UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

INTERPRETACIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA A PARTIR DEL TRABAJO COOPERATIVO

MERCEDES ELISA MERCADO ARRIETA
JORGE ELIÉCER GIL OSORIO

Trabajo de grado presentado para optar por el título de Magíster en Educación - Modalidad Profundización

NATALIA MÚNERA ESCOBAR
Asesora

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLÍN
2019

INTERPRETACIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA A PARTIR DEL TRABAJO COOPERATIVO

MERCEDES ELISA MERCADO ARRIETA
JORGE ELIÉCER GIL OSORIO

Trabajo de grado presentado para optar por el título de
Magíster en Educación - Modalidad Profundización

Asesora
NATALIA MÚNERA ESCOBAR
Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN - EDUCACIÓN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLÍN COLOMBIA
2019

Resumen

La resolución de problemas es un proceso inherente al aprendizaje de las matemáticas en todos los ciclos escolares y es en este proceso, donde los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel del municipio de Barbosa, presentaron dificultades evidenciadas en la interpretación incorrecta de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita. Aunque éste no es objeto de estudio propio del grado décimo, los estudiantes en este nivel se encuentran áreas como la física y la química donde requieren habilidades para interpretar y solucionar este tipo de problemas. A partir de lo anterior surge la pregunta de profundización: ¿cómo se posibilita la interpretación de problemas que involucra ecuaciones de primer grado con una incógnita a partir del trabajo cooperativo?

A raíz de lo anterior, se realizó una revisión teórica sobre algunos trabajos relacionados con resolución de problemas matemáticos y la identificación de errores que cometen los estudiantes en este proceso. Se planteó una metodología a partir de un paradigma de investigación cualitativo, mediante un método de investigación acción pedagógica y una secuencia didáctica como estrategia, como técnica principal de recolección de datos se utilizó la observación participante. Se realizaron registros fotográficos, videos y cuestionarios como instrumentos para obtener la suficiente información que fue organizada por medio de unidades de análisis. La información resultante fue tratada bajo un sistema de triangulación donde se confrontaron los datos de campo, la teoría y el análisis de los investigadores, con el fin de darle validez al proyecto y dar paso a las conclusiones finales.

Palabras clave: Interpretación de problemas, ecuaciones de primer grado con una incógnita, trabajo cooperativo, secuencia didáctica.

Abstract

The resolution of problems is an inherent process of learning mathematics in all school cycles and it is in this process, where tenth grade students of the Luis Eduardo Arias Reinel Educational Institution of the municipality of Barbosa, presented difficulties evidenced in the incorrect interpretation of problems that involve first-degree equations with an unknown. Although this is not an object of study of the tenth grade, students at this level find areas such as physics and chemistry where they require skills to interpret and solve these types of problems. Based on the above, the deepening question arises: how is the interpretation of problems made possible that involves first-degree equations with an incognito from cooperative work?

As a result of the above, a theoretical review was carried out on some works related to the resolution of mathematical problems and the identification of errors committed by students in this process. A methodology was proposed based on a qualitative research paradigm, using a pedagogical action research method and a didactic sequence as a strategy. Participant observation was used as the main data collection technique. Photographic records, videos and questionnaires were made as instruments to obtain enough information that was organized by means of analysis units. The resulting information was treated under a triangulation system where the field data, the theory and the analysis of the data were compared, researchers, in order to validate the project and make way for the final conclusions.

Key words: Interpretation of problems, equations of first degree with an unknown, cooperative work, didactic sequence.

Tabla de Contenido

Tabla de Ilustraciones

Tabla de Tablas

1. Planteamiento del Problema

1.1. Contextualización

El presente proyecto fue aplicado en la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel (I.E. LEAR) y la Institución Educativa Agrícola Víctor Manuel Orozco (IEA. VMO). La primera de ellas la I.E. LEAR se encuentra ubicada en el municipio de Barbosa Antioquia, al norte de la subregión del Valle de Aburrá; cuenta con alrededor de 1450 estudiantes distribuidos en 3 sedes: la sede principal presenta los niveles formales de educación preescolar a undécimo en dos jornadas; en la mañana asisten los estudiantes de sexto a undécimo mientras que en la tarde los estudiantes de preescolar a quinto. Las dos sedes restantes están ubicadas en zonas veredales del municipio con los niveles de preescolar a quinto en la jornada de la mañana; además, la I.E. LEAR cuenta con formación técnica en convenio con el SENA[1] para los estudiantes de la educación media, en dos modalidades: mantenimiento y ensamble de equipos de cómputo y asistencia administrativa.

La dinámica institucional de la I.E. LEAR se centra en un modelo pedagógico Social Constructivista abordado según las perspectivas de Piaget, Vigostsky y Ausubel, para las cuales el aprendizaje es un proceso donde el estudiante construye activamente nuevas ideas o conceptos basados en conocimientos presentes y pasados, allí el trabajo cooperativo es un elemento importante para la construcción del conocimiento, pues los estudiantes pueden trabajar para clarificar y ordenar ideas, retroalimentar conclusiones y proponer soluciones a algunos problemas. De esta forma, el proyecto de profundización presenta consonancia con la política de calidad de la institución, donde se resalta el trabajo cooperativo como herramienta para el mejoramiento continuo, acompañado de la cualificación del personal docente (I.E LEAR, 2012).

Por otra parte, la segunda Institución Educativa protagonista del proyecto la I.E.A. VMO, se encuentra ubicada en la subregión del Suroeste Antioqueño en el Municipio de Támesis. La I.E.A. VMO cuenta con una población estudiantil de aproximadamente 700 estudiantes distribuidos en 8 sedes. La sede principal está ubicada en el casco urbano del municipio y ofrece

[1] Servicio Nacional de Aprendizaje.

educación formal de preescolar a undécimo con modalidad de media técnica Agropecuaria; las otras 7 sedes están distribuidas en zonas rurales y ofrecen educación de preescolar a quinto; todas las sedes atienden a los estudiantes en la jornada de la mañana. La I.E.A. VMO aborda la educación desde un modelo pedagógico constructivista, al igual que la I.E. LEAR, buscan en los procesos de enseñanza el reconocimiento de saberes previos, el trabajo cooperativo y la resolución de problemas del contexto.

A pesar de los planteamientos pedagógicos que buscan el mejoramiento de la calidad educativa, las pruebas externas aplicadas por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES[2]) conocidas como pruebas saber, evidencian deficiencias en los componentes de análisis y resolución de problemas. Es así como en la Prueba Saber 9 del año 2017, ambas Instituciones obtuvieron un nivel de desempeño mínimo en el área de matemáticas como se evidencia en la siguiente gráfica de la I.E. LEAR.

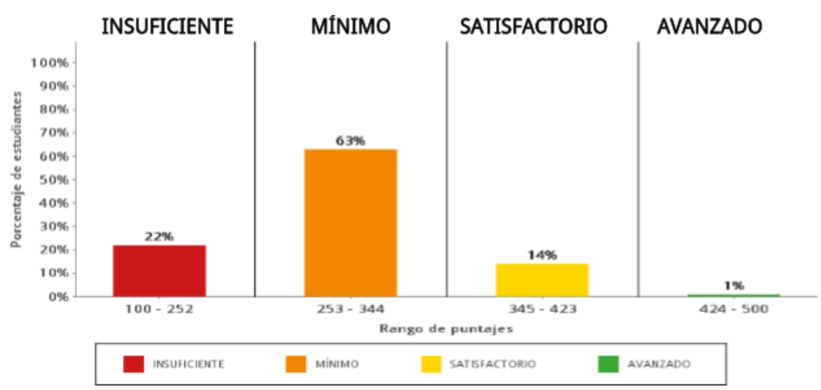


Ilustración 1: Porcentaje de estudiantes según niveles de desempeño en matemáticas, prueba saber 9 2017. IE Luis Eduardo Arias Reinel

Así mismo, frente a las fortalezas y debilidades relativas en las competencias y componentes evaluados en la prueba de matemáticas de grado noveno, ambas instituciones coinciden con debilidades en competencias relacionadas con el planteamiento y resolución de problemas y en el componente numérico variacional según la última actualización realizada el 16 de marzo de 2018 por el ICFES, como se evidencia en las ilustraciones siguientes:

[2] ICFES, es una entidad autónoma adscrita al Ministerio de Educación Nacional, la cual ofrece servicios de evaluación de la educación en todos los niveles.

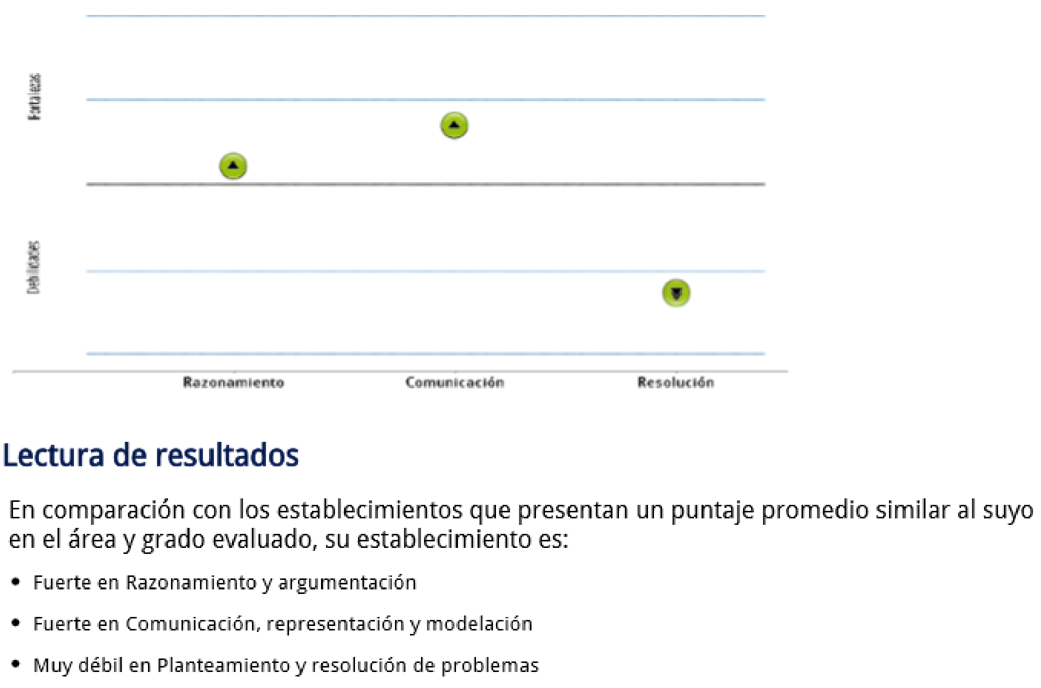


Ilustración 2: Fortalezas y debilidades relativas en las competencias evaluadas. Matemáticas grado noveno, 2017. I.E. LEAR

La ilustración 2 evidencia de una forma clara una dificultad que presentan los estudiantes de grado décimo, no solo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel del municipio de Barbosa Antioquia sino también los estudiantes de la Institución Educativa Agrícola Víctor Manuel Orozco del municipio de Támesis. Dicha dificultad permitió orientar el proceso de profundización. Cabe anotar que las gráficas presentadas corresponden solo a la IE LEAR, ya que fueron los datos obtenidos en esta institución los que se tomaron para realizar el análisis.

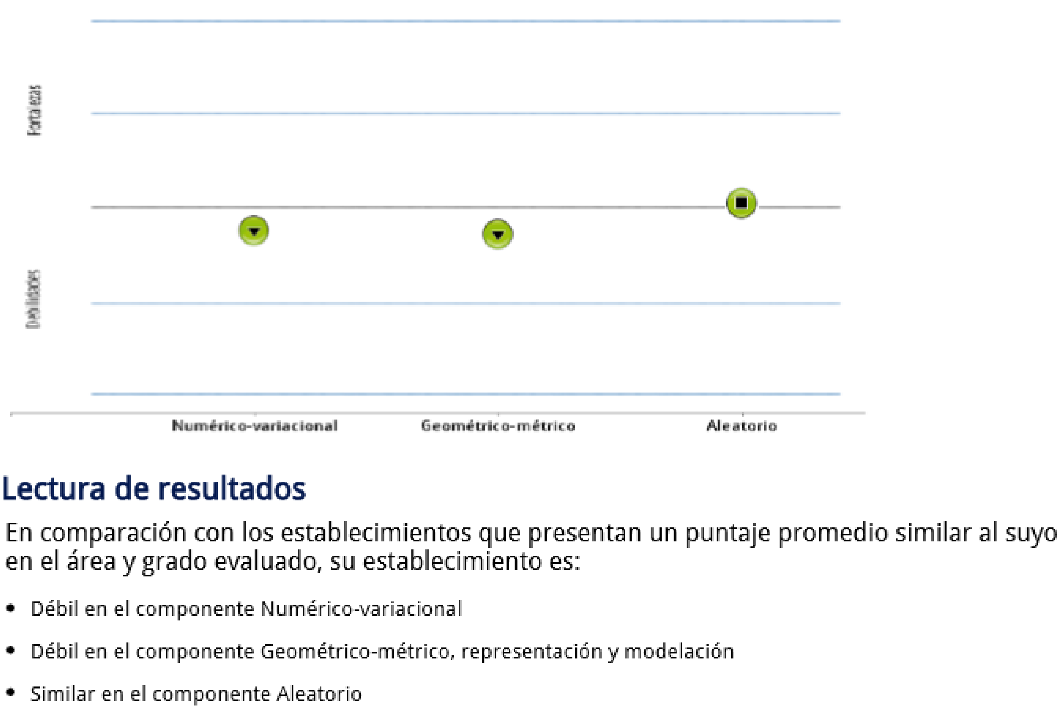


Ilustración 3: Fortalezas y debilidades relativas en los componentes evaluados. Matemáticas grado noveno, 2017. I.E. LEAR

Por otro lado la ilustración 3 evidencia la debilidad en el componente geométrico – métrico, representación y modelación, éste último relacionado directamente con la interpretación de problemas.

Con relación a las pruebas saber 11 del año 2017, los resultados no son muy diferentes en lo que se refiere a los componentes evaluados en matemáticas de grado noveno, ya que frente a las respuestas incorrectas, los estudiantes presentaron un promedio de 49%, mientras que en las preguntas que relacionan aprendizajes que permiten validar procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para la resolución de problemas, los estudiantes presentaron un 58% de respuestas incorrectas. Por tanto, el proyecto de profundización contribuye al mejoramiento de la calidad educativa al abordar algunas deficiencias evidenciadas en pruebas estandarizadas, de la misma forma que aporta a la visión institucional plasmada en el Proyecto Educativo Institucional (PEI) de ambas Instituciones Educativas.

La debilidad evidenciada en las gráficas anteriores se hace evidente en el aula de clase frente a un proceso que debió tratarse en años anteriores: interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita. A pesar de que este tema no es de este grado, es allí donde se encuentran con problemas de mezclas, disoluciones, concentraciones, velocidad, fuerza, presión, entre otros problemas propios de la física y la química, que requieren este tipo de habilidades para su resolución. Es allí donde el proyecto de profundización se hace protagonista al proponer una estrategia para contribuir a superar dicha dificultad.

1.2. Justificación

Para el proyecto de profundización, la relevancia, la validez, la objetividad, la originalidad, el rigor y la precisión, la reproductividad y la relación, fueron criterios[3] que permitieron dar justificación al trabajo desarrollado. Es aquí donde el proyecto presentó relevancia, pues permitió repensar el quehacer docente; proporcionó conceptos y técnicas para ser aplicadas en el desarrollo de las clases y contribuir al mejoramiento de las prácticas pedagógicas de los docentes involucrados en el proceso investigativo. De la misma forma, el proyecto podrá servir de insumo para futuras investigaciones en la línea de formación, ya sea en el campo de los errores que cometen los estudiantes al interpretar problemas, en el tratamiento de los mismos o desde el trabajo cooperativo como estrategia de aula.

Por otra parte, la objetividad del proyecto se evidenció al permitir esclarecer los perjuicios que se generan frente a la aparición de errores, pues en el aula de clase, el docente aborda al error como algo que no debió aparecer e interpretado desde la subjetividad. Así mismo, el proyecto de profundización presenta originalidad al permitir ver los problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita y el error de interpretación que cometen los estudiantes bajo una diferente perspectiva cooperativa, contribuyendo al campo de la educación matemática.

[3] Criterios tomados de Kilpatrick (1996, p 2) los cuales hacen que un proyecto sea de carácter investigativo en educación matemática.

El proyecto presentó rigor y precisión ya que permitió refinar los métodos de investigación en el aula y observar los fenómenos de estudio de una forma más cuidadosa; así mismo, la investigación buscó regularidades y modelos de comportamiento de los estudiantes de grado décimo al interpretar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Por otra parte, el proyecto de profundización es reproducible puesto que como investigación en educación debe ser compartida; los alcances y/o resultados serán públicos; por tanto, podrán ser reproducidos como aporte a la investigación en educación matemática en el campo multidisciplinario donde se relacionan con la física y la química. De la misma forma, las estrategias desarrolladas contribuyeron que el proyecto fuera reproducible para contribuir al mejoramiento de la calidad educativa de las instituciones involucradas presentando coherencia con las metas institucionales planteadas por las mismas.

A modo de conclusión, el presente proyecto de profundización está diseñado con el rigor necesario para impactar, tanto a los estudiantes que son los actores principales del proceso, las Instituciones Educativas involucradas, la línea de formación a la cual está inscrita, como a los docentes líderes del proceso investigativo en la modalidad de Profundización.

1.3. Formulación del Problema

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), establece los parámetros que rigen la educación en Colombia; desde allí se promueven pensamientos, competencias y actitudes que deben adquirir los estudiantes en cada ciclo o nivel. En este sentido, el proyecto identificó su problemática en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

> El desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (p. 49)

Y es en efecto en uno de los sistemas de representación de la variación donde los estudiantes de grado décimo enfrentan la mayor dificultad; precisamente en los enunciados verbales de los problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Por otra parte, en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), se establece la importancia del pensamiento variacional en áreas como las Ciencias Naturales:

> Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas. (p. 66)

Por lo anterior, es importante valorar el alcance de los logros relacionados con este pensamiento y en la resolución de problemas como tal, al llegar a la educación media, pues se evidencia errores en los estudiantes al momento de interpretar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita; en este sentido Rico (1995) considera el error como una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación de conocimiento. Por tanto, los errores que cometen los estudiantes de grado décimo, ya sea desde la transversalidad de la matemática en áreas como la química y la física, pueden convertirse en la posibilidad de mejorar el conocimiento.

En este sentido, en el desarrollo del pensamiento variacional se tienden a cometer errores y aún más cuando los estudiantes deben transversalizar esas competencias con otras áreas diferentes a las matemáticas. En esta medida, Radatz (1979) citado por Rico (1995) permite relacionar los errores en los estudiantes de grado décimo de la siguiente manera:

> Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático. (p. 89)

Como consecuencia de lo anterior, se evidencian dichos errores en el aula, no solo en la clase de matemáticas, sino en áreas como la física y la química y frente a ellos, en el mejor de los casos, el docente realiza una breve revisión o retroalimentación, sin prestar mucha atención a las interpretaciones incorrectas que vienen desarrollando los estudiantes, pues el tema de problemas y ecuaciones de primer grado con una incógnita es propio del grado Séptimo, por tanto, los estudiantes debieron desarrollar esas competencias y conocimientos años atrás, situación que acrecienta la problemática al no encontrar un tratamiento oportuno a la misma.

Por su parte, Gonzales et al (s.f) expresa que una de las principales dificultades que presentan los estudiantes cuando trabajan con ecuaciones de primer grado con una incógnita es la comprensión y posterior traducción y/o conversión de un problema expresado en lenguaje natural a su representación en lenguaje algebraico, dificultad que termina por convertirse en errores recurrentes, como se evidencia en el aula de clase de grado décimo de los docentes involucrados en el presente proceso de profundización. Así mismo Guerrero (2012), expresa que estos errores pueden llevar a los estudiantes al poco éxito escolar, reflejados en bajo promedio, altos índices de repitencia, deserción escolar y muchas inasistencias de los estudiantes menos aventajados a las clases de matemática, por lo que, la enseñanza de la matemática en las instituciones educativas deben buscar el tratamiento de los errores y su superación.

Con relación a la problemática descrita, Egoavil (2014) enfatiza que muchos de los estudiantes que presentan problemas en el aprendizaje de las matemáticas se vuelven hábiles una vez aprenden las simples y básicas ecuaciones de primer grado puesto que éstas contribuyen al desarrollo del razonamiento lógico, por lo tanto, el tratamiento de esta problemática en grado décimo es relevante, no solo para la matemática en sí, sino también para otras áreas que requieren de éste tipo de destrezas y razonamientos.

Por lo anterior, los errores que cometen los estudiantes deben tener el tratamiento y atención, como lo expresan Engler et al. (2004, p. 23): “(…) En los procesos de construcción de los conocimientos matemáticos aparecen sistemáticamente errores y, por eso, dichos procesos deberán incluir criterios de diagnóstico, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones”, y convertir de este modo el error como una posibilidad en la adquisición y consolidación del conocimiento; proceso que es posible potencializar en actividades orientadas a partir del trabajo cooperativo.

Con el fin de posibilitar la superación de los errores que cometen los estudiantes de grado décimo al abordar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, se vio la necesidad de identificar aquel más recurrente y que fuera clave para desarrollar todos los procesos que conlleva; en este caso, el error más frecuente fue evidenciado en la traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico; en conclusión, la interpretación del problema fue el principal problema evidenciado en el aula de clase por lo que se convirtió en el objeto del presente estudio. Por esta razón se abordó la siguiente pregunta de profundización: ¿Cómo se posibilita la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, a partir del trabajo cooperativo, en estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel del Municipio de Barbosa?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General.

Posibilitar la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, a partir del trabajo cooperativo, a través de una secuencia didáctica para estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel del Municipio de Barbosa.

1.4.2. Objetivos Específicos.

Diseñar una secuencia didáctica que proporcione herramientas para interpretar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita y que se articule al trabajo cooperativo.

Identificar los elementos que junto con el trabajo cooperativo posibilitan la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

2. Marco Teórico

El recorrido teórico está organizado según algunos elementos de estudio involucrados en el proceso de profundización, y enmarcados en la pregunta y objetivos del mismo: inicialmente se presentan los antecedentes; aquellos estudios que aportaron directa e indirectamente al proyecto de profundización; luego, se continúa con una descripción desde los orígenes y métodos de solución de problemas; prosiguiendo con algunas conceptualizaciones sobre resolución de problemas , tales como errores, obstáculos y ecuaciones de primer grado con una incógnita, para dar paso a algunos elementos relacionados con la secuencia didáctica y trabajo cooperativo, para finalizar con algunas conceptualizaciones sobre obstáculo y error.

2.1. Antecedentes

A continuación, se presenta una revisión teórica de algunos trabajos relacionados con tópicos inmersos en el presente proyecto de profundización, entre los que se encuentran la resolución de problemas, el trabajo cooperativo y la secuencia didáctica. En este orden de ideas, se citaron trabajos que desde el ámbito internacional, nacional y local aportaron a la comprensión de la problemática que se pretende posibilitar[4].

En esta línea de pensamiento Rico (1995), en su libro, realiza una descripción general de los estudios dedicados a la identificación y tratamiento de errores matemáticos que comenten los estudiantes al solucionar problemas; los relaciona y caracteriza por aproximaciones e intereses; es así como en un trabajo clásico de doctorado, Radatz (1980) citado por Rico (1995), señaló tres rasgos característicos de los estudios relacionados con los errores en la resolución de problemas: 1. En la aritmética, el conocimiento numérico, constituyó el área de contenidos dominante en la mayor parte de los estudios sobre errores en matemáticas. 2. En Estados Unidos surgió un desarrollo teórico continuo desde comienzos de siglo para analizar los errores en educación matemática; en los países europeos el desarrollo ha sido más esporádico y careció de continuidad

[4] Entendiendo la palabra posibilitar como “hacer posible”, en este caso, hacer posible la interpretación de problemas.

hasta fechas muy recientes. 3. Hay una pluralidad de aproximaciones teóricas e intentos para explicar y categorizar las causas que conducen a los errores en los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, fue posible categorizar como una interpretación incorrecta del lenguaje al error más frecuente evidenciado en los estudiantes protagonistas del proyecto.

Por otra parte, hay que mencionar un estudio de maestría, más centrado al objeto del presente proyecto, realizado por Bañuelos (1995) donde presentó un análisis estadístico sobre la forma en que los estudiantes de bachillerato del Instituto Politécnico Nacional de España solucionan problemas, encontrando que aquellos presentados de forma textual evidenciaron mayor obstáculo para su resolución, mientas que los problemas presentados en versión gráfica fueron facilitadores en la resolución de los mismos. Lo anterior es coherente con los resultados hallados en el trabajo de campo donde la utilización de representaciones pictóricas o dibujos favoreció la interpretación de problemas.

Así mismo, en América Latina, precisamente en Chile, Sánchez (2014) presentó un estudio de maestría cuyo objetivo fue analizar los tipos de errores que comete una estudiante de primer año de secundaria en la resolución de ecuaciones de primer grado. La investigación se enmarca como un diseño de estudio de caso, utilizando como aproximación teórica la zona de desarrollo próximo[5] de aprendizaje sociocultural de Vigotsky. Los resultados evidenciaron la potencialidad de esta aproximación teórica, dado que los errores cometidos en la resolución de ecuaciones de primer grado disminuyeron considerablemente a partir de la interacción con otros y de la guía o cooperación del docente. Éste trabajo proporcionó importantes herramientas para comprender el rol del docente en la cooperación y la potencialidad que presenta el trabajar con otros en busca de objetivos. Sin embargo, Terán y Pachano (2009) en el estado Trujillo de Venezuela exponen un estudio de maestría donde relaciona el trabajo cooperativo con la búsqueda de aprendizajes significativos en la clase de matemáticas; allí resaltan la importancia de la motivación, de los juegos y de la lúdica para potencializar el aprendizaje de forma cooperativa, siguiendo la misma línea presentada en la secuencia didáctica del presente proyecto que incluyen algunas actividades mediadoras que buscan despertar en el estudiante la motivación y el interés por la clase.

