



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

**EL DOBLADO DE PAPEL COMO MEDIO PARA LA COMPRESIÓN DEL  
CONCEPTO DE MEDIATRIZ EN ESTUDIANTES DE GRADO CUARTO DE LA  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA RURAL CHURIDÓ PUEBLO**

**Elizabeth Mena Palacio**

**Paula Cristina Gallón Jaramillo**

**Universidad de Antioquia**

**Facultad de Educación**

**Medellín, Colombia**

**2019**



**El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz en  
estudiantes de grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo**

**Elizabeth Mena Palacio**

**Paula Cristina Gallón Jaramillo**

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación

Asesora

**Dra. Zaida Margot Santa Ramírez**

Línea de Educación Matemática, Modalidad Profundización

Grupo de Investigación EDUMATH

**Universidad de Antioquia**

**Facultad de Educación**

**Medellín, Colombia**

**2019**

## **Dedicatoria**

*A mis padres Pastora y Hernando*

*Por su amor y apoyo*

*Paula Cristina*

*A mi hija Elizabeth*

*Por ser el motor de mi vida*

*Elizabeth*

## **Agradecimientos**

A Dios nuestro Padre amado, por su infinita misericordia, por estar con nosotros durante este camino de crecimiento académico, por brindarnos la fuerza y el entendimiento.

A todos los docentes que nos acompañaron y guiaron durante la construcción de esta propuesta, quienes nos brindaron su sabiduría y conocimiento, y nos ayudaron a fortalecerla y nutrirla; de manera muy especial, a nuestra asesora, Dra. Zaida Margot Santa Ramírez, por su paciencia, comprensión, apoyo, dedicación, conocimiento..., las palabras no son suficientes para expresar nuestra gratitud.

Al Ministerio de Educación Nacional y a la Universidad de Antioquia, por brindarnos esta oportunidad de crecimiento profesional.

A nuestras familias, por comprender la ausencia y apoyarnos en este reto, por estar siempre para nosotras, brindándonos su voz de aliento cuando la necesitábamos y por sus infinitas oraciones; en especial a Elicita, por el tiempo que como madre no le pude dedicar (Elizabeth) y a mis papas por su amor, ayuda y apoyo incondicional (Paula).

Por último, pero no menos importante, el agradecimiento mutuo, por ser coequiperas académicas y darnos el apoyo y comprensión necesaria para finalizar este proceso.

Elizabeth y Paula

## Tabla de contenido

Introducción .....	7
Capítulo uno.....	16
Problema de investigación.....	16
Planteamiento del problema.....	16
Pregunta de investigación .....	22
Objetivos .....	22
Objetivo general.....	22
Objetivos específicos .....	22
Antecedentes .....	22
Comprensión en Educación Matemática. ....	23
Marco conceptual.....	31
Doblado de papel. ....	36
Marco legal. ....	45
Capítulo dos .....	49
Enseñanza para la Comprensión .....	49
Generalidades del marco.....	49
Concepto de comprensión.....	50
Elementos de la comprensión .....	50
Tópicos generativos. ....	51
Metas de comprensión. ....	52
Desempeños de comprensión.....	53
Evaluación diagnóstica continua. ....	54
Dimensiones de la comprensión .....	55
Dimensión de contenido. ....	55
Dimensión de métodos.....	56
Dimensión de propósitos. ....	56
Dimensión de formas de comunicación.....	56
Niveles de comprensión.....	56
Ingenuo. ....	57
Novato.....	57
Aprendiz.....	57
Maestría. ....	57
Capítulo tres.....	58
Marco Metodológico.....	58

