F, V, R, G: Corresponde a los aspectos de particularización, establecimiento del patrón o la regla de formación en forma verbal, definición de variables, simbolización de las reglas enunciadas (establecimiento de relaciones) y formulación de la generalización, respectivamente.

SUMA: Suma Total de puntos

PROM: Promedio

PUNT: puntaje

N° E	PROBLEMA 1					PROBLEMA 2					PROBLEMA 3					PROBLEMA 4					PROBLEMA 5				
	VER1	DES1	REGISTRAR1			VER2	DES2	REGISTRAR2			VER3	DES3	REGISTRAR3			VER4	DES4	REGISTRAR4			VER5	DES5	REGISTRAR5		
	P1	F1	V1	R1	G1	P2	F2	V2	R2	G2	P3	F3	V3	R3	G3	P4	F4	V4	R4	G4	P5	F5	V5	R5	G5
1	5	5	5	5	0	5	0	0	0	0	10	5	5	0	0	5	0	0	0	0	10	5	0	0	0
2	10	10	10	10	5	10	10	10	10	5	10	10	10	5	0	10	10	10	10	5	10	10	10	5	5
3	5	5	0	0	0	10	5	5	0	0	10	5	5	0	0	10	10	10	5	0	10	10	10	5	5
4	5	0	5	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	5	0	0	0	0	10	5	0	0	0
5	10	10	5	0	0	10	10	5	0	0	10	10	5	5	0	5	0	0	0	0	10	10	10	5	5
6	10	10	0	0	0	5	0	0	0	0	5	0	0	0	0	10	5	5	5	0	10	10	0	0	0
7	10	10	10	10	5	10	5	10	10	5	10	5	10	10	5	10	10	10	5	0	10	10	10	10	10
8	10	5	5	0	0	10	0	0	0	0	5	5	0	0	0	10	5	5	0	0	10	10	5	5	0
9	5	0	5	0	0	10	10	5	0	0	10	10	10	5	0	10	10	10	5	0	10	10	10	5	5
10	10	10	5	5	0	5	0	10	0	0	10	10	10	5	5	10	5	5	5	0	10	10	5	5	0
11	10	5	5	5	0	10	10	10	5	0	10	10	10	5	0	10	10	10	0	0	10	10	10	10	10
12	10	5	5	0	0	10	10	10	5	0	5	0	0	0	0	10	5	5	0	0	10	10	0	0	0
13	10	10	10	10	0	10	5	5	0	0	10	5	5	0	0	5	0	0	0	0	10	10	5	5	0
14	10	5	5	0	0	10	10	10	0	0	10	10	10	10	5	5	0	0	0	0	10	5	0	0	0
15	0	0	0	0	0	5	5	0	0	0	10	5	5	5	0	5	0	0	0	0	10	5	0	0	0
16	10	5	5	5	0	10	5	5	0	0	10	5	5	5	0	10	10	5	5	0	10	10	10	5	5
17	10	5	5	5	0	5	10	10	10	5	10	5	0	0	0	10	5	5	0	0	10	10	5	5	5
18	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	5	0	5	0	0	0	0	10	10	5	5	0
19	10	5	5	0	0	10	10	10	5	0	10	10	10	10	5	10	10	10	10	5	10	10	10	10	10
20	5	10	10	5	0	10	10	10	10	5	5	0	0	0	0	10	5	5	5	0	10	10	10	5	5
21	10	5	5	0	0	5	0	0	0	0	5	5	5	5	0	10	5	5	0	0	10	5	5	0	0
22	5	5	5	5	5	10	5	10	0	0	10	5	5	0	0	10	5	10	5	0	10	10	10	5	0
23	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	10	10	5	5	0	10	5	5	0	0	10	5	5	5	0
24	10	10	10	5	0	10	5	5	0	0	10	5	5	5	0	5	0	0	0	0	10	10	5	5	0
25	5	5	5	5	0	10	10	10	5	0	10	10	10	10	5	10	10	10	5	0	10	10	10	5	0
SUM	190	145	130	75	15	195	135	140	60	20	220	170	140	95	30	210	125	125	65	10	250	220	150	105	65
PROM	7,6	5,8	5,2	3	0,6	7,8	5,4	5,6	2,4	1,2	8,8	6,8	5,6	3,8	1,2	8,4	5	5	2,6	0,4	10	8,8	6	4,2	2,6

Tabla 1

N° E	P1	P2	P3	P4	P5	P	F	V	R	G	VER	DES	REG	PROM
1	20	5	20	5	15	35	15	10	5	0	35	15	5	13
2	45	50	40	45	40	50	50	50	40	30	50	50	40	44
3	10	20	20	35	40	45	35	30	10	5	45	35	15	25
4	10	0	5	5	15	25	5	5	0	0	25	5	1,7	7
5	25	25	30	5	40	45	40	25	10	5	45	40	13,3	25
6	20	5	5	25	20	40	25	5	5	0	40	25	3,3	15
7	45	40	40	35	50	50	40	50	45	25	50	40	40	42
8	20	10	10	20	30	45	25	15	5	0	45	25	6,7	18
9	10	25	35	35	40	45	40	40	15	5	45	40	20	29
10	30	15	40	25	30	45	35	35	20	5	45	35	20	28
11	25	35	35	30	50	50	45	45	25	10	50	45	26,7	35
12	20	35	5	20	20	45	30	20	5	0	45	30	8,3	20
13	40	20	25	5	30	45	35	25	15	0	45	35	13,3	24
14	20	30	45	5	15	45	30	25	10	5	45	30	13,3	23
15	0	10	25	5	15	30	15	5	5	0	30	15	3,3	11
16	25	20	30	30	40	50	40	30	20	5	50	40	18,3	29
17	25	40	15	20	35	45	35	25	20	10	45	35	18,3	27
18	15	0	35	5	30	30	25	20	10	0	30	25	10	17
19	20	35	45	45	50	50	45	45	35	20	50	45	33,3	39
20	30	50	5	25	40	40	35	35	25	15	40	35	25	30
21	20	5	20	20	20	40	20	20	5	0	40	20	8,3	17
22	25	25	25	30	35	45	35	40	15	5	45	35	20	28
23	0	5	30	20	25	35	20	15	10	0	35	20	8,3	16
24	35	20	25	5	30	45	30	25	15	0	45	30	13,3	23
25	20	35	45	35	35	45	45	45	30	5	45	45	26,7	34
SUMA	555	560	655	535	790	1065	795	685	400	150	1065	795	411	619
PROM	22	22	26	21	32	42,6	31,8	27	16	6	42,6	31,8	16,5	24,76
PUNT	4,4	4,5	5,2	4,3	6,3	8,52	6,36	5,5	3,2	1,2	8,52	6,36	3,29	4,952

TABLA 2

En la tabla 1 se observa, en el renglón de los promedios, un buen desempeño del grupo en la primera columna de cada problema correspondiente a la etapa *ver* y al aspecto de *particularización*: 7,6; 7,8; 8,8; 8,4 y 10, respectivamente; en las demás columnas el rendimiento es bajo, casi todos por debajo del límite de aprobación. De acuerdo con la caracterización que se hizo de las etapas en el marco teórico, se observa que los estudiantes son más diestros en el trabajo con casos particulares, están habituados al aprendizaje de la matemática por medio de ejemplos concretos y no a casos generales.

En la tabla 2 se observa, en el renglón de los promedios, que el mejor puntaje se dio en el problema 5 con 6,3; esto puede deberse a la experiencia adquirida por los estudiantes en los demás problemas, lo que les ayuda a entender el objetivo de la prueba y también porque este es un problema que involucra sólo expresiones lineales. De los aspectos que se evaluaron presentan mejor desempeño la particularización y las reglas de formación (correspondientes a las etapas ver y describir) con 8,52 y 6,36, respectivamente, etapas en las que están habituados a trabajar en la solución de problemas.

A continuación se presentan 4 gráficos estadísticos en los cuales se comparan diferentes aspectos de las tablas anteriores que ayudan a sacar conclusiones de las pruebas realizadas.

Los gráficos son los siguientes:

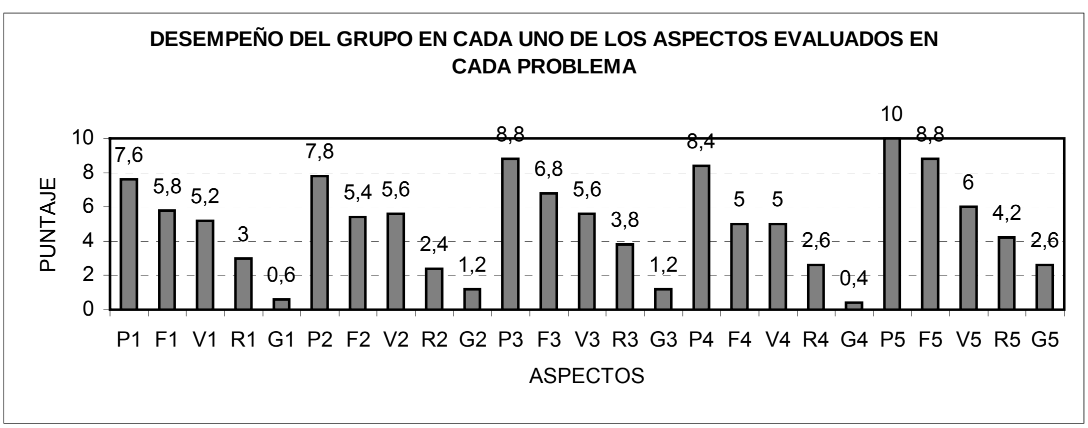


GRÁFICO 1

Muestra el desempeño del grupo en cada uno de los aspectos evaluados de cada problema: Se muestra en el eje *y* el puntaje de 0 a 10 y en el eje *x* el aspecto evaluado en cada problema. El gráfico muestra el buen desempeño del grupo de estudiantes en la particularización con puntajes de 7,6; 7,8; 8,8; 8,4 y 10. Y un gran descenso en los demás aspectos, llegando a ser muy bajo en la formulación de la generalización: 0,6; 1,2; 1,2; 0,4 y 2,6. De entre todos los problemas el de mejores puntajes es el quinto, en los cinco aspectos que se evaluaron se observa un ascenso en el rendimiento, además, es en el único problema donde la totalidad de los estudiantes responden acertadamente al aspecto de particularización y pasan de 8 puntos en el de reglas de formación.

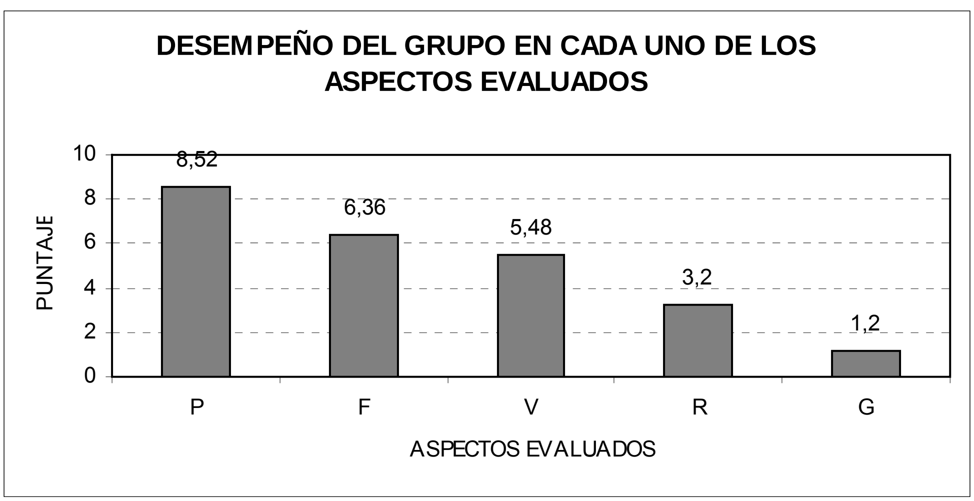


GRÁFICO 2

Muestra el desempeño del grupo en cada uno de los aspectos evaluados. Los puntajes se obtienen promediando los conseguidos en cada problema. Se presenta un buen desempeño en particularización (8,52) y reglas de formación (6,36); Un regular puntaje en planteamiento de variables (5,48) y muy bajos puntajes en reglas de formación (3,2) y formalización de la generalización (1,2). Lo cual evidencia adiestramiento de los alumnos en problemas sobre casos particulares y no generales: Observan lo que sucede en cada situación y son capaces de describirlo verbalmente, pero tienen dificultades para escribir expresiones generalizadoras para lo observado.

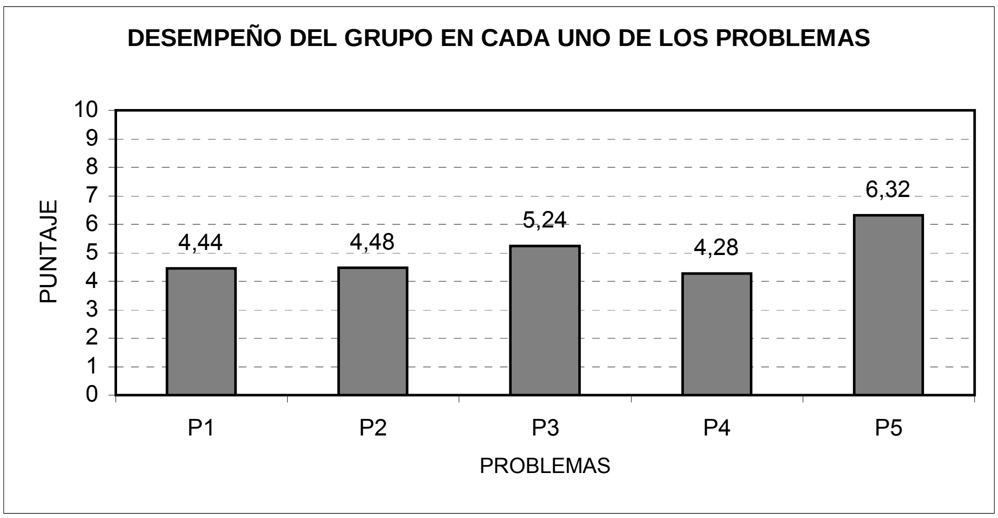


GRÁFICO 3

Muestra el desempeño del grupo en cada uno de los problemas: 4,44; 4,48; 5,24; 4,28 y 6,32 respectivamente. Los puntajes se obtienen promediando los conseguidos por los estudiantes en cada uno de los aspectos evaluados en cada problema. Si se considera que se aprueba con el 60%, entonces sólo se tiene un resultado positivo, correspondiente al quinto problema. Lo que indica la carencia de habilidades de los estudiantes en la solución de problemas que involucran generalización.

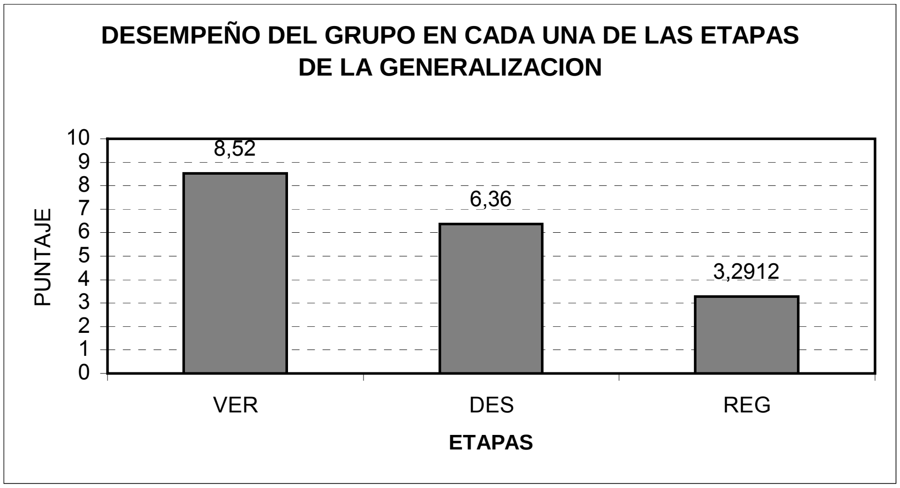


GRÁFICO 4

Muestra el desempeño del grupo en cada una de las etapas de generalización. Se nota un mejor desempeño en la etapa *ver* (8,52), lo que muestra coherencia con el aspecto de particularización, donde el estudiante tiene más solvencia en las actividades de generalización. En la etapa describir es más bajo su puntaje (6,36) pero es aceptable, esto significa que el estudiante en muchos casos, percibe las regularidades presentes en los problemas y es capaz de describirlas verbalmente pero el bajo puntaje en la etapa registrar (3,29) indica que se le dificulta expresarlas en forma simbólica.

Se presenta a continuación un **análisis cualitativo** de esta prueba para mostrar cómo se desenvolvieron los estudiantes en cada uno de los problemas y etapas de la generalización.

De acuerdo con los referentes planteados en el marco teórico la generalización matemática, es un proceso que se da a través de tres etapas bien diferenciadas, con unas características especiales para cada una: En la etapa *ver* se hacen particularizaciones que ayuden a descubrir los patrones o regularidades, lo que es propio de cada caso específico y lo que es común a todos ellos, lo que no presenta variación, se utilizan ayudas como gráficos, dibujos, tablas, etc.; En la etapa *describir* se hace uso del lenguaje verbal para caracterizar las regularidades halladas, los patrones o reglas de formación; y en la etapa *registrar* se hace una simbolización de las relaciones que se observan y se enuncia la regla general que resuelve el problema para cualquier caso, lo cual requiere del planteamiento de variables y de expresiones que las relacionen. Teniendo en cuenta el nivel de desarrollo de los alumnos con los cuales se lleva a cabo la investigación y el nivel de conocimientos matemáticos que deben tener para el grado académico en el que están, la exigencia de la simbolización debe ser mayor; y demás, como el álgebra se presenta como el mejor medio para expresar generalizaciones de situaciones, lo que permite hacer inferencias y transferencias de las mismas situaciones a otras formas más complejas del conocimiento; se pretenda analizar la forma en que los alumnos establecen la generalización mediante un proceso de abstracción, esto conlleva a analizar sus formas de razonar, las estrategias utilizadas y el lenguaje simbólico que utilizan, se diseña entonces una prueba de entrada de la cual se realiza en páginas anteriores un análisis cuantitativo en forma de tablas y gráficos de barras. Los bajos puntajes obtenidos por los estudiantes, sobre todo en la etapa registrar y teniendo en cuenta que en el grado 9° de educación básica, que es donde se realiza la prueba, por la importancia que tiene el lenguaje algebraico en este grado, se considera de vital importancia el realizar registros simbólicos adecuados de expresiones, se concluye que tienen grandes dificultades para llevar a cabo procesos de generalización, especialmente en el paso de la descripción verbal de la regularidad al registro simbólico de la misma. Se pretende ahora hacer un análisis que de cuenta de la forma como los alumnos respondieron la prueba realizada, los recursos utilizados para hacerlo y los errores que se cometieron, de manera que se justifique el porqué de los bajos puntajes en el grupo. Para hacer esto se analizan una a una las hojas de respuestas y los problemas resueltos categorizando cada respuesta dada como *totalmente errónea, con errores* y *acertada* de manera que se pueda calificar con 0, 5 ó 10 puntos respectivamente, el término medio (5 puntos) se justifica desde la perspectiva de que en matemáticas y más en la enseñanza de ella, no se debe llevar al extremo de descalificar una respuesta dada por un estudiante, por pequeños errores cometidos, que pueden ser ajenos al mismo conocimiento del tema.

Se analiza entonces, lo realizado por el grupo de estudiantes en cada problema:

En el primer problema: *"Elegir 3 números enteros consecutivos y del cuadrado del segundo restar el producto del primero y tercer términos",* En la etapa ver, hubo buen desempeño, 2 estudiantes no respondieron bien, 8 lo hicieron con errores y 15 acertadamente, en su mayoría realizaron las operaciones pedidas para diferentes tripletas de números. Los que se equivocaron totalmente se debe a que no sabían que significaba la palabra consecutivo, tomaban tripletas como 1, 2, 5 etc., estos estudiantes no avanzaron más en la resolución del problema, es decir obtuvieron nota 0 en los siguientes aspectos calificados.

Los que tenían errores (que sacaron 5), se debe a equivocaciones de proceso en las operaciones (resta, producto, etc.)

Por ejemplo: para los números 2, 3, 4 operaban $(3)^2–(2)(4)=6–8=-2$, se evidencia la falta de claridad en elevar al cuadrado un número.

4 estudiantes no escribieron expresiones verbales para describir lo que sucedía en el problema de acuerdo con los ejercicios particulares realizados. 13 lo hicieron con error y 8 lo hicieron correctamente. Los que presentaron errores lo hicieron de la siguiente manera: "Si de tres números, se resta del cuadrado del número de la mitad el producto del primero y el tercero, se obtiene como resultado 1." La cual fue tomada como un expresión con error y calificada con 5 puntos, ya que no aparece la palabra consecutivo y esta es importante para determinar bien el problema.

Los que la escribieron en forma correcta, lo hicieron así:

"Si de tres números consecutivos, del cuadrado del número intermedio se resta el producto del primero y tercero, el resultado es uno." (Se toma correcta aunque no se haya especificado que los números deben ser enteros)

En el planteamiento de variables de la etapa registrar de este problema, se consideró buena la respuesta, si se utilizaba correctamente la notación de números consecutivos: *n, n+1, n+2.* (se podía también utilizar otra letra). 4 fueron calificados con 0 por que no escribieron expresión alguna; 16 con 5 puntos por que utilizaron tres letras distintas para la simbología y 5 con 10 puntos ya que hicieron lo que se requería.

Los que plantearon bien las variables también simbolizaron correctamente la regla de formación enunciada anteriormente en forma verbal, sólo uno de estos la simbolizó mal, debido a falta de atención en la escritura.

En la etapa registrar del proceso de generalización con la simbolización de las relaciones encontradas se podría decir que ya se ha llegado al final de proceso, pero se le exige al estudiante como parte final, formular la ley general utilizando las características de las generalizaciones.

Pocos estudiantes presentaron este aspecto en forma debida (sólo 2 estudiantes escribieron otra vez la fórmula encontrada, pero no especificaron en donde se cumple dicha fórmula, por lo cual fueron calificaron con 5 puntos). Se esperaba que enunciaran algo como lo siguiente:

“Para cualquier tripleta de números enteros consecutivos *n, n+1, n+2*, se cumple:

$(n+1)^2 – n(n+2) = 1$

En este primer problema se evidencia la dificultad que presentan los estudiantes en pasar de lo particular a lo general, de las expresiones concretas a las abstracciones. La mayor dificultad se nota en el planteamiento de variables y relaciones.

El segundo problema de la prueba inicial es semejante al primero: *“Sumar los cuadrados de dos números enteros consecutivos con el cuadrado de su producto”*, pero con un poco más de dificultad debido a que el resultado no es tan evidente como en el caso anterior. También es un problema de contexto aritmético, como en el primer problema, es necesario utilizar el concepto de número consecutivo.

En este problema, en la etapa ver, donde el estudiante ensaya para casos particulares, no se presentaron dificultades para la mayoría, sólo 2 estudiantes aún no presentaban claridad en lo de número consecutivo y no puntuaron, 7 presentaron errores y el resto lo hizo bien. El error más frecuente se encuentra en la operatividad.

En la etapa describir, donde se pide al estudiante que enuncie verbalmente las reglas de formación y regularidades que se presentan, 8 estudiantes presentaron problemas debido a los errores de particularización (calificados con 0 puntos), lo que no les permitió visualizar las regularidades en la situación; estos mismos estudiantes tampoco avanzaron más en el desarrollo del problema. El resto de los estudiantes escribió las regularidades en forma correcta. 7 estudiantes (calificados con 5 puntos) presentaron errores al enunciar la regla de formación, los cuales se deben principalmente a la omisión de palabras importantes dentro del enunciado, 6 de estos omitieron la palabra consecutivo. Por ejemplo: “La suma de dos números al cuadrado con la multiplicación de estos, es igual al número que da en esta multiplicación mas uno, al cuadrado”, este enunciado para que sea correcto debe llevar la palabra consecutivo.

En el planteamiento de variables de la etapa registrar, lo hicieron bien aquellos que tenían claro el concepto de números enteros consecutivos: 8 se calificaron con 0 puntos, ya que no escribieron expresión alguna. 6 calificaron con 5 puntos, algunos porque plantearon las variables como dos letras cualquiera sin ninguna relación:

x: un número

y: otro número

Lo cual no dice nada en cuanto a ser consecutivos.

Otros plantearon 3 variables:

a: un número

b: el otro número

c: el producto

Tampoco es una buena representación de variables, para lo que pide el problema.

De los que plantearon bien las variables, sólo 4 (calificados con 10 puntos) plantearon una relación adecuada al problema, parecida o igual a la siguiente:

$n^2 + (n+1))^2 + [\text{¨}n(n+1)]^2 = [n(n+1) + 1]^2$

Con 5 puntos (4 estudiantes) se calificó a los que la expresaron de otra forma.

La institucionalización o formulación de la ley de la generalización, en esta etapa, no fue alcanzada por algún estudiante en la forma exigida, sólo 4 escribieron nuevamente la expresión anterior.

Nuevamente se nota en la resolución de este problema, que en general, la dificultad en el proceso de generalización para los estudiantes está en la etapa registrar, sobre todo cuando se trata de simbolización de relaciones entre variables.

El tercer problema se plantea en el conjunto de los números naturales y está relacionado con las sucesiones y con conceptos algebraicos y geométricos, además, puede aparecer explícita o implícitamente el concepto de función: "*50 personas se encuentran en una reunión y se saludan entre sí. Cuantos saludos hubo en total?"*

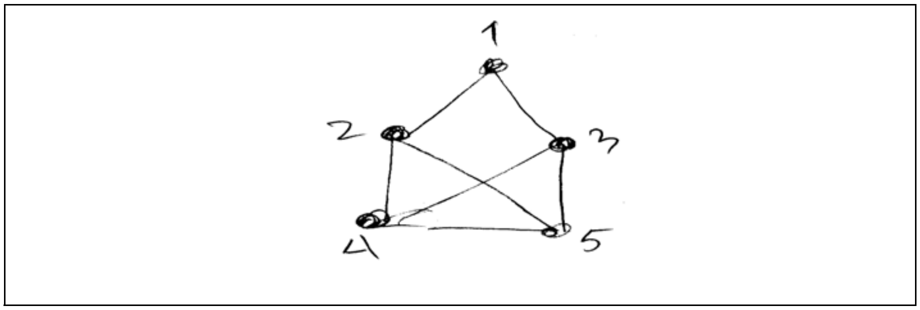
A diferencia de las dos pruebas anteriores, donde el estudiante en la etapa *ver* podía particularizar con números naturales pequeños y grandes, en este problema el número más grande utilizado por dos estudiantes fue el 7.

Se observaron varias estrategias de trabajo en esta etapa: Los que más avanzaron utilizaron dibujos para representar la situación, se presentaron dibujos de diversos estilos, donde representaban las personas con puntos y las líneas que unían estos puntos representaban los saludos.

Los que menos avanzaron (máximo, analizaron la situación para 4 personas), fueron los que no utilizaron gráficos, trataban de recrear operacionalmente la situación.

En la etapa *ver*, del presente problema todos puntuaron. Entre los calificados con 5 puntos (6 estudiantes) se resaltan los siguientes errores:

- Tomar el saludo doble (entre dos personas habrían 2 saludos)
- En el gráfico utilizado, habían personas no relacionadas. Como lo muestra el siguiente dibujo realizado por uno de los estudiantes.

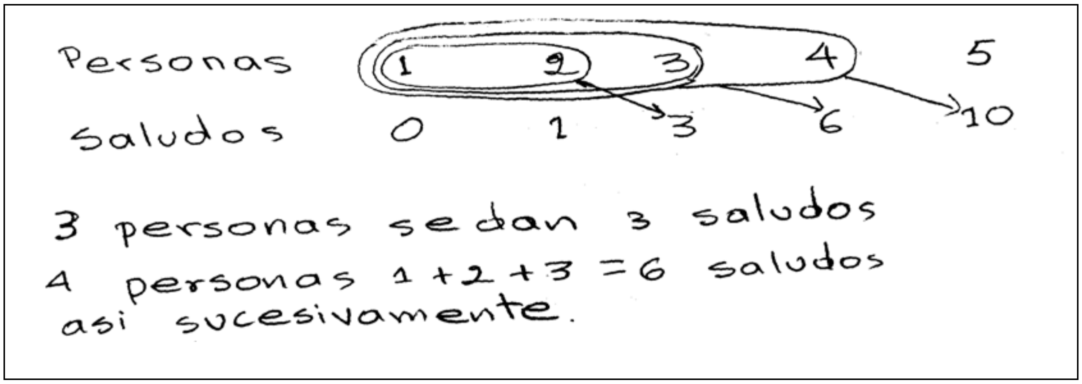


Realizado por Ana Bermudez. estudiante N° 21 en las tablas de resultados.

En la etapa *describir*, sólo 10 estudiantes, alcanzaron el puntaje máximo, lo que muestra la dificultad de los alumnos para detectar la regla de formación en este caso. Hay que anotar que en un problema de estos, pueden surgir un buen número de regularidades, pero se calificó con 10 puntos aquellas que finalmente lleven a formular relaciones generales. De los otros 15, 11 estudiantes fueron calificados con 5 puntos, escribieron sólo aspectos particulares que no llevan a generalizar. El resto (4 estudiantes) dejaron el espacio en blanco.