[5] Reconocida con las siglas ZDP

De la misma forma, Colombia y otros países de América Latina, han venido presentando en algunos congresos y encuentros de Educación Matemática en los últimos años, múltiples estudios de maestría sobre el análisis y tratamiento de errores en diferentes procesos del pensamiento matemático, como es el caso de Castellanos y Obando (2009), donde exponen los errores evidenciados por estudiantes en básica secundaria y media de la Institución Educativa Colegio Galán de Cumaral Meta, en la construcción de pensamiento algebraico, cuyos resultados permitieron articular los errores del estudio con los identificados en el aula de clase y abordados en el presente proyecto entre los que se encuentran aquellos relacionados con la traducción de situaciones del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

Por otra parte, Bóscan y Klever (2012) en otro trabajo de maestría, utilizaron una metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas en estudiantes de grado séptimo de una Institución Educativa del departamento del Atlántico, donde evidenciaron que luego de enseñar los métodos heurísticos de Polya, los estudiantes que analizaron y compararon todos los procedimientos, se percataron de los errores que cometieron en la realización de una operación y planificaron la resolución final. De la misma forma, el proyecto de profundización utilizó los pasos para abordar problemas de Polya (1990) para posibilitar la interpretación de problemas.

Igualmente, Villa (2015) reportó un estudio de caso realizado con docentes de educación secundaria cuya finalidad estuvo enmarcada en estudiar la manera como los docentes utilizan la modelación en la enseñanza de la matemática y de qué forma ésta favorece los problemas de enunciados verbales. Como resultado de esta investigación se sugiere la necesidad de generar estrategias que permitan el empoderamiento de los profesores sobre la modelación matemática. Sugerencia que se adopta en el proyecto en la medida en que los estudiantes construyen diferentes modelos representacionales para comprender los problemas y plantear las ecuaciones correctas para su solución.

Así mismo, Villegas et al (2009) en un proyecto financiado por el plan nacional del Ministerio de Educación y Ciencia de España, realizó un estudio sobre las representaciones y el papel que desempeñan en el pensamiento, la comprensión de conceptos y el desarrollo del pensamiento flexible en la resolución de problemas. En este estudio, se tomaron en cuenta tres tipos de representaciones: Las representaciones verbales que corresponden al enunciado del problema que puede ser escrito o hablado, las representaciones pictóricas que son aquellas que se hacen con dibujos, diagramas o gráficos entre otros y las representaciones simbólicas que se refiere a la forma de números, signos de operación y de relación y símbolos algebraicos. En la investigación, se establece una relación directa y viceversa con cada una de ellas así.

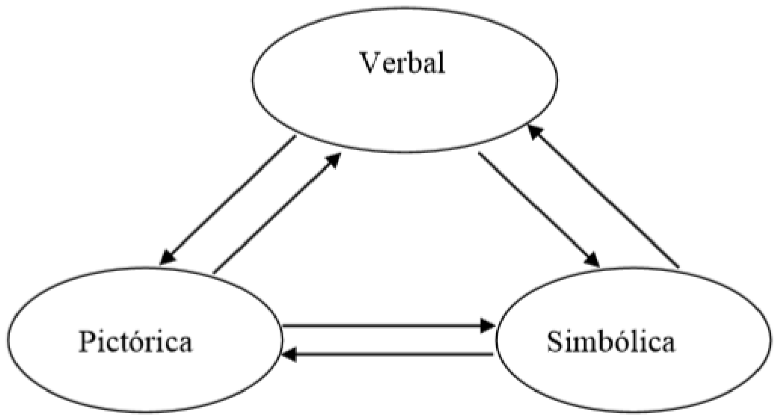


Ilustración 4: Tipos de representaciones, Villegas et al (2009, p. 288)

Este estudio permitió resignificar la representación pictórica en la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, paso importante en la resolución de problemas, omitido por los estudiantes en el análisis previo de la problemática del presente proyecto de profundización.

Con relación a las ecuaciones de primer grado con una incógnita, Hurtado (2013), en su trabajo de maestría en la Universidad del Valle en Colombia, resalta la importancia de la formación de los maestros que enseñan matemáticas en educación básica pues no basta con poseer conocimientos y destrezas específicos, los docentes requieren de conocimientos didácticos base que le permitan elaborar y gestionar unidades didácticas en torno a las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Es así como este trabajo de maestría aporto la necesidad del conocimiento pedagógico y didáctico en el docente, que le permita gestionar los aprendizajes de una forma pertinente a las necesidades de los estudiantes.

Así mismo, Moreno y Castellanos (1997), en un proyecto financiado por el MEN, proporcionaron una serie de prerrequisitos para abordar las ecuaciones de primer grado con una incógnita con los estudiantes, los cuales orientaron las primeras sesiones de la secuencia didáctica hacia la validación de esos saberes y/o prerrequisitos para solucionar ecuaciones de este tipo.

En conclusión, el recorrido por algunos antecedentes que fueron relevantes al presente proceso investigativo, generó una mirada más amplia al objeto de profundización, con el fin de hacer nuevos aportes al tema y contribuir al mejoramiento de la calidad educativa de los estudiantes de la I.E. Luis Eduardo Arias Reinel.

2.2. Orígenes y métodos en la resolución de problemas

La resolución de problemas matemáticos es uno de los procesos donde se ha centrado la actividad matemática, es por ello que desde la antigüedad se ha venido trasmitiendo todo el caudal de conocimiento acumulado por la humanidad durante milenios. En este sentido, Wussing (1998) realizó un recorrido histórico sobre los orígenes y métodos en la resolución de problemas, iniciando con el matemático griego Herón en el siglo I y II antes de nuestra era, quien fue el primero en incluir ejercicios con textos en sus trabajos matemáticos; de esta forma, se encontraron en tablillas de barro y papiros antiguos este tipo de ejercicios que se caracterizaban por iniciar con una exposición del problema matemático, representando los datos como cifras concretas y no como variables abstractas; luego, se continúa exponiendo la forma de ir resolviendo el problema paso a paso para llegar finalmente al resultado; así, el estudiante de la antigüedad quedaba capacitado para resolver cualquier otro problema del mismo tipo que se le pudiera presentar, entendiendo la misma representación teórica con otros números; en consecuencia, agrupaban los problemas para aplicar las técnicas aprendidas. Sin embargo, no eran aplicados para resolver situaciones o problemas de la vida cotidiana; eran utilizados como un artificio con fines pedagógicos y, más adelante, en los siglos V y VI de nuestra era, como procesos introductorios al estudio de la filosofía.

Para explicar lo ocurrido en la edad media, Sigarreta, Rodríguez y Ruesca (2006) expresan que la matemática alcanzó su máximo esplendor en los siglos V y VII de nuestra era, bajo los aportes de Aryabhata, Brahmagupta y Bháskara quienes exponen la resolución completa de la ecuación de segundo grado y de las ecuaciones indeterminadas y su aplicación para problemas prácticos. Pero solo fue hasta la época moderna donde se plantearon algunas reglas o pasos para solucionar problemas; estos pasos eran muchos, alrededor de 15 a 17, buscaban el empleo óptimo de las cuatro facultades: la inteligencia, la imaginación, los sentidos y la memoria. Ya en la época contemporánea aparecen los aportes de Poincaré en el siglo XX, como lo expresa Sigarreta et al. (2006): “Poincaré consideraba que las leyes de la ciencia no pertenecen al mundo real, sino que constituyen acuerdos convencionales para hacer más cómoda y útil la descripción de los fenómenos correspondientes” (p. 60). En este sentido, se da una interpretación más práctica a los procesos matemáticos exponiéndola hacia la descripción de fenómenos cotidianos.

En la época contemporánea, sin duda alguna, uno de los principales aportes a la resolución de problemas la realizó George Polya en 1945 con su obra “How to Solve It”. Donde se aíslan cuatro fases claramente identificables durante el proceso de resolución de problemas así: comprensión del problema; concepción de un plan; ejecución del plan; y, visión retrospectiva. En cada una Polya propone una serie de reglas heurísticas; sin embargo, se resalta la segunda fase como lo expresa el mismo Polya: “De hecho, lo esencial de la solución de un problema es concebir la idea de un plan” (Polya, 1990, p. 32).

Otro trabajo dedicado a la resolución de problemas es el de Schoenfeld (1985), citado por Barrantes (2006), quien después de grabar, tomar notas y desarrollar extensos registros de campo llegó a la conclusión que cuando se tiene o se quiere trabajar con resolución de problemas, como una estrategia didáctica, hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas (propuestas por Polya); de lo contrario no funciona; no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores propios del estudiante como sus creencias, los recursos y la motivación del estudiante; es decir, la metacognición (Barrantes, 2006).

De la misma forma, Guzmán (2007) propuso que en la resolución de problemas matemáticos se deben aplicar cuatro fases: (1) familiarización con el problema, (2) búsqueda de estrategias, (3) llevar adelante la estrategia, y (4) revisar el proceso y sacar conclusiones. Estas fases están enfocadas para que los estudiantes adquieran hábitos mentales que los capaciten en el manejo eficaz de los problemas.

Como resultado de lo anterior, la escuela actual debe reconocer los aportes históricos que ha tenido la matemática, principalmente en el campo de la resolución de problemas, y la importancia de resignificar algunos esquemas para este importante proceso matemático.

2.3. Concepto de Problema y Resolución de Problemas

Antes de abordar el concepto de problema es importante referenciar a George Polya, como uno de los primeros precursores en hablar sobre resolución de problemas, bajo este autor, el trabajo de los matemáticos es resolver problemas, la matemática realmente consiste en problemas y soluciones, por tanto, resolver problemas es hacer matemática, es así como el método Polya introduce el concepto de "heurística" para describir el arte de la resolución de problemas y como medio para crear conocimiento en matemáticas posibilitando el aprendizaje de esta disciplina (Vilanova et al, 2001).

Por otra parte, es importante definir el concepto de problema para lo cual, Alfaro y Barrantes (2008) citando a Schoenfeld (1985), quien expresa la dificultad para definir el concepto de problema, ya que es relativo a cada individuo, así:

> Un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea; utiliza la palabra problema para referirse a una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla. (p. 86)

Con relación al tema, Pochulu (2010) citando a Stanic y Kilpatrick (1989,) quienes construyen una clasificación de las definiciones de problema a partir de sus significados. Así, el primer significado es resolver problemas como contexto, donde los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares bajo cinco roles, que son: (1) como una justificación para enseñar matemáticas, (2) para proveer especial motivación a ciertos temas, (3) como actividad recreativa, (4) como medio para desarrollar nuevas habilidades, y (5) como práctica. El segundo significado relaciona la resolución de problemas como habilidad y el tercer y último significado se acerca a las ideas de Polya, al decir que resolver problemas es hacer matemática. En este último significado el estudiante debe poner en juego los siguientes elementos: 1) conocimientos de contenido matemático; 2) herramientas heurísticas para el abordaje del problema; 3) una representación mental del proceso de resolución de problemas, y 4) la conciencia de sus propias debilidades y fortalezas como resolutor.

Es entonces el tercer y último significado el que se adapta al proyecto de profundización, pues son elementos que el estudiante debe poner en juego ya que se encuentran inmersos en el diseño de las actividades de la secuencia didáctica aplicada a los estudiantes.

Por otra parte, Ferrer (2000) expone una definición más concreta sobre el concepto de problema donde es abordado de un modo práctico y no solo como un proceso propio del campo de la matemática, así: “Un problema es un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de las ciencias o la práctica, en el lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución[6]”. (p. 13)

La anterior definición articula elementos que fueron utilizados en el diseño de la secuencia didáctica como la relación del contexto práctico o cotidiano, donde se desenvuelven los estudiantes a partir del lenguaje común de los mismos y de la exigencia de medios matemáticos para solucionar los problemas que incluyen ecuaciones de primer grado con una incógnita.

[6] Bajo esta definición, el presente proyecto de profundización aborda el concepto de Problema.

2.4. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Uno de los objetos de estudio del presente proceso de profundización se enmarca en las ecuaciones de primer grado con una incógnita, por esto es conveniente exponer algunas conceptualizaciones al respecto para lo cual Moreno y Castellanos (1997) definen ecuación de primer grado con una incógnita como una expresión que en el lenguaje simbólico se presenta en la forma $Ax + B = C$ donde x es la expresión de una incógnita y A, B y C Son constantes. Para conocer una ecuación de primer grado con una incógnita como tal, es necesario partir de los conceptos de igualdad y de incógnita bajo diferentes representaciones gráficas y simbólicas. Los siguientes son ejemplos de las formas que usualmente se utilizan: 5 + ( ) = 6; 2x( ) = 6; 2x ( ) + 3 = -1; 3x +2 = 5.

Otra definición más concreta la presenta Flores (2006), el cual establece que una ecuación de primer grado con una incógnita es una igualdad que, después de efectuadas todas las reducciones posibles el exponente de la incógnita es 1. Así mismo indica que la ecuación está compuesta por un conjunto de términos divido en dos partes separados por el signo igual, donde los términos del lado izquierdo forman el primer miembro y los términos del lado derecho el segundo miembro.

De la misma forma, en la literatura matemática se encuentran múltiples definiciones de ecuaciones de primer grado con una incógnita, sin embargo en su mayoría concuerdan en que para solucionar este tipo de ecuaciones se necesitan habilidades para establecer relaciones entre las cantidades numéricas, la incógnita y el concepto de igualdad.

Con base en lo anterior Moreno y Castellanos (1997) establecen algunos prerrequisitos para abordar este tema: se requiere que cada estudiante opere correctamente con números enteros (suma, resta, multiplicación y división); halle el valor numérico de expresiones algebraicas sencillas para un valor específico de la variable; identifique la jerarquía de las operaciones suma, resta y multiplicación en expresiones numéricas propuestas; interprete enunciados sencillos que le permitan seguir instrucciones en la guía de trabajo e identifique la incógnita en la igualdad. Por lo tanto, es necesario abordar este tipo de prerrequisitos en las primeras sesiones de la una secuencia didáctica con el fin de contribuir la superar las dificultades que presentan los estudiantes objeto de estudio.

2.5. Conceptualizaciones sobre Obstáculo y Error

Es preciso aportar los sustentos teóricos que permitieron orientar el proyecto hacia los campos del concepto de error, para lo cual Barrantes (2006) referencia a Brousseau (1998), donde se conceptualiza el obstáculo acercándose a las causas que conducen a errores: “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado” (p. 3). De este modo al mencionar obstáculo, el autor no se refiere necesariamente a conocimientos erróneos; sino a tipos de conocimiento que están obstaculizando la adquisición o construcción de uno nuevo.

De la misma forma, Ruano, Socas y Palarea (2008), expresan que un error podrá tener distintas procedencias u orígenes, pero se considera como un esquema cognitivo inadecuado y no solo como consecuencia de una falta de conocimiento. En este sentido, es relevante prestar atención a los errores, para lo cual, Puerto, Minnaard y Seminara (2004) resaltan la importancia que se le debe prestar: “Los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas” (p. 3).

Así mismo, Rico (1995) expone cinco afirmaciones sobre los errores y su importancia para el aprendizaje:

- La presencia permanente de errores en la adquisición y consolidación del conocimiento humano es una cuestión compleja y delicada.

- El error es conocimiento deficiente e incompleto. El error es una posibilidad, y una realidad, permanente en el conocimiento científico.
- La ciencia es conocimiento verdadero. El desarrollo del conocimiento científico está plagado de errores.
- Objetivo del aprendizaje es la adquisición de conocimiento verdadero. Los procesos de aprendizaje incluyen errores sistemáticos.
- El error es un objeto de estudio para la Educación Matemática. (p. 70)

Partiendo de estas afirmaciones, es posible significar el concepto de error y catalogarlos como una posibilidad para construir nuevos conocimientos. Por tanto, su análisis debe movilizar al docente a generar reflexiones con relación a su tratamiento. En este sentido, Engler et al. (2004) establecen el papel que debe adoptar el docente frente a los errores en matemáticas:

> El docente debe entender los errores específicos de sus alumnos como una información de las dificultades de la matemática que requieren un esfuerzo para la superación. Es importante tener en cuenta que podemos superar un error y aceptarlo no como algo que no tendría que haber aparecido sino como algo cuya aparición es útil e interesante ya que permite la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento. (p. 31)

Por tanto, el docente debe ser consciente del papel que puede desempeñar el error en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que es una herramienta potencial para la formación matemática. De esta forma, un estudiante que pretenda superar un error, debe hacer una revisión y reestructuración de los conocimientos adquiridos anteriormente para articularlos a las nuevas situaciones.

En conclusión, un obstáculo se manifiesta por los errores que no son debidos al azar; son errores que aparecen una y otra vez; son reconocibles; en este caso específico, son errores que comenten los estudiantes al interpretar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

En este sentido y para fines del proyecto de profundización, la interpretación incorrecta de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, es producto de un obstáculo que no le permite al estudiante construir nuevos conocimientos; no precisamente en el área de matemáticas, sino en áreas como la física y la química que requieren de habilidades para interpretar problemas. Es así como en el presente estudio no se pretende estudiar las causas que producen los errores; más bien se pretende estudiar aquellas situaciones erróneas que aparecen en el trabajo de los estudiantes, principalmente cuando se enfrentan a problemas que los obligan hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben y posibilitarlo de modo que se contribuya a su superación.

De esta forma, el estudiante de grado décimo debe reorganizar su esquema cognitivo sobre el tema en cuestión[7], y adaptarlo a las nuevas estructuras que se les presenta con la finalidad de posibilitar la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

2.6. Algunas categorías en la clasificación de los errores

Radatz (1979), citado por Rico (1995), realiza una clasificación general de los errores a partir del procesamiento de la información, así: errores debidos a dificultades del lenguaje: el aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos estudiantes un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera; errores por recuperación de un esquema previo: el estudiante no es consiente que la situación es diferente a otras planteadas, por lo que no realiza inferencias de validez de las reglas o propiedades, sino más bien, las aplica por considerar que se encuentra en un contexto conocido; errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento: la experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información; teoremas o definiciones deformados: errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable; falta de verificación de la información: son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero

[7] Problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; errores técnicos: se incluyen en esta categoría los errores de cálculo al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

Por otra parte, Movshovitz, Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987) ofrecen una clasificación, resultado de una investigación sobre errores cometidos por estudiantes de secundaria en matemáticas, de donde se generaron seis categorías:

Datos mal utilizados: incluyen aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una situación, y el tratamiento que le ha dado el estudiante. Dentro de esta tipología se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace un lectura incorrecta del enunciado.

Interpretación incorrecta del lenguaje: se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

Inferencias no válidas lógicamente: incluyen aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico.

Teoremas o definiciones deformados: se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Se tiene en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; por ejemplo, aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmulas reconocibles.

*Falta de verificación en la solución***:** se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

*Errores técnicos***:** se incluyen en esta categoría los errores de cálculo; errores al tomar datos de una tabla; errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

En este sentido, se expusieron varias categorías de clasificación de errores, siendo la interpretación incorrecta del lenguaje la que más se acerca a las observaciones realizadas en el aula de clase de los estudiantes de grado décimo de la I.E. LEAR; por lo tanto, el error que se abordó desde el presente trabajo es aquel producto de la interpretación incorrecta de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, por ser el más recurrente en el proceso y el que determina directa e indirectamente la resolución correcta del problema.

2.7. Secuencia didáctica y trabajo cooperativo.

Según D'Hainaut (1985) citado por Díaz (2013), una secuencia didáctica responde fundamentalmente a una serie de principios que se derivan de una estructura didáctica (actividades de apertura, desarrollo y cierre) que permiten generar procesos centrados en el aprendizaje; trabajar a partir de situaciones reales; reconocer la existencia de diversos procesos intelectuales y de la variada complejidad de los mismos.

Por otra parte, Tobón, Pimienta y García (2010), exponen la secuencia didáctica como un reto para el docente, en la forma en que debe planificar la enseñanza frente a situaciones, donde organiza los procesos de acuerdo con ciertas metas orientadas en torno a las competencias que requieren los estudiantes, así:

> Las secuencias didácticas son, sencillamente, conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de

determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos. En la práctica, esto implica mejoras sustanciales de los procesos de formación de los estudiantes, ya que la educación se vuelve menos fragmentada y se enfoca en metas. (p. 20)

Otros elementos que se consideran para exponer con relación a la estructura de la secuencia didáctica, las propone Díaz (2013), donde resalta dos elementos que se realizan de forma paralela en una secuencia didáctica: la secuencia de las actividades para el aprendizaje y la evaluación para el aprendizaje. De esta forma, detectar una dificultad o una posibilidad de aprendizaje, permite reorganizar el avance de la secuencia. Es allí, donde la retroalimentación y el papel del docente como mediador de los procesos de enseñanza permiten validar los procesos que se vienen dando dentro de la secuencia de una forma evaluativa y formativa. A continuación, se presenta un cuadro donde se explica la organización de una secuencia didáctica; nótese los procesos de desarrollo o realización de las actividades y la evaluación como procesos paralelos.

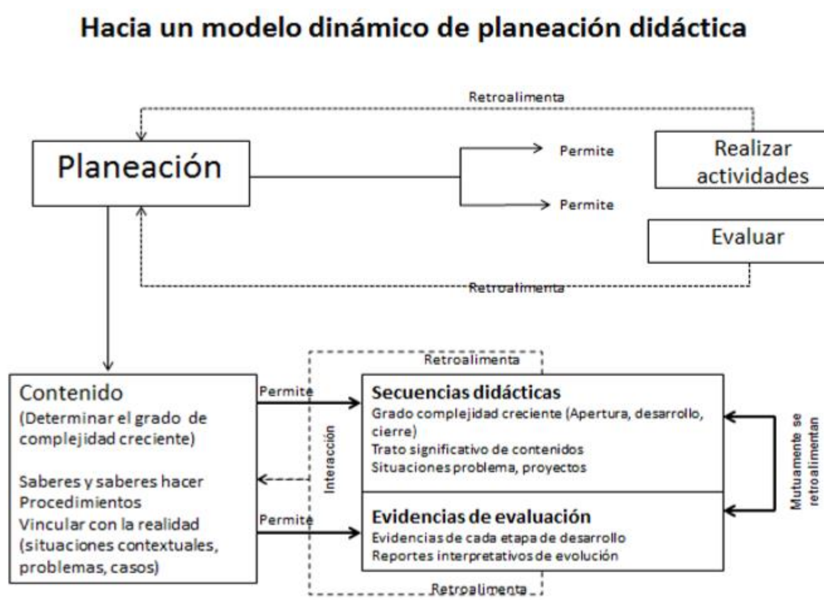


Ilustración 5: Modelo de planeación didáctica, tomado de Díaz (2013, p. 20)

De esta forma, tanto las actividades realizadas como la evaluación retroalimentan la planeación; a su vez, la planeación tiene en cuenta el contenido y la complejidad creciente de saberes, competencias y situaciones del contexto que se puedan articular a la misma; a partir de lo anterior, se diseñó la secuencia didáctica teniendo en cuenta los tres momentos (apertura, desarrollo y cierre) y las evidencias de evaluación como proceso constante en cada uno de los momentos que permiten analizar los alcances académicos y el reporte de la evolución del estudiante.

Con el fin de potencializar la secuencia didáctica, se articula el trabajo cooperativo identificando inicialmente el papel del docente en los procesos de aprendizaje, como como lo expresa Johnson, Johnson y Holubec (1999):

> Con el aprendizaje cooperativo, el docente pasa a ser un ingeniero que organiza y facilita el aprendizaje en equipo, en lugar de limitarse a llenar de conocimientos las mentes de los alumnos, como un empleado de una estación de servicio que llena los tanques de los automóviles. (p. 4)

Es así como el docente transforma su quehacer al favorecer el aprendizaje de los estudiantes bajo el análisis de su conducta en la cooperación; por ello, mientras que trabajan juntos, el docente debe circular entre los grupos para analizar sistemáticamente la interacción entre los miembros y así evaluar el progreso escolar y el empleo de las destrezas interpersonales. El docente debe escuchar lo que se habla en cada grupo y recoger datos sobre la interacción entre los miembros. Sobre la base de estas observaciones, el docente podrá intervenir para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte, Pliego (2011) expresa las ventajas del trabajo cooperativo en el aula de clase resaltando la estrategia para trabajar en grupos heterogéneos, así:

> La estructura del aprendizaje cooperativo permite fomentar interacciones positivas entre los alumnos y entre éstos y el profesor, por lo que se convierte en una estrategia instruccional de primer orden para facilitar el trabajo con un grupo heterogéneo, incluso con alumnos con necesidades y en situaciones de integración escolar. (p. 68)

No obstante, la cooperación es una interesante estrategia para el trabajo en el aula, ya que la heterogeneidad y los múltiples ritmos de aprendizaje que presentan los estudiantes es uno de los retos que debe enfrentar la educación pública colombiana; la cual requiere además de la resignificación del papel del docente en el aula de clase (Johnson, Johnson y Holubec, 1999), bajo una postura multifacética donde debe tomar una serie de decisiones antes de abordar la enseñanza, explicarles a los estudiantes la tarea de aprendizaje y los procedimientos de cooperación; supervisar el trabajo de los equipos; evaluar el nivel de aprendizaje de los estudiantes y alentarlos a valorar con qué eficacia están funcionando sus grupos de aprendizaje. Al docente le compete poner en funcionamiento los elementos básicos para hacer que los equipos de trabajo sean realmente cooperativos: la interdependencia positiva, la responsabilidad individual, la interacción personal, la integración social y la evaluación grupal (Johnson, Johnson y Holubec, 1999, p. 9).