Enfoque .....	58
Tipo de estudio.....	60
Participantes.....	60
Métodos de recolección de la información .....	62
Observación. ....	62
Entrevista semiestructurada. ....	63
Material de los estudiantes.....	64
Camino metodológico.....	64
Fase de exploración. ....	64
Fase de investigación guiada. ....	65
Fase de proyecto final de síntesis. ....	66
Análisis .....	66
Capítulo Cuatro.....	68
Unidad Curricular .....	68
Doblando y doblando de la mediatriz vamos conceptualizando.....	68
Elementos de la unidad curricular .....	68
Tópico generativo. ....	68
Metas de comprensión. ....	68
Desempeños de comprensión.....	69
Evaluación diagnóstica continua. ....	84
Capítulo Cinco .....	88
Análisis del proceso de comprensión de los estudiantes .....	88
Proceso de comprensión y análisis de la información .....	88
Análisis del avance del proceso de comprensión del caso 1: Alfredo .....	89
Análisis del avance del proceso de comprensión del caso 2: Federico .....	107
Análisis del avance del proceso de comprensión del caso 3: Diana. ....	127
Capítulo 6.....	150
Conclusiones y Recomendaciones.....	150
Conclusiones.....	150
Respuesta a la pregunta de investigación. ....	150
Consecución de los objetivos.....	154
Aportes a la Educación Matemática. ....	159
Futuras líneas de investigación. ....	160
Recomendaciones .....	161

Lista de referencias .....	163
Anexos .....	167
Anexo 1. Carta aval del rector .....	167
Anexo 2. Consentimientos informados de los estudiantes .....	168
Anexo 3. Cuento “Los Cuadrados Soñadores” .....	175

## Índice de tablas

Tabla 1. Configuración epistémica de mediatriz (construcción propia basada en Font y Rubio, 2016).....	34
Tabla 2. DBA de Matemáticas de primaria por grado, asociados al concepto objeto de estudio (MEN, 2016, p. 11-40) .....	48
Tabla 3. Entrevista Semiestructurada diseñada por las investigadoras. ....	63
Tabla 4. Instructivo conejo, para los estudiantes, creación propia basada en Corredor (2001) 69	
Tabla 5. Instructivo corazón separador, creación propia basado en Corredor (2001).....	74
Tabla 6. Instructivo para el portalápiz, creación propia, basado en Corredor (2001). ....	77
Tabla 7. Esquema de los conceptos objeto de estudio.....	83
Tabla 8. Descriptores de categoría por nivel, dimensión de contenido .....	84
Tabla 9. Descriptores de categoría por nivel, dimensión de métodos .....	85
Tabla 10. Descriptores de categoría por nivel, dimensión de propósito.....	86
Tabla 11. Descriptores de categoría por nivel, dimensión de formas de comunicación .....	86
Tabla 12. Dimensión de contenido de Alfredo.....	103
Tabla 13. Dimensión de métodos de Alfredo .....	104
Tabla 14. Dimensión de propósito de Alfredo .....	105
Tabla 15: Dimensión de formas de comunicación de Alfredo .....	106
Tabla 16. Dimensión de contenido de Federico .....	123
Tabla 17. Dimensión de métodos de Federico. ....	124
Tabla 18. Dimensión de propósito de Federico.....	124
Tabla 19. Dimensión de formas de comunicación de Federico.....	125
Tabla 20. Dimensión de contenido de Diana.....	145
Tabla 21. Dimensión de métodos de Diana .....	146
Tabla 22. Dimensión de propósito de Diana .....	147
Tabla 23. Dimensión de formas de comunicación de Diana .....	148
Tabla 24. Resumen del avance en cada dimensión. ....	158