Una característica importante para resaltar entre las pruebas de los que puntuaron bien (con 10 puntos) es que sus datos estaban organizados en forma de tabla (unas horizontales y otras verticales) donde hacían señas, unían con flechas o encerraban en círculos las posibles relaciones; lo que da la impresión de que esta forma de organizar los datos da mejor visualización de las regularidades.

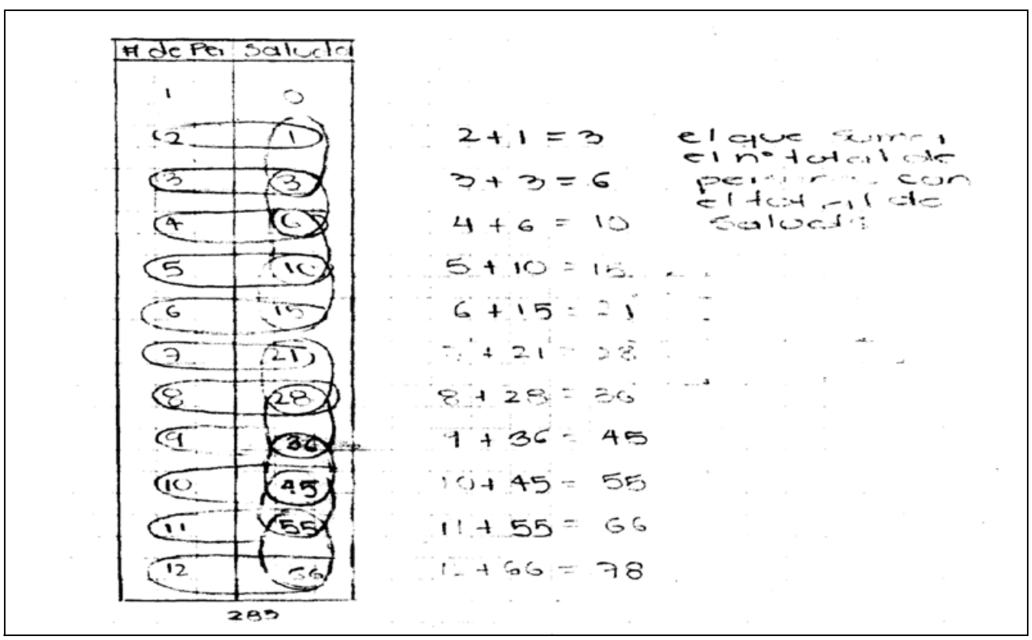
Veamos las regularidades mostradas por varios estudiantes:



Realizado por Jhoan Ruiz. estudiante N° 2. en las tablas de resultados.

El alumno que realizó este gráfico no escribió expresión alguna para la regularidad y no avanzó mas en la el problema. Aunque en este caso no se nota una expresión general para la regularidad, se calificó con 10 puntos, ya que de todas formas lo escrito permite una simbolización adecuada para el problema, además, son expresiones válidas.

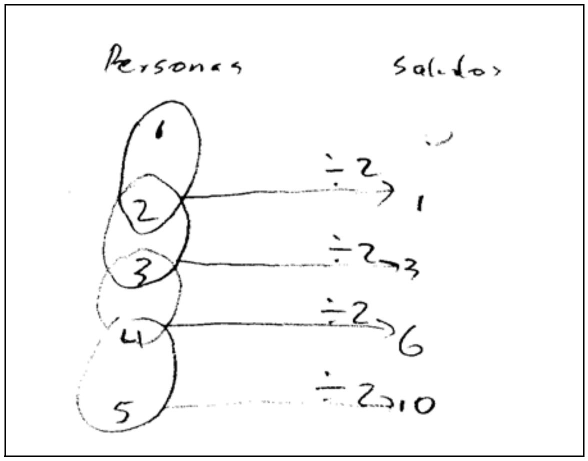
Otra regularidad fue la siguiente:



Realizado por Eliana J. estudiante N° 25

Y escribe: El número de saludos es igual a la suma del número de saludos y el número de personas del caso anterior”. 5 estudiantes presentaron, con pocas diferencias, esta regularidad.

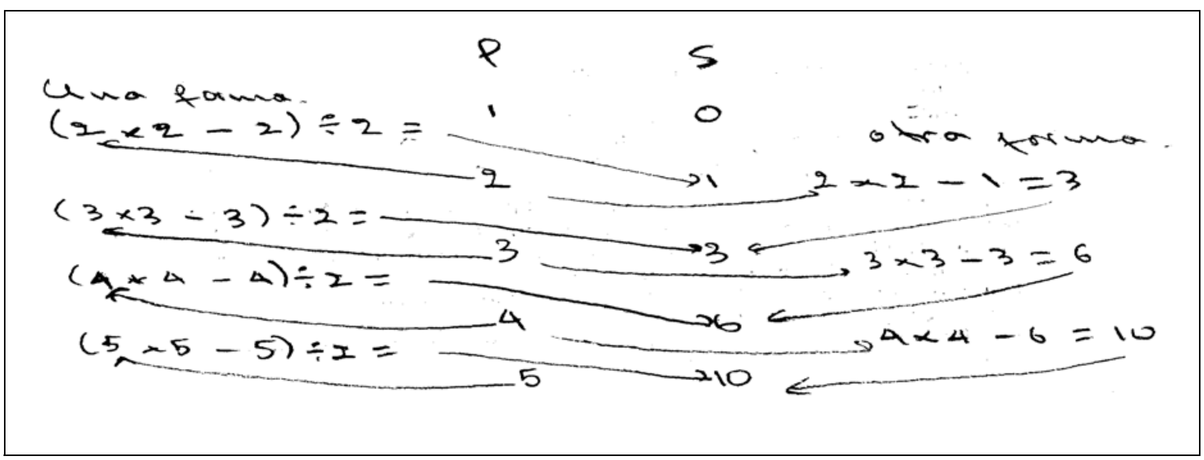
Veamos otra regularidad presentada:



Realizado por Alexandra G. Estudiante N° 14

Para este dibujo se escribió: “Si se multiplican el número de personas por el mismo número menos 1, dividido 2, se obtiene el total de saludos para ese número de personas”. 2 estudiantes tenían similares planteamientos.

Otra regularidad fue:



Realizado por Daniela Giraldo. Estudiante N° 19

En este caso el estudiante no escribió verbalmente algo, pero las operaciones que hizo son correctas y llevan a relaciones de generalización. Aunque su trabajo de aquí en adelante no fue bueno, se le puso 10 puntos en este aspecto.

Algunas expresiones escritas por los que calificaron con 5 puntos en la etapa describir, son las siguientes:

1 +3 + 6 = 10

"El número de saludos en un grupo de 4 personas es igual a la suma de los saludos del total de personas en los grupos anteriores". Esta relación es válida sólo en este caso, veamos por ejemplo que:

3 + 6 + 10 = 19   no es el número de saludos entre 5 personas.

Esta respuesta en la etapa describir fue muy generalizada, la escribieron los 7 estudiantes restantes de 5 puntos. Esto se debe a que solamente particularizaron para muy pocos casos lo que no les permitió ver que de ahí en adelante la regla no se cumplía.

El resto de estudiantes (8), hicieron la particularización para varios números, pero no escribieron mas, por eso se les puso 0 puntos.

Ahora veamos el desempeño de los estudiantes en la etapa registrar, en este problema:

De entre los 10 estudiantes que en la etapa describir escribieron regularidades válidas, sólo 4 realizaron una simbolización adecuada:

$$S=\frac{p(p-1)}{2}$$

El estudiante no explica que significa cada letra, pero por la expresión puede significar lo siguiente:

S: total de saludos p: número de personas

Se observa que el planteamiento de variables y la relación están bien configurados.

$$S=\frac{p\times p-p}{2}$$

S: total de saludos p: número de personas.

S= PaxPa – Sa

En este caso es confuso el significado, mirando las relaciones halladas en la etapa describir, parece que:

S: total de saludos; Pa: personas en el caso anterior; Sa: saludos en el caso anterior.

S= a + p

También es un poco confuso, puede significar:

S: total de saludos; a: saludos en el caso anterior; p: personas en el caso anterior.

Los estudiantes que presentaron estas notaciones fueron calificados con 10 puntos.

De los otros 6 estudiantes, 4 escribieron notaciones que presentaban errores (no correspondía a la regularidad descrita o la simbolización no era la adecuada):

La formulación S=1 + 2 + 3…….. trata de simbolizar que el total de saludos para *n* personas es la suma de los números naturales hasta *n* – 1, a la cual le falta el término n-ésimo al final para ser correcta.

La notación: S = S + P trata de simbolizar que el total de saludos para *n* personas es igual a el número de saludos más el número de personas en el caso anterior, es decir para *n* – 1 personas.
La cual presenta el error de simbolizar con una misma letra dos cosas diferentes.

Las notaciones: $\frac{n \times n}{2} - n$ ó $\frac{n^2}{2} - n$

Tampoco son correctas para simbolizar regularidades halladas (todas las n deben estar divididas por 2)

La notación: S=1+2+3+….p tampoco se consideró correcta (p no es término general para S.)

Se nota que los estudiantes presentan tendencia a simbolizar las variables con la letra inicial de la palabra a que se refiere dicha variable. No utilizan letras de acuerdo con el conjunto numérico en el cual se está trabajando. No manejan el concepto de sumatoria.

De los 4 estudiantes que simbolizaron bien las regularidades, ninguno escribió la ley que resuelve el problema en la forma exigida y fueron calificados con 5 puntos.

En este problema se verifica una vez mas que estos estudiantes están en una etapa de aprendizaje donde son capaces de *ver y escribir* las regularidades que se les presentan, pero tienen gran dificultad para simbolizar y escribir fórmulas generales para esta regularidades, además, no manejan el nomenclador universal para establecer adecuadamente una generalización.

El cuarto problema que se planteó es similar al tercero, se plantea en el conjunto de los números naturales y puede ser representado mediante una secuencia de estos números, además implica el manejo de funciones: *"De acuerdo con el número de lados de los polígonos, hallar el número de diagonales de estos"*

El primer inconveniente que se presenta para empezar a resolver el problema, para la mayoría de estudiantes, es el concepto de diagonal, no sabían que era y por tanto, no hallaban la forma de empezar el problema. Teniendo en cuenta el objetivo de la prueba, se optó por explicar este concepto antes de empezar.

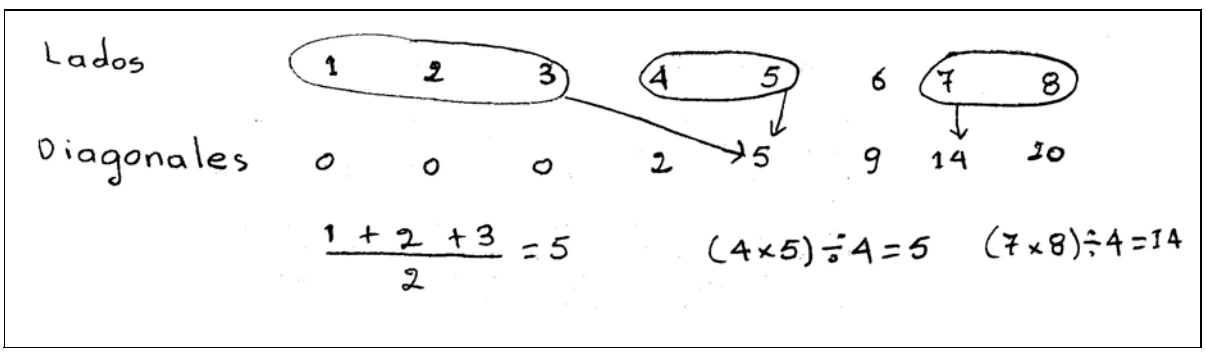
Después de la aclaración todos tuvieron ideas para empezar a trabajar y lo que hicieron fue dibujar las primeras figuras geométricas planas para trazar sus diagonales.

8 estudiantes presentaron errores en la etapa *ver*, los cuales consistían en confundir los lados del polígono con diagonales o en omitir alguna de ellas. Los que más casos particulares realizaron lo hicieron hasta el octógono y los

que menos sólo hasta el pentágono.

Estos mismos 8 estudiantes no presentaron regularidades válidas en la etapa *describir* y por tanto no avanzaron más en la prueba. De los otros 17, 9 presentaron errores en su descripción o presentaron algunas que no se cumplían. Uno de los errores fue el escribir que “el número de diagonales es igual al número de diagonales que salen del vértice por el número de vértices”. Algo que no ayudó a estos estudiantes es que no organizaron los datos en forma adecuada para tratar de visualizar las regularidades, se basaron solamente en lo que los dibujos les mostraban, mas aún, sin fijarse cuántas líneas salían de cada vértice.

Otro de los errores fue presentar operaciones aisladas entre varios de los datos como una regularidad:



Realizado por Luisa Orrego. estudiante N° 4

Expresiones que no conducen a alguna regularidad.

Los 8 alumnos restantes escribieron reglas de formación válidas, las cuales se presentan a continuación:

De una secuencia de dibujos donde se trazaron las diagonales a cuadriláteros, pentágonos, hexágonos; 4 estudiantes, después de observar las figuras un buen rato, plantean: “Al contar las diagonales de una figura, cada una se cuenta dos veces, entonces para hallar el total se multiplica el número de vértices por el número de diagonales que sale de cada uno y se divide por dos” y agregan:

Triángulo: 3x0÷2 = 0

Cuadrilátero: 4x1÷2 = 2

Pentágono: 5x2÷2 = 5

También, de una secuencia de dibujos, con sus diagonales y los vértices enumerados, un estudiante plantea:

“Si se enumeran los vértices del polígono:

En el triángulo salen de cada vértice las diagonales 0+0+0 = 0 diagonales

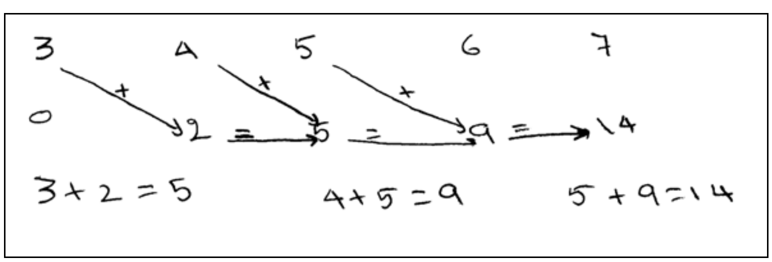
En el cuadrilátero 1+1+0+0 = 2 diagonales

En el pentágono 2+2+1+0+0 = 5 diagonales

En el de seis lados 3+3+2+1+0+0 = 9 diagonales

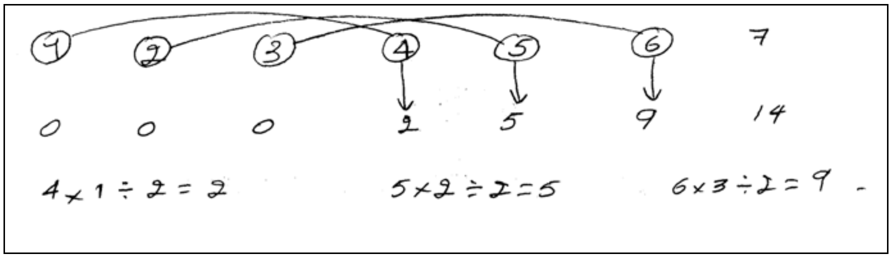
En el de siete lados 4+4+3+2+1+0+0 = 14 diagonales”

Después de los dibujos con las diagonales y organizar los datos en forma ordenada, 2 estudiantes muestran algo como lo siguiente:



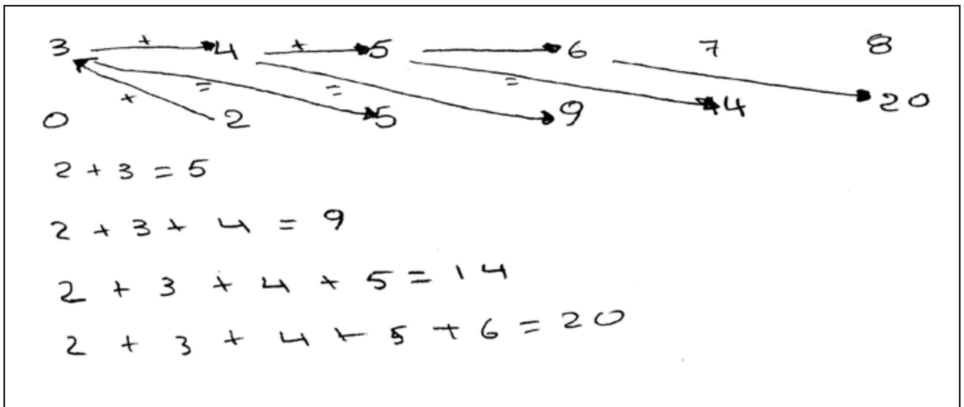
Realizado por David Grajales. Estudiante N° 6

Otro estudiante, muestra lo siguiente después de los dibujos:



Realizado por Luis G. Estudiante N° 9

Otro, después de los dibujos muestra lo siguiente:



Realizado por Juan López. Estudiante N° 10

Después de la secuencia de dibujos con las diagonales, otro escribe lo siguiente:

“El total de diagonales es el número de rayas menos el número de lados”

3 – 3 = 0 en el triángulo

6 – 4 = 2 en el cuadrado

10 – 5 = 5 en el de 5 lados.

Y agrega además:

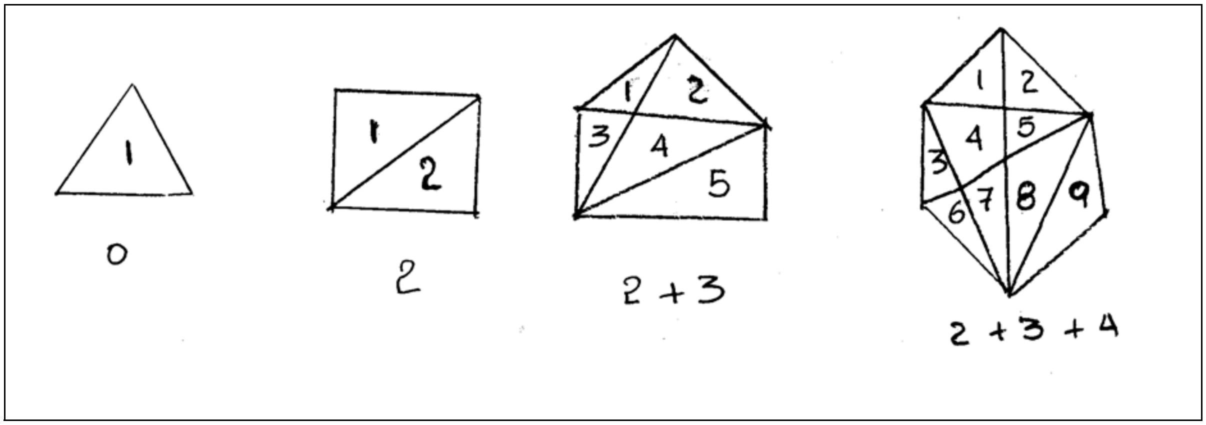
El número de rayas es: $\frac{2x3}{2}$ para tres

$\frac{3x4}{2}$ para cuatro

$\frac{4x5}{2}$ para 5

Y no escribió mas, pero se nota que quiso decir que el número de diagonales es igual al total de líneas (se observa que utiliza algo hallado en del ejercicio anterior) menos el total de lados.

Otro estudiante después de los dibujos con sus diagonales, presenta además lo siguiente:



Realizado por Mauricio Muñoz. Estudiante N° 2

No anotó más, pero se nota (así no lo haya escrito) una regularidad. Observando la secuencia de los dibujos que realizó, se podría enunciar así: "*El número total de diagonales es igual al numero de regiones que se forman al trazar las diagonales de dos vértices consecutivos, no adyacentes". Además,"El número de estas es igual a la suma de los números naturales desde 2 hasta el número de lados menos 2"* (Esto no lo anotó el estudiante)

De los 8 estudiantes que trabajaron bien en la etapa describir, en la etapa registrar, sólo 6 estudiantes presentaron un desempeño destacable en el planteamiento de relaciones, aunque sólo 2 calificaron con 10 puntos por considerarse que sus enunciados no presentaban errores; los otros 4 se calificaron con 5 puntos. En el planteamiento de variables 4 calificaron con 10 puntos y 2 con 5 puntos.

Las expresiones presentadas fueron las siguientes:

$$d=\frac{v\times d}{2}$$

Por lo que se ve, la primera d significa total de diagonales; la v, número de vértices y la segunda d, número de diagonales que salen del vértice.

En este caso, aunque la relación es valedera presenta el error de colocar una misma letra para designar dos cosas distintas.

$$D=\frac{d\times v}{2}$$

Esta relación es idéntica a la anterior, pero no presenta su error. Está bien escrita.

Otra relación destacable es:

$$d=\frac{n\times n\text{-}3}{2}$$

d es el total de diagonales, n el número de lados del polígono. En esta relación el estudiante designa en forma correcta las variables, pero la expresión como tal no es verdadera, por que lo que se tiene es $d=\frac{n^2\text{-}3}{2}$, la cual no es valedera para hallar el número de diagonales de un polígono.

Otra relación planteada por un estudiante es:

d = r – l

y escribe que d es el número total de diagonales; r el número total de rayas que salen de cada vértice (contando los lados) y l es el número de lados del polígono.

La relación está bien escrita y tiene sentido, las variables bien designadas. Esta expresión se calificó bien, pero tiene el inconveniente de que r necesita otra fórmula adicional.

Se observa que entre las relaciones escritas ninguna muestra una fórmula que muestre que se está trabajando en el conjunto de los números naturales:

$$D=\frac{n(n-3)}{2} \qquad \text{o} \qquad D=\frac{n^2-3}{2}$$

Otras relaciones escritas por varios estudiantes que fueron calificadas con 5 puntos, fueron las siguientes:

D = dxv

A la expresión le falta el denominador 2, para ser correcta, pero el planteamiento de variables está bien.

Otra expresión es:

d = dxv

La expresión presenta error y el planteamiento de variables también.

En la formulación final de la generalización sólo 2 estudiantes escribieron expresiones, pero sin conseguir lo pretendido en este aspecto.

En el transcurso de las pruebas se nota que muy pocos estudiantes hacen algo en la etapa registrar, que es en donde está la esencia de la generalización.

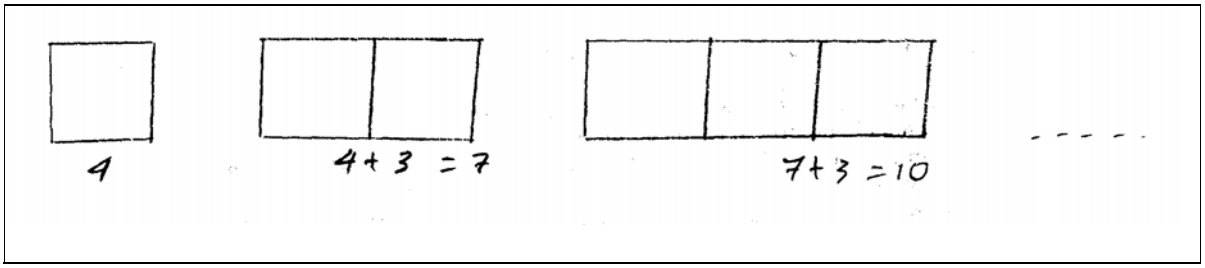
El quinto problema planteado también es para números naturales, y tiene que ver con las sucesiones y las funciones, pero mientras que las dos anteriores se generalizaban con expresiones cuadráticas, este se puede generalizar con una expresión lineal, lo que puede facilitar el rendimiento del grupo de estudiantes en la prueba.

En este problema se dan las 3 primeras figuras de una secuencia y se pregunta inicialmente sobre los palillos que contiene la primera figura que es un cuadrado, luego la segunda y así sucesivamente. Los estudiantes, en general, no encuentran dificultades para responder, pues para hallar las siguientes figuras no es sino agregar 3 palillos más.

Es por esto que en la etapa ver, todos obtuvieron 10 puntos de calificación, trabajaron gran cantidad de casos particulares (hicieron el dibujo y hallaron la cantidad de palillos), el que menos, lo hizo hasta el caso 8.

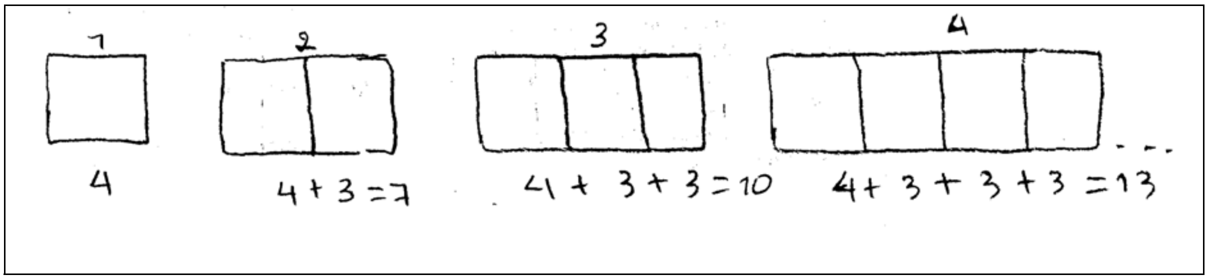
Acá se puede pensar en dos motivos para justificar el rendimiento de los estudiantes: El primero es que la experiencia en los primeros problemas sirve de referencia en este último, lo cual es aprovechado por los estudiantes y el segundo es que es un problema más simple, además de la ayuda del dibujo, que se presenta como una guía importante.

En la etapa describir todos puntuaron. Notaron la regularidad de que “cada término de la secuencia se forma sumando 3 al anterior”. Aunque sólo 12 la escribieron verbalmente. Los demás simplemente hicieron la secuencia de dibujos y escribieron algunas relaciones numéricas:



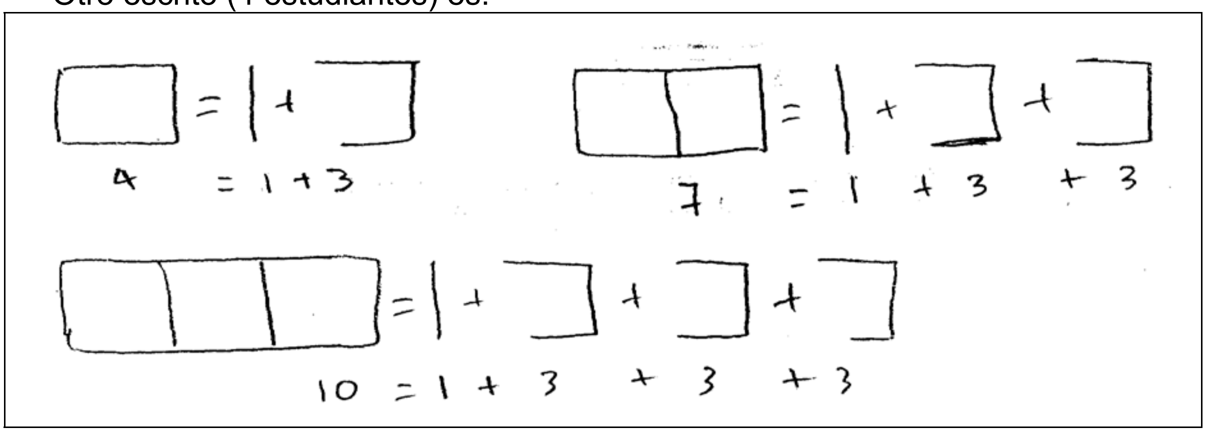
Realizado por Oscar B. estudiante N° 1

También:



Realizado por Rodrigo Mesa. Estudiante N° 13 en las tablas de resultados

Otro escrito (4 estudiantes) es:

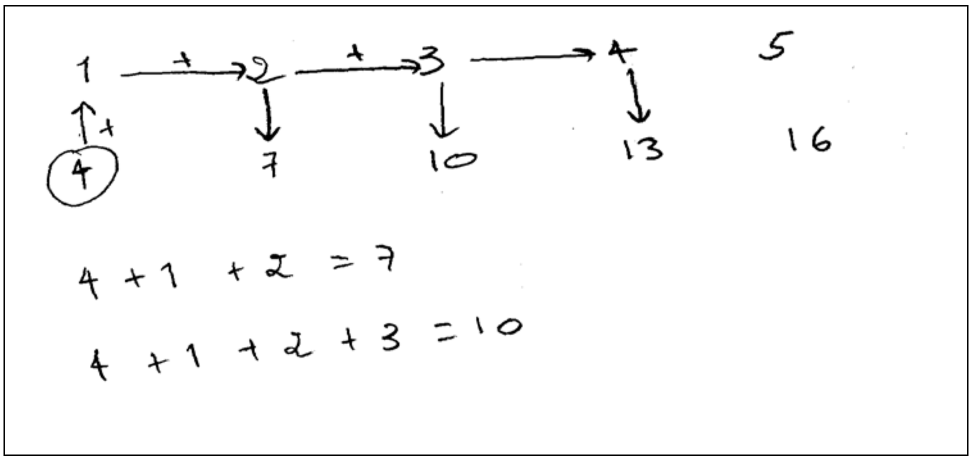


Realizado por Manuel G. Estudiante N° 8 en las tablas de resultados

Uno de estos escribió verbalmente “El número de palillos es igual a 1 más 3 veces el número de cuadros”

Notemos que de 25 estudiantes muy pocos enunciaron una regla verbal, que en este es caso es sencilla. Y es una falencia que se ha notado en todos los problemas, los estudiantes notan la regularidad, la escriben con ejemplos particulares, pero tienen dificultad para decirla en lenguaje verbal.