Los anteriores elementos básicos de la cooperación son posibles de articular si se le asignan roles a los integrantes de cada equipo de trabajo. Los roles indican el papel que desempeña cada integrante del equipo y lo que esperan de él los demás; sin embargo, a veces los estudiantes se niegan a participar en un equipo cooperativo, o no saben cómo contribuir al buen desarrollo del trabajo. Frente a esto, el docente puede ayudar a resolver y prevenir ese problema otorgándole a cada miembro un rol concreto que deberá desempeñar dentro del grupo. Por una parte, Johnson, Johnson y Holubec (1999), establecen las ventajas de trabajar con roles en los equipos cooperativos, así:

> (a) Reduce la probabilidad de que algunos alumnos adopten una actitud pasiva, o bien dominante, en el grupo. (b) Garantiza que el grupo utilice las técnicas grupales básicas y

> que todos los miembros aprendan las prácticas requeridas. (c) Crea una interdependencia entre los miembros del grupo. Esta interdependencia se da cuando a los miembros se les asignan roles complementarios e interconectados. (p. 24)

Por tanto, asignar roles a los estudiantes es una de las maneras de que los miembros del grupo trabajen juntos y en forma productiva; a su vez y a modo de conclusión, la labor del docente es compleja cuando decide abordar el trabajo cooperativo en el aula de clase, ya que debe asegurar que los equipos de trabajo sean realmente cooperativos; verificar el cumplimiento de las características y motivar a los estudiantes al alcance de las metas. A nivel general, en el trabajo cooperativo se pueden encontrar las herramientas que posibilitan la enseñanza de las matemáticas; lo que podrá contribuir a la superación de la interpretación incorrecta de problemas en los estudiantes de grado décimo, en articulación con una secuencia didáctica, diseñada a partir de las necesidades de los estudiantes.

En este sentido, es importante diferenciar entre dos términos, cooperación y colaboración, que comúnmente se utilizan indistintamente para referirse al trabajo en grupo; sin embargo, presentan ciertas diferencias para lo cual Lucero (2003) diferencia al trabajo cooperativo como el método donde el grupo trabaja por un objetivo común y el resultado es evaluado de manera grupal. En el trabajo cooperativo el docente tiene más control sobre el aprendizaje; sin embargo, este control se ejerce de manera que permita el desarrollo gradual de las habilidades colaborativas del estudiante y estimule su autonomía.

Por otra parte, Lucero (2003) plantea en el método colaborativo que tanto los productos como la evaluación son individuales; allí la tarea colaborativa es contraria a la cooperativa; no es distribuida entre los participantes, sino que se compone de actividades de exploración de contenido, elaboración de representaciones y comunicaciones de ideas y de conocimientos. Estas actividades no son todas realizadas en grupo y por el grupo, necesariamente, como en el caso de la cooperación, y aunque parezca paradójico, la realización de la tarea colaborativa se articula ante todo en torno a un proceso individual.

En vista de lo anterior, el proyecto de profundización se inclinó por el trabajo cooperativo porque permite una mejor interacción entre los miembros y permite que el docente haga parte de la cooperación, en la medida en que orienta los aprendizajes y permite el desarrollo de las habilidades cooperativas de cada uno de sus miembros, direccionado en este caso hacia la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita en estudiantes de grado décimo de la I.E. LEAR.

3. Marco Metodológico

El presente proyecto de profundización se enmarcó en un paradigma de investigación cualitativo, pues estuvo dedicado a posibilitar la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita a partir del trabajo cooperativo, a través de una secuencia didáctica. En este sentido, Mejía (2004), define la investigación cualitativa como un procedimiento metodológico que utiliza datos cualitativos como las palabras, textos, dibujos, gráficos e imágenes; utiliza descripciones detalladas de hechos, citas directas del habla de las personas y extractos de pasajes enteros de documentos para construir un conocimiento de la realidad social.

En cuanto al proyecto de profundización, el paradigma cualitativo se pudo evidenciar desde la crítica y reflexión pedagógica en la cual surge la problemática a intervenir, y al utilizar datos cualitativos, producto de la secuencia didáctica aplicada en el trabajo de campo que permitió construir un análisis del objeto de estudio.

Acorde con lo anterior (Comisión Maestría en Educación de Profundización, 2015), el proyecto de profundización presenta un enfoque educativo crítico social, ya que se origina a partir de una problemática observada en las instituciones educativas y busca que su intervención sea articulada a los diferentes proyectos institucionales de fortalecimiento de la calidad educativa, en coherencia con el programa de Maestría en Educación Modalidad de Profundización, el cual "…busca, desde el sentido crítico, problematizador e investigativo, una transformación de los procesos de enseñanza de los docentes involucrados en el Proyecto de Profundización" (Comisión Maestría en Educación de Profundización, 2015, p. 6). En este sentido, Cuahonte y Hernández (2015) resaltan la finalidad del enfoque educativo crítico social así: "…su finalidad es la transformación de la estructura de las relaciones sociales y dar respuesta a determinados problemas generados por éstas, partiendo de la acción reflexiva de los integrantes de la comunidad" (p. 27). En este sentido, el enfoque crítico social en el cual se enmarcó el presente proyecto de profundización, tiene como objetivo promover transformaciones en las prácticas de aula, dando respuesta a problemas específicos con la participación de los actores de la investigación.

De igual forma, el mejoramiento de los procesos de enseñanza inician a partir de la reflexión frente a los actuales sistemas educativos, con el fin de hacerlos más coherentes y transformadores; por esto, el proyecto hace parte del método de investigación – acción pedagógica, pues se "pretende que el docente investigue a la vez que enseñe" (Restrepo, 2005, p. 47). De la misma forma, se busca que los docentes investigadores logren reflexionar en la acción; es decir, que "logren una conversación reflexiva con la situación problema y construir de esta forma, saber pedagógico, haciendo su práctica más pertinente a las necesidades del contexto", Schon (1983-1987) citado por Restrepo (2005, p. 49). Así mismo, todo el proceso investigativo estuvo encaminado desde las tres fases de la investigación acción educativa o pedagógica expresado por Restrepo (2005); deconstrucción, reconstrucción y validación de la práctica.

En este orden de ideas, la fase de deconstrucción es el proceso que trasciende la misma crítica y que va más allá de un autoexamen de la práctica que genera un conocimiento profundo y una comprensión absoluta de la misma; haciendo de esta un punto indispensable para proceder a la transformación, para dar paso a la reconstrucción, que es la propuesta de una práctica alternativa más efectiva a partir del conocimiento de las falencias de la práctica anterior; por último, la fase de validación de la práctica, consiste en constatar que la nueva práctica logra los propósitos de la educación sin caer de nuevo en un discurso pedagógico sin prueba de efectividad.

En el proyecto la fase de deconstrucción se evidenció en la crítica reflexiva que permitió generar el problema de profundización; mientras que la reconstrucción fue el diseño de la secuencia didáctica articulada al trabajo cooperativo y, por último, la validación de la práctica fue el análisis de los alcances de la aplicación de la secuencia, las retroalimentaciones hechas a la misma y las reflexiones que se generaron para mejorar las prácticas de aula y hacerlas más pertinentes a las necesidades de los estudiantes.

De esta forma, la secuencia didáctica permitió organizar las actividades para crear situaciones de aprendizaje; en este sentido Díaz (2013) expresa que: “las secuencias constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán para los estudiantes, con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo” (p. 4). Con esta finalidad se diseñó una secuencia didáctica basada en los aportes teóricos y metodológicos obtenidos por Díaz (2013), los cuales proporcionaron la estructura de la misma a partir de actividades de inicio, desarrollo y cierre, lo que permitió orientarlas hacia el cumplimiento de los objetivos del proyecto; se propusieron 4 momentos para ser abordados en 8 sesiones; en cada momento se identificaron claramente las siguientes actividades:

Inicio o actividades de apertura: fueron los espacios para indagar ideas previas y propiciar el clima de aprendizaje.

Actividades de Desarrollo: fue el espacio utilizado para que los estudiantes generaran interacción con la nueva información; ésta fue posible gracias a las ideas previas identificadas en las actividades de apertura.

Actividades de Cierre: este espacio tuvo la finalidad de lograr una integración del conjunto de tareas para realizar una síntesis del aprendizaje desarrollado; es decir, fue el momento donde el estudiante evidenció el aprendizaje alcanzado durante la sesión.

A continuación, se presenta una tabla donde se muestra de una forma organizada y progresiva, la disposición y tiempo empleado en la aplicación de la secuencia.

Tabla 1

Organización de la secuencia didáctica aplicada, construcción propia

Momento	Intención para el momento	Distribución del tempo en sesiones
Momento # 1: ¿Cómo lo hago?	Reconocer algunas expresiones básicas para traducir expresiones verbales a algebraicas	Sesión # 1: Inicio y desarrollo Sesión # 2: Cierre
Momento # 2: Aplico lo aprendido	Abordar problemas donde se aplique las herramientas trabajadas en la sesión anterior para facilitar la comprensión de enunciados verbales y su correspondiente traducción al lenguaje simbólico.	Sesión # 3: Inicio y Desarrollo Sesión # 4: Cierre
Momento # 3: ¡Así se desarrolla!	Integrar lo aprendido en las sesiones anteriores para abordar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita de forma cooperativa	Sesión # 5: Inicio y Desarrollo Sesión # 6: Cierre
Momento # 4: Demostramos lo aprendido	Demostrar las habilidades alcanzadas para traducir expresiones verbales a expresiones simbólicas al abordar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Sesión # 7: Inicio y Desarrollo Sesión # 8: Cierre

Todos los momentos y sesiones fueron trabajados en equipos cooperativos de cuatro estudiantes, cada uno con un rol específico retomando a Johnson, Johnson y Holubec (1999), quienes establecen las ventajas de trabajar con roles concretos. En este sentido se construyeron cuatro roles para el desarrollo de toda la secuencia didáctica, orientados según los pasos para abordar problemas, así:

Secretario: Su función general fue la de tomar atenta nota de los problemas, extraer la información para analizar, registrar las ideas o propuestas de solución a cada problema.

Graficador: Representó con dibujos o gráficas el problema con el fin de visualizar su posible solución.

Constructor: Su función fue la de construir el plan o posible ecuación a desarrollar, identificando los datos y la incógnita a partir del planteamiento del secretario y los dibujos del graficador.

Desarrollador: Fue el encargado de darle solución a la ecuación planteada por el constructor. Es decir, es quien ejecuta el plan, verifica el resultado y socializa el desarrollo del problema planteado.

Cada integrante del equipo tuvo un momento para desempeñar su función en el desarrollo de cada problema, sin dejarlo "solo"; todos los integrantes compartieron en algún momento los demás roles; por ejemplo, al momento de desarrollar el plan, todos los integrantes del equipo estuvieron atentos y prestos a colaborar con el compañero, para que desempeñara su rol a cabalidad; lo mismo que al momento de interpretar el problema y construir el plan, todos estuvieron enfocados en esta función.

Todos los datos, resultado de la secuencia didáctica y del trabajo cooperativo, fueron obtenidos en ambientes naturales y cotidianos de los participantes, (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). En este caso fue el aula de clase de los estudiantes de grado décimo, donde se utilizaron estrategias interactivas, es decir, aquellas que permitieron interactuar con los actores en el proceso de profundización. Mcmillan y Schumacher (2005) se refieren a las estrategias interactivas:

> Los investigadores cualitativos estudian las perspectivas de los participantes con estrategias interactivas, (por ejemplo, la observación del participante, la observación directa, las entrevistas en profundidad, los instrumentos y técnicas suplementarias). Las estrategias de investigación son flexibles, pues emplean diversas combinaciones de técnicas para obtener datos válidos. (p. 401)

De esta forma, se utilizaron como técnicas de recogida de datos la observación participante, técnicas suplementarias y documentos o guías de trabajo para lo cual se contó previamente con el consentimiento informado de los padres de familia de cada uno de los estudiantes protagonistas del proceso de profundización.

En este sentido, Mcmillan y Schumacher (2005) consideran la observación participante como una técnica interactiva de “participar” hasta cierto punto en las situaciones que ocurren de forma natural durante un periodo de tiempo, y escribir extensas notas de campo que describen lo que ocurre; en este caso se utilizó el diario de campo. Entendiendo diario de campo como el conjunto de anotaciones personales que incluyen las descripciones del ambiente o contexto, tanto iniciales como posteriores, mapas, diagramas (cuadros y esquemas) que describen lugares y participantes, relaciones y eventos que el investigador considera relevante para el análisis de resultados. En conclusión, el diario de campo es donde el docente investigador expresa sus anotaciones, reflexiones, puntos de vista, conclusiones preliminares, hipótesis iniciales, dudas e inquietudes (Hernández et al., 2016).

Por otra parte, algunas técnicas suplementarias ayudaron a interpretar, elaborar y corroborar datos obtenidos en la observación participante (Mcmillan y Schumacher, 2005). Por lo tanto, se utilizaron instrumentos como videos, fotografías, audios y diálogos registrados en diferentes formatos, así mismo, la secuencia didáctica presentó una ventaja importante porque, “son producidos por los participantes o los sujetos de estudio, se encuentran en su lenguaje y usualmente son importantes para ellos” (Hernández et al., 2006, p. 619); en este sentido, se tomaron los productos de la secuencia didáctica y los cuestionarios al finalizar casa sesión los cuales proporcionaron importante información para el análisis de resultados.

Así mismo, se centró la atención en un fenómeno que involucraba a dos equipos cooperativos seleccionados intencionalmente para posibilitar la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Los protagonistas del proyecto fueron estudiantes analizados bajo una técnica de muestreo intencionado, según Mcmillan y Schumacher (2005):

> El muestreo intencionado requiere que la información se obtenga sobre variaciones entre las subunidades antes de que se elija el modelo. Entonces, el investigador busca para la «información abundante» informadores clave, grupos, escenarios o acontecimientos para estudiarlos. En otras palabras, estos modelos se escogen porque es probable que sean inteligibles e informativos sobre los fenómenos que el investigador está investigando. (p. 406-407)

En este orden de ideas, se escogieron dos equipos cooperativos de los ocho conformados con 32 estudiantes del grupo de aplicación; estos equipos fueron seleccionados teniendo en cuenta las siguientes características:

1. Que ambos equipos estuvieran conformados por estudiantes con características heterogéneas relacionados con su rendimiento académico, compromiso y voluntad hacia el trabajo.
2. Que los estudiantes presentaran una continuidad académica desde grado noveno, orientados con el docente investigador, ya que las adecuaciones hacia el trabajo cooperativo requieren de tiempo, teniendo en cuenta que “La capacitación para emplear

el aprendizaje cooperativo no es un proceso rápido (…) El docente debe llevar a cabo el aprendizaje cooperativo durante cierto tiempo antes de empezar a adquirir una verdadera capacidad al respecto". (Johnson, Johnson y Holubec, 1999, p. 11-12)

Para fines explicativos de ahora en adelante se presentarán con los nombres de Equipo Alfa y Equipo Beta para indicar las acciones de cada equipo cooperativo. Fue entonces como el equipo Alfa durante toda la aplicación de la secuencia fue dinámico, preguntaban constantemente al docente, y evidenció buena interacción entre los miembros; de igual forma fue notoria su voluntad e interés por el trabajo. Por otra parte, el equipo Beta de igual forma que el equipo Alfa evidenció buena interacción entre sus integrantes, expresaba al docente las inquietudes que surgían en el proceso de interpretación y resolución evidenciando buena disposición hacia el trabajo y motivación hacia el mismo.

Para recopilar los datos y realizar un tratamiento de los mismos, se siguieron las fases cualitativas de la recopilación de datos establecidas por Mcmillan y Schumacher (2005, p. 412).

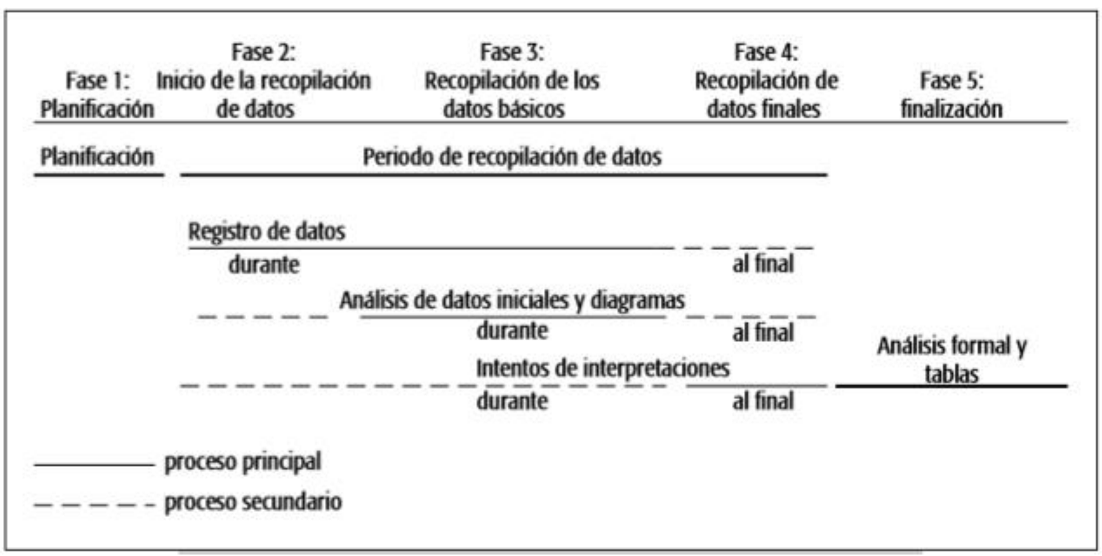


Ilustración 6: Fases de la recopilación de datos. Mcmillan y Schumacher (2005, p. 412)

Como se puede observar en la ilustración 6, durante el proceso de constitución de datos se realizaron algunas interpretaciones del fenómeno de estudio y las implicaciones que la secuencia didáctica venía desarrollando en los estudiantes, con el fin de realizar modificaciones a la misma buscando el alcance de los objetivos del proyecto.

A partir de los datos obtenidos en los equipos Alfa y Beta, resultado del desarrollo de cada una de las sesiones, la secuencia didáctica, audios, videos, diario pedagógico y algunos diálogos, se desarrolla inicialmente un sistema de organización como lo propone Mcmillan y Schumacher (2005):

> El desarrollo de un sistema de organización consiste en dividir los datos en segmentos, es decir, en partes más pequeñas de datos que contengan una «porción del significado». Los fragmentos de los datos se denominan segmentos, incidentes, unidades de significado o unidades de análisis. Un segmento de datos es comprensible por sí mismo y contiene una idea, episodio o asunto relevante para el estudio. (p. 486-487)

Las agrupaciones de datos recibieron el nombre de unidades de análisis que posteriormente se unieron en temas generales para formar las categorías, con relación a esto Mcmillan y Schumacher (2005) expresan que:

> Las categorías emic representan perspectivas del interior, como por ejemplo: términos, acciones y explicaciones que son distintas del lugar o de la gente. Las categorías etic representan las perspectivas del exterior de la situación: los conceptos del investigador y las explicaciones científicas. (p. 493)

En este orden de ideas, el presente proyecto de profundización contó con categorías EMIC que dieron paso al análisis de resultados, o como lo expresa Hernández et al. (2006), como categorías emergentes, ya que surgieron como aspectos recurrentes en el proceso de profundización.

Para llegar a las categorías se realizó el siguiente proceso: inicialmente se tomaron cada uno de los datos obtenidos en el aula de clase: videos, fotografías, audios, diálogos, cuestionarios y diario pedagógico, de toda esta información se seleccionaron algunas unidades de sentido o fragmentos que apuntaban a dar respuesta a la pregunta y objetivos de profundización, estos fragmentos se clasificaron en subgrupos denominados unidades de análisis que posteriormente dieron paso a las categorías.

Con el fin de organizar la información inicial, se construyó una tabla que sirvió para agrupar aquellos fragmentos relevantes para el proyecto. Esta permitió describir la naturaleza del dato, analizarlo desde las perspectivas de los docentes investigadores y relacionarlo con algunas referencias teóricas consultadas, estos tres aspectos dieron paso a la triangulación de la información. A pesar de que la tabla terminó con una importante extensión, facilitó en gran medida la agrupación y conformación de unidades de análisis y por último, las categorías. A continuación se presenta el esquema de la tabla utilizada para el tratamiento de los datos.

Tabla 2

Análisis de datos, construcción propia

Fecha de la actividad	Dato y naturaleza	Análisis del dato	Referencia teórica	Triangulación de la información	Nombre de la unidad de Análisis

Resultado de la tabla de datos y su análisis, se pudieron consolidar las siguientes categorías, unidades de análisis y unidades de sentido o episodios que se presentan en el siguiente esquema diseñado por los autores del proyecto

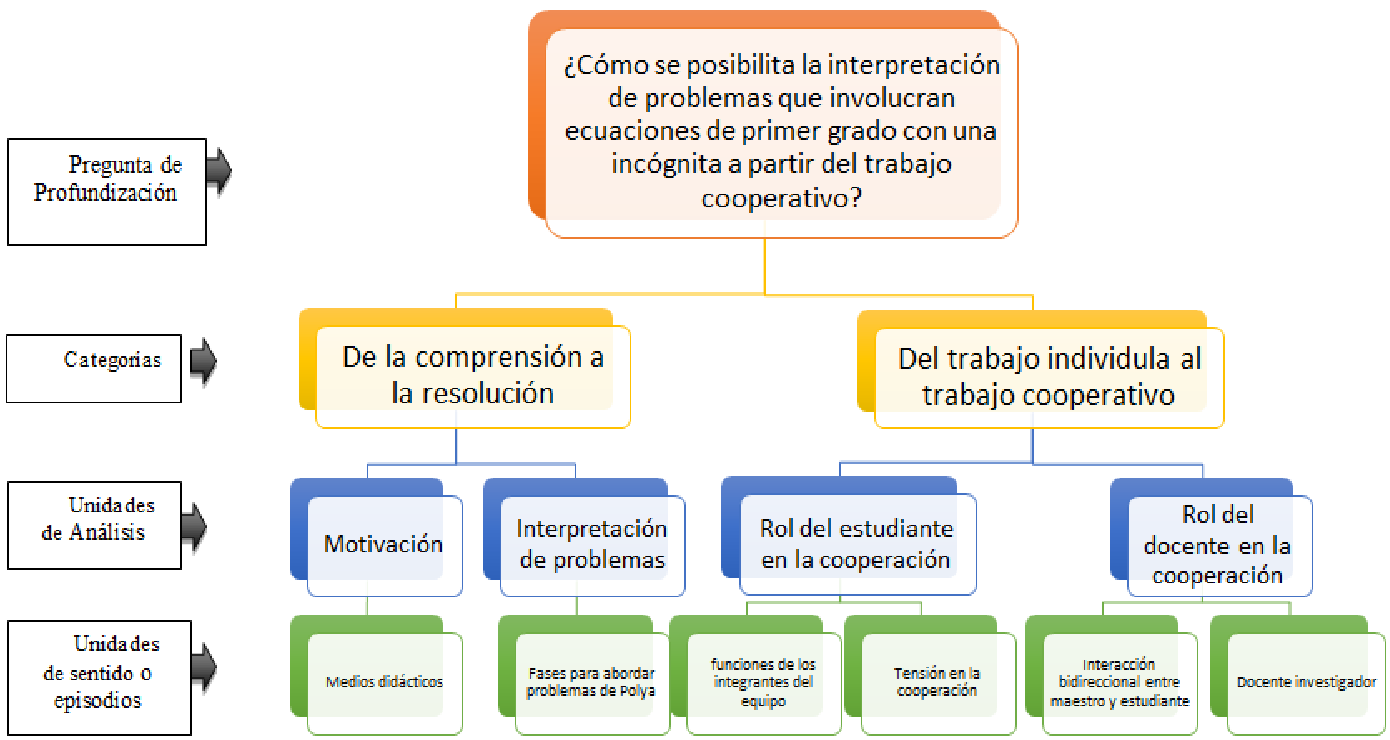


Ilustración 7: Esquema de categorías y unidades de análisis emergentes del trabajo de campo diseñado por los autores del proyecto (construcción propia).

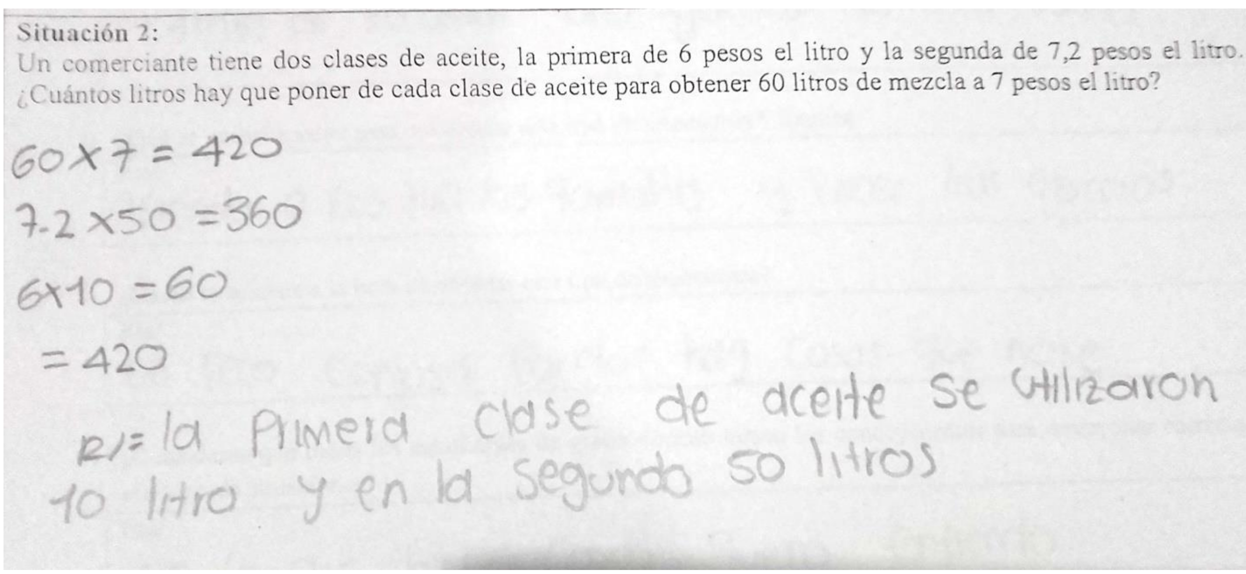
En el esquema anterior se evidencian dos categorías: la primera de ellas denominada de la comprensión a la resolución, contiene dos unidades de análisis: motivación e interpretación de problemas; la segunda categoría denominada del trabajo individual al trabajo cooperativo, le corresponden dos unidades de análisis: el rol del estudiante y el rol del docente en la cooperación. Cada una es tratada bajo un sistema de triangulación, entendiendo éste como lo expresa Leal (2015), quien cita a Elliot y Aldeman (1976): “es el procedimiento para organizar diferentes tipos de datos en un marco de referencia o relación más coherente de manera que se puedan comparar y contrastar” (p. 21).