## Índice de ilustraciones

Ilustración 1. Respuesta de estudiante 1 en la actividad diagnóstica. ....	17
Ilustración 2. Respuesta de estudiante 2 en la actividad diagnóstica. ....	17
Ilustración 3. Respuesta de estudiante 3 en la actividad diagnóstica. ....	18
Ilustración 4. Resultados Prueba Saber de grado tercero, área de matemáticas, 2016. ....	18
Ilustración 5. Resultados prueba Saber de matemáticas del año 2017, grado tercero. ....	19
Ilustración 6. Construcción de casa Maya, según Cantoral y Covían (2005, p. 817).....	32
Ilustración 7. Componentes y relaciones en una configuración epistémica (Font y Rubio, 2016, p. 100).....	33
Ilustración 8. Definición de punto medio según Clemens et al (1998). ....	34
Ilustración 9. Definición de segmentos perpendiculares según Clemens et al. (1998). ....	35
Ilustración 10. Definición de bisectriz de un segmento según Clemens et al. (1998). ....	35
Ilustración 11. Construcción para biseccionar un segmento según Clemens et al., 1998, p. 25. ....	36
Ilustración 12. Definición de bisectriz perpendicular de un segmento según Clemens et al (1998). ....	36
Ilustración 13. Axioma 1, según Santa y Jaramillo (2010) .....	39
Ilustración 14. Axioma 2, según Santa y Jaramillo (2010) .....	39
Ilustración 15. Axioma 3, según Santa y Jaramillo (2010) .....	40
Ilustración 16. Axioma 4, según Santa y Jaramillo (2010) .....	40
Ilustración 17. Axioma 5, según Santa y Jaramillo (2010) .....	40
Ilustración 18. Axioma 6, según Santa y Jaramillo (2010) .....	41
Ilustración 19. Axioma 7, según Santa y Jaramillo (2010) .....	41
Ilustración 20. Proceso investigación cualitativa (Hernández et al., 2006, p. 8).....	58
Ilustración 21 .Instructivo para padres de familia. ....	72
Ilustración 22. Esquema actividad portalápiz.....	80
Ilustración 23. Paso 1 para construir la mediatriz con doblado de papel .....	80
Ilustración 24. Paso 2 para construir la mediatriz con doblado de papel .....	80
Ilustración 25. Paso 3 para construir la mediatriz con doblado de papel .....	81
Ilustración 26. Paso 4 para construir la mediatriz con doblado de papel .....	81
Ilustración 27. Paso 5 para construir la mediatriz con doblado de papel .....	81
Ilustración 28. Paso 6 para construir la mediatriz con doblado de papel .....	82
Ilustración 29. Paso 6 para construir la mediatriz con doblado de papel .....	82

Ilustración 30. Paso 8 para construir la mediatriz con doblado de papel .....	82
Ilustración 31. Construcción conejo de Alfredo. ....	89
Ilustración 32. Actividad inicial de Alfredo. ....	90
Ilustración 33. Actividad autoridad académica madre de Alfredo. ....	91
Ilustración 34. Opinión madre de Alfredo. ....	92
Ilustración 35. Construcción de Alfredo en el tercer momento. ....	93
Ilustración 36: Actividad conejo momento 3 de Alfredo. ....	93
Ilustración 37. Construcción de la rana de Alfredo. ....	94
Ilustración 38. Actividad "Los Cuadrados soñadores" de Alfredo. ....	95
Ilustración 39. Competencia de ranas saltarinas. ....	95
Ilustración 40. Segunda construcción, de la rana, de Alfredo. ....	96
Ilustración 41. Construcción corazón separador de Alfredo. ....	96
Ilustración 42. Actividad corazón separador de Alfredo. ....	97
Ilustración 43. Segunda construcción corazón separador de Alfredo .....	97
Ilustración 44. Instructivo corazón separador de Alfredo. ....	98
Ilustración 45. Construcción portalápiz de Alfredo. ....	98
Ilustración 46: actividad portalápiz de Alfredo .....	99
Ilustración 47. Construcción mediatriz de Alfredo .....	100
Ilustración 48. Actividad mediatriz con doblado de papel de Alfredo .....	101
Ilustración 49. Esquema de los conceptos de Alfredo .....	102
Ilustración 50: feria del doblado de papel .....	103
Ilustración 51. Construcción conejo de Federico. ....	107
Ilustración 52. Actividad inicial de Federico. ....	108
Ilustración 53. Actividad autoridad académica madre de Federico. ....	109
Ilustración 54. Opinión madre de Federico. ....	110
Ilustración 55. Construcción de Federico en el tercer momento. ....	110
Ilustración 56. Actividad conejo momento 3 de Federico. ....	111
Ilustración 57. Construcción de la rana. Material de Federico. ....	112
Ilustración 58. Actividad "Los Cuadrados soñadores" de Federico .....	113
Ilustración 59. Actividad "Los Cuadrados soñadores" de Federico .....	113
Ilustración 60. Segunda construcción de la rana de Federico. ....	113
Ilustración 61. Construcción corazón separador de Federico. ....	114
Ilustración 62: actividad corazón separador de Federico. ....	115