Se nota además varias expresiones que escribieron estudiantes como regularidad, pero que son erróneas:



Realizado por Johana P. N° 23 en las tablas de resultados

La regularidad que trata de escribir el estudiante no es cierta en los casos siguientes de la secuencia.

Podemos notar acá (y en los demás problemas también) que el estudiante tiende a verificar para 1 o 2 casos solamente y concluye que la regularidad se cumple. Sin verificar para los casos siguientes.

En la etapa registrar, de entre todos los problemas, se ve un notable avance, un buen número de estudiantes lograron escribir expresiones valederas para el problema. De entre los 25 estudiantes, 7 no escribieron más, se quedaron en la etapa describir, entre ellos los 6 que presentaron errores.

En el planteamiento de relaciones 10 escribieron expresiones que presentan errores, algunas con mal planteamiento de variables, inclusive:

$P = P + 3$

Aunque no escribió que es P, se nota que es el número de palillos.

Hay error en el planteamiento de variables y en la expresión.

$p = p + 3$

Igual error que en la anterior.

$P = 4 + 3C$

P es número de palillos, C el número de cuadros.

Podemos decir que hay un buen planteamiento de variables, pero la expresión no es válida, por ejemplo para en el caso 3, se tiene 10 palillos, con esta última fórmula se tendrían: $4 + 3x3 = 13$ palillos.

Ahora, si el estudiante hubiera escrito que P es el número de palillos del caso siguiente, si sería correcta la expresión.

$P = 4 + 3C – 1$

P es el número de palillos, C el número de cuadros.

Igual que en el caso anterior, hay un buen uso de variables, pero la expresión es incorrecta. La correcta es $P = 4 + 3(C – 1)$.

De pronto fue esto lo que el estudiante trató de escribir, pero no utilizó los paréntesis, error muy frecuente en los alumnos.

8 estudiantes escribieron expresiones valederas, pero ninguna en términos de *n*:

$p = pa + 3$

Y escribe que p es el número total de palillos y pa, palillos en el caso anterior. Se ve que la expresión es correcta, aunque para hallar pa, se necesita una fórmula similar.

$P_2 = P_1 + 3$

Escribe el estudiante que P_1 son los palillos antes y P_2 son los palillos presentes.

Es correcta, pero con el mismo inconveniente de la anterior.

$P = p + 3$

Aunque no escribió que es P mayúscula y p minúscula, tiene la misma forma que las expresiones anteriores y da el número de palillos en cada caso, pero se necesita conocer el número de palillos de los elementos anteriores de la secuencia.

$p = 1 + 3c$

p es el número de palillos, c es el número de cuadros.

Esta expresión es correcta y sus variables están bien planteadas, y da el número de palillos en cualquier caso, sin necesidad de conocer los de los casos anteriores

$p = 4 + ca$

La expresión es correcta y da el número de palillos en cualquier caso. Aunque el estudiante no escribió que es p, ni ca, se consideran bien escritas considerando que ca es el número de palillos del caso anterior.

La formulación final de la generalización del problema, que indique la forma de hallar el número de palillos para cualquier caso, la hicieron correcta 3 estudiantes. E igualmente estos tres respondieron a la pregunta de cuántos palillos se necesitan para construir 120 y 230 cuadros.

En el desarrollo progresivo de la prueba se fueron observando avances con respecto a la búsqueda de lo general y a la necesidad creciente de encontrar expresiones que posibilitaran registros más concisos, en cada problema se notaba una mejoría respecto al anterior, lo cual evidencia una evolución de los registros matemáticos de los estudiantes cada vez se iban reconociendo formas de expresar y registrar sus observaciones hasta llegar a construcciones simbólicas algebraicas a las que les asignó significados difíciles de alcanzar a través de otras prácticas sobre las expresiones algebraicas por razón de haber sido partícipe de su elaboración. Se observaron diferentes registros de los estudiantes, desde expresiones numéricas que se referían a casos particulares, completamente verbales, combinaciones verbales y simbólicas hasta expresiones netamente simbólicas. Se confirma, además, en la resolución de los problemas, el lento proceso que implica la consolidación de una notación algebraica como una forma de registrar regularidades y patrones.

Los diferentes registros hechos por los estudiantes permiten inferir que hay tres niveles de logros alcanzados en el proceso de generalización, los cuales coinciden con las etapas planteadas por Mason, dando así una primera clasificación de las acciones:

1. Los que solamente realizaron notaciones numéricas: Se quedaron en la etapa ver, no avanzaron más, consideraron los problemas de una forma muy estática o no fueron capaces de expresar lo que notaban como regularidad (Como ejemplo ver Anexos 1 y 2)
2. Los que avanzaron hasta realizar registros verbales: Pasaron de la etapa *ver* a la etapa *describir* pero no fueron capaces de traducir estas proposiciones a un lenguaje simbólico, y es precisamente una de las dificultades observadas y que comúnmente se presenta en alumnos de educación básica cuando se trabaja en el campo algebraico. La generalización se presenta entonces acá como un medio para suplir esta falencia. (como ejemplo ver Anexos 3 y 4)
3. Los que avanzaron hasta lograr una simbología adecuada: Pocos lograron llegar a esta instancia, considerada como la verdadera etapa registrar de acuerdo con el grado donde se realiza la prueba (9° de educación básica), pues se necesita que el estudiante ya tenga una buena solvencia en el registro simbólico de expresiones. (Como ejemplo ver Anexos 5 y 6)

Algunas observaciones generales al trabajo de los estudiantes en los diferentes problemas de la prueba, son las siguientes:

- Dificultades al tratar de combinar las condiciones del problema para construir relaciones.

- En la representación simbólica y definición de variables, muchas veces se hace uso de símbolos que carecen de definición previa.

- Utilizan con frecuencia el tanteo para dar respuesta a problemas.

- A veces, ignoran información dada en los enunciados de los problemas, sea en lo referente a datos o condiciones establecidas en los mismos.

- Presentan limitaciones analíticas en la solución de problemas, lo que les lleva a procesos inconclusos.

- Se notan procesos ilógicos, alejados del contexto.

- Se observan procedimientos y expresiones carentes de significado.

- Tienden a utilizar en la práctica el primer camino que se les ocurre, dando inmediatamente la respuesta, sin ninguna verificación posterior.

- Grandes dificultades para pasar expresiones verbales a formas simbólicas y viceversa.

- No presentan fundamentación para expresar reglas o conclusiones generales utilizando el nomenclador universal.

6.2. INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA

Siguiendo con las fases propuestas en la metodología, después de haber realizado la prueba inicial en donde se muestra que el grupo de estudiantes presenta dificultades para establecer generalizaciones sobre todo cuando se deben hacer planteamiento de variables, de relaciones y formulaciones generales de problemas, se pretende ahora llevar a cabo una intervención pedagógica que contribuya en el mejoramiento los aspectos mencionados y adquiera habilidades de pensamiento lógico – matemático que refuercen el aprendizaje del álgebra elemental. Los estudiantes con los cuales se lleva a cabo la intervención pedagógica son los mismos a los cuales se les aplicó la prueba inicial, y se realiza durante 12 sábados continuos, de 10 a.m. a 12 m. en 2 horas de trabajo en cada uno desde el 30 de abril hasta el 6 de agosto de 2004 en el aula 06 –105 del INEM José Félix de Restrepo.

En la intervención pedagógica se proponen diversas actividades que permitan al alumno identificar los invariantes comunes a todas las situaciones y pueda formar con ellos esquemas generales de pensamiento. Las situaciones que se desarrollan se limitan solamente a aspectos matemáticos de aritmética y geometría elemental, principalmente aquellos problemas de sucesiones numérica y graficas en donde se presentan regularidades, patrones y relaciones.

En la situación problema se hace especial énfasis en las etapas planteadas por Mason para los procesos de generalización, lo mismo que en los aspectos de particularización, reglas de formación, definición de variables y relaciones y la formulación de la generalización. La situación problema es la siguiente:

Estudio de un problema de generalización en el aula de clase

Para optimizar el desarrollo de la situación problema, diferenciar cada una de las etapas y sus diferentes aspectos y presentar en forma detallada los resultados obtenidos, se ha dividido la situación en 10 instantes:

1. Motivación y problema inicial.
2. Análisis de las instancias particulares: Ver el problema en todas sus formas.
3. Descripción de la situación: Establecer reglas de formación.
4. Registro simbólico de la situación: Planteamiento de variables y relaciones.
5. Institucionalización de la generalización: Formulación general del problema.
6. Una perspectiva teórica: Tratar de resolver el problema desde teorías matemáticas.
7. Una perspectiva geométrica: Buscar otras alternativas para resolver el problema
8. Conceptualización: Recapitulación de los conceptos aplicados por el estudiante en el transcurso de la situación y necesarios para emplear adecuadamente la generalización, y los nuevos conceptos adquiridos como consecuencia de haber estudiado la generalización.
9. Actividades de afianzamiento: Problemas que involucran actividades de generalización para afianzar las habilidades adquiridas en la

situación problema.

10. Evaluación: Se evalúa el aprendizaje del grupo de estudiantes en la situación problema, la adquisición de competencias y los resultados arrojados de acuerdo con las dificultades presentadas en la prueba inicial.

La ***motivación y el problema inicial*** surgen al sugerirle a los estudiantes considerar los cuadrados de un tablero de ajedrez, para lo cual se le entrega a cada uno una hoja donde aparece dibujado, lo observe, analice, y describa su formación.

Aunque la mayoría de los estudiantes ha visto y algunos han jugado en un tablero de ajedrez, no se habían detenido a observarlo detenidamente y a sacar conclusiones de su formación. Algunas observaciones que hacen son las siguientes:

- Tiene 8 cuadros por cada lado
- Los cuadros blancos y negros son alternados.
- Una diagonal es negra y la otra blanca.
- En total tiene 64 cuadros, considerados cada uno como una unidad cuadrada, dispuestos en 8 filas de a ocho cuadros.
- Se pueden contar cuadrados de diferentes dimensiones, tomándolos de a uno, dos, tres, etc. unidades por lado.
- Las líneas divisorias de las filas de cuadros son en total 9 (también

puede ser por columnas)

La pregunta que origina un trabajo más arduo, por parte de los estudiantes y que los obliga a buscar estrategias, es la siguiente:

¿Cuántos cuadrados se pueden considerar en un tablero de ajedrez?[10]

Inicialmente, los estudiantes empiezan un conteo manual de los cuadros que se visualizan en el tablero y debido a la cantidad de estos, se ven obligados a utilizar papel y lápiz para hacer cuentas; ya que la mayoría de ellos hacen el conteo sistemáticamente: primero tomándolos de a uno, luego de a 2, etc.

Algunos de los estudiantes se ven confundidos y no logran iniciar una estrategia de solución. Se ve entonces la necesidad de plantear el problema en otros términos para facilitar el entendimiento de los estudiantes:

¿Cuántos cuadrados de una unidad de lado se pueden considerar en un tablero de una unidad cuadrada?

Inmediatamente dieron la respuesta para este caso.

¿Cuántos cuadrados de una unidad y dos unidades de lado se pueden considerar en un tablero de dos unidades por lado, es decir un tablero de 2x2?

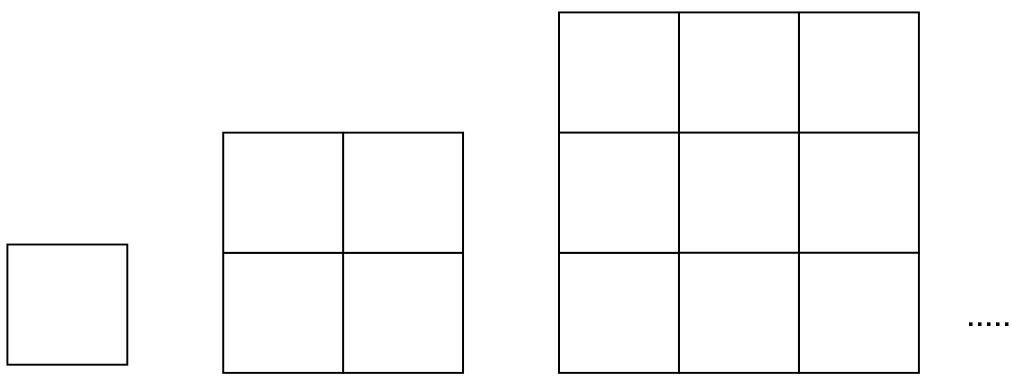
¿Cuántos cuadrados de una unidad, dos unidades y tres unidades de lado se pueden considerar en un tablero de tres unidades por lado, es decir un

[10] Problema tomado y reformado de: Mason J. Pensar Matemáticamente

tablero de 3x3?

Etc.

Con esta serie de preguntas el estudiante es motivado para que inicie una búsqueda, y esto se puede dar con un ***análisis de las instancias particulares***; para lo cual se sugiere que construyan y analicen ordenadamente las situaciones que se generan por cada pregunta. En este instante se inicia un proceso empírico de descubrimiento guiado inductivo muy importante que sustentará las primeras hipótesis de los alumnos. Para visualizar lo que se pregunta elaboran tableros de diferentes unidades de área:



Entre todos se llega a las siguientes conclusiones:

En un tablero 1x1 hay 1 cuadrado de longitud de lado 1.

Total: 1 cuadrado.

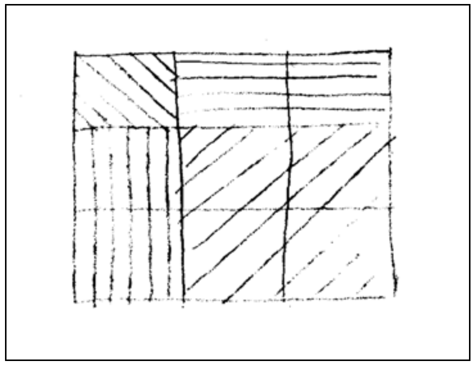
En un tablero 2x2 hay 1 cuadrado de longitud de lado 2 y 4 de 1.

Total: 5 cuadrados

En un tablero 3x3 hay 1 cuadrado de longitud de lado 3, 4 de 2 y 9 de 1

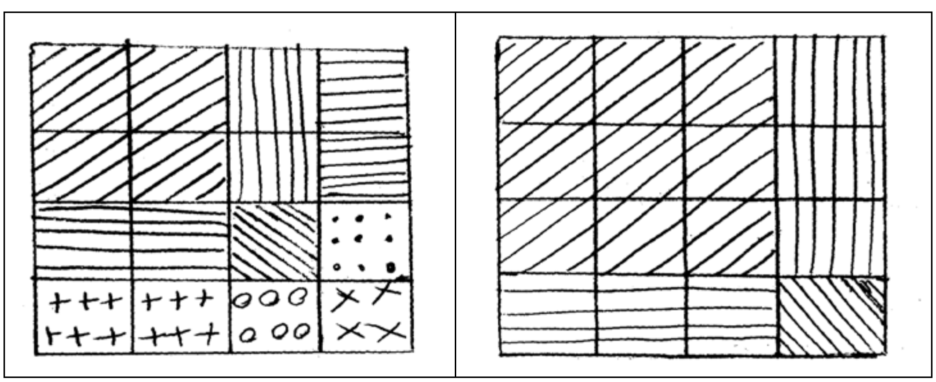
Total: 14 cuadrados

Para el caso 3x3, los estudiantes presentaron un poco de dificultad para contar los cuadrados de longitud de lado 2, debido a que se solapan unos con otros. La siguiente es una figura hecha por un estudiante:



Rayaron de distinta manera los diferentes cuadrados de dos unidades de lado que podían formar para diferenciarlos y poder observar cada caso. Entre las cosas observadas se tiene que el primer cuadro de rayas oblicuas a la derecha, se solapa con que está de rayas verticales, a la vez se solapa con el de rayas horizontales, y por último, estos con el de rayas oblicuas a la izquierda.

También hicieron dibujos como el anterior para poder contar los cuadrados de 2 y 3 unidades de un tablero 4x4:



De acuerdo con el dibujo realizado se tiene lo siguiente:

En un tablero 4x4 hay 1 cuadrado de longitud 4, 4 de longitud 3, 9 de longitud 2 y 16 de longitud 1

Total: 30 cuadrados

Se observa que en este instante la dificultad técnica que aparece se refiere al conteo de los cuadrados con longitudes intermedias, ya que las longitudes máximas y mínimas son inmediatas. Determinar el conteo para un tablero 5x5 es un desafío de conteo.

Para los siguientes casos se debe buscar una forma sistemática de contar los cuadrados. Para inducir a los estudiantes a buscarla se hace la siguiente pregunta:

¿Hay alguna regla que permita hacer el conteo de cuadrados para tableros 5x5, 6x6, 7x7, etc.?

Se les sugiere entonces que busquen alguna (o algunas) forma sistemática para contar los cuadrados en estos tableros. Que analicen la forma como se configura cada caso y que hagan una ***descripción de las situaciones***.

En este momento se insinúa a los estudiantes que analicen detenidamente las instancias particulares construidas, sobre todo aquellas en las cuales se hizo dibujo, y que escriban todas sus hipótesis acerca de cómo se forma cada secuencia.

Para tener a la vista los datos obtenidos se les sugiere que construyan una tabla de valores y traten de ampliarla con los casos siguientes a los hallados.

La tabla sugerida por los alumnos fue la siguiente:

NÚM. DE CASO	NUM. DE ELEMENTOS
1	1
2	1 + 4 = 5
3	1 + 4 + 9 = 14
4	1 + 4 + 9 + 16 = 30
5	?
6	?
…….	…….

¿Qué regularidades se observan en esta tabla?

Lo primero que notaron es que en la tabla anterior los números que se suman en la segunda columna son cuadrados perfectos, y que la suma es hasta el cuadrado del número que representa la longitud del lado del tablero.

¿Qué se puede conjeturar entonces, sobre la solución del problema?

Con las características anotadas concluyeron:

- *El número de cuadros en un tablero, se obtiene sumando los cuadrados de la secuencia de números naturales hasta el número que representa la longitud del lado del tablero.*

Y colocaron como ejemplo: en un tablero 4x4 hay $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ cuadros.

¿Se puede ahora, hallar el número de cuadros para los casos 5, 6, 7 y 8?

La respuesta fue afirmativa y se agregó:

Si el tablero fuera de longitud cinco (5x5) entonces el resultado correspondiente al total de cuadrados de longitud de lado 1, 2, 3, 4 y 5 sería: 1 + 4 + 9+ 16 + 25 = 55.

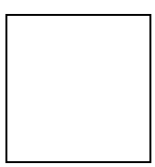
Siendo esta hipótesis correcta, ¿Ya se estaría en condiciones para resolver problema inicial?

La respuesta de los alumnos fue inmediata: “Un tablero de ajedrez tendría: 1+4+9+16+25+36+49+64 = 204 cuadrados”

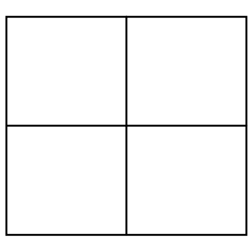
Con otro análisis de las figuras anteriores apareció otra regularidad:

En cada tablero se puede observar, además de las filas de cuadros, las líneas que divisorias entre estos, y se observa que es una más que el número de filas de cuadrados.

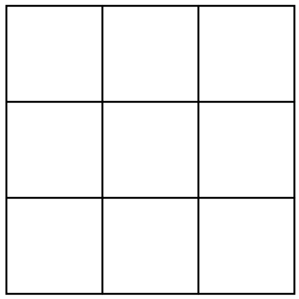
Con esta nueva observación se invita a los alumnos a analizar los dibujos realizados y construir otra tabla de valores para mirar lo que sucede:



2 líneas: 1 cuadrado de longitud de lado 1



3 líneas: 4 cuadrados de longitud de lado 1, 1 de 2



4 líneas: 9 cuadrados de lado 1, 4 de 2 y 1 de 3.

Se construyó además, la siguiente tabla:

NÚM. DE LÍNEAS	NUM. DE ELEMENTOS
2	1
3	1 + 4 = 5
4	1 + 4 + 9 = 14
5	1 + 4 + 9 + 16 = 30
6	?
7	?
…….	…….

Ahora la pregunta es: ¿Qué regla de formación se observa en los elementos de la tabla?

Algunos dijeron que era igual que la tabla anterior, otros, que es diferente porque en la primer columna se empieza con 2. Al final la conclusión fue que bastaba restar 1 a cada elemento de esta columna y era igual que la primera.

Se acordó la siguiente regla de formación:

- *El número de cuadros de longitud dada, es igual al número de líneas menos el número que representa la longitud de cuadro, al cuadrado. Y la suma es el total de cuadros.*

Por ejemplo: en un tablero 4x4, el número de cuadros de longitud de lado 2, es:

$(5 – 2)^2 = 3^2 = 9$

En un tablero 5x5, el número de cuadros de longitud de lado 2 y de longitud 4, es respectivamente:

$(6 – 2)^2 = 4^2 = 16$

$(6 – 4)^2 = 2^2 = 4$

Lo realizado hasta el momento, se llevó a cabo en una sesión de trabajo con el grupo, de 2 horas y se dejó como actividad hallar el total de cuadros en tableros de 10x10, 15x15 y 20x20 unidades cuadradas.

Hasta aquí se considera resuelto el problema de motivación inicial, de encontrar el total de cuadros en un tablero de ajedrez, y más, que los estudiantes se dieran cuenta que con la regla hallada se puede encontrar el número de cuadros en cualquier tablero, como se dieron cuenta en la actividad propuesta.

Pero el objetivo de la situación es desarrollar todas las etapas del proceso de generalización y para empezar el trabajo en la siguiente sesión se hace la siguiente pregunta:

¿Cuántos cuadrados de longitud de lado 1, 2, ..., *n* se pueden considerar en un tablero de *nxn* unidades cuadradas?

Después de un rato un estudiante propuso: “sumando los cuadrados de los números desde 1 hasta n"

Y se pregunta nuevamente:

¿Si se tiene un tablero 1000x1000 sería fácil de hacerlo?

Contestaron que no.

Se les dijo que se trataba entonces de encontrar una forma fácil de resolver este problema.

Para ayudarles en la nueva búsqueda se les insinuó realizar una tabla con los valores para *n*=1, *n*=2, etc.

En este caso la tabla se colocó horizontalmente:

CASOS	1	2	3	4	5	6	….
N° DE ELEM.	1	5	14	30	55	91	….

La búsqueda de estas reglas es guiada por los siguientes interrogantes:

¿Cómo se forma cada término de la segunda fila con los términos de la primera fila?. Combine dos o tres términos de la primera fila con operaciones de multiplicación hasta obtener el término en la segunda fila o un múltiplo correspondiente.

¿Cómo se forma cada término de la segunda fila con respecto al término anterior, en la misma fila?

La búsqueda de respuestas a estas preguntas se hizo entre todos, para lo cual se les dibujó la tabla de datos en el tablero. La primera pregunta dio algo de dificultad ya que había que combinar 3 factores de la primera fila para hallar los de la segunda, y lo primero que hicieron fue tratar de hallarlos combinando sólo 2. Después de ensayar un rato tomando parejas de números empezaron a combinar de a 3; de inmediato un estudiante (de los que mejor resultado obtuvo en la prueba inicial, en tabla 1, es el código 5), escribió la expresión: $1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$

Al motivarlos a buscar relaciones de este tipo, se escribieron otras rápidamente:

$5 = \frac{2x3x5}{6}$ $\quad 14 = \frac{3x4x7}{6}$ $\quad 30 = \frac{4x5x9}{6}$

$55 = \frac{5x6x11}{6}$ $\quad 91 = \frac{6x7x13}{6}$ $\quad$ ……….

La segunda pregunta no presentó inconvenientes, en poco tiempo escribieron:

$1 = 1$ $\quad 5 = 1 + 2^2$ $\quad 14 = 5 + 3^2$ $\quad 30 = 30 + 5^2$

$55 = 30 + 5^2$ $\quad 91 = 55 + 6^2$

Los resultados hallados fueron resumidos en la siguiente tabla:

CASOS	1	2	3	4	5	6	….
N° DE ELEM.	1	5	14	30	55	91	….
RELACION 1	$\frac{1X2X3}{6}$	$\frac{2X3X5}{6}$	$\frac{3X4X7}{6}$	$\frac{4X5X9}{6}$	$\frac{5X6X11}{6}$	$\frac{6X7X13}{6}$	….
RELACION 2	1	$1 + 2^2$	$5 + 3^2$	$14 + 4^2$	$30 + 5^2$	$55 + 6^2$	….

¿Qué reglas de formación general se pueden enunciar con estas relaciones?

Observando la tabla, con la participación de todo el grupo, se concluyen las siguientes reglas:

- *El número total de cuadrados se halla multiplicando el número que corresponde al respectivo caso, el del caso siguiente y el de la suma de ambos, dividido entre seis.*
- *El número total de cuadrados se obtiene sumando el número total de cuadrados del caso anterior y el cuadrado del número correspondiente al caso presente.*

Hasta esta parte de la situación problema se han trabajado dos secciones de 2 horas cada una, todo parece fácil para los estudiantes, no presentaban muchas complicaciones para entender y realizar lo pedido.

Se pretende ahora que hagan un ***registro simbólico de la situación***, que planteen variables y relaciones. Las relaciones que plantearon verbalmente se pueden hacer en forma simbólica, es decir, como una expresión algebraica que permita generalizar el problema inicial de contar el total de cuadrados en un tablero de ajedrez a tableros de un número mayor de unidades de área. Para esto es necesario plantear algunas variables que permitan establecer dichas relaciones.

Se reinicia el trabajo haciendo un repaso de las reglas de formación enunciadas y se pregunta:¿Qué variables es necesario plantear para simbolizar las reglas de formación enunciadas? ¿Qué cantidades presentan variación en el desarrollo del problema?

La lista de variables que se hace es la siguiente:

- El número del caso que se está analizando, el cual está dado por la longitud del lado de este tablero, y coincide con la secuencia de los números naturales.
- El número de líneas divisorias de las filas de cuadrados.
- El número de cuadrados de longitud dada.
- El número de elementos que se obtiene en cada caso, es decir, el número de cuadrados de diferentes longitudes de lado.

¿Qué letras es pertinente utilizar para simbolizar estas variables?

Antes de que se diera respuesta a esta pregunta se hicieron algunas sugerencias en cuanto a la simbolización de variables:

- Simbolizar cada variable con una letra diferente para no tener ambigüedades.
- Utilizar las letras de acuerdo con el conjunto numérico donde se trabaja, principalmente cuando se trata de secuencias de números naturales, utilizar la *n.*
- Cuando se trabaja con secuencias o sucesiones de números naturales es bueno la utilización de subíndices para hacer referencia al número de orden correspondiente.

Fueron varias las letras que se propusieron, al final se adoptaron las siguientes:

n: Representa la longitud del lado del tablero.

l: El número de líneas divisorias de las filas de cuadrados.

m: La longitud del lado de los diferentes cuadrados contenidos en el tablero.

A_m: El total de cuadrados de longitud m

C_n: El total de cuadrados de cada tablero

¿Cómo se simbolizan las reglas de formación halladas, para un tablero de longitud de lado n, con las variables enunciadas?

Se acordó lo siguiente:

Para la primera regla: “El número de cuadros en un tablero, se obtiene sumando los cuadrados de la secuencia de números naturales hasta el número que representa la longitud del lado del tablero.”

$$C_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2 \qquad (1)$$

Para la segunda regla: “El número de cuadros de longitud dada, es igual al número de líneas menos el número que representa la longitud de cuadro, al cuadrado. La suma es el total de cuadros.”

$$A_m = (l - m)^2$$

como $l = n + 1$, entonces:

$A_m = (n + 1 - m)^2$ (2)

Para la tercera regla: "El número total de cuadrados se halla multiplicando el número que corresponde al respectivo caso, el del caso siguiente y el de la suma de ambos, dividido entre seis."

$C_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ (3)

Para la cuarta se tiene: "El número total de cuadrados se obtiene sumando el número total de cuadrados del caso anterior y el cuadrado del número correspondiente al caso presente."

$C_{n+1} = C_n + (n + 1)^2$ (4)

Hasta el momento, en la intervención pedagógica se han trabajado 5 secciones de dos horas cada una . Se nota gran interés de los estudiantes en toda la situación problema, la participación ha sido muy buena, todos participan. Se hizo énfasis en el planteamiento de variables y relaciones, en la simbolización de expresiones verbales ya que fue una de las partes donde se notaron falencias en la prueba inicial.

Para mejorar esta parte, se colocó la siguiente actividad:

Simbolizar las siguientes expresiones:

- El doble del cuadrado de un número más el triple del número es igual a menos 1.
- La suma por la diferencia de dos números es igual a la diferencia de sus cuadrados.

- El producto de tres números enteros consecutivos es igual a 120.
- El producto de dos números enteros pares consecutivos es igual a 24.
- El producto de un número con su triplo aumentado en uno es igual a 14.

Con el proceso inductivo seguido se han obtenido cuatro fórmulas generales, siguiendo detalladamente las etapas propuestas por Mason en procesos de generalización. Se necesita ***institucionalizar la generalización***, es decir, enunciar la fórmula y ley que rigen el problema en cualquier caso y demostrar[11] que es correcta.