Lo anterior permite relacionar el dato o episodio del trabajo de campo, el sustento teórico que da lugar y la interpretación realizada por los docentes investigadores. De la misma forma, McKernan (2001), citado por Leal (2015), indica que la triangulación se puede producir en cuatro niveles: conceptual o teórica, de información o de datos recogidos en diferentes entornos, del investigador y metodológica; en este caso la triangulación está enmarcada en el nivel de investigador, cuya finalidad es la de: “buscar mayor validez a los hallazgos, a través de la comparación de las perspectivas inherentes a cada uno de los observadores/investigadores que participan en un estudio” (p. 28). Fue entonces como los datos obtenidos en el trabajo de campo se confrontaron con la teoría y se analizaron para dar paso a las conclusiones finales que dieron respuesta a la pregunta de profundización y dieron cumplimiento a los objetivos trazados al inicio del proyecto.

4. Presentación de resultados

Antes de iniciar la presentación de resultados, es conveniente resaltar los procesos que los estudiantes de grado décimo venían desarrollando al momento de interpretar y dar solución a un problema que involucra ecuaciones de primer grado con una incógnita, motivo que desencadenó la necesidad de proponer el presente proceso de profundización.

Previo a la aplicación de la secuencia didáctica, se aplicó un problema que involucraba ecuaciones de primer grado con una incógnita, proporcionado por otros colegas del área de matemáticas, esto con el fin de concretar la dificultad que presentaban los estudiantes de grado décimo al abordar este tipo de situaciones e identificar procedimientos erróneos, donde se encontraron resoluciones como la siguiente:



Situación 2:
Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de 6 pesos el litro y la segunda de 7,2 pesos el litro. ¿Cuántos litros hay que poner de cada clase de aceite para obtener 60 litros de mezcla a 7 pesos el litro?

$60 \times 7 = 420$

$7.2 \times 50 = 360$

$6 \times 10 = 60$

$= 420$

R/= la Primera clase de aceite se utilizaron 10 litro y en la segunda 50 litros

Ilustración 8: Resolución del equipo Beta antes de aplicar la secuencia didáctica, enero 18 de 2018

Como se observa en la ilustración anterior, es lo que evidencia el docente en el aula de clase, no solo desde el área de matemáticas, sino desde la física y la química, ya que son procesos utilizados en situaciones o problemas de las Ciencias Naturales.

En el ejercicio desarrollado por el equipo Beta, es posible observar la ausencia de un orden o plan para su resolución; no existe una incógnita definida al respecto, ni mucho menos la posibilidad de comprobar su resultado final. Lo anterior evidencia el error más común evidenciado en el aula de clase relacionado con la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, y lo que motivó al planteamiento del presente proyecto de profundización. Además se puede notar la descontextualización del problema, proceso que acrecenta la complejidad para la comprensión del estudiante pues se habla de pesos no reales para nuestro contexto (6 pesos y 7,2 pesos el litro de aceite).

Por otra parte, el equipo Alfa también evidenció dificultades al momento de solucionar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, antes de aplicar la secuencia didáctica; se observó al igual que el equipo Beta la ausencia de un orden, plan o ruta coherente para su resolución o para la comprensión del mismo, dificultades importantes para reconocer la incógnita y los elementos de la ecuación.

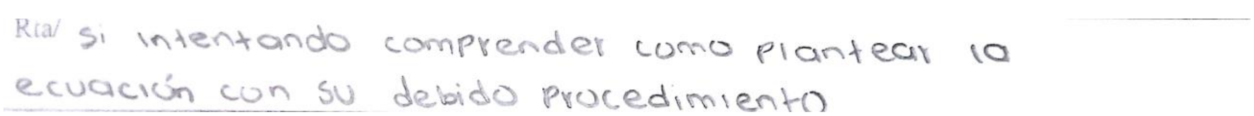
Con respecto a lo anterior, un integrante del equipo Beta explicó la forma en que realizó el proceso al interpretar y solucionar el problema planteado así:

> "Mire profe, yo primero leí el problema y comencé a sacar los números para saber qué operación había que hacer, entonces había que multiplicar, multiplique los valores para que me diera lo que me estaban pidiendo, yo creo que estaba bien porque al sumar 360 + 60 me dio 420 que fue el resultado de multiplicar 60 * 7 = 420". (Respuesta de un integrante del equipo Beta, antes de aplicar la secuencia didáctica, enero 18 de 2018)

Como se puede observar, los estudiantes intentan seguir algunos pasos para darle solución al problema, sin embargo son deficientes porque no hay una claridad sobre lo que deben hacer en cada uno de ellos, además evidencian importantes dificultades al momento de identificar la incógnita en el problema resultado de ello son los errores en la interpretación del problema.

Al respecto Rico (1995) expresa que: “Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores” (p. 82),, en este sentido, los estudiantes abordan la interpretación y resolución de problemas por caminos muy diferentes a los que cree el docente, lo que lo debe movilizar hacia el campo de la investigación en el aula con el fin de orientar los aprendizajes de sus estudiantes y clarificar procesos en la resolución de problemas.

Otro integrante del equipo Alfa responde por escrito a la pregunta: ¿Lograste desarrollar el problema?, ¿Cómo lo hiciste?


Rta/ si intentando comprender como plantear la ecuación con su debido procedimiento

Si, intentando comprender como plantear la ecuación con su debido procedimiento.

Ilustración 9: Respuesta de un integrante del equipo Alfa antes de aplicar la secuencia didáctica, enero 18 de 2018.

Por lo anterior es posible determinar cómo los estudiantes de grado décimo tienen presente el primer paso para solucionar un problemas, sin embargo al momento de abordar una situación no logran identificar sus elementos lo que se traduce en errores en la interpretación de problemas.

El anterior análisis previo permitió orientar mejor el proceso de interpretación de resultados y resaltar los avances que presentaron los estudiantes en la comprensión y resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

4.1. De la comprensión a la resolución

Para esta primera categoría surgieron dos unidades de análisis: motivación y secuencia didáctica; ambas retroalimentadas por los episodios titulados como medios didácticos y fases para abordar problemas. A continuación, se presenta el análisis de esta categoría

4.1.1. Motivación.

Con el fin de que los estudiantes adquirieran habilidades para interpretar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, se utilizaron como medios didácticos el dominó de expresiones[8] y la escalera de resoluciones[9] (ver anexo 2), entendiendo como medio didáctico a una herramienta que consigue motivar al estudiante, optimizar la concentración, reducir la ansiedad ante situaciones de aprendizaje y evaluación, dirigir la atención, organizar las actividades y tiempo de estudio entre otros (Díaz y Hernández, 2002). De la misma forma López (2014) define medio didáctico como: "un componente que estimula el aprendizaje y abarca todos aquellos recursos que el profesor puede utilizar para facilitar la comunicación con los alumnos" (p. 12).

Además los medios didácticos permitieron fortalecer los prerrequisitos que Moreno y Castellanos (1997) establecen para abordar ecuaciones de primer grado con una incógnita: la operación correcta con números enteros (suma, resta, multiplicación y división); hallar el valor numérico de expresiones algebraicas sencillas para un valor específico de la variable; identificar la jerarquía de las operaciones suma, resta y multiplicación en expresiones numéricas propuestas; interpretar enunciados sencillos que le permitan seguir instrucciones en la guía de trabajo e identificar la incógnita en la igualdad.

[8] El dominó de expresiones fue una modificación realizada por los docentes autores del proyecto con el fin de alcanzar los objetivos de la sesión.

[9] La escalera de resoluciones fue una modificación al juego de escalera tradicional, para lo cual se utilizaron como condiciones la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Fue entonces, cuando el dominó de expresiones como medio didáctico permitió motivar a los estudiantes, evidenciado en la participación activa, compromiso y trabajo cooperativo. La actividad del dominó tenía como objetivo reconocer algunas asociaciones verbales comunes para interpretar problemas. Cada equipo cooperativo contaba con 28 fichas, que estaban compuestas por una expresión verbal y una expresión algebraica; la meta era organizar todas las fichas haciendo coincidir cada expresión verbal con la expresión algebraica iniciando con la ficha doble, para lo cual debieron trabajar cooperativamente repartiendo las fichas a todos los integrantes, de tal modo que cada uno propusiera un movimiento, así:

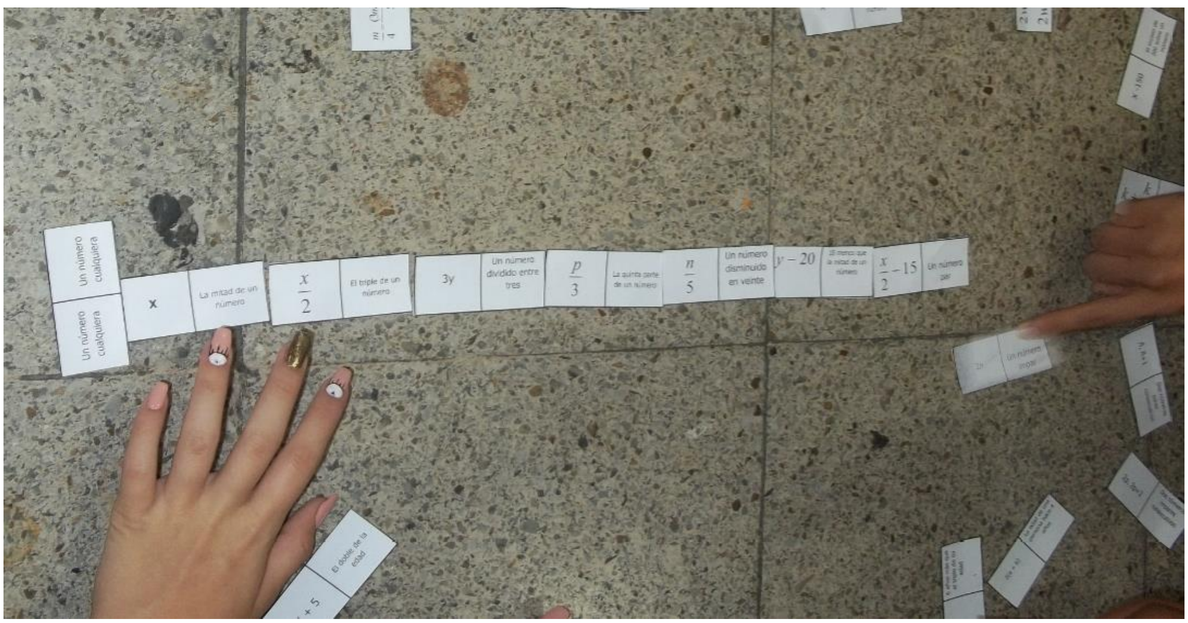


Ilustración 10: Construcción cooperativa del equipo Alfa, febrero 8 de 2018

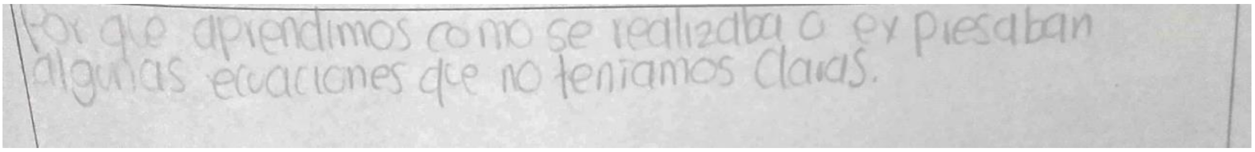
Los estudiantes cambiaron el escenario del aula de clase por el pasillo del colegio donde se sintieron en libertad de trabajar en el piso, discutir en equipos sobre la solución del dominó y comprender que una asociación incorrecta determinaba la composición final del mismo. Al finalizar la sesión, se realizaron preguntas a los estudiantes con el fin de indagar sobre las percepciones e intereses generados con la actividad, obteniendo respuestas como la siguiente:

> Profe, estuvo muy buena, hacían falta actividades así, porque a uno lo ponen a copiar, copiar y copiar, y a uno no se le queda nada; qué bueno que en matemáticas hiciéramos actividades así, el tiempo se va volando y lo ponen a uno a pensar (Respuesta en audio del equipo Beta al finalizar la sesión 2, febrero 8/2018).

Ilustración 11: Trabajo cooperativo en la sesión 2 utilizando el dominó de expresiones como medio didáctico; Equipo Beta y Equipo Alfa respectivamente, febrero 8 de 2018.

Con relación a lo observado en los estudiantes y a respuestas como la anterior, Varela (1994), resalta la importancia de la intención que deben tener las actividades matemáticas en el aula: “Las actividades realizadas en una clase de matemática deben contribuir al desarrollo de la capacidad de pensamiento del alumno, con miras a que cada individuo dentro del aula aprenda a razonar matemáticamente y aumente su capacidad para resolver problemas” (p. 130). Las actividades mediadoras alrededor de situaciones matemáticas permiten al estudiante desarrollar capacidades que posibilitan un mejor razonamiento para contribuir en la interpretación correcta de situaciones como el primer paso para resolver problemas.

Así mismo, el equipo Alfa expresó por qué estas actividades les ayudaron a mejorar la interpretación de problemas:

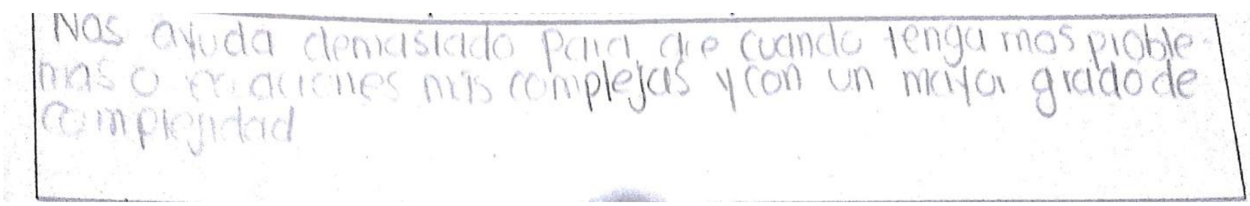


Por que aprendimos como se realizaba o expresaban algunas ecuaciones que no teniamos claras.

Porque aprendimos cómo se realizaba o expresaban algunas ecuaciones que no teníamos claras.

Ilustración 12: Respuesta del equipo Alfa al finalizar la sesión 2, febrero 8 de 2018

De esta forma la actividad del dominó permitió a que los estudiantes reconocieran algunas asociaciones matemáticas (ver anexo 2) para comprender mejor los problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita; así mismo, el equipo Alfa resaltó el aporte de esta actividad mediadora para comprender problemas:

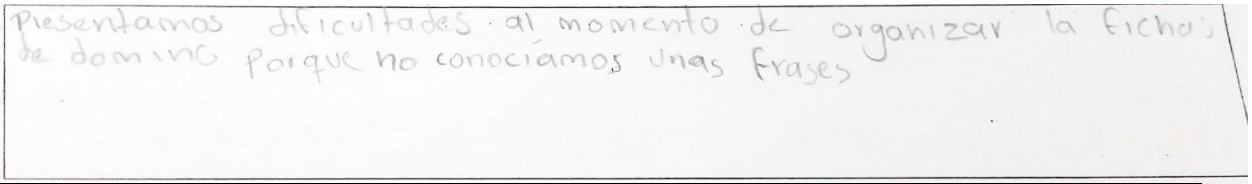


Nos ayuda demasiado para que cuando tenga mas proble-
mas o ecuaciones mas complejas y con un mayor grado de
complejidad

Nos ayuda demasiado para que cuando tenga más problemas o ecuaciones más complejas y con un mayor grado de complejidad.

Ilustración 13: Respuesta del equipo Alfa al finalizar la sesión 2 realizada el 8 de febrero de 2018

Con relación a lo anterior, es posible resaltar el aporte que generó la actividad del dominó de expresiones para contribuir a superar la interpretación incorrecta de problemas, porque permitió el reconocimiento de expresiones que presentaban confusión en los estudiantes o que no conocían y, por ende, fuente de errores al momento de ser utilizas en la interpretación de problemas; con relación a esto el equipo Beta expresa las dificultades que se presentaron al momento de desarrollar la actividad del dominó:


Presentamos dificultades al momento de organizar la fichas de domino porque no conociamos unas frases

Presentamos dificultades al momento de organizar las fichas de dominó porque no conocíamos unas frases.

Ilustración 14: Respuesta del equipo Beta al finalizar la sesión 2 realizada el 8 de febrero de 2018

Además de lo anterior, la actividad mediadora del dominó permitió que los estudiantes salieran de la cotidianidad del salón de clase; se divirtieran y cooperaran en busca de un objetivo en común; es así como el equipo Beta expresa las ventajas que pueden generar este tipo de actividades mediadoras para facilitar la comprensión de problemas:

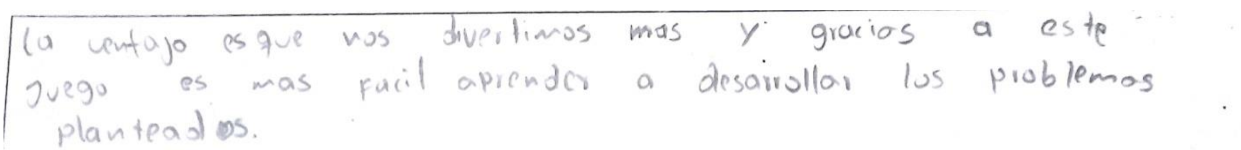

la ventaja es que nos divertimos mas y gracias a este juego es mas facil aprender a desarrollar los problemas planteados.

Ilustración 15: Respuesta del equipo Beta al finalizar la sesión 3, febrero 8 de 2018

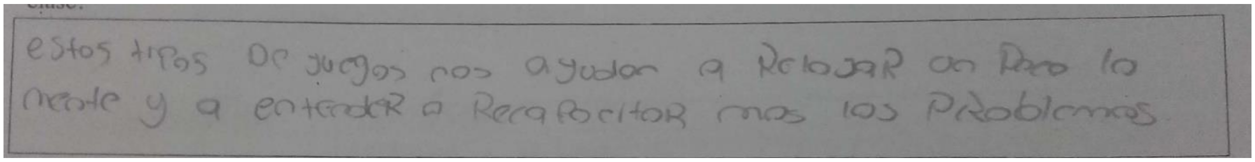
La segunda actividad como medio didáctico que buscó la motivación de los estudiantes hacia la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, y permitió el fortalecimiento de los prerrequisitos expuestos por Moreno y Castellanos (1997) para abordar este tema fue la actividad de la escalera de resoluciones. Además la actividad contribuyó en los equipos cooperativos a la apropiación y aplicación de los pasos para abordar problemas de Polya.

La escalera de resoluciones consistió en trabajar cooperativamente para alcanzar la meta propuesta, llegar a la casilla 100 sorteando problemas que involucraban ecuaciones de primer grado con una incógnita y proponiendo su ecuación o resolución según la orientación descrita para cada caso. La interpretación o resolución correcta permitía subir por las escaleras y avanzar, mientras que las interpretaciones o resoluciones erradas generaban estancamiento o descenso por los toboganes a casillas inferiores y avanzar menos. Para proponer cada respuesta, el equipo cooperativo contaba con dos minutos cronometrados, una vez trascurrido ese tiempo, uno de los integrantes del equipo, ya fuera el secretario, el desarrollador, el graficador, o el constructor sale al tablero para darle respuesta a la situación planteada.

Al finalizar la sesión, ningún equipo cooperativo había llegado a la meta sin embargo el equipo Alfa fue el que más lejos llegó:

Ilustración 16: Medio didáctico de escalera dispuesto en el salón de clase, sesión 6, marzo 1 de 2018

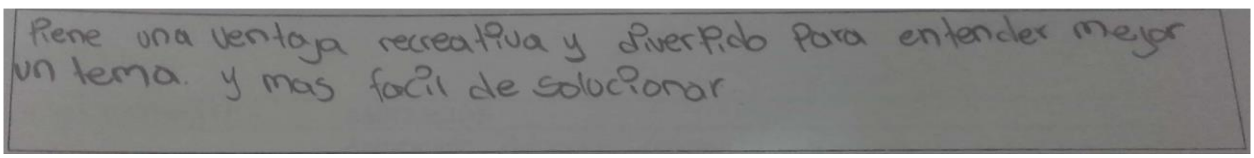
Con relación al medio didáctico de la escalera el equipo Beta respondió al finalizar la actividad al preguntarles: ¿Qué ventajas aporta éste tipo de actividades para facilitar la comprensión de problemas?:



Estos tipos de juegos nos ayudan a relajar un poco la mente y a entender a recapacitar más los problemas.

Ilustración 17: Respuesta del equipo Beta a finalizar la sesión 6, marzo 1 de 2018.

Por otra parte, el equipo Alfa responde igualmente a la pregunta:



Tiene una ventaja recreativa y divertida para entender mejor un tema y más fácil de solucionar.

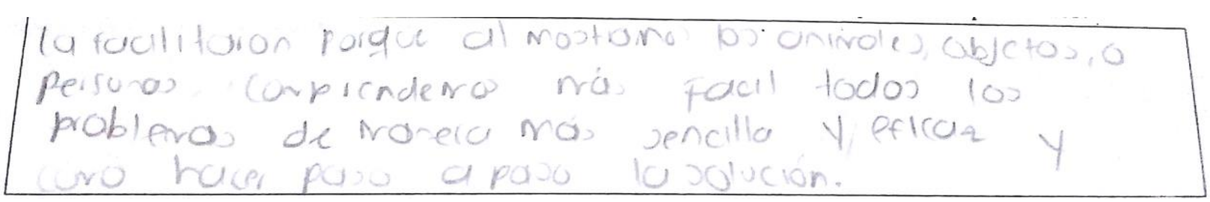
Ilustración 18: Respuesta del equipo Alfa al finalizar la sesión 6, marzo 1 de 2018.

Con base en lo anterior, es posible concluir que la motivación de los estudiantes en el aula de clase está determinada por variables que modifican parcial o totalmente el objetivo de las actividades propuestas e influencian la forma en que los estudiantes prestan atención y dedican esfuerzos para su desarrollo. En este sentido, Díaz y Hernández (2002) expresan que: “la motivación en los estudiantes permite explicar la medida en que los alumnos invierten su atención y esfuerzo en determinados asuntos” (p. 69). Fue entonces como la actividad de la escalera de resoluciones no obtuvo los resultados esperados, mientras que la primera actividad del dominó de situaciones fue exitosa en la medida en que logró motivar y movilizar a los estudiantes a reconocer elementos que les posibilitaran la comprensión de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

4.1.2. Interpretación de problemas.

Al iniciar el capítulo de presentación de resultados, se expuso la situación en que se encontraban los estudiantes antes de aplicar la secuencia didáctica con relación a la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, por lo tanto, para intervenir la problemática objeto de estudio, Polya (1990) propone cuatro pasos para desarrollar problemas: (I) comprender el problema, (II) concebir un plan, (III) ejecución del plan y (IV) examinar la solución; pasos que fueron protagonistas en la secuencia didáctica y que hicieron parte de los elementos para posibilitar la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

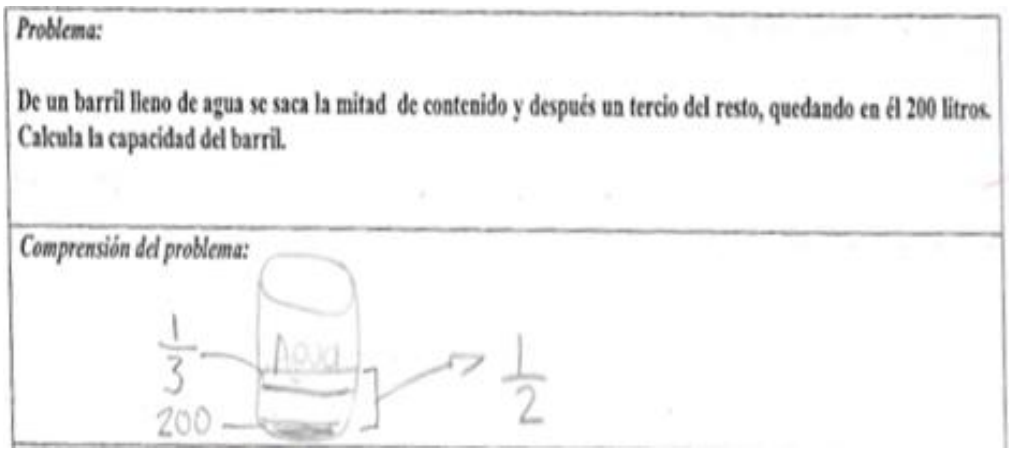
Con relación a lo anterior, Polya (1990) expresa que: “el alumno debe considerar las principales partes del problema atentamente, repetidas veces, y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada con el problema, debe dibujar la figura y destacar en ella la incógnita y los datos” (p. 29). Fue entonces como el equipo Alfa al finalizar la sesión 6, responde al preguntarles: ¿Cómo las representaciones pictóricas (imágenes y dibujos) facilitaron la comprensión de los problemas planteados?


la facilitaron porque al mostarnos los animales, objetos, o personas comprendemos más facil todos los problemas de manera más sencilla y eficaz y como hacer paso a paso la solución.

La facilitaron, porque al mostrarnos los animales, objetos o personas, comprendemos más fácil todos los problemas de manera más sencilla y eficaz, y cómo hacer paso a paso la solución.

