



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Números enteros negativos: condiciones de posibilidad que permitieron su inclusión en el currículo escolar colombiano

Investigación para optar al título de Magíster en Educación

LORENA MARÍA QUIROZ BETANCUR

Orientadora

Dra. DIANA VICTORIA JARAMILLO QUICENO

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
MEDELLÍN
2018



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

**Números enteros negativos: condiciones de posibilidad que permitieron su inclusión
en el currículo escolar colombiano**

LORENA MARÍA QUIROZ BETANCUR

Investigación para optar al título de Magíster en Educación

Línea de Formación en Educación Matemática

Orientadora

Dra. DIANA VICTORIA JARAMILLO QUICENO

**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
MEDELLÍN
2018**



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

**NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS: CONDICIONES DE POSIBILIDAD QUE
PERMITIERON SU INCLUSIÓN EN EL CURRÍCULO ESCOLAR
COLOMBIANO**

Lorena María Quiroz Betancur

Orientadora: Diana Victoria Jaramillo Quiceno

Nota de aceptación

**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Firma del jurado

1 8 0 3

Firma del jurado

Medellín

2018



*“Entre la avidez del alma se encuentra siempre
un pedazo de conocimiento, ignorancia y ser”
Lorraine Legreen¹*

A mi madre Luz Dary Betancur Laverde y a mi hermano Daniel Antonio Quiroz Betancur por el apoyo incondicional, por darme palabras de aliento cuando la bruma parecía cubrirlo todo.

A mi asesora Diana Victoria Jaramillo Quiceno, por guiarme y enseñarme que el proceso investigativo requiere de una mirada analítica y centrada. Por mostrarme que el acto de investigar es colectivo, pero, al mismo tiempo, solitario.

A Lorena María Rodríguez Rave, por sus recomendaciones y palabras que me guiaron por el camino de lo histórico, mostrándome que el tiempo es sólo una ventana para ver mil mundos posibles.

Al Seminario Permanente de la Línea de Formación en Educación Matemática y a cada uno de sus integrantes: profesores, estudiantes de la maestría y del doctorado, por todos los comentarios, los aportes y las críticas; sin duda sirvieron para orientarme y formarme como nueva y futura investigadora.

¹ Seudónimo utilizado por la autora de la investigación.



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

A todos aquellos que me apoyaron en este camino, a los que estaban y ahora no, a las energías incondicionales, al cosmos y a su equilibrio.

Infinitas gracias



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



Resumen

La pregunta de investigación que de este estudio fue: ¿qué condiciones de posibilidad permitieron la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano? Consecuentemente, el objetivo de investigación fue analizar las condiciones de posibilidad que permitieron la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano.

Este estudio fue desarrollado bajo un paradigma cualitativo de investigación en educación y con un enfoque hermenéutico-interpretativo. El método utilizado fue el historiográfico complementado con un análisis de contenido. El archivo constituido para el estudio estuvo basado en registros relacionados con: números enteros negativos, condiciones de posibilidad y currículo escolar.

Estos registros posibilitaron ubicar la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano en el periodo temporal comprendido entre la época de la Colonia y finales del siglo XIX.

El análisis de los datos fue realizado a partir de tres categorías emergentes: *“Las ciencias útiles del currículo: de las órdenes religiosas al comercio”*, *“De Lutero a la Expedición Botánica: algunas contribuciones a las ciencias útiles”* y *“La implementación de las ciencias útiles: de la universidad al currículo escolar colombiano*. Los hallazgos, parcialmente encontrados, se resumen en tres condiciones de posibilidad: distribución y adaptación de conocimientos extranjeros en el territorio; influencia de algunas corrientes europeas sobre el desarrollo antropocéntrico y la necesidad del reconocimiento territorial; y,

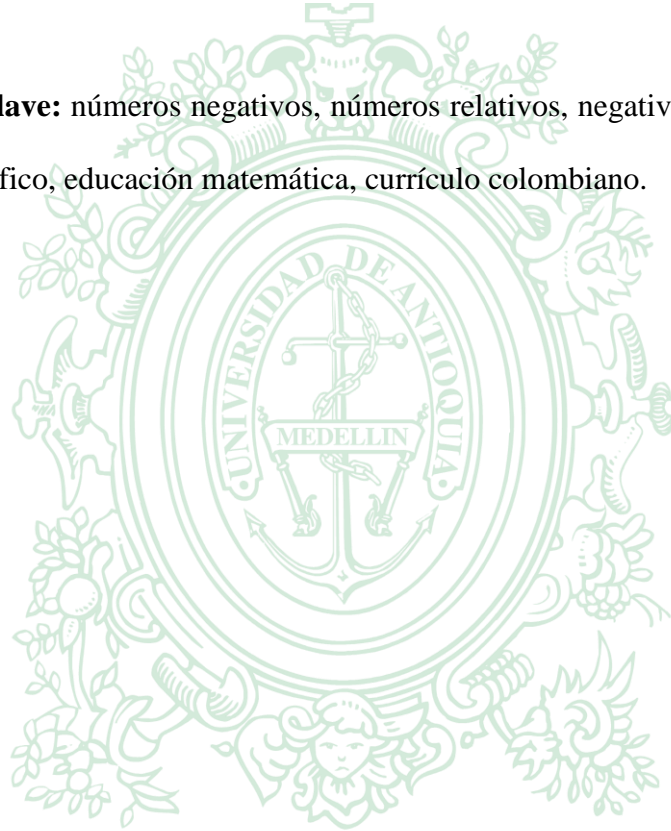


**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

necesidad de llevar lo práctico a lo teórico y lo teórico a lo práctico para potenciar la economía en el territorio.

Palabras-clave: números negativos, números relativos, negatividad, ciencias útiles, método historiográfico, educación matemática, currículo colombiano.



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



Tabla de contenido

| | |
|---|----|
| 1. Sobre lo metodológico: la construcción de un camino..... | 13 |
| 1.1 Presentación..... | 13 |
| 1.2 Surgimiento del camino: el problema de investigación..... | 13 |
| 1.3 Sobre el trayecto: el camino investigativo..... | 22 |
| 1.4 Construcción del archivo..... | 24 |
| 1.5 Historiografía: comprensiones del hoy a partir del ayer..... | 28 |
| 1.4.1 Análisis documental: tratamiento del contenido..... | 31 |
| 2. Aproximación histórica: algunas miradas del objeto..... | 36 |
| 2.1 Fortunas y deudas: el caso de la India..... | 36 |
| 2.2 Varillas negras: de las matemáticas a la espiritualidad..... | 41 |
| 2.3 No ser-ser: el caso de los números negativos y positivos en Grecia..... | 44 |
| 2.4 Del rechazo a la aceptación: Europa entre los siglos XVI y XVIII..... | 49 |
| 3. Del pasado al presente: algunas condiciones de posibilidad que permitieron la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano..... | 53 |
| 3.1 Las ciencias útiles del currículo: de las órdenes religiosas al comercio..... | 54 |
| 3.2 De Lutero a la Expedición Botánica: algunas contribuciones a las ciencias útiles | 76 |



| | |
|---|-----|
| 3.2.1 Lutero: de la fe a la educación..... | 79 |
| 3.2.2 Aportes del sabio Caldas a la geografía y a la ciencia..... | 86 |
| 3.3 La implementación de las ciencias útiles: de la universidad al currículo escolar colombiano | 94 |
| 3.3.1 Las ciencias útiles: algunas instituciones y textos de la primera mitad del siglo XIX..... | 97 |
| 3.3.2 Algunos textos utilizados entre el siglo XIX y principios del XX | 101 |
| 3.3.3 Las ciencias útiles: algunas instituciones y textos de la segunda mitad del siglo XIX..... | 106 |
| 3.3.4 Algunos textos utilizados en Santafé de Bogotá y Medellín | 108 |
| 4. A modo de cierre: el tejido final..... | 122 |
| 5. Referencias bibliográficas | 131 |
| 6. Anexos | 158 |



Lista de figuras

- Figura 1: Elaboración inicial de la ficha en EXCEL. Síntesis de los textos
- Figura 2: Idea intuitiva de Diofanto: “menos por menos es igual a más”
- Figura 3: Representación de los números enteros en China y Grecia. (Tomado de Lizcano 1993)
- Figura 4: Cantidades negativas – Lacroix (1821)
- Figura 5: Portada de la Cartilla Lacónica (1797)
- Figura 6: Tratado de álgebra de D.H. Araújo (1877). Explicación de las cantidades negativas en forma de cuestionario
- Figura 7: Catecismo histórico. A. Claudio Fleury (1776)
- Figura 8: Portada de Elementos de Matemáticas por Benito Bails (1779)
- Figura 9: Elementos de matemáticas Benito Bails (1779). Ejemplo sobre cómo se empleaba el lenguaje para el uso de las cantidades negativas
- Figura 10: Ejemplo “pago de reales”
- Figura 11: Ejemplo de fortuna y deuda
- Figura 12: Ejemplo del hórreo
- Figura 13: Indio carguero entre Honda y Bogotá
- Figura 14: Documento que contiene las noventa y cinco tesis realizadas por Martin Lutero
- Figura 15: Tabla elaborada por Francisco José de Caldas. Comparación de datos obtenidos a partir de su fórmula hipsométrica



Figura 16: Coordenadas geográficas (ubicación con respecto al Ecuador y el meridiano Greenwich)

Figura 17: Portada Tratado Elemental de Aritmética

Figura 18: Adición de números enteros

Figura 19: Sustracción de números enteros

Figura 20: Multiplicación de números enteros

Figura 21: División de números enteros

Figura 22: Portada Tratado de Álgebra de Liévano

Figura 23: Cantidades negativas – Liévano–

Figura 24: Ejemplo de las cantidades negativas – Liévano–

Figura 25: Portada Éléments D'Algèbre

Figura 26: Solución negativa de expresiones algebraicas – Bourdon–

Figura 27: Sobre el álgebra – Bourdon–

Figura 28: Portada Álgebra y trigonometría

Figura 29: Números positivos y negativos

Figura 30: Interpretación de los valores negativos

Figura 31: Esquema de la investigación



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

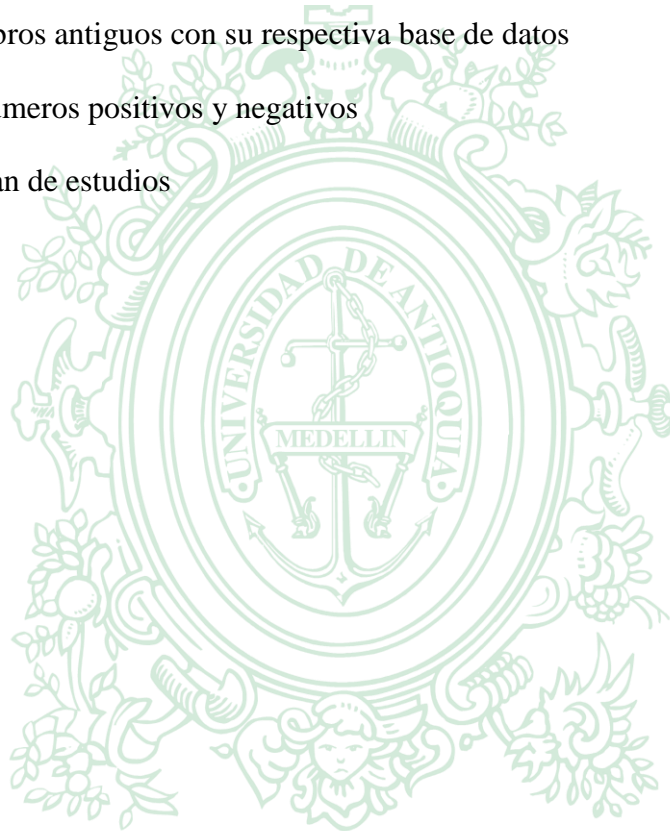
Lista de tablas

Tabla 1: Total de fuentes

Tabla 2: Libros antiguos con su respectiva base de datos

Tabla 3: Números positivos y negativos

Tabla 4: Plan de estudios



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



1. Sobre lo metodológico: la construcción de un camino

“...La historia se ha visto como un enorme rompecabezas con muchas piezas faltantes”²
(Carr, 1982, p. 49)

1.1 Presentación

En el presente capítulo mostraré algunos elementos que conformaron el trayecto investigativo, entre los que se encuentran: el planteamiento del problema, tipo de investigación, enfoque y método. Además, expondré cómo se comenzó a constituir el archivo de la investigación a partir de los datos que se encontraron en algunas fuentes documentales.

1.2 Surgimiento del camino: el problema de investigación

Las matemáticas han sido, a través de los años, la respuesta a preguntas formuladas por seres humanos de las diversas culturas que han buscado en ellas una explicación coherente a ciertos eventos ocurridos en su cotidianidad. En palabras de Miguel y Miorim (2005, p. 51), “la historia de las matemáticas muestra que estas fueron construidas como respuesta a preguntas provenientes de diferentes orígenes y contextos, motivadas por problemas de orden práctico o por problemas vinculados con otras ciencias como la física y la astronomía”. Así, en esta investigación, al pensar en la historia de las matemáticas, me remito a civilizaciones que, conforme a las necesidades de sus culturas y contextos, lograron ingeniar múltiples formas y abstracciones para dotar de orden a todos aquellos objetos que

² Las traducciones de documentos realizadas del portugués al español y del inglés al español fueron realizadas por la autora, y por ende no comprometen de ninguna manera a los autores de los textos originales.



poseían algunas propiedades específicas que debían ser analizadas en su propia realidad. Pienso en algunas civilizaciones como la egipcia, minoica, china, romana, hindú, que se idearon formas de establecer o conocer la realidad de las cosas para dotarlas de orden que las hiciera asequibles al conocimiento de los demás.

Cada cultura fue desarrollando su propia matemática en diversos momentos históricos y de varias formas; sin embargo, es común encontrar en cada una de ellas conceptos básicos como: el número, la cantidad y la magnitud (Ríbnikov, 1991). Autores como González (1998), Ríbnikov (1991) y Caraça (1961) expresan que el concepto de número surgió como consecuencia de contar los objetos, y tal concepto era limitado; no obstante, la serie de números se hizo tan extensa, de forma gradual, que fue nombrada posteriormente por el matemático Georg Cantor³ como el conjunto de los números naturales.

La noción de conteo, posteriormente sistematizada en los números naturales, fue denotada de manera inicial por algunos grupos prehistóricos de la época del Paleolítico Superior entre (35.000 – 10.000) (Redondo, Martín-Loeches y Pobes, 2010), sin embargo, los aportes en la historia más reciente, tienen que ver con civilizaciones como la griega y la romana; que realizaron algunas construcciones conceptuales y axiomáticas hasta que se fue pasando a estructuras lógicas elementales, con aspectos de ordinalidad y cardinalidad, lo que permitió su reconocimiento desde la teoría de conjuntos (González, 1998). Estas

³ Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845-Halle, 6 de enero de 1918) Matemático nacido en Rusia, reconocido por su contribución a la teoría de conjuntos con investigaciones sobre los conjuntos infinitos y números transfinitos (ordinales y cardinales).



características de los números naturales fueron apenas formalizadas en el siglo XIX, a pesar de que tales números eran conocidos en Europa a comienzos del siglo XII.

Las necesidades y condiciones sociales de estos siglos se fueron desarrollando tan precipitadamente en las diferentes culturas, que ya no solo bastaba con estos números. El comercio y posterior estudio de situaciones algebraicas mostraban la necesidad de otro concepto de número diferente al número natural; el cual debía ser más amplio y en él estarían involucrados otros objetos matemáticos, partiendo de esto, se comenzaron a concebir los números enteros negativos (Prado, 2008).

La historia de los números enteros negativos data del año 628, cuando el matemático indio Brahmagupta⁴ presentó soluciones generales para ecuaciones cuadráticas, inclusive con la raíz negativa. Según Vélez y Varela (2014, p.5), “las propiedades completas de las operaciones con números negativos y el cero también fueron dadas por él, en el siglo VII d. C, además, de explicar todas estas en términos de deudas y fortunas”.

Autores como Sousa, Alves y Sales, (2015), Heffer (2008), González (1998), Prado (2008), Maz (2005), Cid (2000) y Lizcano (1993) muestran en sus trabajos la importancia que tuvo el comercio en la creación de los números enteros negativos; sin embargo, algunos de los autores antes mencionados, resaltan la necesidad de estos para la solución de

⁴ Brahmagupta (Bhinmal, 598 d. C-India, 670 d. C.). Matemático y astrónomo nacido en India, es reconocido por su obra Brahmasphutasiddhanta donde expuso el concepto de cero y números negativos. Además, es conocido por la fórmula que lleva su nombre que servía para calcular ternas pitagóricas y por la teoría de ecuaciones indeterminadas.



situaciones algebraicas. Por ejemplo, dice González (1998), “la introducción por Cardano⁵ de la unidad negativa como solución de la ecuación $x + 1 = 0$, fue la primera tentativa para introducir los números negativos” (p. 76).

Esta situación que se manifestó inicialmente en términos comerciales y luego en términos algebraicos siguió un tratamiento por parte de matemáticos como Cardano, Vieta⁶, Descartes⁷, D’Alembert⁸ y por civilizaciones relevantes de la historia como la árabe (Schubring, 1993). Vélez y Varela (2014) expresan que “los números negativos, aunque fueron conocidos en Europa a través de los textos árabes, no eran aceptados como números por la mayoría de los matemáticos de los siglos XVI y XVII” (p. 8).

Los árabes, aunque trabajaban con los números irracionales, rechazaron los negativos, que conocieron a través de la cultura india. Cardano consideraba que estos eran soluciones imposibles, meros símbolos a los que llamaba ficticios. Descartes aceptaba los números negativos, no obstante, llamaba falsas las raíces negativas de las ecuaciones, por ser menores

⁵ Gerolamo Cardano (Pavía ducado de Milán, 24 de septiembre de 1501-Roma, 21 de septiembre de 1574). Médico y matemático italiano reconocido por la solución general completa de ecuaciones de tercer y cuarto grado.

⁶ François Viète o Franciscus Vieta (Fontenay-le-Comte, 1540-París, 1603). Matemático francés, reconocido por ser uno de los principales precursores del álgebra, al representar los parámetros de una ecuación mediante letras.

⁷ Renatus Cartesius o René Descartes (La Haye en Touraine, 31 de marzo de 1596-Estocolmo, 11 de febrero de 1650). Filósofo, físico y matemático francés, precursor de la geometría analítica.

⁸ Jean le Rond D’Alembert o Jean Le Rond d’Alembert (París, 16 de noviembre de 1717-París, 29 de octubre de 1783). Filósofo, enciclopedista y matemático francés, reconocido por su contribución a las ecuaciones diferenciales y derivadas parciales.



que la nada. Pascal⁹ consideraba absurda la idea de restar cuatro de cero, al igual que Chuquet¹⁰ y Stifel¹¹ quienes hablaban de los negativos como números absurdos (Vélez y Varela, 2014).

Después de la aceptación de los números enteros negativos se han realizado múltiples investigaciones como la de Bell (1986), Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991), Maz (2005), Castillo (2014), donde se exponen cuáles han sido algunos obstáculos frente a la enseñanza de tales números, además de mostrar varias estrategias llevadas al aula para mejorar su aprendizaje. Dentro de las dificultades se resaltan los temas epistemológicos y lógico-formales en trabajos sobre “resolución de problemas, historia y epistemología de la aritmética y el álgebra, y enseñanza-aprendizaje en la iniciación al álgebra” (González, 1998, p. 11).

Pocos han sido los estudios que han mostrado las condiciones de posibilidad¹² que permitieron la inclusión de los números enteros negativos en el currículo escolar colombiano. En ese sentido González (1998) expresa: “Los antecedentes relacionados con la enseñanza y otros aspectos curriculares de los números enteros, salvo algunas excepciones que se

⁹ Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 19 de junio de 1623-París, 19 de agosto de 1662). Polímata, físico, filósofo, escritor y matemático francés. Realizó algunas contribuciones a la teoría de la probabilidad y al diseño y construcción de calculadoras mecánicas.

¹⁰ Nicolás Chuquet (París, 1445 – Lyon, 1488). Matemático francés reconocido por realizar los primeros textos de aritmética y álgebra.

¹¹ Michael Stifel (Esslingen, 1487 – Jena, 19 de abril de 1567). Matemático alemán precursor de los logaritmos y el término exponente.

¹² El término “condiciones de posibilidad” lo abordé en esta investigación bajo una perspectiva foucaultiana; en varios apartes de este documento será explicitado mi comprensión de dicho término (por ejemplo, ver numeral 1.5).



encuentran dentro de una tradición consolidada en el ámbito de la investigación educativa, son puntuales y aislados” (p. 121).

Partiendo de lo expresado por González (1998) y de mi experiencia como profesora de matemáticas, he comprobado que al enseñarse los números enteros negativos se encuentran ciertas falencias históricas en algunos profesores que limitan su enseñanza, lo cual lleva al profesor a desarrollar, en algunas ocasiones, actividades que tienden a ser leídas por sus estudiantes como “rígidas” o aisladas de sus contextos cotidianos. De esta forma, a la hora de la enseñanza y del aprendizaje de los números enteros negativos no se logra establecer una articulación entre su origen histórico, el contexto en el que está inmersa la comunidad educativa de la escuela, y el conocimiento matemático que está en juego.

Al no establecerse esta articulación en las actividades llevadas al aula, los números enteros negativos se ven como obligación y no como generadores de progreso y desarrollo del hombre y la sociedad. Según Zapico (2006), “el objeto de enseñar matemáticas con su historia hace parte del proceso de humanizarlas, contextualizarlas, de mostrar a nuestros estudiantes que es un producto más de la actividad humana que se gestó a partir de diferentes estímulos, en ocasiones para resolver problemas prácticos y otras por motivos de orden artístico o espiritual” (p. 3).

Teniendo en cuenta lo anterior, planteo la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué condiciones de posibilidad permitieron la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano? Consecuentemente con esta pregunta, planteo como objetivo, analizar las condiciones de posibilidad que permitieron la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano.*



Antes de mostrar dichas condiciones de posibilidad, realizaré una narración historiográfica presentando cómo se empezaron a gestar los números enteros negativos en la Europa del siglo XVI, y luego contaré cómo, por medio de la colonización, llegaron al territorio colombiano (llamado por ese entonces Nuevo Reino de Granada).

En este recorrido me referiré a aspectos relevantes que ocurrieron en varios de los contextos a lo largo de la historia de Colombia, hasta que se hizo posible la inclusión de estos números en el currículo escolar. Dichos aspectos de carácter social, político, económico y cultural reflejan lo que podría considerarse como condiciones de posibilidad. Díaz (2005) afirma que “las condiciones de posibilidad permiten circunscribir el ‘lugar’ del acontecimiento, las márgenes de aleatoriedad, las prácticas que los constituyeron, en qué condiciones históricas se producen ciertos discursos y cómo ellos, a su vez, modifican dichas condiciones” (p. 83).

Según González (1998):

Los objetos matemáticos, una vez creados y comunicados, pasan a formar parte de la cultura, del patrimonio de conocimientos válidos, consistentes y creíbles (si son aceptados en estos términos), adquiriendo entonces una categoría de realidad distinta de la del sujeto individual y de la del mundo exterior; una tercera realidad a la que pertenecen las tradiciones, las costumbres y las creencias, que no se encuentran ni dentro ni fuera del individuo, aunque compartiendo ambos lugares. (p. 63)

De acuerdo con González (1998), los números enteros negativos desde el momento de su aceptación pasaron a ser parte de una sociedad que se construye, se modifica, que crea y recrea objetos matemáticos según sea la necesidad en la que se encuentre. Es decir, a partir



de las condiciones específicas de cierto contexto, los sujetos buscan soluciones que sean correspondientes a él y, por ende, la construcción realizada por cada comunidad es válida para sí y en muchos casos diferente para las demás.

Partiendo de apreciaciones como estas, considero que la visión de matemáticas que aquí presento no es estática. Por el contrario, las matemáticas son una ciencia que se mueve, se transforma y se modifica; ejemplo de ello son los números enteros negativos, en sus diversas concepciones históricas y en la forma en que han sido abordados en los diferentes textos, desde la antigüedad hasta hoy.

Algunos estudios, como los desarrollados por Glaeser (1981), Iriarte *et al.* (1991), Cid (2000) y Osorio (2014) muestran que, a pesar de que los números enteros (negativos y positivos) han sido utilizados desde la antigüedad y están presentes en los currículos de las instituciones educativas de hoy, siguen presentando algunas dificultades para ser enseñados, específicamente por el paso que representa para los estudiantes la solución de ejercicios desde lo práctico (los números naturales) a lo formal (los números negativos).

Uno de los obstáculos presentes en la enseñanza de los números enteros “está enmarcado en las relaciones entre lo real y lo formal, es decir, por la confrontación entre el conocimiento formal de los números y el conocimiento práctico que se posee de ellos como representación de lo real” (González *et al.* 1999 citado por Osorio 2014, p. 49). Más adelante cuando muestre un poco del desarrollo histórico de los números enteros negativos, se podrá ver que este problema es antiguo y está ligado a su mismo proceso de aceptación.



Según González (1998), en las instituciones escolares se levantan cuestionamientos que se constituyen en fuente de preocupación en el ámbito de la educación matemática.

Algunos de estos interrogantes son:

¿Es lo mismo 2 que +2? ¿En qué se diferencian? ¿Y 2 y -2? ¿Qué es un número negativo? ¿Qué tienen que ver los signos que anteceden a los números enteros con los signos de las operaciones de adición y sustracción? ¿Significan lo mismo? ¿Son diferentes? ¿Qué sentido tiene que si multiplico dos deudas obtenga como resultado una fortuna? ¿Por qué se sacan los números enteros del contexto algebraico en el que surgieron históricamente para ser enseñados como números, en pie de igualdad con los naturales y racionales? (p. 19)

Los números enteros negativos en algunas ocasiones son enseñados de una forma disociada y segmentada, donde los estudiantes no comprenden el por qué o el para qué de estos, ya que no se muestra una conexión transversal entre la historia, el contexto y el conocimiento escolar. Por ello, considero que comprender las condiciones de posibilidad permitiría explorar los diferentes discursos desarrollados en una sociedad como la colombiana y, por ende, conocer los conocimientos del hoy y del ayer, para responder a preguntas históricas y epistemológicas como las antes formuladas. Según Maca (2016) citando a Rodríguez (2010):

La enseñanza de las matemáticas se ha limitado a dictar teoría ya acabada de otros, pero en la que el alumno no puede relacionarla con su cotidianidad, con su cultura y con sus sentimientos el docente ha convertido sus clases en asuntos fríos, más con



improvisaciones que con preparación, creando una predisposición ante estas, alejando a sus estudiantes del interés por aprender. (p. 10)

Reconocer la historia de las matemáticas, para este caso la historia de los números enteros negativos, como elemento fundante del conocimiento matemático, podría contribuir a la creación y planeación futura de actividades que el docente puede llevar al aula para estimular el aprendizaje de los estudiantes. Actividades que puedan establecer una articulación entre la historia de los números enteros, el contexto histórico-cultural de la comunidad educativa en la que están inmersos los estudiantes en cuestión y el conocimiento matemático¹³.

1.3 Sobre el trayecto: el camino investigativo

La presente investigación se enmarca en un paradigma cualitativo, con un enfoque hermenéutico-interpretativo, utilizando como método el estudio historiográfico complementado con un análisis de contenido. Antes de empezar a desarrollar el presente apartado considero importante declarar que las ideas que se expondrán en esta investigación están basadas en el archivo que se construyó para su desarrollo. Y es a partir de ese archivo que se hace posible contar una historia de la historia y, así, darle un sentido a los registros encontrados y a los datos producidos.

Según Vanegas (2010), la investigación cualitativa “permite reconocer la existencia de múltiples realidades y no una realidad única y objetiva, sino una construcción o un

¹³ Crear y planear estas actividades, en el marco de la *Teoría de la Actividad* ha de ser de parte de mi interés en un proceso futuro de formación a nivel doctoral.



constructo de las mentes humanas; y, por tanto, la “verdad” está compuesta por múltiples constructos de la realidad” (p. 130). Así, la investigación cualitativa dentro de este estudio cobra sentido, ya que al hablar de *condiciones de posibilidad* se hace referencia a esas elaboraciones y situaciones que se construyeron en lugares y momentos específicos de una comunidad y que constituyeron una realidad para dicha población.

En consonancia con lo anterior, Denzin y Lincoln (2012) expresan:

La investigación cualitativa implica un enfoque interpretativo y naturalista del mundo, lo cual significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en sus escenarios naturales, tratando de entender o interpretar los fenómenos en función de los significados que las personas les dan. (p. 48)

Los hechos y fenómenos estudiados se encuentran en esta investigación en las fuentes documentales que se consignaron en registros. Tales registros permitieron indagar sobre esas condiciones de posibilidad, que se analizaron a partir de uno de los enfoques de la investigación cualitativa como el hermenéutico-interpretativo. Este busca, a partir de la lectura profunda y contextual, la interpretación de los escritos históricos, es decir, “la hermenéutica no es solamente la interpretación por la interpretación, sino la experiencia de lo ajeno, de lo distinto y la posibilidad del diálogo” (Ruedas, Ríos, y Nieves, 2009, p. 185). Así, el enfoque hermenéutico-interpretativo permitió conocer y (re)conocer los diversos discursos sobre los números enteros negativos que fueron elaborados en la Europa del siglo XVI y que fueron llegando a Colombia, específicamente en la época de la Colonia.



1.4 Construcción del archivo

El archivo se entiende, en esta investigación, como “el conjunto de documentos que se transforman en el material de trabajo para la investigación histórica” (Rodríguez, 2011, p. 25). Es decir, en este estudio el archivo se construyó con las fuentes primarias y secundarias consultadas y que tuvo como temática central los tres pilares de esta investigación: condiciones de posibilidad, números enteros negativos y currículo escolar colombiano.

Las fuentes primarias fueron aquellas que poseían información original y que fueron el resultado de un trabajo intelectual formulado de primera mano; mientras que las fuentes secundarias fueron aquellas que poseían información que fue analizada y procesada de una fuente primaria, es decir, son las interpretaciones y extracciones que se realizan a una fuente principal (Sampieri, 2008).

Los datos surgieron de los registros (fuentes primarias y secundarias), y son aquellos que hablan particularmente del objeto de investigación y se destacan como el resultado de una interpretación de la realidad (Schettini y Cortazzo, 2015); es decir, para este estudio, los datos se encontraron en el contexto histórico colombiano, en los libros de matemáticas utilizados en Colombia entre los siglos XVIII y XIX, y en las primeras cartillas de enseñanza que hablaban directamente de los números enteros negativos, de su tratamiento y desarrollo en las escuelas colombianas.

Presento a continuación las fuentes consultadas, que sirvieron para analizar el archivo de esta investigación.