Se pide entonces que verifiquen que las fórmulas son correctas para los tres primeros casos y constaten que coinciden con lo hallado en el inicio de la situación, además que lo hagan para un número cualquiera k. El desarrollo es el siguiente:

- ❖ Si n = 1, con las fórmulas (1), (3) y (4) respectivamente se obtiene:

$C_1 = 1^2 = 1$

$$C_1 = \frac{1\times(1+1)\times\left[2(1)+1\right]}{6} = \frac{1\times 2\times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$C_1 = 0 + 1^2 = 1$

Además, con la fórmula (2).

[11] Lo que se pretende no es estrictamente demostrar, ya que se necesitaría utilizar la inducción matemática rigurosa como el método eficaz para hacerlo y no es objetivo del trabajo ya que en 9° de educación básica el estudiante no ha estudiado estos conceptos, se trata de que el alumno verifique con casos particulares que la ley funciona y que compruebe que las fórmulas si son compatibles (dan el mismo resultado)

Para $m = 1$

$A_1 = (1 + 1 - 1)^2 = 1$

Se concluye: El número de cuadrados de longitud de lado 1 en un tablero de longitud de lado 1, es 1.

- Si $n = 2$ con las fórmulas (1), (3) y (4) respectivamente, se obtiene:

$C_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ ó

$$C_2 = \frac{2\times(2+1)\times[2(2)+1]}{6} = \frac{2\times3\times5}{6} = \frac{30}{6} = 5$$ ó

$C_2 = 1 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

El número de cuadrados en un tablero de longitud de lado 2, es 5.

Además, con la fórmula (2)

Para $m = 1, 2$

$A_1 = (2 + 1 - 1)^2 = 4$

$A_2 = (2 + 1 - 2)^2 = 1$

Conclusión. En un tablero de longitud de lado 2, el número de cuadrados de longitud de lado 1 es 4 y de longitud de lado 2 es 1.

- Si $n = 3$ con las fórmulas (1), (3) y (4) respectivamente se obtiene:

$C_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$ ó

$$C_3 = \frac{3\times(3+1)\times[2(3)+1]}{6} = \frac{3\times4\times7}{6} = \frac{84}{6} = 14$$ ó

$C_3 = 5 + 3^2 = 5 + 9 = 14$

El número de cuadrados en un tablero de longitud de lado 3, es 14.

Además, con la fórmula (2)

Para m = 1, 2, 3

$A_1 = (3 + 1 - 1)^2 = 9$

$A_2 = (3 + 1 - 2)^2 = 4$

$A_3 = (3 + 1 - 3)^2 = 1$

En un tablero de longitud de lado 3, el número de cuadrados de longitud de lado 1 es 9, de longitud de lado 2 es 4 y de longitud de lado 3 es 1.

Se concluye que las fórmulas funcionan para estos valores de n.

Se tiene también:

Si $n = k$, con las fórmulas (1), (3) y (4) se cumple:

$C_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$ ó

$$C_k = \frac{k \times (k+1) \times [2(k)+1]}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$ ó

$C_{k+1} = C_k + (k + 1)^2$

Además, con la fórmula (2):

Para m = 1, 2, 3, … ,k

$A_1 = (k + 1 - 1)^2 = k^2$

$A_2 = (k + 1 - 2)^2 = (k - 1)^2$

$A_3 = (k + 1 - 3)^2 = (k - 2)^2$

…………..

$A_k = (k + 1 - k)^2 = 1$

Se halla el número de cuadrados de longitud 1, 2, … , k en un tablero de longitud de lado $n = k$.

En esta parte se hizo intervención magistral para explicar el concepto de sumatoria, indicando que la expresión $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$ se puede escribir como $\sum_{n=1}^{k} i^2$.

Además del paso inductivo de comparar las expresiones:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ agregar el término consecutivo a cada lado de la igualdad y obtener otra en términos del agregado, como verificación de que las fórmulas son compatibles. Se les hace la sugerencia que lo hagan y realicen las operaciones indicadas.

Escribieron lo siguiente:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k + 1)^2$$

Hay que resaltar las dificultades de la mayoría para realizar las operaciones del lado derecho y luego factorizar. Mediante un proceso guiado al final se pudo llegar a:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k^2+k)(2k+1)+6(k^2+2k+1)}{6}$$

$$= \frac{2k^3+3k^2+k+6k^2+12k+6}{6}$$

$$= \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Se pregunta: ¿Qué se concluye?

Contestaron: Que las fórmulas son compatibles.

¿Qué conclusiones se pueden sacar de la institucionalización de la generalización en el presente problema?

Observando los casos particulares, las fórmulas obtenidas y la verificación de las mismas, los estudiantes llegan a las siguientes conclusiones:

- La fórmula (1) es difícil de utilizar cuando n es un número muy grande.
- La fórmula (3) sólo se puede utilizar cuando se conocen los resultados obtenidos para los casos anteriores a n.
- La fórmula (2) da con precisión los resultados para cualquier valor de n, sin importar que tan grande sea n, ni los resultados anteriores. Por lo que la fórmula más conveniente para hallar el número de cuadrados

que contiene un tablero de longitud de lado n, es: $C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- La suma de los cuadrados de los números naturales desde 1 hasta un número n cualquiera se halla por la fórmula anterior, es decir:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \sum_{n=1}^{k} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Además se agregó que la tabla completa queda:

n	1	2	3	4	5	……	n
$f(n)$	1	5	14	30	55	……	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Se sugirió que la colocaran así de acuerdo con las variables establecidas y al concepto de función, que ya había sido estudiado en el curso regular de matemáticas de 9°.

¿Cuál es la ley general para el problema?

Se dedujo entre todo el grupo:

"En todo tablero de nxn unidades cuadradas, el número total de cuadros que se puede obtener es igual al producto de: el numero de unidades de longitud de su lado, el mismo número aumentado en uno y la suma de estas dos cantidades dividido por seis."

Es decir:

$C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, con $n \in \mathbb{N}$

Hasta esta parte, se puede decir que se cumplió con el proceso de generalización pasando por las etapas ver, describir y registrar; y con los aspectos característicos de cada una de ellas: particularizar, decir las reglas de formación, plantear variables y relaciones y formular o institucionalizar la generalización.

Se pretende con lo que sigue buscar otras alternativas para solucionar el problema, para no encasillar al estudiante por un mismo camino en la búsqueda de regularidades. Como los problemas de generalización tienen como característica el presentar una secuencia de objetos que tienen un patrón de formación, y en este caso, el problema se plantea desde una secuencia de cuadros que llevan a una sucesión de números, para los cuales existen algunas teorías, el objetivo ahora es inducir al estudiante a buscar una estrategia de solución por medio de ***una explicación teórica.***

Para iniciar se les escribe nuevamente el siguiente cuadro:

n	1	2	3	4	5	……
f(n)	1	5	14	30	55	……

Cuando estaban en la búsqueda de regularidades se planteó que cada C_n se puede escribir como una combinación de varios factores de la primera fila. La pregunta que surge es:

De acuerdo con la estructura del problema ¿Cuántos factores es necesario plantear?

Saben que de acuerdo con el número de factores, se obtendrá un polinomio entero y racional cuyo grado será el número de factores. De acuerdo con la secuencia numérica. ¿Cuál será el grado del polinomio que generaliza la situación?

Para responder estas preguntas se sugiere que realicen una tabla con las diferencias de los valores de *f(n)*, para lo cual se presentó la necesidad de simbolizar estas diferencias y se decidió que fuera:

$d_1(n)$: para las primeras diferencias.

$d_2(n)$: para las segundas diferencias

$d_3(n)$: para las terceras diferencias

etc.

La tabla que construyeron fue la siguiente:

n	$f(n)$	$d_1(n)$	$d_2(n)$	$d_3(n)$
1	1	4	5	2
2	5	9	7	2
3	14	16	9	2
4	30	25	11	……..
5	55	36	……..	
6	91	…….		
……..	…….			

¿Qué propiedades se deducen de esta tabla?

Después de un rato de análisis algunos expresaron:

“Cada número diferente a los de la primera fila y primera columna se puede expresar como suma de dos términos de la fila anterior”

Y se mostraron como ejemplo:

5 = 1 + 4	9 = 4 + 5	7 = 5 + 2	
14 = 5 + 9	16 = 9 + 7	9 = 7 + 2	etc.

“En la última columna todos los números son iguales a 2”

“Si se hiciera otra columna todos serían 0”

Utilizando la simbología escogida ¿Cómo se puede simbolizar la primera propiedad?

Con la participación de los alumnos y sugerencias del profesor se llega a:

$f(2) = f(1) + d_1(1)$

$f(3) = f(2) + d_1(2) = (f(1) + d_1(1)) + (d_1(1) + d_2(1)) =$

$= \; f(1) + 2\, d_1(1) + d_2(1)$

$f(4) = f(3) + d_1(3) = (f(1) + 2\, d_1(1) + d_2 (1)) + (d_1(2) + d_2(2))$

$= (f(1) + 2\, d_1(1) + d_2(1)) + (d_1(1) + d_2(1)) + (d_2(1) + d_3(1))$

$= f(1) + 3\, d_1(1) + 3\, d_2(1) + d_3(1)$

De la misma forma se obtuvo:

$f(5) = f(4) + d_1(4) = f(1) + 4\, d_1(1) + 6\, d_2(1) + 4\, d_3(1) + d_4(1)$

$f(6) = f(5) + d_1(5) = f(1) + 5\, d_1(1) + 10\, d_2(1) + 10\, d_3(1) + 5\, d_4(1) + d_5(1)$

…………..

¿Cuáles son los coeficientes de cada expresión final?

Sin problemas escribieron:

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Para el grado en que están los estudiantes deben saber a que corresponden los anteriores coeficientes, por lo tanto se les pregunta: ¿Qué nombre recibe el anterior triángulo de números?

No se dio respuesta, sólo uno dijo que lo había visto pero que no se acordaba como se llama. Por lo que hubo la necesidad de explicarles:

Los coeficientes son los números del triángulo de Pascal. Se obtienen al multiplicar *n* veces un binomio, o al elevar un binomio a la *n*-ésima potencia. Para valores de $n = 0, 1, 2, ...$se tienen respectivamente, los polinomios:

$P_0, P_1, P_2, ... ,P_n$.

Los coeficientes para los respectivos polinomios son los siguientes:

P_0				1			
P_1			1		1		
P_2		1		2		1	
P_3	1		3		3		1

P_4			1	4	6	4	1		
P_5		1	5	10	10	5	1		
......		....							
P_n	1	$\frac{n}{1}$	$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	.....	1		

Después de mostrarles el triángulo de Pascal se inducen a utilizarlo: En las expresiones simbolizadas de la primera propiedad se llegó hasta *f(6)*, como se puede escribir *f(n)* utilizando el triángulo de Pascal? Observen detenidamente los coeficientes utilizados. ¿Qué fila de coeficientes del triángulo de Pascal le corresponde a cada expresión *f(2), f(3), f(4)* etc.?

Finalmente se dieron cuenta que a *f(2)* le corresponden los coeficientes del polinomio P_1, a los de *f(3)* los de P_2, a los de *f(4)* los de P_3 y así sucesivamente.

Entonces a los de *f(n)* le deben corresponde los de P_{n-1}

¿Cuál es la expresión adecuada para *f(n)*?

Al momento se dan cuenta que se debe cambiar *n* por *n-1* en P_n y se escribe:

$$f(n) = f(1) + d_1(1)\frac{(n-1)}{1} + d_2(1)\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} + d_3(1)\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\dots\dots\dots$$

¿Cómo se aplica al problema que estamos resolviendo?

La respuesta es inmediata: reemplazando los valores pertinentes de la tabla anterior:

$$f(n) = 1 + 4(n-1) + 5\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$= 1 + 4(n-1) + \frac{5}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$= \frac{6 + 24n - 24 + 15n^2 - 45n + 30 + 2n^3 - 12n^2 + 22n - 12}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para afianzar el aprendizaje del método anterior y su aplicación a problemas de este tipo se les coloca la siguiente actividad:

Hallar la fórmula general para las sucesiones:

a) 3, 9, 18, 30,......

b) 4, 20, 56, ...

Este método se puede generalizar para resolver cualquier problema que involucre sucesiones de números naturales y no es difícil la aplicación y aprendizaje por parte del estudiante.

Hasta el momento van 9 secciones de intervención pedagógica y los estudiantes han aprendido diversas formas de abordar el problema. En la sección siguiente después de socializar la actividad propuesta y verificar que aplicaron con éxito el método anterior se hace la siguiente pregunta:

¿Se agotarían ya todas las posibilidades de abordar el presente problema?

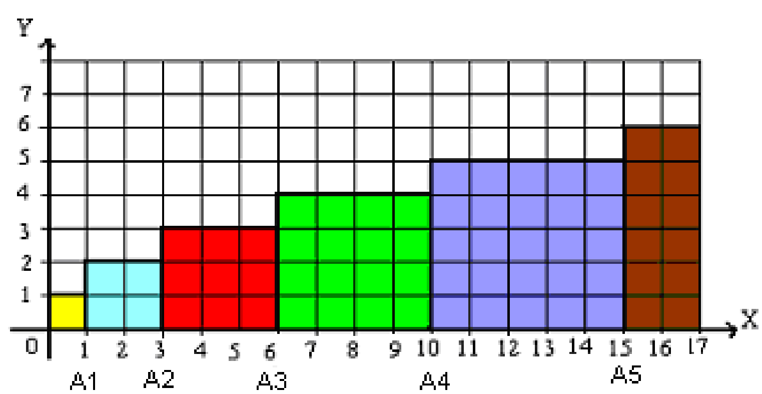
Esta pregunta lleva al estudiante a volver al inicio de la situación problema, revisar y tratar de emprender nuevamente el camino de la generalización pero utilizando otra forma. Después de un rato de búsqueda dicen que no hay otra forma de abordarlo, entonces se les propone mirarlo desde ***una perspectiva geométrica*** en el plano cartesiano y se les propone volver a analizar una de las conjeturas hechas:

El número de cuadros en un tablero, se obtiene sumando los cuadrados de la secuencia de números naturales hasta el número que representa la longitud del lado del tablero.

Y se hace la siguiente pregunta:

¿Cómo se puede representar en el plano cartesiano esta suma de cuadrados? Tengan en cuenta que son cantidades positivas.

Después de varios dibujos se acordó en que el mejor era el siguiente:



Hagamos conjeturas sobre el dibujo. ¿Qué características se observan?

Hubo la necesidad de complementar con otra pregunta. Surgían pocas ideas.

¿Qué es en esta figura el caso 1, caso 2, ..., caso *n*?

Ahora si participaron:

Caso 1: La cantidad de cuadros que hay desde el origen del plano hasta A1

Caso 2: La cantidad de cuadros que hay desde el origen hasta A2.

Caso n: La cantidad de cuadros que hay desde el origen hasta A*n*

¿Cómo se halla la cantidad de cuadros en cada caso?

La respuesta fue inmediata: "Multiplicando el largo por el alto"

Caso 1: 1x1

Caso 2: 3x2

Caso 3: 6x3

....

Se les pide que realicen una tabla de valores:

Caso	1	2	3	4	5	6	....
Largo	1	3	6	10	15	21	....
Alto	1	2	3	4	5	6	....
Total	1x1	3x2	6x3	10x4	15x5	21x6	....

¿Qué se necesita para hallar el total de cuadros en el caso *n*?

Sin dificultades dan la respuesta: El largo y el alto en términos de *n*

¿Como se pueden hallar?

La mayoría dijo que por el método de las diferencias.

Las fórmulas que se hallaron son:

$\frac{n(n+1)}{2}$ para el largo y *n* para el alto.

Y el total de cuadros para el caso *n* es:

$$n \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

¿Es esta la respuesta que se necesita, para resolver el problema?

Después de mirar el dibujo detenidamente. Contestan: No, se necesita la suma de los cuadritos que hay en cada cuadrado.

¿Qué se puede hacer para lograrlo?

“Restarle los demás cuadritos”.

¿Cómo sería en cada caso?

Analizando el cuadro y realizando algunas operaciones, explican:

En el caso 1, se resta 0 cuadritos

En el caso 2, 1 cuadrito

En el caso 3, 4 cuadritos

En el cuatro, 10 cuadritos.

Etc.

Se les pide realizar una tabla de valores con estos datos.

Elaboran la siguiente:

Caso	1	2	3	4	5	....
Cuadritos	0	1	4	10	20	....

¿Y en el caso *n*?

Por el método de las diferencias obtuvieron:

$$\frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

¿Qué se debe hacer ahora?

Respuesta inmediata: “Restar las dos fórmulas halladas”

Y proponen:

$$\frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

No presentaron dificultad para simplificar esta expresión.

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(n-1)}{6} &= \frac{3n^2(n+1) - n(n+1)(n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(3n(n-1))}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Que es la expresión obtenida con anterioridad para C_n

Con 11 secciones de trabajo con los estudiantes se ha llegado a estas instancias de la intervención pedagógica en una búsqueda inductiva de generalizaciones que inicia con calcular el número de cuadros que hay en un tablero de ajedrez y culmina con una formulación que permite hallar el número de cuadros en un tablero de cualquier dimensión. Se muestra como con un análisis detallado de las instancias particulares se abren variados caminos para abordar la solución de un problema como los que involucran generalización. En todo el proceso seguido se hace énfasis en los aspectos en los cuales los alumnos presentaron dificultades en la prueba inicial como son el planteamiento de variables y de relaciones y en su correcta simbolización.

En estas instancias de la situación problema, donde ya se ha hecho la construcción del objeto de estudio y se ha trabajado en todos los aspectos de la generalización matemática, es importante hacer una retrospección y hacer una ***conceptualización***: repasar los conceptos utilizados y aprendidos durante el transcurso de la situación y verificar como fue el afianzamiento sobre los temas conocidos y el aprendizaje de los temas nuevos.

De entre los componentes conocidos mas importantes destacados por los estudiantes y profesor, se tienen los siguientes:

1. Número natural: Fue uno de los más importantes y más utilizados, se hizo mucho énfasis en su adecuada utilización en la simbolización de expresiones definidas en este conjunto numérico. Se trabajaron las diferentes operaciones y algunas de sus propiedades. Se desarrollaron sucesiones importantes como la misma secuencia de los números naturales, la de los cuadrados de estos números y la secuencia de sumas parciales como base para otras sucesiones.
2. Función: Se hizo referencia al concepto de variable y a su simbolización de acuerdo con el conjunto numérico en cual se trabaja, lo mismo que la diferenciación entre variable dependiente e

independiente.

3. Polinomios: Se destacaron las diferentes expresiones polinómicas racionales que pueden resultar en problemas de generalización y su caracterización de acuerdo con el grado, ya que de el depende el número de factores que pueda dar su factorización. Las diferentes operaciones entre ellos y al desarrollo binomial que se origina cuando se multiplican por si mismo, resaltando en este caso los coeficientes que se obtienen, definidos en el triángulo de Pascal y su importancia para temas como la combinatoria.

Entre los conceptos considerados nuevos se destacan los siguientes:

1. Sumatoria: Siendo este un tema de 9° grado de educación básica, aun no había sido estudiado por los estudiantes, se realizaron algunos ejemplos para resaltar el manejo del subíndice y del superíndice, destacando que el primero indica donde empieza la suma y el otro donde termina, así como la aplicación de algunas de sus propiedades, como la suma de una constante, la de un término lineal y un término cuadrático.
2. Diferencias finitas: Se resaltó este método como el más apropiado y general para hallar las fórmulas generales de sucesiones de números naturales, sobre todo para aquellas que llevan a expresiones polinómicas de grado superior a tres.

En este apartado es bueno también analizar las competencias alcanzadas por los estudiantes:

Según la forma como se clasificaron los contenidos, también aparecen dos tipos de competencias: las que los estudiantes afianzaron o las necesarias para poder emplear adecuadamente la generalización y las que aprendieron o las que surgen como consecuencia de haber conocido y estudiado la generalización:

Entre las primeras están:

- Reconocer el conjunto de los números naturales, sus operaciones, propiedades y utilización en diferentes conceptos matemáticos.
- Identificar los diferentes tipos de funciones, sus características, componentes y definición en los diferentes conjuntos numéricos.
- Identificar las diferentes expresiones polinómicas, las operaciones y factorización entre ellas.
- Identificar los coeficientes dados por el desarrollo binomial y relacionarlos con el triángulo de Pascal.

Entre las segundas están:

- Reconocer e interpretar correctamente el símbolo de sumatoria aplicado sobre una variable natural.
- Resolver problemas que involucren secuencias y patrones.

- Construir relaciones y fórmulas para aspectos generales en resolución de problemas.
- Utilizar el método de las diferencias finitas para analizar y resolver sucesiones con alto grado de dificultad.

Se proponen a continuación una serie de ***actividades de afianzamiento*** para que el estudiante practique y ponga en práctica lo estudiado en la intervención pedagógica y adquiera destrezas en la generalización matemática:

1. Decida como se forma la secuencia en dada uno de los casos que se presentan a continuación. Escriba una expresión general para hallar cualquier término de la secuencia, y de una razón que sea convincente para explicar por que su generalización es correcta.[12]

   a. 1 + 2 = 3

      4 + 5 + 6 = 7 + 8

      9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15

   b. 1 x 2 x 3 x 4 + 1 = ?

      2 x 3 x 4 x 5 +1 = ?

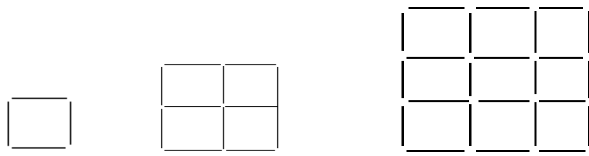
      3 x 4 x 5 x 6 + 1 = ?

   c. 1/2 x 2/3 x 3/4 = 1/4

      1/2 x 2/3 x 3/4 x 4/5 = 1/5

[12] Tamdo de Mason J. Rutas y raíces del álgebra. P. 144.

2. Hallar el número de palillos y el número de cuadros de la figura n.

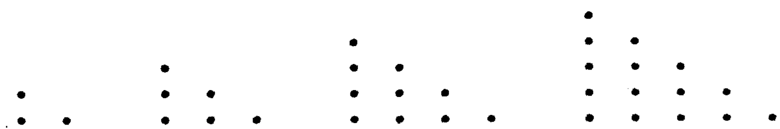


……….

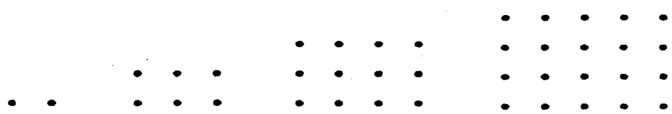
3. Se dibuja una circunferencia en una lámina de madera y se clavan varias puntillas en ella, luego se unen estas (cada una, con cada una de las demás), con trozos de hilo. ¿Cuántos trozos de hilo se necesitan para unir n puntillas?

4. Hallar el número de puntos en la figura n.

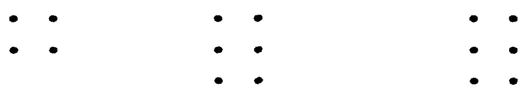
a.



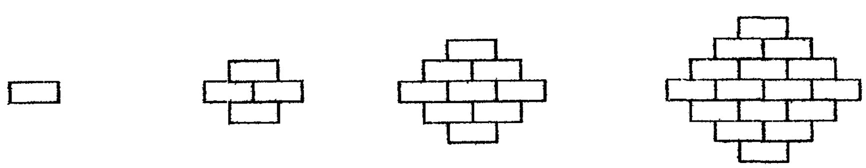
b.



c.

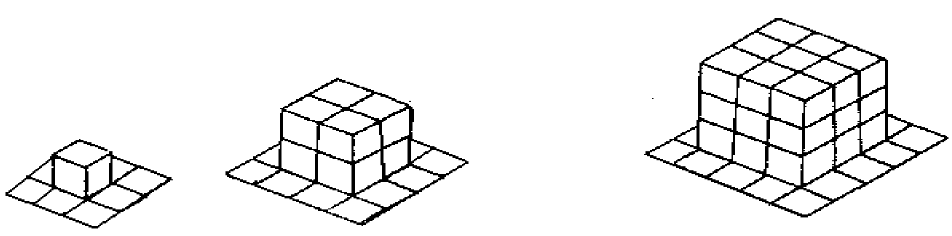


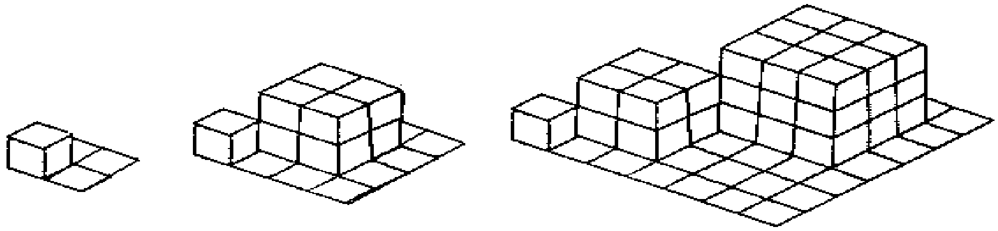
5. Halle el total de rectángulos en la figura n



6. Halle el número de cubos y el número de cuadrados en la figura n.

a.



b. 

Como instante final de la intervención pedagógica se hace una ***evaluación*** de los logros más significativos alcanzados con la situación problema planteada:

El desarrollo de la intervención pedagógica fue altamente significativa, si se tiene en cuenta la gran actividad de los alumnos con sus aportes en la elaboración de los nuevos conocimientos. La gran cantidad de interrogantes que se formulaban, tendiendo siempre hacia nuevas conjeturas, fueron el pilar de las generalizaciones obtenidas. El empeño del grupo a lo largo de la intervención a dar respuesta a las preguntas se convertía en el principal aliciente para continuar adelante hasta llegar a los objetivos propuestos.

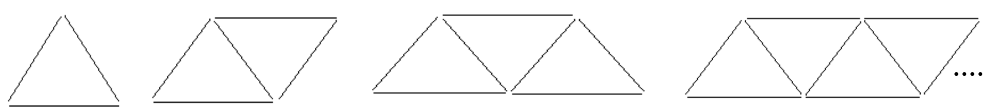
Durante el desarrollo de la situación problema, fue visible el gran progreso de los alumnos al definir variables, el acertado uso de la representación simbólica, al relacionar los distintos conceptos y procesos de desarrollo adquiridos vinculando su influencia en la estructuración de nuevos saberes y en la constante creación de nuevos problemas. Se logró efectivamente así, movilizar el pensamiento de los estudiantes hacia la elaboración de nuevos conceptos, de nuevos conocimientos y cada vez poniendo en práctica formas diversas de llegar a iguales resultados por múltiples caminos. La capacidad para establecer relaciones y descubrir reglas de formación entre los objetos de estudio, se vio altamente reforzada, aumentando cada vez la cantidad y variedad de descubrimientos.

6.3. PRUEBA FINAL:

Para esta prueba se seleccionaron 5 problemas con características similares a los de la prueba inicial, de manera que sirvieran para hacer un balance sobre el mejoramiento de los estudiantes en la capacidad para realizar generalizaciones matemáticas. De igual manera se analiza en cada uno de ellos el desempeño del alumno en cada una de las etapas por las que se debe pasar cuando se realizan actividades de generalización. En esta serie de problemas, debido a que el estudiante ya ha adquirido cierta experiencia en resolver este tipo de problemas, por la prueba inicial y la situación problema desarrollada, sólo se la dará el enunciado y por cuenta propia deberá realizar todo el proceso y pasar por cada una de las etapas de generalización. Se espera que el estudiante en la etapa del *ver* particularice con números o que represente por medio de gráficos los primeros elementos de las secuencias hasta descubrir la regularidad, configuración o patrón del problema dado; en la etapa *describir* enuncie las reglas de formación o las relaciones que observa en forma verbal de acuerdo con lo observado en la primera etapa y en la etapa *registrar* organizar los resultados, defina variables, establezca simbólicamente las relaciones encontradas en la etapa anterior, enuncie la ley general que resuelve la situación y por último utilice la ley encontrada con valores mucho más grandes como verificación de que esta se cumple. Como en la prueba inicial estos problemas son enunciados en un lenguaje sencillo y de fácil comprensión para el estudiante. En esta prueba, a diferencia de la anterior, se hace exigencia al estudiante que utilice la simbología adecuada para las variables de acuerdo con lo que se está trabajando, de igual manera en el planteamiento de relaciones y establecimiento de la ley que resuelve el problema, esto debido a que en la intervención pedagógica se trabajaron estos aspectos.

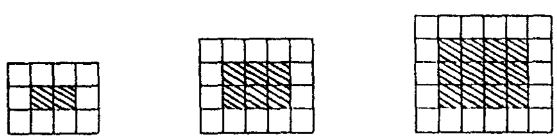
Los problemas de la prueba final son:

1. ¿Cuál es el resultado de sumar tres números enteros consecutivos?
2. Halle el número de palillos necesarios para formar cualquier figura.



....

3. Hallar la suma de los n primeros números naturales impares.
4. Hallar la suma de cubos de los n primeros números naturales.
5. Hallar el número de cuadros sombreados, cuadros en blanco y total de cuadros en cualquier de las figuras:



....

6.3.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA PRUEBA FINAL

A continuación se presentan dos tablas de resultados de la prueba.

En la primera se tiene el puntaje obtenido (De 0 a 10) por cada estudiante en cada aspecto evaluado en cada una de las etapas y problemas.