Ilustración 19: Respuesta del equipo Alfa al finalizar la sesión 6, marzo 1 de 2018

Luego de abordar algunos problemas sobre la aplicación de las fases para resolver problemas propuesto por Polya (1990), se propone un ejercicio donde el equipo cooperativo evidenció las habilidades adquiridas en el transcurso de las sesiones anteriores. En este ejercicio se articularon los roles asignados en el equipo, los estudiantes comprendieron una forma organizada para abordar este tipo de situaciones. En la imagen se observa cómo el equipo Beta utiliza representaciones pictóricas para comprender el problema en el paso I; allí dibujan los valores correspondientes a los datos como 1/2 que indica la mitad del contenido del barril de agua y 1/3 de lo que se extrajo luego, quedando en el fondo 200 litros.


Problema:

De un barril lleno de agua se saca la mitad de contenido y después un tercio del resto, quedando en él 200 litros. Calcula la capacidad del barril.

Comprensión del problema:

Ilustración 20: Representación pictórica del equipo Beta, febrero 26 de 2018

Al analizar la representación pictórica realizada por el equipo, es posible determinar un error, pues la incógnita no era evidente en la representación. Frente a este acontecimiento en la comprensión del problema planteado, el docente observador participante retroalimenta el proceso que venían realizando, con el objetivo de hacerles caer en cuenta y mejorar la representación que estaban haciendo. Este acontecimiento quedó registrado en un audio en el desarrolla de la sesión 8.

Docente: Bueno muchachos, miremos esta representación… ¿Cuál es la incógnita?, miren que no está en el dibujo.

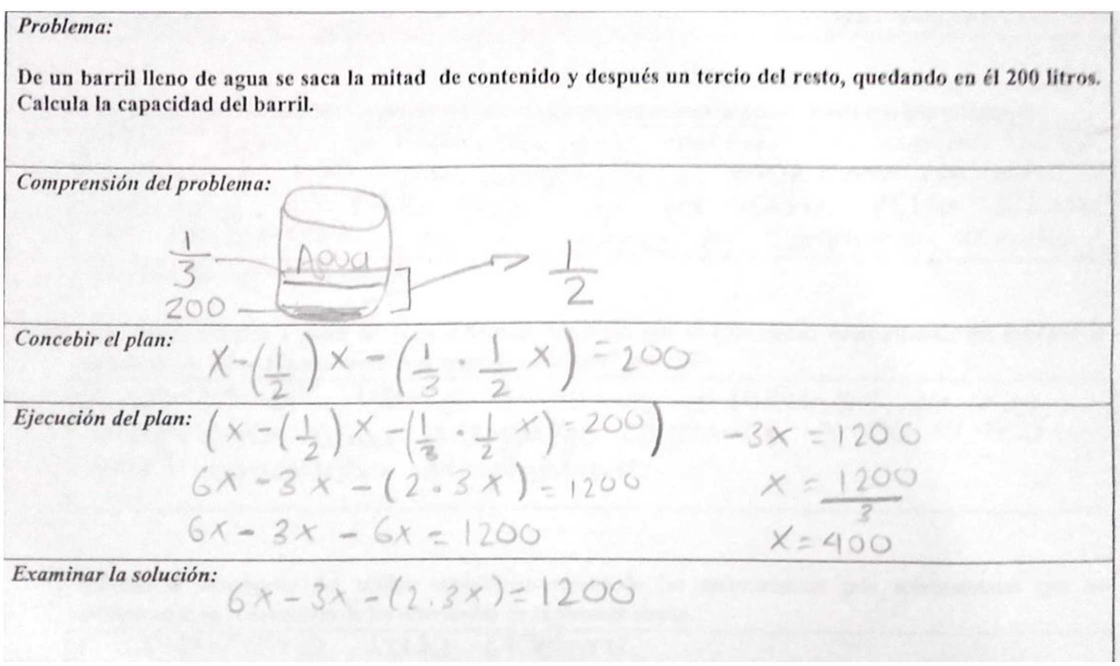
Desarrollador: Pues profe… la incógnita es el total del barril… ¿o no?

Graficador: Sí profe, aquí dice muy claro: calcula la cantidad del barril, entonces esa es x.

Docente: Perfecto, entonces miren cómo pueden representar en el dibujo la capacidad del barril. Debe quedar bien clara…

(Audio en el desarrollo de la sesión 8 del equipo Beta, aplicada el 8 de marzo de 2018).

De esta forma se enfatizó en lo propuesto por Polya (1990) al momento de comprender un problema donde invita a que los estudiantes dibujen las figuras que lo representan y que identifiquen en ellas la incógnita y los datos con el fin de mejorar la comprensión del mismo. Sin embargo, el hecho de no dibujar la incógnita en la representación pictórica, no fue impedimento para concebir correctamente el plan. A continuación, es posible apreciar la resolución completa del problema utilizando los cuatro pasos especificados por Polya.



Problema:

De un barril lleno de agua se saca la mitad de contenido y después un tercio del resto, quedando en él 200 litros. Calcula la capacidad del barril.

Comprensión del problema:

Concebir el plan: $X-(\frac{1}{2})X-(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}X)=200$

Ejecución del plan: $(X-(\frac{1}{2})X-(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}X)=200)$

$6X-3X-(2\cdot 3X)=1200$

$6X-3X-6X=1200$

$-3X=1200$

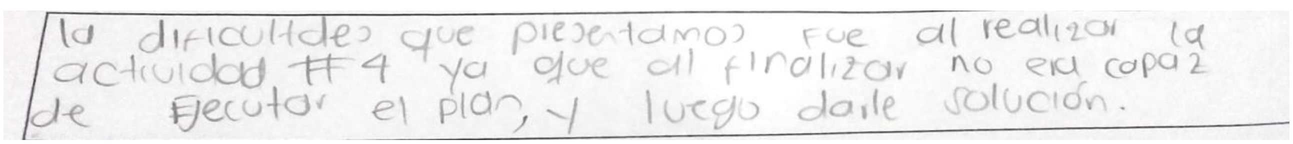
$X=\frac{1200}{3}$

$X=400$

Examinar la solución: $6X-3X-(2.3X)=1200$

Ilustración 21; Resolución completa del equipo Beta, sesión 8 marzo 8 de 2018

En el análisis de la resolución presentada anteriormente, es posible concluir que, a pesar que en la comprensión del problema no fue evidente la incógnita, esto no presentó inconveniente al momento de concebir el plan. En los siguientes pasos, ejecución del plan y examinar la solución, los estudiantes presentan dificultades, pues aparentemente evidencian errores aritméticos como al aplicar las propiedades de la multiplicación de fracciones que no les permiten llegar a la respuesta correcta y comprobar efectivamente su solución; éste hecho fue evidenciado en una respuesta escrita al finalizar la sesión 8 al preguntarles sobre las dificultades que presentaron en la sesión:

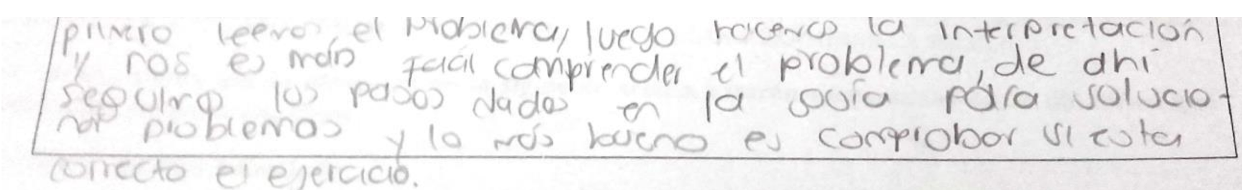

la dificultades que presentamos fue al realizar la actividad # 4 ya que al finalizar no era capaz de Ejecutar el plan, y luego darle solución.

Las dificultades que presentamos fue al realizar la actividad # 4, ya que la finalizar no era capaz de ejecutar el plan y luego darle solución.

Ilustración 22: Respuesta del equipo Beta, sesión 8, marzo 8 de 2018

Con base en lo observado en las ilustraciones anteriores, es posible concluir que a pesar que el equipo Beta presentó algunos errores en la ejecución del plan, ahora abordan los problemas de una forma concreta y con pasos bien definidos; situación que generó una buena interpretación del problema con base en la comprensión del problema y en la concepción del plan.

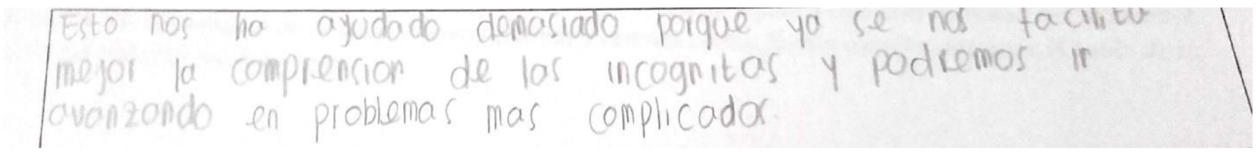
Con relación a la forma como abordan los problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, el equipo Alfa una vez finalizada la secuencia didáctica, explicó la forma en que ahora abordan este tipo de problemas:


primero leemos el problema, luego hacemos la interpretación y nos es más facil comprender el problema, de ahí seguimos los pasos dados en la guía para solucionar problemas y lo más bueno es comprobar si esta correcto el ejercicio.

Primero leemos el problema, luego hacemos la interpretación y nos es más fácil comprender el problema, de ahí seguir los pasos dados en la guía para solucionar problemas y lo más bueno es comprobar si está correcto el ejercicio.

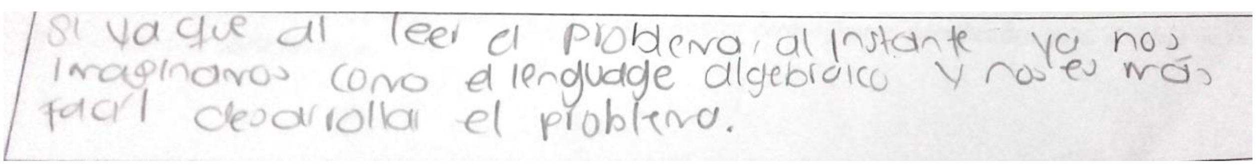
Ilustración 23: Respuesta del equipo Alfa, sesión 8, marzo 8 de 2018

didáctica que incluyeron representaciones pictóricas ayudaron a la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.


Esto nos ha ayudado demasiado porque ya se nos facilita mejor la comprencion de los incognitas y podremos ir avanzando en problemas mas complicador

Esto nos ha ayudado demasiado porque ya se nos facilita mejor la comprensión de las incógnitas y podemos ir avanzando en problemas más complicados.

Ilustración 20: respuesta de equipo Beta, sesión 8, marzo 8 de 2018

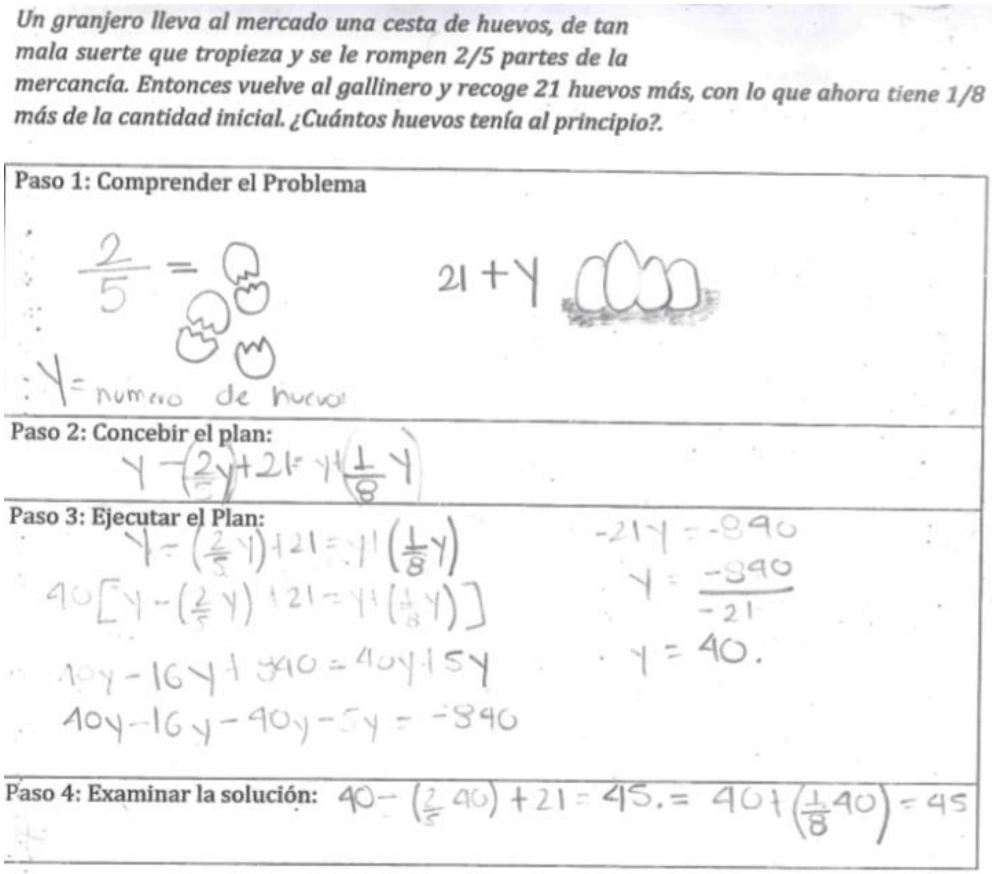

Si ya que al leer el problema, al instante ya nos imaginamos como el lenguaje algebraico y nos es más facil desarrollar el problema.

De acuerdo a lo expresado por Polya (1990), las evidencias recogidas en el trabajo de campo permitieron concluir que al presentar una ruta definida, un paso a paso, un plan previo para abordar un problema matemático, se puede eliminar la incertidumbre que genera en el estudiante este tipo de situaciones, las cuales desencadenan errores, entre los cuales se encuentra la interpretación incorrecta de problemas.

Por otra parte, el equipo Alfa evidencia apropiación, dominio y seguridad al explicar el proceso llevado a cabo en la resolución de un problema de la sesión 5, así:

> Para interpretar el problema, dibujamos unos huevitos ahí, y colocamos $\frac{2}{5}$ igual, porque nos guiamos del ejercicio anterior, y aquí ya coloqué, ahí dice que 21 huevos más, que los que tiene ahora entonces se supone que Y son los huevos que tenía al principio, y no sabemos cual es *y*, entonces ya 21 + *y* e hicimos el dibujito y ya fuimos planteando el problema: Y menos 2/5 que se le quebraron de lo que tenía al inicio o sea $-\frac{2}{5}y$ más 21 que se devolvió para recogerlos igual o sea que ahora tiene 1/8 más de los huevos que tenía anteriormente.
>
> Luego teniendo la ecuación buscamos el mínimo común múltiplo y multiplicamos 5 x 8 = 40, y después miramos si era 40 el mínimo común múltiplo multiplicando 40 x 2/5 y 40 x 1/8, entonces cogimos 40 y multiplicamos toda la ecuación. Entonces 40 * Y = 40Y, 40 * 2/5 de Y= 16Y, 40 * 21 = 840 igual 40 * Y = 40Y, y 40 * 1/8 de Y = 5Y. y ahí empezamos a poner todas las Y a este lado y todos los números normales a este entonces ya después restamos y nos dio -21Y = -840 y cogimos la Y y dividimos -840 entre- 21 y nos dio 40 positivo.
>
> Después ahora para comprobar remplazamos Y por el numero 40 y nos da 45 en los dos lados de la ecuación entonces tenemos 5 huevos más que al principio.
>
> (Descripción de la resolución del equipo Alfa tomada en video, sesión 5, febrero 26 de 2018).

A continuación se puede evidenciar la resolución completa que el equipo Alfa realizó en la descripción anterior:



Un granjero lleva al mercado una cesta de huevos, de tan mala suerte que tropieza y se le rompen 2/5 partes de la mercancía. Entonces vuelve al gallinero y recoge 21 huevos más, con lo que ahora tiene 1/8 más de la cantidad inicial. ¿Cuántos huevos tenía al principio?.

Paso 1: Comprender el Problema

$\frac{2}{5} =$ 21 + y

y = numero de huevos

Paso 2: Concebir el plan:

$y - \left(\frac{2}{5}y\right) + 21 = y + \left(\frac{1}{8}y\right)$

Paso 3: Ejecutar el Plan:

$y - \left(\frac{2}{5}y\right) + 21 = y + \left(\frac{1}{8}y\right)$

$40\left[y - \left(\frac{2}{5}y\right) + 21 = y + \left(\frac{1}{8}y\right)\right]$

$40y - 16y + 840 = 40y + 5y$

$40y - 16y - 40y - 5y = -840$

$-21y = -840$

$y = \frac{-840}{-21}$

$y = 40.$

Paso 4: Examinar la solución: $40 - \left(\frac{2}{5}40\right) + 21 = 45. = 40 + \left(\frac{1}{8}40\right) = 45$

Ilustración 25: Resolución del equipo Alfa, sesión 5, febrero 26 de 2018

El equipo Alfa, una vez desarrollados los pasos 1 y 2 para solucionar problemas, pudo retroalimentar los procesos, comprobar la veracidad de lo desarrollado y clarificar su comprensión; es evidente el orden al abordar la solución del problema; la propiedad al momento de explicar la forma en que se realizaron las representaciones pictóricas que incluían la incógnita y cómo conciben el plan a partir de las representaciones realizadas. En este sentido, Johnson, Johnson y Holubec (1999), explican las potencialidades del trabajo cooperativo en la resolución de problemas matemáticos, así:

> La práctica de resolver problemas matemáticos en equipo les permite a los alumnos ejercitar las destrezas necesarias para resolver problemas en la "vida real". Fuera del colegio, la mayor parte de las actividades dirigidas a resolver problemas matemáticos se

> realizan en equipos cuyos integrantes interactúan para clarificar y definir un problema (identificar lo conocido y lo desconocido), para describir e ilustrar el problema (hacer ecuaciones matemáticas y dibujar diagramas o gráficos), para analizar y proponer métodos de resolución de problemas, para hacer operaciones y para verificar la lógica aplicada y los cálculos. El empleo de procedimientos similares en los grupos de aprendizaje cooperativo promueve la resolución productiva de problemas, pues les permite a los alumnos poner continuamente a prueba sus ideas, así como obtener y brindar retroalimentación. (p. 42)

A partir de lo anterior, lo evidenciado en el trabajo de campo coincide con lo expresado por Johnson, Johnson y Holubec (1999), pues el trabajo cooperativo permitió a los estudiantes ejercitar las destrezas necesarias para resolver problemas; abordar los pasos para solucionar las situaciones y promover la resolución productiva de los mismos procesos que no se hubiesen alcanzado al comparar los desarrollos realizados antes de aplicar la secuencia didáctica.

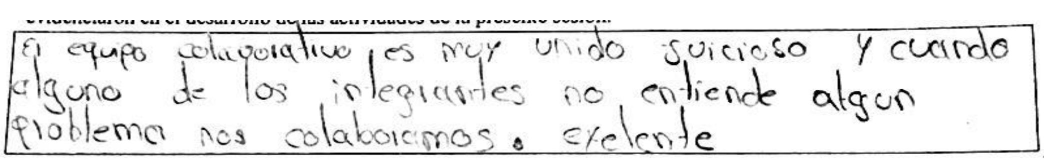
A modo de conclusión, tanto los medios didácticos como el dominó de expresiones y la escalera de resoluciones, lo mismo que los pasos para abordar problemas, hicieron parte de los elementos que posibilitaron la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, articulados al trabajo cooperativo.

4.2. Del trabajo individual al trabajo cooperativo

Del trabajo individual al trabajo cooperativo surge como una de las dos categorías del proyecto de profundización resultado del análisis de los datos obtenidos en el trabajo de campo; se tuvieron en cuenta dos unidades de análisis: el rol del estudiante en la cooperación y el rol del docente en la cooperación; cada una retroalimentada a partir de los episodios surgidos en la aplicación de la secuencia didáctica. A continuación se realizará el correspondiente análisis y triangulación respecto a esta categoría de análisis.

4.2.1. Rol del estudiante en la cooperación.

Con respecto a las funciones que desempeñaron los integrantes del equipo cooperativo, se encontraron varios acontecimientos que centraron el interés en esta unidad de análisis, fue así como al iniciar la secuencia didáctica se indicaron los roles que debían desarrollar cada uno de los integrantes del equipo cooperativo para todas las actividades. Al finalizar cada sesión se fueron valorados el desempeño de cada uno de los integrantes del equipo, desde la apropiación de su rol y su correspondiente cooperación hacia otros roles, donde se encontraron respuestas como la siguiente:



El equipo colaborativo es muy unido juicioso y cuando alguno de los integrantes no entiende algún problemas nos colaboramos. Excelente.

Ilustración 26: Respuesta del equipo Alfa al finalizar la sesión 3. Febrero 12.

Por otra parte, el equipo Beta expresó en un diálogo, donde valoró el desempeño de los roles de cada uno de los miembros del equipo, así: “Sí, cada uno desempeñó su rol, que era el del desarrollador, el graficador… Todos, pues, los cuatro hicieron un muy buen trabajo” (Respuesta equipo Beta, 22 de marzo de 2018).

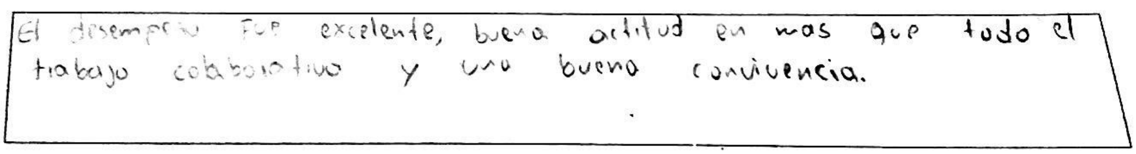
Así mismo, el diario de campo del docente también registró el desempeño de los equipos y sus roles de la siguiente manera:

> Con relación al desarrollo de los roles en el interior de los equipos cooperativos, se pudo evidenciar una excelente apropiación de los mismos, sin embargo, estuve pendiente del desempeño de cada uno, en algunos momentos hubo la necesidad de recordarles los roles,

> de inmediato indicaban quien era el responsable del proceso y se dedicaban a cooperar con el fin de que el desempeño fuera positivo. (Fragmento del diario pedagógico digital del docente, sesión 4, febrero 15 de 2018)

Con base en lo evidenciado en el trabajo de campo, Johnson, Johnson y Holubec (1999), resaltan la importancia de asignar roles específicos para los integrantes del equipo cooperativo, con el fin de que cada uno tenga claro lo que debe hacer.

De esta forma, los roles permitieron afrontar algunas tensiones a las que se enfrenta la cooperación, como las que se presentaron con algunos estudiantes que evidenciaban predisposición y dificultades de convivencia; asignar roles en los equipos mejoró la interacción grupal y permitió que cada integrante aportara sus habilidades personales en busca de metas grupales. Por ejemplo, el equipo Beta respondió al finalizar la sesión 6, valorando el desempeño del equipo, así:


El desempeño fue excelente, buena actitud en mas que todo el trabajo colaborativo y una buena convivencia.

El desempeño fue excelente, buena actitud en más que todo el trabajo colaborativo y una buena convivencia.

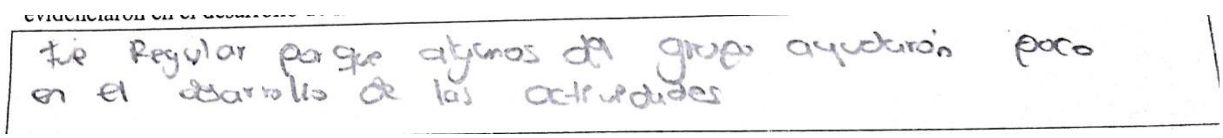
Ilustración 27: Respuesta del equipo Beta al finalizar la sesión 6, marzo 1 de 2018

Por lo tanto, los roles deben estar pensados desde las tareas que se pretenden desarrollar en la clase; fue así como en el trabajo de campo los roles se articularon con los cuatro pasos para abordar problemas propuestos por Polya (1990).

Por otra parte, y con relación a las acciones de los integrantes del equipo cooperativo, Johnson, Johnson y Holubec (1999) expresan la importancia de valorar el desempeño de las mismas:

> Los grupos deben determinar qué acciones de sus miembros son positivas o negativas, y tomar decisiones acerca de cuáles conductas conservar o modificar. Para que el proceso de aprendizaje mejore en forma sostenida, es necesario que los miembros analicen cuidadosamente cómo están trabajando juntos y cómo pueden acrecentar la eficacia del grupo. (p. 10)

En este sentido, la cooperación conlleva afrontar algunas tensiones, entre las que se encuentran las acciones negativas de los integrantes que dificultan el alcance de los objetivos comunes; es así como el equipo Alfa valora el desempeño de los integrantes del equipo así:



Fue regular porque algunos del grupo ayudaron poco en el desarrollo de las actividades.

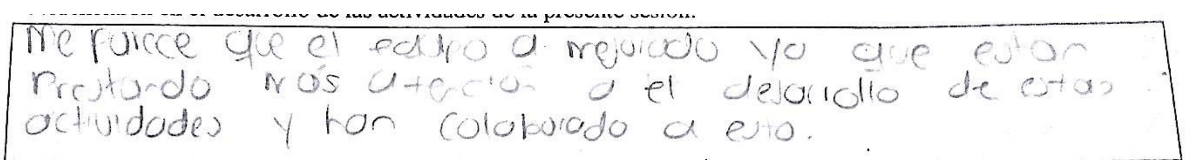
Ilustración 28: Respuesta del equipo Alfa al finalizar la sesión 4, febrero 15 de 2018

Fue así como el equipo reconoció la dificultad y toma decisiones al respecto así:

> Pues el trabajo en equipo estuvo bien pero, cuando se desconcentraban, siempre le tocaba a uno, ¿si me entiende?, habían momentos que a uno le tocaba todo y decían, no entonces hágalo usted, entonces terminábamos rotando y ahí era cuando teníamos más dificultad, porque ya no quería nadie hacer nada, entonces yo los cogí y les dije que no, hagámosles porque cuando trabajamos juntos nos va mucho, mucho, mucho mejor, que

es cuando hacemos los ejercicios más rápido y de una forma correcta. (Respuesta del equipo Alfa, 22 de marzo de 2018)

Al finalizar la sesión 6, el equipo alfa al valorar el desempeño mostró la siguiente respuesta:


Me parece que el equipo a mejorado ya que estan prestando más atención a el desarrollo de estas actividades y han colaborado a esto.