Tabla 1

Fuentes



| Tipo de fuente | Primaria/Secundaria | Número |
|-----------------------|---------------------|--------|
| Libros | Primaria | 11 |
| | Secundaria | 39 |
| Artículos | Secundaria | 74 |
| Tesis de pregrado | Secundaria | 1 |
| Tesis de maestría | Secundaria | 5 |
| Tesis de doctorado | Secundaria | 2 |
| Páginas web | Secundaria | 3 |
| Conferencias | Secundaria | 1 |
| Memorias de congresos | Secundaria | 1 |
| Ensayos | Primaria | 1 |
| Periódicos | Primaria | 1 |

Número de fuentes utilizadas (Ver referencia)

Los artículos fueron localizados en bases de datos como *Dialnet*, *Scielo*, *Redalyc*, *Eric*, en memorias de congresos como el CEMACYC (Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe), en repositorios de tesis como la de la Universidad Nacional (bdigital), la Universidad de Antioquia, la Universidad de los Andes, la biblioteca digital de la Universidad del Valle, la biblioteca virtual Luis Ángel Arango, en buscadores como Google Académico, Google Books y Archive.org. También consulté las leyes y decretos que empezaron a regir la educación desde 1886 hasta la actualidad en la página web del



Cada una de estas fuentes aportó significativamente a este proceso de investigación, sin embargo, para ejemplificar el contexto donde fueron utilizados los números enteros negativos se tomaron específicamente los siguientes libros:

Tabla 2

Libros de matemáticas utilizados en Colombia entre el siglo XVIII - XIX

| Libros de matemáticas utilizados en Colombia entre el siglo XVIII y XIX | Base de datos utilizada |
|--|--------------------------------------|
| Bails, B. (1779). <i>Elementos de matemáticas</i> . Madrid, España: Impresor de Cámara de S. M. | Google Books |
| Bergeron, A. (1848). <i>Lecciones de matemáticas</i> . Parte primera. Bogotá, Colombia: Imprenta de Ancízar. | Google Books |
| Bourdon, M. (1837). <i>Éléments D'algèbre</i> . París, Francia : Imprimeur-Libraire | Google Books |
| Bruño, G. (1825). <i>Álgebra y trigonometría</i> . París, Francia: Procuraduría General. | Google Books |
| Liévano, I. (1856). <i>Tratado elemental de aritmética</i> . Bogotá, Colombia: Imprenta de Echeverría Hermanos | Biblioteca Virtual Luis Ángel Arango |
| Liévano, I. (1875). <i>Tratado de Álgebra</i> . Bogotá, Colombia: Imprenta de Medardo Rivas. | Biblioteca Virtual Luis Ángel Arango |

¹⁴ Para ver leyes y decretos ingresar al enlace: <http://www.mineduacion.gov.co/portal/> (Normatividad)



Lacroix, S. (1821). *Curso completo elemental de matemáticas puras*. Tomo II [Traducido por D. Josef Rebollo y Morales]. Madrid, España: Imprenta Real

Google Books

Libros antiguos utilizados en la enseñanza de las matemáticas entre los siglos XVII al siglo XIX con su respectiva base de datos

Cada uno de estas fuentes (tabla 2) fueron seleccionados bajo dos criterios: el primero, que fuese un libro de texto creado por algún autor colombiano o que fuese uno de los textos utilizados a partir de la Colonia hasta finales del siglo XIX. Examiné cada libro, tratando de hallar algunas relaciones entre las condiciones de posibilidad y los números enteros negativos, configurando un tratamiento metodológico por tematización.

Al establecer dichas relaciones empezaron a generarse otras preguntas que me ayudaron a constituir el archivo: ¿Por qué los números enteros negativos fueron incorporados inicialmente como cantidades negativas?, ¿por qué se dio la necesidad de separar los números enteros negativos de su contexto algebraico?, ¿qué función tienen estos números en la cotidianidad? Estos cuestionamientos me ayudaron a percibir los números enteros negativos como un conocimiento en movimiento, un conocimiento no estático que se ha transformado a través de la historia en dialéctica, con algunas condiciones histórico-culturales y que han transformado el currículo escolar en el transcurrir de los años.

Otro de los conceptos a resaltar dentro de la metodología es el de currículo. El currículo según Stenhouse (1984), es “una tentativa para comunicar los principios y rasgos esenciales de un propósito educativo, de forma que permanezca abierto a la discusión crítica y se pueda trasladar a la práctica” (p.30).



Según Sacristán (1998) el currículo es un eslabón que permite asociar el conocimiento, la sociedad y la escuela como una cultura heredada, es decir, el currículo es una pieza donde se enlazan las construcciones sociales, y como elaboración cultural puede reflejar o refractar lo que la sociedad ha elaborado. En este sentido, concuerdo con Sacristán (1998) en que los propósitos educativos se van movilizandoy estableciendo según las intenciones sociales y políticas de cada población.

1.5 Historiografía: comprensiones del hoy a partir del ayer

Ahondando en el camino que he trazado en este estudio, me parece necesario referenciar dos conceptos clave; uno de ellos es “historiografía” y el otro es “condiciones de posibilidad”. La historiografía es una metodología propuesta por diversos autores como Ruiz (1993), Melo (1996), D’Ambrósio (1999), Pappé (2001) y Mayer (2009), entre otros, quienes proponen la viabilidad de entender el presente a través del estudio de lo histórico. Según Rama (1981):

La historia de la historia (como también se designa a la historiografía), obliga a una presentación cronológica que tenga en cuenta el desarrollo del pasado cultural, su inserción en el mundo político-social, pero al tiempo la circunstancia concreta y eventual de todos y cada uno de los creadores individuales. (p. 8)

Esta metodología, que tiene en cuenta aspectos culturales, políticos y sociales, crea la posibilidad de analizar críticamente los discursos del pensamiento histórico que se han expuesto a partir de fuentes, manifestaciones y representaciones. La historiografía (como método o técnica de investigación histórica) posee algunas corrientes que se centran en la



forma en que es estudiada la historia de la historia entre las que se encuentran: el positivismo, el materialismo histórico, la escuela de los anales, el historicismo (Melo, 1996).

Para abordar la temática que muestro en esta investigación, recorro a la complementación de dos de las corrientes antes mencionadas: el materialismo histórico y la escuela de los anales. El materialismo histórico o teoría marxista de la historia tiene por objeto el estudio de los diferentes modos de producción, debe servir además para la producción de conocimientos históricos necesarios para las formaciones sociales y políticas (Hernecker, 1976).

El materialismo histórico, como corriente historiográfica, apunta a las múltiples formas de analizar los sucesos históricos, para establecer puntos de reflexión sobre el ser humano y su entorno. En otras palabras, esta corriente muestra una “concepción de los derroteros de la historia universal que ve la causa final y la fuerza propulsora decisiva de todos los acontecimientos históricos importantes en el desarrollo económico de la sociedad, en las transformaciones del modo productivo y de cambio” (Engels, 1880 citado por Erice, 2013).

Por otra parte, la escuela de los anales plantea que la “historia no es el relato de hechos aislados ni el devenir de los líderes, sino que se trata de la construcción de todos los componentes sociales dentro de un dinamismo sistemático que involucra a otras disciplinas sociales” (Maglio, 2016, p. 1). Algunas de las disciplinas que se estudian dentro de la escuela de los anales son la economía, la sociología y la geografía; lo anterior, con el fin de entender y comprender el pasado de las diferentes culturas a partir de aspectos generales que componen el conocimiento social.



Partiendo de lo antes expuesto, puedo decir que en esta investigación se entenderá por historiografía aquella dialéctica que se traza entre el pasado y el presente, entre la historia de las historias, particularmente en las condiciones de posibilidad, para conocer aspectos sociales, culturales, políticos e incluso religiosos que influyeron en un periodo determinado para crear la historia que puede ser narrada y vivenciada desde el presente.

Por otro lado, las condiciones de posibilidad pueden ser vistas desde autores como Díaz (2005), Romero (2010) y Agudelo (2011) quienes, en consonancia con la perspectiva foucaultiana, definen este concepto como las condiciones elaboradas por o a partir del discurso y sus códigos, o por o a partir del conocimiento y la experiencia. Según Foucault (2002, p. 73): “No se puede hablar en cualquier época de cualquier cosa; no es fácil decir algo nuevo”. La historia, para ser entendida desde esta perspectiva, necesita ser interpretada a partir de su coherencia interna y su explicación, es decir, se buscan relaciones en los discursos o enunciados que posibiliten el encuentro con las singularidades discursivas y la discontinuidad.

Las condiciones de posibilidad van emergiendo de las singularidades y las discontinuidades, configurando tres premisas útiles para comprender mejor la formación del objeto: la primera se pregunta por el lugar, el dónde; la segunda por las circunstancias limitantes, o regla del tema y, la última, por la regla del sujeto. Es decir, a partir de las relaciones discursivas se puede inferir el lugar en que se produjeron los acontecimientos, el tiempo, el tema, y el o los sujetos que están implicados (Foucault, 2002).

En este trabajo entenderé las condiciones de posibilidad como los discursos y las acciones sociales que se dan en lugares y tiempos particulares en una búsqueda de la verdad.



Por tal razón, deduzco que las condiciones de posibilidad permiten la intersección de los contextos y los acontecimientos sociales, educativos, políticos, económicos, culturales y religiosos de una comunidad, que se expresa en y a través de códigos, discursos y otras prácticas que surgen de la interacción entre los sujetos y su entorno.

Para ampliar un poco lo antes mencionado, considero necesario desarrollar algunos elementos que se utilizan dentro de esta investigación y hacen parte del método historiográfico. Estos elementos son: el análisis documental, el análisis de contenido y la lectura crítica.

1.4.1 Análisis documental: tratamiento del contenido

El análisis documental se basa en un proceso de selección en los documentos de las nociones y conceptos que se aproximan al estudio del objeto. Para analizar un documento no sólo se debe tener en cuenta la identificación externa o descripción física que se hace a través de los elementos formales como el autor, el título y la editorial, sino su contenido. Autores como Vickery (1970) destacan que:

El análisis documental responde a tres necesidades informativas de los usuarios, en primer lugar, conocer lo que otros pares científicos han hecho o están realizando en un campo específico; en segundo lugar, conocer segmentos específicos de información de algún documento en particular; y, por último, conocer la totalidad de información relevante que exista sobre un tema específico. (p. 154)



Para realizar un análisis documental se debe tener como elemento básico la descripción conceptual de la temática. Esta se realiza a través de palabras clave o descriptores tesauros¹⁵.

En la presente investigación opté por la búsqueda de palabras clave en bases de datos, artículos, memorias de congresos, repositorios de tesis y trabajos de grado de diversas universidades nacionales y españolas, además de una exploración en libros entre el siglo XVIII y XIX que me mostraron la forma en que se le daba tratamiento a la temática de los números enteros negativos, partiendo del planteamiento de problemas con actividades propias del contexto y la cultura.

Algunas de las palabras clave utilizadas fueron: números negativos, números enteros, números relativos, negatividad, historia de la educación en Colombia, historia de las matemáticas en Colombia e historia del currículo colombiano. Esta búsqueda la realicé en las fuentes antes mencionadas, en español, inglés y portugués.

Luego continué con el análisis de contenido, el cual es una técnica que sirve para analizar los documentos, no desde su forma o estilo en particular, sino, desde el significado de las palabras, temas, frases e ideas (López, 2002).

Según Bardin (1986): «“el análisis de contenido es un conjunto de instrumentos metodológicos, cada vez más perfectos y en constante mejora, aplicados a “discursos”» (p. 7). Los discursos son los contenidos elaborados por cada una de las culturas, de los cuales se sirven los estudios históricos e historiográficos para identificar estructuras útiles en el

¹⁵«Un descriptor tesoro es una herramienta compuesta por un conjunto de términos relacionados entre sí, sobre un tema o materia determinada» (Maldonado, 2010, p. 175).



proceso investigativo, y, por lo tanto, poder traducir a partir de la hermenéutica el objeto de estudio.

Sobre los registros encontrados, relacionados con los números enteros negativos, la historia de Colombia y el currículo escolar colombiano, inicié una lectura crítica para narrar e interpretar la historia. Según Abad, Monistrol, Altarribas, y Paredes (2003) “La lectura crítica es el proceso de evaluar e interpretar la evidencia aportada por la bibliografía científica, considerando sistemáticamente los resultados que se presentan, su validez y su relevancia para el propio trabajo” (p. 33).

Para algunos autores como Abad *et al.* (2003), Cassany (2003) y Carvajal (2004), la lectura crítica tiene ciertos criterios o fases que se deben cumplir para acceder a la información requerida de forma selectiva y organizada. Presento a continuación, paso a paso, los criterios de Abad *et al.* (2003) y la forma en que se utilizaron en el presente estudio:

1. Se evalúan algunos parámetros que nos permitan eliminar algunos artículos, y así focalizar nuestro análisis en aquellos que pasen a la segunda fase. Los aspectos que deberemos tener en cuenta son: el título, los autores, el resumen y los resultados.

(Abad *et al.*, 2003, p. 40)

Para el presente estudio, el proceso de búsqueda lo realicé en las fuentes documentales como se explicitó anteriormente. Posteriormente, sistematicé en una plantilla elaborada en EXCEL algunos datos relevantes como los mencionados en la figura 1; sin embargo, decidí añadir otros como la fecha de elaboración, las palabras clave, la referencia bibliográfica y algunos comentarios personales. Presento a continuación, y a modo de ejemplo, la forma de sistematizar la información:



| Fecha | Palabras clave | Resumen | |
|--|--|---|--|
| 09 de Abril de 2016 | Números negativos Realismo platónico Números absurdos | En un artículo anterior habíamos desarrollado la idea de que los números naturales se descubren y que la categoría «contar»—con su principio de inducción y su estructura de sistema numérico, de base 10, por ejemplo—es independiente de la mente humana, el hombre no inventa tal concepto ni sus reglas, sino que las aplica. Del hecho de que se trate de un descubrimiento se deduce que los números existen y que sus propiedades son las que caracterizan al realismo (parcialmente, como veremos) platónico. | |
| Bibliografía | | Mis primeros comentarios | |
| Vélez, D. & Varela, O (2014). <i>El descubrimiento de los números negativos</i> . Matemática primitiva y realismo platónico. Universidad de Antioquia. Recuperado de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/3122 | | El documento expone apartados importantes sobre el surgimiento de los números negativos, sin embargo, no hay un orden establecido y no se habla muy bien de cada uno de los contextos. | |

Figura 1. Elaboración inicial de la ficha en EXCEL. “Síntesis de los textos”

2. Se analizará la capacidad del artículo para contestar al problema que nos planteamos. Mediante ciertas preguntas podremos descubrir si el artículo se estructura de forma adecuada y no quedan elementos de la investigación sin la contestación, aclaración y resolución adecuada. (Abad *et al.*, 2003, p. 41)

Algunas de las preguntas que me permitieron explorar los registros de forma focalizada fueron: ¿El documento tiene información histórica de los números enteros negativos?, ¿se habla de alguna condición de posibilidad?, ¿resaltan dentro del documento los avances que se han tenido con respecto a los números enteros negativos y el currículo escolar?, ¿muestra el documento algunos textos utilizados a partir de la Colonia hasta finales del siglo XIX para la enseñanza de los números enteros negativos?



3. “Los artículos que hayan pasado las dos fases anteriores se analizan de manera más profunda, focalizando la evaluación sobre el material y la metodología utilizada” (Abad *et al.*, 2003, p. 35).

El análisis en profundidad permitió la identificación de los datos, que para este caso se centraron en los asuntos históricos relativos a los números enteros negativos y el currículo escolar colombiano durante la época de la colonia y finales del siglo XIX. Además de hacer una exploración de estos conceptos, también estudié las metodologías utilizadas en los documentos seleccionados, con el fin de tener referentes en el estudio que estaba iniciando.

Los tres pasos mencionados anteriormente me ayudaron a depurar los registros para construir, a partir de ellos, los datos que fueran relevantes para responder a la pregunta de investigación.



2. Aproximación histórica a los números negativos

*Solo el pasado, común a nosotros y a él,
será indicio de que nuestra alma persiste y como antigua ama,
cuenta historias olvidadas...*
(Pessoa, 2000, p. 83)

En el presente capítulo mostraré algunas nociones sobre los números enteros negativos desarrolladas en la India, China y Grecia, con el fin de empezar a recorrer el camino que me conducirá a las condiciones de posibilidad que permitieron su inclusión en el currículo escolar colombiano. El primer camino que abordaré será la cultura india, que, con Brahmagupta y otros matemáticos, desarrolló una forma de entender los números negativos; luego, me centraré en la cultura china y su progreso en la negatividad con sus aproximaciones espirituales; posteriormente abordaré la cultura griega desde la retórica, para finalizar con la incorporación de estos conceptos de números negativos en el continente europeo, y su arribo al continente americano.

2.1 Fortunas y deudas: el caso de la India

Esta antigua civilización realizó grandes contribuciones a las matemáticas eurocéntricas, entre las que se destacan: la notación posicional, el sistema decimal, la cifra cero y los números negativos. Cada una de estas contribuciones configurarían las matemáticas que conocemos en la actualidad, haciéndonos herederos de uno de los conocimientos más antiguos, por ellos desarrollados. Algunos textos como los de Ríbnikov (1991), Carrillo (2003), Vélez y Varela (2014) destacan la importancia del contexto y las



prácticas cotidianas en la constitución de las matemáticas hindúes e incluso, se asocia el nacimiento de los números negativos desde una práctica tan conocida que se desarrolló durante el feudalismo: el comercio.

Al inicio de nuestra era¹⁶, en la India se había constituido un sistema feudal de organización social, es decir, la sociedad estaba conformada por el rey, los caballeros, la nobleza, la iglesia y los vasallos¹⁷. Estas relaciones de poder que se acentuaron a partir del siglo VII hicieron que los pobladores, en general, tuvieran la necesidad de ciertos conocimientos matemáticos, específicamente, para la comercialización. Según Thapar (2001):

El rey cedía el ingreso proveniente de diversas porciones de tierra a sus funcionarios o a algunos poseedores selectos, equivalentes a los vasallos de otras partes. La costumbre, a partir del siglo VII, de otorgar tierra en lugar de salarios en efectivo, intensificó el proceso feudal. El trabajo agrícola era realizado por labradores, generalmente *shudras*¹⁸, quienes, en efecto, estaban casi atados a la tierra y entregaban una parte fija del producto al propietario [...] Parte del ingreso derivado en la tierra era enviado al rey. (p. 26)

¹⁶ Esta hace referencia a la denominada también era común. Es habitual en los textos históricos la abreviatura d. C (después de Cristo) o el acrónimo NE (nuestra era).

¹⁷ Un vasallo es una persona que reconoce a otra por superior o tiene dependencia de ella.

¹⁸ Esclavos o peones. Personas que se dedicaban a la agricultura y la artesanía.



Estos procesos económicos proporcionaron a los matemáticos de la época como: Aryabhata¹⁹, Mahavira²⁰, Brahmagupta y Bhaskara Acharia²¹, diversas situaciones para pensar y formular matemáticamente. Los dos primeros personajes fueron reconocidos por el desarrollo de las matemáticas aplicadas y algunos elementos de la geometría que eran determinantes para la construcción de templos; sin embargo, se resalta la importancia de Mahavira como compilador de todo el conocimiento de la India en el siglo IX, en su libro *Ganita Sara Samgraha* (Ruiz, 2003).

El tercer personaje, Brahmagupta, es conocido como uno de los primeros matemáticos en utilizar las cantidades negativas para la representación de las deudas y generar reglas para operar con dichas cantidades. Brahmagupta nació en el año 598, probablemente en Ujjain, noroeste de India, lugar donde posiblemente desarrolló toda su teoría sobre geometría, aritmética y álgebra, temas que posteriormente publicaría en forma de versos en su obra *Brahmasphuta-siddhanta* en el año 628 (Carrillo, 2003). Uno de los contenidos de mayor importancia de esta obra se encuentra en el capítulo XVIII, dedicado al álgebra, donde expone las reglas para realizar operaciones con números negativos, positivos y con el cero (Gallardo y Rojano, 1990).

La noción de número negativo era asociada, por este matemático, a la concepción de falta o deuda, mientras que los números positivos eran entendidos como una fortuna o

¹⁹ Aryabhata (Patna, 476-Asaka, 550). Matemático y astrónomo indio, destacado por su obra *Aryabhatiya* (compendio donde muestra desarrollos en matemáticas y astronomía).

²⁰ Mahavira o Mahaviracharya (Mysore, s. IX). Matemático reconocido por su enfoque algebraico y geométrico.

²¹ Bhaskara Acharia o Bhāskara II (Biyada Bida, 1114-1185). Matemático y astrónomo indio reconocido por sus trabajos en cálculo, sistemas de numeración, resolución de ecuaciones y astronomía.



pertenencia. Se presentan a continuación las reglas dadas por Brahmagupta para operar con dichas cantidades:

La suma de dos pertenencias es una pertenencia, la suma de dos deudas es una deuda, la suma del cero y una deuda es una deuda, la suma de una pertenencia y el cero es una pertenencia, el producto de dos pertenencias o dos deudas es una pertenencia, el resultado del producto de una pertenencia por una deuda representa una pérdida (esta regla se aplicaba también para la división), el cuadrado de una pertenencia o una deuda es una pertenencia, la pertenencia tiene dos raíces: una constituye una ganancia y la otra una deuda, la raíz de una pérdida no existe, ya que tal no puede ser un cuadrado. (Ríbnikov, 1991, p. 46)

Aunque estas reglas se demostraron años después, el avance realizado por Brahmagupta fue un salto para la historia de las matemáticas. En la actualidad, se sabe, por algunos textos, que “los matemáticos hindúes no utilizaban los números negativos como elementos equitativos de la matemática, ya que los consideraban como algo del género de las posibilidades lógicas o como, según expresaba Bhaskara, algo con lo que las personas no estaban de acuerdo” (Ríbnikov, 1991, p. 46).

Más adelante, el propio Bhaskara, cuarto personaje representativo de la matemática hindú y quien había expresado que las personas no estaban de acuerdo con los números negativos, desarrolló dos textos importantes dentro de su cultura llamados “*Lilavati*” y



“*Bijaganita*²²”. En el primer libro, Bhaskara expuso temas relacionados con la aritmética, el cálculo de intereses, las operaciones entre fracciones, las progresiones aritméticas y geométricas y temas sobre geometría plana. En el segundo libro trató temas relacionados con las ecuaciones y el álgebra. Este libro es reconocido por ser el primer texto donde se aceptó que la raíz cuadrada de un número positivo tenía dos soluciones, una positiva y otra negativa.

Inicialmente se podría pensar que los hindúes llegaron a los números enteros negativos por métodos empíricos, relacionados con el comercio (como es el caso de las deudas y las ganancias) y su sistema social. Sin embargo, para establecer muchas de las reglas dadas por Brahmagupta y las temáticas abordadas por él en su obra *Brahmasphuta-Siddhanta*, se especula que fue necesario tener otro tipo de conocimientos matemáticos que no se asocian directamente con la experiencia de la vida cotidiana, sino que se requirió el estudio de obras desarrolladas con anterioridad.

A continuación, abordaré el tratamiento de los números negativos o las cantidades negativas en la cultura china. Aclaro que, aunque algunas de las civilizaciones tuvieron contacto entre ellas, el desarrollo matemático de los números negativos no fue el mismo. Según Ríbnikov (1991): “En la historia de la India se encuentran suficientes hechos que ponen en evidencia la existencia de relaciones políticas y económicas con los estados griegos,

²² Para ver texto original y traducción, entrar a al siguiente enlace:
<https://ia601608.us.archive.org/26/items/in.ernet.dli.2015.312674/2015.312674.Bijaganita-elements.pdf>
<https://archive.org/stream/bijaganitaoralge00bhas#page/n27/mode/2up>



árabes y chinos” (p. 50); pero no hay evidencias de acercamientos en las disciplinas matemáticas.

2.2 Varillas negras: de las matemáticas a la espiritualidad

Como la cultura india, la civilización china se destacó por aportes interesantes a las matemáticas: demostraciones geométricas, el cálculo de π , resolución de ecuaciones de primer grado y la noción de negatividad, entre otros. Estos aportes reposan en dos grandes clásicos llamados *Chou Pei Suan Ching* y *Chui Chang Suan Shu* (Boyer, 1968). Los números negativos fueron desarrollados en el segundo texto, traducido al español como “Notas sobre el tratado de matemáticas en nueve secciones”, que se ubica históricamente entre la última dinastía Ching (221 a. C-206 a. C.) o a la primera dinastía Han (206 a. C- 221 d. C.). (González, 1992).

Según Boyer (1968):

La idea de números negativos parece no haber causado mucha dificultad para los chinos ya que estaban acostumbrados a calcular con dos conjuntos de barras: un conjunto rojo para los coeficientes o números positivos y un conjunto negro para los números negativos. (p. 223)

Estos conjuntos de barras también eran conocidos como numeración con varillas. La numeración con varillas era el método empleado en la antigua China para representar su sistema de numeración posicional y era manejado en buena parte por “los administradores, quienes llevaban consigo una bolsa que contenía una colección de varillas de bambú, marfil o hierro que utilizaban como instrumentos para hacer sus cálculos” (López, 2005, p. 20).



A pesar de que muchos autores hablan de la diferencia del color que se estableció entre números negativos y positivos, existía una forma convencional o tradicional para diferenciarlos, que no partía del color sino de la misma representación, es decir, tanto los números negativos como positivos eran escritos con el mismo color; se establecía la diferencia entre ambos, al añadir una línea diagonal a todos aquellos que eran negativos (Vélez y Varela, 2014). Se presenta a continuación un ejemplo para ilustrar lo antes mencionado:

Tabla 3

Números positivos y negativos

| Forma convencional | |
|------------------------------|--|
| Números positivos | Números negativos |
| 1) 2) 3) 4) 5) | - 1) - 2) - 3) - 4) - 5) |
| Forma tradicional | |
| Números positivos | Números negativos |
| 1) 2) 3) 4) 5) | - 1) - 2) - 3) - 4) - 5) |

Paralelo entre la representación convencional y tradicional en la cultura China. Tomado de <http://atisbosalahistoriadelamatematica.blogspot.com.co/2012/04/matematicas-chinas-sistema-de.html>

Este es uno de los tratamientos que se les dio a los números enteros negativos en la antigua China; sin embargo, algunos autores como Lizcano (1993) y Qingxi y Chen (2001) destacan la importancia de la espiritualidad y la doctrina del *yin/yang* en la concepción de los números positivos y negativos desde el mismo imaginario del ser humano.

Según Lizcano (1993):



El imaginario educa la mirada, una mirada que no mira nunca directamente las cosas: las mira a través de las configuraciones imaginarias de las que el ojo se alimenta. Y aquellos ojos rasgados miraban el número a través del complejo de significaciones imaginarias articulado en torno a la triada *yin/yang/tao*. (p. 19)

Desde esta metáfora sobre el imaginario y la mirada, Lizcano introduce una nueva perspectiva de la visión oriental sobre los números negativos, y es que, según el autor, tanto dichos números como los positivos surgen de forma tan espontánea en el imaginario arcaico chino que no es comprendida por muchas otras culturas como la griega, y posteriormente la europea, en donde la argumentación y la demostración son bases para la aceptación de un nuevo objeto, como lo fue el caso de la negatividad (Lizcano, 2003). La visión de Lizcano (1993) fue posteriormente analizada por Perinat (1994) quien expone: “La China es un espacio simbólico que, como dice él [Lizcano] «carga a cada lugar de significados»; un espacio que cuando se plasma en un tablero de cálculo ubica en él montones de palillos materializando «manojos de grano» cuyos precios se calculaban a través de puras manipulaciones” (p. 136).

Tanto fue el ingenio de los matemáticos chinos, que materializaron su conocimiento en objetos muy simples, lo que les permitió operar desde situaciones cotidianas hasta sistemas de ecuaciones con múltiples variables. En este sentido, no solo utilizaron materiales concretos para explicar la negatividad, sino que se valieron de la triada *yin/yang/tao* para ejemplificar lo positivo y lo negativo desde lo que se complementa o se destruye en el universo.



La doctrina del *yin/yang* es una filosofía que prevalecía y se empleaba para interpretar el mundo objetivo. Según esta doctrina, todas las cosas del universo caben dentro de solo dos categorías. Por ejemplo, el cielo, el sol, el día y el hombre corresponden al *yang*, y la tierra, la luna, la noche y la mujer, al *yin*; y hasta los números positivos, los números impares, la ubicación superior y la ubicación delantera, así como los números negativos, los números pares, la ubicación inferior y la ubicación trasera. (Qingxi y Chen, 2001, p. 44)

He presentado, *grosso modo*, cómo eran entendidos en la antigua China los números enteros negativos, exponiendo las concepciones de negatividad desde nociones ligadas al ingenio y a lo práctico, con la apropiación de la numeración con varillas, hasta nociones vinculadas con la espiritualidad, la complementariedad y lo imaginario como el *yin/yang*.

A continuación, expondré lo desarrollado en la civilización griega, explorando las nociones que tenían sobre los números enteros negativos, no solo desde presupuestos matemáticos, sino también desde una aproximación filosófica y retórica.

2.3 No ser-ser: el caso de los números negativos y positivos en Grecia

La antigua Grecia fue una de las culturas en aportar notoriamente al conocimiento occidental e incluso se podría afirmar que muchas de las ideas actuales sobre astronomía, física, medicina, política, geometría y aritmética provienen de esta civilización. El conocimiento matemático, particularmente el geométrico, fue uno de los más estudiados por esta cultura; sin embargo, también se conoce en la actualidad que realizaron aportes



interesantes al álgebra. A pesar de que son muchos los personajes que puedo destacar de esta civilización por sus aportes a las matemáticas en general, me centraré en aquellos que tuvieron cercanía con los números enteros negativos: Diofanto²³ y Parménides²⁴.

Diofanto de Alejandría fue uno de los matemáticos más importantes de Grecia en el siglo III, por sus numerosas contribuciones a la resolución de problemas sobre ecuaciones, sistemas de ecuaciones y álgebra. En el quinto apartado de su libro *Aritmética*, considera como “absurda la ecuación $4x + 20 = 4$, ya que la solución es negativa” (Gallardo y Rojano, 1990, p. 4). Esta consideración sería heredada por los europeos, hasta una exploración más profunda de los números enteros negativos realizada siglos después.

Además de la poca aceptación de los números enteros negativos como solución a las ecuaciones de primer grado con una incógnita, Diofanto realizó dos contribuciones que le otorgarían la categoría de “Padre del álgebra”. La primera, la introducción del simbolismo algebraico y la segunda, su uso para la solución de problemas prácticos. Llama la atención de la historia de este matemático su rechazo a las soluciones negativas; no obstante, al iniciar la introducción de su texto *Aritmética*, presentó las leyes de los signos que aplicaba a las cantidades aditivas y sustractivas en la resolución de problemas prácticos (Gallardo y Rojano, 1990). Se muestra a continuación la idea intuitiva sobre la ley de los signos desarrollada por Diofanto:

²³ Diofanto de Alejandría (200/214 d. C.-284/298 d. C.). Matemático griego considerado padre del álgebra por su conocida obra *Arithmetica*.

²⁴ Parménides de Elea (Elea, 530 a. C.- Elea, aprox. 515 a. C.). Filósofo griego precursor de la metafísica.



Según Díaz (2015), el argumento que se planteó Diofanto fue: “sustracción por sustracción da como resultado una adición”. Tal hecho, expresado por este matemático alejandrino, fue posiblemente deducido de una igualdad como se muestra en la figura 2 “idea intuitiva”.

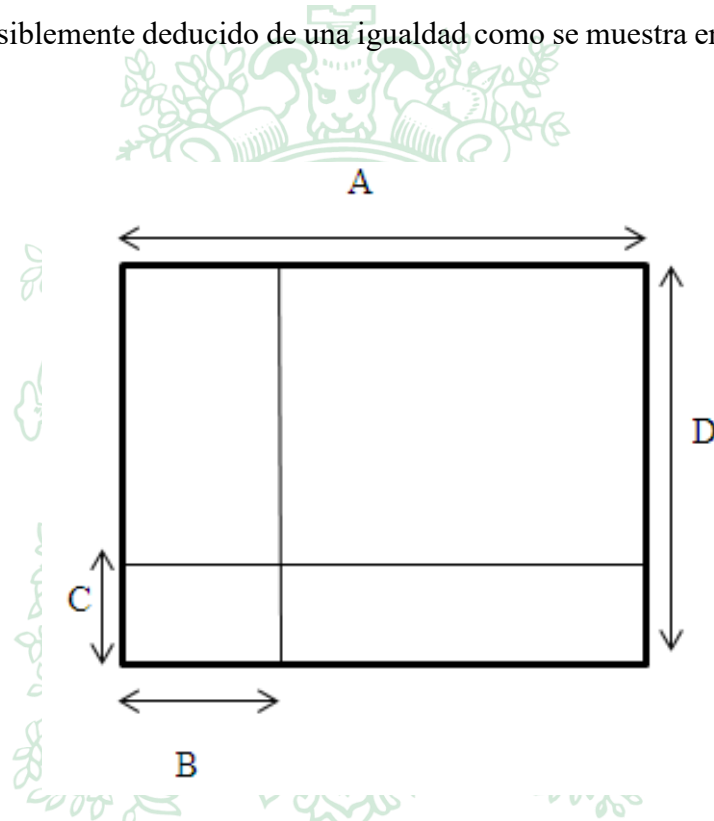


Figura 2. Idea intuitiva de Diofanto: “menos por menos es igual a más”
 $(A - B)(D - C) = AD - AC - BD + BC$. Tomado de Díaz (2015)

Lo anterior no indica que Diofanto conociera y aceptara los números negativos, pues en su argumento se apoya en la ilustración de la figura 2, de lo que se infiere que su regla se refiere al producto de diferencias positivas ($a > b$ y $d > c$), pues usa un modelo de áreas; las dimensiones deben ser, en consecuencia, números positivos (Díaz, 2015, p. 6).