En la segunda tabla se muestra la suma de puntos de cada estudiante en cada uno de los problemas, en los aspectos evaluados y en las etapas del proceso de generalización. Como cada uno de los cinco aspectos se calificó de 0 a 10, la suma dará un número comprendido entre 0 y 50.

Se muestra además, la suma de estos puntajes, el promedio y el puntaje obtenido por el grupo en cada problema, aspecto evaluado y etapa.

Para esta tabla de resultados se utilizó la siguiente simbología:

N° E: Número de encuesta.

Cada problema se enumeró del 1 al 5: P1, P2, P3, P4, P5

Ver, Des y Registrar: Corresponde a las etapas de Ver, Describir y Registrar respectivamente.

P, F, V, R, G: Corresponde a los aspectos de particularización, establecimiento de la regla o patrón de formación en forma verbal, definición de variables y simbolización de las reglas enunciadas y formulación de la generalización, respectivamente.

SUMA: Suma de puntos PROM: Promedio PUNT: puntaje

Cada aspecto evaluado tendrá una calificación de 0, 5 o 10 puntos de acuerdo con el siguiente criterio:

0: Si el estudiante no contestó o su respuesta fue completamente errada.

5: Si presentó errores en su respuesta, por ejemplo en la particularización, puede responder correctamente con algunos números y errar con otros.

10: Si la respuesta fue totalmente acertada.

N° E	PROBLEMA 1					PROBLEMA 2					PROBLEMA 3					PROBLEMA 4					PROBLEMA 5				
	VER1	DES1	REGISTRAR1			VER2	DES2	REGISTRAR2			VER3	DES3	REGISTRAR3			VER4	DES4	REGISTRAR4			VER5	DES5	REGISTRAR5		
	P1	F1	V1	R1	G1	P2	F2	V2	R2	G2	P3	F3	V3	R3	G3	P4	F4	V4	R4	G4	P5	F5	V5	R5	G5
1	10	10	10	10	5	10	10	10	5	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	5	0	0
2	10	10	5	0	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5
4	10	5	0	0	0	10	5	0	0	0	10	5	0	0	0	10	10	10	10	10	10	5	0	0	0
5	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	5
6	10	10	10	10	5	10	10	10	10	5	10	10	10	10	10	10	5	0	0	0	10	10	0	0	0
7	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
8	10	10	10	10	5	10	5	5	5	0	0	0	0	10	10	10	10	5	10	10	10	10	5	5	0
9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	10	10	5	0	0	10	10	10	5	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
11	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	0	10	10	10	10	10	10	10
12	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	0	0	10	10	10	10	10
13	10	10	10	10	10	10	10	10	5	0	10	5	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
14	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	0	0	0	10	10	5	5	5
15	10	5	0	0	0	10	10	5	0	10	10	10	10	10	10	10	10	5	10	0	10	5	0	0	0
16	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
17	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	10	10	10	5	0	10	10	10	10	10	10	10	5	5	5
18	10	10	10	5	0	10	10	10	10	10	10	5	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
19	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
20	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	5	10	10	10	0	0	10	10	10	10	10
21	10	10	5	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	10	5	0	0	0	5	0	0	0	0
22	10	10	10	10	10	10	10	5	0	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
23	10	10	10	10	10	10	5	10	10	10	10	0	0	0	0	10	10	10	10	0	10	6	10	10	10
24	10	10	10	10	5	10	10	10	5	10	10	10	10	10	10	10	10	5	5	0	10	10	5	5	5
25	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
SUMA	250	240	215	195	180	250	235	225	195	190	240	215	210	205	190	250	230	195	195	170	245	221	185	175	165
PROM	10	9,6	8,6	7,8	7,2	10	9,4	9	7,8	7,6	9,6	8,6	8,4	8,2	7,6	10	9,2	7,8	7,8	6,8	9,8	8,8	7,4	7	6,6

TABLA 3

N° E	P1	P2	P3	P4	P5	P	F	V	R	G	VER	DES	REG	PROM
1	45	35	50	50	20	50	45	45	35	25	50	45	35	40
2	25	50	50	50	50	50	50	45	40	40	50	50	41,7	45
3	50	50	50	50	45	50	50	50	50	45	50	50	48,3	49
4	15	15	15	50	15	50	30	10	10	10	50	30	10	22
5	50	50	50	50	40	50	50	50	45	45	50	50	46,7	48
6	45	45	50	15	20	50	45	30	30	20	50	45	26,7	35
7	50	50	35	50	50	50	50	50	45	40	50	50	45	47
8	45	25	20	45	30	40	35	25	40	25	40	35	30	33
9	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
10	25	45	50	50	50	50	50	45	35	40	50	50	40	44
11	50	50	50	35	50	50	45	40	50	50	50	45	46,7	47
12	50	50	50	30	50	50	50	50	40	40	50	50	43,3	46
13	50	35	15	50	50	50	45	40	35	30	50	45	35	40
14	50	50	50	15	35	50	45	35	35	35	50	45	35	40
15	15	35	50	35	15	50	40	20	20	20	50	40	20	30
16	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
17	50	45	35	50	35	50	50	45	40	30	50	50	38,3	43
18	35	50	45	50	50	50	45	50	45	40	50	45	45	46
19	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
20	50	50	40	30	50	50	50	50	35	35	50	50	40	44
21	35	50	45	15	5	45	35	25	20	25	45	35	23,3	30
22	50	25	50	50	50	50	50	45	40	40	50	50	41,7	45
23	50	45	10	40	46	50	31	40	40	30	50	31	36,7	38
24	45	45	50	30	35	50	50	40	35	30	50	50	35	41
25	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
SUMA	1080	1095	1060	1040	991	1235	1141	1030	965	895	1235	1141	963,4	1053
PROM	43,2	43,8	42,4	41,6	39,6	49,4	45,6	41,2	38,6	35,8	49,4	45,64	38,53	42,13
PUNT	8,64	8,76	8,48	8,32	7,93	9,88	9,13	8,24	7,72	7,16	9,88	9,13	7,71	8,43

Tabla 4

A continuación se presentan 4 gráficos estadísticos en los cuales se comparan diferentes aspectos de las tablas anteriores que ayudarán a sacar conclusiones para el análisis cuantitativo y cualitativo de las pruebas realizadas.

Los gráficos son los siguientes:

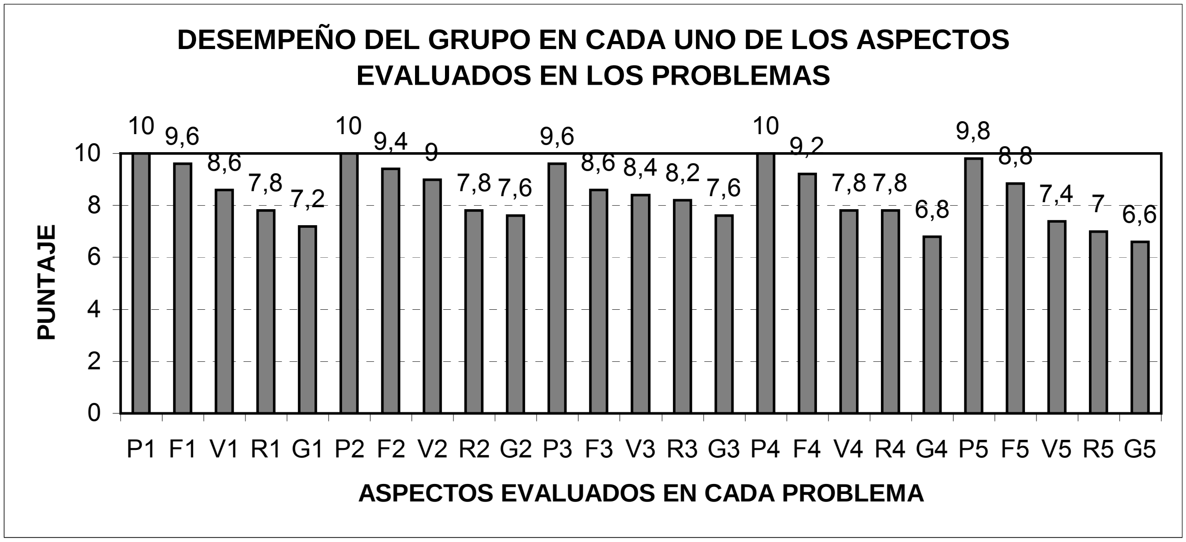


GRAFICO 5

Se muestra en el eje *y* el puntaje (de 0 a 10) por cada aspecto evaluado en cada problema y en el eje *x* los aspectos evaluados.

El grupo presentó el mejor desempeño en el aspecto de particularización (puntaje entre 9,6 y 10), se nota un leve descenso en los siguientes aspectos, pero de todas maneras son buenos, están por encima de 7; en reglas de formación el puntaje estuvo entre 8,6 y 9,6; planteamiento de variables entre 7,4 y 9,0; planteamiento de relaciones entre 7,0 y 8,2; establecimiento de la generalización entre 6,6 y 7,6. Lo que muestra una gran superación con respecto a la prueba inicial, en donde sólo se destacó la particularización y quedaron los puntajes de los demás aspectos muy por debajo de 5.

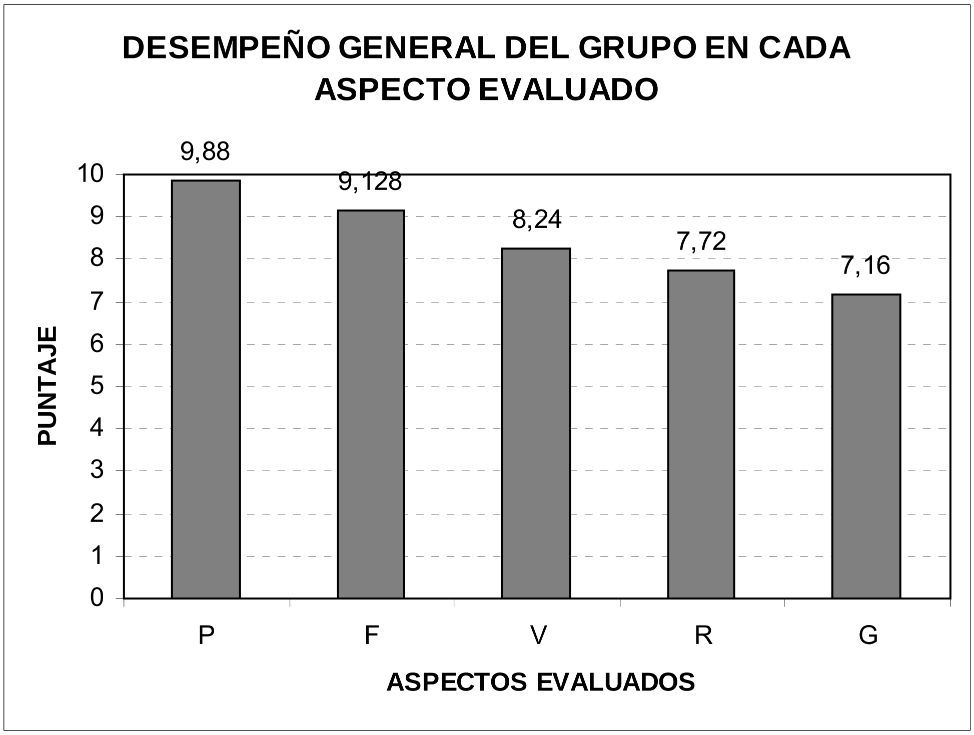


GRAFICO 6

Se muestra el puntaje de 0 a 10 correspondiente al promedio de puntos de cada aspecto en los cinco problemas.

Se observa que el desempeño del grupo en cada aspecto es muy bueno, destacándose la particularización con un promedio en la prueba de 9,88 puntos y reglas de formación con 9,12; rebaja de ahí en adelante un poco obteniendo 8,24 en planteamiento de variables; 7,72 en planteamiento de relaciones y 7,16 en formulación de la generalización, siendo de todas formas buenos puntajes que indican que la prueba final ha sido superada en gran medida, en cuanto rendimiento, a la prueba inicial y las experiencias de la intervención pedagógica han ayudado en gran medida al razonamiento matemático que tiene ver con la generalización en problemas de sucesiones numéricas y secuencias gráficas.

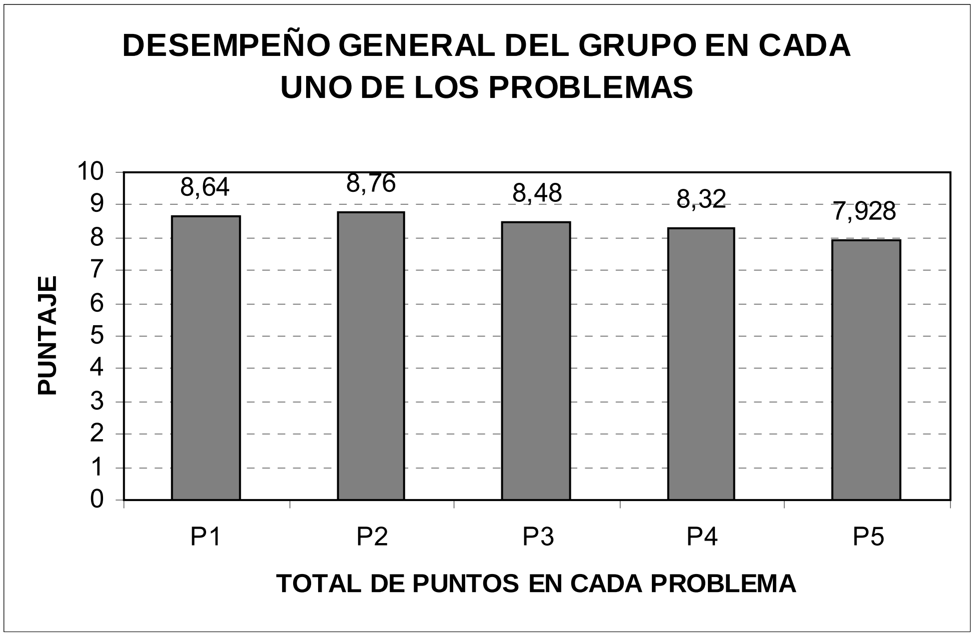


GRAFICO 7

Se muestra el puntaje de 0 a 10 en cada problema, este puntaje se obtiene sumando los puntales de los cinco aspectos evaluados en cada problema y dividiendo por 5.

Se observa buen rendimiento del grupo en cada problema, muy parejos los resultados en los tres: 8,64 en el primero, 8,76 en el segundo, 8,48 en el tercero, 8,32 en el cuarto y 7,92 en el quinto, el último es el más bajo debido a que su generalización se hace con una expresión polinómica mas compleja. Esto demuestra que los estudiantes han adquirido habilidades para enfrentar este tipo de problemas y resolverlos abordando cada uno de los aspectos y etapas del proceso de generalización.

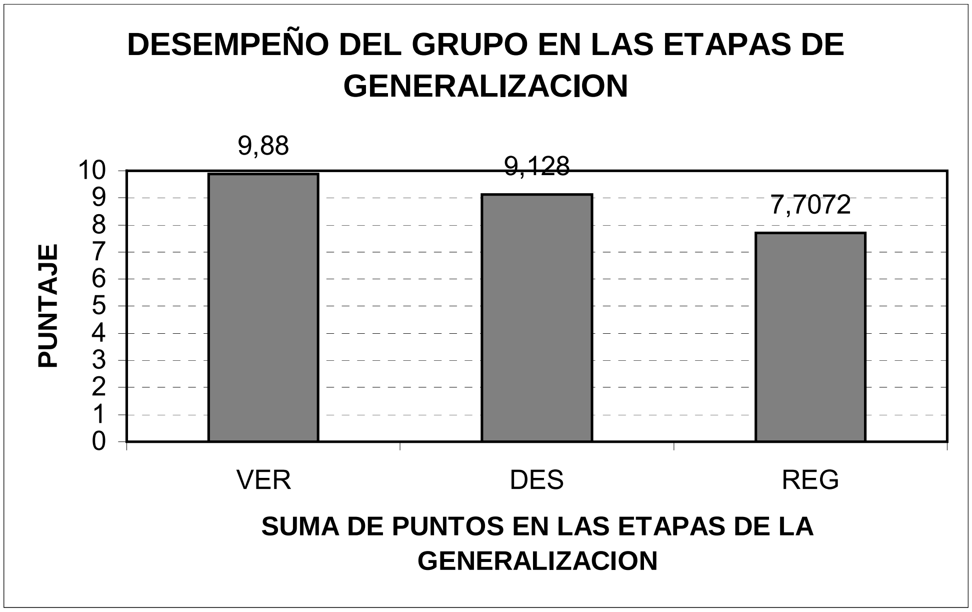


GRAFICO 8

Se muestra un puntaje entre 0 y 10, correspondiente al promedio de los puntajes de cada etapa en cada problema.

Se nota buen desempeño del grupo en cada una de las etapas, resalta entre todas la etapa *ver* coincidiendo con el puntaje obtenido en el aspecto particularización 9,88, también se destaca en esta ocasión la etapa describir con 9,12 puntos lo cual no pasó en la prueba inicial, la de menos puntaje es registrar con 7,7; que es la etapa donde el estudiante debe hacer uso de la simbología matemática. Estos puntajes promediados dan como resultado 8,9; que corresponde en forma general a un gran desempeño del grupo de estudiantes en problemas que implican realizar generalizaciones matemáticas, sobre todo en aquellos de patrones en secuencias gráficas y numéricas.

Se hace ahora un **análisis cualitativo** de esta prueba, para mostrar como se desenvolvieron los estudiantes en cada uno de los problemas y etapas de la generalización.

Esta prueba fue realizada en dos secciones, 3 problemas en la primera y dos en la segunda, cada una en un tiempo de dos horas.

En general, se notan mejores resultados que en la prueba inicial en cada una de las etapas del proceso de generalización y en los aspectos que se evaluaron.

Se hace nuevamente la aclaración de que por ser 9° grado de educación básica secundaria un grado donde los estudiantes ya deben tener un pensamiento algebraico lo suficientemente desarrollado para atender a las diferentes temáticas que se les imparten, las etapas no se ciñen al significado estricto de las palabras con que se designan o como lo pueden interpretar algunos lectores de los trabajos de Mason. Por ejemplo algunos pueden interpretar que la etapa *registrar* se refiere únicamente a la escritura o consignación en un cuaderno de notas de lo que ya se ha analizado o se tiene en mente; en este trabajo en cada etapa se ha venido haciendo escritura o registro de lo que se piensa y concluye, y la etapa registrar se refiere exclusivamente al registro simbólico de las regularidades halladas. En cada prueba el estudiante escribe desde un comienzo todo lo que observa, distinguiendo en la etapa ver, principalmente la construcción de casos particulares que le permitan dar con el invariante o patrón de formación. En la etapa describir el planteamiento verbal o ejemplificado en casos concretos las regularidades vistas en los casos particulares y en la etapa registrar que utilice una simbología adecuada para escribir lo planteado en la etapa anterior.

En el análisis cualitativo de la prueba final no se hará una descripción detallada problema a problema de lo que los estudiantes hicieron, sino que se analiza lo realizado en cada una de las etapas tomando los problemas en forma global en cada una de ellas.

En la etapa *ver*, en los cinco problemas de la prueba no se presentaron dificultades, todos los estudiantes encontraron fácilmente varios términos particulares de lo que se pedía, unos hallaron muchos, otros menos, pero los suficientes como para darse cuenta de la regularidad presentada. Algunos errores que se encontraron son de operatividad (sumas o multiplicaciones mal hechas), más por descuido que por falta de fundamento.

En la etapa *describir*, tampoco se presentaron mayores dificultades, la experiencia adquirida en esta etapa en los problemas de la prueba de inicio y la intervención pedagógica donde se realizaron variados ejercicios para adquirir habilidad para detectar regularidades o enunciar reglas de formación, y donde se resaltó la tabla de valores como una herramienta útil para visualizar al tiempo los valores de las variables independiente y dependiente, y donde fácilmente, por medio de flechas u otros símbolos se pueden combinar los distintos elementos para mostrar las regularidades, ayudó al mejoramiento de los alumnos.

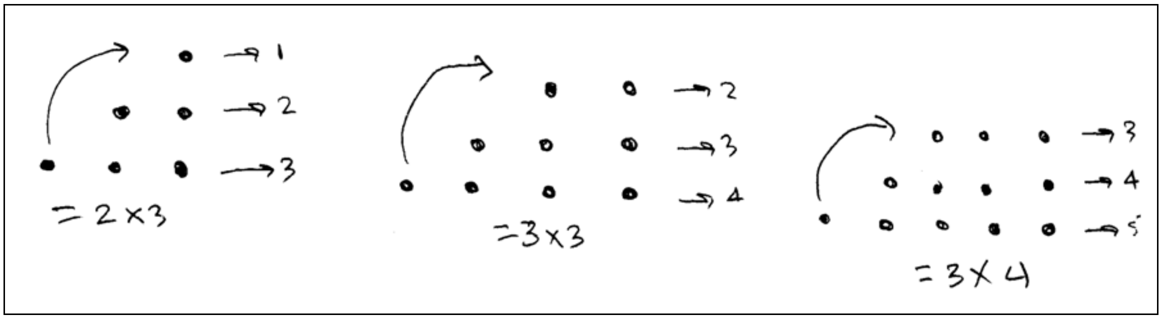
El grupo de estudiantes, en su totalidad, después de particularizar y hallar por lo menos 8 valores para *f(n)*, organizaron sus datos en una tabla de doble entrada (horizontales o verticales) e intentaron relacionar las variables definidas, aplicando la propiedad de que cualquier valor de *f(n)* puede escribirse en términos de *n*. En esta etapa de estas pruebas el grupo de estudiantes ya tiene la ventaja de saber que lo que se está haciendo es un trabajo con funciones donde los valores de *n* son los números enteros positivos para los cuales les corresponde un solo valor determinado por una regularidad expresable por una fórmula en términos de *n*.

Hay que resaltar la apropiación y la interiorización que el grupo de estudiantes logra del concepto de función con el trabajo realizado lo cual les servirá para resolver problemas de diversos tipos.

En esta etapa del proceso, es bueno resaltar, la tendencia del estudiante, en cada uno de los problemas a realizar un dibujo o gráfico, esto lo lograron en todos los problemas excepto en el cuarto, donde se pedía hallar la suma de los cubos de los *n* primeros números naturales; los dibujos expresaban algunas de las regularidades encontradas.

Veamos algunos de los dibujos:

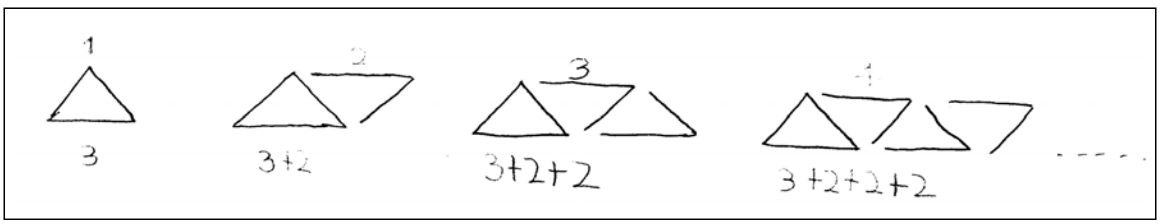
En el problema 1, donde se pide al estudiante hallar la forma general para sumar tres números consecutivos, utilizaron, en su mayoría, puntos para su representación:



Realizado por Valentina M. Estudiante N° 15 en las tablas de Resultados

En cada dibujo la flecha significa que el punto se quita de donde está y se coloca donde lo indica la flecha, quedando siempre un cuadro cuyo producto de lados da la suma de los números que hay a la derecha.

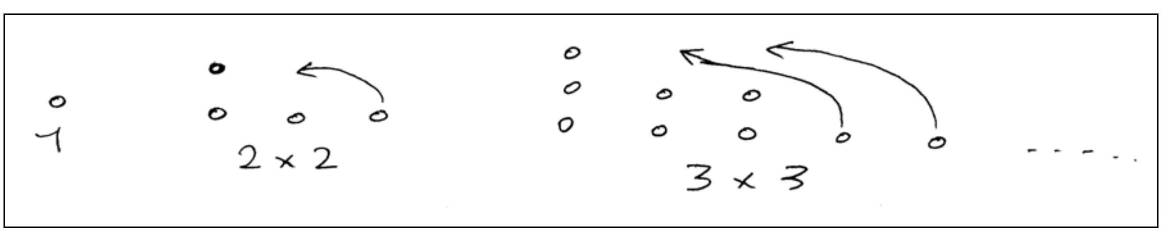
En el segundo problema, donde se pide hallar el número de palillos necesarios para formar cualquier figura *n* triángulos, habían dibujos como los siguientes:



Realizado por Verónica R. Estudiante N° 17 en las tablas de resultados

Es una buena forma de hallar la regularidad en la secuencia.

En el tercer problema, donde se pide hallar la suma de los *n* primeros números naturales impares, también utilizaron puntos para representar la secuencia:



Realizado por Julián Higuita. Estudiante N° 3 en tablas de resultados

Se nota que las flechas indican como deben desplazarse los puntos para hallar la expresión que identifica la regularidad.

Los dibujos realizados, la presentación de los datos en tablas de doble entrada y el relacionar por medio de fechas los elementos de *n* con los de *f(n)* se convirtieron en herramientas importantes para los estudiantes relacionar los elementos que intervienen en un problema y encontrar patrones o reglas de formación lo cual les facilitó también, la habilidad para enunciarlas verbalmente.

En la etapa *registrar* se evidenciaron grandes avances de los estudiantes en la simbolización matemática: la utilización de variables, establecimiento de relaciones y en formular generalizaciones. En la prueba inicial se presentaron muchos errores en la traducción de expresiones verbales a expresiones simbólicas o cuando se hacía, se utilizaba una que no era la apropiada, en la presente prueba se mejoró en alto grado este aspecto. En los tres primeros problemas todos los estudiantes se desempeñaron bien en esta etapa, escribieron apropiadamente las variables y las relaciones involucradas, e igualmente formularon las generalizaciones respectivas. Eran problemas sencillos que conducían a expresiones lineales, donde se podían realizar gráficos y visualizar rápidamente la regularidad. En los otros dos problemas algunos presentaron un poco de dificultad debido a que eran problemas más complejos que conducían a expresiones cuadráticas o cúbicas, era difícil la construcción de gráficos y por lo tanto las regularidades no eran inmediatas;

lo cual les impidió formular la generalización en forma adecuada.

En términos generales la prueba final mostró que los estudiantes mejoraron en gran medida respecto a la prueba inicial, hubo apropiación de términos y simbología matemática, se reforzaron conceptos matemáticos indispensables para grados posteriores como es el caso de función, se desarrollaron habilidades para establecer generalizaciones, para pasar de lo particular a lo general, resaltando de esta forma la importancia del álgebra elemental.

6.4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se presentan unos gráficos estadísticos donde se realiza una comparación de las dos pruebas:

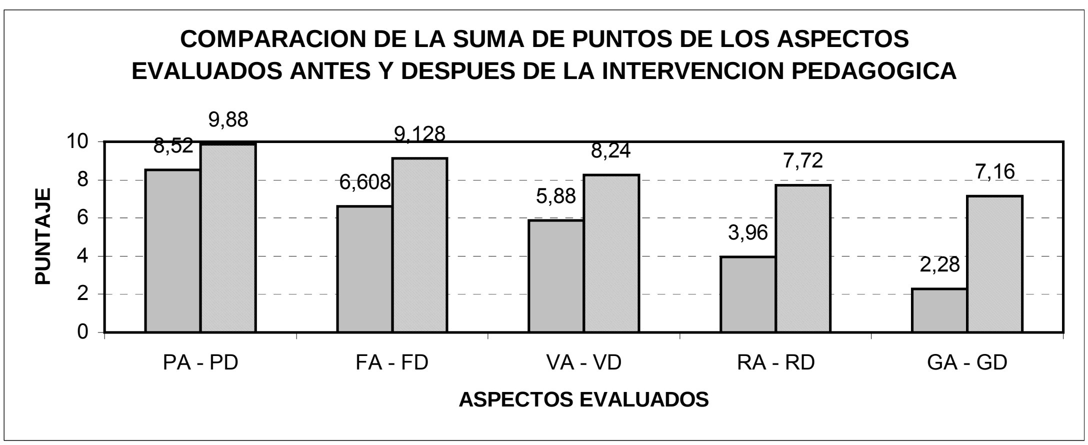


GRAFICO 9

En este gráfico se comparan los puntajes obtenidos por el grupo de estudiantes en las dos pruebas en cada aspecto evaluado antes y después de la intervención pedagógica, la nomenclatura es la siguiente:

PA –PD: Particularización antes y después de la intervención.

FA- FD: Reglas de formación antes y después.

VA – VD: Planteamiento de variables antes y después.

RA – RD: Planteamiento de relaciones.

GA – GD: Formulación de la generalización

El puntaje se obtiene sumando los puntos respectivos en cada problema y dividiendo por 5.

En todos se nota una gran mejoría: En la particularización de 8,52 a 9,88; en reglas de formación de 6,6 a 9,12; en planteamiento de variables de 5,88 a 8,24; en planteamiento de relaciones de 3,96 a 7,72 y en formulación de la generalización de 2,28 a 7,16; pero hay que resaltar los últimos tres aspectos en donde se presentaban las mayores dificultades y se tenía en la primera prueba un puntaje de reprobación, no hay un 100% de superación en la segunda prueba, pero si un gran avance.