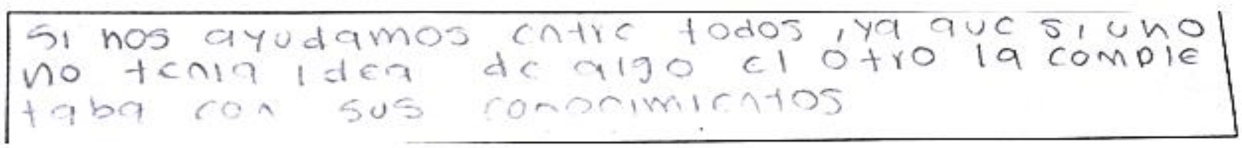
Me parece que el equipo ha mejorado ya que están prestando más atención en el desarrollo de estas actividades y han colaborado a esto.

Ilustración 29: Respuesta del equipo Alfa al finalizar la sesión 6, marzo 1 de 2018

De esta forma, el equipo Alfa afrontó una de las principales tensiones de la cooperación: trabajar juntos hacia un objetivo común, ofreciendo coherencia con lo expresado por Johnson, Johnson y Holubec (1999).

Por otra parte, la valoración del desempeño de los integrantes del equipo al finalizar cada sesión, permitió identificar los posibles desafíos a los cuales se debía enfrentar en las siguientes sesiones de trabajo; así, fue necesario reconocer los cinco componentes esenciales para que los resultados de la cooperación resultaran positivos: la interdependencia positiva, la responsabilidad individual y grupal, la interacción estimuladora, el desarrollo de técnicas interpersonales y grupales, y la evaluación grupal.

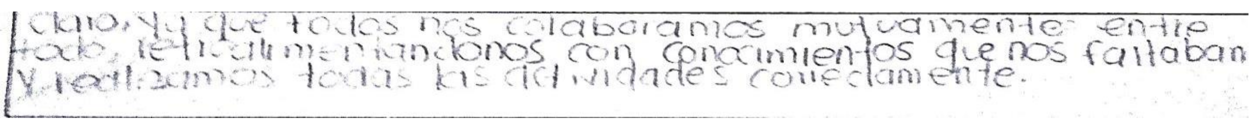
En la evaluación grupal el equipo Beta evidenció la forma en que se ayudaron mutuamente para abordar las situaciones cooperativamente:



Sí nos ayudamos entre todos, ya que si uno no tenía idea de algo, el otro la completaba con sus conocimientos.

Ilustración 30: Respuesta del equipo Beta al finalizar la sesión 8, marzo 8 de 2018

De la misma forma, el equipo Alfa resalta el trabajo cooperativo para facilitar las actividades realizadas:



Claro, ya que todos nos colaboramos mutuamente entre todo, retroalimentándonos con conocimientos que nos faltaban y realizamos todas las actividades correctamente.

Ilustración 31: Respuesta del equipo Alfa al finalizar la sesión 8, marzo 8 de 2018

En la respuesta anterior, el equipo Alfa expresó la forma en que se complementaron algunos conocimientos que algunos integrantes no tenían claros. Así mismo, el equipo Beta evidenció la forma como se complementaban conceptos y procedimientos al interpretar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita:

> Pues unos compañeros si sabían más que otros, por ejemplo en el ejercicio de los huevos, yo no sabía si teníamos que sumar o restar, entonces otro compañero si sabía cómo entonces pudimos solucionar el problema. (Respuesta del equipo Beta al finalizar la sesión 8, marzo 8 de 2018)

De esta manera, se evidenció una buena interacción positiva entre los integrantes de los equipos cooperativos permitiendo el apoyo entre roles para posibilitar la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita. Así mismo, es posible concluir que los roles en los equipos cooperativos permitieron afrontar las tensiones generadas entre los miembros del mismo, así como la evaluación grupal permitió revisar el avance de la cooperación hacia los objetivos propuestos en la secuencia didáctica.

4.2.2. Rol del docente en la cooperación.

Durante el desarrollo de las sesiones de la secuencia didáctica, los estudiantes recurrieron al docente para aclarar las dudas que se presentaron en el proceso de cooperación, encontrando en él a una persona receptora y disponible para aclarar las dudas y para retroalimentar las conjeturas que resultaban de las discusiones alrededor de la interpretación de los problemas presentes en la secuencia didáctica; de la misma forma el docente tomó aquellos comentarios y preguntas de los estudiantes para retroalimentar la secuencia didáctica y transformar las siguientes sesiones; sin embargo, se evidenció una interacción bidireccional entre maestro y estudiante. En este sentido, un estudiante del equipo Alfa expresó: “el aporte del docente fue muy bueno ya que en cada problema o situación que nos encontrábamos íbamos donde él y ahí mismo él nos resolvía la duda que teníamos” (Respuesta en entrevista de un integrante del Equipo Alfa, desarrollada el 22 de marzo de 2018); de igual modo este mismo equipo expresa la interacción del docente durante todo el desarrollo de la secuencia didáctica:

> Ah, fue muy buena, porque por ejemplo en otras materias los profesores uno va y les pregunta, y no les explican a uno… nos tratan mal, y dicen, hay… es que usted debería saber eso. En cambio el profesor siempre fue muy comprensivo, nos explicaba cosas, o sea, nos explicaba de una manera que entendiéramos, entonces así todo fue más fácil. (Respuesta de un integrante del equipo Alfa al finalizar la secuencia didáctica. Marzo 22 de 2018)}

Por otra parte, el equipo Beta también expresa la forma como se desarrolló el proceso de cooperación y la interacción con el docente:

> Pues, por ejemplo, cuando yo no sabía algo, otro compañero mío si lo sabía entonces todos nos apoyamos, y si ya ninguno, ninguno sabía, primero intentábamos muchas veces y cuando veíamos que no sabíamos y no entendíamos, le pedíamos ayuda al profesor y él nos dejaba todo claro. (Respuesta a entrevista de un estudiante del equipo Beta aplicada el día 22 de marzo de 2018).

En este sentido, Brewster y Railsback (2003), Citado por Zapata, Rojas y Gómez (2009), identifican un conjunto de pasos que deben seguir los docentes para construir confianza con los estudiantes: demostrar integridad personal; ser cuidadosos y accesibles con los estudiantes; facilitar una comunicación efectiva; expresar respeto por las diversas opiniones; reducir su sentido de vulnerabilidad y contar con las competencias necesarias para llevar a cabo su labor. Fue así como la interacción entre docente y estudiante permitió construir lazos de confianza, haciendo que el docente se convirtiera en una persona accesible para resolver inquietudes que se presentaban al interpretar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, presentes en las actividades de la secuencia didáctica, como lo hicieron saber anteriormente los equipos Alfa y Beta.

En consecuencia, Zapata et al. (2009) revela la importancia de la confianza en la formación de estudiantes de diferentes niveles; ésta debe facilitar la libre expresión de ideas, la toma de decisiones y la evaluación de alternativas en un clima sin sentimientos de represaría. Por lo tanto, en el aula de clase cada individuo debe tener claro entendimiento de cuál es su rol y cuáles son los roles y obligaciones de los otros; este entendimiento promueve el establecimiento y permanencia de relaciones basadas en la confianza que posibilitan la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Por otra parte, Rico (1995), define la tarea del docente en el aula de clase:

> La tarea principal del trabajo del profesor consiste en dirigir y guiar el desarrollo de ideas en las mentes de sus estudiantes, por ello es importante para el profesor conocer qué es lo que sus estudiantes se encuentran pensando, y no limitarse a hacer suposiciones sobre esas ideas. (p. 82)

El trabajo cooperativo le permite al docente conocer lo que los estudiantes piensan frente a una situación o problema matemático; por esto, es importante que el docente se encuentre constantemente atento y en modo de observador participante, con el fin de analizar los aportes que realiza cada miembro dentro del equipo y no limitarse a hacer suposiciones de lo que piensa el estudiante frente a una situación concreta. Con relación a esto, el diario de campo del docente fue una herramienta importante para evidenciar las reflexiones que el docente generó a partir de lo observado en los equipos cooperativos:

> (…) se pudo notar que los equipos se remitían a problemas modelo y otros problemas desarrollados por ellos mismos en la primera parte de la sesión, relacionaban datos y discutían entre ellos la forma en que los habían resuelto para resolver los nuevos. Así fue como ésta observación permitió reflexionar sobre la importancia de las experiencias anteriores resolviendo problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita y cómo estas pueden servir de guía para resolver nuevos problemas sin estar tan sometidos a la memoria. Por este análisis, se decidió que a partir de la siguiente sesión, los estudiantes contarían con los documentos anteriormente desarrollados de la secuencia didáctica con para que les sirvieran como insumos de consulta para abordar nuevos problemas en las siguientes sesiones. (Diario de campo del docente, febrero 15 de 2018)

Con base en lo anterior, Polya (1990), utiliza problemas semejantes desarrollados anteriormente para concebir el plan de un nuevo problema; por ejemplo, utiliza preguntas que le permiten al estudiante hacer una idea de cómo interpretar la situación: "¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿o ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?" (p. 19). De esta forma la reflexión del docente generada a partir del acompañamiento de los equipos cooperativos contribuyó a los estudiantes a adquirir elementos que le permitieran posibilitar la interpretación de problemas.

Entonces, el acompañamiento del docente debe ser tal, que le ayude al estudiante a resolver sus dudas e inquietudes, sin darle la solución completa a la misma. Es así como el equipo Beta interactuó con el docente frente a una interpretación presentada durante la sesión 6 correspondiente al siguiente problema:

A la carnicería del pueblo llegan dos cajas con carne que han mandado de la central de sacrificio; la primera caja está rotulada con el nombre de Perniles de Gallina y Patas de Cerdo = 116; la segunda caja está marcada con el nombre de cabezas = 35: El carnicero desea saber cuántas gallinas y cuantos cerdos fueron sacrificados para el envío de su pedido sin necesidad de abrir las cajas.

> Desarrollador: ¿Profe, este 35 son las cabezas?
>
> Docente: Claro.
>
> Desarrollador: Ah o ¿sea que las cabezas son de las gallinas?, ¿la caja de cabezas marcada con 35 son las de las gallinas?
>
> Docente: Leamos nuevamente, llegan 35 cabezas, entre cabezas de cerdo y gallinas… los invito a que leamos nuevamente el ejercicio… Noten que en el enunciado dice que llegan a la carnicería una caja con el rotulo de 35 cabezas, pero en ningún momento dicen que son de gallinas o de cerdos, OK.
>
> Desarrollador: Profe, ¿entonces por qué aquí dice que $35 - x$ es igual a las gallinas?
>
> Secretario: porque aquí x es cerdos y aquí es 35 – cerdos que es x para dar las gallinas
>
> Docente: Correcto, entonces aquí le estamos descontando a la cantidad de cabezas del total, la cantidad de cabezas de cerdo.
>
> Graficador: Profe entonces aquí utilizamos el cuatro porque son las patas del cerdo y el dos de las patas de gallina.
>
> Constructor: entonces 35 que son las cabezas menos x que es la incógnita. Ah ya.

> Docente: como ven toda la ecuación es igual a 116 que corresponde al total de patas entre cerdos y gallinas. (Diálogo equipo Beta en el desarrollo de la sesión 6, Marzo 1 de 2018)

No obstante, los estudiantes del equipo Beta revelan su pensamiento frente a una situación asignada en la secuencia didáctica. Con respecto a esto, Johnson, Johnson y Holubec (1999), expresan la posibilidad que presenta la cooperación para evidenciar el pensamiento de los estudiantes: "Al trabajar cooperativamente, los alumnos revelan su pensamiento y lo exponen a la observación y los comentarios, permitiéndole al docente observar cómo elaboran su comprensión del material asignado e intervenir cuando sea necesario para ayudarlos a corregir errores..." (p. 47).

Con relación a lo anterior, el diario de campo reflejó la forma como los equipos cooperativos comprendieron el material de la secuencia didáctica en una de las sesiones, y la manera como el docente intervino para retroalimentar la actividad, así:

> Los estudiantes trabajando cooperativamente inician la sesión # 3, al principio se debió intervenir un poco para explicarles a nivel general lo que debían hacer con las asociaciones y lo que significaban, ya que se observaron alguna predisposición en los equipos cooperativos porque presentaban dificultades evidenciadas en los constantes llamados del docente en busca de explicación. Una vez se explicó a nivel general y en el tablero para los estudiantes, los equipos pudieron completar la actividad de asociaciones, sin embargo, una vez culminada, se les hace entrega de un documento con todas las asociaciones descritas con el fin de que revisaran las que tenían escritas, corregirlas o adicionar aquellas que les hacían falta pues esta actividad sería clave para interpretar correctamente algunos problemas y superar errores que venían presentando. (Diario de campo, febrero 12 de 2018)

Lo anteriormente descrito evidenció la interacción bidireccional entre docente y estudiante, ya que existió una retroalimentación, tanto del estudiante por el docente y del docente por el estudiante, donde se generó la reflexión como una de las características del docente investigador.

La reflexión en un docente investigador debe involucrar no solo aspectos instrumentales o técnicos del ejercicio docente, sino la recuperación de marcos teóricos, presupuestos y posiciones valorativas que enriquecen la práctica educativa y convierten al docente en investigador de su propio ejercicio profesional (Méndez y Méndez, 2007).

Por lo tanto, una secuencia didáctica desarrollada cooperativamente, debe estar acompañada por un docente analítico, que tenga la habilidad de observar los diferentes procesos con el fin de comprender como los estudiantes están pensando e intervenir cuando lo considere necesario; así como constatar lo ocurrido con aspectos teóricos que permitan establecer las condiciones de un docente investigador como se evidenció.

Por otra parte, la investigación en el campo de la educación requiere de una espiral de ciclos de planeación, acción, observación y reflexión (Anderson y Herr, 2007), proceso conocido como investigación – acción. Fue entonces como la observación fue la principal característica que le permitió al docente reflexionar y constatar teóricamente cómo los estudiantes elaboran la comprensión de problemas y las potencialidades que presentan algunos ejercicios de la secuencia, con el fin de retroalimentarlos y mejorar el aprendizaje.

En el proceso de observación el docente evidenció que el equipo Alfa presentaba inconvenientes al interpretar un problema propuesto en la secuencia didáctica:

> Constructor: Listo profe, x que es la cantidad de inicial de los huevos menos 2/5 de huevos; entonces cerramos en paréntesis 21 huevos.
>
> Docente: (Indicando en el documento) ¿Aquí qué operación están haciendo, multiplicando?
>
> Secretario; Sí profe, obvio.
>
> Docente: Leamos nuevamente el ejercicio: y recoge 21 huevos más…
>
> Desarrollador: Ah profe, o sea que se suma; queda más 21 huevos.
>
> Docente: Listo, eso fue lo que pasó con el campesino: llevaba los huevos, se cayó, se le quebraron algunos y regresó al gallinero por 21 huevos más. ¿Cierto?
>
> Constructor: Sí profe.

Docente: Ahora (el docente indica la ecuación).

Constructor: Ah listo, borrador, borrador.

Docente: ¿Ahora cuántos tiene?

Graficador: Ahora tiene 2/5.

Docente: Miremos: tiene los huevos iniciales, ¿cuántos huevos eran los iniciales?

Constructor: x

Docente: ¿Entonces?

Constructor: Entonces tiene $x + 1/8$

Docente: ¿Más 1/8 de qué?

Constructor: 1/8 de los huevos iniciales; ¿o sea x?, ¿o le quito la x?

Docente: ¿Ustedes qué creen?

Secretario: Yo creo que hay que quitar esa última x

Docente: ¿Por qué? Si no conocemos la cantidad de huevos iniciales.

Constructor: Ah ya profe; listo, ya está bueno, uy.

(Diálogo equipo Alfa, sesión 5, febrero 26 de 2018)

En el diálogo anterior, los integrantes del equipo deciden llamar al docente con el fin de encontrar alguna orientación al respecto; de esta manera, se entabla un diálogo con los integrantes del equipo, precisamente con el constructor que es quien lidera la construcción del plan (ecuación). Sin embargo, es evidente la participación del resto del equipo al hacer preguntas con relación a la interpretación incorrecta que estaban desarrollando. El docente orientó y generó una retroalimentación de los procesos al retomar la lectura del problema y escuchar a los demás con el fin de mejorar la interpretación; de esta forma, el diálogo fluyó espontáneamente de acuerdo a las dudas e inquietudes que presentaban los estudiantes frente a la situación planteada.

En este orden de ideas, el docente investigador reflexionó en la acción y utilizó la duda que tenían los estudiantes para orientar el proceso y ayudarlos en la comprensión del problema, como lo expresa Polya (1990):

> El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se le deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi sin ninguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro le ayuda demasiado, nada se le deja al alumno. El maestro debe ayudarle, pero no mucho ni demasiado poco, de suerte que le deje asumir una parte razonable del trabajo. (p. 25)

Con base en lo anterior, la forma como el docente responde a una situación matemática incorrecta presentada por un estudiante, puede determinar la disposición o motivación que éste tendrá para el resto de ejercicios. En este sentido, es importante que el docente clarifique sus concepciones personales sobre el concepto de error, y tomarlo como un insumo para abordar o retroalimentar procesos matemáticos y buscar que los estudiantes superen el sentimiento negativo que le genera una situación o problema que intentan solucionar y, más aún, si la temática que presenta dificultades es de años anteriores.

No obstante, el retomar los problemas para mejorar la comprensión, hacer preguntas que clarifiquen la interpretación e indicar procesos incompletos generados en el planteamiento de ecuaciones, son acciones que debe hacer el docente de matemáticas, de tal modo que, se evidencie su acompañamiento, y sin llegar a solucionar completamente el problema para que el estudiante se sienta acompañado en el proceso y con la confianza de interactuar con el docente positivamente. Lo anterior es posible si se cuenta con un docente receptivo a las necesidades del estudiante; un docente observador y con habilidades para transformar y generar posibilidades de aprendizaje.

A continuación se expone una tabla diseñada por los autores del proyecto, donde se retoman algunos descriptores[10] relevantes en el proyecto de profundización y que evidenciaron transformación en el análisis de los datos abordados en ambos equipos cooperativos (equipo Alfa

---

[10] Estos descriptores surgen del análisis teórico de los conceptos trabajados en el proyecto de profundización y que son relevantes para el mismo.

y equipo Beta) desde un antes y un después; los descriptores se abordaron desde: La interpretación de problemas, ecuaciones, resolución de problemas y trabajo cooperativo.

Tabla 3:

Algunos descriptores, antes y después de aplicada la secuencia didáctica

	Descriptores	Antes de aplicar la secuencia didáctica	Después de aplicar la secuencia didáctica
Interpretación de Problemas	Reconocer los elementos del problema, datos, incógnita y relaciones entre ellos. Utilizar representaciones pictóricas que den cuenta del análisis y comprensión del problema planteado de forma verbal	No presentaban un orden lógico, omitían las representaciones pictóricas para llegar a la representación simbólica, no identificaban la incógnita dentro del problema repercutiendo en constantes errores. Los problemas descontextualizados no favorecían su interpretación.	Adquirieron un orden definido utilizando las representaciones pictóricas para llegar a la ecuación o representación simbólica contribuyendo a la superación de errores relacionados con la interpretación de problemas. Los problemas contextualizados favorecieron la interpretación de los mismos
Ecuaciones	Representar simbólicamente el problema que se intenta resolver a partir de los datos y la incógnita como producto del análisis de la representación pictórica.	No identificaban sus partes, no había una incógnita ni una representación de la misma, era evidente la dificultad para representar simbólicamente el problema.	A partir de las representaciones pictóricas pudieron identificar las partes de la ecuación lo mismo que la incógnita, llegando a la ecuación correcta o a una aproximación de la misma.
Resolución de problemas	Identificar pasos concretos y coherentes para resolver problemas que lleven a la resolución y comprobación de resultados.	Al igual que en la interpretación, los pasos que seguían los estudiantes no eran pertinentes para llegar a su resolución, de la misma forma el resultado final no eran comprobado.	Adquieren un orden de acuerdo a los pasos para abordar problemas de Polya (1990): (I) comprender el problema, (II) concebir un plan, (III) ejecución del plan y (IV) examinar la solución.

Trabajo cooperativo	Utilizar roles en el trabajo cooperativo que permita la homogeneidad de las tareas grupales Conocer los elementos básicos de la cooperación: la interdependencia positiva, la responsabilidad individual, la interacción personal, la integración social y la evaluación grupal.	Predominaba el trabajo individual y competitivo, los acercamientos al trabajo en grupo eran de forma colaborativa donde no existían roles definidos y se recargaba el trabajo en uno o dos integrantes, las tensiones terminaban con disolver el grupo, la valoración era individual, no existía una valoración grupal.	Los estudiantes tuvieron roles definidos dentro del equipo, presentaron apropiación de los mismos, la valoración fue cooperativa y el trabajo del equipo se distribuyó en todos sus miembros, se favoreció el desempeño de los estudiantes menos aventajados al encontrar cooperación de los otros compañeros, las metas fueron definidas de forma cooperativa y no individual, sin embargo se debe continuar con el fortalecimiento de la cooperación en ambos equipos.

5. Conclusiones

El desarrollo de este proyecto de profundización realizado en la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel con los estudiantes de grado décimo, permitió responder a la pregunta: ¿Cómo se posibilita la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, a partir del trabajo cooperativo?, y dar cumplimiento al objetivo general del mismo a partir de las categorías emergentes de análisis y bajo las siguientes conclusiones.

La interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita se puede dar a partir de una secuencia didáctica que motive a los estudiantes con la utilización de medios didácticos y el reconocimiento de los pasos de Polya (1990) para resolver problemas (I) comprender el problema, (II) concebir un plan, (III) ejecución del plan y (IV) examinar la solución.

Los pasos para solucionar problemas de Polya (1990) permiten en los estudiantes abordar los problemas con un orden definido, visualizando cada uno de los procesos hasta finalizar con su comprobación.

El diseño de una secuencia didáctica articulada con el trabajo cooperativo con actividades de inicio, desarrollo y cierre, permite al docente reflexionar frente a las fases de la investigación acción pedagógica, deconstrucción, reconstrucción y validación de la práctica, posibilitado la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

En los estudiantes, las actividades de inicio le permiten retroalimentar conceptos previos, adquirir destrezas y/o habilidades para ser aplicados en las actividades de desarrollo y de cierre, momentos de la secuencia didáctica que se favorece con la utilización de medios didácticos y el trabajo cooperativo.

La resignificación de los roles tanto del estudiante como del docente es uno de los elementos que junto con el trabajo cooperativo posibilitan la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita; del mismo modo que la interacción bidireccional genera reflexiones que contribuyen a superar las dificultades presentadas por los estudiantes.

Es importante, además, resaltar los impactos que a nivel institucional, pedagógico y profesional genera el proyecto: a nivel institucional, el proyecto resignifica una estrategia inmersa en el modelo pedagógico, el trabajo cooperativo; bajo los componentes que ésta conlleva como la designación de roles, la interacción bidireccional entre maestro y estudiante, la responsabilidad individual y la evaluación grupal, entre otros. A nivel pedagógico y profesional, el proyecto de profundización transforma las prácticas de aula, permitiendo al docente ser un investigador de su propia dinámica, reevaluando su quehacer y transformarlo para el favorecimiento del aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte, el proyecto impacta a los estudiantes al generar interacciones positivas entre ellos; desarrollar y descubrir potencialidades frente al desempeño de los roles en los equipos cooperativos, y permitir que intercambien puntos de vista, discutan situaciones, resuelvan problemas no solo matemáticos sino interpersonales, generados en las tensiones propias de trabajar con otros. Además, el trabajo cooperativo permite resignificar el rol del docente en el aula de clase, convirtiéndolo en un docente investigador de sus propias prácticas, con habilidades en la observación y reflexión.

El principal aporte del proyecto de profundización a la educación matemática está direccionado hacia el tratamiento de errores, como lo expresa Rico (1995), los errores son elementos usuales en el camino hacia el conocimiento, en el proceso usual de construcción de conocimiento matemático van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso mencionado de construcción debe incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones. El proyecto contribuyó al proceso de diagnóstico, detección, corrección y superación de un error de los estudiantes de grado décimo al interpretar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

El presente proyecto de profundización puede abrir nuevos campos en la investigación matemática desde el trabajo cooperativo en el desarrollo del pensamiento algebraico en conceptos más rigurosos como los de función o de límite. Así mismo desde la cooperación se puede abrir investigaciones en la exploración de puntos intermedios en los pasos descritos por Polya (1990) y desarrollados en el presente proceso de profundización.

5.1. Dificultades y recomendaciones

A continuación se abordan algunas dificultades generadas durante el proyecto que a pesar de haberse aplicado la secuencia didáctica con éxito y obtenido resultados satisfactorios, aún son susceptibles de mejorar:

Superar el error en la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita es complejo porque este tipo de situaciones son persistentes en algunos estudiantes, se pudo observar en algunos estudiantes que aún persistían dificultades al respecto.

En la ejecución del plan según los pasos de Polya (1990) se evidenciaron algunos errores relacionados con el tratamiento algebraico, despeje de incógnitas y operaciones algebraicas, procesos que requieren de un tratamiento especial como el que se realizó con la interpretación de problemas y no pasarlo desapercibido por el hecho de no hacer parte de los temas propios de grado décimo.

A los errores y dificultades que presentan los estudiantes en diferentes niveles se les debe prestar la atención que requieren, ya que son el producto de obstáculos generados en años anteriores, aún más si la problemática es en un tema que no es propio del nivel de formación como en el caso de los problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita en grado décimo.

El trabajo cooperativo es complejo en la medida en que se requiere que todos los miembros evidencien compromiso y responsabilidad con el cumplimiento de los roles, la retroalimentación y la valoración grupal. Es un proceso que no se hace de la noche a la mañana, requiere de tiempo y dedicación tanto del docente como de los estudiantes con el fin de reducir las acciones negativas que fueron evidentes en algunos miembros de los equipos cooperativos.