De hecho, lo que llamamos actualmente regla de los signos interviene en el procedimiento expuesto como un paso elemental y transitorio, ya que el único propósito que



se tenía era llegar a un resultado aceptable, que no podía ser otro que un número positivo. Según (Gallardo y Rojano, 1990), en el libro I de su texto, Diofanto expuso lo siguiente: “Si un problema nos conduce a una ecuación en que existen en un lado o en ambos, términos negativos, será ineludible agregar los términos necesarios en ambos lados, hasta que estos sean positivos [...]” (p. 4).

Podemos afirmar, hasta aquí, que en Grecia no se aceptaron los números enteros negativos como respuesta a asuntos algebraicos. Sin embargo, Lizcano (1993) expone una forma diferente de la concepción de negatividad desde la oposición ser/no ser desarrollada por uno de los filósofos más destacados de la época.

La noción de negatividad surge de una forma no matemática en Grecia, gracias al filósofo Parménides, quien a partir de la oposición ser/no ser constituye la columna vertebral del modo de pensar griego, a partir del siguiente pasaje célebre:

Ea, y yo te diré (guarda tú la palabra que oigas)

Las vías que solas ver como vías de búsqueda cabe:

La una, la de que es y que no puede ser que no sea,

Es ruta de fe y de fiar (pues la verdad la acompaña);

La otra, la de que no es y que ha de ser que no sea,

Ésa –te aviso– es senda de toda fe desviada:

Que lo que no es ni podrás conocerlo (eso nunca se alcanza)

Ni en ello pensar. (Parménides, citado por Lizcano, 1993, p. 155)

Este apartado deja ver algunos pensamientos desarrollados desde lo filosófico, las creencias y el determinismo entre el ser y el no ser, es decir, desde una interpretación



numérica; si los números enteros positivos representan ese camino de fe y fiar, lo demás (números enteros negativos) no existe, no puede ser, ni tan siquiera se podrá pensar. Esta interpretación que se le da al pasaje de Parménides resalta el absolutismo por un solo camino, por una sola decisión; la oposición entre el ser y el no ser, distingue una imposibilidad de tránsito entre lo uno y lo otro, es decir, hay una sola dirección en que el ser puede estar, resaltando el obstáculo de ser las dos cosas al tiempo. A continuación, muestro una representación (figura 3) sobre lo interpretado por la oposición ser/no ser, realizando un paralelo con la cultura china y la negatividad desde el *yin/yang*:

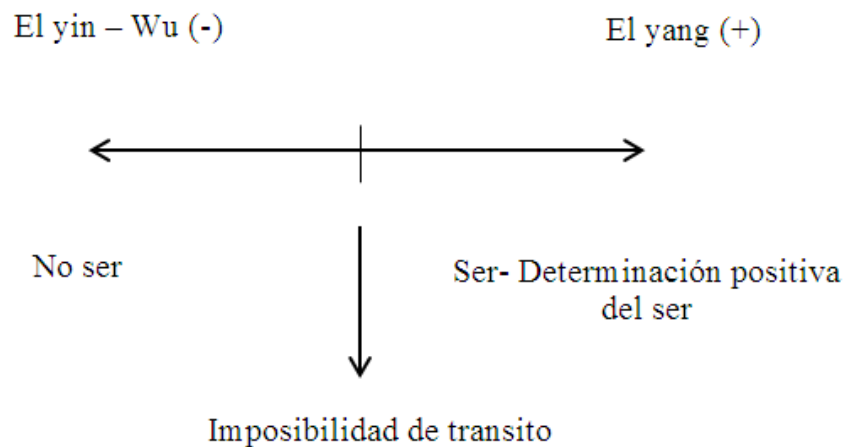


Figura 3. Representación de los números enteros en China y Grecia.
(Tomado de Lizcano 1993, p. 155)

Esta representación muestra la interpretación griega sobre la negatividad, e indica, por un lado, la relación entre el no ser y la concepción China del *yin-wu*, y por el otro, la relación entre el *yang* y el ser. Según Lizcano (1993), “el *wu* se funde en la misma indistinción, donde ‘el vacío físico’, la ‘nada’ aritmética o la mera posibilidad de ‘menos que nada’ se confunde en la indefinición del ser” (p. 155). Es decir, el “no ser” es indefinible e



inimaginable y desde esta cultura se elimina todo aquello que se sume al lado opuesto del derecho de la barra, o sea, todo aquello que no está en el lado positivo, en el lado del ser.

De esta manera, concluyo lo realizado por la cultura griega en torno a la negatividad, resaltando su rechazo absoluto o su incompreensión, tanto retórica como matemática, de los números enteros negativos.

2.4 Del rechazo a la aceptación: Europa entre los siglos XVI y XVIII

A medida que voy avanzando en las condiciones de posibilidad que permitieron dar origen a los números enteros negativos me voy aproximando al arribo de estos a nuestro continente. El proceso que he venido construyendo desde la cultura india hasta Grecia, constituyó el conocimiento que llegó a Europa, continente que acogió como suyo el método utilizado por los griegos, el cual consistía en demostrar, a partir de la retórica y la argumentación, la validez de las ciencias y sus contenidos (Lizcano, 1993).

Los números enteros negativos estuvieron ceñidos a este proceso riguroso para su aceptación en la historia del conocimiento occidental; sin embargo, este proceso argumentativo contribuyó a que no fueran aceptados inicialmente como números, porque no tenían una sustentación razonable desde las matemáticas y las prácticas cotidianas en el propio contexto (Maz, 2005). Según Vélez y Varela (2014), los números negativos fueron conocidos en Europa gracias a Leonardo de Pisa²⁵, Fibonacci, quien, en el siglo XIII, mientras trabajaba en un problema financiero, se vio forzado a concluir que la solución debía

²⁵ Leonardo de Pisa o Leonardo Pisano (Pisa, 1170-Pisa., 1240). Matemático italiano quién difundió el sistema indo-arábigo en Europa.



ser negativa, desenlace con el que no estuvo de acuerdo, rechazando desde ese momento la concepción de negatividad de su época.

Posterior a este suceso, concretamente en el Renacimiento, los números enteros negativos se volvieron tema central de indagación. En ese sentido, Bagazgoitia (2007) expresa:

Con el Renacimiento y el desarrollo del álgebra vuelven a surgir los números negativos. Se reconoce su utilidad para abordar la resolución de ecuaciones, aunque no se les confiere categoría de números ni se los acepta como soluciones de las ecuaciones. [Hay que recordar que el álgebra no utilizó nuestra simbología actual hasta el siglo XVII y que, hasta entonces, era retórica]. (p. 138)

Los números enteros negativos se utilizaban en los distintos procedimientos algebraicos sin ser aceptados como números, pero sí como cantidades que se usaban con el propósito de obtener una solución válida. Ellos se usaban indistintamente como parte de la resolución de problemas cuyo resultado tenía que ser necesariamente positivo; es decir, eran estrictamente parte de la solución de algunas ecuaciones, más no eran aceptados como solución. Lo anterior se ejemplifica en la figura 4, como muestro a continuación:

á las que se llaman *cantidades negativas*, diremos que en realidad son unas expresiones absurdas de los resultados de sustracciones impracticables; que como tales son indicios seguros de alguna incompatibilidad que hay en la propuesta de la cuestion, de la cual hayan dimandado; de consiguiente nos dan á conocer que no es posible resolver la cuestion sin que antes se rectifique alguna de sus condiciones, haciendo sustractiva alguna cantidad que antes se habia supuesto aditiva, ó al contrario



*Figura 4. Cantidades negativas – Lacroix²⁶ (1821)
(Tomado de Lacroix, 1821, p. 137)*

Fueron varios los personajes que estudiaron y rechazaron la negatividad como solución a procedimientos algebraicos, ya que no comprendían su sentido teórico de estos. Dentro de los matemáticos más representativos que se opusieron, estaban: Vieta (1540-1693), quien, a pesar de realizar progresos importantes en el álgebra, no admitía los negativos como coeficientes ni como solución a las raíces; John Wallis²⁷ (1616-1703) operaba los números negativos sin ningún problema; sin embargo, los consideraba mayores que el infinito; y Descartes (1586-1650) pensaba, por su parte, que no podían existir números menores que la nada (Maz, 2005).

Así como estos, otros matemáticos²⁸ rechazaron los números negativos; sin embargo, tres de ellos se destacan por la contribución que realizaron para su aceptación, validación y formalización de estos. Uno de los matemáticos que se acercó a los números enteros, positivos y negativos, fue Michael Stifel, quien en 1544 incorporó los signos (+) y (–) para diferenciar dichas cantidades, a pesar de no admitirlas como solución; más adelante, Simón Stevin²⁹, contribuyó con la sustracción de un número positivo y la adición de números

²⁶ Sylvestre François Lacroix (París, 1765-1843). Matemático francés conocido por ser autor de un tratado de cálculo diferencial e integral de gran influencia en el siglo XIX.

²⁷ John Wallis (Ashford, 1616-Oxford, 1703). Matemático inglés precursor del cálculo infinitesimal.

²⁸ Para conocer otros matemáticos que rechazaron los números enteros negativos, ver http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/eu/contenidos/informacion/dia6_sigma/eu_sigma/adjuntos/sigma_31/11_la_belleza.pdf

²⁹ Simón Stevin o Simón de Brujas (Brujas, 1548-La Haya, 1620). Matemático e ingeniero militar e hidráulico considerado padre de los números negativos por ser el primero en aceptarlos como solución a las ecuaciones algebraicas.



negativos con la siguiente expresión $[(+a) - (+b) = (+a) + (-b)]$; años después, en el siglo XIX, Hermann Hankel³⁰, basado en la teoría de los números complejos y en las geometrías no euclidianas, logró establecer los principios básicos para la legitimación de los números enteros (Bagazgoitia, 2007).

Aunque en Europa pasaron un par de siglos para que se diera la aceptación de estos números, luego de ser aceptados fueron utilizados no como cantidades que surgían dentro de la resolución de un problema, sino como una extensión de los números naturales conocidos desde los sistemas de numeración, es decir, se añade a los números positivos (naturales), los números negativos y el cero configurando, así, lo que se llamaría los números enteros.

Desde ese momento (siglo XIX) hasta la actualidad (siglo XXI), se han realizado diversas investigaciones con los números enteros negativos, específicamente en el campo de la didáctica, la historia, la enseñanza, el aprendizaje y la epistemología para tratar de responder a problemas que tienen que ver con situaciones prácticas y útiles en la cotidianidad. En este sentido, se destacan dos países europeos como grandes contribuyentes a través de la historia en temas investigativos: Francia y Alemania (Poveda, 2012). Este comentario es importante, dado que los saberes conocidos en España en épocas anteriores se tornan trascendentales para conocer la historia de Colombia, ya que por cuestiones políticas, sociales y religiosas estos fueron los conocimientos que llegaron a la actual Colombia en la época de la colonización. Este tema en particular será abordado en el próximo capítulo.

³⁰ Hermann Hankel (Halle, 1839-Schramberg, 1873). Matemático alemán reconocido por su exposición sobre los números complejos y los cuaterniones. Además, se destaca por resolver el problema del producto de números negativos.



3. Del pasado al presente: algunas condiciones de posibilidad que permitieron la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano

“Los hombres hacen su propia historia, pero no la hacen a su libre arbitrio, bajo circunstancias elegidas por ellos mismos, sino bajo aquellas circunstancias con que se encuentran directamente, que existen y les han sido legadas por el pasado”.
(Marx, 2003, p. 10)

En el presente capítulo mostraré y analizaré algunas condiciones de posibilidad que se dieron a partir de la época de la Colonia denominada también Nuevo Reino de Granada, por el año 1549 hasta principios de la Regeneración en 1886 (finales del siglo XIX), y que influyeron directamente en la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano. Cada condición de posibilidad -religiosa, económica, política, cultural y social- emergió en esta investigación como consecuencia de las continuas lecturas que realicé sobre la historia de las matemáticas, la historia del currículo y la historia de la educación matemática en el contexto colombiano. Organicé el capítulo en tres apartados, a saber: el primero, “Las ciencias útiles³¹ del currículo: de las órdenes religiosas al comercio”; el segundo, “De Lutero a la Expedición Botánica: algunas contribuciones a las ciencias útiles”; y, por último, “La implementación de las ciencias útiles: de la universidad al currículo escolar colombiano”.

³¹ Entre los siglos XVIII y XIX, época en la que se centra este estudio, las ciencias útiles eran consideradas ciencias positivas, es decir, aquellas relacionadas con el ideal de progreso y la visión utilitarista. Las ciencias útiles fueron concebidas como las que aportaban al conocimiento industrial, las artes y el comercio (Dávila, 2010).



3.1 Las ciencias útiles del currículo: de las órdenes religiosas al comercio

Antes de narrar e interpretar la historia sobre algunas condiciones de posibilidad que permitieron la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano, considero necesario explicitar lo que entenderé por currículo y bajo qué perspectiva lo interpretaré. Considero que el currículo escolar actual ha estado permeado a través de los años por una serie de actores que han intentado (re)pensar la educación, no solo a partir de los contenidos y metodologías a desarrollar con los estudiantes, sino desde la influencia que ha tenido la sociedad, la cultura, la economía y la misma historia en las dinámicas de los sujetos que han sido partícipes del proceso de enseñanza y aprendizaje (Stabback, 2016).

Según Sacristán (2010): “El currículo es una pasarela entre la cultura y la sociedad exteriores a las instituciones educativas, por un lado, y la cultura de los sujetos, por otro; entre la sociedad que hoy es y la que habrá mañana [...]” (p. 2). En consonancia con este autor, concebir el currículo como una pasarela, es admitir que este tiene otros espacios de construcción que son externos a las instituciones educativas y que consolidan las cosmogonías y cosmovisiones de ciertas comunidades y culturas; es decir, la palabra currículo sirve como punto de convergencia del sistema escolar, donde los sujetos, las culturas y su conocimiento, se entretajan y configuran los saberes y dinámicas que permanecen o permanecerán a una época específica.

Con aclarar lo que entiendo por currículo, busco tejer algunos sucesos que muestren la realidad de la escuela a partir de lo desarrollado en el contexto y, es por ello, que me dirijo a la historia de nuestro territorio para comprender las modificaciones que se han realizado en la educación matemática con respecto a los números enteros negativos.



La historia de Colombia inicia, para algunos historiadores, en la época de la Colonia con los primeros asentamientos españoles que fueron arribando y distribuyéndose por todo el territorio al que denominaron Reino de Nueva Granada o Nuevo Reino de Granada (Melo, 1996). Los personajes que componían los asentamientos eran en su mayoría militares y clérigos que habían llegado a expropiar a los indígenas de sus costumbres y conocimientos para imponer los suyos, y así apoderarse de las tierras y riquezas que estos poseían.

Según Poveda (2012), “Los indígenas que habitaban el territorio de la Colombia actual no conocían escritura ni sistema de numeración alguno. Culturalmente estaban varios siglos atrás [...]” (p.15). Es decir, desde la perspectiva del autor, el conocimiento desarrollado por los indígenas en ese entonces era casi nulo en comparación con civilizaciones como la maya. Sin embargo, cuestiono dicha afirmación, porque considero que los seres humanos van creando sus propios conocimientos a partir de las prácticas sociales que se tejen entre ellos mismos. Desde mi perspectiva, los indígenas que habitaban nuestro territorio sí contaban con algún tipo de saber que seguramente era diferente al traído por los españoles, y tal vez fue considerado por estos colonizadores como menos importante, dentro de un hecho tan irascible como la colonización (Prieto, 2004).

En la actualidad se conoce que algunas órdenes religiosas llegaron al Nuevo Reino de Granada, entre las que se encontraban jesuitas, dominicos, franciscanos y agustinos. Cada comunidad se fue extendiendo en diversas zonas creando escuelas, conventos y parroquias para el cumplimiento de la labor que les había sido encomendada por la Corona española. A pesar de que los Jesuitas llegaron cincuenta y dos años después, con respecto a las otras



órdenes, rápidamente se consolidaron como la provincia más numerosa y organizada del Nuevo Reino (Mantilla, 2010).

Los jesuitas, también llamados Compañía de Jesús, llegaron aproximadamente al Nuevo Reino de Granada por el año 1589. Para 1604, ya habían fundado uno de los colegios más reconocidos en la historia de la educación colombiana: el Colegio Máximo de San Bartolomé donde se enseñaba principalmente gramática, letras, lengua chibcha y ciencias físicas (Ramírez, 2004).

Por otra parte, dominicos, franciscanos y agustinos también fundaron escuelas y conventos mayores que servían para la educación básica y para la superior. Entre los colegios mayores más reconocidos se encuentran: Colegio de Santo Tomás (dominicos), Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario (dominicos), Universidad de San Buenaventura (franciscanos) y Real Colegio Seminario San Francisco de Asís (agustinos) (Cote, 2010).

El desarrollo de muchas de las escuelas creadas por estas órdenes religiosas se dio bajo el mandato del gobernador Andrés Díaz Venero de Leyva³² (Aguilera, 1992) y fueron conocidas como escuelas de primeras letras. Estaban destinadas a la enseñanza de la lectura, la escritura, el dibujo, las cuatro reglas de la aritmética y, fundamentalmente, la doctrina católica que, según exponen algunas autoras como Zuluaga (1999) y Sánchez (2012), era enseñada como garantía de sumisión de los criollos³³ ante el poder.

³² Andrés Díaz Venero de Leyva (Puerto de Laredo, n/a-Madrid, 1578). Funcionario y magistrado colonial español; primer presidente de la Real Audiencia de Santafé de Bogotá.

³³ Los criollos eran personas nacidas en el continente americano de padres europeos.



Las matemáticas desarrolladas en el Reino de Nueva Granada no son expuestas de forma explícita en la mayoría de los textos que abordan la historiografía de nuestro país, ya que generalmente los lentes investigativos miran hacia otros objetos. Sin embargo, se conoce que en este periodo se implementó un texto en las escuelas de primeras letras que se centraba en algunas cuestiones básicas de las matemáticas, llamado *Cartilla Lacónica* (Cardoso, 2001).

La *Cartilla Lacónica* fue escrita por Agustín Joseph de Torres (maestro de primeras letras³⁴) e impresa en el año 1797 por la Imprenta Patriótica, en Santafé de Bogotá³⁵. En ella se podía encontrar el tratamiento que se les daba a las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división, presentadas en el libro como *las quatro reglas de aritmetica practica*. No profundizaré en los temas desarrollados en dicha cartilla; sin embargo, he de resaltar su importancia como uno de los primeros textos de matemáticas impreso en el Reino de Nueva Granada y dedicado por el autor “A la instrucción en beneficio del bien público” (De Torres, 1797, p. 2). Se muestra a continuación la portada de dicha cartilla (figura 5).



³⁴ Los maestros de primeras letras eran aquellos que poseían conocimientos relacionados con la lecto-escritura.

³⁵ Santafé de Bogotá o Santafé, fue una de las primeras ciudades (capital) que se consolidó en el Nuevo Reino de Granada por 1540. Allí comenzó a funcionar la Real Audiencia en 1549, donde se tomaban las decisiones importantes del pueblo (Turabay, 2012).



Figura 5. Portada de la *Cartilla Lacónica* (1797).
Tomado de De Torres (1797)

Este texto sería uno de los primeros que se utilizó con fines educativos en una época donde la educación no estaba organizada, sino que era impuesta por aquellos que poseían algún tipo de conocimiento. Se conoce, partiendo de los reportes encontrados en la literatura sobre la historia de la educación en Colombia, que el nivel educativo de las escuelas de primeras letras era desfavorable y repetitivo. Autores como García (2005) e Imparato-Prieur (2000) señalan que la metodología desarrollada en estas primeras escuelas era memorística. Este asunto lo podemos constatar en uno de los textos de matemáticas elaborado por un autor colombiano y utilizado en Cartagena cerca del año 1877, después de la independencia, que presenta una estructura de cuestionario, para todos los contenidos que se encuentran, incluso los que se acercan a la explicación de los números enteros negativos. Presento el tratamiento sobre los números enteros negativos o cantidades negativas que dio Dionisio Hermenegildo Araujo, autor del texto antes mencionado, que tiene por nombre “Tratado de Álgebra” (figura 6).

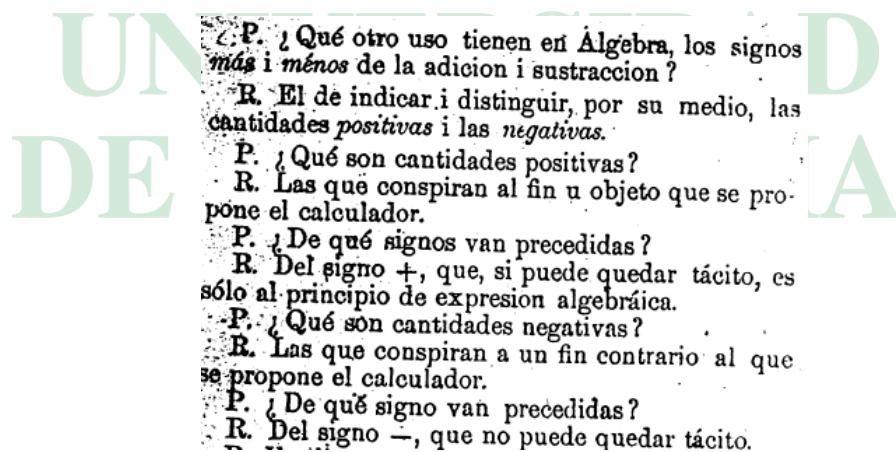


Figura 6. Tratado de álgebra de D. H. Araujo (1877).
Explicación de las cantidades negativas en forma de cuestionario
Tomado de Araujo (1877)



Facultad de Educación

La forma en que se desarrolló este texto tiene una estructura muy parecida a la del catecismo histórico³⁶, que da indicios de la influencia que tenían la religión y los sistemas de enseñanza desarrollados hasta entonces por estas mismas comunidades, basados en la memoria, para la creación de los contenidos académicos. A modo de ejemplo muestro un pequeño apartado de la doctrina religiosa (figura 7).

P. Quién ha hecho el mundo? R. Dios.
P. De qué lo hizo? R. De la nada.
P. Cómo lo hizo? R. Con su palabra.
P. Para qué lo hizo? R. Para su gloria.
P. En cuántos días crió Dios el mundo? R. En seis.
P. Qué crió el día primero?
R. El Cielo y la tierra, y en seguida la luz.
P. Y el día segundo?
R. El firmamento al cual llamó Cielo.

*Figura 7. Catecismo histórico. A. Claudio Fleury (1776)
Tomada de Fleury (1776)*

Esta forma de enseñanza implementada por las comunidades religiosas fue cuestionada a mediados del siglo XVIII, cuando se empezaba a generar un movimiento cultural e intelectual que se encargaría de modificar el pensamiento de los reyes de la época, movimiento que cambiaría el rumbo, de la religión y la educación, el cual fue conocido como “Ilustración” (Falgueras, 1988). En palabras de Ocampo (2012), la Ilustración fue:

Aquel movimiento cultural e intelectual que pretendió dominar con la razón el conjunto de problemas del hombre y cuya influencia se percibió en los diversos aspectos de la vida de la sociedad y en los cambios profundos en la mentalidad colectiva. Este movimiento ilustrado, que brotó de la ciencia y la filosofía, fue

³⁶ Libro utilizado por las comunidades católicas para enseñar la historia sagrada y la doctrina cristiana.



preparado en el Renacimiento y en la Reforma Borbónica, cuando las ideas se orientaron hacia la razón y el sentido antropocéntrico, contra la tradición teocéntrica del mundo medieval. (p. 13)

Las implicaciones que tuvo este nuevo pensamiento de otorgarle a la razón un lugar privilegiado e ir desplazando la doctrina teocéntrica desató y fomentó en la enseñanza de la época aspectos que llevaron al Nuevo Reino de Granada a un desarrollo institucional, pero a su vez a la expulsión de la comunidad jesuita en 1767 (Cortés, 2003). Esta expulsión se dio por causa del despotismo de los ilustrados, ya que la Corona española tenía por pretensión declarar el poder laico sobre el religioso, que era el que regía en ese momento, y como la comunidad jesuita era una de las más numerosas y poderosas decidieron embestirla eliminando los privilegios que habían sido otorgados a dicha orden (Mörner, 2012).

Como consecuencia de esta remoción se cerraron veintitrés instituciones de educación secundaria y algunas universidades que ya comenzaban a funcionar (Ahern, 1991). Otra de las secuelas que tuvo dicho destierro fue que cualquier persona que supiera leer y escribir podía crear una escuela sin ningún tipo de supervisión. En palabras de Martínez, Noguera, y Castro (1995), “surgen en Nueva Granada sujetos que andan por las estancias pregonando enseñar a leer, escribir y contar. Cambiaban su saber por un real, una vela y un pan semanal” (p. 31). Esta situación fue aprovechada por muchas personas que simplemente querían sacar ventaja ante esta expulsión, y así sobrevivir a costa de la creación de escuelas en sus propias casas. A este tipo de educación se le denominó educación doméstica.



Ante estas transformaciones educativas se comenzaron a generar algunos cambios sociales que consolidaron algunos años después de la mano del virrey Manuel Guirior³⁷ quien decidió implementar un nuevo plan de estudios para controlar la educación en el Nuevo Reino de Granada, llamado el *Plan de Moreno y Escandón*, utilizado entre 1774 y 1779.

Ese plan fue redactado por don Francisco Moreno y Escandón³⁸, de donde sale el nombre de dicho proyecto, quien en su labor de fiscal planteó la importancia de enseñar las ciencias aplicadas. Él entendía las ciencias aplicadas como aquellas que estaban encargadas de solucionar problemas utilizando una diversidad de conocimientos a posibles aplicaciones prácticas, y las ciencias experimentales, como las ciencias que se dirigen a buscar o experimentar con las leyes de la naturaleza y objetos naturales.

Moreno y Escandón no solo resaltó la importancia de enseñar estos dos tipos de ciencia en Santafé, y expresó la preocupación que tenía por la situación social y educativa que se estaba viviendo:

Cualquier hombre que no tiene para comer toma el arbitrio de abrir en su casa o en una tienda una escuela donde recoge algunos muchachos, a quienes por sola autoridad enseña lo poco que sabe, o tal vez aparenta enseñarles para sacar alguna gratificación con qué alimentarse, sin que preceda licencia, examen, ni noticia de los superiores, entregándose la primera educación a quienes tal vez ignoran la doctrina cristiana [...].

³⁷ José Manuel de Guirior Portal de Huarte Herdozain y González de Sepúlveda (Aoiz, 1708-Madrid, 1788). Militar y administrador de la Corona española en América entre 1772 y 1776.

³⁸ Francisco Moreno y Escandón (Mariquita, 1736-Santiago de Chile, 1792). Fiscal de la Real Audiencia de la Nueva Granada en la segunda mitad del siglo XVIII.



Verdad es que no teniendo en la ciudad un número proporcionado de maestros, obliga la necesidad a que los padres de familia anhelando la instrucción de sus hijos, la confíen en semejantes sujetos. (Moreno y Escandón, 1774, p. 4)

La educación era el tema central de este exalumno de los jesuitas, quien a pesar de crear un plan que consideraba la incorporación de las ciencias útiles o experimentales, entre las que se encontraban la física, la química y las matemáticas, dejaba ver en su discurso la necesidad de una educación moralizante.

El plan propuesto por Moreno y Escandón tenía definidos dos objetivos: el primero se basaba en utilizar los recursos expropiados a los jesuitas para fundar una biblioteca; y, el segundo, era crear una universidad pública. Estos propósitos, en especial el segundo, desataron el rechazo inmediato por parte de las demás comunidades religiosas, entre ellas los dominicos y los ignacianos, quienes pretendían sacar ventaja ante la expulsión de los jesuitas fundando escuelas y conventos en todo el territorio (Valencia y Loaiza, 2002).

En 1774 José Celestino Mutis³⁹ había iniciado el plan de Escandón, mostrando a los estudiantes del Nuevo Reino de Granada el sistema elaborado por Copérnico. A pesar de que se llevó a cabo la enseñanza de algunas de las ciencias útiles como la física y la trigonometría que hacían parte de su primer objetivo, el otro, que era la universidad pública, no fue puesto

³⁹ José Celestino Mutis (Cádiz, 1732-Santafé de Bogotá, 1808). Sacerdote, botánico, matemático, geógrafo y docente del Nuevo Reino de Granada. Director y precursor de la Real Expedición Botánica.



en práctica por las transformaciones que se estaban generando política y colectivamente (Ceballos, 1962).

Años después se dio inicio a un segundo plan que intentaría impulsar nuevamente las ciencias útiles, llamado *Plan de Caballero y Góngora*. Este proyecto fue elaborado el 13 de julio de 1787 y estaba dividido en dos partes. La primera, direccionada al surgimiento de las universidades, y la segunda, a los planes de estudio que serían incorporados en estas (García, 2005). Antonio Caballero y Góngora⁴⁰, al igual que Escandón, estaba preocupado por la educación que se estaba implementando en el Nuevo Reino, específicamente en Santafé, porque consideraba que no tenía la suficiente vigilancia y, consecuentemente, no contribuía a la formación de sujetos virtuosos como lo exigía el catolicismo.

Para contrarrestar dichas dificultades, Caballero y Góngora, que se desempeñaba como arzobispo- virrey, propuso, para controlar los Colegios de San Bartolomé y Nuestra Señora del Rosario, principales instituciones de la época, la asignación de algunos cargos, como: “un canciller de estudios, seis profesores, un bibliotecario para todos los doctores, maestros y bachilleres, un fiscal y un secretario” (Soler, 2012, p. 63). Después de establecer en cada institución estos órganos de control, el virrey, preocupado por la forma en que se enseñaba en las escuelas de primeras letras, añadió a su plan un tratado sobre cómo enseñar.

Este tratado escrito por Caballero y Góngora tuvo el propósito de cambiar el método de enseñanza, que para la época era considerado como “estéril y rudo”. En este tratado, la enseñanza se reformuló de la siguiente manera:

⁴⁰ Antonio Caballero y Góngora (Priego de Córdoba, 1723-Córdoba, 1796). Virrey de Nueva Granada entre 1782- 1789. Es reconocido por patrocinar la Real Expedición Botánica del Nuevo Reino de Granada.