Ilustración 63. Segunda construcción corazón separador de Federico.....	115
Ilustración 64. Instructivo corazón separador de Federico.....	116
Ilustración 65. Construcción portalápiz de Federico.....	117
Ilustración 66: actividad portalápiz de Federico.....	117
Ilustración 67. Construcción mediatriz de Federico.....	118
Ilustración 68. Actividad mediatriz con doblado de papel. Preguntas 3 y 4 de Federico.....	119
Ilustración 69. Actividad mediatriz con doblado de papel. Preguntas 3 y 4 de Federico.....	119
Ilustración 70. Actividad mediatriz con doblado de papel Pregunta 5 de Federico.....	119
Ilustración 71: Actividad mediatriz con doblado de papel. Preguntas 9-10 de Federico.....	120
Ilustración 72. . Esquema de los conceptos de Federico.....	121
Ilustración 73. Feria del doblado de papel 2.....	121
Ilustración 74. Construcción conejo de Diana.....	127
Ilustración 75. Actividad inicial de Diana.....	128
Ilustración 76. Actividad autoridad académica madre de Diana.....	129
Ilustración 77. Opinión madre de Diana.....	130
Ilustración 78. Construcción de Diana en el tercer momento.....	130
Ilustración 79. Actividad conejo momento 3 de Diana.....	131
Ilustración 80. Construcción de la rana de Diana.....	132
Ilustración 81. Actividad "Los Cuadrados soñadores" de Diana.....	133
Ilustración 82. Segunda construcción de la rana de Diana.....	133
Ilustración 83. Construcción corazón separador de Diana.....	134
Ilustración 84. Actividad corazón separador de Diana.....	134
Ilustración 85. Segunda construcción corazón separador de Diana.....	135
Ilustración 86. Instructivo corazón separador de Diana.....	135
Ilustración 87. Construcción portalápiz de Diana.....	136
Ilustración 88. Actividad portalápiz de Diana, preguntas 4, 5 y 6.....	137
Ilustración 89. Actividad portalápiz de Diana, preguntas 15 y 16.....	138
Ilustración 90. Construcción mediatriz de Diana.....	139
Ilustración 91. Actividad mediatriz con doblado de papel. Preguntas 3 y 4 de Diana.....	140
Ilustración 92. Actividad mediatriz con doblado de papel. Pregunta 5 de Diana.....	140
Ilustración 93. Actividad mediatriz con doblado de papel. Preguntas 9 y 10 de Diana.....	141
Ilustración 94. Esquema de los conceptos de Diana.....	142
Ilustración 95. Feria del doblado de papel 3.....	143

Ilustración 96. Mediatriz como lugar geométrico de Federico y Diana, respectivamente. ....	155
Ilustración 97. Actividad diagnóstica de Alfredo, pregunta 1.....	156
Ilustración 98. Actividad diagnóstica de Federico, pregunta 6. ....	156
Ilustración 99. Actividad diagnóstica de Diana, pregunta 3.....	157
Ilustración 100. Construcción mediatriz de un estudiante.....	160
Ilustración 101. Carta aval del rector.....	167
Ilustración 102. Consentimiento informado estudiante 1.....	168
Ilustración 103. Consentimiento informado estudiante 2.....	169
Ilustración 104. Consentimiento informado estudiante 3.....	170
Ilustración 105. Consentimiento informado estudiante 4.....	171
Ilustración 106. Consentimiento informado estudiante 5.....	172
Ilustración 107. Consentimiento informado estudiante 6.....	173
Ilustración 108. Consentimiento informado estudiante 7.....	174
Ilustración 109. Cuento página 1.....	175
Ilustración 110. Cuento página 2.....	175
Ilustración 111. Cuento página 3.....	176
Ilustración 112. Cuento página 4.....	176
Ilustración 113. Cuento página 5.....	177
Ilustración 114. Cuento página 6.....	177
Ilustración 115. Cuento página 7.....	178
Ilustración 116. Cuento página 8.....	178
Ilustración 117. Cuento página 9.....	179
Ilustración 118. Cuento página 10.....	179
Ilustración 119. Cuento página 11.....	180
Ilustración 120. Cuento página 12.....	180
Ilustración 121. Cuento página 13.....	181
Ilustración 122. Cuento página 14.....	181
Ilustración 123. Cuento página 15.....	182
Ilustración 124. Cuento página 16.....	182
Ilustración 125. Cuento página 17.....	183
Ilustración 126. Cuento página 18.....	183
Ilustración 127. Cuento página 19.....	184
Ilustración 128. Cuento página 20.....	184