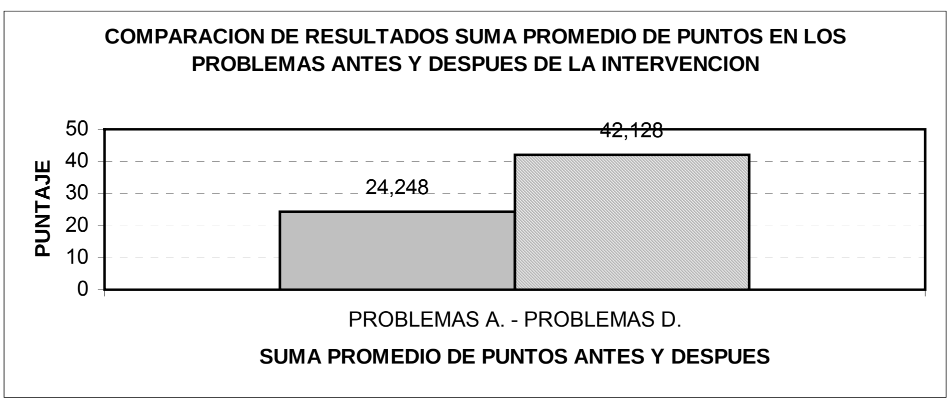


GRAFICO 10

En este gráfico se comparan los resultados obtenidos por el grupo de estudiantes en los problemas de la prueba inicial y la prueba final.

la nomenclatura es la siguiente:

PROBLEMAS A.: Problemas de la prueba inicial, antes de la intervención.

PROBLEMAS D.: Problemas de la prueba final, después de la intervención.

El puntaje se obtuvo sumando los puntajes obtenidos en cada problema de las respectivas pruebas.

Se observa una gran mejoría, mientras que en la primera se tiene un puntaje, que de acuerdo con la forma como se calificaron, se considera reprobatorio (48% del puntaje máximo), en la segunda se tiene un alto puntaje (84% del puntaje máximo), lo cual muestra nuevamente el avance del grupo de estudiantes.

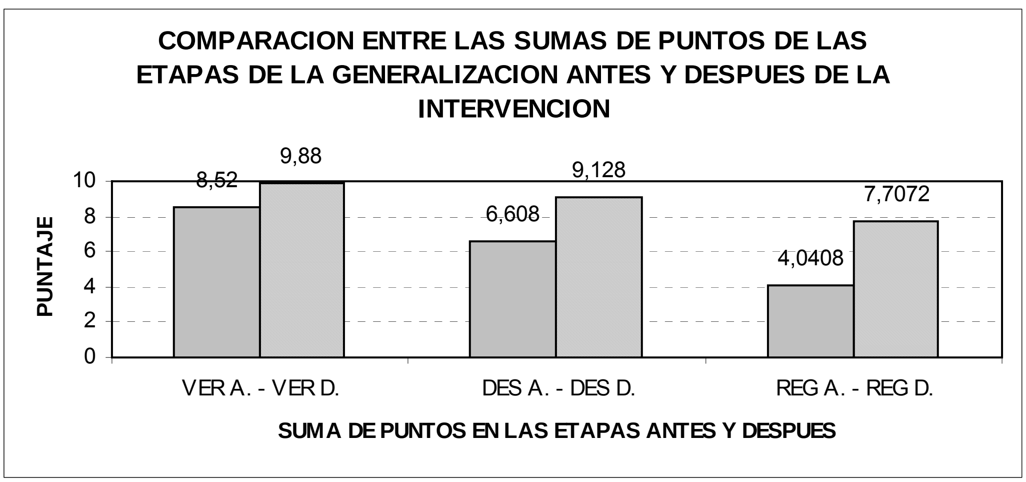


GRAFICO 11

En este gráfico se comparan los puntajes obtenidos por el grupo de estudiantes en las dos pruebas en las etapas de generalización antes y después de la intervención pedagógica, la nomenclatura es la siguiente:

VER A. – VER D.: Etapa ver antes y después de la intervención.

DES A. – DES D.: Etapa describir antes y después.

REG A. – REG D.: Etapa registrar antes y después de la intervención.

El puntaje se obtiene sumando los puntos respectivos en cada etapa de los problemas y dividiendo por 5.

Se nota la diferencia entre las etapas de ambas pruebas: En la etapa ver se pasó de 8,52 a 9,88; en la describir de 6,6 a 9,12 y registrar de 4,04 a 7,7; hay gran mejoría sobre todo en la etapa registrar que es donde se necesita hacer uso de expresiones netamente matemáticas. Además es en la única donde se obtiene un puntaje reprobatorio en la primer prueba y aprobatorio en la segunda.

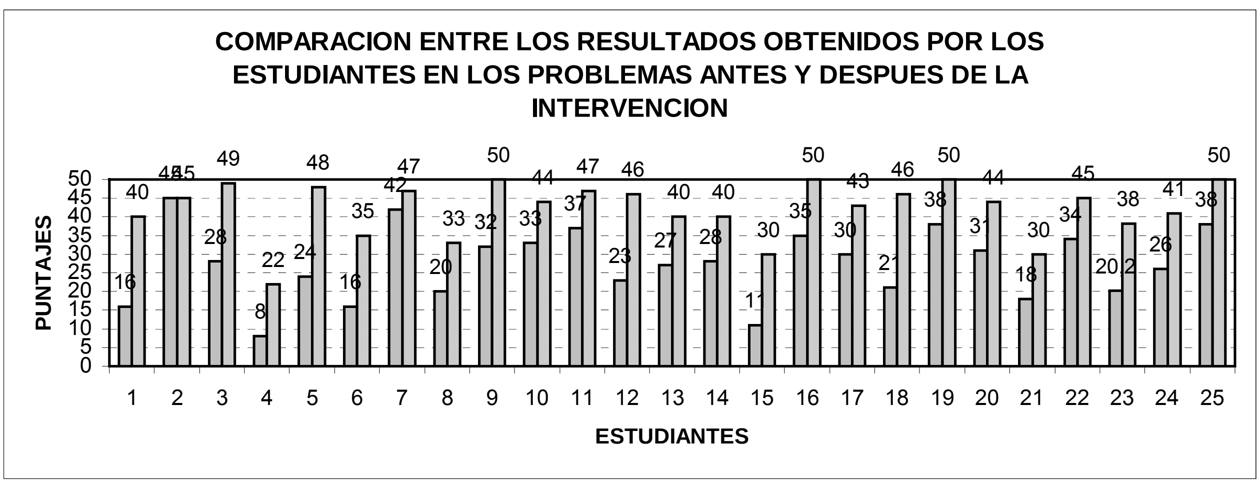


GRAFICO 12

En este gráfico se comparan los puntajes obtenidos por cada uno de los estudiantes en los problemas propuestos en las dos pruebas.

El número en la parte inferior indica el código del estudiante durante las pruebas.

El puntaje es de 0 a 50 y se obtiene sumando los puntos respectivos en cada problema de las pruebas.

No se trata de hacer una análisis de quien obtuvo mejor puntaje y las razones de por que sucedió así, ya que no es objetivo del trabajo. Se trata es de observar que en general todos los estudiantes mejoraron su puntaje de una prueba a la otra, lo que ratifica la superación de los estudiantes por medio de la intervención pedagógica.

Los gráficos presentados evidencian la superación de los estudiantes de las dificultades en la prueba inicial, mediante la intervención pedagógica, a la vez de un notable avance en la resolución de situaciones que implican generalización.

7. CONCLUSIONES

El desarrollo del presente trabajo desde la concepción misma del problema y el objetivo general, los referentes teóricos, las pruebas realizadas, la intervención pedagógica y la propuesta didáctica, presenta gran relevancia en cuanto propone aspectos del currículo y la enseñanza que no se habían llevado al aula de clase en el grado 9° de educación básica del INEM José Félix de Restrepo de la ciudad de Medellín, como son el de conjugar en una misma estrategia el desarrollo del pensamiento matemático, la adquisición de conceptos, la resolución de problemas y el acceso a un lenguaje matemático más formalizado. Además de dar gran importancia a las argumentaciones de los estudiantes, sus conjeturas y las formas que utiliza para validarlas, y las estrategias que el profesor utiliza para enriquecerlas. Después de desarrollar los referentes teóricos sobre la generalización matemática e implementarlos con la metodología de las situaciones problema, son varios los aspectos que es importante resaltar:

1. Las respuestas que dieron los alumnos a las pruebas realizadas permiten inferir que hay dos clases de acciones diferentes, según contemplen los elementos del problema de forma estática o dinámica. Los que los consideran en forma dinámica imaginan el objeto matemático en todas

sus dimensiones, realizan variaciones sobre este, tratan de descomponerlo, elaboran gráficos y dibujos para representar las situaciones, realizan tablas para relacionar los datos, tratan de resolver el problema abordándolo desde otros aspectos. Los que lo consideran en forma estática no ven mas allá de lo que sus sentidos le proporcionan, tratan de resolver el problema en forma global, no hacen esquemas, no utilizan estrategias adicionales a las dadas por el profesor; esta forma de ver los problemas es la que comúnmente se encuentra en nuestros estudiantes.

2. El proceso realizado por los estudiantes en el tratamiento de cada problema se puede representar por el siguiente esquema:

   Representación gráfica $\rightarrow$ Representación tabular $\rightarrow$ Expresión verbal $\rightarrow$ Representación simbólica. De esta manera se observa como los estudiantes se mueven en las diferentes representaciones. Es de resaltar que la representación tabular aparece como un mediador entre las representaciones de los diferentes lenguajes que anteriormente se conocían -lenguaje gráfico y el habitual- y un nuevo lenguaje -lenguaje algebraico o simbólico-. Por otro lado en el paso del registro verbal al simbólico el estudiante hace uso de letras para representar incógnitas o variables pero con significado de un numero u objeto generalizado, esto se evidencia en el hecho de que toman la letra inicial o la misma palabra del objeto para representarlas.

3. Al final de las pruebas se reconoce un avance notable en la utilización de representaciones como tablas, gráficos, y la utilización de expresiones de acuerdo con los conjuntos numéricos en los cuales se trabaja, se nota además soltura en la descripción de patrones de formación y regularidades entre los elementos de secuencias numéricas o gráficas lo mismo que en su posterior simbolización, lo que permite facilidad por parte de los estudiantes para dar a conocer ideas y resultados encontrados en torno al problema.

4. Las actividades realizadas por los estudiantes sobre generalización, posibilitaron el desarrollo de habilidades como la elaboración de conjeturas como predicción de posibles resultados en un determinado problema y la sistematización de datos permitiendo encontrar en forma rápida y eficaz las posibles relaciones en un conjunto de elementos, lo que propicia una visión más global de la situación por parte del estudiante.

5. Mediante el proceso metodológico se realizaron actividades en las que fueron consideradas las estrategias que los estudiantes manejaban frente a situaciones específicas y posteriormente se diseñaron otras en las que en forma progresiva y bajo la guía del docente, fueron accediendo un lenguaje matemático más formalizado para formular generalizaciones de acuerdo con los elementos planteados, a los objetos construidos, las

instrucciones verbales, a la estrategia pedagógica y a la motivación frente a las diferentes situaciones planteadas. Empezaron a utilizar las letras adecuadas para las variables a relacionar estas en forma adecuada, a plantear proposiciones en forma correcta y enunciar leyes generales para los problemas. Lo anterior evidencia que en forma progresiva el estudiante accede a la simbología matemática mediante la intervención pedagógica que pretende favorecer aprendizajes significativos.

RECOMENDACIONES

Considerando los logros obtenidos en la presente propuesta tanto para los estudiantes que intervinieron en ella en cuanto a la habilidad para generalizar, como para el docente investigador al corroborar que las situaciones de generalización se presentan como buena estrategia para reafirmar conceptos algebraicos e inducir al alumno al razonamiento; la experiencia obtenida a través de las situaciones desarrolladas y las teorías que respaldan el tema de estudio, es importante recomendar algunos aspectos:

- Movilizar esquemas cognitivos en los alumnos con situaciones de generalización, motivarlos a realizar acciones sobre los objetos matemáticos, consistentes en la separación de tales objetos en elementos variables e invariables, llevarlos al establecimiento de relaciones invariantes, que conducen a los alumnos a mejorar su razonamiento, a una comprensión más profunda entre conceptos matemáticos, establecer conexiones entre elementos del currículo y desarrollar habilidad en la resolución de problemas.

- Implementar la generalización como proceso de pensamiento matemático en cada uno de los grados de la educación básica en forma gradual y adecuada para los diferentes tipos de estudiantes y de acuerdo con el desarrollo del pensamiento formal del alumno como una estrategia para lograr aprendizajes significativos, alcanzar niveles de pensamiento matemático más formal y mejorar el uso de la simbología y lenguaje matemático.

- Implementar a través de actividades de generalización el aprendizaje inductivo, de lo concreto a lo abstracto, que los mismos estudiantes descubran las relaciones generales que hay detrás de cada situación. El conocer primero las fórmulas para aplicarlas luego en la solución de casos particulares condiciona al alumno a trabajar sólo deductivamente y no lo hace partícipe del proceso mismo de construir matemáticas.

- Utilizar los problemas de regularidades, patrones y relaciones como camino para alcanzar procesos de pensamiento matemático, para que el estudiante razone y elabore conjeturas, que las enuncie verbal y simbólicamente, que establezca leyes generales; darle libertad para que utilice las estrategias que quiera: dibujos , tablas, gráficas, rayas, etc., para que comunique su pensamiento matemático.

- Fortalecer las diferentes formas de abstracción y generalización matemática como una forma de alcanzar niveles de pensamiento mas elevado, de manera que se creen habilidades para resolver situaciones problemáticas cada vez más complejas

Las siguientes son posibles conductas el docente puede que adoptar para estimular o fomentar estrategias de creatividad en sus alumnos:

- Desarrollar situaciones que faciliten el aprendizaje por descubrimiento.
- Darle importancia a todo lo que el alumno hace como parte de su estrategia para comunicar su pensamiento.
- No cerrar las posibilidades de respuesta de los problemas, al contrario abrir nuevos caminos y posibilidades.
- Estimular la pregunta como mecanismo para intercambiar ideas con los estudiantes y guiarlos hacia objetivo propuesto.
- Implementar las situaciones problema como estrategia metodológica para la enseñanza de algunos temas, sobre todo los que tengan que ver con regularidades.
- Reforzar abiertamente las ideas, trabajos y obras creativas de los estudiantes estimulándolos para que lo sigan haciendo.
- En la enseñanza de temas que tengan que ver con fórmulas, no darlas de antemano para que las apliquen, constrúyalas con los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

AUSUBEL, D., Novak, J. y Hanesian, H Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo. 2ª ed. Ed. TRILLAS México 1976

BALDOR, Aurelio. Álgebra elemental. Ed. Mediterráneo. 2ª edición. Madrid España 1963. Pág. 372-374.

BALDOR, Aurelio. Aritmética Ed. Mediterráneo. Madrid España 1963. Pág. 372-374.

BEYER, Walter y SUAREZ SEGOVIA, Nelson. Influencia del lenguaje formal en la solución de problemas. Decanato–Postgrado. Universidad Nacional experimental Simón Rodríguez. Revista Educación y ciencia humana año VI No. 10, Caracas – Venezuela, enero – junio 1998.

CARDONA V., Arturo. Geometría 3° y 4° de enseñanza media. 3ª ed. Ed. Bedout. Medellín.

CASAS ALFONSO, Esperanza. Divertidas Matemáticas. 2ª ed. Cooperativa Editorial Magisterio. Santa Fé de Bogotá 1996.

DIEZ M, Luis H. Matemáticas operativas, primer año de universidad. Impresos Alfa. 8ª ed. Medellín – Colombia 1985. Pág. 5.

GODINO, Juan D. Marcos teóricos de referencia sobre la Cognición Matemática. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. España. 2002. Pág. 17 – 24. http://www.ugr.es/local/jgodino/

GOLDBERG, Samuel. Introducción a las Ecuaciones en diferencias finitas. Ed. Marcombo S.A. Barcelona. 1964

GONZÁLEZ GUAJARDO, Hernán. propuestas para la investigación que emergen del estudio de una generalización matemática. universidad de Santiago de Chile 2002.

GRUPO AZARQUIEL. Ideas y actividades para enseñar álgebra. 1ª reimpresión. Ed. Síntesis. . Madrid 1993. Pág. 36, 37, 55

HERNÁNDEZ SAMPIERI, Roberto y otros. Metodología de la Investigación. 2ª ed. McGraw-Hill. México. 1991.

LEITHOLD, Louis. El Cálculo con geometría analítica. 4ª ed. Copyright. México. 1982.

LONDOÑO GOES, Nevardo Antonio. Diseño de un modelo de situación problema en la enseñanza de las matemáticas. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Tesis de Magíster en Psicopedagogía. Medellín 1996. Pág. 24

LUQUE ARIAS, Carlos Julio y otros. Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir. Universidad pedagógica Nacional. Bogotá D.C.

MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. Pensar matemáticamente. 1ª reimpresión Ed. Labor Madrid. 1989. Pág. 22, 77

MASON, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). Rutas hacia el/Raíces del álgebra (Traducción al español: Cecilia Agudelo). Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. 1999. Pág. 52, 91

MEN – ICFES Revolución educativa. Colombia Aprende. SABER 2002-2003. Resultados de la evaluación en Colombia Documentos.

MEN – ICFES. SNEE Sistema Nacional de Evaluación de la Educación. Prueba de Matemáticas 9° grado Octubre 2002 Pág. 12-13.

MEN – ICFES. Sistema Nacional de Evaluación de la Educación. Resultados 2002. Pág. 18, 45

MEN – ICFES. Programa de Evaluación de la Educación Básica. Pruebas Saber Lenguaje y Matemáticas grados 3, 5, 7 y 9. Fundamentación Conceptual. Bogotá, D.C. Enero de 2003. Pág. 12.

MEN. Ley 115 de febrero 8 de 1994, artículo 20, numeral c., artículo 22, numeral c. Bogotá D. C. Colombia.

MEN. Finalidades y alcances del Decreto 230 del 11 de febrero de 2002

Currículo, Evaluación y Promoción de los Educandos, y Evaluación Institucional)

MEN. Estándares para la excelencia de la educación. Bogotá, D. C. – Colombia 1998. Pág. 16, 37

MEN. Matemáticas. Lineamiento Curriculares. Santafé de Bogotá D.C. Colombia julio de 1998. Pág. 35, 41, 59, 72-73, 77.

MESA BETANCUR, Orlando. Indicadores de logros en la educación matemática en contextos de situaciones problemáticas. Universidad de Antioquia. Pág. 9.

MUNERA CÓRDOBA, J.J y Builes Gil, G. Enseñanza de la matemática a través de situaciones problema, 2000

MÚNERA, John Jairo. Las situaciones problema en la matemática escolar. Documento de trabajo en II Jornadas de talleres de Matemáticas y Física 2003.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. Sugerencias para resolver problemas. Ed. Trillas México 1970. Pág. 40

OBANDO, Gilberto y Múnera John Jairo. Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. En EDUCACION Y PEDAGOGÍA N° 35, 2003, Pág. 187

OBANDO, Gilberto. Generalización y conceptualización el caso de las estructuras aditivas. En Cuadernos pedagógicos N° 16 Universidad de Antioquia Medellín 2001. Pág. 78

PÉREZ, John J. y Venegas León J. Un modelo de situación problema para la enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas. Universidad de Antioquia. Facultad de educación. Monografía de Especialización en la enseñanza de las matemáticas.. Medellín 2001.

POLYA, G. Cómo resolverlo Ed. Tecnos Madrid. 1954. Pág. 16, 97

POLYA, George. Como plantear y resolver problemas. Ed. Trillas 15ª ed. México 1970. Pág. 16

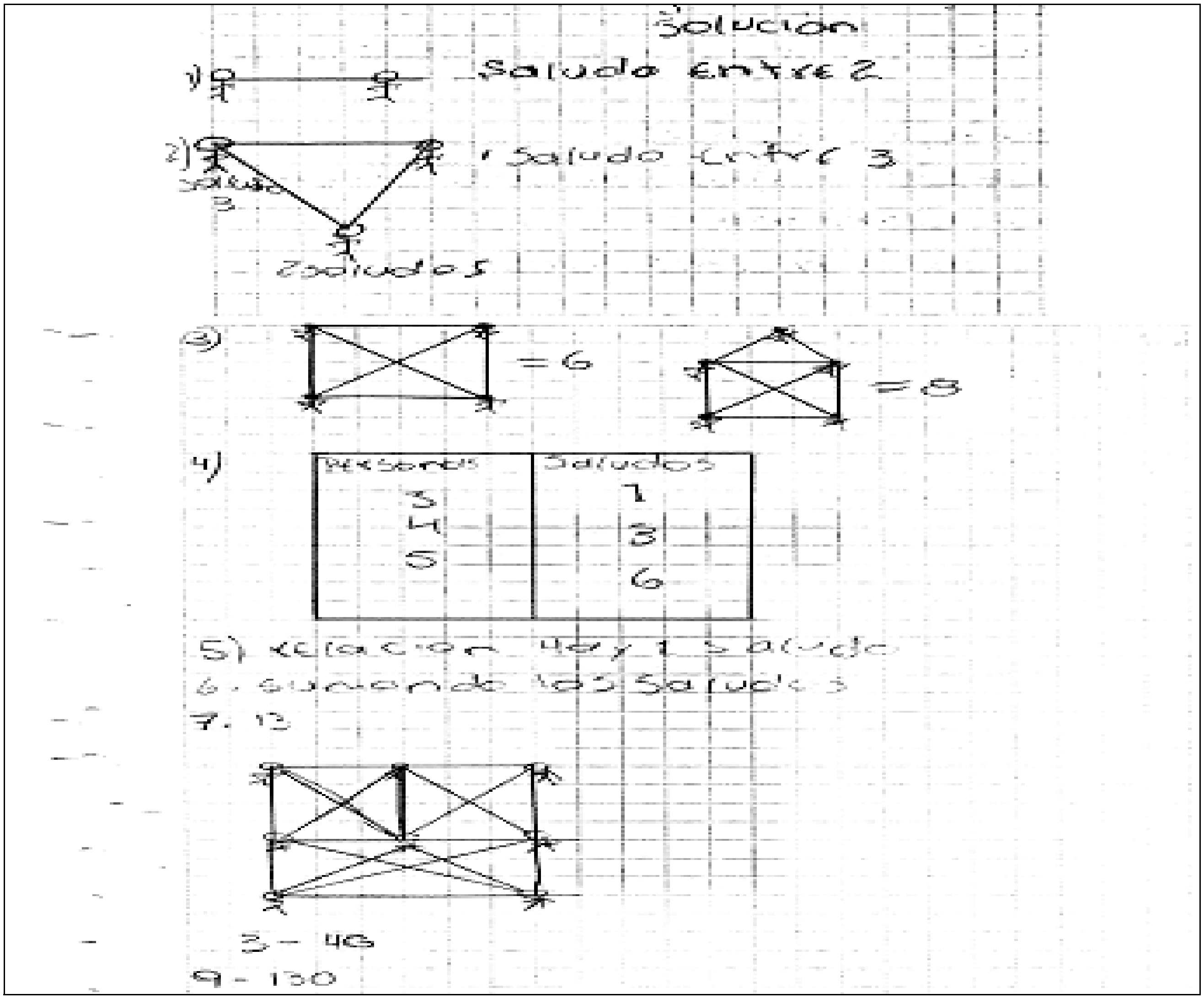
RADFORD, Luis. Algunas reflexiones sobre la enseñanza del álgebra a través de la generalización cap. 7 En Aproximaciones al álgebra. Perspectivas para la investigación y enseñanza. Bednarz N., Kieran C. y Lee L. Traducción de Urbano R. 2002

RODRÍGUEZ ESTRADA, Mauro y FERNÁNDEZ ORTEGA, Juan Antonio. Creatividad para resolver problemas, principios y Técnicas . Ed. Colina 1ª ed. Medellín 1999. Pág. 120.

SOCAS ROBAYNA, Martín Manuel y otros. Iniciación al Álgebra. Ed. Síntesis. Madrid 1996. Pág. 151

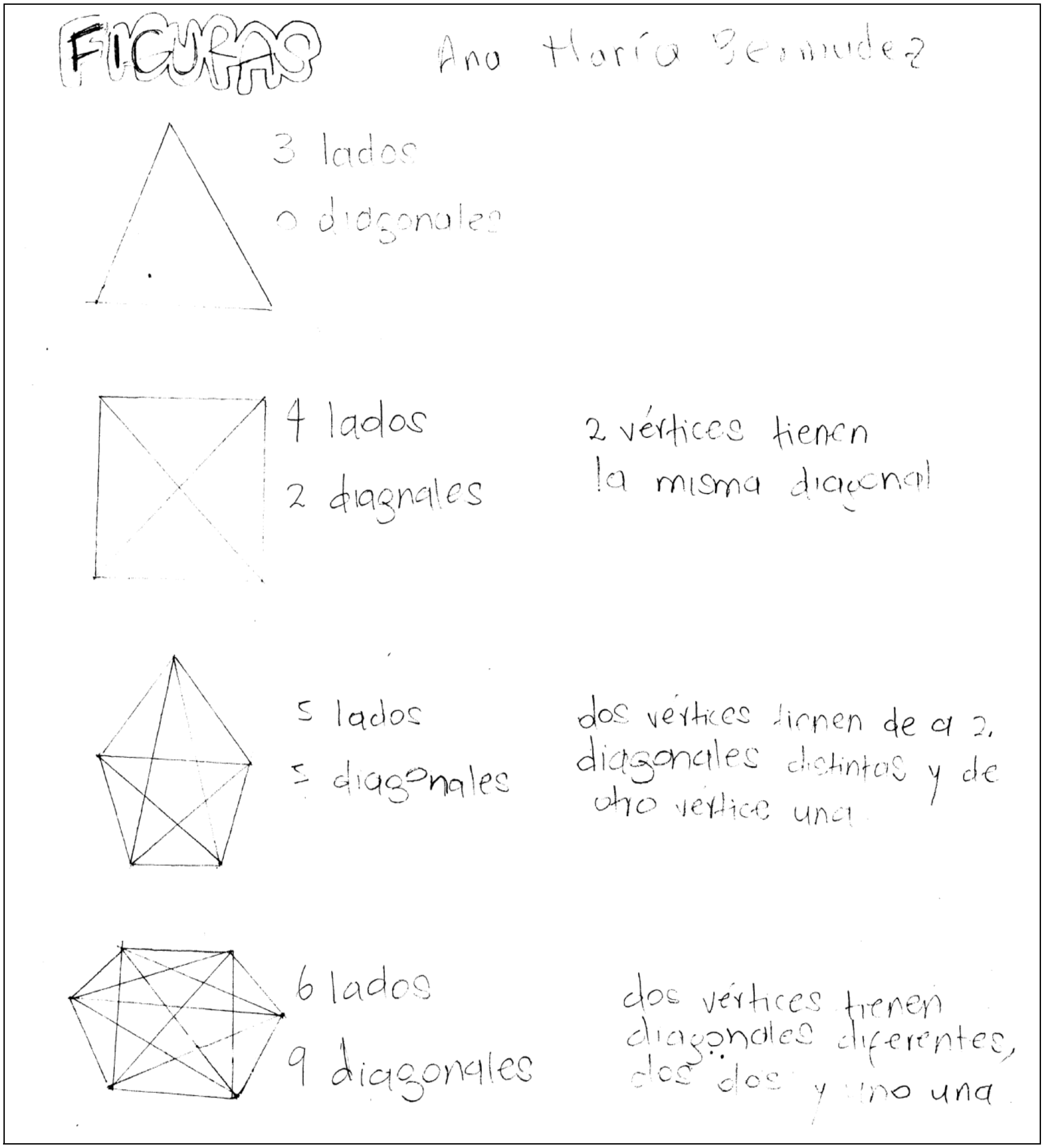
10. ANEXOS

ANEXO 1



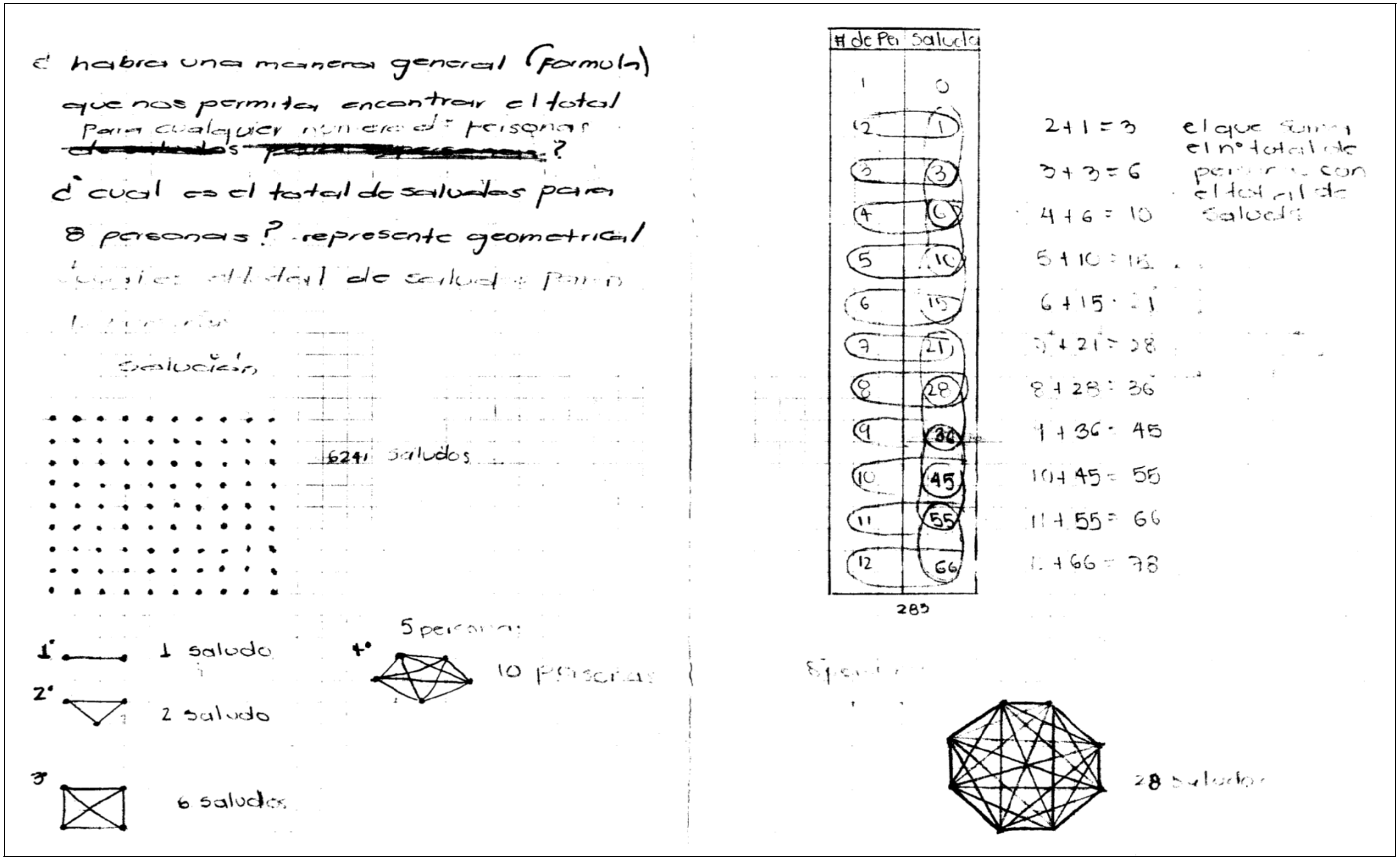
Hoja de respuesta al problema 3 de la prueba inicial del estudiante Diego Foronda. Código N° 5 en las tablas de resultados

ANEXO 2



Hoja de respuesta al problema 4 de la prueba inicial del estudiante Ana Bermúdez, código N° 21

ANEXO 3



¿ habra una manera general (formula) que nos permita encontrar el total para cualquier numero de personas ~~de saludos para personas~~ ?