[...] Fácilmente aprenderán a leer, *escribir*, a hablar en público, dibujar, pintar y sucesivamente otras ciencias y artes, si a estos se les enseñan con entretenimiento propio de su respectiva edad, que como yugo ya se le impone, y que por *consequencia* los oprime. La dulzura, las prudentes y oportunas condescendencias del maestro, su *avilidad* en presentar las lecciones con objetos fáciles y agradables en picar su curiosidad é inclinación en seguir su genio, y sus talentos, excitarán infaliblemente su aplicación y gusto al estudio de las ciencias. (Ibíd, folio 9vta, citado por Soler 2012)

Frente a las ciencias útiles y aplicadas, como eran considerada las matemáticas, se expone en el plan de Caballero y Góngora lo siguiente: Las ciencias aplicadas, enseñadas en los colegios mayores, que tenían relación con la industria y comercio, debían tener mayor intensidad; así, por ejemplo, la mecánica, estadística, hidrostática, arquitectura pública civil e hidráulica debían ser enseñadas con un alto enfoque. Para la enseñanza de estas cátedras se propuso un horario flexible dirigido a dos clases de discípulos, los de asistencia necesaria y de asistencia voluntaria. Los de asistencia necesaria se les enseñaba con el libro *Elementos de Matemática* de Bails (1779) (figura 8), y su componente serviría de curso completo a los de asistencia voluntaria (Soler 2012).

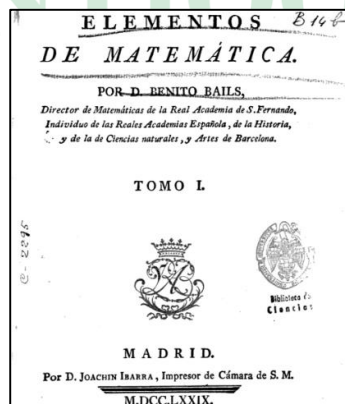




Figura 8. Portada de *Elementos de matemática* por Benito Bails (1779).
Tomado de Bails (1779)

Dentro de sus contenidos, el libro de Bails desarrolla un apartado sobre los números enteros negativos (figura 9), donde se puede ver claramente un direccionamiento concreto hacia temas comerciales, como se muestra a continuación:

Por ejemplo, si suponemos que un hombre tenga tantos doblones como debe, podrá servir un mismo número para expresar la cantidad numérica de su haber y de sus deudas; pero este número, sea el que fuere, no nos manifestará la diferencia que hay entre el dinero que dicho hombre tiene y el que debe. El método mas natural para hacer perceptible esta diferencia, consiste en señalar las dos cantidades con un signo que avise el efecto que la una es capaz de producir en la otra; y como el efecto de las deudas es disminuir el haber, es natural señalar aquellas con el signo —.

Figura 9. *Elementos de matemática* Benito Bails (1779).
Ejemplo sobre cómo se empleaba el lenguaje para el uso de las cantidades negativas
Tomado de Bails (1779)

Bails (1779) deja ver en su libro “Elementos de matemática”, un ejemplo sobre cómo el uso de los signos puede simbolizar una deuda o un haber partiendo del mismo número de doblones (monedas), es decir, si un hombre poseía 10 doblones, sería el haber (lo positivo), pero si un hombre debía 10 doblones, sería el deber (lo negativo); por ende, debía expresarse numéricamente como -10 .

El plan de Caballero y Góngora, además de lograr incorporar textos que ayudaran al desarrollo de las ciencias útiles (tan rechazadas en la época), logró mostrar que había otras



formas de enseñar que incentivarán el gusto por el conocimiento. No obstante, el mayor logro que se le atribuye históricamente fue la creación de la Expedición Botánica en el año 1783 bajo el mando de José Celestino Mutis.

La Expedición Botánica promovida por Mutis fue la máxima empresa científica del período colonial, marcó una época y se convirtió en referente obligado de la ciencia colombiana, funcionó a la manera de un instituto científico que tenía bajo su responsabilidad el estudio de los recursos naturales y de su aprovechamiento. Por su concepción contribuyó a la educación y a la formación científica de unos cuantos jóvenes que estaban llamados a perpetuar estas disciplinas en nuestro medio. (Díaz, 2009, p. 1)

Hasta ahora he ofrecido un panorama sobre la metodología predominante en el Nuevo Reino de Granada que se basaba en la memoria y en el énfasis de estudios religiosos, que se vio paulatinamente desplazado por la influencia de la Ilustración. Posterior a este suceso y a la expulsión de los jesuitas, se empezaron a implementar planes para mejorar la educación: el primero de *Moreno y Escandón*, que buscó la creación de una universidad pública y el impulso de las ciencias útiles, mientras que el de *Caballero y Góngora* buscó principalmente ordenar las escuelas, la forma de enseñar y el impulso de las ciencias a partir de la Expedición Botánica.



Sin embargo, uno de los planes que trajo mayores beneficios para los criollos fue el creado por Francisco José de Caldas⁴¹, el cual se denominaba *plan razonado*. El plan razonado consistía en constituir un grupo de ingenieros militares para la explotación minera que garantizara una mayor producción para desarrollar la industria y el comercio. Sin embargo, con las observaciones que Caldas había iniciado para poner en marcha su plan, notó que su entorno estaba ocupado por riquezas naturales y aprovechó los intereses del Rey para conseguir otros objetivos, que se proyectaban en prácticas emancipadoras y formadoras del libre pensamiento (Caldas, 1966).

A continuación, presento algunos apartados del proyecto elaborado por Francisco José de Caldas, con el fin de resaltar algunas palabras que pueden representar una noción de negatividad, entre el siglo XVIII y comienzos del XIX en el Reino de Nueva Granada.

En un país casi sin industria, con poca población, y mirado como Colonia, tal como el Nuevo Reino de Granada, para que su Metrópoli haga con él un comercio ventajoso y útil, se requiere que se le faciliten los medios de adquirir numerario con qué pagar los efectos que se traen para su consumo; de otro modo la *escasez* de moneda envilece el precio de aquellos, y poco a poco *arruina* el comercio, destruyendo su incentivo, que es la ganancia. (Caldas, 1966, p. 375)

Así, Caldas presentó la desventaja que tenía el Nuevo Reino de Granada con respecto a la industria, ya que no contaba con los medios para aprovechar los recursos naturales, y por ende obtener ganancias. La forma en que inicia Caldas su plan muestra un indicio de

⁴¹ Francisco José de Caldas y Tenorio (Popayán, 1768-Santafé, 1816). Ingeniero, científico, geógrafo, botánico, naturalista y astrónomo reconocido por sus ideas emancipadoras y su invento del hipsómetro.



negatividad en asuntos cotidianos, específicamente al usar como parte de su texto la palabra “escasez” y “ruina”, lo que entendemos hoy por falta o pérdida del capital.

Posterior a esto, Caldas mostró que una de las posibles soluciones para no caer en la *ruina*, era fijar la atención en las minas de oro y plata, como menciona Soler (2012): “Francisco José de Caldas reconocía la importancia de los metales y riquezas naturales del territorio, cuestionando a la vez la escasez” (p. 20).

Caldas sabía que la industria y la agricultura necesitaban mano de obra, que para ese momento era imposible de encontrar en el Reino de Nueva Granada, así que le mostró a la monarquía borbónica⁴² todas las ventajas que tenía si llevaba personas capacitadas a un territorio donde la abundancia de oro, plata, carbón, agricultura y comercio podía ser la solución para incrementar las riquezas del rey y por ende avivar la economía en esta colonia española. Algunas de las ventajas que le expuso Francisco José de Caldas a dicha monarquía fueron:

El presente plan, que en su ejecución presenta tres efectos dignos de la atención de nuestro Gobierno, a saber: 1.º socorrer a la nobleza de este reino, facilitándoles una ocupación distinguida con qué subsistir; 2.º fomentar los progresos del reino general, familiarizando a sus moradores con el conocimiento de las ciencias útiles, sin las cuales es imposible que se aprovechen los muchos tesoros que encierra en los tres reinos la Naturaleza y que están desconocidos hasta ahora por falta de aquella instrucción; 3.º finalmente, asegurar al Rey nuestro señor, esta preciosa posesión,

⁴² Conformada en su momento por el borbón Felipe V y Carlos III, quienes buscaban modernizar el imperio español a partir del movimiento de la Ilustración europea (Gutiérrez, 2010).



tanto por un nuevo vínculo de amor de sus vasallos de estos dominios, cuanto porque en caso de invasión enemiga podrá su majestad contar con un cuerpo de oficialidad a cuya inteligencia, honor y valentía se puede confiar la defensa de este Reino. (Caldas, 1966, p. 376)

La exposición que realizó Caldas al rey mostraba algunas de las ventajas que podría tener la ejecución de su plan, entre las cuales se encontraba fomentar el progreso de la Corona en las tierras del reino. Más adelante, dentro del mismo plan, expone Caldas de una forma determinante, ilustrativa y sutil lo que sucedería si no se aceptaba tal plan, diciendo lo siguiente:

Murió D'Elhuyar⁴³, y con él la esperanza de que se instruyan los mineros en esa facultad, después de haber gastado infructuosamente el erario más de doscientos mil pesos. Morirá Mutis, y quizás se sepultarán con él, sus sabios descubrimientos y sus inmensos conocimientos botánicos [...]. (Caldas, 1966, p. 378)

Así, Caldas quería que el rey se diera cuenta de que al no darse ese proceso de instrucción entre los que conocían realmente las ciencias y entre los que no, se perdería toda la inversión que el reino había hecho, como lo expresa solemnemente en el ejemplo de Mutis, diciendo que “quizás se sepultarán con él, sus sabios conocimientos”.

Como este y los anteriores apartados que hacen parte del *plan razonado*, la pretensión explícita era beneficiar al rey con la explotación de los recursos; no obstante, a partir de la Expedición Botánica hasta la elaboración de este plan, la pretensión implícita era la de educar

⁴³ Fausto Fermín D'Elhuyar (Logroño, 1755-Madrid, 1833). Ingeniero de minas y químico descubridor del wolframio (elemento químico)



al pueblo. Esta educación se comenzaría a implementar con el estudio de las ciencias útiles como las matemáticas, la física y la química, para, así poder cultivar en la población un espíritu de independencia y autonomía que se obtendría unos años después.

La explotación de recursos, principalmente del oro y la plata, se llevó a cabo desde la colonización hasta aproximadamente el año 1780, cuando “el oro representó uno los principales metales preciosos que constituyeron la mayor parte de las exportaciones de la América colonial a la metrópoli (España)” (Orche y Puche, 2000, p. 415). El proceso de extracción y movilización de dicho metal se lograba gracias a los indios⁴⁴ y esclavos que eran por ese tiempo comercializados para cumplir principalmente tres funciones: la primera estaba destinada a la minería, la segunda a la agricultura y la tercera al transporte. Según Colmenares (1972):

... para sustentarse al seguimiento y labor de las minas de oro de dicha ciudad y que vayan en aumento y crecimiento como cada día van, los que las labran y siguen no lo pueden hacer si no es mediante las compras de negros que hacen, tomándolos fiados, hipotecándolos a la paga, en confianza de que con los mismos negros sacarán de qué hacer la paga. (p. 5-6)

Entre el siglo XVIII y mitad del XIX, la minería se sostenía por el trabajo que realizaban los esclavos negros. Esclavos que eran comprados, casi siempre a crédito, por los dueños de las minas y que eran explotados hasta su muerte. Las prácticas comerciales que se estaban comenzando a implementar en el Nuevo Reino de Granada, requerían de ciertos

⁴⁴ En la época de la Colonia se designó con la palabra indio a los aborígenes americanos.



conocimientos matemáticos para poder efectuar la comercialización de mano de obra, y así garantizar el progreso industrial el cual implicaba la adopción de otros conocimientos que permitían traspasar la práctica social y comercial (como fue la compra y venta de esclavos) a una práctica cultural e intelectual, donde se desarrollaran las matemáticas como una ciencia útil y aplicable al contexto.

No obstante, los esclavos también eran adquiridos y explotados en labores de agricultura, donde el trabajo se centraba, principalmente, en cultivar y extraer productos como el añil, el tabaco, la quina, la tagua y el algodón (Sastoque, 2011). En algunos libros utilizados durante el siglo XIX como Bergeron (1848) (figura 10), Liévano (1875) (figura 11) y Araujo (1877) (figura 12) se toman temas de la agricultura y el comercio para explicar los números enteros negativos o las cantidades negativas a los estudiantes de las instituciones de educación secundaria y superior durante el siglo XIX, como se muestra a continuación:

Si una persona ha recibido diferentes cantidades ; pero por otra parte ha tenido que pagar una mayor que la suma de las que ha recibido, i se desea saber lo que queda en poder de esta persona ; suponiendo que sean 4537 reales, por ejemplo ; es claro que si la suma que se debe pagar. escede a la recibida en 4537 reales, le faltará esta cantidad para completar el pago ; i será el resultado igual a — 4537 reales ; de manera que una cantidad negativa indica siempre una sustraccion que no ha podido efectuarse.

1 0 0 0

Figura 10. Ejemplo “pago de reales”
Tomado de Bergeron (1848)



Así, si $a = \$ 3000$ i $b = \$ 4000$, resultará $a - b = -1000$; i en lugar de decir que la persona, además de no tener nada, debe \$ 1000, se dice, haciendo uso de las cantidades negativas, que la dicha persona posee \$-1000. Hé aquí, pues, la ventaja de la introducción en el cálculo de las cantidades negativas, que consiste en la *reduccion a una sola especie de cantidad de las dos que puede haber en una cuestion*, pues la circunstancia de no tener fortuna una persona i deber alguna suma se reduce a la especie de la primera cantidad, poseyendo cantidad negativa.

Figura 11. Ejemplo de fortuna y deuda.
Tomado de Liévano (1875)

P. Expliquemos estas cantidades por medio de un ejemplo.

R. Si, por ejemplo, quiero calcular en cuánto tiempo se *llena* un hórreo, en el cual entra trigo i del cual sale trigo, consideraré como *positivas* las cantidades que entran, i como *negativas* las cantidades que salen: Mas, si quiero calcular el tiempo en que se *vacía*, consideraré como *positivas* todas las que salen, i como *negativas* todas las que entran.

Figura 12. Ejemplo del hórreo.
Tomado de Araujo (1877)

La última labor a la que eran obligados algunos nativos y esclavos era la de transportar de los asentamientos los cultivos obtenidos durante la cosecha, además del oro y la plata. La historia muestra que la geografía colombiana a finales del siglo XVIII, “era afamada por tener los peores caminos de todas las indias españolas” (Muriel, 2009, p. 13) y transitarlo era bastante lento y costoso. Los caminos que estaban permitidos para transitar los esclavos, los nativos y los animales de carga eran llamados caminos de herradura.



Los caminos de herradura construidos hasta entonces seguían la dirección de los picos de las montañas, es decir, contaban con una pendiente que exigía de animales fuertes como las mulas y los bueyes; animales que tenían gran capacidad de resistencia y un bajo costo de sostenimiento. Sin embargo, en las épocas de lluvia preferían utilizar a los “hombres cargueros”, que precisamente eran los esclavos y nativos (figura 13) para transportar la mercancía por los terrenos irregulares (Muriel, 2009).

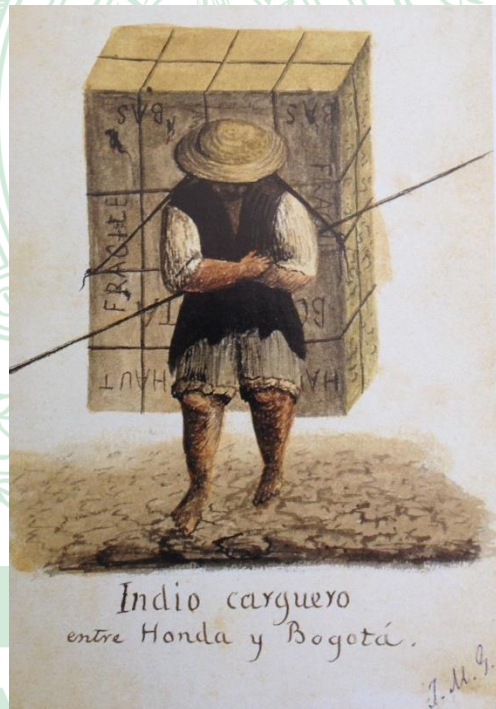


Figura 13. Indio carguero entre Honda y Bogotá.
Tomado de Gutiérrez de Alba, J. (1874).

Los hombres cargueros al igual que algunos animales eran expuestos a una serie de trabajos pesados y extensos que sumados al inhóspito clima, generaban una alta mortandad. Según Peláez (2012):



Los esclavos fueron ubicados para laborar en cinco actividades económicas importantes de aquel momento: minería, agricultura, artesanía, comercio y servicio doméstico. Por tanto, se desempeñaron como mineros, capitanes de cuadrillas, vaqueros, aserradores, arrieros, capataces, carpinteros, sastres, plateros, herreros, albañiles, panaderos, carniceros, pregoneros, cargueros, bogas⁴⁵, entre otros. En todos estos oficios tuvieron que soportar largas y extenuantes jornadas de trabajo, mala alimentación, abandono en las curaciones, complicaciones en los partos y dietas mal cuidadas; estas circunstancias les produjeron muchos desgastes corporales tanto internos como externos. (p. 167)

Las condiciones sociales que se estaban estableciendo durante la Colonia, se extendieron hasta después de la independencia, cuando se logró la inclusión de los números enteros negativos a los planes de estudio universitario como una explicación de las relaciones económicas que se estaban formando, es decir, los números negativos pueden verse, según lo expuesto anteriormente, como una matematización de la realidad, para volver una práctica social establecida en una práctica razonada.

Según (Entrena, 2014), “el proceso de matematización está compuesto por dos fases: la primera, la de traducir problemas del mundo real al matemático; y la segunda, la de utilizar destrezas para hallar su solución. Para este caso en particular, el proceso de matematización surge de una necesidad social y comercial que se fue extendiendo hasta adquirir tal importancia para ser introducidos en los planes de estudio.

⁴⁵ Hombres robustos que eran los encargados de transportar mercancía o pasajeros por los ríos colombianos en los denominados champanes o canoas.



Los planes de estudio eran conocidos por establecer un orden dentro del sistema educativo naciente, donde la enseñanza estaba guiada hacia procesos industriales y agrícolas (que seguirían siendo utilizados hasta mediados del siglo XIX), para el desarrollo de la economía. Los números enteros negativos, que fueron conocidos inicialmente por cantidades negativas, fueron incluidos en los planes de estudio establecidos para las universidades (donde se educaban las personas adineradas), con el fin de poder aplicar sus conocimientos al dominio de los otros, mientras que la educación primaria (donde asistían las masas y el pueblo en general) tenían una educación enfocada en el desarrollo de la mano obrera y trabajadora.

Para llegar a las concepciones actuales de currículo y números enteros negativos, no solo hizo falta la Ilustración y los planes de estudio que permitieron la reforma progresiva del sistema educativo que se estaba empezando a crear en el Nuevo Reino de Granada, sino que también fue necesario contar con la reforma empezada por Martín Lutero en el siglo XV, que tomó como punto de partida la necesidad de resaltar la importancia de la educación para pueblo, como nuestro en el siguiente apartado.

Hasta ahora la historia me ha dejado algunas comprensiones que van desde el poco interés que tenían los colonizadores en educar a las personas que habitaban el territorio de su conquista, puesto que su objetivo no era ese, sino subordinar al pueblo para expropiarlo de las riquezas y someterlo para el beneficio propio; hasta el intento por parte de algunos personajes como Escandón, Caballero y Góngora, Mutis, y Caldas de pensar y ver en la educación una posibilidad para avanzar y conseguir que se desarrollara en los pobladores un



ánimo emancipador, que tendría como principal consecuencia, el grito de independencia en 1810 (Wilhite, 1980).

Sin embargo, al analizar algunos aspectos del recorrido hasta aquí realizado, deduzco que una de las condiciones de posibilidad que permitieron la inclusión de los números enteros negativos en los planes de estudio en el Nuevo Reino de Granada, fue la adaptación y distribución de conocimientos extranjeros a los sujetos más privilegiados de la sociedad. Los colonizadores en su interés de explotar y comercializar los recursos naturales que poseía la tierra que habían tomado por suya, sintieron las necesidades de incluir los números enteros negativos o cantidades negativas en la población predilecta (adinerada) que en su mayoría eran españoles, para agilizar los procesos de comercialización (minera, agrícola y de mano de obra) para así obtener ganancias, que era el objetivo del comercio.

Conforme a lo anterior, los números enteros negativos fueron conocidos y utilizados inicialmente por aquellos que representaban autoridad y dominio, que en su mayoría eran clérigos y militares españoles; no obstante, en los siguientes apartados mostraré cómo estos números se volvieron parte de la naciente cultura que se estaba generando en el Nuevo Reino de Granada.

3.2 De Lutero a la Expedición Botánica: algunas contribuciones a las ciencias útiles

Retomando las ideas relacionadas con el aparatado anterior, la educación que se estaba generando en el Nuevo Reino de Granada utilizaba un método reduccionista, hermético y repetitivo, que se relaciona en la actualidad con algunas ideas del currículo



técnico creadas por Di Franco (2012), Trillo (1994), Castro, *et al.* (2004) y Luna y López (2011). Estos autores exponen el currículo técnico desde la caracterización de cada uno de los sujetos que son partícipes del proceso de enseñanza y del proceso de aprendizaje, es decir, para ellos el profesor o quien enseña adquiere un papel de transmisor de conocimientos e ideas externas a él, mientras que el estudiante o el que aprende adquiere una postura pasiva y reproductora frente al conocimiento que recibe.

La caracterización mostrada por estos autores sobre el currículo técnico, o enfoque técnico del currículo, se asocia a la forma de enseñanza que era asumida en el Nuevo Reino de Granada donde se buscaba garantizar la continuidad de la estructura social de aquella época, es decir, lo que realmente importaba era que las clases altas siguieran dominando a las clases bajas que eran consideradas como simples entes productores, reproductores o esclavos.

Los esclavos, como lo había mencionado, desempeñaban diversas actividades, que se extendieron hasta mediados del siglo XIX, exactamente hasta 1852, cuando Bolívar insistió en la libertad de estos, pidiéndola como regalo para él y como recompensa al valor de las tropas negras de la Batalla de Carabobo⁴⁶ dada en 1821. Sin embargo, el Congreso aprobó solamente una ley de abolición gradual; hasta que el primero de enero de 1852 se aprobó la terminación total de la esclavitud en el territorio que ya era conocido como Nueva Granada. (Galvis, 1982, p. 52)

⁴⁶ Batalla disputada en Venezuela e importante para la liberación de este territorio ante el dominio de la Corona española.



Estos cambios sociales y políticos que se reflejarían gradualmente en aspectos culturales, educativos y económicos, hicieron que el Nuevo Reino configurara algunas de las dinámicas que permanecerían a través de los años, dinámicas que podrían ser catalogadas como transversales a nuestra cultura y sociedad. Por ejemplo, el nacimiento del currículo se da a partir de la división social, o como lo expresa Hamilton y Gibbons (1980):

La idea era que las clases obtuviesen importancia con el surgimiento de programas secuenciales de estudio en los que resonaban a su vez diversos sentimientos renacentistas y reformistas de movilidad social ascendente. En los países calvinistas (como Escocia), estos puntos de vista encontraron su expresión teológica en la doctrina de la predestinación y su expresión educativa en el surgimiento de sistemas educativos nacionales donde se ofrecería a los “elegidos” o “predestinados” (es decir, principalmente a quienes podían pagar) la perspectiva de una educación avanzada, mientras que el resto (en su mayoría las masas de pocos recursos y de contextos rurales) encajaban en un currículum más conservador basado en el conocimiento religioso y moral. (p. 54-55)

El currículo o plan de estudio que se construyó para la educación superior se basaba en el conocimiento descontextualizado, es decir, se buscaba que los grupos sociales que accedían a ella usaran la mente como herramienta fundamental para el desarrollo del conocimiento, mientras que el currículo o plan de estudio conservador, al cual accedían las personas que pertenecían a las masas, buscaba educar bajo los “hechos” concretos y contextualizados de una forma mecánica y repetitiva.



Este tipo de currículo o método de enseñanza fue el que primó en Colombia entre 1789 y aproximadamente 1830 (pasando por el Nuevo Reino de Granada, Nueva Granada y La Gran Colombia). Sin embargo, fue a mediados del siglo XIX, y de la mano de Francisco de Paula Santander⁴⁷, cuando se comenzó a concebir un currículo sin excepción de clases, es decir, la pretensión de educar iba más allá de la posición social o racial (Ahern, 1991).

No obstante, la lucha por una educación no sectorizada se gestó en un contexto externo al nuestro, exactamente en algunos países europeos, donde antes de mostrar la utilidad y aplicabilidad de las ciencias útiles, se había empezado a luchar por la igualdad de condiciones, tanto educativas como sociales, frente a la religión que representaba el poder. Así que antes de abordar la inclusión de algunos conocimientos de las ciencias útiles, expuestos durante la Expedición Botánica desarrollada en el Nuevo Reino de Granada, considero necesario mostrar de dónde surgen estas ideas liberales en torno a lo educativo que revolucionaron el pensamiento de algunos criollos intelectuales por la época de la independencia.

3.2.1 Lutero: de la fe a la educación

El 10 de noviembre de 1483 nace en Eisleben, para entonces Sacro Imperio Romano Germánico, Martin Luder conocido también como Martín Lutero. El hijo de Hans y Margarete Luder, fue criado en un ambiente campesino; sin embargo, guiado por el anhelo de su padre de tener un hijo que desempeñara un cargo importante en la vida civil, adquirió

⁴⁷ Francisco José de Paula Santander Omaña (Villa del Rosario, 1792-Bogotá, 1840). Político y militar reconocido por su participación en la emancipación americana frente al imperio español.



conocimientos en la escuela y la universidad donde obtuvo el grado de bachiller y posteriormente de *Magister Artium*⁴⁸ (Constaín, 2017).

Martín Lutero había iniciado sus estudios de derecho “pero un incidente cambió su vida: al volver de la universidad a su casa en julio de 1505 recibió durante una violenta tormenta un rayo que casi lo mata, y rogándole ayuda a Santa Ana le prometió convertirse en monje” (Várnagy, 1999, p. 146). Dos semanas después de este acontecimiento Lutero ingresó al monasterio de los agustinos y se ordenó como sacerdote para 1507.

A partir de esta fecha, Lutero dedicó su vida a estudiar y reflexionar sobre la religión que profesaba llegando a análisis y pensamientos profundos sobre las sagradas escrituras que regían la Iglesia. Sin embargo, y a pesar de su entrega a la religión, en una de sus peregrinaciones a Roma detalló la mundanidad del clero específicamente con el ofrecimiento de indulgencias a los feligreses, es decir, las personas podían comprar el perdón para sí mismas o para sus parientes con el fin de eliminar la culpa que aún quedaba después de la absolución (Nordstokke, 2016). Este suceso hizo que Martín Lutero se revelara ante lo que él consideraba un abuso de autoridad contra el pueblo, y como protesta ante dicha consideración escribió en 1517 sus noventa y cinco tesis (figura 14).

⁴⁸ Maestro de Artes que recibía quienes tenían estudios en bellas artes, ciencias sociales, humanidades o teología.

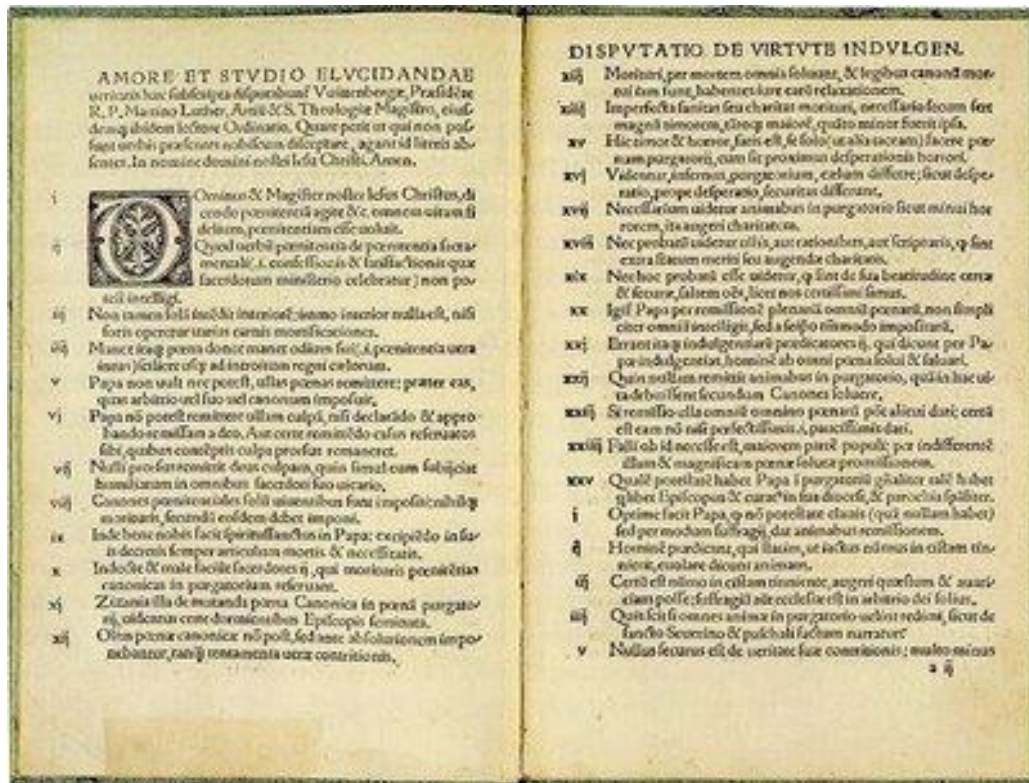


Figura 14. Documento que contiene las noventa y cinco tesis realizadas por Martín Lutero (actualmente se encuentra en la Biblioteca Estatal de Berlín) Tomado de Metaxas, E. (2017)

Dentro de las tesis formuladas por Lutero en el siglo XVI y catalogadas como un atentado contra el poder que representaba la Iglesia y el mismo papa (León X⁴⁹), se encuentran:

10. Mal y torpemente proceden los sacerdotes que reservan a los moribundos penas canónicas en el purgatorio.

11. Esta cizaña, cual la de transformar la pena canónica en pena para el purgatorio, parece por cierto haber sido sembrada mientras los obispos dormían.

⁴⁹ Giovanni di Lorenzo de Medici o León X (Florenca, 1475-Roma, 1521). Fue papa de la Iglesia católica entre 1513 y 1521.



27. Mera doctrina humana predicán aquellos que aseveran que tan pronto suena la moneda que se echa a la caja, el alma sale volando.

56. Los tesoros de la Iglesia, de donde el papa distribuye las indulgencias, no son ni suficientemente mencionados ni conocidos entre el pueblo de Dios.

83. ¿Por qué subsisten las misas y aniversarios por los difuntos y por qué el papa no devuelve o permite retirar las fundaciones instituidas en beneficio de ellos, puesto que ya no es justo orar por los redimidos?

86. ¿Por qué el papa, cuya fortuna es hoy más abundante que la de los más opulentos ricos, no construye tan solo una basílica de San Pedro de su propio dinero, en lugar de hacerlo con el de los pobres creyentes? (Lutero 1517, citado por Salvucci, 2011, p. 3-8).

Estas tesis sirvieron como crítica al poder que él consideraba estaba mal impartido, puesto que solo cumplían con las leyes que imponía la Iglesia a las personas pobres que no tenían conocimientos para cultivar la fe. En palabras de Nordstokke (2016):

Lutero había observado cómo la gente gastaba su dinero en indulgencias. Sus tesis representaban una crítica vehemente al abuso del poder religioso que explotaba a la gente común y manipulaba su fe. Al mismo tiempo, buscaba defender la dignidad de las personas creyentes y sus derechos de escuchar libremente la palabra de Dios. (p. 35)

Como posible solución ante estas acciones malogras de la Iglesia católica, Martín Lutero vio en la instrucción el éxito para la reforma que proponía. “El primer paso para lograrla empezó a cristalizarse en septiembre de 1522 cuando apareció el nuevo testamento



traducido en alemán” (Figuerola, 2011, p. 52). A pesar de que esta traducción fue importante porque muchas personas podían acceder a ella, Lutero consideraba que, si no había una alfabetización popular mediante escolarización masiva, de nada serviría, puesto que seguiría siendo una puerta cerrada para muchos otros.