Ilustración 129. Cuento página 21.....	185
Ilustración 130. Cuento página 22.....	185
Ilustración 131. Cuento página 23.....	186
Ilustración 132. Cuento página 24.....	186
Ilustración 133. Cuento página 1.....	186
Ilustración 134. Cuento página 25.....	187
Ilustración 135. Cuento página 26.....	187
Ilustración 136. Cuento página 27.....	188
Ilustración 137. Cuento página 28.....	188
Ilustración 138. Cuento página 1.....	188
Ilustración 139. Cuento página 29.....	189
Ilustración 140. Cuento página 30.....	189

## Introducción

En la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, de Apartadó, Antioquia (Colombia), se ha encontrado que los estudiantes de primaria poseen diversas dificultades en la comprensión de conceptos geométricos. Para mejorar esta situación y, considerando que la geometría es una de las ramas de las matemáticas más cercana a la realidad de los estudiantes, se buscó con esta investigación un acercamiento a ciertos conceptos geométricos, mediante una herramienta de fácil acceso, la cual es el doblado de papel, que permita aportar al mejoramiento de los saberes específicos de estos estudiantes.

Por esta razón, este estudio pretendió dar respuesta a la pregunta: ¿De qué manera comprenden los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel?; de acuerdo con Castiblanco et al. (2004), entendemos que la exploración y manipulación directa, a través de la construcción de figuras geométricas por parte de los estudiantes, les facilita la elaboración de conjeturas que les ayudará a comprender de manera más asertiva conceptos geométricos.

En coherencia con la pregunta, se consideró pertinente para este estudio establecer un paradigma de investigación con enfoque cualitativo que comprenda y profundice los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes, en un ambiente natural y en relación con el contexto; en este sentido, los participantes fueron los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, del municipio de Apartadó, con edades comprendidas entre los 8 y 11 años; ellos fueron seleccionados de acuerdo a los bajos desempeños que se evidenciaron en los resultados de las Pruebas Saber grado tercero, en el área de matemáticas en el año 2017; además, se priorizaron aquellos estudiantes con dificultades conceptuales en geometría detectadas en actividades diagnósticas.

La ruta que muestra el camino metodológico de este estudio, se desarrolló en tres fases enmarcadas en la Enseñanza para la Comprensión<sup>1</sup>: fase de exploración, fase de investigación guiada y fase de proyecto final de síntesis. Para recolectar la información, se utilizaron métodos como observación, entrevista semiestructurada y producción o material de los

---

<sup>1</sup> También se usará la sigla EpC para referirnos a este marco conceptual.

estudiantes. De igual forma, para analizar de qué manera comprendían los estudiantes el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel, se diseñó una unidad curricular llamada ‘Doblando y doblando de la mediatriz vamos conceptualizando’, que se construyó enmarcada en la EpC.

La estructura de este trabajo se da de la siguiente manera:

El capítulo uno aborda los aspectos relacionados con el problema de investigación; es decir, el planteamiento del problema, el cual fue sustentado desde lo práctico, lo teórico y lo metodológico; así mismo, se proponen la pregunta y los objetivos del estudio; adicionalmente, se hace un rastreo en la literatura, con respecto a la comprensión en Educación Matemática, al objeto de estudio geométrico (mediatriz), al medio utilizado (doblado de papel) y a los referentes legales.

El capítulo dos expone el marco conceptual que fundamentó este estudio, que es el marco de la Enseñanza para la Comprensión (EpC); dos razones principales sustentan la elección de dicho marco: presenta orientaciones concretas para diseñar guías curriculares y hace uso de rúbricas que facilitan hacer el seguimiento y la evaluación diagnóstica continua de los estudiantes.

El capítulo tres está relacionado con la metodología utilizada para el estudio; en este caso, se presentan razones para justificar el enfoque de la investigación, para especificar el tipo de estudio y para describir los participantes, junto con su proceso de selección; se detallan los métodos de recolección de la información, se presenta el camino metodológico y, finalmente, se explica el análisis de los datos constituidos durante la aplicación de la unidad curricular en el trabajo de campo.