Pasar del trabajo individual al trabajo cooperativo sin caer en el trabajo en grupo o colaborativo es un reto que aún requiere de trabajo y disciplina por todos los actores del aula de clase, por lo tanto se recomienda abordar inicialmente algunas concepciones teóricas antes de implementar esta metodología de trabajo.

Para finalizar, el proyecto no solo se posibilitó la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita con el presente proyecto de profundización, sino que también se posibilitó la transformación de las prácticas de aula de los docentes autores del proyecto.

6. Referencias Bibliográficas

Alfaro, C. y Barrantes, H. (2008). *¿Qué es un problema matemático?, Percepciones en la Enseñanza Media Costarricense.* Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Año 3, Número 4, pp. 83-98.

Anderson, G y Herr, K. (2007). *El docente investigador: Investigación – acción como una forma válida de generación de conocimiento*. Buenos Aires. Noveduc.

Bañuelos, A. (1995). Resolución de problemas matemáticos en estudiantes de bachillerato. *Perfiles educativos*. Informe de trabajo de maestría. Disponible en www.redalcy.org/articulo.oa?id=13200706. ISSN 0185-2698.

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas el trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, año 1, número 1.

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. Centro de investigaciones de matemáticas y meta-matemáticas: *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* Año 1, número 2.

Boscán, M. y Klever, K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas. Trabajo de Maestría. *Escenarios* vol. 10, No 2. Julio - diciembre.

Catellanos, M. y Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en los procesos de representación. El caos de la generalización y el razonamiento algebraico*. Trabajo de Maestría. Universidad de los Llanos.

Comisión Maestría en Educación de Profundización (2015). *Lineamientos Curriculares, pedagógicos y didácticos para el equipo de trabajo*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Cuahonte, L. y Hernández, G (2015). *Una interpretación socio – crítica del enfoque educativo basado en competencias*. Informe de Doctorado. Universidad de Juárez Autónoma de Tabasco

Díaz, A. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Revista de currículo y formación del* *profesorado*. Vol. 17, nº 3 (sept.-diciembre 2013). Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación. UNAM. México. disponible en: http://www.ugr.es/~recfpro/rev173ART1.pdf

Díaz, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Egoavil, J. (2014). *Fundamentos de la matemática. Introducción a nivel universitario.* Universidad Peruana de Ciencias aplicadas. Lima Perú.

Engler, A. Gregorini, M. Muller, D. Vrancken, S. y Hercklein, M. (2004). *Los errores en el aprendizaje de las matemáticas*. Trabajo de maestría. Buenos aires Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

Ferrer, M. (2000). *La Resolución de Problemas en la estructuración de un sistema de habilidades Matemáticas en la escuela Media Cubana*. Tesis presentada en opción del grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógica. Instituto Superior Pedagógico "Frank Pais García" Santiago de Cuba.

Flores, A. (2006). *Álgebra*. 18° edición. México D.F, Editorial Progreso S.A.

Guerrero, F. (2012). *Algebra y modelización matemática en educación media* (trabajo de maestría). Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay Venezuela.

Gonzales, V. Reyes, S. Oliares, P. y Parra, Y. (s.f). *Errores de estudiantes de primer año medio en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado.* Universidad San Sebastián. vgonzalezgaretto@gmail.com.

Guzmán, M. (2007). *Enseñanza de las ciencias matemáticas*. Revista iberoamericana de educación. N 43.

Hernández, R. Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. Cuarta edición: Mc Graw Hill.

Hurtado, C. (2013). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita y su impacto en la educación básica.* Universidad del Valle. Cali Colombia. criammo@hotmail.com.

Institución Educativa Agrícola Víctor Manuel Orozco I.E.A. VMO. (2014). *Proyecto Educativo Institucional (PEI)*. Támesis Antioquia.

Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel I.E. LEAR. (2012). *Proyecto Educativo Institucional (PEI)*. Barbosa Antioquia.

Johnson, D. Johnson, R. y Holubec, E. (1999). *El aprendizaje Cooperativo en el aula*. Buenos Aires Argentina: Editorial Paidós.

Kilpatrick, J. (1996). *Fincando estaças: Uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissionai e científico*.

Leal, N. (2015) *La triangulación en investigaciones sociales y educativas*. Orientaciones generales. lealoster@gmail.com.

López, M. (2014). *Los medios didácticos como facilitadores del aprendizaje*. Ciudad del Carmen Campeche. Trabajo de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Unidad UPN042.

Lucero, M. (2003). Entre el trabajo cooperativo y el aprendizaje colaborativo. *Revista iberoamericana de educación*: ISSSN: 1681 - 5653. Universidad Nacional de San Luís Argentina.

Movshovitz-Hadar, N. Zaslavsky, O. e Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 18, p. 3 - 14.

Mejía, J. (2004). *Sobre la investigación Cualitativa. Nuevos conceptos y campos de desarrollo*.

Méndez, S. y Méndez, A. (2007). *El docente investigador en educación*. Textos de Wilfred Carr: Universidad de Ciencias y Artes de Chirapas.

Ministerio de Educación Nacional, MEN (2006). Estándares básicos de Competencias Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡Un reto escolar!

Ministerio de Educación Nacional, MEN (1998) Lineamientos curriculares de matemáticas.

Mcmillian, J. y Shumacher, S. (2005). *Investigación Educativa*. Madrid: Pearson.

Moreno, I. y Castellanos, L. (1997). *Secuencia didáctica para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita.* Revista EMA Vol 2 # 3, 247 – 258.

Pochulu, M. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de las matemáticas en alumnos que ingresan a la universidad. Universidad Nacional de Villa María Argentina: *Revista Iberoamericana de Educación* ISSN 1681 - 5653.

Pliego, N. (2011). El aprendizaje cooperativo y sus ventajas en la educación intercultural. *Hekademos*, Revista Educativa digital.

Pochulu M. (2010). Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. Revista Latinoamericana de Investigación Matemática. RELME Vol 3 - 2010. Recuperado de www.scielo.org.mx/pdf/relime/v13n3/v13n3a4.pdf.

Polya, G. (1990) *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Puerto, S. Minnaard, C. y Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*: ISSN: 1681- 5653.

Restrepo, B. (2005). La investigación - acción educativa y la construcción de saber pedagógico. *Revista Educación y Educadores*: Volumen 7.

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas*. Universidad de los Andes - Bogotá Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Ruano, R. Socas, M. Palarea, M. (2008). *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelación del álgebra*.

Ruano, R. Socas, M. Palarea, M. (1996). *Iniciación al álgebra*. España Editores: Editorial SINTESIS S.A.

Sánchez, N. (2014). Análisis de errores ocasionados en la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próximo. Colegio Pedro Apóstol.

Universidad Académica Humanismo Cristiano México – Chile. Nicoles1983@cicata.edu.mx.

Sigarreta, J. Rodríguez, J. y Ruesca, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico - didáctica: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. Vol. XIII, No. 1.

Terán, M. y Pachano, L. (2009). El trabajo cooperativo en la búsqueda de aprendizajes significativos en clase de matemáticas de la educación básica. Trujillo Venezuela: Universidad de los Andes. Núcleo “Rafael Rangel”.

Tobón, S. Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencias Didácticas; Aprendizaje y Evaluación por Competencias*. Pearson

Varela, P. (1994). *Resolución de problemas en la enseñanza de las ciencias. Aspectos didácticos y cognitivos*. Universidad Complutense de Madrid.

Vilanova, S. Rocerau, M. y otros (2001). La Educación Matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje; Universidad Nacional de Mar de Plata, Argentina. OEI – *Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado de: http://www.oei.es/historico/oei-credi/index.php/autores/nombre/4927

Villa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis*. Revista internacional de investigación educativa. 8 (16), 133 – 148.

Villegas, J. Castro, E. Gutiérrez, J. (2009). Representaciones en resolución de problemas: un estudio de caso con problemas de optimización. Trabajo de Maestría. Electronic Journal of Research in Educational Psychology. ISSN. 1696-2095. No 17, Vol 7 (1) 2009, pp: 279-308. Tomado de www.redalyc.org.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. España: Siglo XXI: España Editores S.A.

Zapata, C. Rojas, M. y Gómez, M. (2009). *Modelado de la relación de confianza: profesor estudiante en la docencia universitaria*. Trabajo de Maestría. Universidad de la Sabana. Facultad de Educación. Bogotá Colombia.

7. ANEXOS

ANEXO 1. Secuencia Didáctica

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN PROFUNDIZACIÓN

SECUENCIA DIDÁCTICA[11]

UNIDAD TEMÁTICA: Problemas que se resuelven a partir de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

PREGUNTA PROBLEMA: ¿A qué se debe que los estudiantes de grado décimo presenten dificultades a la hora de desarrollar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita?

CONTENIDOS:

- Antes de iniciar la secuencia didáctica: **demuestro lo que sé** (primera y segunda parte)
- SESIÓN # 1: **¿Cómo lo hago?** (Primera parte)
- SESIÓN # 2: **¿Cómo lo hago?** (Segunda parte)
- SESIÓN # 3: **Estrategia aplicada, problema resuelto** (Primera parte)
- SESIÓN # 4: **Estrategia aplicada, problema resuelto** (Segunda parte)
- SESIÓN # 5: **¡Así de se desarrollan!** (Primera parte)
- SESIÓN # 6: **¡Así de se desarrollan!** (Segunda parte)
- SESIÓN # 7: **Demostramos lo aprendido** (Primera parte)
- SESIÓN # 8: **Demostramos lo aprendido** (Segunda parte)

DURACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA: Siete (7) semanas (enero y marzo 2018)

NOMBRE DE LOS DOCENTES QUE ELABORARON LA SECUENCIA DIDÁCTICA:

- Mercedes Mercado Arrieta (IEA. Víctor Manuel Orozco del municipio de Támesis Antioquia)
- Jorge Eliécer Gil Osorio (IE. Luis Eduardo Arias Reinel del municipio de Barbosa Antioquia)

---

[11] La estructura de la presente secuencia didáctica es tomada de Díaz (2013) y Tobón (2010); realizando algunas modificaciones pertinentes para los objetivos del proyecto de profundización.

OBJETIVO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA: Contribuir a la superación de uno de los errores frecuentes que presentan los estudiantes de grado décimo al abordar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

ORIENTACIONES GENERALES PARA EL DESARROLLO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA: Durante el desarrollo de la secuencia didáctica, encontrarás actividades tanto individuales como cooperativas, entendiendo ésta última como la conformación de un equipo formal con roles designados y un propósito definido. De la misma forma, cada actividad está pensada de tal forma que los estudiantes desarrollen habilidades para abordar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita,

Demuestro lo que sé (primera parte)

Objetivo de la sesión: Resolver de forma individual algunos problemas a partir de tus saberes previos

Tiempo estimado: 1 hora (enero 18 de 2018)

A continuación encontrarás una serie de problemas que se desarrollan con ecuaciones primer grado con una incógnita, deberás resolverlas en el recuadro que aparece al frente. Recuerda que tienes el resto de la clase para solucionarla, utiliza lápiz y trata de ser lo más claro posible. Muchos éxitos[12].

Situación 1:

La edad del padre es el doble que la de su hijo. Si ambas edades suman 60 años; ¿Cuál es la edad del hijo?

...

Situación 2:

Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de 6 pesos el litro y la segunda de 7,2 pesos el litro. ¿Cuántos litros hay que poner de cada clase de aceite para obtener 60 litros de mezcla a 7 pesos el litro?

...

Situación 3:

Un neumático tiene una capacidad de 16 litros, soporta una presión de 1.93 atm cuando la temperatura ambiente es de 20°C. ¿Qué presión llegará a soportar dicho neumático si en el

[12] Ejercicios proporcionados por un docente de matemáticas de grado noveno

transcurso del viaje, las ruedas alcanzan una temperatura de 353 Kelvin? Recuerde la ley Gay – Lussac: $P_1/t_1 = P_2/t_2$; Recuerda tener en cuenta las unidades. …

Responde las siguientes preguntas:

1) ¿Qué dificultades encontraste a la hora de solucionar los tres problemas?
2) ¿Cómo se desarrollarían más fácil este tipo de problemas?
3) ¿Qué te faltó para completar el desarrollo de los problemas?

Demuestro lo que sé (segunda parte)

Objetivo de la Sesión: Desarrollar en equipos de 3 estudiantes, algunos problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Tiempo estimado: 1 hora (Enero 19 de 2018)

La siguiente sesión se desarrollará en equipos de 3 estudiantes conformadas libremente:

Nombre del estudiante: ____

Nombre del estudiante: ____

Nombre del estudiante: ____

Actividad número 1:

A continuación encontrarán una serie de problemas que se resuelven a partir de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resuelvan los problemas en el recuadro que aparece al frente:

PROBLEMA	SOLUCIÓN
Cuál es la edad de clara sabiendo que al añadirle su mitad. Obtenemos la edad de Juán que tiene 21 años	
En mi colegio entre alumnos y alumnas somos 624. El número de chicas	

supera en 36 al de chicos. ¿Cuántos chicos y cuantas chicas hay?	
Tres hermanos se reparten 1300 pesos. El mayor recibe doble que el mediano y este el cuádruple que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?	

Actividad número 2:

La actividad consiste analizar el problema que se presenta en la columna de la izquierda y relacionarlo con una de las tres opciones que se presentan en la columna de la derecha.

PROBLEMA	Elije la ecuación que más se ajuste a la comprensión del problema
PROBLEMA # 1 En una granja hay doble número de gatos que de perros y triple número de gallinas que de perros y gatos juntos. ¿Cuántos gatos, perros y gallinas hay si en total son 96 animales?	$2x + x + 3(2x + x) = 96$ 2g + 3g = 96 p + 2p + 3(2p) = 96
PROBLEMA # 2 En una reunión hay el doble de mujeres que de hombres y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños hay si en total hay 96 personas?	$x + 2 + 3(2x + 2) = 96$ 2y + 3y + (2y + 3y) = 96 h + 2h + 3h = 96
PROBLEMA # 3 Irene y Alejandro tienen 73 CDs de música. Irene tiene el doble de Alejandro mas un CD. ¿Cuántos CDs tiene cada uno?	d + (2d + 1) = 73 $73 - 73x = 2(73)$ h + (73 + 1) = 73
PROBLEMA # 4 En un concierto hay 432 personas. Si sabemos que hay 48 mujeres más que hombres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?	$x + (x + 48) = 432$ 48 + (c – 48) = 432 y + 48y = 432
PROBLEMA # 5 Para una fiesta se han comprado 340 refrescos. De naranja hay el triple que de cola. De limón el doble que de cola menos 20. ¿Cuántos refrescos hay de cada clase?	r + 3r + 2r – 20 = 340 r + 3r + (3r - 20) = 340 $2x + 3x - 20 = 340$

Responde las siguientes preguntas:

1) ¿Qué dificultades presentaste a la hora de desarrollar los problemas?
2) ¿Cómo crees que sería más fácil desarrollar este tipo de problemas?
3) ¿Consideras que a partir del trabajo en equipo se puedan desarrollar los ejercicios con una mejor efectividad?, ¿Por qué?

SESIÓN # 1: ¿Cómo lo hago? Primera parte

Tiempo estimado para la sesión: 1 horas (febrero 5 de 2018)

Objetivo de la Sesión: Reconocer algunas expresiones que te facilitarán la traducción del lenguaje verbal al lenguaje simbólico.

Integrantes del Equipo Cooperativo:

1) ____Rol: _______________
2) ____Rol: _______________
3) ____Rol: _______________
4) ____Rol: _______________

INICIO

Para iniciar esta sesión, es necesario que se reúnan en los **equipos cooperativos** que previamente se han conformado; a continuación, leerán cooperativamente el siguiente texto que les recordarán las características que deben sobresalir en un verdadero equipo cooperativo:

- **Su rendimiento**: depende del esfuerzo de todos los miembros del grupo.
- **Los resultados**: deben esforzarse para obtener resultados que superen la capacidad individual de cada miembro.
- **Responsabilidad:** cada miembro del grupo asume la responsabilidad, y hace responsables a los demás, de realizar un buen trabajo para cumplir los objetivos en común.

- **Trabajo codo a codo**: los miembros del grupo deberán trabajar codo a codo con el fin de producir resultados conjuntos, hacen un verdadero trabajo colectivo y cada uno debe promover el buen rendimiento de los demás, por la vía de ayudar, compartir, explicar y alentarse unos a otros. Se deberán prestar apoyo, tanto en lo escolar como en lo personal, sobre la base de un compromiso y un interés recíprocos.
- **Buenas relaciones interpersonales**: los miembros del equipo deberán evidenciar formas de relación interpersonal para coordinar su trabajo y alcanzar sus metas.
- **Evaluación:** los grupos deberán analizar con qué eficacia están logrando los objetivos y en qué medida los miembros están trabajando juntos para garantizar un avance en su aprendizaje y su trabajo en equipo. El equipo es más que la suma de sus partes, y todos los estudiantes evidenciarán un mejor desempeño que si hubieran trabajado solos.

David W. Johnson - Roger T. Johnson Edythe J. Holubec. (1999, p. 7)

EJERCICIO DE CALENTAMIENTO

Discutan la siguiente actividad y relacionen mediante una línea los enunciados de la columna **A** con la expresión algebraica en la columna **B**:

Columna A	**Columna B**
• Antecesor	2q
• Sucesor	3p
• Un número	$\frac{1}{3}x$
• Mitad de la edad de María	x-1
• El triplo del sueldo de Juan	m
• El doble de un número	½ n
• Tercera parte de una herencia	x+1

SESIÓN # 2: ¿Cómo lo hago? Segunda parte

Tiempo estimado para la sesión: 1 horas (febrero 8 de 2018)

Objetivo de la Sesión: Reconocer algunas expresiones que te facilitarán la traducción del lenguaje verbal al lenguaje simbólico.

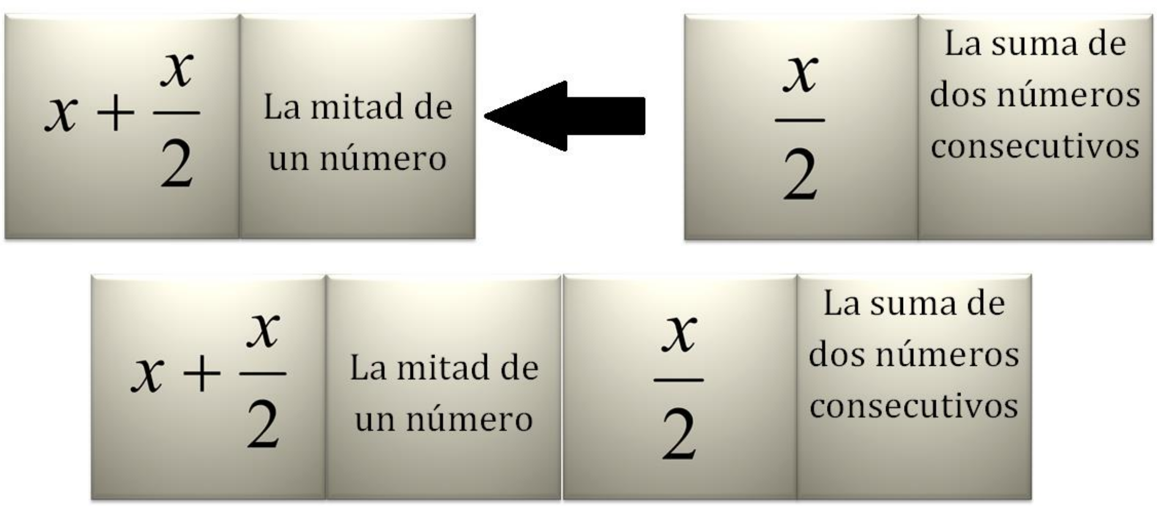
DESARROLLO

Con el fin de **proporcionar herramientas para que ustedes mejoren su rendimiento** a la hora de traducir situaciones verbales al lenguaje algebraico, desarrollarán cooperativamente la siguiente actividad, que les recordarán algunas expresiones básicas.

JUGUEMOS AL DOMINÓ DE EXPRESIONES

Materiales: Fichas de dominó expresiones, Bolígrafo, Cuaderno de clase

Instrucciones del juego: cada equipo cooperativo tendrá alrededor de 28 fichas, que estarán compuestas por una expresión verbal y una expresión algebraica, el objetivo será organizar todas las fichas haciendo coincidir cada expresión verbal con la expresión algebraica iniciando con la ficha doble. Deberán trabajar cooperativamente para lo cual se aconseja repartir las fichas por todos los integrantes de tal modo que cada integrante proponga una ficha para el movimiento. Ejemplo:



CIERRE

Para finalizar la sesión, deberán registrar en el siguiente recuadro todas las expresiones verbales con sus respectivas traducciones algebraicas; tengan en cuenta que estas expresiones les ayudarán a comprender con mayor facilidad las situaciones que se presentarán en las próximas actividades.

EXPRESIÓN VERBAL	TRADUCCIÓN ALGEBRAICA

Respondan cooperativamente las siguientes preguntas:

1) ¿Consideran que el trabajo en equipos cooperativos facilitó el desarrollo de las actividades realizadas en la presente sesión?, ¿Cómo?
2) ¿Cómo pueden utilizar la lista de expresiones construida a partir del dominó?
3) ¿Creen que las actividades realizadas en esta clase, les ayudarán a mejorar la comprensión de problemas?, ¿Por qué?
4) ¿Tus compañeros de equipo te ayudaron a comprender mejor las expresiones trabajadas en la clase?, ¿Cómo?
5) ¿Qué dificultades presentaron en el desarrollo de las actividades de la clase?, Expliquen
6) Valoren el desempeño del equipo cooperativo resaltando las características más sobresalientes que se evidenciaron en el desarrollo de las actividades de la presente sesión.

SESIÓN # 3: Estrategia aplicada, problema resuelto. Primera parte

Tiempo estimado para la sesión: 1 hora (febrero 12 de 2018)

Objetivo: Utilizar algunas estrategias que te ayudarán a desarrollar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita

Integrantes del equipo Cooperativo:

1) ____Rol: _______________
2) ____Rol: _______________
3) ____Rol: _______________
4) ____Rol: _______________

INICIO

La siguiente sesión se desarrollará en los equipos **COOPERATIVOS**, recuerden tener en cuenta los principios básicos de cooperación.

Los problemas matemáticos constituyen un medio de construcción de nuevos aprendizajes, que adquieren significación en el momento que éstos son útiles para resolver situaciones de la vida diaria; a continuación deberán encontrar las **asociaciones** que son utilizadas para expresar operaciones matemáticas; se exponen algunos ejemplos, deberán completar todas las que falten:

ACTIVIDAD # 1:

OPERACIÓN MATEMÁTICA	**ASOCIACIÓN**
SUMA	Aumentado
RESTA	Disminuido
MULTIPLICACIÓN	Producto
DIVISION	Cociente

Una vez completen el cuadro anterior, retroalimenten el mismo con base en las asociaciones entregadas por el docente.

DESARROLLO

ACTIVIDAD # 2

Utilizando las asociaciones anteriores; escriban la expresión algebraica que corresponde a cada enunciado:

1. Un número aumentado en 15:

   ____

2. La edad de Pedro hace 7 años:

   ____

3. La edad de Pablo dentro de 9 años:____

4. La mitad de un número aumentado en 10:

   ____

5. Cuatro veces la diferencia entre un número y 5:

   ____

6. El triple de un numero disminuido en 6:

   ____

7. La razón entre un número y su sucesor:

   ____

8. El doble de la herencia de Carmen:

   ____

9. Relaciona la edad de tu padre con la tuya y expresa un enunciado verbal con su correspondiente expresión simbólica:

   ____

   ____

10. Relaciona los siguientes números en una ecuación 34 y 46; Construye la expresión verbal y su correspondiente expresión simbólica:

    ____

    ____

SESIÓN # 4: Estrategia aplicada, problema resuelto. Segunda Parte

Tiempo estimado para la sesión: 1 hora (febrero 15 de 2018)

Objetivo: Utilizar algunas estrategias que te ayudarán a desarrollar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita

CIERRE

¿Cómo abordar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita?

Lean cooperativamente el siguiente texto que les proporcionarán herramientas importantes para abordar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Utilizaremos el método de cuatro pasos de **George Pólya** para abordar los problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, los cuatro pasos son:

1) Comprender el problema
2) Concebir un plan
3) Ejecutar el plan
4) Examinar la solución

1) Comprender el Problema: Para esta etapa se siguen las siguientes preguntas: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Es redundante?, ¿Es contradictoria?; Es decir, esta es la etapa para determinar la incógnita, los datos, las condiciones, y decidir si esas condiciones son suficientes, no redundantes ni contradictorias.

2) Concebir un Plan: Para Pólya en esta etapa del plan el problema debe relacionarse con problemas semejantes. También debe relacionarse con resultados útiles, y se debe determinar si se pueden usar problemas similares o sus resultados (aquí se subraya la importancia de los problemas análogos). Algunas interrogantes útiles en esta etapa son:

¿Se ha encontrado con un problema semejante?, ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿Conoce un problema relacionado?, ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?

3) **Ejecución del Plan:** Durante esta etapa es primordial examinar todos los detalles y es parte importante recalcar la diferencia entre percibir que un paso es correcto y, por otro lado, demostrar que un paso es correcto. Es decir, es la diferencia que hay entre un problema por resolver y un problema por demostrar. Por esta razón, se plantean aquí los siguientes cuestionamientos: ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?, ¿Puede demostrarlo?; En síntesis: al ejecutar el plan de solución debe comprobarse cada uno de los pasos y verificar que estén correctos.