La instrucción se fue volviendo una necesidad para el cultivo de la fe, ya que mediante la lectura individual de la sagrada escritura se podía seguir cultivando el amor y la adoración por Dios. Esta necesidad que inicialmente se vio contextualizada en el territorio alemán, se fue extendiendo de forma plausible por Francia, Italia e Inglaterra, haciendo que surgiera una nueva realidad distinta de la ya conocida (Castro, 2009). La reforma protestante tuvo críticas y propuestas por parte de algunos religiosos, pensadores, intelectuales y políticos de la época quienes pretendían eliminar la tradición del catolicismo medieval; sin embargo, y a pesar de las múltiples consecuencias que esta acción tuvo, se podría afirmar que parte de estos pensamientos revolucionarios formulados por Lutero, llegarían a mediados del siglo XVIII a la Ilustración.

Según Ramírez (2014, p. 72):

También la interpretación de la figura y de la obra de Lutero en el contexto de la historiografía protestante ha sido variada y desigual y ha fluctuado entre los que han visto en él a un espíritu liberal y los que lo han considerado como un espíritu conservador, como un simple restaurador. La Ilustración, por ejemplo, tan ligada con el protestantismo, ha visto en Lutero, además de un hombre ilustrado, del políglota y pionero de los tiempos modernos en cuestiones de interpretación, al libertador del



despotismo moral de la época y al defensor de la razón, adversario decidido de la religión entendida como superstición.

Martín Lutero es reconocido en la actualidad por ser uno de los precursores del pensamiento moderno europeo⁵⁰, y un precursor del movimiento que crearía e impulsaría la Ilustración en dicho continente. Lutero creía que era fundamental que los creyentes supieran leer para entender las palabras que estaban expuestas en las sagradas escrituras, asunto que lo llevó a pensar en la instrucción como un vehículo de fe y, por tanto, era indispensable educar de forma gratuita a los hijos de los ricos y de los pobres para que tuvieran una proximidad más personal con Dios (Figuroa, 2011).

Hasta este punto, puedo decir que la necesidad de instrucción nació, desde esta perspectiva, en contra de lo que tenía estipulada la religión católica medieval, quien sacaba provecho de la no alfabetización de la población más pobre; Lutero comprendió la instrucción como parte fundamental de la fe individual y, por tanto, vio en esta la importante función de instruir para el conocimiento de la fe y el amor de Dios.

Posterior a la reforma iniciada por Lutero y al periodo de la Ilustración, tanto en Europa como en el Nuevo Reino de Granada, se comenzaban a crear diversos planes de estudio (mostrados algunos de ellos en el apartado anterior) que exponían la importancia de incorporar las ciencias útiles en el contexto. Además, surge en el Nuevo Reino de Granada una de las mayores expediciones que se pudo hacer en una colonia española: la Expedición Botánica.

⁵⁰ Expresión que se asocia a los ideales de cambio que surgieron en el periodo de la Ilustración.



La Expedición Botánica tuvo inicio en el Nuevo Reino de Granada en 1783 y se extendió hasta 1816, en la entonces Nueva Granada. Esta Expedición consistió en una serie de viajes que realizaron algunos personajes intelectuales e ilustres de la época, entre los que se encontró, como director de dicho proyecto, José Celestino Mutis.

José Celestino Mutis y Bosio nació en Cádiz, España el 6 de abril de 1732 en el seno de una familia burguesa. Inició sus estudios en gramática y obtuvo su título en el año 1753; para 1755 obtuvo un segundo grado, pero esta vez de bachiller en medicina. Además de cursar estos estudios y ser un médico reconocido por servir al virrey Pedro Mesía de la Cerda, Mutis se desempeñó también como sacerdote, geógrafo, matemático, docente y, principalmente, como botánico (Palacios, 2008).

“El 29 de diciembre de 1760 llegó Mutis a Cartagena. En el viaje al interior, la comitiva virreinal pasó por Barranquilla y Mompós, remontando siempre el río Magdalena, hasta que llegó a Honda el 24 de enero de 1761” (Trías, 1945, p. 136). Se instaló en la capital del virreinato y se desempeñó como médico y docente de un curso de matemáticas y filosofía natural hasta 1766. Para 1782, el virrey Caballero y Góngora creó de forma provisional una expedición científica conocida como la Expedición Botánica del Nuevo Reino de Granada, y nombró como director a Mutis, a Eloy Valenzuela (sacerdote y botánico) como discípulo de Mutis y a Pablo Antonio García, como pintor. Esta expedición inició el 1 de noviembre de 1783.



La Real Expedición Botánica inició en Cartagena, Santafé, Montuosa Baja con el sapo⁵¹, Ibagué y Llano del Tolima hasta Espinal, luego pasaron a Mariquita (donde se desarrolló el periodo más fecundo) hasta el nevado del Ruiz y Tolima, por último, la exploración fue en Bogotá, que cubrió Fusagasugá, la provincia de Vélez y los montes de la capital. (Pérez, 1970, p. 39)

Este recorrido por los suelos del Nuevo Reino de Granada sería parte de uno de los estudios más completos sobre las plantas, minerales y animales que se daría entre el siglo XVIII y de XIX en una de las colonias españolas en americana. Según Ocampo (1999), “se clasificó y organizó el herbario con más de 20.000 plantas. Se realizaron investigaciones sobre la quina, la ipecacuana, el guaco, el árbol de bálsamo de Tolú y Perú, entre otros” (p. 20). Además, se adelantaron estudios relativos a la meteorología, a la astronomía y a la geografía de la mano de Francisco José de Caldas.

3.2.2 Aportes del sabio Caldas a la geografía y a la ciencia

Francisco José de Caldas, también conocido como el Sabio Caldas, nació en 1768 en Popayán y murió en 1816 en Santafé, fusilado por orden del general Pablo Morillo ordenara su ejecución por haber pertenecido al movimiento independentista neogranadino (Morales de Mosquera, 2002). Las contribuciones fueron significativas para la evolución del pensamiento y el desarrollo de las ciencias durante el siglo XIX.

⁵¹ Lugar ubicado al occidente de Pamplona, Santander



Caldas tuvo varias influencias que lo ayudaron a formarse como el sabio que fue; entre ellos Alexander Von Humboldt⁵², Aimé Bonpland⁵³ y José Celestino Mutis. Caldas reemplazó a Mutis en el cargo de director del Real Observatorio Astronómico de Santafé de Bogotá (Ocampo, 1999), donde pudo ejercer lo que realmente le apasionaba, la astronomía. Como lo menciona Caldas (1978) citado por Arboleda (2016):

Caldas es un prodigio en astronomía. Nacido en las tinieblas de Popayán y sin haber ido nunca más allá de Santafé, ha construido barómetros, un sector, un cuarto de ciclo en madera. Mide meridianos mediante gnomones de 12 a 15 pies. ¡Que no habría hecho este joven hombre en un país con más medios, en donde no hay que aprender todo por sí mismo! (p. 6)

Cada una de las construcciones que realizó Caldas, en un país sin medios como se expuso anteriormente, fueron dignas de elogios y exaltaciones por parte de la comunidad; sin embargo, eran pocos los que tenían conocimientos y podían visualizar en él a un hombre de ciencia y para la ciencia. Este científico criollo realizó importantes contribuciones a partir del reconocimiento de la geografía, entre los que se encuentra la creación del hipsómetro, considerado su máxima invención.

En uno de sus viajes, Caldas estaba midiendo la temperatura de la nieve en el volcán de Puracé ubicado a cinco leguas de Popayán, actualmente departamento del Cauca. Allí,

⁵² Friedrich Wilhelm Heinrich Alexander Freiherr von Humboldt (Berlín, 1769-1859). Geógrafo, naturalista, astrónomo y humanista. Es reconocido en la actualidad como el padre de la geografía moderna universal.

⁵³ Aimé Jacques Alexandre Goujaud Bonpland (La Rochelle, 1773-Santa Ana, 1858). Naturalista, botánico y médico.



accidentalmente, rompió su termómetro, y regresando a Popayán lo reparó teniendo en cuenta el punto de ebullición del agua (Pohl, 2009). Al calibrar la gradación, encontró una nueva escala de medida, donde los grados eran más pequeños que los que tenía el termómetro inicialmente. Caldas, al notar dicho suceso, empezó a realizar una serie de experimentos, concluyendo que el calor del agua hirviendo es proporcional a la presión atmosférica (Garay, 2012). De dicho análisis, Caldas dedujo la siguiente fórmula que es explicada por medio del siguiente ejemplo⁵⁴:

$$a \pm \frac{(b-d)c}{c} = z, \text{ con referencia a Popayán}$$

Y expone además una segunda fórmula donde toma como referencia el mar:

$$a - \frac{(b-d)e}{c} = z, \text{ con referencia al mar}$$

Donde,

a = Altura del barómetro en Popayán o el mar

b = Calor del agua en los mismos lugares

c = Exponente

e = 12 líneas

d = Calor del agua en un lugar cualquiera

⁵⁴ Ejemplo tomado de Caldas, F. (1966). Ensayo de una memoria sobre un nuevo método de medir la altura de las montañas por medio del termómetro y el agua hirviendo, seguida de un apéndice, por don Francisco José de Caldas. In: Obras completas de Francisco José de Caldas: publicadas por la Universidad Nacional de Colombia como homenaje con motivo del sesquicentenario de su muerte 1816 - octubre 29 - 1966. Imprenta Nacional, Bogotá, pp. 153-173. Para más información, dirigirse al siguiente link: http://www.bdigital.unal.edu.co/92/1/ensayo_de_una_memoria_sobre_un_nuevo_metodo_de%20medir_la_altura_de_las_monta%C3%B1as_por_medio_del_termometro_y_el_agua_hirviendo_seguida_de_un_apendice_por_don_francisco_jose_de_caldas.pdf



z =Altura del barómetro en este lugar (Popayán)

Para entender un poco de lo desarrollado por el Sabio Caldas, se mostrará el siguiente ejemplo, que hace parte de su ensayo:

Enunciado: El calor del agua en Tambores⁵⁵ es de 71°.75; se pide la altura correspondiente del barómetro.

Solución:

| | |
|---------------------------------|--------------|
| Calor del agua en Popayán | 75.65 |
| En Tambores..... | <u>71.15</u> |
| Diferencia..... | 3.90 |

$$0^{\circ}.974: 12^1 :: 3^{\circ}.90: \frac{3^{\circ}.90 \times 12}{0^{\circ}.974} = 48^1.05 = 4^p0^1.05$$

Como Tambores esta sobre el nivel de Popayán, resto este resultado de la altura del barómetro en esta ciudad.

| | |
|--------------------------------------|--|
| Altura del barómetro en Popayán..... | 22 ^p . 11 ¹ . 20 |
| Resultado | <u>4. 00 .05</u> |
| Residuo..... | 18 ^p . 11 ¹ . 15 |

altura del barómetro en Tambores.

Comparemos el resultado del cálculo con la observación que hice sobre este cerro.

| | |
|---|---|
| Altura del barómetro en Tambores..... | 18 ^p . 11 ¹ . 60 |
| Altura del barómetro calculada por el calor del agua..... | <u>18^p. 11¹. 15</u> |

⁵⁵ Lugar ubicado cerca de Popayán



Diferencia... .. 00^p. 00^l. 45

Del anterior ejemplo puedo afirmar que mientras mayor sea la temperatura del agua hirviendo, mayor será la presión atmosférica o altura (Popayán: Calor de agua: 75.65, altura del barómetro: 22p. 111. 20), que cuanto menor sea la temperatura del agua hirviendo, menor será la presión atmosférica o altura (Tambores: Calor de agua: 71.15, altura del barómetro: 18p. 111. 60). Esta relación directamente proporcional la expone Caldas en una figura comparándola con otras como se muestran a continuación:

| LUGARES | Calor del agua | | Alturas del barómetro observadas | Alturas del barómetro calculadas por el calor del agua | | Diferencias |
|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------------------------|--|----------------------|-------------|
| | T. Reaumur | T. Fahrenheit | | | | |
| Popayán | 75 ^o .65 | 202 ^o .21 | 22 ^p 11 ^s .2 | | | |
| Juntas | 74 ^o .50 | 199 ^o .62 | 21 ^p . 9 ^l .0 | 21 ^p . 9 ^l .04 | + 0 ^l .04 | |
| Paispamba | 73 ^o .50 | 197 ^o .37 | 20 ^p . 9 ^l .1 | 20 ^p . 8 ^l .72 | - 0 ^l .38 | |
| Sombreros | 72 ^o .40 | 194 ^o .90 | 19 ^p . 6 ^l .05 | 19 ^p . 7 ^l .15 | + 1 ^l .10 | |
| Tambores | 71 ^o .75 | 193 ^o .43 | 18 ^p . 11 ^l .6 | 18 ^p . 11 ^l .15 | - 0 ^l .45 | |
| Estrellas | 73 ^o .30 | 196 ^o .87 | 20 ^p . 7 ^l .0 | 20 ^p . 6 ^l .25 | - 0 ^l .75 | |
| Poblazón | 74 ^o .30 | 199 ^o .17 | 21 ^p . 6 ^l .9 | 21 ^p . 6 ^l .59 | - 0 ^l .31 | |
| Buenavista | 73 ^o .80 | 197 ^o .05 | 21 ^p . 11 ^l .15 | 21 ^p . 0 ^l .5 | - 0 ^l .65 | |

Figura 15. Tabla elaborada por Francisco José de Caldas. Comparación de datos obtenidos a partir de su fórmula hipsométrica.

Tomado de Caldas, F. (1966)

Si analizo la utilidad que Caldas les daba a los números enteros negativos en su método para medir montañas, podría interpretar que más que entenderlos como números negativos los entendía como cantidades negativas, es decir, a partir de la medida estándar que él tomaba para sus mediciones (altura del barómetro en Popayán), utilizaba el signo más



y el signo menos como una convención para comparar medidas, y así designar que algo estaba por encima o por debajo de la medida conocida.

En el trabajo desarrollado por Francisco José de Caldas no se observan latitudes con signo negativo, en comparación a la actualidad, donde es importante para la ubicación geográfica y la cartografía.

Por ejemplo, para la navegación y la aviación, Pilar y Rodríguez (2008) destacan el signo menos para simbolizar las latitudes y las longitudes, como se muestra a continuación: los valores negativos son para ubicaciones en el hemisferio sur, la latitud 0° indica el ecuador y los valores positivos, ubicaciones en el hemisferio norte. Mientras que para la latitud se tiene por regla general lo siguiente (figura 16): latitud entre 0° y 90° : hemisferio norte, latitud entre 0° y -90° : hemisferio sur, Longitud entre 0° y 180° : al este del meridiano de Greenwich, Longitud entre 0° y -180° : al oeste del meridiano de Greenwich.

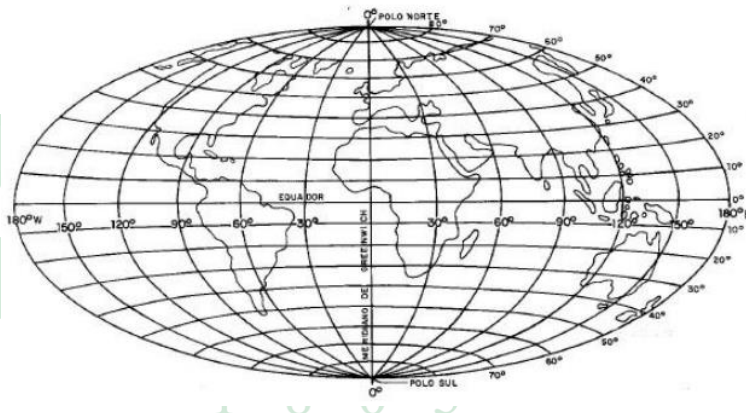


Figura 16. Coordenadas geográficas (ubicación con respecto al ecuador y al meridiano de Greenwich)

Tomado de Rosa, R. (2004). Cartografía básica.



Los aportes que realizó Francisco José de Caldas fueron importantes también para el desarrollo meteorológico de Nueva Granada. En el año 1808 realizó algunas observaciones donde mostraba “la temperatura, la precipitación, la presión atmosférica y el estado del cielo” (Pulido, 1991, p. 34). Estas observaciones fueron publicadas en el Semanario de la Nueva Granada, periódico dirigido por él, en el que expresaba además de lo antes citado, ciertas críticas a la educación, como se muestra a continuación:

... Si en lugar de enseñar á nuestros jóvenes tantas bagatelas; si mientras se les acalora la imaginacion con la divisibilidad de la materia, se les diese noticia de los elementos de astronomía y de la geografía, se les enseñase el uso de algunos instrumentos fáciles de manejar; si la geometría práctica y la geodesia ocupasen el lugar de ciertas cuestiones tan metafísicas como inútiles; si al concluir los cursos supiesen medir el terreno, levantar un plano, determinar una latitud, usar bien la aguja; entonces tendríamos esperanzas de que, repartidos por las provincias, se dedicasen á poner en ejecución los principios que habrían recibido en los colegios y á formar la carta de su patria. (Caldas, 1849, p. 31)

Francisco José de Caldas mostraba la aplicabilidad de algunas de las ciencias útiles en la geografía, para el desarrollo principalmente de la cartografía, y cuestionaba la enseñanza que se daba en aquel momento por centrarse en algunas cuestiones improductivas.

Frente a estas críticas, Caldas añadió:

Yo ruego á los encargados de la educacion pública mediten y pesen si es mas ventajoso al Estado y á la Religion gastar muchas semanas en sostener sistemas



aéreos, y ese monton de materias fútiles ó meramente curiosas, que dedicar este tiempo á conocer nuestro globo y el pais que habitamos. (Caldas, 1849, p. 31)

Para Caldas, la importancia de las ciencias útiles radicaba en la aplicabilidad que estas tenían en el contexto inexplorado, sin embargo, los planes de estudio y la metodología de enseñanza no cambiarían de forma inmediata. Después de su muerte, los estudios publicados en el Semanario⁵⁶, específicamente sobre el clima, se suspendieron por 15 años, hasta ser retomados en 1823 por una misión francesa y algunas instituciones de educación superior que se fueron conformando durante el siglo XIX.

De acuerdo con lo expuesto, puedo deducir que otra de las condiciones de posibilidad que permitió la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano fue la influencia de algunas corrientes europeas, como la Ilustración, además de la necesidad del reconocimiento territorial que algunos personajes partícipes de la Expedición Botánica empezaron a sentir como parte de su deseo emancipador.

La reforma iniciada por Martín Lutero trascendió hasta la época de la Ilustración, creando un espíritu racionalista en gran parte de Europa; sin embargo, este ánimo librepensador llegó de manera tardía a España, donde asuntos religiosos fueron un impedimento para el desarrollo de las ciencias. Como consecuencia de ello, en buena parte de los territorios colonizados por España, la educación se centró por mucho tiempo en la moral y el catolicismo. Según Poveda (2012): “Imbuida de un catolicismo integrista y

⁵⁶ Periódico de divulgación científica en Santafé.



fanático, España expulsó en 1492 numerosa población árabe y judía, y cerró herméticamente a toda su sociedad contra los vientos de la nueva ciencia, la cual se la asociaba con el odiado protestantismo” (p. 6).

No obstante, los conocimientos que iban llegando por medio de algunos extranjeros a las colonias americanas de España, servían para el desarrollo científico, como fue el caso de José Celestino Mutis. Desde su llegada al Nuevo Reino de Granada, Mutis logró extender su interés científico a muchos criollos, a partir del desarrollo de cátedras como Matemáticas y Filosofía natural, más conocida en la actualidad como Física. Luego, como director de la Real Expedición Botánica, Mutis dejaría una huella irremplazable en aquellos que fueron partícipes de la misma, entre ellos, Francisco José de Caldas.

El sabio Caldas es reconocido como uno de los primeros científicos en utilizar las matemáticas en asuntos prácticos, específicamente en la exploración territorial (con su método para medir las montañas) donde utilizó las cantidades negativas para la comparación. “En todo caso, y en sentido histórico, Caldas fue el primer gran científico e ingeniero colombiano. Y, por eso mismo, puede decirse que también el primer matemático profesional nacido en Colombia” (Poveda, 2012, p. 26).

3.3 La implementación de las ciencias útiles: de la universidad al currículo escolar colombiano

En los apartados anteriores he mostrado que algunos procesos sociales, culturales e históricos han influido en la consolidación de algunos de los conocimientos matemáticos que llegaron al Nuevo Reino de Granada en la época de la Colonia. También he mencionado



cómo estos conocimientos se empezaron a extender por el territorio por medio de las primeras comunidades religiosas y algunos científicos que participaron en la Expedición Botánica. Posterior a ello, he expuesto también cómo algunos personajes de la Nueva Granada, en su mayoría criollos, se fueron apropiando del conocimiento, específicamente el de las ciencias útiles, para explorar el territorio y poner los conocimientos a disposición del pueblo.

Para algunos historiadores, la actividad científica en el Nuevo Reino de Granada fue continua y estable; sin embargo, después del fusilamiento de los principales personajes que hicieron parte de la Expedición Botánica, el territorio de la Nueva Granada (como se llamó después de la emancipación española), sufrió décadas de escasa producción científica en torno a las ciencias útiles. Safford (1989):

Hasta la segunda mitad del siglo XIX, las ciencias en la Nueva Granada no fueron autosuficientes. El país continuó siendo simplemente un consumidor de ideas científicas extranjeras y dependía de las inyecciones periódicas de instructores foráneos para poder mantener algunos elementos de ciencias modernas en el currículum universitario. La ciencia y la tecnología implementadas en la Nueva Granada seguirían siendo enteramente coloniales. (p. 126).

Después de la Colonia y la liberación española, los criollos comenzaron un sin número de combates que tuvieron lugar entre 1810 y 1819 (Hettner, 1976). Durante estos nueve años. Según (Viloria-de-la-Hoz, 2015) la emancipación había creado en los habitantes un ambiente hostil, puesto que no conocían la forma en que debían establecer un gobierno que atendiera a sus necesidades y que fuera de alguna manera diferente al ya conocido.



Para esta época, conocida como Patria Boba⁵⁷, los dos partidos políticos dominantes (federalistas y centralistas) querían establecer su ideología y lograr el apoyo del pueblo para estructurar la forma de gobierno en la nueva nación. Los federalistas tenían como propuesta dar mayor autonomía a las provincias que componían el Estado, logrando establecer en ellos una administración y gobierno propio; mientras que los centralistas pensaban que las provincias debían estar al poder de un gobierno central (Paredes, 2014). En otras palabras, eran tan opuestas las posiciones de los dos partidos políticos, que, en vez de contribuir al progreso conjunto del nuevo Estado, se apartaron, ocasionando una desestabilización económica, política, educativa y social.

Según Safford (1989), “las tendencias sociales y las necesidades políticas de la nueva república sugerían la necesidad de establecer un sistema universitario más asequible y más amplio que el que había existido en la Colonia” (p. 149). Este sistema universitario tuvo un lento desarrollo. Presentaré, a continuación, algunas de las principales instituciones de educación superior que se crearon en el siglo XIX y que adoptaron a las ciencias útiles en sus planes de estudio para desarrollar diversos aspectos de su contexto, además presentaré algunos de los textos más utilizados donde se puede evidenciar el desarrollo de los números enteros negativos en el contexto neogranadino.

⁵⁷ Periodo vivido antes de la independencia en el que se produjo un conflicto por la división de los criollos entre federalistas y centralistas.



3.3.1 Las ciencias útiles: algunas instituciones y textos de la primera mitad del siglo XIX.

“Entre 1820 y 1867, año de creación de la Universidad Nacional, hubo varios intentos por estimular el estudio de las ciencias naturales, físicas y matemáticas. Entre ellos hay que subrayar el programa de Santander (1821-1841) y el de Mariano Ospina Rodríguez⁵⁸ (1841-1845) en el gobierno de Pedro Alcántara Herrán⁵⁹” (Sánchez y Albis, 2012, p. 112).

El denominado programa de Santander o Plan Santander fue el primer método de instrucción pública utilizado en la naciente república en medio de las vicisitudes de la guerra (Zapata, Marín, Ossa, y Ceballos, 2004). Dicho plan buscaba fundamentalmente desarrollar tres puntos: el primero estaba destinado a la aplicación del método lancasteriano⁶⁰ para la alfabetización masiva del pueblo; el segundo se enfocaba en la obligatoriedad y gratuidad de la educación primaria; y, el tercero, iba direccionado a los planes de estudio.

Los planes de estudio que se implementaron en esta época, para el desarrollo de las ciencias útiles, buscaban la incorporación de algunos conocimientos que fueran rentables al contexto que se estaba desarrollando con el fin de aportar al progreso económico. Según Zapata, *et al.*, (2004):

⁵⁸ Mariano Ospina Rodríguez (Guasca, 1805-Medellín 1885). Político, periodista y abogado reconocido por ser el fundador del Partido Conservador.

⁵⁹ Pedro Alcántara Herrán Martínez de Zaldúa (Bogotá, 1800-1872). Político, militar y presidente de la Nueva Granada entre 1841 y 1845.

⁶⁰ Se trataba de un gran salón, con un gran número de bancos dispuestos en filas; en el recinto se reunían un maestro, ubicado al frente, y los alumnos, ubicados en las filas. En cada una de las filas, en el extremo, se ubicaba un monitor. El maestro daba la lección únicamente a los monitores, y estos se la repetían a los demás estudiantes que estaban ubicados en sus respectivas filas (Sanabria, 2010, p. 52).



El gobierno debía promover y vigilar el establecimiento de escuelas especiales en donde se enseñe todo lo concerniente a las minas de oro, plata y de otros metales, poniéndose en evidencia así que los constructores de la república entendían el alto valor de las ideas y el necesario respaldo de la infraestructura para cumplir el cometido. (p. 23)

En el artículo 8.º del Plan de Santander se exponía lo que los maestros debían enseñar. Entre los deberes que estos tenían estaba enseñar a los niños a leer, escribir, la aritmética básica y las normas de la religión y la moral (Zapata, *et al.* 2004). Sin embargo, no se exponía en este plan la necesidad de enseñar las ciencias útiles en la educación primaria, porque, al parecer, bastaba con estas asignaturas para que el desarrollo de las minas conservara su estabilidad. Posterior, se desarrolló entre 1841 y 1845 el plan de Mariano Ospina Rodríguez, el cual tuvo un enfoque especial en las ciencias útiles. Mariano Ospina Rodríguez lideró el proceso de organización de la educación en la República de la Nueva Granada, el cual quedó configurado en escuelas, colegios y universidades (Zuluaga, 1995):

Para Ospina, en los colegios de cuyo establecimiento y arreglo se encargaban las cámaras de las provincias⁶¹, debía preferirse, según las circunstancias de cada provincia, la enseñanza de los conocimientos industriales y la de conocimientos prácticos como carpintería, herrería y cerrajería. Para el funcionamiento de los

⁶¹ El estado promulgó en la constitución de 1832 la importancia de conceder a las provincias una cámara que cuidara los intereses del pueblo, que supervigilara sus establecimientos, al igual que fomentara la industria y que difundiera la ilustración.



colegios, autorizó a las cámaras traer de países extranjeros profesores, máquinas, aparatos y libros. (Zapata *et al.*, 2004, p. 37)

Cada provincia, había empezado el tipo de educación que se debía dar según donde se encontraran las escuelas, y así garantizar que lo que se aprendía en dichas instituciones serviría de alguna manera en las labores a las que estaban expuestos los habitantes. No obstante, es preciso resaltar, la necesidad que tenían los gobernantes de traer del extranjero algunos libros y personas especialistas en las asignaturas que componían propiamente las ciencias útiles para comenzar a expandir dicho conocimiento por todo el territorio de la Nueva Granada (Safford, 1989).

Para el año 1843, en el Gobierno de Pedro Alcántara Herrán, se decidió dar mayor impulso a las matemáticas y a la física a través de la creación de proyectos que promovían estas ciencias en la educación superior. Este énfasis lo continuó el general Mosquera⁶² durante su gobierno con la fundación del Colegio Militar de Ingeniería (Poveda, 2012). En palabras de Bateman (1982):

Según la Ley 6.^a de 1847, sancionada el primero de junio por el presidente Mosquera y su secretario de guerra Joaquín M. Barriga, autorizó al poder Ejecutivo para establecer, en el lugar que estimare conveniente, un colegio militar destinado a formar oficiales científicos de Estado Mayor, de ingenieros, artilleros, caballería, infantería e ingenieros civiles. (p. 1)

⁶² Tomás Cipriano de Mosquera (Popayán, 1798-Coconuco, 1878). Militar, diplomático y estadista.



El currículo del Colegio Militar estaba centralizado en el desarrollo y estudio de las matemáticas. Este era el plan de estudios (tabla 4) que se organizó en el gobierno de Alcántara Herrán para la Facultad de Ciencias, Físicas y Matemáticas, como en 1843.

Tabla 4

Plan de estudios.

| PLAN DE ESTUDIOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS (1843) | | | |
|---|--|--|--|
| Secciones | Primera: MATEMÁTICAS | Segunda: CIENCIAS FÍSICAS | Tercera: CIENCIAS NATURALES |
| Cursos | En el primero y segundo año los cursos eran comunes a las tres secciones: Álgebra, Cálculo diferencial e integral, Aplicaciones del álgebra a la geometría, Trigonometría esférica, Geometría descriptiva, Física experimental, Química general, Geología, Física vegetal, Agricultura, Zoología, Anatomía y Fisiología. | | |
| TÍTULO DE BACHILLER EN CIENCIAS | | | |
| Cursos | Cuarto año: Mecánica, Arquitectura y Astronomía. | Cuarto año: Química vegetal y animal, Aplicaciones de la química a industria y Geología. | Cuarto año: Zoología, Anatomía y Fisiología. |
| TÍTULO DE LICENCIADO | | | |

Asignaturas dictadas para obtener título de bachiller o licenciado.

Tomado de Poveda (2012)

Las ciencias útiles empezaron a ser importantes en la Nueva Granada, ya que a partir de estas se podían empezar a ampliar las vías de acceso, que para ese entonces solo eran los caminos de herradura que habían sido elaborados desde la Colonia, para el desarrollo de la



economía. Así que la idea que se había empezado a implementar en la Expedición Botánica de traer al Estado algunos libros y personas que fueran conocedoras del tema y que pudieran ir extendiendo su conocimiento a los neogranadinos fue retomada e implementada en algunas de las instituciones. Presento a continuación algunos de los textos que fueron traídos durante la primera mitad del siglo XIX a Colombia y que fueron importantes para el desarrollo de las matemáticas durante este periodo.

3.3.2 Algunos textos utilizados en el siglo XIX

Los textos que más se usaron en las escuelas de ingeniería fueron los utilizados por los franceses y norteamericanos. Sin embargo, los cursos de Aritmética y Álgebra eran impartidos con textos colombianos (Poveda, 2012). Según ese autor, algunos de los textos extranjeros que se usaron para los cursos de ingeniería fueron:

- *Traite d'Algèbre*, de Joseph Bertrand⁶³

- *Algèbre*, de Pierre-Louis Bourdon⁶⁴

- *Algèbre*, de Joseph Alfred Serret⁶⁵

- *Géometrie Analytique*, de Sonnet y Frontera⁶⁶

⁶³ Joseph Louis François Bertrand (París, 1822-1900). Matemático y economista francés destacado por el estudio de la teoría de la probabilidad, la teoría de números y la geometría diferencial.

⁶⁴ Pierre Louis Marie Bourdon (Alençon, 1779-1854). Matemático francés destacado por su contribución al álgebra analítica.

⁶⁵ Joseph Alfred Serrete o Joseph Serret (París, 1819-Versalles, 1885). Matemático francés reconocido por desarrollar la teoría de curvas.