En el capítulo cuatro se presenta la unidad curricular que se diseñó para analizar de qué manera comprenden los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel. Así mismo, se precisan las rúbricas que permitieron hacer una evaluación diagnóstica continua del proceso.

El capítulo cinco presenta el análisis y la descripción del proceso de comprensión del concepto de mediatriz mediante el doblado de papel, de algunos estudiantes del grado cuarto

de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo. Se resalta que la descripción se realizó a la luz de las rúbricas que se diseñaron, de acuerdo a las dimensiones y a los niveles de la EpC.

El capítulo seis presenta las principales conclusiones del estudio, las cuales emergieron del análisis del proceso de comprensión de los casos 1, 2, y 3<sup>2</sup>, después de vivenciar el trabajo de campo. Se da respuesta a la pregunta de investigación y se analiza la consecución de los objetivos; así mismo, se plantean algunos aportes a la Educación Matemática y algunas líneas de investigación que se generan con el estudio. Finalmente, se exponen algunas recomendaciones para el abordaje de la unidad curricular y su evaluación en el aula de clase.

---

<sup>2</sup> Los casos serán detallados en los capítulos 3 y 5



## **Capítulo uno**

### **Problema de investigación**

En este capítulo se abordan los aspectos relacionados con el problema de investigación, tales como el planteamiento del problema, el cual es sustentado desde lo práctico, lo teórico y lo metodológico; así mismo, se proponen la pregunta y los objetivos del estudio; adicionalmente, se hace un rastreo en la literatura, con respecto a la comprensión en Educación Matemática, al objeto de estudio geométrico (mediatriz), al medio utilizado (doblado de papel) y a los referentes legales; con estos aspectos se pretende fundamentar y comprender el problema de investigación.

### **Planteamiento del problema**

El problema de investigación de este estudio está relacionado con las dificultades que exhiben los estudiantes del grado cuarto en la comprensión del concepto de mediatriz y de sus conceptos asociados, tales como: punto, segmento, perpendicularidad, punto medio, entre otros; por lo tanto, el planteamiento será abordado desde aspectos prácticos, metodológicos y teóricos.

Desde el aspecto práctico, se consideraron las dificultades en la comprensión de algunos conceptos geométricos en los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, surgidas de la aplicación y análisis de una prueba diagnóstica; así mismo, se analizaron los resultados de las pruebas externas a nivel nacional y se concluyeron bajos desempeños en el área de matemáticas.

La Institución Educativa Rural Churidó Pueblo es un establecimiento educativo focalizado por el Programa Todos a Aprender (PTA), del MEN<sup>3</sup>; a través del acompañamiento al desarrollo de las clases de los maestros, como tutoras del programa, se identificaron dificultades en la comprensión e interiorización de algunos conceptos geométricos en los estudiantes del grado cuarto, mediante la observación directa de las clases.

---

<sup>3</sup> Ministerio de Educación Nacional

Al inicio del trabajo de campo, se aplicó una actividad diagnóstica en la que se pudo observar que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de conceptos geométricos, tales como: cuadrado, triángulo, vértice, ángulo, segmento, paralelismo, diagonal, punto medio, perpendicularidad; estos dos últimos relacionados con el objeto de estudio: mediatriz. Sin embargo, de acuerdo con las Mallas de Aprendizaje (MEN, 2016) y los derechos básicos de aprendizaje, se espera que los estudiantes inicien al grado cuarto comprendiendo los conceptos anteriormente mencionados y, en la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, no se está alcanzando dicha comprensión.

Lo anterior se puede evidenciar en algunas de las respuestas dadas por los estudiantes en la actividad diagnóstica. Por ejemplo, cuando se preguntó por las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción, es decir, las de un cuadrado, un estudiante respondió: “*triagulo papel*”, lo que permite inferir que confundió el concepto de cuadrado con el concepto de triángulo, tal como se evidencia en la ilustración 1.

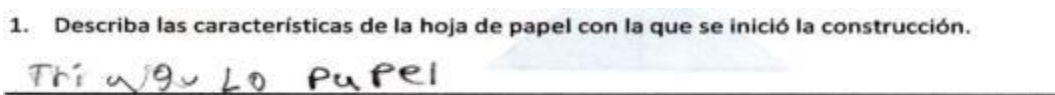


Ilustración 1. Respuesta de estudiante 1 en la actividad diagnóstica.