¿ cual es el total de saludos para 8 personas ? represente geometrical

solución

6241 saludos

1° 1 saludo

2° 2 saludo

3° 6 saludos

4° 5 personas 10 personas

# de Per	Saludo
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
11	55
12	66

285

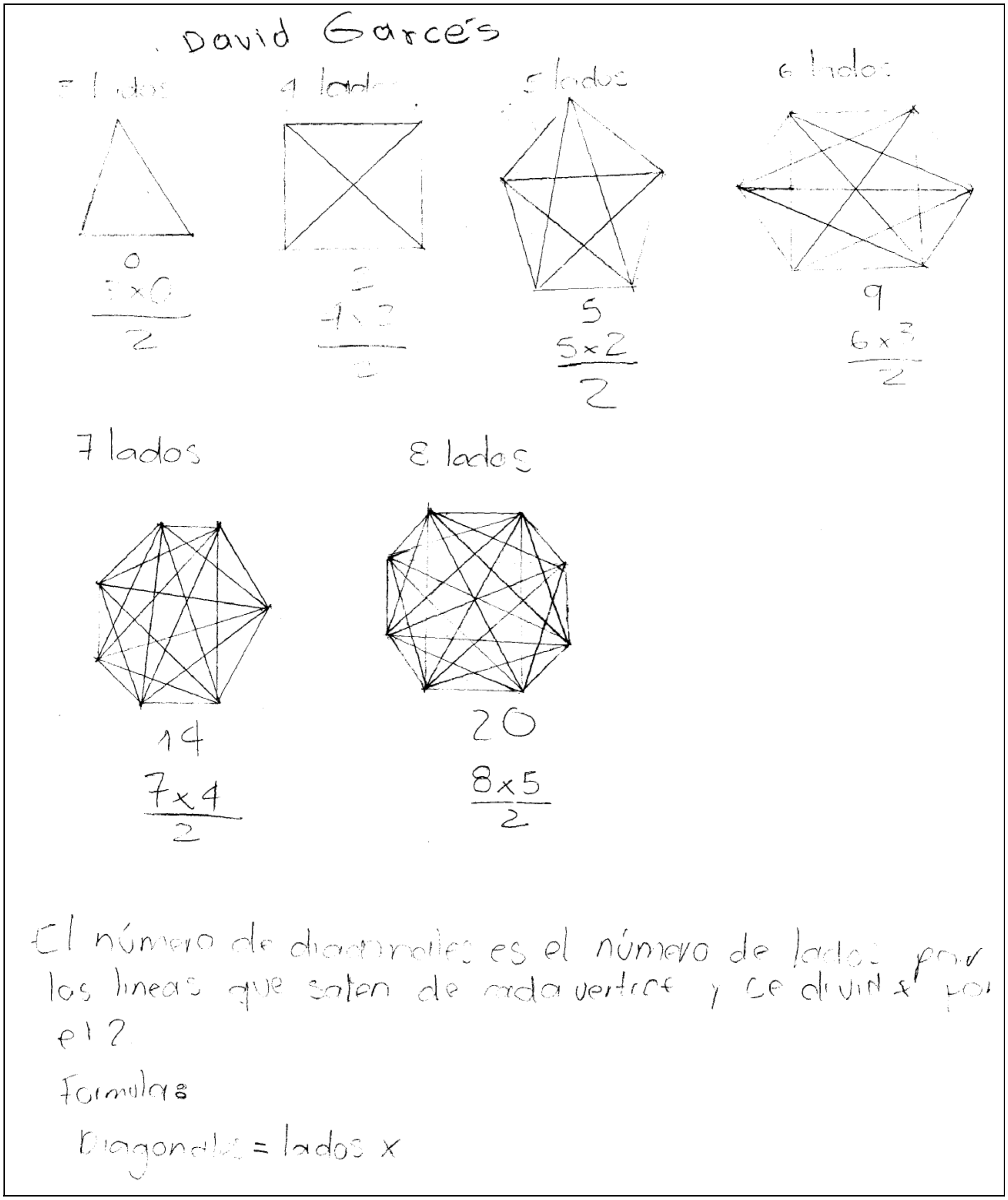
2+1=3
3+3=6
4+6=10
5+10=15
6+15=21
7+21=28
8+28=36
9+36=45
10+45=55
11+55=66
12+66=78

el que suma el n° total de personas con el total de saludos

28 saludos

Hoja de respuesta al problema 3 de la prueba inicial del estudiante Eliana Jiménez, N° 25 en las tablas de datos

ANEXO 4



David Garcés

3 lados — 0 — $\frac{3 \times 0}{2}$

4 lados — 2 — $\frac{4 \times 2}{2}$

5 lados — 5 — $\frac{5 \times 2}{2}$

6 lados — 9 — $\frac{6 \times 3}{2}$

7 lados — 14 — $\frac{7 \times 4}{2}$

8 lados — 20 — $\frac{8 \times 5}{2}$

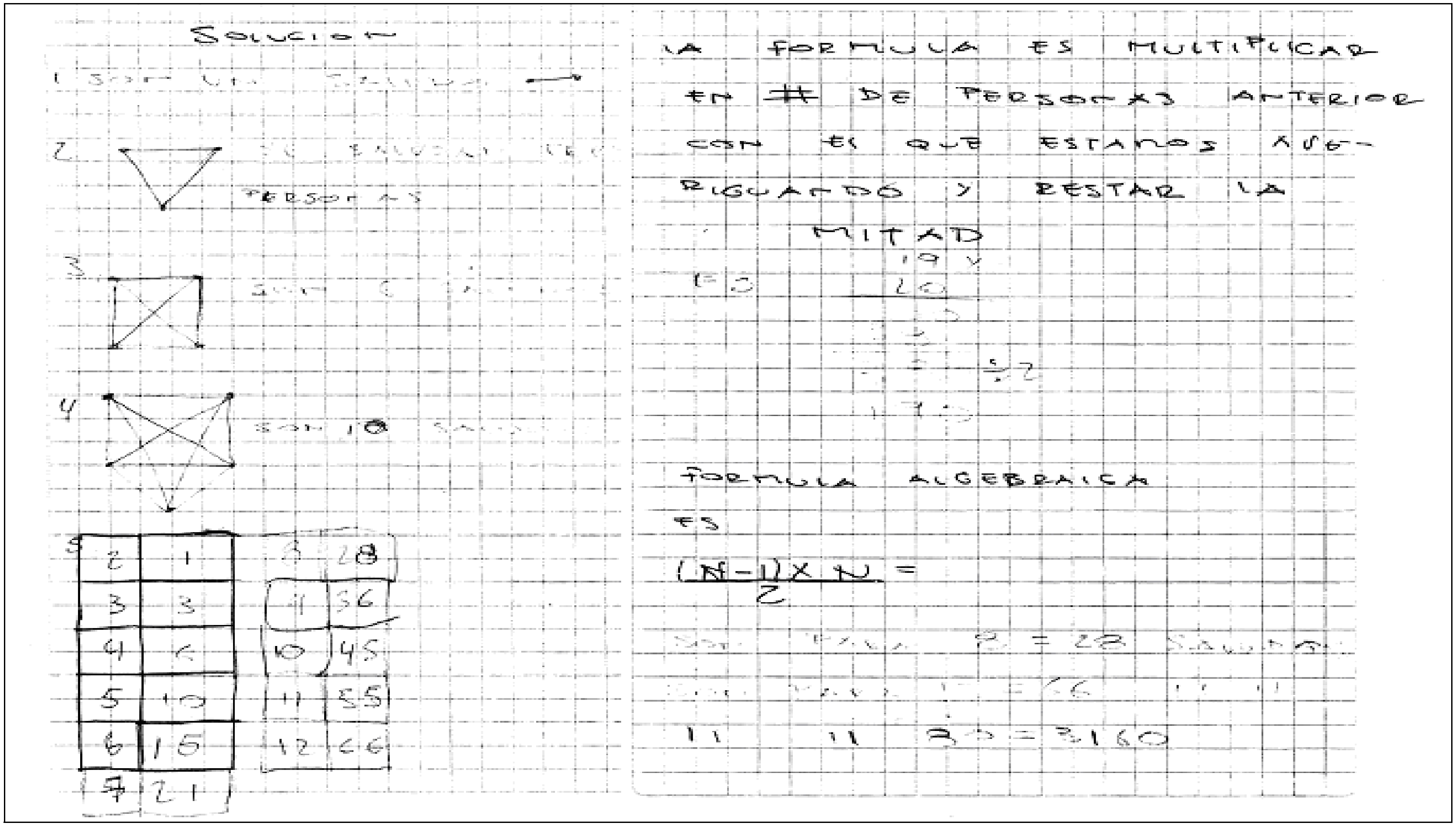
El número de diagonales es el número de lados por los lineas que salen de cada vertice y se divide por el 2.

Formula:

Diagonales = lados x

Hoja de respuesta al problema 4 de la prueba inicial del estudiante David Garcés, N° 6 en las tablas de datos

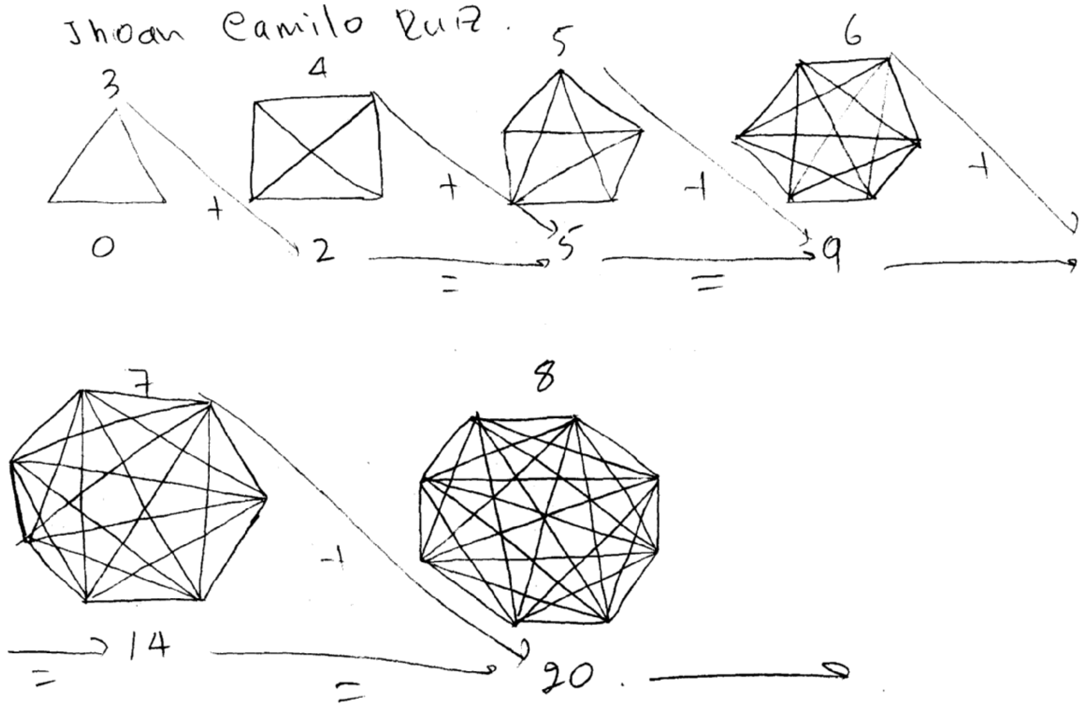
ANEXO 5



Hoja de respuesta al problema 3 de la prueba inicial del estudiante Cristian G. N° 7 en las tablas de datos

ANEXO 6

Jhoan Camilo Ruiz.



El número de diagonales se halla sumando las diagonales dela figura anterior y el núme, de lados de la figura anterior, a la anterior

Simbologia

D: diagonales

d: diagonales caso anterior.

l: lados caso anterior a d

$D = d + L$

la ley es: En todas las figuras

Hoja de respuesta al problema 4 de la prueba inicial del estudiante Johan Ruiz. N° 2

ANEXO 7.

10.7. COMPLEMENTO A LA PROPUESTA

REGULARIDADES Y GENERALIZACIONES FUENTE DE APRENDIZAJES MATEMATICOS

La ciencia se construye sobre la búsqueda de regularidades**.** Las ciencias y las matemáticas se han construido, durante toda la historia, por la necesidad de explicar regularidades: patrones y leyes de formación, las cuales al ser matematizadas y expresadas en forma general conducen a establecer generalizaciones, las cuales son la esencia de la matemática. Desde este punto de vista el trabajo de los alumnos en la detección de ellas, el descubrimiento de sus leyes de formación su reconstrucción con base en una ley dada, cumple un papel fundamental para el desarrollo de su pensamiento científico.

La investigación de regularidades es un contenido procedimental general de carácter transversal con respecto a todos los contenidos de la matemática y de las otras disciplinas. Las regularidades se encuentran en todas las situaciones de la vida y de las ciencias, y es lo que los científicos de todas las disciplinas siempre han tenido y tienen interés por explicar. Por ejemplo: los movimientos planetarios, las notas musicales de una sinfonía, los fractales, las fases de la luna, los panales de abejas, los algoritmos de las operaciones básicas, los pasos de una danza, las conjugaciones verbales, las ondas sonoras, los triángulos y cuadrados mágicos, los resultados de arrojar una moneda, etc.

Un caso especial de regularidades lo constituyen los **patrones**. Un patrón es una sucesión de objetos (signos, gráficos, dibujos) que se construye siguiendo una regla (algoritmo), ya sea de repetición o de recurrencia. Se encuentran en los frisos, los mosaicos, las tablas aritméticas, los sistemas de numeración, las sucesiones de números, etc.

Son patrones de repetición aquellos en los que los distintos elementos son representados en forma periódica. Existen y se pueden crear diversos patrones de repetición teniendo en cuenta su estructura de base o núcleo, por ejemplo si el núcleo es de la forma:

- AB, se repiten dos elementos alternadamente (1, 2, 1, 2, 1, 2,…; cuadrado, círculo, cuadrado, círculo,…., etc.)
- ABC, se repiten tres elementos (do, re, mi, do, re, mi,…..)
- AABB, se repite dos veces un elemento y a continuación dos veces otro (rojo, rojo, azul, azul, rojo, rojo, azul, azul, rojo, …)
- ABA, se repite por ejemplo: palmada, golpe, palmada.

Como se puede apreciar es importante rescatar en estos patrones la forma del núcleo ya que expresa la manera como se construye la sucesión.

Son patrones de **recurrencia** aquellos en los que el núcleo cambia con regularidad. Cada término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores de cuyo análisis se infiere su ley de formación. Por ejemplo:

- ↑↓↑↑↓↓↑↑↑↓↓↓(un salto adelante, un salto atrás, dos saltos adelante, dos saltos atrás, tres saltos adelante, tres saltos atrás, ….)
- XX XXXX XXXXXX……… que traducido habitualmente es: 2, 4, 6, 8, …..
- 2, 2 + 4, 2 + 4 + 6, 2 + 4 + 6 + 8,..lo que se puede expresar como: 2, 6, 12, 20,..
- 0, 10, 20, 30, 40, …. Lo que habitualmente se conoce como la escala del 10.
- 1, 3, 9, 27, 81, … que es la sucesión de cubos perfectos.

En matemáticas se tienen variados ejemplos de patrones:

- El sistema de numeración posicional decimal, donde siempre con diez unidades de un nivel se obtiene una unidad del orden superior siguiente.

...... $\longleftarrow$ 1 u de m. $\xleftarrow{\text{10c}}$ 1 c. $\xleftarrow{\text{10d}}$ 1 d $\xleftarrow{\text{10 u}}$ u

(Este es un patrón de recurrencia)

- Los mecanismos convencionales con que se resuelven las cuentas, en los que se aplica la reiteración de una regla (algoritmo), Por ejemplo para la siguiente suma:

639	"9 más 8 es 17, pongo 7 y llevo 1"
+ 468	"4 más 6 es 10, pongo 0 y llevo 1"
1107	"7 más 4 es 11, pongo 1 y llevo 1"
	(Este es un patrón de repetición)

- La serie numérica del sistema de numeración posicional decimal. La observación y el análisis de la sucesión numérica escrita, organizada de la siguiente manera:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Permite al alumno descubrir patrones de repetición (por ejemplo: los términos terminados en 1, 2, 3, etc.) y de recurrencia (por ejemplo: donde hay términos que se obtienen sumando siempre 10) y así afianzar el conocimiento de las reglas de la numeración decimal escrita.

- La construcción de polígonos con regla y compás

Para el caso de un cuadrado:

1. trazar un segmento $\overline{ab}$
2. a partir del extremo *b*, trazar la perpendicular a $\overline{ab}$ y determinar

el segmento $\overline{bc}$;

3. a partir de *c*, trazar la perpendicular a $\overline{bc}$ y determinar el segmento $\overline{cd}$
4. unir *a* con *d*.

(Este es un patrón de repetición)

¿Qué plantea el currículo Colombiano respecto al tema? Según se plantea en los Lineamientos Curriculares (Pág. 28), el trabajo intelectual del alumno debe ser por momentos comparable con la actividad científica, lo cual exige que el actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, etc. Y esto es precisamente lo que se consigue cuando se trabaja con regularidades y generalizaciones matemáticas, siendo el modelo matemático el fin último de las generalizaciones.

El trabajo con regularidades y generalizaciones en el aula de clase está respaldado desde los Lineamientos en el razonamiento matemático como proceso general del pensamiento, donde se enfatiza que este debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y por consiguiente, estar articulado con todas sus actividades matemáticas (MEN 1998, 77)

Además, las competencias que se proponen en lo que toca con el razonamiento son idénticas a las propuestas en el trabajo con regularidades (Ibíd. 77):

- Dar cuenta del cómo y el porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.

- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

Se proponen también, en los Lineamientos, ejemplos de cómo trabajar con los estudiantes el razonamiento matemático en cada uno de los grados de la educación básica y media (Ibíd. 78 – 94) los cuales presentan la característica de pedir al estudiante que encuentre regularidades, que amplíe secuencias para hallar otros elementos, que generalice, argumente, simbolice, etc. Se proponen, entre otros, reconocimiento de regularidades en frisos, embaldosados, reconocimiento de rotaciones, traslaciones y simetrías en frisos, etc.

El tema patrones es relevante y rico…., pero ¿Cómo enseñarlo?

Respecto de su enseñanza se ha de tener en cuenta:

a) La identificación de patrones requiere del conocimiento de semejanzas y diferencias y la detección de los rasgos fundamentales que conforman una estructura de aquellos no esenciales a la misma. El trabajo con patrones incluye procedimientos de distinto orden de dificultad:

- De reproducción (copia de un patrón dado)
- De identificación (detección de la regularidad)
- De extensión (dado un tramo de la sucesión el alumno debe extenderla de acuerdo con el núcleo que la rige.
- De extrapolación (completamiento de partes vacías)
- De traslación (utilización del mismo patrón sobre propiedades diferentes, por ejemplo cambiar formas por colores, cambiar una representación visual por una auditiva, etc.)
- De particularización: verificar casos particulares como ejemplo o contraejemplo.

b) La descripción de patrones requiere de un manejo adecuado de las operaciones aritméticas básicas y del lenguaje verbal para poder expresar en forma clara lo que ha sido identificado como un patrón.

c) El registro simbólico requiere de un buen manejo de variables, el presentar relaciones simbólicas del patrón observado de acuerdo acon el conjunto numérico que se trabaje, formular adecuadamente la generalización como una ley que se cumple para un grupo de elementos lo cual implica un buen manejo de los nomencladores.

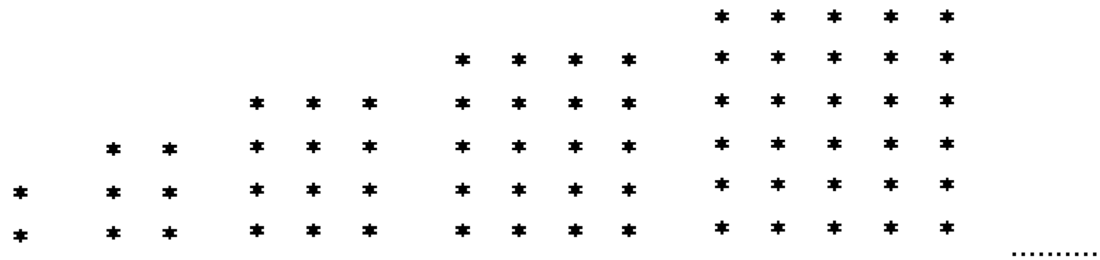
Las actividades con patrones revisten la característica de la resolución de problemas ya que pueden ser formuladas de modo que el alumno las reconozca como situaciones problemáticas y así estimular la generación de hipótesis, su comunicación y comprobación y la refutación o confirmación de las mismas (lo cual acerca a los alumnos al modo de pensamiento que las ciencias requieren).

Es interesante que este contenido sea desarrollado a lo largo de todo el año y de todos los años y en relación con los otros contenidos que se están tratando, ya sean de aritmética como de geometría, medida o estadística y probabilidades, no descuidando el poder ejemplificar regularidades con otros contenidos de las áreas de ciencias naturales, ciencias sociales, etc.

Una tarea importante es pasar de patrones concretos o gráficos a las tablas numéricas para llegar a descubrir que los números también se pueden organizar respetando leyes que pueden ser descubiertas y representadas en distintos contextos. Es interesante que proponiéndose tablas numéricas los alumnos puedan modelizar los valores en contextos de figuras o agrupaciones buscando alguna disposición geométrica que los ayude a encontrar patrones.

Analicemos un ejemplo sobre patrones:

Supongamos que se propone a los alumnos el siguiente patrón en una lámina.



- ¿Qué pueden observar en estos dibujos?
- ¿Por qué piensan que es así?
- Podrían reproducirlos con fichas (lentejas, piedritas) sobre su pupitre?
- ¿podrían agregar un término más a esta sucesión?
- ¿Cómo describirían el procedimiento utilizado?
- ¿Existe un único procedimiento o hay varios? Describirlos.
- ¿Cuál es la regla de formación de la sucesión obtenida?

El paso siguiente es representar en una tabla los valores numéricos correspondientes a cada término de la sucesión, para ello se construye una tabla de dos filas. En la primera se pondrán el número de orden del término de la sucesión y en la segunda el valor que de hecho posee este término. Observando el patrón anteriormente sería:

1	2	3	4	5	6	7	……….
2	6	12	20	30	42	.?	.?

Usualmente se utilizan tablas horizontales para que se correspondan con los términos del patrón, que suelen estar siguiendo el sentido de la lectura, pero también se pueden hacer tablas verticales e incluso disponer patrones en esa dirección.

Del análisis de la tabla los alumnos pueden inferir diversas reglas de formación del patrón que les permitirá completar las casillas vacías y observar otras regularidades:

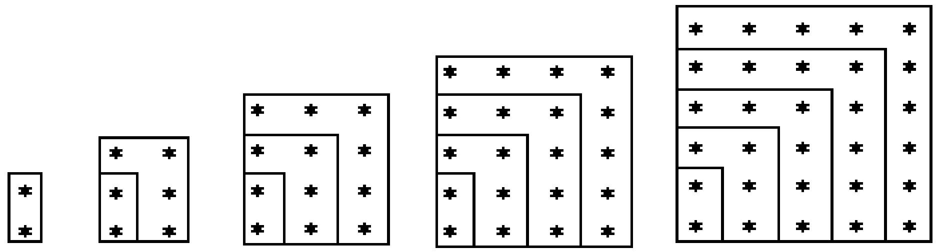
1. Si se lee la sucesión en dirección horizontal para pasar de 2 a 6 sumo 4, de 6 a 12 sumo 6, de 12 a 20 sumo 8, etc., de modo que algunos estudiantes podrán describir el número obtenido como un patrón creciente con primer término 2 y que obtiene de sumar los números pares, partiendo de 4 y en forma ordenada, al número anterior.

$$2 \xrightarrow{+4} 6 \xrightarrow{+6} 12 \xrightarrow{+8} 20 \xrightarrow{+10} 30 \longrightarrow .....$$

Esto despertará curiosidad pues estos mismos números 4, 6, 8, 10, etc. A su vez forman otro patrón el cual podrá ser trabajado en si mismo.

2. Volviendo al patrón graficado o representado con materiales se les puede preguntar a los alumnos ¿Cómo se ha pasado de una figura a otra en esta sucesión?. A partir de la observación de la disposición rectangular que ha de ser mantenida, los alumnos descubrirán que para pasar del primero al segundo se agregan 4, del segundo al tercero se agregan 6, del tercero al cuarto se agregan 8, del cuarto al quinto se agregan 10 y así sucesivamente; lo cual permite obtener mediante otro recurso la sucesión

   4, 6, 10, ……



....

3. Otra mirada la proveerá el análisis de los términos que se corresponden en la tabla en sentido vertical. Al 1 le corresponde el 2, al 2 le corresponde el 6, al 3 le corresponde el 12, etc. ¿Cómo es posible pasar de los términos de la primera fila a los de la segunda?. Pronto se darán cuenta que multiplicando los valores de la primera fila por 2, 3, 4, 5, etc. Respectivamente obtienen los valores de la segunda.

1	2	3	4	5	6	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
x2	x3	x4	x5	x6	x7	
2	6	12	20	30	42	....

También podrán observar que:

1	2	3	4	5	6	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
+1	+4	+9	+16	+25	+36	
2	6	12	20	30	42	...

Y así concluir que para pasar del número de orden de la sucesión al término correspondiente, se suman determinados números que forman la sucesión 1, 4, 9. 16, 25, 36, …., de la cual se podrá encontrar el término general n^2, o su equivalente ***n x n.***

¿Cuál es la ley general que se concluye del problema?

Como se puede notar hay varias relaciones que pueden explicar un patrón y el trabajo de encontrarlas es sumamente fecundo tanto desde el punto de vista perceptual, como conceptual y procedimental matemático.

algunos problemas sobre patrones y regularidades son los siguientes:

1. Las escalas:

   b. Construir una tabla con las escalas comenzando por la del 1 y encolumnando los números correspondientes a cada una de ellas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...									

   c. Estudiar la tabla y anotar todas las observaciones

   d. Contestar las siguientes preguntas justificando las respuestas:

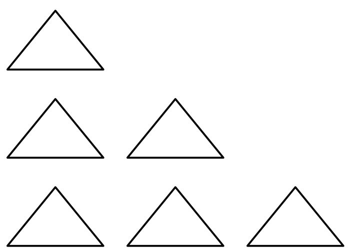
   La tabla ¿nos sirve para multiplicar y dividir?