⁶⁶ H. Sonnet (s. f). Doctor en ciencias e inspector de la Academia de París y G. Frontera (s. f.). Doctor en ciencias y profesor de matemáticas.



- Del *Calculus* y de la *Mechanics*, de William Osgood⁶⁷
- *Cours D'analyse*, de Charles Sturm⁶⁸
- *Algèbre*, de Joseph Bertrand

Hubo, además, dos textos colombianos importantes que fueron: *Aritmética y Álgebra* de don Lino de Pombo y *Tratado de Aritmética y Tratado de Álgebra*, de don Liévano Reyes.

Lino de Pombo O'Donnell fue político, diplomático y militar. Nació el 7 de enero de 1797 en el hogar formado por Manuel de Pombo y Ante, entonces Tesorero Real del Consulado de Cartagena y por Beatriz O'Donnell, hermana del primer “Duque de Tetuán” y, en consecuencia, integrante de una destacada e influyente familia peninsular. (Díaz y Valencia, 2010, p. 20)

Lino de Pombo fue un hombre interesado por la enseñanza y las matemáticas, “dio cursos de Trigonometría, Aritmética, Álgebra, Geometría analítica y Geometría descriptiva en el Colegio Militar; además redactó notas didácticas sobre introducción al cálculo diferencial e integral. Fue cofundador de la Universidad del Cauca e impartió varias asignaturas” (Poveda, 2012, p. 109). Como fruto de su labor pedagógica, Pombo tuvo varias obras publicadas, entre ellas el libro *Lecciones de Aritmética y Álgebra*. En una carta del 3 de julio de 1858, don Lino le dice a su hermano al respecto:

⁶⁷ William Fogg Osgood (Boston, 1864-Belmont, 1943). Matemático estadounidense reconocido por sus trabajos en ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.

⁶⁸ Jacques Charles François Sturm (Ginebra, 1803-París, 1855). Matemático francés reconocido por el teorema que posee su propio nombre (teorema de Sturm).



Con el general Mosquera te remito un ejemplar de mis Lecciones de Aritmética y Álgebra, cuya impresión me ha proporcionado mil afanes y me ha endeudado notablemente. Seré un hombre arruinado si no logro vender pronto la edición [...] En relación con las *Lecciones de Aritmética i Álgebra*, la intención de don Lino era la de complementar lo declarado en el texto de geometría a través de la explicación de las operaciones de la aritmética con enteros y decimales para seguir con las operaciones algebraicas como clave de las explicaciones, valiéndose de nuevos métodos y disquisiciones fruto de su experiencia docente [...]. (Díaz y Valencia, 2010, p. 95)

Según lo anterior, el texto *Lecciones de Aritmética y Álgebra* fue una consecuencia del texto de geometría que ya había sido desarrollado antes por Lino de Pombo. Por otra parte, también se contaba con el libro *Tratado de aritmética y Tratado de Álgebra* de don Liévano Reyes.

Indalecio Liévano Reyes fue matemático, ingeniero y astrónomo colombiano. Nació en el Carmen de Apicalá (Tolima) en 1834 y murió en Bogotá en 1913. Fue profesor de Aritmética y Álgebra, a nivel superior, así como de Astronomía en la Academia Militar y en la Escuela Politécnica; y de las dos primeras materias, a nivel medio, en el Colegio de San Bartolomé. (Poveda, 2012, p. 109)

En su libro *Tratado Elemental de Aritmética* (figura 17), publicado en 1856, muestra como el tratado de la cantidad y naturaleza del número, la teoría de la división para números enteros, el tratado de las cuatro operaciones de la aritmética en toda su generalidad, la demostración de la existencia de las cantidades inconmensurables, las demostraciones de los



principios, propiedades generales de las potencias y raíces y por último el teorema de la lección XI.



Figura 17. Portada Tratado elemental de aritmética
Tomado de Liévano (1856)

En el capítulo I, o parte primera como lo llama el autor, Liévano desarrolla las cuatro operaciones con los números enteros (figuras 18, 19, 20 y 21). A continuación, mostraré el trabajo realizado por dicho autor, con el fin de analizar lo que se estudiaba en la primera mitad del siglo XIX por número entero.

De la adición:

1 8 0 3



Nota—Para indicar la adición de dos números se escribe el uno a continuación del otro separado por el signo + (*mas*); verbi gracia, para indicar la adición de los números 4 i 3 se escribe $4 + 3$ i se lee: *cuatro mas tres*. Para indicar la adición de varios números se escriben los unos a continuación de los otros separados por el signo +; es decir, que se indican las adiciones sucesivas de los varios números.

Figura 18. Adición de números enteros
Tomado de Liévano (1856)

De la sustracción:

12. La *sustracción* tiene por objeto el determinar el número que queda cuando de un número se quita otro.

Al primer número se llama *minuendo*, al que se quita *sustraendo* i al número buscado *diferencia* o *residuo*.

Puede decirse también que « la sustracción tiene por objeto, dados dos números, determinar un tercero que sumado con el segundo reproduzca el primero. »

Figura 19. Sustracción de números enteros
Tomado de Liévano (1856)

De la multiplicación:

Multiplicar un número por otro es tomar el primero tantas veces como unidades hai en el segundo. Al sumando igual se llama *multiplicando*, al número de veces que entra este sumando se llama *multiplicador*, i a la suma pedida se llama *producto*. Al multiplicando i multiplicador se les da también el nombre de *factores* del producto.

Figura 20. Multiplicación de números enteros
Tomado de Liévano (1856)



De la división:

25 La *division*, para números enteros, tiene por objeto el averiguar cuantas veces un número está contenido en otro.

Figura 21. División de números enteros
Tomado de Liévano (1856)

En las figuras expuestas, Liévano muestra que una de las concepciones que se tenían de los números enteros en la primera mitad del siglo XIX estaba relacionada con lo que conocemos en la actualidad como números naturales, es decir, no había una distinción entre unos y otros. Sin embargo, en el *Tratado de Álgebra*, texto elaborado por el mismo escritor y publicado en 1875 muestra apartados donde deja ver una concepción de número entero, parecida a la que se tiene en la actualidad en currículo escolar.

3.3.3 Las ciencias útiles: algunas instituciones y textos de la segunda mitad del siglo XIX.

La historia de las ciencias útiles, entre ellas las matemáticas, en la segunda mitad del siglo XIX está relacionada con la creación de dos instituciones: la Facultad de Ingeniería y la Sociedad Colombiana de Ingenieros (Sánchez, 1999). Estas dos instituciones tomaron como referencia lo que desarrollaron años atrás el Colegio Mayor del Rosario y el Colegio Militar.

El Colegio Militar fue una institución creada en 1847 y fue de las primeras en el país en formar ingenieros, específicamente ingenieros civiles. Los estudios en este centro se fundamentaban en la enseñanza del álgebra, la geometría, la trigonometría, el cálculo



diferencial e integral. Algunos de los grandes personajes en la historia de las matemáticas en Colombia como Lino de Pombo y Aimé Bergeron ejercieron su labor docente en dicha institución. Sin embargo, a nivel histórico, el Colegio Militar se destaca por la formación que dio a matemáticos como Indalecio Liévano, Manuel Antonio Rueda, Lino de Pombo y Aimé Bergeron.

“El Colegio Militar adoptó el modelo de la Escuela Politécnica de París; conservado hasta los años sesenta del siglo XX, en lo que ya era conocido, como la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional” (Sánchez, 2004, p. 10). La Universidad Nacional de Colombia nace por la Ley 66 de 1867 de los Estados Unidos de Colombia e incorpora a su campus “la ya antigua academia militar y escuela politécnica como escuela de ingeniería, incluyendo sus profesores, alumnos, materias y bibliotecas” (Poveda, 2012, p. 75).

Años después del nacimiento y consolidación de la Universidad Nacional en Bogotá, nació en 1873 la Sociedad Colombiana de Ingenieros. Esta comunidad académica buscaba crear un espacio científico para contribuir a las mejoras del país; sin embargo, para esta época y de la mano de Manuel Ponce de León e Indalecio Liévano, no prosperó la propuesta y se derrumbó la iniciativa.

En el año 1887 se vuelve a convocar a esa comunidad de profesionales y nace la Sociedad Colombiana de Ingenieros con “el fin de contribuir al progreso científico de los ingenieros, agrimensores, arquitectos, mecánicos, profesores en matemáticas y naturalistas y de crear un órgano de expresión de los estudios más elevados, de las mejoras materiales del país” (Sánchez, 2004, p. 33). Todo esto estaba ocurriendo en Santafé de Bogotá, mientras que un año antes nacía en Medellín, en 1886, la Escuela Nacional de Minas.



La Escuela Nacional de Minas fue la manifestación más clara del creciente poder de la clase social de mineros y comerciantes antioqueños del siglo XIX, pero a la vez, fue la expresión más directa de su valoración positiva de la ciencia y la técnica. (González-Calderón, Posada, y Córdoba, 2012, p. 5)

Esta institución fue creada con el fin de satisfacer la necesidad de comercialización y explotación de las minas por parte de los mismos pobladores de la provincia. Con la creación de esta escuela y sus diversas ingenierías se pretendía garantizar la participación exclusiva de los mismos ciudadanos, y la limitación para los extranjeros que tuvieran la pretensión de trabajar en dichas obras. Partiendo de esto, los dueños de las minas garantizarían su independencia y un incremento importante en la economía.

A diferencia de la Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional, cuyo énfasis era el estudio a fondo de las matemáticas teóricas, la Escuela Nacional de Minas se caracterizó por el estudio de las matemáticas aplicadas y prácticas. A continuación, presentaré los libros que se usaron en cada uno de estos contextos (Santafé de Bogotá y Medellín), tratando de mostrar el tratamiento que les daban a los números enteros negativos o a las cantidades negativas, específicamente en los libros de autores colombianos.

3.3.4 Algunos textos utilizados en Santafé de Bogotá y Medellín

Textos de matemáticas utilizados en Santafé de Bogotá: A finales del siglo XIX se seguían utilizando los libros de don Lino de Pombo e Indalecio Liévano. Según Poveda (2012), “La producción de textos de matemáticas en el país fue sumamente escasa antes del siglo XX” (p. 84), por tanto, no se encontraba mucha literatura que fuera originaria del país.



Los libros que se encontraban en la Universidad Nacional de Bogotá eran:

- *Aritmética i Álgebra*, de Lino de Pombo⁶⁹.
- *Lecciones de Aritmética y Álgebra*, de Indalecio Liévano Reyes⁷⁰.
- *Traité d'Algèbre*, de Bertrand.
- *Algèbre*, de Bourdon.
- *Algèbre*, de Joseph Alfred Serret.
- *Lecciones de Trigonometría*, de Manuel Antonio Rueda Jara⁷¹.
- *Geometría Analítica*, de Sonnet y Frontera.
- *Calculus*, de Osgood.
- *Aritmética Analítica*, de Manuel Antonio Rueda Jara.
- *Cours d'Analyse*, de Charles Sturm.

De los textos antes mencionados daré relevancia al *Tratado de Álgebra de Liévano*, además, al texto de *Álgebra de Bourdon* quién, a pesar de no ser un autor colombiano, se destaca dentro de la lista por ser uno de los libros de mayor uso en las aulas en la segunda mitad del siglo XIX.

Tratado de *Álgebra* de Liévano

⁶⁹ Lino de Pombo O'Donnell (Cartagena de Indias, 1797-Bogotá, 1862). Ingeniero, militar, político y profesor de matemáticas en la Universidad del Cauca.

⁷⁰ Indalecio Liévano Reyes (Tolima, 1843-1913). Ingeniero, astrónomo y matemático colombiano reconocido por su libro *Investigaciones científicas*.

⁷¹ Manuel Antonio Rueda Jara (Villa del Rosario, 1858-Bogotá, 1907). Ingeniero y profesor reconocido por publicaciones para la enseñanza de las matemáticas.



En el libro *Tratado de Álgebra de Liévano* (figura 22) existe una concepción de los números enteros negativos que se dan a conocer en esa época como cantidades negativas. Muestro a continuación (figuras 23 y 24) la forma en que el autor aborda dicha temática.

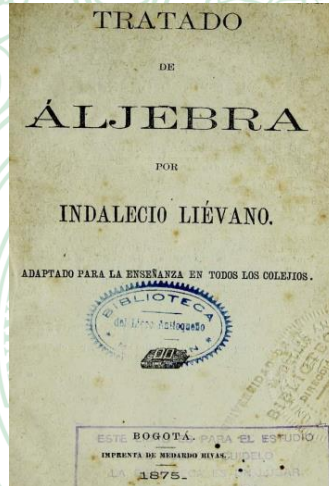


Figura 22. Portada del *Tratado de Álgebra*, de Liévano Tomado de Liévano (1875)

Cantidades Negativas:

§ I.—DE LAS CANTIDADES NEGATIVAS.

2. Si nos proponemos restar de un número otro mayor, por ejemplo, del número 7 otro mayor, 9, es evidente que esta operación es impracticable; pero sí podemos en parte ejecutar la sustracción, pues podemos quitar de 7 la cantidad igual que se encuentra en 9, i entónces quedan 2 para restar sin haber de dónde; es decir que se tiene

$$7 - 9 = -2 :$$

de esta manera se puede obtener el resultado de una sustracción imposible.

Figura 23. *Cantidades negativas*—Liévano— Tomado de Liévano (1875)



Ejemplo de números negativos:

4. Supongamos que se tenga expresado por a el valor de los bienes que una persona posee, i por b los que debe. Si $a > b$, esta persona posee una fortuna igual a $a - b$; pero si $a < b$, la persona está en el caso de no tener nada i deber la suma $b - a$. Ahora bien, si hacemos uso de las cantidades negativas, los bienes de la persona siempre estarán representados por $a - b$, atendiendo a que una fortuna negativa significa no tener nada i deber la cantidad que su valor absoluto indica.

Así, si $a = \$ 3000$ i $b = \$ 4000$, resultará $a - b = -1000$; i en lugar de decir que la persona, además de no tener nada, debe \$ 1000, se dice, haciendo uso de las cantidades negativas, que la dicha persona posee \$ -1000 . Hé aquí, pues, la ventaja de la introducción en el cálculo de las cantidades negativas, que consiste en la reducción a una sola especie de cantidad de las dos que puede haber en una cuestión, pues la circunstancia de no tener fortuna una persona i deber alguna suma se reduce a la especie de la primera cantidad, poseyendo cantidad negativa.

Figura 24. Ejemplo de las cantidades negativas –Liévano–
Tomado de Liévano (1875)

Las cantidades negativas son abordadas por Indalecio Liévano a partir de dos nociones básicas en las matemáticas: la noción de número y la noción de cantidad. El autor, para explicar las cantidades negativas, recurre a los números. Si de un número mayor restamos uno menor la cantidad que obtendremos será positiva; sin embargo, si de un número menor restamos uno mayor, la cantidad que obtendremos será negativa. En otras palabras, al comparar dos números podremos saber si la cantidad resultante será negativa o positiva.

Más adelante, en el mismo texto, explica los números negativos de la siguiente manera: los números negativos se componen de la unidad tomada sustractivamente. La diferencia entre los números enteros positivos y negativos está en que los números enteros



positivos pertenecen a la aritmética y están compuestos por todas las unidades de forma aditiva, mientras que los números negativos se componen fundamentalmente de la sustracción y no hacen parte de la aritmética (Liévano, 1875).

Álgebra, de Bourdon

Elementos de álgebra, originalmente *Éléments D'Algèbre* (figura 25), de M. Bourdon, fue un texto publicado en el año 1836 en Europa y utilizado en Colombia en la segunda mitad del siglo XIX.

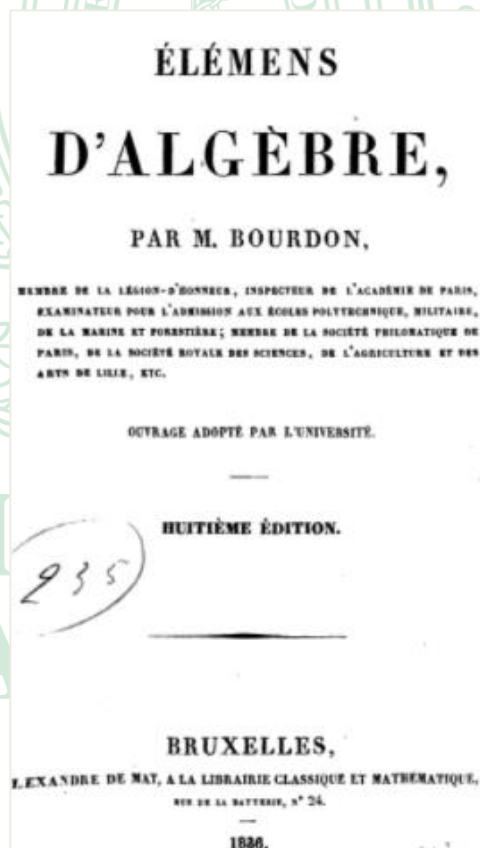


Figura 25. Portada *Éléments D'Algèbre*
Tomado de Bourdon (1836)



Presentaré el apartado que dedica el autor para abordar la teoría de los números enteros, o como “Problemas que llevan a resultados negativos. Teoría de las cantidades negativas” (Bourdon, 1836).



§ III. Problèmes qui donnent lieu à des résultats négatifs. Théorie des quantités négatives.

58. L'emploi des signes algébriques pour résoudre les problèmes donne souvent lieu à des circonstances singulières qui embarrassent



THÉORIE DES QUANTITÉS NÉGATIVES. 85

sent au premier abord; mais en y réfléchissant, on parvient à les expliquer, et même à en tirer parti pour généraliser encore davantage la langue algébrique.

Proposons-nous cette première question : Trouver un nombre qui, ajouté au nombre b , donne pour somme le nombre a .

Solution. Soit x le nombre cherché, on a évidemment pour équation,

$b + x = a$, d'où $x = a - b$.

Cette expression ou formule donnera la valeur de x , dans tous les cas particuliers du problème proposé.

Soit, par exemple, $a = 47$, $b = 29$; il vient $x = 47 - 29 = 18$.

Soit encore $a = 24$, $b = 31$; il vient $x = 24 - 31$.

Comme 31 est égal à 24 + 7, cette expression de x peut se mettre sous la forme $x = 24 - 24 - 7$, ou en réduisant, $x = -7$. Cette valeur obtenue pour x est ce qu'on appelle une solution négative. Mais comment l'interpréter?

En remontant à l'énoncé du problème, on voit qu'il est impossible que 31 augmenté d'un nombre donne pour somme 24, nombre plus petit que 31. Ainsi, aucun nombre ne peut vérifier l'énoncé, dans ce cas particulier. Cependant, si, dans l'équation du problème, $31 + x = 24$, on met à la place du terme $+ x$ la valeur négative -7 , il vient $31 - 7 = 24$, équation exacte qui veut dire que le nombre 31 diminué de 7 donne pour différence 24.



$31 + x = 24$, on met à la place du terme $+ x$ la valeur négative $- 7$, il vient $31 - 7 = 24$, équation exacte qui veut dire que le nombre 31 diminué de 7 donne pour différence 24.

La solution négative, $x = - 7$, indique donc l'impossibilité de satisfaire à l'énoncé du problème dans le sens où il a été établi; mais en considérant cette solution indépendamment de son signe, c'est-à-dire $x = 7$, on voit qu'elle satisfait à l'énoncé modifié ainsi : Trouver un nombre qui, retranché de 31, donne pour différence 24, énoncé qui ne diffère du premier : Trouver un nombre qui, ajouté à 31, donne pour somme 24, qu'en ce que le mot ajouter se trouve remplacé par le mot retrancher, et le mot somme par le mot différence.

Si l'on veut résoudre la nouvelle question directement, il n'y a qu'à poser l'équation

$$31 - x = 24, \text{ d'où } 31 - 24 = x, \text{ ou } x = 7.$$

Figura 26. Solución negativa de expresiones algebraicas – Bourdon–
Tomado de Bourdon (1836)

⁷²El uso de los signos algebraicos para resolver problemas da a menudo resultados inusuales que desconciertan, pero al reflexionarlos, podemos explicarlos y tomar ventajas para generalizar más el lenguaje algebraico.

Proponemos esta pregunta: Encontrar un número que, sumado con b , dé como resultado a .

$$b + x = a, \quad \text{o} \quad x = a - b$$

Esta expresión o fórmula le dará el valor de x en todos los casos especiales del problema propuesto.

⁷² Traducción propia. Apartado III del libro de *Éléments D'Algèbre de Bourdon*.



Por ejemplo, si $a = 47$ y $b = 29$, entonces se tiene que: $47 - 29 = 18$ o bien, si $a = 24$ y $b = 31$, tenemos $x = 24 - 31$.

Como 31 es $24 + 7$, esta expresión de x se puede poner en la forma $x = 24 - 24 - 7$, o reducir $x = -7$. Este valor obtenido se llama una solución negativa.

¿Cuál es la forma de interpretar?

Volviendo al planteamiento del problema vemos que es imposible que 31 más 24 dé un número más pequeño que el 31. Por lo tanto, no cualquier cantidad puede verificarse, como en este caso particular. Sin embargo, si en la ecuación del problema $31 + x = 24$, en lugar del término $+x$ se pone el valor negativo -7 , dando $31 - 7 = 24$. Ecuación exacta, quiere decir que el número 31 disminuido en 7 proporciona 24. La solución negativa $x = -7$, indica la imposibilidad de satisfacer el enunciado del problema en el sentido de que ha sido establecido, pero teniendo en cuenta esta solución, independientemente de su signo, es decir, $x = 7$, vemos que se satisface el enunciado de la siguiente manera: encontrar un número que restado de 31 dé por diferencia 24; esto difiere de la primera así: encontrar el número que sumado con 31 dé como resultado 24, solo se sustituye la palabra restado por sumado y diferencia por resultado.

Si uno quiere resolver de nuevo la pregunta, hay que poner la ecuación así:

$$31 - x = 24 \quad \text{o} \quad 31 - 24 = x \quad \text{o} \quad x = 7$$



C'est d'ailleurs là ce qui constitue l'un des caractères distinctifs de l'Algèbre. En Arithmétique comme en Géométrie, les raisonnements portent toujours sur des êtres réels que l'esprit peut saisir, tandis qu'en Algèbre, on raisonne et l'on opère le plus souvent sur des êtres imaginaires, ou sur des symboles présentant des opérations inexécutables; mais l'exactitude des résultats qu'on obtient par ce moyen, et auxquels on parviendrait également par des procédés plus rigoureux, mais beaucoup plus longs, justifie suffisamment la marche qu'on a suivie.

*Figura 27. Sobre el álgebra – Bourdon–
Tomado de Bourdon (1836)*

Esto es lo que constituye también uno de los caracteres distintivos del álgebra. En la aritmética y en la geometría, los argumentos se basan en objetos reales que la mente puede entender, mientras que, en el álgebra, razonamos y operamos principalmente con objetos imaginarios, o símbolos que representan las operaciones inejecutables; pero la exactitud de los resultados obtenidos por este medio, y también conseguimos procesos más rigurosos [...].

Partiendo de lo expuesto por Bourdon, puedo apreciar que su concepción frente a los números enteros negativos es más abstracta y no tiene cercanía con el contexto, es decir, la forma de hacer explícito el tema de los números enteros negativos se relaciona de forma directa con el álgebra y la solución de ecuaciones.

Hasta ahora he mostrado apartes de la inclusión de las ciencias útiles en algunas de las primeras instituciones de educación superior que había en el país en el siglo XIX; además he expuesto cómo estas ciencias se fueron incorporando al contexto añadiendo consigo



algunos textos, que tenían en sus temáticas los números enteros negativos o cantidades negativas.

Es importante, hasta aquí, no solo resaltar los libros utilizados en Santafé de Bogotá, sino también exponer los utilizados en Medellín, con el fin de comprender los enfoques que muestra la literatura y, de alguna manera, lograr establecer cuál de ellos llegó a ser tan importante dentro del contexto que apropiándose de las necesidades fue incluido al conocimiento escolar.

Textos de matemáticas utilizados en Medellín: Según Poveda (2012), los siguientes textos configuraron algunas de las cátedras de la Escuela de Minas de Medellín durante el siglo XIX.

- *Álgebra y trigonometría*, de los Hermanos Cristianos (G. M. Bruño⁷³)
- *Geometría*, de los Hermanos Cristianos (G. M. Bruño)
- *Física superior*, de Adolphe Ganot⁷⁴
- *Química*, de Wurtz⁷⁵ y los libros de Fresenius⁷⁶
- *Metalurgia*, de Percy⁷⁷

⁷³ G. M. Bruño. San Miguel Febres Cordero o Santo Hermano Miguel (Cuenca, 1854-Premiá de Mar, 1910). Religioso y educador ecuatoriano reconocido por ser autor de textos de aritmética, geometría, álgebra, lenguaje, español, literatura, entre otros.

⁷⁴ Adolphe Ganot (Rochefort, 1804-París, 1887). Autor y editor francés de libros de física.

⁷⁵ Charles Adolphe Würtz (Estrasburgo, 1817-París, 1884). Químico, político, médico y profesor francés reconocido por el estudio de la química orgánica y la reacción de hidrocarburos.

⁷⁶ Carl Remigius Fresenius (Fráncfort, 1818 -Wiesbaden, 1897). Químico alemán reconocido por los estudios en la química analítica.

⁷⁷ John Percy (Nottingham, 1817-Londres, 1889). Médico dedicado a la metalurgia reconocido por llevar a cabo investigaciones sobre los recursos del mineral del hierro.



De los textos antes mencionados daré relevancia al *Álgebra y trigonometría* de los Hermanos Cristianos (G. M. Bruño) por tener relación directa con la temática desarrollada y por abordar los números negativos a partir de ejemplos concretos.

***Álgebra y trigonometría* de los Hermanos Cristianos (G. M. Bruño):**

Álgebra y trigonometría (figura 28) fue uno de los libros más utilizados en Medellín durante el siglo XIX y comienzos del XX. Este libro fue editado en 1825 (primera mitad del siglo XIX), y utilizado para la enseñanza de la educación superior.

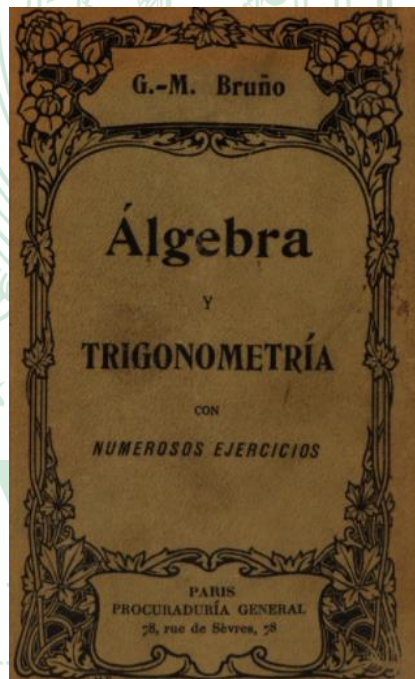


Figura 28. Portada *Álgebra y trigonometría*
Tomado de Bruño (1825)

En el libro, el autor desarrolla los números negativos (figura 29) y las cantidades negativas (figura 30), como muestro a continuación:



15. Números positivos y números negativos. — Según una convención, se llaman *números positivos* á los números precedidos del signo (+), y *números negativos* á los precedidos del signo (—).

Preciso es tener presente que aquí no indican los signos (+) ó (—) una operación que debe efectuarse, sino que sirven tan sólo para *distinguir* las dos clases de números que constituyen los números algebraicos.

Figura 29. Números positivos y negativos

Tomado de Bruño (1825)

Para Bruño, el signo (+) y el signo (—) representaba una convención para distinguir lo que él llamaba los números algebraicos de los números aritméticos. Los números algebraicos eran para el autor aquellos que estaban precedidos de un signo, los que conocemos actualmente como números enteros; mientras que los números aritméticos eran aquellos que no tenían que tener ningún signo, lo que conocemos en la actualidad (siglo XXI) por números naturales.

Con respecto a lo anterior y según lo abordado en el texto, los números enteros se han denominado en la historia como: números negativos, cantidades negativas, números algebraicos y números relativos. Cada una de estas concepciones ha sido elaborado, con el fin de encontrar una explicación coherente a ciertos fenómenos de la naturaleza en su relación con los seres humanos. A continuación, mostraré la interpretación que da Bruño a las cantidades o valores negativos (figura 30).



§ VII. — Interpretación de los valores negativos que se encuentran en la resolución de un problema.

96. La resolución de un problema conduce á veces á un valor negativo; puede decirse ordinariamente en este caso que hay incompatibilidad entre las condiciones del supuesto, y que el problema es imposible.

Sin embargo hay cantidades tales como la duración, el espacio, los grados de temperatura, etc., *que se pueden contar en dos sentidos, inverso úno de ótro* (nº 14); en este caso, la solución negativa indica que el valor encontrado por respuesta debe tomarse en sentido inverso de aquél en que primitivamente se le había considerado, á no ser que la pregunta propuesta no admita una solución de esta clase.

Sábese, por ejemplo, que el cero de la escala del termómetro centigrado corresponde á la temperatura del hielo, y que las divisiones colocadas sobre cero, en la escala, indican temperaturas superiores, en tanto que las que van indicadas bajo cero designan temperaturas inferiores. Un valor negativo de -6° , por ejemplo, encontrado en un problema significa que se deben tomar seis divisiones *bajo cero* y no sobre cero.

Figura 30. Interpretación de los valores negativos
Tomado de Bruño (1825)

La forma Bruño interpretar los valores negativos es contextualizada a las prácticas propias que se tienen en ciertos contextos, donde se muestra a modo de ejemplificación la referencia que se puede tener con respecto a la temperatura, señalando que esta puede estar por encima de cero (temperaturas superiores) y las que están por debajo de cero (temperaturas inferiores); de alguna manera, esta forma de interpretación me hace pensar en la concepción de números relativos que será abordada más adelante.



Los números enteros negativos o cantidades negativas comienzan a emerger de situaciones tan cotidianas, que su inclusión a la escuela secundaria se sustenta a partir del sentido práctico y contextual. Ejemplo de ello encontramos en (Safford, 1989):

Juan de Dios Aranzazu⁷⁸ aspiraba a crear un colegio orientado hacia lo práctico, (“Me encuentro siempre con [una de mis] ideas favoritas: un colegio en que se enseñe lenguas, muy buena aritmética y extensa geografía, teneduría de libros, minería, química y mecánica, y nada más”. “En Antioquia no deben empeñarse en educar abogados, ni médicos, sino mineros, comerciantes, agricultores y hombres de industrias productivas”). (p. 182).

A partir de la cita anterior, infiero que los números enteros negativos, vistos desde las diversas concepciones expuestas en los textos, fueron incluidos al currículo escolar por la importancia que empezaron a adquirir a nivel social, comercial y algebraico durante el siglo XIX, es decir, otra condición de posibilidad que permitió la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar fue consecuencia de la necesidad de llevar algunas prácticas sociales a la teoría y la teoría a las prácticas sociales, con la intencionalidad de potencializar la economía en el territorio.

⁷⁸ Juan de Dios Aranzazu (La Ceja, 1798-Bogotá, 1845). Político, gobernador de Antioquia entre 1832 y 1836, presidente de la República de la Nueva Granada en 1841



4. A modo de cierre: el tejido final...

*“Con cada final, inicia una obra”
Lorraine Legreen*

La pregunta que dio inicio al trabajo de investigación fue: *¿Qué condiciones de posibilidad dieron origen a la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano?* Para dar respuesta a esta pregunta, realicé un diseño metodológico a partir de un paradigma cualitativo, bajo un enfoque hermenéutico-interpretativo, donde utilicé el estudio historiográfico complementado de un análisis de contenido para darle sentido a ciertos eventos ocurridos en la historia con relación a los números enteros negativos. La producción de los datos la realicé a partir de las diversas lecturas sobre registros encontrados y analizados, referidos a historia de las matemáticas, a los números enteros negativos, a historia del currículo.