4) **Examinar la Solución:** También denominada la etapa de la visión retrospectiva, en esta fase del proceso es muy importante detenerse a observar qué fue lo que se hizo; se necesita verificar el resultado y el razonamiento seguido De preguntarse: ¿Puede verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿Puede verlo de golpe?, ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema? Estas cuestiones dan una retroalimentación muy interesante para resolver otros problemas futuros: Pólya plantea que cuando se resuelve un problema (que es en sí el objetivo inmediato), **también, se están creando habilidades posteriores para resolver cualquier tipo de problema.** En otras palabras, cuando se hace la visión retrospectiva del problema que se resuelve, se puede utilizar tanto la solución que se encuentra como el método de solución; este último podrá convertirse en una nueva herramienta a la hora de enfrentar otro problema cualquiera. De hecho, es muy válido verificar si se puede obtener el resultado de otra manera; si bien es cierto que no hay una única forma o estrategia de resolver un problema pueden haber otras alternativas. Precisamente, esta visión retrospectiva tiene por objetivo que veamos esta amplia gama de posibles caminos para resolver algún tipo de problema.

Ahora abordaremos algunos problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando cada uno de los pasos para intervenirlos; Analicen el siguiente ejercicio modelo que evidencia los pasos descritos:

PROBLEMA: Tres hermanos se reparten 1300 pesos. El mayor recibe doble que el mediano y este el cuádruple que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

Paso # 1 Comprender el problema: En este paso se debe realizar el planteamiento del problema, se extraen las incógnitas, para lo cual se les recomienda consultar las sesiones anteriores donde se les proporciona algunas herramientas para su comprensión, igualmente pueden utilizar gráficas y/o representaciones que les permitan comprender mejor el problema:

1300 pesos serán repartidos en

Hermano pequeño= y (llamamos "y" a lo que recibe el pequeño)

Hermano mediano = 4y (4 veces lo del pequeño)

Hermano mayor = 2 (4y) (doble que el mediano) por tanto 8y

Paso # 2 Concebir un plan: En esta parte se utiliza la información del paso número 1 y se construye un plan, es decir, una ecuación que nos proporcionará el valor de y que es lo que recibe el hermano pequeño, y con este valor podemos deducir lo que recibe el hermano mediano y el hermano mayor: por tanto la ecuación se plantearía así:

$$8y + 4y + y = 1300$$

Paso # 3 Ejecutar el plan: En este apartado, se dará solución a la ecuación de primer grado con una incógnita planteada en el paso número 2, así:

$$8y + 4y + y = 1300$$
$$13y = 1300$$
$$y = \frac{1300}{13}$$
$$y = 100$$

Paso # 4 Examinar la solución: Como ya se calculó el valor de y = 100 pesos, podemos determinar el dinero que recibe cada uno de los hermanos así:

Hermano pequeño= y (que corresponde a **100 pesos**)

Hermano mediano = 4y (4 x 100 = **400 pesos**)

Hermano mayor = 2 (4y) (2 x 400 = **800 pesos**)

Si sumamos el total de dinero deberá dar 1300 que es el valor inicial que se debían repartir

ACTIVIDAD # 3:

Con base en la lectura y el análisis del ejercicio anterior y teniendo en cuenta los roles de cada uno de los integrantes del equipo cooperativo, evidenciar los cuatro pasos al abordar los siguientes problemas:

a) Si a la edad de Rodrigo se le suma su mitad se obtiene la edad de Andrea. ¿Cuál es la edad de Rodrigo si Andrea tiene 24 años?
b) Un padre tiene 47 años y su hijo 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea triple que la del hijo?

Nota: Utiliza el respaldo de la hoja para realizar los procedimientos, recuerde evidenciar los cuatro pasos para la resolución de problemas expuestos anteriormente.

Muchos éxitos…

Respondan cooperativamente las siguientes preguntas:

1) ¿Qué dificultades presentaron a la hora de desarrollar las actividades planteadas en esta sesión?

2) ¿Cómo realizaron la traducción del lenguaje verbal al lenguaje en símbolos para los problemas planteados?
3) ¿De qué manera los pasos para abordar problemas te ayudaron a comprender los ejercicios posteriores?
4) ¿Cómo se facilitaría la comprensión de este tipo de problemas?
5) ¿De qué manera el trabajo en equipo facilitó el desarrollo de las actividades?
6) Valoren el desempeño del equipo cooperativo resaltando las características más sobresalientes y los roles que se evidenciaron en el desarrollo de las actividades.

SESIÓN # 5: ¡Así se desarrolla! Primera Parte

Tiempo estimado para la sesión: 1 hora (febrero 26 de 2018)

Objetivo: Aplicar los cuatro pasos para abordar problemas aplicando lo aprendido en las sesiones anteriores

Integrantes del equipo Cooperativo: **Fecha:** _______________

1) ____ **Rol:** ________________
2) ____ **Rol:** ________________
3) ____ **Rol:** ________________
4) ____ **Rol:** ________________

INICIO

La siguiente sesión se desarrollará en los equipos **COOPERATIVOS**, recuerden tener en cuenta los principios básicos de cooperación para evaluar el desempeño del equipo cooperativo una vez finalice la sesión.

Analicen cooperativamente el siguiente problema donde se enmarcan los 4 pasos para su solución: COMPRENDER EL PROBLEMA, CONCEBIR EL PLAN, EJECUTAR EL PLAN Y EXAMINAR LA SOLUCIÓN.

Nota: **las situaciones que se presentan en la siguiente sesión, estarán enmarcadas en la dinámica que ocurre en una granja**: de esta forma:

Problema # 1: **¿Cuántos Animales?**

A la carnicería del pueblo llegan dos cajas con carne que han mandado de la central de sacrificio; la primera caja está rotulada con el nombre de ***Perniles de Gallina y Patas de Cerdo = 116****; la segunda caja está marcada con el nombre de* ***cabezas = 35***[13]*: El carnicero desea saber cuántas gallinas y cuantos cerdos fueron sacrificados para el envío de su pedido sin necesidad de abrir las cajas.*

Paso 1: COMPRENDER EL PROBLEMA:

X = Número de Cerdos

35 – X = Número de Gallinas

Paso 2: CONCEBIR UN PLAN

---

[13] Las imágenes fueron tomadas de https://www.google.com.co/search?hl=es-419&tbm: y editadas por los autores para fines explicativos del problema.

$$\underset{\text{Patas de cerdo}}{\underset{\Uparrow}{4}}x+\overset{\text{Patas de gallina}}{\overset{\Downarrow}{2}}(35-x)=116$$

Paso 3: EJECUCIÓN DEL PLAN

$$4x+2(35-x)=116$$
$$4x+70-2x=116$$
$$4x-2x=116-70$$
$$2x=46$$
$$x=\frac{46}{2}$$
$$x=23$$

Paso 4: EXAMINAR LA SOLUCIÓN:

Para el envío del pedido de carne, se sacrificaron (x=23) ***23 cerdos*** *y (35 - x) = (35 - 23) =* ***12 gallinas***

DESARROLLO

Problema # 3: **"Los huevos rotos[14]"**

[14] La imagen fue tomada de https://www.google.com.co/search?hl=es-419&biw=1188&bih.

Se les presenta el siguiente problema que involucra ecuaciones de primer grado con una incógnita; deberán completar la ecuación y su resolución.

Un granjero lleva al mercado una cesta de huevos, de tan mala suerte que tropieza y se le rompen 2/5 partes de la mercancía. Entonces vuelve al gallinero y recoge 21 huevos más, con lo que ahora tiene 1/8 más de la cantidad inicial. ¿Cuántos huevos tenía al principio?

Paso 1: Comprender el Problema
Paso 2: Concebir el plan:
Paso 3: Ejecutar el Plan:
Paso 4: Examinar la solución:

SESIÓN # 6: ¡Así se desarrolla! Segunda Parte

Tiempo estimado para la sesión: 1 hora (marzo 1 de 2018)

Objetivo: Aplicar los cuatro pasos para abordar problemas aplicando lo aprendido en las sesiones anteriores

CIERRE

A continuación se presenta una serie de problemas que se desarrollan a partir de ecuaciones de primer grado con una incógnita, deberán comprender e problema y elegir la ecuación correcta que conciba el plan para solucionar el problema:

PROBLEMA	COMPRENDER EL PROBLEMA	CONCEBIR EL PLAN (elije la

		ecuación que más se ajuste a la comprensión del problema)
PROBLEMA # 1 En una granja hay doble número de gatos que de perros y triple número de gallinas que de perros y gatos juntos. ¿Cuántos gatos, perros y gallinas hay si en total son 96 animales?		2g + 3g = 96 2*x* + *x* + 3(2 *x* + *x*) = 96 p + 2p + 3(2p) = 96
PROBLEMA # 2 Un granjero tiene 12 caballos de 9 y 11 años: la suma de sus edades es de 122 años. ¿Cuántos caballos haba de cada edad?		9c + 11(12 – c) = 122 9 + 11(12 – X) = 122 122/ 12 + 9x + 11x = 122
PROBLEMA # 3 En una reunión hay el doble de mujeres que de hombres y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños hay si en total hay 96 personas?		x + 2x + 3(2x + 2) = 96 2y + 3y + (2y + 3y) = 96 h + 2h + 3h = 96
PROBLEMA # 4 En mi colegio entre alumnos y alumnas somos 624. El número de chicas supera en 36 al de chicos. ¿Cuántos chicos y cuantas chicas hay?		a + (a + 36) = 624 624 = y – 36 36x – x = 624
PROBLEMA # 5 Irene y Alejandro tienen 73 CDs de música. Irene tiene el doble de Alejandro mas un CD. ¿Cuántos CDs tiene cada uno?		d + (2d + 1) = 73 73 – 73x = 2(73) h + (73 + 1) = 73
PROBLEMA # 6 En un concierto hay 432 personas. Si sabemos que hay 48 mujeres más que hombres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?		48 + (c – 48) = 432 x + (x + 48) = 432 y + 48y = 432
PROBLEMA # 7 Para una fiesta se han comprado 340 refrescos. De naranja hay el triple que de cola. De limón el doble que de cola menos 20. ¿Cuántos refrescos hay de cada clase?		r + 3r + 2r – 20 = 340 e + 3e + (3e - 20) = 340 2x + 3x - 20 = 340
PROBLEMA # 8 Una madre tiene 60 años y su hijo la mitad. ¿Cuántos años hace que la madre tenía tres veces la edad de su hijo?		3 (30 – x) = (60 – x) 60a – ½(a) = 60 - 30 3(60 - y) = (30 - y)

Respondan cooperativamente las siguientes preguntas:

1) ¿Qué dificultades presentaron a la hora de desarrollar las actividades de la sesión?
2) ¿Cómo las imágenes y/o representaciones facilitaron la comprensión de los problemas planteados?
3) ¿Cómo hicieron para abordar las situaciones que se presentaron en el Juego de Serpientes y Escaleras?
4) ¿Qué ventajas aporta éste tipo de juegos y retos para facilitar la comprensión de los problemas planteados en la clase?
5) Valoren el desempeño del equipo cooperativo resaltando las características más sobresalientes que se evidenciaron en el desarrollo de las actividades de la presente sesión.

Juguemos escalera de resoluciones

Objetivo de Cooperación[15]: Trabajar cooperativamente para superar los retos que se presenten en el juego Escalera de resoluciones, deberán evidenciar una verdadera cooperación donde todos los integrantes del equipo se apoyarán uno al otro con el fin de alcanzar la meta de 100 puntos; Solo sobresalen aquellos equipos cooperativos que logren una buena sinergia.

La siguiente actividad se realizará en los equipos cooperativos conformados por el docente en sesiones anteriores. La actividad consiste en llegar a la casilla 100 de la tabla a partir de un juego didáctico con dados y fichas móviles; en el camino encontrarás tanto serpientes y escaleras, las cabezas de las serpientes te harán retroceder hacia la cola de la misma si traduces mal la situación verbal al lenguaje algebraico, lo mismo ocurre con las escaleras, el inicio de la misma te hará avanza, siempre y cuando responsas satisfactoriamente a la situación planteada.

[15] La imagen fue tomada de: https://www.google.com.co/search?hl=es-419&tbm=isch&source=hp&biw=1188&bih=535&ei:

Debes tener en cuentas las siguientes reglas del juego:

1) Se realizará un juego colectivo donde participarán todos los equipos cooperativos, el equipo ganador será el que llegue primero a la casilla 100.
2) Se dispondrá una tabla de juego en el piso del salón de clase, donde cada equipo tendrá una ficha móvil iniciando en la casilla con el nombre de salida.
3) Inicia el equipo que tire dados dobles, luego, se continuará el juego con un solo dado, avanzando las casillas que indique el mismo; si un equipo quedase en la casilla de otro equipo, éste último quedará en la casilla inmediatamente anterior y de esta forma el tercero o cuarto equipo que quede en la casilla de otros.
4) Cuando un equipo quede al inicio de una escalera o en la cabeza de una serpiente, deberá sacar una situación de la bolsa que tendrá el docente; deberán proponer la ecuación, si es correcta, avanzará hasta al final de la escalera, de lo contrario continuarán su camino sin subir por la misma. Si el caso ocurre en la cabeza de la serpiente y el equipo no responde correctamente a la situación planteada, bajarán hacia la cola de la misma, de lo contrario, es decir si la ecuación propuesta es acorde a la situación planteada, el equipo continuará su camino sin ser afectado por la serpiente; (Nota: Tendrán 2 min para plantear la ecuación)
5) El ganador del juego será el equipo que llegue primero a la casilla 100, siempre y cuando llegue con el tiro exacto de los dados.

Ilustración 32: Tapete de juego de escalera utilizado como medio didáctico

SESIÓN # 7: Demostramos lo aprendido. Primera Parte

Tiempo estimado para la sesión: 1 hora (marzo 5 de 2018)

Objetivo: Demostrar las habilidades alcanzadas para traducir expresiones verbales a expresiones simbólicas al abordar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Integrantes del equipo Cooperativo: **Fecha:** _______________

____ **Rol:** ________________

____ **Rol:** ________________

____ **Rol:** ________________

____ **Rol:** ________________

INICIO

La siguiente sesión se desarrollará en los equipos **COOPERATIVOS**, recuerden tener en cuenta los principios básicos de cooperación para evaluar el desempeño del equipo una vez finalice la sesión.

Actividad # 1:

A continuación, deberán proponer un problema que se desarrolle a partir de ecuaciones de primer grado con una incógnita e igualmente deberán evidenciar los cuatro pasos para su solución (comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución); recuerden los planeamientos desarrollados en las sesiones anteriores y las herramientas para traducir del lenguaje verbal al algebraico. Utilicen situaciones de la vida cotidiana para su construcción.

Problema:
PASO 1: Comprender el problema:
PASO 2: Concebir el plan:
PASO 3: Ejecutar el plan:
PASO 4: Examinar la solución:

Actividad # 2:

A continuación se presenta una ecuación de primer grado con una incógnita; deberán trabajar cooperativamente con el fin de plantear un problema a partir de la ecuación presentada; Observa tu cotidianidad; ¿Cómo pueden plantear un problema utilizando tú contexto?

ECUACIÓN $$\mathbf{m + (m + 36) = 624}$$
PROBLEMA

DESARROLLO

Actividad # 3:

A continuación, encontrarán tres problemas con sus respectivas ecuaciones y sus desarrollos a partir de ecuaciones de primer grado con una incógnita. <u>**Deberán identificar los problemas que presentan errores**</u>, Señalen el error con un círculo y en el espacio contiguo desarrolle de forma correcta la situación.

Problema # 1 **Tres hermanos se reparten 1300 pesos. El mayor recibe el doble que el mediano y éste el cuádruple que el menor. ¿Cuánto recibe cada uno?**
$2k + 4k + k = 1300$ $7k = 1300$ $k = \frac{1300}{7}$ $k = 185{,}7$

Rta/ El hermano mayor recibe 2x = 2(185,7) = 317,4 pesos, el hermano del medio recibe 4x= 4(185,7pesos) = 742,7 pesos y el hermano pequeño recibe x = 185,7 pesos.
¿Encontraron algún error?; ¿Cuál?, ¿Cómo sería la solución correcta?
Problema # 2 **En las grandes explotaciones de tilapia roja se manejan unas densidades de siembra óptima para obtener el mayor número de alevinos en la etapa de reproducción. La técnica actual aconseja una relación de siembra de tres hembras por un macho. En una estación piscícola se requiere comprar 3900 reproductores entre machos y hembras manteniendo la relación de siembra. Determinar la cantidad de hembras y de machos que se deben comprar.**
$b + 3b = 3900$ $4b = 3900$ $b = 3900\ /4$ $b = 975$ Rta: La cantidad de machos es 975 y la cantidad de hembras es 3(975) =2925
¿Encontraron algún error?; ¿Cuál?, ¿Cómo sería la solución correcta?

Problema # 3 **Pedro y Juan tienen cada uno, una colección de camisetas de diferentes años de la selección Colombia. Pedro tiene el doble de camisetas que Juan. Si a Pedro le han regalado la tercera parte de sus camisetas y ha comprado 16 camisetas ¿qué cantidad de camisetas tiene Juan?**
$2x - \left(\frac{1}{3}\right)x = 16$ $\frac{6x - x}{3} = 16$

$$\frac{5x}{3} = 16$$ $$x = \frac{3(16)}{5}$$ $$x = 9.6$$ Rta/ Juan tiene 9.6 camisas de la selección Colombia
¿Encontraron algún error?; ¿Cuál?, ¿Cómo sería la solución correcta?

SESIÓN # 8: Demostramos lo aprendido. Segunda Parte

Tiempo estimado para la sesión: 1 hora (marzo 8 de 2018)

Objetivo: Demostrar las habilidades alcanzadas para traducir expresiones verbales a expresiones simbólicas al abordar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

CIERRE

Actividad # 4:

Demuestren las habilidades cooperativas adquiridas en las sesiones anteriores para abordar el siguiente problema; deberán realizar el planteamiento, construir la ecuación y su correspondiente solución, recuerden los roles de los integrantes del equipo, Muchos éxitos

Problema: **De un barril lleno de agua se saca la mitad de contenido y después un tercio del resto, quedando en él 200 litros. Calcula la capacidad del barril.**
Comprensión del problema:
Concebir el plan:

Ejecución del plan:
Examinar la solución:

Respondan cooperativamente las siguientes preguntas:

1) ¿Qué dificultades presentaron en la sesión? Expliquen
2) ¿Cómo se facilitaría el desarrollo de este tipo de problemas?
3) ¿Tus compañeros de equipo te ayudaron a comprender mejor los problemas trabajados en la clase?
4) ¿Las actividades desarrolladas en las últimas clases han contribuido a mejorar la forma en que abordan los problemas que involucran ecuaciones?, ¿Cómo?
5) ¿Expliquen cómo se abordan los problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita?
6) ¿Los temas tratados a partir de guías didácticas como las que se han venido desarrollando, les facilitan la traducción de los problemas verbales al lenguaje simbólico? ¿por qué?
7) Valoren el desempeño del equipo cooperativo resaltando las características más sobresalientes que se evidenciaron en el desarrollo de las actividades de la presente sesión.

ANEXO 2. Fichas del dominó de situaciones.

x	La mitad de un número
$\frac{x}{2}$	El triple de un número
3y	Un número dividido entre tres
Un número cualquiera	Un número cualquiera
$\frac{x}{2}-15$	Un número par
$y-20$	15 menos que la mitad de un número
$\frac{p}{3}$	La quinta parte de un número
$\frac{p}{3}$	La quinta parte de un número
2n	Un número impar
$\frac{x}{2}-15$	Un número par
ñ, ñ+1	Dos números pares consecutivos
$2w+1$ $2w-1$	Dos números consecutivos

2x+1, 2x+3	El cuadrado de un número	ñ, ñ+1	Dos números pares consecutivos
x^2	El cubo de un número	x^3	El exceso de un número sobre 150
x -150	El exceso de 200 sobre un número	x -150	El exceso de 200 sobre un número
x - 4	La edad de una persona dentro de 5 años	2(a + b)	La edad de una persona hace 4 años
$\frac{y}{4}$	El doble de la suma de dos números	$\frac{m}{4}-\frac{(3m/4)}{5}$	La cuarta parte de un número
2n + (2n+2)	a cuarta parte de un número menos la quinta parte de lo que queda	x +(x+1)	La suma de dos números pares consecutivos

$k + \frac{k}{2}$	La suma de dos números pares consecutivos

x-y	La suma de un número más su mitad

3x+6	*FIN*

2b	6 años más que el triple de su edad

x + 5	El doble de la edad

ANEXO 3. Problemas para la escalera de resoluciones[16]

Problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita utilizados en el juego de “escalera de resoluciones”; cada problema fue recortado por la línea y dispuesto en una bolsa negra.

1) En una granja hay doble número de gatos que de perros y triple número de gallinas que de perros y gatos juntos. ¿Cuántos gatos, perros y gallinas hay si en total son 96 animales?

---

2) ¿Qué edades tiene Rosa sabiendo que dentro de 56 años tendrá el quíntuplo de su edad actual?

---

[16] Los problemas fueron recuperados de: https://yosoytuprofe.files.wordpress.com/2017/05/cuadernillodeproblemasdesistemasdeecuaciones.pdf

3) Un granjero tiene 12 caballos de 9 y 11 años: la suma de sus edades es de 122 años. ¿Cuántos caballos haba de cada edad?

4) Calcula tres números consecutivos cuya suma sea 51

5) Cuál es la edad de clara sabiendo que al añadirle su mitad. Obtenemos la edad de Juan que tiene 21 años

6) Calcula el número que sumado con su anterior y con su siguiente sea 114

7) Calcula el número que se triplica al sumarle 26

8) La tercera parte de un número es 45 unidades menor que su doble. ¿Cuál es el número?

9) La suma de tres números enteros consecutivos es 99. ¿Cuáles son esos tres números?

10) El triple de un número es 18

11) La mitad de tu edad más 3 es 17

12) La suma de un número con su doble es 18

13) La base de un rectángulo es el doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?

14) En una reunión hay el doble de mujeres que de hombres y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños hay si en total hay 96 personas?

15) ¿Cuál es el número que cumple que la suma de su doble y su triple es igual a 100?

16) En mi colegio entre alumnos y alumnas somos 624. El número de chicas supera en 36 al de chicos. ¿Cuántos chicos y cuantas chicas hay?

17) Irene y Alejandro tienen 73 CDs de música. Irene tiene el doble de Alejandro más un CD. ¿Cuántos CDs tiene cada uno?

18) En un concierto hay 432 personas. Si sabemos que hay 48 mujeres más que hombres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?

19) Para una fiesta se han comprado 340 refrescos. De naranja hay el triple que de cola. De limón el doble que de cola menos 20. ¿Cuántos refrescos hay de cada clase?

20) Una madre tiene 60 años y su hijo la mitad. ¿Cuántos años hace que la madre tenía tres veces la edad de su hijo?

ANEXO 4. Consentimiento informado por los padres de familia de los estudiantes de grado 10A de la IE Luis Eduardo Arias Reinel.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

INSTITUTUCIÓN EDUCATIVA LUIS EDUARDO ARIAS REINEL
"Educamos para la Formación integral, laboral y participación democrática
Código dane: 105079000082
Barbosa - Antioquia

AUTORIZACIÓN DE ESTUDIANTES PARTICIPANTES EN EL PROYECTO

Barbosa Antioquia, Enero 18 /2018

Familia: cordial saludo

En las clases de Química en las cuales participa su hij@, se estará desarrollando un proyecto de Maestría en profundización de la Universidad de Antioquia denominado **SITUACIONES QUE INVOLUCRAN ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA, EL ERROR MÁS COMÚN DE LOS ESTUDIANTES Y ESTRATEGIA DE SUPERACIÓN**; El objetivo de este proyecto es Contribuir a la superación del error más común que presentan los estudiantes de grado décimo al desarrollar situaciones que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita mediante una secuencia didáctica.
Queremos de manera formal, solicitar la autorización para que el (la) estudiante ______, del grado 10A forme parte de la investigación como participante, aclarando que su nombre no será revelado en el informe final. Esta autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabaciones, entrevistas, fotos, videos, guía de trabajo en clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración

Hugo Clever Vázquez Rector	Natalia Múnera Escobar Asesora	Soraya Isabel García Múnera Lic. en Matematicas U. de A. Con Maestria Unal Soraya Isabel García Asesora

Jorge Eliécer Gil Osorio
Docente – Estudiante de Maestría.

Autorizamos la participación de mi (nuestro) hijo (a) en el proyecto de investigación antes mencionado.

Firma del padre	Por Nancy Moreno M Firma de la madre	Esneider sierra M. Firma del estudiante

ANEXO 5. Consentimiento informado por los padres de familia de los estudiantes de grado 10A de la IEA. Víctor Manuel Orozco.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

INSTITUCIÓN EDUCATIVA AGRÍCOLA VÍCTOR MANUEL OROZCO
"Trabajo y corazón por nuestros campos"
Támesis - Antioquia

AUTORIZACIÓN DE ESTUDIANTES PARTICIPANTES EN EL PROYECTO

Támesis Antioquia, 22-02-18

Familia: cordial saludo

En las clases de Matemáticas en las cuales participa su hij@, se estará desarrollando un proyecto de Maestría en profundización de la Universidad de Antioquia denominado **SITUACIONES QUE INVOLUCRAN ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA, EL ERROR MÁS COMÚN DE LOS ESTUDIANTES Y ESTRATEGIA DE SUPERACIÓN**; El objetivo de este proyecto es Contribuir a la superación del error más común que presentan los estudiantes de grado décimo al desarrollar situaciones que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita mediante una secuencia didáctica.

Queremos de manera formal, solicitar la autorización para que el (la) estudiante ____ del grado 10º forme parte de la investigación como participante, aclarando que su nombre no será revelado en el informe final. Esta autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabaciones, entrevistas, fotos, videos, guía de trabajo en clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración

Soraya Isabel García Múnera
Lic. en Matemáticas U. de A.
Con Maestría Unal

Elkin Ratiño Pérez
Rector

Natalia Múnera Escobar
Asesora

Soraya Isabel García
Asesora

Mercedes Elisa Mercado Arrieta
Docente – Estudiante de Maestría

Autorizamos la participación de mi (nuestro) hijo (a) en el proyecto de investigación antes mencionado.

Dora Nelly Isaza C.
Firma del padre

Dora Nelly Isaza C.
Firma de la madre

Zoraida Milena Isaza
Firma del estudiante