   ¿Qué características tiene los números que pertenecen a la escala del 3? ¿ Y los de la escala del 5? ¿Del 10? ¿Del 7? ¿Cuántos múltiplos de 3 podríamos haber escrito? ¿Existen números que son múltiplos de varios números? ¿De que número es múltiplo 12? ¿Por qué número se puede dividir exactamente 12? ¿Cómo podemos encontrar todos los divisores de 24? ¿Qué números tiene 3 divisores? ¿4 divisores? ¿2?

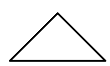
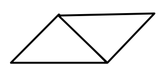
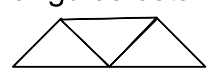
¿1? ¿Ninguno?.

2. Los palitos y los polígonos:

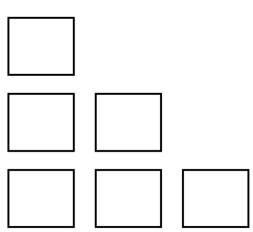
a. ¿Cuántos palitos hacen un triángulo? ¿Cuántos palitos hacen dos triángulos? ¿Y tres triángulos?....completa la tabla. ¿Qué regularidades observas?

N° de triángulos separados	N° de palitos
	3 ....
....	

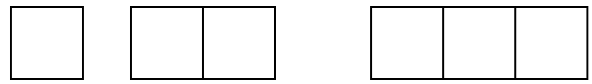
Que sucede con el número de palitos si los triángulos están pegados?

N° de triángulos				....
N° de palitos	3	....	....	

b. Estudia lo que sucede con el número de cuadrados y el número de palitos si los formas separados o pegados.

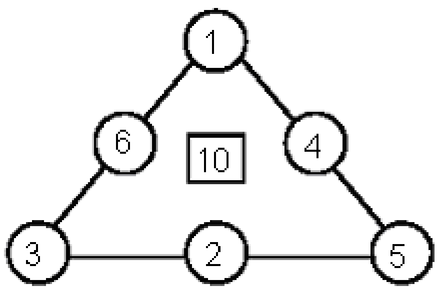
N° de cuadros	N° de palitos
	4 ....
....	

Que sucede con el número de palitos si los cuadrados están pegados?



N° de cuadrados				......
N° de palitos	4	....	....	

3. Triángulos mágicos.



Los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 forman un triángulo en el que la suma de los tres números que están sobre cada lado da siempre el mismo resultado, 10.

Comprueba que los mismos números se pueden colocar en el triángulo en otro orden, de manera que las sumas sigan siendo iguales, pero distintas de 10, hay otras tres posibilidades.

Los números que se pueden colocar formando un triángulo de este tipo se llaman números mágicos.

Intente formar triángulos mágicos con los dos conjuntos de números siguientes:

i. 1, 2, 3, 5, 6, 7

ii. 1, 2, 3, 4, 6, 7

Hay dos maneras diferentes de hacerlo en ambos casos.

4. Cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico consiste en un cuadrado de números tal que todas las filas, columnas y diagonales den la misma suma. Así el cuadrado a) es mágico, por que todas sus líneas suman 24, su número mágico.

Completa los cuadrados mágicos b) y c).

11	3	10
7	8	9
6	13	5

a)

6		
7	5	3

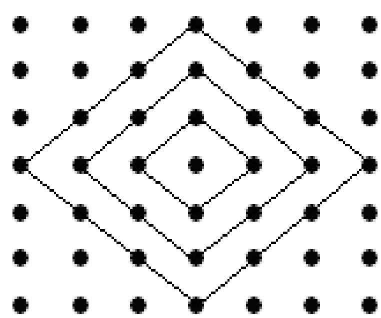
b)

		10
	7	
4		5

c)

5. Leyes numéricas a partir de un punto

Para esta actividad se necesita un papel cuadriculado, marcando las esquinas de los cuadros, un tablero perforado o un geopleano.



a)

El diagrama a) representa los tres primeros cuadrados de una sucesión que empieza en un punto en el centro del tablero, y crece desde ese punto hacia fuera.

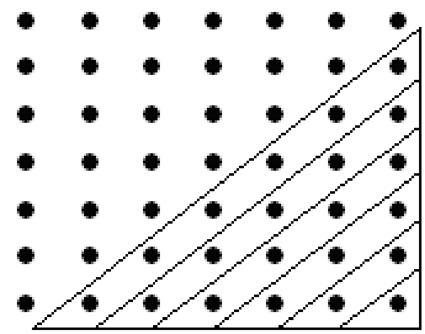
De esta sucesión se pueden sacar dos sucesiones numéricas:

1) El número de puntos en el perímetro de cada cuadrado.

2) El número de puntos dentro da cada cuadrado.

¿Cuál es el décimo número de cada sucesión? ¿Y el centésimo número?

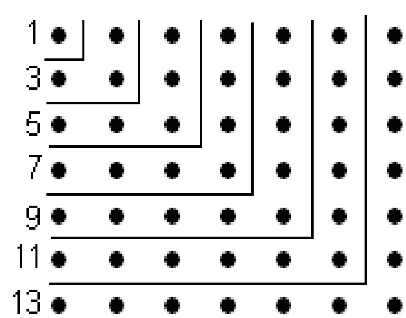
Otra sucesión, conocida como la de los números triangulares se construye a partir d los triángulos rectángulos como los de la figura b) y contando el número de puntos dentro de cada triángulo: 1, 3, 6, 10, …



b)

¿Cuántos puntos habrá dentro del décimo triángulo?

El diagrama c) muestra como dividir un cuadrado en una sucesión de números impares:



c)

Dando la siguiente ley:

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$

¿Cuál será la suma de los 10 primeros números impares?

6. El triángulo de Pascal

Este esquema es conocido como el triángulo de Pascal, en honor al matemático y filósofo francés Blaise Pascal.

- Observe y registre regularidades
- ¿Puede completar alguna de las líneas siguientes?
- Calcule la suma de los números de cada línea, y trata (sin llegar a completarla) de obtener la suma de la línea 12.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Sume los números a lo largo de cada una de las líneas señaladas en el triángulo de Pascal. ¿Qué observa?

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	...	...	...	...	...	
1	...	...	...	...	...	...	...

7. Números especiales

   a. Números capicúas

   Hay algunos números que se leen de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, como el 37473. Esos números se llaman capicúas o palindrómicos.

   Sin contar los números de un solo dígito, ¿Cuál es el menor número capicúa?, ¿Cuál es el menor número primo capicúa?, ¿Cuál es el menor número capicúa que sea un cuadrado perfecto?, ¿Cuántos otros cuadrados perfectos hay, menores que 1000, que sean capicúas? Hay 5 números primos capicúas entre 100 y 200, ¿cuales son?, ¿Por qué no hay número primo capicúa entre 400 y 700?. Muestra que todos los números capicúas entre 1000 y 2000 tienen un factor común.

   b. Números amigos:

   Algunos pares de números tienen la interesante relación de que la suma de los factores de cada uno de ellos es el otro número. Este soporte mutuo entre dos números cautivó la imaginación de algún matemático que los llamó pares amigos.

El menor par de ese tipo es el formado por 220 y 284:

220 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284

284 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

otros pares de números amigos son: 2620 y 2924; 6232 y 6368; 17296 y 18416

8. Regularidades numéricas: Todos los ejemplos de regularidades presentados están relacionados con las **sucesiones** y la teoría sobre estas puede ser una herramienta importante para realizar generalizaciones, es por esto que no se puede pasar sin antes hacer un estudio sobre ellas como parte importante del tema de las regularidades y los patrones, y desde luego, de la generalización matemática.

Una **sucesión** es una secuencia de números reales.

Esta secuencia puede seguir algún orden, en cuyo caso decimos que tiene una *regla de formación* y una *fórmula* que la determina.

Algunas sucesiones no tienen regla de formación como la sucesión de los números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Las sucesiones se definen como funciones con Dominio en **N** y Rango en **R**:

$f(n) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n\}$

a_k representa el término de la sucesión obtenido para $n = k$

si a_n es el término n-ésimo, entonces:

$f(n) = a_n$

Una sucesión, de acuerdo con la forma como se da su secuencia de elementos, puede ser creciente, decreciente, constante, alternada o aleatoria.

Las cuatro primeras se forman mediante una regla o ley de formación y la última no, se forman sin un orden determinado.

Sucesiones crecientes: Una sucesión es creciente si cada término es mayor que el anterior.

$f(n) = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$ es una sucesión creciente.

Sucesiones decrecientes: Una sucesión es decreciente cada término es menor que el anterior.

$g(n) = \{10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, ...\}$ es una sucesión decreciente

Una *sucesión es constante* cuando todos los términos son iguales.

$h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, ...\}$ es una sucesión constante

Una sucesión que es creciente, decreciente o constante se dice que es una sucesión *monótona.*

Una sucesión es *alternada* cuando los términos de determinadas posiciones siguen una regla de formación y los demás términos siguen otra.

$p(n) = \{2, -4, 6, -8, 10, -12, 14, -16, ...\}$ es una sucesión alternada.

En esta sucesión los términos de las posiciones pares se forman sumando al anterior (en posición par) el número 2 y los de posición impar se forman sumando al anterior (de posición impar) el número -2.

Además la fórmula para el término n-ésimo está dada por dos expresiones:

$$p(n) = \begin{cases} 2n, \text{ si } n \text{ es par} \\ -2n, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad n = 1,2,3,....$$

O también:

$$p(n) = (-1)^{n+1} 2n$$

Una sucesión es aleatoria cuando sus términos no se forman de acuerdo acon una regla de formación ni a una fórmula.

$q(n) = \{1, 10, 4, 100, 2, 7, 45, 1, ...\}$ es una sucesión aleatoria

Hay dos formas de expresar el término *n*-ésimo o general de una sucesión no aleatoria:

- Como una función en términos de la variable independiente *n* ó
- Como una función del término anterior (a_{n-1}) y *n*, llamada *relación de recurrencia*

Lo cual indica que hay dos formas de obtener una sucesión de números reales:

- Reemplazando en una expresión en términos de *n*, consecutivamente la secuencia de los números naturales:

Por ejemplo:

Si en expresión *2n* se reemplazan los números naturales se obtiene:

2, 4, 6, 8, ...

Las más conocidas son las sucesiones dadas por un polinomio entero y racional o por una expresión exponencial.

- Tomando como números iniciales a uno o varios números reales y aplicando a estos números y a los que se obtengan posteriormente un operador.

  Por ejemplo:

1. La sucesión 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

   Se forma aplicando al número 2 y a los que se obtengan, el operador **+**2, es decir cada término después del primero de la sucesión será $a_{k+1}=a_k+2$

   $a_1 = 2$

   $a_2 = 2\mathbf{+2 =} 4$

   $a_3 = 4\mathbf{+2} = 6$

   $a_3 = 6\mathbf{+2} = 8$

   ....

2. La sucesión 1, 2, 4, 8, 16, ... se forma aplicando al número 1 el operador **x**2, es decir cada término después del primero será $a_{k+1} = 2a_k$

El operador también puede ser una expresión en *n*

3. La sucesión 1, 5, 14, 30, 55, 91, ... se forma aplicando al número 1 el

operador **+**$(n + 1)^2$, es decir, cada término después del primero será:

$a_{k+1} = a_k + (n + 1)^2$, así:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$ **+ 4 =** 5 En $(n + 1)^2$, n se reemplaza por 1

$a_3 = 5$ **+ 9** $= 14$ En $(n + 1)^2$, n se reemplaza por 2

$a_3 = 14$ **+ 16** $= 8$ En $(n + 1)^2$, n se reemplaza por 3

....

4. La sucesión 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,.......... (sucesión de Fibonacci)

   Se forma aplicando a 0 y 1 el operador +($a_n + a_{n-1}$), cada término es la suma de los dos anteriores, esto es:

   $a_n = a_n + a_{n-1}$

También se pueden realizar operaciones entre sucesiones:

Por ejemplo:

La sucesión $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, ...$

Es el cociente entre las sucesiones $b_n = 2n$ y $c_n = 2n + 1$, es decir:

$a_n = \dfrac{2n}{2n+1}$

La sucesión 2, 6, 12, ... es igual a 1.2, 2.3, 3.4, ...

Es el producto entre n y $(n + 1)$, es decir:

$a_n = n(n + 1)$

Se consideran a continuación los métodos para generalizar una sucesión de números reales, especialmente cuando esta se hace por medio de un polinomio entero y racional ó por una expresión exponencial.

Las sucesiones que llevan a un polinomio entero y racional tienen la característica de que los términos siguientes al primero se forman sumando una expresión constante. A este tipo de sucesiones se les llama sucesiones aritméticas, de las cuales la progresión aritmética es un caso especial y su expresión que la generaliza es un polinomio lineal.

Para hallar una forma general de resolver este tipo de sucesiones se usa el hecho de que en todos los polinomios enteros y racionales de grado *k*, la *k*-ésima diferencia entre los valores de *f(x)* es constante.

Consideremos los polinomios

$f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$

sus valores en x = 1, 2, 3, 4, 5 se muestran en la siguiente tabla:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**....**
f(x)= x	1	2	3	4	5	....
f(x)= x²	1	4	9	16	25	....
f(x)= x³	1	8	27	64	125	....
f(x)= x⁴	1	16	81	256	625	....

Se forma una tabla de *diferencias finitas*. En las dos primeras columnas se colocan los valores de x y de f(x), luego una columna de primeras diferencias que se rotulan dn. El símbolo dn es un operador que significa tomar diferencias n-ésimas. En cada ejemplo, tomamos diferencias d1, d2, d3, ... hasta que la columna de diferencias se hace constante.

x	f(x)=x	d1
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1
5	5	1

x	f(x)=x^2	d1	d2
1	1	1	
2	4	3	2
3	9	5	2
4	16	7	2
5	25	9	2

x	f(x)=x^3	d1	d2	d3
1	1	1		
2	8	7	6	
3	27	19	12	6
4	64	37	18	6
5	125	61	24	6

x	f(x)=x^4	d1	d2	d3	d4
1	1	1			
2	16	15	14		
3	81	65	50	36	
4	256	175	110	60	24
5	625	369	194	84	24

Se observa que para f(x) = x^n , las n-ésimas diferencias son constantes. Esto vale para cualquier polinomio de grado n.

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ términos de una sucesión que tiene una fórmula determinada.

Se construye una tabla de diferencias, las $d_1(n)$ son las primeras diferencias, las $d_2(n)$ las segundas diferencias, etc.

n	a_n	$d_1(n)$	$d_2(n)$	$d_3(n)$	**......**
1	a_1	$d_1(1)$	$d_2(1)$	$d_3(1)$	....
2	a_2	$d_1(2)$	$d_2(2)$	$d_3(2)$	....
3	a_3	$d_1(3)$	$d_2(3)$	$d_3(3)$	....
4	a_4	$d_1(4)$	$d_2(4)$	$d_3(4)$	....
……..	…….	……	……	……	…….

Es claro que si conocemos los valores de a_n, $d_1(n)$, $d_2(n)$, $d_3(n)$ podemos hallar la expresión que generaliza a a_n :

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d_1(1)$

$a_3 = a_2 + d_1(2) = (a_1 + d_1(1)) + (d_1(1) + d_2(1))$

$= a_1 + 2\, d_1(1) + d_2(1)$

$a_4 = a_3 + d_1(3) = (a_1 + 2\, d_1(1) + d_2(1)) + (d_1(2) + d_2(2))$

$=(a_1 + 2d_1(1) + d_2(1)) + (d_1(1) + d_2(1)) + (d_2(1) + d_3(1))$

$= a_1 + 3d_1(1) + 3d_2(1) + d_3(1)$

Y además:

$a_5 = a_4 + d_1(4)$

$= a_1 + 4d_1(1) + 6d_2(1) + 4d_3(1) + d_4(1)$

$a_6 = a_5 + d_1(5)$

$= a_1 + 5d_1(1) + 10d_2(1) + 10d_3(1) + 5d_4(1) + d_5(1)$

Los coeficientes son los números del triángulo de Pascal.

En general:

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{1!}d_1(1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}d_2(1) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}d_3(1) + ...$$

Que es equivalente a:

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}d_1(1) + \binom{n-1}{2}d_2(1) + \binom{n-1}{3}d_3(1) + ... + \binom{n-1}{n-1}0$$

Esta expresión es muy importante ya que permite hallar las dos fórmulas que generalizan una sucesión: la función en términos de *n* y la relación de recurrencia.

La relación de recurrencia es:

$a_{n+1} = a_n + d_1(n)$ $\quad$ $d_1(n)$ es una función de n

También se puede hallar a_n por medio de sistemas de ecuaciones:

En una sucesión que se generaliza con un polinomio de grado k:

$P(n) = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + x_3 n^3 + ... + x_k n^k$ las diferencias d_k son constantes lo cual significa que d_{k+1} es 0. Entonces la resolución de un sistema de $k+1$ ecuaciones por $k+1$ incógnitas lleva a encontrar las constantes

$x_0, x_1, x_2, x_3, ...x_k$ que aparecen en $P(n)$.

A continuación se muestra para una sucesión que se generaliza con un polinomio de grado 3:

Si una sucesión origina un polinomio de grado 3, este es de la forma:

$P(n) = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + x_3 n^3$

El reemplazar n = 1, 2, 3, ... se obtiene en la siguiente tabla:

n	a_n	$d_1(n)$	$d_2(n)$	$d_3(n)$	$d_4(n)$
1	$x_0+x_1+x_2+x_3$	$x_1+3x_2+7x_3$	$2x_2+12x_3$	$6x_3$	0
2	$x_0+2x_1+4x_2+8x_3$	$x_1+5x_2+19x_3$	$2x_2+18x_3$	$6x_3$	......
3	$x_0+3x_1+9x_2+27x_3$	$x_1+7x_2+37x_3$	$2x_2+24x_3)$	…..	......
4	$x_0+4x_1+16x_2+64x_3$	$x_1+9x_2+61x_3$	…..	…..	....
5	$x_0+5x_1+25x_2+125x_3$	…..	……	……	....
……..	…….	……	……	……	…….

Se Observa que hay dos formas de plantear el sistema 4x4:

$x_0+x_1+x_2+x_3 = a_1$

$x_0+2x_1+4x_2+8x_3 = a_2$

$x_0+3x_1+9x_2+27x_3 = a_3$

$x_0+4x_1+16x_2+64x_3 = a_4$

O también:

$x_0+x_1+x_2+x_3 = a_1$

$x_1+3x_2+7x_3 = d_1(1)$

$2x_2+12x_3 = d_2(1)$

$6x_3 = d_3(1)$

Por ejemplo el problema planteado en la situación problema de la intervención pedagógica, por el método de sistemas de ecuaciones sería:

$x_0+x_1+x_2+x_3 = 1$ (1)

$x_1+3x_2+7x_3 = 4$ (2)

$2x_2+12x_3 = 5$ (3)

$6x_3 = 2$ (4)

De la ecuación (4) se tiene $x_3 = \frac{1}{2}$, al reemplazar en la (3) se obtiene $x_2 = \frac{1}{2}$, al reemplazar en la (2), $x_1 = \frac{1}{6}$ y el la (1), $x_0 = 0$; con lo cual se obtiene el polinomio

$P(n) = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$ que al factorizarlo da:

$$P(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Con un procedimiento similar se puede hallar una forma general para hallar la expresión que generaliza una sucesión de números reales que lleva a una función exponencial:

Este tipo de sucesiones tiene la característica de que los términos siguientes al primero se forman multiplicando por una expresión constante. A este tipo de sucesiones se les llama sucesiones geométricas de las cuales la progresión geométrica es un caso especial y su expresión que la generaliza es una constante que tiene como exponente un polinomio lineal.

Para hallar una forma general de resolver este tipo de sucesiones se usa el hecho de que en todas las funciones exponenciales en donde el polinomio exponente es de grado *k*, el *k*-ésimo cociente entre los valores de *f(x)* es constante.

Por ejemplo:

Para la función exponencial $f\left(x\right)=2^{x^2-6x}$ se tiene la siguiente tabla:

x	f(x)	r_1	r_2
1	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	4
2	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{2}$	4
3	$\frac{1}{512}$	2	4
4	$\frac{1}{256}$	8	4

5	$\frac{1}{32}$	32	4
6	1	128	4
7	128	512	4

En esta tabla que podemos llamar de *razones finitas*; las dos primeras columnas se colocan los valores de x y de $f(x)$, luego una columna de primeras razones que se rotulan r_n. El símbolo r_n es un operador que significa tomar razones n-ésimas. En cada ejemplo, tomamos razones d_1, d_2, d_3, ... hasta que la columna de razones se hace constante.

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ términos de una sucesión que tiene una fórmula exponencial determinada.

Se construye una tabla de razones, las $r_1(n)$ son las primeras razones, las $r_2(n)$ las segundas razones, etc.

n	**a_n**	**$r_1(n)$**	**$r_2(n)$**	**$r_3(n)$**	**......**
1	a_1	$r_1(1)$	$r_2(1)$	$r_3(1)$	....
2	a_2	$r_1(2)$	$r_2(2)$	$r_3(2)$	....
3	a_3	$r_1(3)$	$r_2(3)$	$r_3(3)$	....
4	a_4	$r_1(4)$	$r_2(4)$	$r_3(4)$	....
……..	…….	……	……	……	…….

Con los valores de a_n,, $r_1(n)$, $r_2(n)$, $r_3(n)$

podemos hallar la expresión que generaliza a a_n :

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 \,.\, r_1(1)$

$a_3 = a_2 \,.\, r_1(2) = (\, a_1 \,.\, r_1(1)\,) \,.\, (\, r_1(1) \,.\, r_2(1)\,)$

$\quad = a_1 \,.\, r_1(1)^2 \,.\, r_2(1)$

$a_4 = a_3 \,.\, r_1(3) = (a_1 \,.\, r_1(1)^2 \,.\, r_2(1)) \,.\, (r_1(2) \,.\, r_2(2))$

$\quad =(a_1 \,.\, r_1(1)^2 \,.\, r_2(1)) \,.\, (r_1(1) \,.\, r_2(1)) \,.\, (r_2(1) \,.\, r_3(1))$

$\quad = a_1 \,.\, r_1(1)^3 \,.\, r_2(1)^3 \,.\, r_3(1)$

Y además:

$a_5 = a_4 \,.\, r_1(4)$

$\quad = a_1 \,.\, r_1(1)^4 \,.\, r_2(1)^6 \,.\, r_3(1)^4 \,.\, r_4(1)$

$a_6 = a_5 \,.\, r_1(5)$

$\quad = a_1 \,.\, r_1(1)^5 \,.\, r_2(1)^{10} \,.\, r_3(1)^{10} \,.\, r_4(1)^5 \,.\, r_5(1)$

Los exponentes son los coeficientes del triángulo de Pascal

En general, se tiene:

$$a_n = a(1) \cdot r_1(1)^{\frac{(n\text{-}1)}{1!}} \cdot r_2(1)^{\frac{(n\text{-}1)(n\text{-}2)}{2!}} \cdot r_3(1)^{\frac{(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3)}{3!}} \cdot \ldots\ldots$$

Esta expresión sirve para hallar las dos fórmulas que generalizan una sucesión de esta clase: la función en términos de *n* y la relación de recurrencia.

La relación de recurrencia es:

$a_{n+1} = a_n \cdot d_1(n)$ siendo $d_1(n)$ una función de n

Ejemplo: Para la sucesión $\frac{1}{729}, \frac{1}{243}, \frac{1}{27}, 1, 81, ...$ hallar a_n

Solución:

Una tabla con las razones de los elementos de la sucesión es la siguiente:

n	a_n	$r_1(n)$	$r_2(n)$
1	$\frac{1}{729}$	3	3
2	$\frac{1}{243}$	9	3
3	$\frac{1}{27}$	27	3
4	1	81	.....
5	81	....	.....

Luego $a_n = \frac{1}{729} \cdot 3^{(n-1)} \cdot 3^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = 3^{-6} \cdot 3^{n} \cdot 3^{-1}.3^{\frac{n^2-3n+2}{2}}$

$$= 3^{\frac{n^2-n-12}{2}}$$

También, la relación de recurrencia es:

$$a_{n+1} = a_n \cdot 3 \cdot 3^{n-1} = a_n \cdot 3^n$$

En muchas sucesiones es fácil determinar la relación de recurrencia por simple inspección, lo que no se puede hacer con la fórmula general. A continuación se plantea un método para encontrar la fórmula que generaliza una sucesión, dada su relación de recurrencia. Cómo se ha venido aclarando solamente se tiene interés en aquellas que llevan a polinomios enteros y exponenciales y las relaciones de recurrencia que llevan a estas expresiones son de la forma:

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ma_{n-m} + g(n)$ con $n \geq m$, donde $c_1, \ldots , c_m$ son constantes, en este caso la relación de recurrencia es lineal y de coeficientes constantes.

Para no extender demasiado el tema, se analizan sólo las de segundo orden:

$a_n= c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + g(n)$ con $n \geq 2$ y condiciones iniciales $a_0 = b_0$ y $a_1 = b_1$

La solución de esta relación de recurrencia se hace en dos fases:

Primero se resuelve $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ (*ecuación homogénea*)

y luego $a_n = g(n)$ (*ecuación particular*)

Para resolver la ecuación homogénea se lleva a una ecuación de la forma $x_2=c_1x+c_2$ (*ecuación característica*) la cual se puede resolver por factorización o como una cuadrática.

Si las raíces de la ecuación característica son α y β, entonces la solución de la homogénea es:

- $a_n = k_1\alpha^n + k_2\beta^n$, si $\alpha \neq \beta$ ó
- $a_n = k_1\alpha^n + k_2n\alpha^n$, si $\alpha = \beta$

Para obtener la solución en las condiciones iniciales $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ basta determinar las constantes k_1 y k_2 con esas condiciones, es decir, $b_0 = k_1 + k_2$,

a_1=$k_1\alpha$ + $k_2\beta$ en el primer caso y b_0= k_1 + k_2 , b_1 = $k_1\alpha$ + $k_2 n\alpha$ en el segundo.

La solución de la ecuación particular depende de la clase de polinomio que sea *g(n)*:

- Si *g(n)* es un polinomio de grado k, se toma un polinomio completo *h(n)* de grado mayor o igual a k y se evalúa en $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + g(n)$ lo cual origina un sistema de ecuaciones que al ser resuelto da los coeficientes de *h(n).*
- Si *g(n)* es una función exponencial de la forma kb^n entonces se toma $h(n)=cb^n$, Si b=α ó b= β (α y β son las raíces de $x_2=c_1x+c_2$) se toma $h(n)=cn^{\alpha-1}b^n$

La solución final de la relación $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + g(n)$ es la suma de ecuaciones homogénea y particular.

Ejemplo 1:

Resolver la recurrencia $a_n=a_{n-1}+ 6a_{n-2}+2^n$, con las condiciones iniciales $a_0=0$, $a_1=1$

Solución:

La solución general de la característica $x^2 = x + 6$ equivalente a $x^2 - x - 6 = 0$ es:

x = 3 y x = -2

Luego la solución de la homogénea es $k_1 3^n + k_2(-2)^n$

Tomamos $h(n)=c2^n$ y la evaluamos en $a_n=a_{n-1}+ 6a_{n-2}+2^n$, así:

$c2^n= c2^{n-1} + 6c2^{n-2} + 2^n$ que es equivalente a:

$c = 2^{-1}c + 6.2^{-2}c + 1$

$c\left(1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)= 1$, de donde se tiene que $c= -1$ y la solución particular es:

$h(n)= - 2^n$

La solución general de la relación es:

$a_n= -2^n+k_1 3^n+ k_2(-2)^n$

Las condiciones iniciales implican que $0 = -1 + k_1 + k_2$, $1 = - 2 + 3k_1 - 2k_2$, luego $k_1=1, k_2=0$, y la solución de la recurrencia es $a_n= - 2^n+ 3^n$

Ejemplo 2:

En la situación problema que se planteó en la intervención pedagógica se originó la sucesión 1, 5, 14, 30, 55, ... los estudiantes visualizaron con más facilidad la relación de recurrencia $a_{n+1}=a_n+(n+1)^2$ con condición inicial $a_1=1$, que es equivalente a la relación $a_n=a_{n-1}+ n^2$, con condición inicial $a_0 = 0$

Hallar a partir de esta relación la fórmula que generaliza esta sucesión.

Solución:

La ecuación homogénea es: $a_n = a_{n-1}$ cuya ecuación característica es $x = 1$, luego la solución de esta es $a_n = k.1^n = k$

Para hallar la solución de la ecuación particular $a_n = n^2$, se toma un polinomio completo de grado 2, para evaluarlo en $a_n=a_{n-1}+ n^2$, el cual puede ser $h(n)=an^2+bn+c$, pero como en la solución de la homogénea también aparece una constante como solución, no sirve un polinomio de este grado, entonces se toma nh*(n), es decir,* $n(an^2+bn+c) = an^3+bn^2+cn$, y se tiene:

$an^3+bn^2+cn = a(n-1)^3+b(n-1)^2+c(n-1)+n^2$ que es equivalente a:

$an^3+bn^2+cn = an^3+n^2(-3a+b+1)+n(3a-2b+c)+(-a+b-c)$

Y se tiene el sistema:

a=a

b= -3a+b+1

c=3a-2b+c

d=-a+b-c

De donde se tiene: $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{6}$

Luego la solución particular es: $a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

Y la solución general del problema es $a_n = k + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

Aplicando la condición inicial $a_0 = 0$, se tiene que k=0

Por tanto $a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ que al simplificar queda:

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Que es la expresión obtenida como generalización de la sucesión de la situación problema de la intervención pedagógica.