Estos registros posibilitaron ubicar la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano en el periodo temporal comprendido entre la época de la Colonia y finales del siglo XIX.

La metodología historiográfica elegida para este estudio exigió la constitución de un archivo conformado por 137 documentos, entre los que se destacan algunas tesis de doctorado, maestría, artículos de revistas indexadas, libros, memorias de congreso, entre otros. En la elaboración de este archivo, se presentaron fortalezas y debilidades con el acceso a cierta información en páginas web como la Biblioteca Virtual Luis Ángel Arango y



archive.org, y debilidades centradas en la complejidad de contar la historia de la historia sin caer en anacronismo.

De las evaluaciones otorgadas por los jurados se retoman fortalezas del trabajo investigativo frente a la contribución histórica y el fortalecimiento en la línea de investigación histórica epistemológica de la educación matemática, sin embargo, también se señalan dificultades frente a la narración historiográfica, y el tejer esa línea discontinua entre el hoy y el ayer.

No obstante, a partir del análisis de los datos se configuraron tres categorías que sirvieron para responder a la pregunta planteada, y para conocer el contexto histórico sobre los números enteros negativos en culturas heterogéneas como la india, la china y la griega. Las categorías que emergieron fueron: *“Las ciencias útiles del currículo: de las órdenes religiosas al comercio”*, *“De Lutero a la Expedición Botánica: algunas contribuciones a las ciencias útiles”* y *“La implementación de las ciencias útiles: de la universidad al currículo escolar colombiano”*.

Como bien pude indagar, desde el siglo VIII a. C, los números enteros negativos eran utilizados en algunas culturas como la india, la china o la griega, donde se centraba específicamente en dar solución a temas relacionados con deudas y fortunas, *yin/yang*, retórica y argumentación, respectivamente. En el caso del Nuevo Reino de Granada y de la Nueva Granada, los números enteros negativos se fueron introduciendo poco a poco al currículo a causa de aspectos de carácter histórico-cultural específicos.



Como consecuencia del análisis plasmado en cada categoría, respectivamente, planteo, a modo de hallazgos, que algunas condiciones de posibilidad que dieron origen a la inclusión de los números enteros negativos al currículo escolar colombiano fueron:

Distribución y adaptación de conocimientos extranjeros en el territorio.

A partir de la colonización, el Nuevo Reino de Granada, la Nueva Granada y la República de Colombia han sido un territorio consumidor de conocimientos externos. Es decir, buena parte de los saberes llevados a la escuela son traídos de otros territorios, y muchas veces (quienes los traen) solo generan una adaptación sectorizada de estos, es decir, se parte en algunos casos del desconocimiento cultural y contextual para desarrollar una “cultura propia del conocimiento”.

La historia hasta aquí narrada muestra que primero fueron las órdenes religiosas europeas quienes decidieron qué se debía enseñar y a quiénes debía enseñarse; luego, políticos y líderes protagónicos en la emancipación (por ejemplo, Bolívar y Santander) acogieron el método lancasteriano (utilizado por los ingleses) para enseñar a más personas con menos recursos invertidos. Las modificaciones en el tema educativo se siguieron introduciendo a través de misiones extranjeras que venían a compartir o imponer el conocimiento, particularmente europeo o estadounidense.

En el Nuevo Reino de Granada y la Nueva Granada hubo cierta influencia externa que ha sido interpretada por parte de algunos autores, ya mencionados, como una limitante para el desarrollo académico e investigativo de la población colombiana; sin embargo, esta influencia también ha permitido crear en la sociedad una concepción de la creación de conocimientos a partir de la interculturalidad, donde no se habla de una única historia ni una



única posibilidad, sino que se habla de múltiples escenarios donde una diversidad de culturas y sociedades teje una historia propia para su entorno. Asumiendo esa concepción, puedo decir que las matemáticas, particularmente los números enteros negativos, vistos desde esta perspectiva, pueden llegar a tener múltiples representaciones, lenguajes o símbolos y, aun así, tener un significado común que tiene relación con las interpretaciones del mundo y necesidades sociales que se van generando en los distintos territorios.

Influencia de algunas corrientes europeas sobre desarrollo antropocéntrico y la necesidad del reconocimiento territorial para potenciar la economía en el territorio.

La llegada de los números enteros negativos al territorio del Nuevo Reino de Granada puede verse como una consecuencia del desarrollo científico que se estaba dando a nivel mundial, y que fue traído por algunos personajes célebres de la historia del país con el fin de propagar algunos de los ideales del periodo de la Ilustración.

Como parte de ese desarrollo científico, que tomó fuerza con la reforma protestante y se renovó con la Ilustración, se empezó a generar un desplazamiento del teocentrismo al antropocentrismo que hizo que algunos pobladores del Nuevo Reino de Granada se preocuparan por explorar y entender el mundo, y como consecuencia de ello, se empezaron a desarrollar algunos planes y expediciones para modificar lo que se debía enseñar, y así potenciar la economía, el conocimiento guiado desde la razón y el reconocimiento del territorio. Como ya lo mencionara Herrera (1993, p. 3): “(...) Algunos grupos de intelectuales empezaron a ser receptivos a nuevas formas de pensamiento y propiciaron la renovación en el campo científico, literario, artístico y educativo, entrando en contacto con las corrientes modernas del pensamiento universal de ese momento”.



Dentro de ese grupo de intelectuales se encontraron dos de los integrantes de la Real Expedición Botánica, José Celestino Mutis y Francisco José de Caldas. Estos dos personajes, lucharon por la implementación e incorporación de las ciencias útiles al territorio del Nuevo Reino de Granada. Mutis lo hizo a partir de las cátedras que daba y, posteriormente, desde el estudio de la botánica. Caldas, desde la experimentación, la geografía, la meteorología y la enseñanza, donde utilizaba los números enteros negativos como una convención para la comparación entre medidas.

A partir del proceso investigativo llevado a cabo, opinaría que los números enteros negativos empezaron a incorporarse al currículo colombiano a partir de la evolución científica y la influencia de algunas corrientes europeas con el fin de desarrollar las ciencias útiles para el reconocimiento de ciertos fenómenos naturales, en la implementación de algunos estudios para la explotación minera y el reconocimiento territorial con miras hacia la emancipación que se lograría en 1810.

Necesidad de llevar lo práctico a lo teórico y lo teórico a lo práctico para potenciar la economía en el territorio.

Esta tercera condición muestra un asunto bidireccional entre lo práctico y lo teórico, es decir, lo que se buscaba desde la Colonia hasta la segunda mitad del siglo XIX era relacionar de forma directa los asuntos cotidianos con los planteamientos matemáticos que se iban conociendo y desarrollando para potenciar la economía del territorio. En los registros y datos analizados pude observar ejemplos destinados al comercio, la agricultura y en algunos casos a las temperaturas (como en el texto de G. M. Bruño) conocido por su énfasis práctico. No obstante, se empezaría a conocer años después (1950) un proyecto integrador, llamado



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

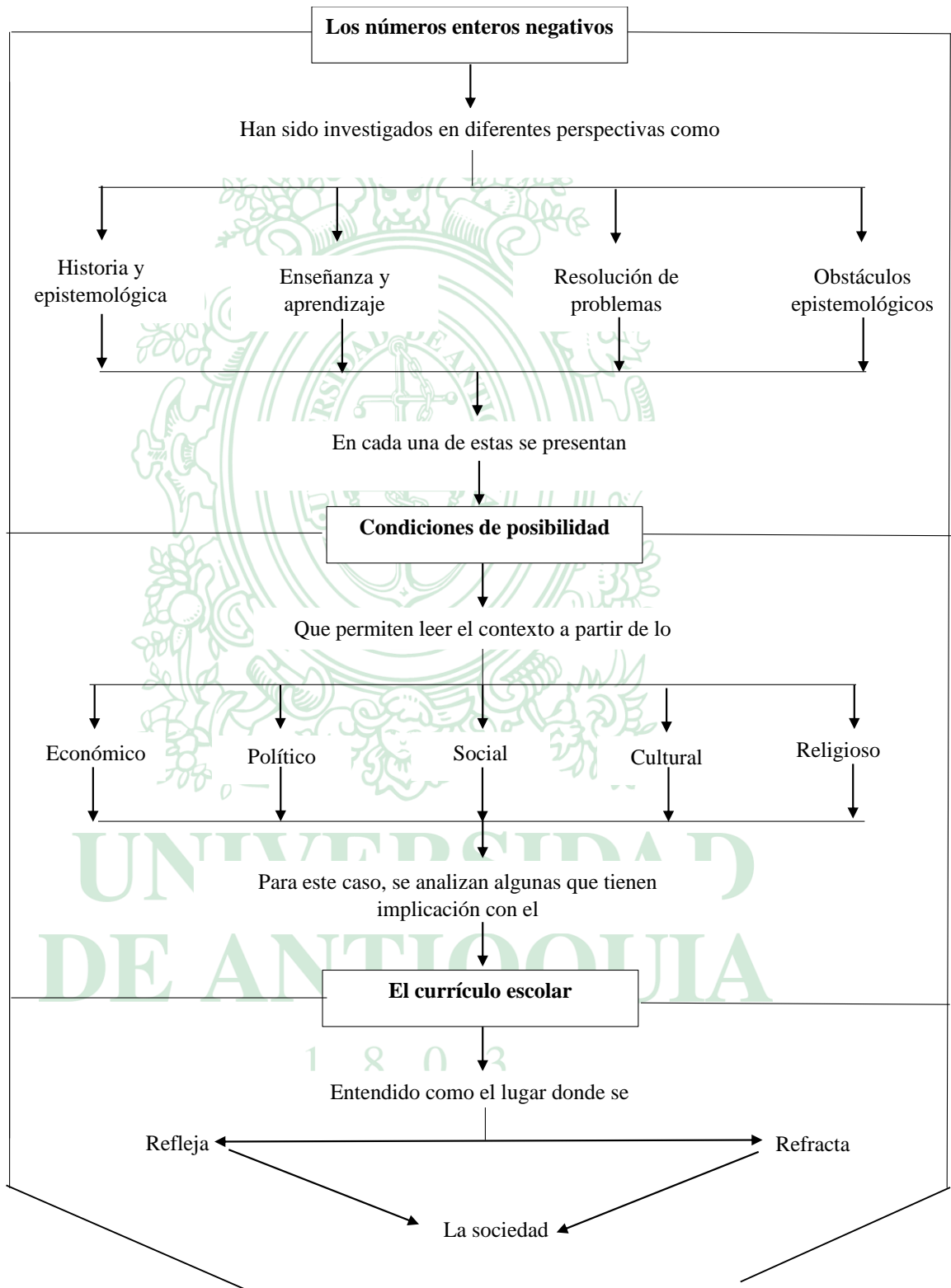
currículo donde no se resaltarían el aspecto matemático (abstracto) y el aspecto práctico (cotidiano) por separado. El currículo tendría como fin favorecer el pensamiento comprensivo entre la teoría y la práctica en un contexto sociocultural (Cazares, 2008), es decir, este sería una pieza donde enlazarían las construcciones sociales desde sus prácticas cotidianas e intelectuales.

A continuación, presento un mapa conceptual (Figura 31), de mi autoría, que resume la investigación desarrollada.



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3





A partir de lo anterior, se genera la siguiente
pregunta de investigación

**¿Qué condiciones de posibilidad permitieron la
inclusión de los números enteros negativos al currículo
escolar colombiano?**

Y se concluye que algunas son

Distribución y adaptación de conocimientos
extranjeros en el territorio

Influencia de algunas corrientes europeas sobre el desarrollo antropocéntrico y la
necesidad del reconocimiento territorial

Necesidad de llevar lo práctico a lo teórico y lo teórico a
lo práctico para potenciar la economía en el territorio

Figura 31. Mapa conceptual de la investigación

Los números enteros negativos han sido investigados a través del tiempo desde varias perspectivas como lo son: la histórica, la epistemológica, la enseñanza y el aprendizaje, la resolución de problemas y a partir obstáculos epistemológicos y lógico formales que están implícitos en la temática. Cada una de estas miradas del objeto (números enteros negativos), se enmarcan en unas condiciones de posibilidad, que son entendidas en esta investigación como la lectura que se le puede dar al contexto en un momento determinado, específicamente a nivel económico, político, social, cultural y religioso. Para este caso, el interés investigativo se ubicó en analizar qué condiciones de posibilidad permitieron la inclusión de los números



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

enteros negativos al currículo escolar colombiano, entendiéndose este como un espacio que refleja o refracta lo producido a nivel social.

A partir de lo anterior, se llegó a las siguientes conclusiones: Distribución y adaptación de conocimientos extranjeros en el territorio, influencia de algunas corrientes europeas sobre el desarrollo antropocéntrico y la necesidad del reconocimiento territorial y necesidad de llevar lo práctico a lo teórico y lo teórico a lo práctico para potenciar la economía en el territorio.



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



5. Referencias bibliográficas

- Abad, E., Monistrol, O., Altarribas, E. y Paredes, A. (2003). Lectura crítica de la literatura científica. *Enfermería clínica*, 13(1), pp. 38-46. Recuperado de http://www.index-f.com/campus/ebe/ebe3/ebe_revision_critica_ec.pdf
- Agudelo, P. (2011). (Des)hilvanar el Sentido/los Juegos de Penélope. Una Revisión del Concepto Imaginario y sus Implicaciones Sociales. *Revista Uni-Plur/Versidad*, 11(3), pp. 1-18. Recuperado de <http://aprendeonline.udea.edu.co/revistas/index.php/unip/issue/view/2220>
- Aguilera, M. (1992). Andrés Díaz de Leiva: Primer Presidente y Organizador del Nuevo Reino de Granada. *Revista Credencial Historia*, 32. Recuperado de <http://www.banrepcultural.org/node/32355>
- Ahern, E. (1991). El Desarrollo de la Educación en Colombia 1820-1850. *Revista Colombiana de Educación* pp. 22-23. Recuperado de www.pedagogica.edu.co/storage/rce/articulos/rce22-23_04arti.pdf
- Araujo, D. (1877). *Tratado de Álgebra*. Cartagena, Colombia: Imprenta del Colegio. Recuperado de <http://repositorio.uniatlantico.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/254>
- Araujo, D. (1877). *Tratado de Álgebra*. [Figura]. Recuperado de <http://repositorio.uniatlantico.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/254>
- Arboleda, L. (2016). Caldas, Matematización de la Naturaleza y Sentimiento Telúrico. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat*, 40 (154), 6-7. Recuperado de <http://www.scielo.org.co/pdf/racefn/v40n154/v40n154a01.pdf>



Bagazgoitia, A. (2007). La Belleza en Matemáticas. *Sigma*, 31, 133-151. Recuperado de

http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/eu/contenidos/informacion/dia6_sigma/eu_sigma/adjuntos/sigma_31/11_la_belleza.pdf

Bails, B. (1779). *Elementos de Matemáticas*. Madrid, España: Impresor de Cámara de S. M.

Recuperado de https://books.google.com.co/books?id=A8cUbrJPBQAC&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Bails, B. (1779). *Elementos de Matemáticas*. [Figura]. Recuperado de

https://books.google.com.co/books?id=A8cUbrJPBQAC&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Bardin, L. (1986). *El Análisis de Contenido*. Madrid, España: Ediciones Akal. Recuperado

de https://books.google.com.co/books?id=lvhoTqllEQC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Bateman, F. (1982). Apuntes Históricas Sobre la Facultad de Ingeniería. *Ingeniería e Investigación*, (2), pp. 10-13. Recuperado de

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4902521>

Bell, A. (1986). Enseñanza por Diagnóstico. Algunos Problemas sobre Números Enteros.

Investigación y Experiencias Didácticas, 4 (3), pp. 199-208. Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a1986v4n3/edlc_a1986v4n3p199.pdf



Bergeron, A. (1848). *Lecciones de Matemáticas. Parte primera*. Bogotá, Colombia: Imprenta

de Ancízar. Recuperado de

https://books.google.com.co/books?id=yG1aAAAacAAJ&pg=PA3&dq=lecciones+de+matem%C3%A1ticas&hl=es-419&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=cantidades%20negativas&f=false

Bergeron, A. (1848). *Lecciones de Matemáticas. Parte primera*. [Figura]. Recuperado de

https://books.google.com.co/books?id=yG1aAAAacAAJ&pg=PA3&dq=lecciones+de+matem%C3%A1ticas&hl=es-419&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=cantidades%20negativas&f=false

Bourdon, M. (1837). *Éléments D'algèbre [Elementos de álgebra]*. Paris, Francia :

Imprimeur-Libraire. Recuperado de

<https://books.google.com.co/books?id=Ixdw4FGfow4C&pg=PA1&dq=Bourdon+1837&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjJwre5qavXAhXBWSYKHS3gBsc4ChDoAQhMMAU#v=onepage&q=Bourdon%201837&f=false>

Bourdon, M. (1837). *Eléments D'algèbre*. [Figura]. Recuperado de

<https://books.google.com.co/books?id=Ixdw4FGfow4C&pg=PA1&dq=Bourdon+1837&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjJwre5qavXAhXBWSYKHS3gBsc4ChDoAQhMMAU#v=onepage&q=Bourdon%201837&f=false>

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. New York, United States of America: John

Wiley & Sons, Inc.

Bruño, G. (1825). *Álgebra y Trigonometría*. París, Francia: Procuraduría General.

Recuperado de



<https://books.google.com.co/books?id=E8xenT0ArwEC&printsec=frontcover&dq=Bru%C3%B1o+1825&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjs0sbdqqvXAhVD7iYKHcWODVAQ6AEIJDA#v=onepage&q=Bru%C3%B1o%201825&f=false>

Bruño, G. (1825). *Álgebra y Trigonometría*. [Figura]. Recuperado de

<https://books.google.com.co/books?id=E8xenT0ArwEC&printsec=frontcover&dq=Bru%C3%B1o+1825&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjs0sbdqqvXAhVD7iYKHcWODVAQ6AEIJDA#v=onepage&q=Bru%C3%B1o%201825&f=false>

Caldas, F. (1849). *Semanario de la Nueva Granada. Miscelanea de Ciencias, Literatura, Artes é Industria*. París, Francia: Lasserre, editor. Recuperado de

[https://books.google.com.co/books?id=PIU3AQAAMAAJ&pg=PA31&lpg=PA31&dq=Yo+ruego+%C3%A1+los+encargados+de+la+educacion+p%C3%ABblica+mediten+y+pesen+si+es+mas+ventajoso+al+Estado+y+%C3%A1+la+Religion+gastar+muchas+semanas+en+sostener+sistemas+a%C3%A9reos,+y+ese+monton+de+materias+f%C3%BAtiles+%C3%B3+meramente+curiosas,+que+dedicar+este+tiempo+%C3%A1+conocer+nuestro+globo+y+el+pais+que+habitamos.+\(&source=bl&ots=gkVepWVpbN&sig=Z6_1-CpOac-DfstULdTv3SjaAM4&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjto_mOuKvXAhXFQCYKHYX6BQIQ6AEIJDA#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.co/books?id=PIU3AQAAMAAJ&pg=PA31&lpg=PA31&dq=Yo+ruego+%C3%A1+los+encargados+de+la+educacion+p%C3%ABblica+mediten+y+pesen+si+es+mas+ventajoso+al+Estado+y+%C3%A1+la+Religion+gastar+muchas+semanas+en+sostener+sistemas+a%C3%A9reos,+y+ese+monton+de+materias+f%C3%BAtiles+%C3%B3+meramente+curiosas,+que+dedicar+este+tiempo+%C3%A1+conocer+nuestro+globo+y+el+pais+que+habitamos.+(&source=bl&ots=gkVepWVpbN&sig=Z6_1-CpOac-DfstULdTv3SjaAM4&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjto_mOuKvXAhXFQCYKHYX6BQIQ6AEIJDA#v=onepage&q&f=false)

Caldas, F. (1966). Ensayo de una memoria sobre un nuevo método de medir la altura de las montañas por medio del termómetro y el agua hirviendo, seguida de un apéndice, por don Francisco José de Caldas. En: *Obras completas de Francisco José de Caldas: publicadas por la Universidad Nacional de Colombia como homenaje con motivo del*



sesquicentenario de su muerte 1816 - octubre 29-1966. Imprenta Nacional, Bogotá,

pp. 153-173. Recuperado de

http://www.bdigital.unal.edu.co/92/1/ensayo_de_una_memoria_sobre_un_nuevo_metodo_de%20medir_la_altura_de_las_montañas_por_medio_del_termometro_y_el_agua_hirviendo_seguida_de_un_apendice_por_don_francisco_jose_de_caldas.pdf

Caldas, F. (1966). *Ensayo de una memoria sobre un nuevo método de medir la altura de las montañas por medio del termómetro y el agua hirviendo, seguida de un apéndice, por don Francisco José de Caldas*. [Figura]. Recuperado de

http://www.bdigital.unal.edu.co/92/1/ensayo_de_una_memoria_sobre_un_nuevo_metodo_de%20medir_la_altura_de_las_montañas_por_medio_del_termometro_y_el_agua_hirviendo_seguida_de_un_apendice_por_don_francisco_jose_de_caldas.pdf

Caraça, B. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática.

Cardoso, N. (2001). Los textos de lectura en Colombia. Aproximación histórica e ideológica.

Revista Educación y Pedagogía, 13(29-30), pp. 131-142. Recuperado de <https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:rwRc0ZNHcJIJ:https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/download/7512/6915+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=co>

Carr, E. (1982). *O Historiador e seus fatos. Que é História?* Rio de Janeiro, Brasil: Paz e

Terra. Recuperado de <http://oficiodahistoria.blogspot.com.co/2008/04/parte-1-que-historia-edward-hallet-carr.html>



Carrillo, F. (2003). Álgebra India. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 2(1), pp. 5-10.

Recuperado de <http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-1-india.pdf>

Carvajal, J. (2004). Guía para el análisis crítico de publicaciones científicas. *Rev Chil Obstet Ginecol*, 69 (1), pp. 67-72. Recuperado de

<http://www.scielo.cl/pdf/rchog/v69n1/art14.pdf>

Cassany, D. (2003) “Aproximaciones a la lectura crítica: teoría, ejemplos y reflexiones”.

Tarbiya, (32), pp. 113-132. Recuperado de <http://media.utp.edu.co/referencias-bibliograficas/uploads/referencias/articulo/292-aproximacin-a-la-lectura-crtica-teora-ejemplos-y-reflexionespdf-YdvEr-articulo.pdf>

Castillo, C. (2014). Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos. (Tesis de maestría). Universidad Nacional, Colombia. Recuperado de

<http://www.bdigital.unal.edu.co/47573/1/94442425%20Cesar.pdf>

Castro, P. (2009). La Reforma Luterana: el problema de la ruptura. Una mirada a la imagen de Lutero y la destrucción de la unidad. *Revista Electrónica Historias del Orbis*

Terrarum, 3, pp. 105-114. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3622261.pdf>

Castro, F. y otros. (2004). Currículum y Evaluación. Universidad del Bío-Bío. Recuperado de

<http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:UScIrsCZK2oJ:ecaths1.s3.amazonaws.com/diseniocurricular011/902167451.ConcepcionesCurricularesBIOBIO.pdf+&cd=6&hl=es&ct=clnk&gl=co>



- Cazares, M. (2008). Una reflexión teórica del currículum y los diferentes enfoques curriculares. Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/article-170863.html>
- Ceballos, D. (1962). *Moreno y Escandón, Francisco Antonio*. Biografías. Recuperado de <http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/biografias/morefran.htm>
- Cid, E. (2000). Obstáculos Epistemológicos en la Enseñanza de los Números Negativos. *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, pp. 1-15. Zaragoza. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf>
- Colmenares, G. (1972). *Problemas de la Estructura Minera en la Nueva Granada (1550-1700)*. *Anuario Colombiano de Historia Social y de la Cultura*. Universidad Nacional de Colombia, 6-7, pp. 5-56. Recuperado de <http://revistas.unal.edu.co/index.php/achsc/article/view/36334>
- Constaín, J. (2017, 8 de enero). Se cumplen 500 años de la reforma que le cambió la cara al mundo. *El Tiempo*. Recuperado de <http://www.eltiempo.com/cultura/gente/biografia-de-martin-lutero-en-los-500-anos-de-la-reforma-46480>
- Cortés, J. (2003). La Expulsión de los Jesuitas de la Nueva Granada como Clave de Lectura del Ideario Liberal Colombiano de Medios del Siglo XIX. *Anuario Colombiano de Historia Social y de la Cultura*, 30, 199-238. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/20861/1/17095-54031-1-PB.pdf>



Cote, J. (2010, 6 de noviembre). Las universidades. *Revista Semana*. Recuperado de

<http://www.semana.com/especiales/articulo/las-universidades/108991-3>

D'Ambrósio, U. (1999). A História da Matemática: Questões Historiográficas e Políticas e

Reflexos na Educação Matemática (ed.). En *Pesquisa em Educação Matemática:*

Concepções & Perspectivas, pp. 97-115. São Paulo: Editora UNESP.

Dávila, J. (2010). Ciencias útiles y planes de estudio de la Nueva Granada. Método racional

y Canon Wolffiano en la filosofía escolar neogranadina (1762-1826). (Tesis de

Maestría). Pontificia Universidad Javeriana. Colombia. Recuperado de

<https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/1477/DavilaDavilaJuan>

[Manuel2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/1477/DavilaDavilaJuanManuel2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Denzin, N. y Lincoln, Y. S. (2012). *Manual de Investigación Cualitativa*. Barcelona:

Gedisa, S. A.

De Torres, A. (1797). *Cartilla Lacónica*. Santafé de Bogotá, Nuevo Reyno de Granada:

Imprenta Patriótica. Recuperado de [http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-](http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/1797%20-%20Cartilla%20Laconica%20de%20las%20quatro%20reglas%20de%20aritmetica%20practica.pdf)

[content/uploads/2015/12/1797%20-](http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/1797%20-%20Cartilla%20Laconica%20de%20las%20quatro%20reglas%20de%20aritmetica%20practica.pdf)

[%20Cartilla%20Laconica%20de%20las%20quatro%20reglas%20de%20aritmetica](http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/1797%20-%20Cartilla%20Laconica%20de%20las%20quatro%20reglas%20de%20aritmetica%20practica.pdf)

[%20practica.pdf](http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/1797%20-%20Cartilla%20Laconica%20de%20las%20quatro%20reglas%20de%20aritmetica%20practica.pdf)

De Torres, A. (1797). *Cartilla Lacónica*. [Figura]. Recuperado de

[http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/1797%20-](http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/1797%20-%20Cartilla%20Laconica%20de%20las%20quatro%20reglas%20de%20aritmetica%20practica.pdf)

[%20Cartilla%20Laconica%20de%20las%20quatro%20reglas%20de%20aritmetica](http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/1797%20-%20Cartilla%20Laconica%20de%20las%20quatro%20reglas%20de%20aritmetica%20practica.pdf)

[%20practica.pdf](http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/1797%20-%20Cartilla%20Laconica%20de%20las%20quatro%20reglas%20de%20aritmetica%20practica.pdf)

Díaz, E. (2005). *La Filosofía de Michel Foucault*. Buenos Aires: Biblos.



- Díaz, H. (2015). La Ley de Signos: Una Propuesta para la Enseñanza-Aprendizaje de la Multiplicación de Números Enteros. (Tesis de maestría). Universidad Nacional, Colombia. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/51415/1/28061173.2015.pdf>
- Díaz, H. (2015). La Ley de Signos: Una Propuesta para la Enseñanza- Aprendizaje de la Multiplicación de Números Enteros. [Figura]. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/51415/1/28061173.2015.pdf>
- Díaz, S. (2009). La Real Expedición Botánica. *Revista Credencial Historia*, 240. Recuperado de <http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/revistas/credencial/diciembre2009/botanica.htm>
- Díaz, S. y Valencia, L. (2010). Confidencias de un estadista: epistolario de Lino de Pombo con su hermano Cenón, 1834-1877. Bucaramanga, Colombia: Colección Bicentenario. Recuperado de <https://www.uis.edu.co/webUIS/es/bicentenario/documentos/CTP%20CONFIDENCIAS%20MARZO%2009.pdf>
- Di Franco, M. (2012). El currículum y las prácticas de educar. *Práxis educativa*, 3, pp. 58-58. Recuperado de <http://www.biblioteca.unlpam.edu.ar/pubpdf/praxis/n03a08difranco.pdf>
- Erice, F. (2013). *La Concepción Materialista de la Historia: El Materialismo Histórico*. Madrid, España: Comité Federal, Secretaría de Formación. Recuperado de <http://www.pce.es/descarga/formacionpce6.pdf>



- Falgueras, I. (1988). Ideas Filosóficas de la Ilustración. Colección Torre de los Lujanes (Carlos III y la Ilustración I Cátedra Campomanes. RSE Matritense de Amigos del País. Recuperado de http://webpersonal.uma.es/~jifalgueras/Historia/Historia/Kant_files/block_0/Ilustracion.pdf
- Figueroa, M. (2011). La reforma protestante y la escuela popular moderna. (Tesis Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, México. Recuperado de <http://200.23.113.51/pdf/27882.pdf>
- Foucault, M. (2002). *La arqueología del saber*. Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI Editores. Recuperado de https://monoskop.org/images/b/b2/Foucault_Michel_La_arqueologia_del_saber.pdf
- Fleury, C. (1876). *Catecismo Histórico*. Bogotá, Colombia: Imprenta a cargo de Enrique Zalamea. Recuperado de <http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/religion/catecismo-historico>
- Fleury, C. (1876). *Catecismo Histórico*. [Figura]. Recuperado de <http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/religion/catecismo-historico>
- Garay, A. (2012). Estudio de Caso: Francisco José de Caldas. *Revista EDUCyT, Extraordinario*, pp. 34-42. Recuperado de <http://sociedadyeconomia.univalle.edu.co/index.php/educyt/article/view/2054>
- García, B. (2005). La Educación Colonial en la Nueva Granada: Entre lo Doméstico y lo Público. *Rhela*, 7, pp. 217-238. Recuperado de www.redalyc.org/articulo.oa?id=86900712



Gallardo, A. y Rojano, T. (1990). Los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones algebraicas. Un análisis histórico-epistemológico. Congreso

Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla, España: SAEM Thales.

Recuperado de

<http://www.teresarojano.net/system/files/articulos/los%20numeros%20negativos.pdf>

Galvis, A. (1982). La abolición de la esclavitud en la Nueva Granada (1820-1852).

Recuperado de [http://www.urosario.edu.co/Archivo-](http://www.urosario.edu.co/Archivo-Historico/Convocatorias/Documentos/revistas/La-abolicion-de-la-esclavitud-en-la-Nueva-Granada/)

[Historico/Convocatorias/Documentos/revistas/La-abolicion-de-la-esclavitud-en-la-](http://www.urosario.edu.co/Archivo-Historico/Convocatorias/Documentos/revistas/La-abolicion-de-la-esclavitud-en-la-Nueva-Granada/)

[Nueva-Granada/](http://www.urosario.edu.co/Archivo-Historico/Convocatorias/Documentos/revistas/La-abolicion-de-la-esclavitud-en-la-Nueva-Granada/)

González, A. (1992). *Historia de la Ciencia y de la Técnica*. Madrid, España: Ediciones Akal,

S. A. Recuperado de

https://books.google.com.co/books?id=_TgFtFARX60C&pg=PA38&dq=Historia+de+la+Ciencia+y+de+la+T%C3%A9cnica&hl=es-

[419&sa=X&ved=0ahUKEwi6jIGor9TTAhWM7SYKHVfAARI4ChDoAQg8MAU](https://books.google.com.co/books?id=_TgFtFARX60C&pg=PA38&dq=Historia+de+la+Ciencia+y+de+la+T%C3%A9cnica&hl=es-419&sa=X&ved=0ahUKEwi6jIGor9TTAhWM7SYKHVfAARI4ChDoAQg8MAU)

[#v=onepage&q=Historia%20de%20la%20Ciencia%20y%20de%20la%20T%C3%A9cnica&f=false](https://books.google.com.co/books?id=_TgFtFARX60C&pg=PA38&dq=Historia+de+la+Ciencia+y+de+la+T%C3%A9cnica&hl=es-419&sa=X&ved=0ahUKEwi6jIGor9TTAhWM7SYKHVfAARI4ChDoAQg8MAU#v=onepage&q=Historia%20de%20la%20Ciencia%20y%20de%20la%20T%C3%A9cnica&f=false)

González-Calderón, C.; Posada, J. y Córdoba, J. (2012). Ingeniería civil en la Facultad de minas: 100 años de excelencia (1911-2011). *Dyna*, Edición especial, pp. 4-13.

Recuperado de

[http://tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/7675/1/GonzalesCarlos_2012_IngenieriaCi](http://tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/7675/1/GonzalesCarlos_2012_IngenieriaCivilFacultad.pdf)
[vilFacultad.pdf](http://tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/7675/1/GonzalesCarlos_2012_IngenieriaCivilFacultad.pdf)



González, J. (1998). *Números Naturales Relativos*. Granada: COMARES

González, J.; Iriarte, M.; Jimeno, M.; Ortiz, A.; Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1990). *Números enteros*. Madrid, España: Síntesis

Gutiérrez, C. (2010). Las reformas borbónicas, Santo Domingo y el comercio con los puertos del Caribe, 1700-1750. *Revista digital de Historia y Arqueología desde el Caribe colombiano*, 12, pp. 4-31. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=85514493003>

Gutiérrez de Alba, J. (1874). *Indio Carguero entre Honda y Bogotá*. [Figura]. Recuperado de <http://www.banrep.gov.co/impresiones-de-un-viaje/index.php/laminas/view?id=303>

Glaeser, G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), pp. 303-346. Recuperado de <http://rdm.penseesauvage.com/Epistemologie-des-nombres-relatifs.html>

Hamilton, D. y Gibbons, M. (1980). Notes on the Origins of the Educational Terms Class and Curriculum. Paper presented at the Annual Convention of the American Educational Research Association.

Harnecker, M. (1976). *Los Conceptos Elementales del Materialismo Histórico*. España: Siglo XXI editores S.A. Recuperado de http://elsarbresdefahrenheit.net/documentos/obras/705/ficheros/Harnecker_Marta_Los_conceptos_elementales_del_materialismo_historico_completo_220pag_.pdf



- Heffer, A. (2008). Negative Numbers as an Epistemic Difficult Concept: Some Lessons from History, 1-13. Recuperado de <http://logica.ugent.be/albrecht/thesis/HPM2008.pdf>
- Herrera, M. (1993). Historia de la Educación en Colombia. La República Liberal y la Modernización de la Educación: 1930-1946. Recuperado de http://www.pedagogica.edu.co/storage/rce/articulos/rce26_06ensa.pdf
- Hettener, A. (1976). *Viajes por los Andes colombianos (1882-1884)*. Bogotá: Talleres Gráficos del Banco de la República. Recuperado de <http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/historia/viaand/indice.htm>
- Imparato-Prieur, S. (2000). La Enseñanza de las Primeras Letras en España en la Segunda Mitad del Siglo XVIII: Contenidos y Métodos a Través de Algunos Tratados de Enseñanza. *Contextos Educativos*, 3, pp. 235-252. Recuperado de <https://publicaciones.unirioja.es/ojs/index.php/contextos/article/view/424/391>
- Iriarte, M.; Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros, *Suma*, 7, pp. 13-18. Recuperado de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/7/013-018.pdf>
- Lacroix, S. (1821). *Curso Completo Elemental de Matemáticas Puras. Tomo II* [Traducido por D. Josef Rebollo y Morales]. Madrid, España: Imprenta Real. Recuperado de <https://books.google.com.co/books?id=JrNi-FgfS9cC&pg=PA434&dq=elementos+de+algebra+de+lacroix&hl=es-419&sa=X&ved=0ahUKEwi7xvie9t3YAhUM11MKHZTLAU0Q6AEIJjAA#v=onepage&q&f=false>



Liévano, I. (1856). *Tratado Elemental de Aritmética*. Bogotá, Colombia: Imprenta de Echeverría Hermanos. Recuperado de

<https://books.google.com.co/books?id=JWtaAAAACAAJ&printsec=frontcover&dq=inauthor:%22Indalecio+LIEVANO%22&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwj2wJScsqzXAhXKSSYKHQ79D3oQ6AEILDAB#v=onepage&q&f=false>

Liévano, I. (1856). *Tratado Elemental de Aritmética*. [Figura]. Recuperado de

<https://books.google.com.co/books?id=JWtaAAAACAAJ&printsec=frontcover&dq=inauthor:%22Indalecio+LIEVANO%22&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwj2wJScsqzXAhXKSSYKHQ79D3oQ6AEILDAB#v=onepage&q&f=false>

Liévano, I. (1875). *Tratado de Álgebra*. Bogotá, Colombia: Imprenta de Medardo Rivas.

Recuperado de <http://www.banrepcultural.org/sites/default/files/brblaa1017585.pdf>

Liévano, I. (1875). *Tratado de Álgebra*. [Figura]. Recuperado de

<http://www.banrepcultural.org/sites/default/files/brblaa1017585.pdf>

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y Grecia*: Gedisa. MEC.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y Grecia* [Figura].

Lizcano, E. (2003). Imaginario colectivo y análisis metafórico. *Transcripción de la conferencia inaugural del primer Congreso Internacional de Estudios sobre Imaginario y Horizontes Culturales, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, México*. Recuperado de

http://www.unavarra.es/puresoc/pdfs/c_salaconfe/SC-Lizcano-2.pdf



- López, F. (2002). El Análisis de Contenido como Método de Investigación. *XXI Revista de Educación*, (4), pp. 167-179. Recuperado de <http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/1912/b15150434.pdf>
- López, M. (2005). Oriente y Occidente en la Formación de la Ciencia Matemática. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís.Nat. (Esp)*, 99(1), pp. 1-26. Recuperado de <http://www.rac.es/ficheros/doc/00444.pdf>
- Luna, E. y López, G. (2011). El currículo: concepciones, enfoques y diseño, *Revista Unimar*, 58, pp. 65-76. Recuperado de www.umariana.edu.co/ojs-editorial/index.php/unimar/article/download/217/193
- Maca, A. (2016). La Enseñanza de los Números Enteros, un Asunto sin Resolver en las Aulas. (Tesis de maestría). Universidad de Manizales, Colombia. Recuperado de <http://ridum.umanizales.edu.co:8080/xmlui/bitstream/handle/6789/2640/TRABAJO%20FINAL%20MAESTR%C3%8DA%20LA%20ENSE%20C3%91ANZA%20DE%20LOS%20NUMEROS%20ENTEROS%20UN%20ASUNTO%20SIN%20RESOLVER%20EN%20LAS%20AULAS.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Maglio, F. (27 de diciembre de 2017). Escuela de los Annales. Recuperado de http://www.martinmaglio.com.ar/0_Ter_4_EDI/Material/130-anales.pdf
- Maldonado, Á. (2010). Los tesauros como herramienta fundamental en la descripción y recuperación de documentos electrónicos. En: XVIII Jornadas de Archivos Municipales, pp. 175-191. Recuperado de <http://digital.csic.es/bitstream/10261/33890/1/x18%20TesaurosJornadasArchivos.pdf>



Mantilla, L. (2010). El Ideario de las Órdenes Religiosas en la Independencia de Colombia.

Revista Credencial Historia, 248, pp. 2-9. Recuperado de

<http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/revistas/credencial/agosto2010/ideario.htm>

Martínez, A., Noguera, C. y Castro, J. (1995). *Crónica del Desarraigo, Historia del maestro en Colombia*. Santafé de Bogotá: Mesa Redonda Magisterio.

Marx, K. (1852). El 18 brumario de Luis Bonaparte, *Revista Die Revolution*, New York.

Recuperado de

<http://sgpwe.izt.uam.mx/pages/egt/Cursos/TeoSocClal/5El18Brumario.pdf>

Mayer, B. (2009). El origen de la historiografía: historicidad, escritura y plus-de-goce.

Psicología y Sociedad, 21, pp. 43-50. Recuperado de

<http://www.scielo.br/pdf/psoc/v21nspe/v21nspea08.pdf>

Maz, A. (2005). Los Números Negativos en España en los Siglos XVIII y XIX. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada. Recuperado de

<http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/15378184.pdf>

Melo, J. (1996). *Historiografía colombiana. Realidades y perspectivas*. Medellín, Antioquia.

Recuperado de

<http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/362/1/HistoriografiaColombiana.pdf>

Metaxas, E. (2017). The Real Story of the Reformation. [Figura]. Recuperado de

<https://www.wsj.com/articles/the-real-story-of-the-reformation-1509402785>



Miguel, A. y Miorim, M. (2005). *História na Educação Matemática: Propostas e Desafios*.

Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá:

Magisterio. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Morales de Mosquera, L. (2002). Coronel Francisco José de Caldas, un Investigador Pionero de la Ingeniería Colombiana. *Revista Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 12, pp. 81-

84. Recuperado de <https://revistas.unimilitar.edu.co/index.php/rcin/article/viewFile/1347/1075>

Moreno y Escandón, F. (1774). Método Provisional de Estudios de Santa Fe de Bogotá para los Colegios. UNESCO.

Mörner, M. (1965). Los Motivos de la Expulsión de los Jesuitas del Imperio Español.

Historia Mexicana, 16(1), pp. 1- 14. Recuperado de <http://aleph.academica.mx/jspui/bitstream/56789/29724/1/16-061-1966-0001.pdf>

Muriel, R. (2009). *Colombia: Comercio y Transportes 1850-1929*. Medellín, Colombia:

Editorial Pi. Recuperado de <http://www.editorialpi.net/obras/colombiacomercioytransportes.pdf>

Nordstokke, J. (2016). *La iglesia y el espacio público. Una interpretación luterana*. En:

Libres por la gracia de Dios, pp. 27-31. Alemania: La Federación Luterana Mundial.

Recuperado de http://www.ciando.com/img/books/extract/3374044603_lp.pdf



- Ocampo, J. (1999). Las Huellas de Mutis y Humboldt en la Ciencia y la Educación Colombianas. *Revista Historia de la Educación Colombiana*, 2, 11-41. Recuperado de http://editorial.udenar.edu.co/revistas/rudecolombia/files/r2_11.pdf
- Ocampo, J. (2012). El fiscal Moreno y Escandón y la primera reforma educativa. En J. Ocampo y C. Soler (Ed). *Reformismo en la Educación Colombiana. Historia de las Políticas Educativas 1770-1840*, pp. 51-59. Bogotá, Colombia: Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico [IDEP]. Recuperado de http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/ReformismoEducaCol.pdf
- Orche, E. y Puche, O. (2000). Los Asentamientos Mineros en la Minería Aurífera de Nueva Granada Durante la Época Colonial. En: Congreso Internacional sobre Patrimonio Geológico y Minero en el Marco del Desarrollo Sostenible y V Sesión Científica de la SEDPGYM. Congreso llevado a cabo en Linares, Jaén. Recuperado de <http://oa.upm.es/10179/>
- Osorio, I. (2014). Breve Reseña Histórica de las Vías en Colombia. *Ingeniería Solidaria*, 10 (17), pp. 183-187. Recuperado de <https://revistas.ucc.edu.co/index.php/in/article/viewFile/880/777>
- Palacios, L. (2008). Algunos aspectos relacionados con José Celestino Mutis y la medicina. *Rev. Cienc. Salud*, 6(2), pp. 99-106. Recuperado de <https://revistas.urosario.edu.co/index.php/revsalud/article/viewFile/486/427>



Paredes, C. (2014). Federalismo e centralismo nas origens da Colômbia contemporânea.

História (São Paulo), 33(2), pp. 330-345. Recuperado de

<http://www.scielo.br/pdf/his/v33n2/0101-9074-his-33-02-00330.pdf>

Pappe, S. (2001). *Historiografía crítica. Una reflexión teórica*. Azcapotzalco, México: Sans

Serif Editores. Recuperado de <http://zaloamati.azc.uam.mx/handle/11191/1763>

Peláez, P. (2012). El cuerpo, la salud y la enfermedad en los esclavos del Nuevo Reino de

Granada, siglo XVIII. *Historia Crítica*, 46, pp. 154-177. Recuperado de

<http://www.scielo.org.co/pdf/rhc/n46/n46a09.pdf>

Pérez, E. (1970). Las ciencias botánicas en Colombia. En: Jaramillo Uribe, Jaime (director).

Apuntes para la historia de la ciencia en Colombia, pp. 115-127. Bogotá: Servicios especiales de prensa. Recuperado de

http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles-200229_botanica.pdf

Perinat, A. (1994). Recensión. *Papers*, 44, pp. 135-137. Recuperado de

<http://www.raco.cat/index.php/Papers/article/view/25251/58538>

Pessoa, F. (2000). *Poesia/poesias de Ricardo Reis*. São Paulo, Brasil: Companhia das Letras.

Pilar, A. y Rodríguez, R. (2008). Evaluación y Prevención de Riesgos Ambientales en

Centroamérica. En A. Pilar y R. Rodríguez (Ed). *Introducción a la Cartografía* (pp.

339-356. Girona, España: Documenta Universitaria. Recuperado de

http://www.creaf.uab.es/propies/pilar/LibroRiesgos/15_Cap%C3%ADtulo14.pdf



- Pohl, S. (2009). ¡Soy Caldas! Alcaldía Mayor de Bogotá, Colombia: Fundación Gilberto Alzate Avendaño. Recuperado de <http://babel.banrepcultural.org/cdm/singleitem/collection/p17054coll3/id/1>
- Poveda, G. (2012). *Historia de las Matemáticas en Colombia*. Medellín, Colombia: Ediciones UNAULA.
- Pulido, G. (1991). La Información Meteorológica en Colombia. (Trabajo de Investigación). Santa Fe de Bogotá, Colombia. Recuperado de <http://documentacion.ideam.gov.co/openbiblio/bvirtual/003411/INFORMACIONMTEOROLOGICAENCOLOMBIA.pdf>
- Prado, E. (2008). Os Textos Impressos para o Ensino dos Números Inteiros na Visão de Licenciados em Matemática. (Tesis de doctorado). Universidade Estadual De Campinas. São Paulo. Recuperado de http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Tese_Prado.pdf
- Prieto, M. (2004). Conocimiento Indígena Tradicional: El Verdadero Guardián del Oro Verde. *Redalyc*, 18(35), pp. 132-164. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/557/55703507.pdf>
- Qingxi, L. y Chen, G. (2001). *La Arquitectura Tradición de China*. Beijing: China Intercontinental Press. Recuperado de <https://books.google.com.co/books?id=yLD904sqkREC&pg=PA44&dq=n%C3%BAmoros+negativos+en+china&hl=es->



[419&sa=X&ved=0ahUKEwiao8KkwrBTahVM2SYKHToGCdYQ6wEIMzAD#v=onepage&q=n%C3%BAmeros%20negativos%20en%20china&f=false](#)

Rama, C. (1981). *La historiografía, como conciencia histórica*. Barcelona, España: Montesianos Editor, S. A.

Ramírez, A. (2014). Martín Lutero y la reforma del cristianismo occidental. *R. A. M 5.1*, pp. 65-86. Recuperado de <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:oX6P-P74x7QJ:revistas.usta.edu.co/index.php/albertus-magnus/article/download/1903/2022+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=co>

Ramírez, E. (2004). Implementación de la *Ratio Studiorum* en el Colegio de San Bartolomé. *Theologica Xaveriana*, 154, pp. 651- 678. Recuperado de <http://www.javeriana.edu.co/theologica/UserFiles/Descarga/ediciones/152/Implementacion%20de%20la%20Ratio%20studiorum%20-%20152.pdf>

Redondo, F.; Martín-Loeches, M. y Silván, E. (2010). Prehistoria de la matemática y mente moderna: pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico. *Dynamis*, 30, pp. 167-195. Recuperado de <http://scielo.isciii.es/pdf/dyn/v30/07.pdf>

Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Moscú, Rusia: Editorial Mir.

Rodríguez, L. (2011). *Las matemáticas en la escuela primaria colombiana: Contribuciones a una historia sobre su enseñanza*. (Tesis maestría). Universidad de Antioquia. Colombia. Recuperado de <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1384/1/JC0699.pdf>



- Rosa, R. (2004). *Cartografía básica*. Universidade Federal de Uberlândia. Recuperado de <http://www.uff.br/cartografiabasica/cartografia%20texto%20bom.pdf>
- Rosa, R. (2004). *Cartografía básica*. [Figura]. <http://www.uff.br/cartografiabasica/cartografia%20texto%20bom.pdf>
- Ruedas, M., Ríos, M. y Nieves, F. (2009) *Hermenéutica: La Roca que Rompe el Espejo. Investigación y Postgrado*, 24 (2), pp. 181-201. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3620425.pdf>
- Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. San José: EUNED
- Ruiz, P. (1993). *La historiografía*. Madrid, España: Marcial Pons
- Sacristán, G. (1998). *Aproximación al concepto de currículo. En: Una reflexión sobre la práctica*. Madrid, España: Ediciones Morata. Recuperado de http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Maestria/MTE/Diseno_d_Proyect_Curric/Unidad%201/aproximacion%20al%20concepto%20de%20curriculum.pdf
- Sacristán, G. (2010). *La función abierta de la obra y su contenido. En: Saberes e incertidumbres sobre el currículum*. Madrid, España: Ediciones Morata. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/sine/n34/n34a9.pdf>
- Safford, F. (1989). *El Ideal de lo Práctico. El desafío de Formar una Élite Técnica y Empresarial en Colombia*. Bogotá, Colombia: Empresa Editorial Universidad Nacional. El Ancora Editores
- Salvucci, E. (2011). *Las 95 tesis de Martín Lutero, IE LA*. Córdoba-San Luís. Recuperado de <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxpZ2xlc2lhbHV0ZXJhbmFyaW9jdWFydG98Z3g6NTZINzhiMWFmNzhkZjBjYQ>



- Sampieri, H. (2008). La Idea: Nace un Proyecto de Investigación. En Metodología de la Investigación. Mc.Graw-Hill: México. Recuperado de <https://psicologiaexperimental.files.wordpress.com/2010/03/metodologia-de-la-investigacion.pdf>
- Sanabria, F. (2010). Enseñando mutuamente: una aproximación al método lancasteriano y a su apropiación en Colombia. *Rhec*, 13(13), pp. 47-76. Recuperado de <http://revistas.udenar.edu.co/index.php/rhec/article/view/719>
- Sánchez, C. (1999). Matemáticas en Colombia en el siglo XIX. *LLULL*, 22, pp. 687-705. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/62238.pdf>
- Sánchez, C. (2004). Escuela de ingeniería y matemáticas en el siglo XIX. Bogotá, Colombia: CES, Centro de Estudios Sociales, Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de <http://biblioteca.clacso.edu.ar/Colombia/ces-unal/20121002034037/ingenieria.pdf>
- Sánchez, C. (2012). La Historia como Recurso Didáctico: El caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 32. Recuperado de <http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a06.pdf>
- Sánchez, C. y Albis, V. (2012). Historia de la Enseñanza de las Matemáticas en Colombia. De Mutis al siglo XXI, *Quipu*, 14 (1), pp. 109-157. Recuperado de <http://www.historiacienciaytecnologia.com/ARCHIVOS/141109157.pdf>
- Sastoque, E. (2011). Tabaco, Quina y Añil en el Siglo XIX: Bonanzas Efímeras. *Revista Credencial Historia*, 255. Recuperado de



<http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/revistas/credencial/marzo2011/tabaco-quina-anil-siglo-xix>

Soler, C. (2012). El legado Científico de la Ilustración: Propuesta de Instrucción Racionalista para la Nueva Granada. En: J. Ocampo y C. Soler (Ed.). Reformismo en la Educación Colombiana. Historia de las Políticas Educativas 1770-1840, pp. 19-28. Bogotá, Colombia: Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico [IDEP] Recuperado de http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/wp-content/uploads/2015/12/ReformismoEducaCol.pdf

Sousa, A.; Alves, B. y Sales, A. (2015). Conhecimentos Consolidados de Acadêmicos Sobre os Números Negativos. IX Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática. *Sesemat*, 9(1), pp. 81-92. Recuperado de <http://seer.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/1711/1212>

Schettini, P. y Cortazzo, I. (2015). *Análisis de datos cualitativos en la investigación social. Procedimientos y herramientas para la interpretación de información cualitativa*. La Plata, Argentina: Editorial de la Universidad de La Plata. Recuperado de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/49017/Documento_completo.pdf?sequence=1

Schubring, G. (1993). Les enjeux épistémologiques des nombres négatifs. En : Bardin, E. (ed). Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique. Actes de la première université d'été européenne. Montpellier : IREM de Montpellier. Recuperado de <http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/WH/IWH95046/IWH95046.pdf>



- Stabback, P. (2016). *Qué hace a un currículo de calidad*. Cuestiones fundamentales y actuales del currículo y el aprendizaje. Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002439/243975s.pdf>
- Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid, España: Morata.
- Thapar, R. (2001). *Historia de la India I*. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica. Recuperado de https://books.google.com.co/books?id=pDB_BgAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=Historia+de+la+India,+I&hl=es-419&sa=X&ved=0ahUKEwiq3Ny0qtTTAWhWDKiYKHXnDCh8Q6AEIKjAB#v=onepage&q=Historia%20de%20la%20India%2C%20I&f=false
- Trías, R. (1945). La Expedición Botánica al Nuevo Reino de Granada. *Trabajo premiado en el concurso abierto por la Universidad Nacional de Colombia*. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/17766/1/13445-37917-1-PB.pdf>
- Trillo, F. (1994). El profesorado y el desarrollo curricular: tres estilos de hacer escuela. En: *Cuadernos de Pedagogía*, 228, pp. 70-74. Recuperado de <http://www.edub.cl/wp-content/uploads/2015/11/estiloscurriculares.pdf>
- Turbay, S. (2012). Las Familias Indígenas de Santafé, Nuevo Reino de Granada, según los Testamentos de los siglos XVI y XVII. *Anuario Colombiano de Historia Social y de la Cultura*, 39(1), pp. 49-80. Recuperado de <https://revistas.unal.edu.co/index.php/achsc/article/view/34162/41412>



- Valencia, C. y Loaiza, Y. (2002). Plan de estudios generales de Moreno y Escandón. *Revista Historia de la Educación Colombiana*, 5, pp. 9-23. Recuperado de <http://es.calameo.com/books/0008895263bf54b76e431>
- Vanegas, B. (2010). La Investigación Cualitativa: Un Importante Abordaje del Conocimiento para Enfermería. *Revista Colombiana de Enfermería*, 6(6), 128-142. Recuperado de http://www.uelbosque.edu.co/sites/default/files/publicaciones/revistas/revista_colombiana_enfermeria/volumen6/investigacion_cualitativa.pdf
- Várgany, T. (1999). Capítulo VI. El pensamiento político de Martín Lutero. En: *La filosofía política clásica. De la antigüedad al Renacimiento*. Buenos Aires: CLACSO, Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales. Recuperado de <http://biblioteca.clacso.edu.ar/clacso/se/20100609123955/8varnagy.pdf>
- Vélez, D. y Varela, O. (2014). El Descubrimiento de los Números Negativos. Matemática Primitiva y Realismo Platónico. *Universidad de Antioquia*, pp. 1-18. Recuperado de http://tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/3121/6/VelezBotero_2014_Descubrimiento_numerosnegativos.pdf
- Vickery, B. (1970). *Techniques of Information Retrieval*. Londres: Butterworths.
- Viloria-De-la-Hoz, J. (2015). *Santa Marta Real y Republicana: El Accionar Económico y Político de la Provincia de Santa Marta en los Albores de la Independencia, 1810-1830*. Cuadernos de Historia Económica y Empresarial, 36, pp. 1-81. Recuperado de http://www.banrep.gov.co/docum/Lectura_finanzas/pdf/chee_36.pdf



- Wilhite, J. (1980). Los discípulos de Mutis y la Ilustración en la Nueva Granada: la educación, la historia y la literatura. *TheAmericas*, 37(2), pp. 1-10. Recuperado de <http://es.calameo.com/read/0008098323920c4c04027>
- Zapata, V.; Marín, E.; Ossa, R. y Ceballos, R. (2004). *El concepto de escuela en Colombia en los planes educativos de los siglos XIX y XX*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.
- Zapico, I. (2006). Enseñar Matemática con su Historia. *Premisa*, 8(29), pp. 3-8. Recuperado de <http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20Zapico.pdf>
- Zuluaga, O. (1995). Las escuelas normales en Colombia (durante las Reformas de Francisco de Paula Santander y Mariano Ospina Rodríguez), *Revista Educación y Pedagogía*, 12-13, pp. 263-278. Recuperado de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/3189/1/ZuluagaOlga_1995_escuelasnormalesreformasfranciscosantandermarianoospina.pdf
- Zuluaga, O (1999). Pedagogía e historia, la historicidad de la pedagogía. *La enseñanza, un objeto de saber* (pp. 106-109). Bogotá: coedición Siglo de Hombre Editores, Anthropos, Editorial de Antioquia. Recuperado de http://tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/3061/1/ZuluagaOlga2001_Lancasterpestalozzi.pdf



6. Anexos

Se presentará a continuación las fuentes utilizadas en la construcción del archivo de la presente investigación.

Libros

| Nombre | Tipo de fuente |
|---|----------------|
| Araujo, D. (1877). <i>Tratado de Álgebra</i> . Cartagena, Colombia: Imprenta del Colegio | Primaria |
| Bails, B. (1779). <i>Elementos de Matemáticas</i> . Madrid, España: Impresor de Cámara de S. M. | Primaria |
| Bergeron, A. (1848). <i>Lecciones de Matemáticas. Parte primera</i> . Bogotá, Colombia: Imprenta de Ancizar. | Primaria |
| Bourdon, M. (1837). <i>Éléments D'algèbre [Elementos de álgebra]</i> . Paris, Francia : Imprimeur-Libraire. | Primaria |
| Bruño, G. (1825). <i>Álgebra y Trigonometría</i> . París, Francia: Procuraduría General. | Primaria |
| Lacroix, S. (1821). <i>Curso Completo Elemental de Matemáticas Puras. Tomo II</i> [Traducido por D. Josef Rebollo y Morales]. Madrid, España: Imprenta Real | Primaria |



Facultad de Educación

- Liévano, I. (1856). *Tratado Elemental de Aritmética*. Primaria
Bogotá, Colombia: Imprenta de Echeverría
Hermanos.
- Liévano, I. (1875). *Tratado de Álgebra*. Bogotá, Colombia: Primaria
Imprenta de Medardo Rivas.
- Foucault, M. (2002). *La arqueología del saber*. Buenos Secundaria
Aires, Argentina: Siglo XXI Editores.
- González, J. (1998). *Números Naturales Relativos*. Secundaria
Granada: COMARES
- Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación Secundaria
matemática. La construcción social del número, el
espacio y lo imposible en China y Grecia*: Gedisa.
MEC.
- Melo, J. (1996). *Historiografía colombiana. Realidades y Secundaria
perspectivas*. Medellín, Antioquia.
- Pohl, S. (2009). *¡Soy Caldas!* Alcaldía Mayor de Bogotá, Secundaria
Colombia: Fundación Gilberto Alzate Avendaño.
- Poveda, G. (2012). *Historia de las Matemáticas en Secundaria
Colombia*. Medellín, Colombia: Ediciones
UNAULA.
-



Facultad de Educación

Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Moscú, Rusia: Editorial Mir Secundaria

Safford, F. (1989). *El Ideal de lo Práctico. El desafío de Formar una Élite Técnica y Empresarial en Colombia*. Bogotá, Colombia: Empresa Editorial Universidad Nacional. El Ancora Editores Secundaria

Soler, C. (2012). El legado Científico de la Ilustración: Propuesta de Instrucción Racionalista para la Nueva Granada. En J. Ocampo y C. Soler (Ed). *Reformismo en la Educación Colombiana. Historia de las Políticas Educativas 1770-1840*, pp. 19-28. Bogotá, Colombia: Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico [IDEP] Secundaria

Zapata, V; Marín, E; Ossa, R. y Ceballos, R. (2004). *El concepto de escuela en Colombia en los planes educativos de los siglos XIX y XX*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia. Secundaria

1 8 0 3

Artículos y Congresos

| Nombre | Tipo de fuente |
|--------|----------------|
| | Secundaria |



Facultad de Educación

- Ahern, E. (1991). El Desarrollo de la Educación en Colombia 1820-1850. Revista Colombiana de Educación 22-23.
- Arboleda, L. (2016). Caldas, Matematización de la Naturaleza y Sentimiento Telúrico. Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat, 40 (154), pp. 6-7 Secundaria
- Bateman, F. (1982). Apuntes Históricos Sobre la Facultad de Ingeniería. Ingeniería e Investigación, (2), pp. 10-13. Secundaria
- Gallardo, A. y Rojano, T. (1990). Los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones algebraicas. Un análisis histórico-epistemológico. Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla, España: SAEM Thales. Secundaria
- Herrera, M. (1993). Historia de la Educación en Colombia La República Liberar y la Modernización de la Educación: 1930-1946. Secundaria
- Sánchez, C. (1999). Matemáticas en Colombia en el Siglo XIX. LLULL, 22, pp. 687-705. Secundaria
- Sánchez, C. (2004). Escuela de ingeniería y matemáticas en el siglo XIX. Bogotá, Colombia: CES, Centro de
-



Facultad de Educación

Estudios Sociales, Universidad Nacional de Colombia.

Sánchez, C. y Albis, V. (2012). Historia de la Enseñanza de las Matemáticas en Colombia. De Mutis al siglo XXI, Quipu, 14 (1), pp. 109 – 157. Secundaria

Vélez, D. y Varela, O. (2014). El Descubrimiento de los Números Negativos. Matemática Primitiva y Realismo Platónico. Universidad de Antioquia, pp. 1-18. Secundaria

Zuluaga, O. (1995). Las escuelas normales en Colombia (durante las Reformas de Francisco de Paula Santander y Mariano Ospina Rodríguez), Revista Educación y Pedagogía, 12-13, pp. 263-278. Secundaria

Ensayos y Periódicos

| Nombre | Tipo de fuente |
|--|----------------|
| Caldas, F. (1849). Semanario de la Nueva Granada. Miscelanea de Ciencias, Literatura, Artes é Industria. París, Francia: Lasserre, editor. | Primaria |
| Caldas, F. (1966). Ensayo de una memoria sobre un nuevo método de medir la altura de las montañas por | Primaria |



Facultad de Educación

medio del termómetro y el agua hirviendo, seguida de un apéndice, por don Francisco José de Caldas.

In: Obras completas de Francisco José de Caldas: publicadas por la Universidad Nacional de Colombia como homenaje con motivo del sesquicentenario de su muerte 1816 - octubre 29 - 1966. Imprenta Nacional, Bogotá, pp. 153-173.

Tesis de maestría o doctorado

| Nombre | Tipo de fuente |
|--|----------------|
| Dávila, J. (2010). Ciencias útiles y planes de estudio de la Nueva Granada. Método racional y Canon Wolffiano en la filosofía escolar neogranadina (1762-1826). (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Javeriana. Colombia. | Secundaria |
| Maz, A. (2005). Los Números Negativos en España en los Siglos XVIII y XIX. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada. | Secundaria |
| Prado, E. (2008). Os Textos Impressos para o Ensino dos Números Inteiros na Visão de Licenciados em | Secundaria |



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

Matemática. (Tesis de doctorado). Universidade

Estadual De Campinas. São Paulo.



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3