Un segundo ejemplo está dado por la respuesta dada por otro estudiante a la pregunta ¿cree que el doblado realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales?, ¿por qué?: “*si porque las doblo y las buelboa abrir*”. En esta pregunta se buscaba que los estudiantes mencionaran mitad o partes iguales, para identificar la aproximación al concepto de punto medio; con esta respuesta, se puede concluir que no comprende los conceptos geométricos solicitados. Lo anterior se puede visualizar en la ilustración 2.

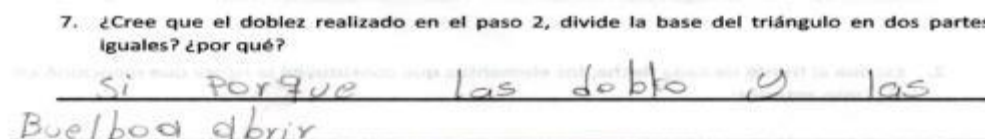
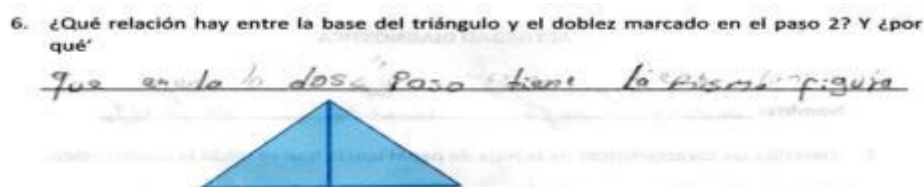


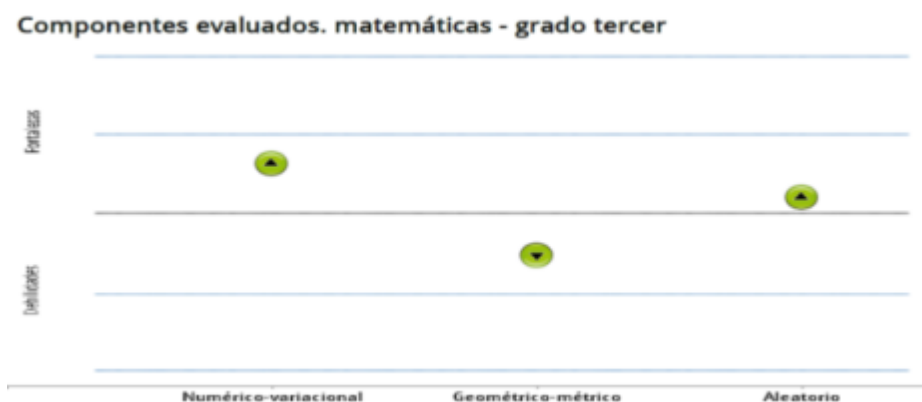
Ilustración 2. Respuesta de estudiante 2 en la actividad diagnóstica.

Por último, cuando se buscaba establecer la relación de perpendicularidad, un participante contestó: “*que en la dos paso tiene la misma figura*”; en este caso se deduce que, el estudiante, se remite a lo que observa al hacer la construcción y a la imagen que aparece en la actividad, pero no concluye alguna relación de perpendicularidad (ver ilustración 3). De la misma manera ocurrió con los demás estudiantes del grado cuarto; en su mayoría, desconocían los conceptos geométricos básicos: triángulo, cuadrado, vértice, ángulo, paralelismo, diagonal, punto medio, perpendicularidad, entre otros.



**Ilustración 3. Respuesta de estudiante 3 en la actividad diagnóstica.**

Las anteriores dificultades también se pudieron evidenciar en los resultados de la Prueba Saber<sup>4</sup> del grado tercero del año 2016 de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo. Los componentes evaluados en el área de matemáticas fueron: numérico-variacional, geométrico-métrico y aleatorio. Según el documento descargado de la página del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación —ICFES— (2016), en comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar en el área y grado evaluado, el establecimiento es débil en el componente geométrico-métrico, tal como se visualiza en la ilustración 4<sup>5</sup>.



**Ilustración 4. Resultados Prueba Saber de grado tercero, área de matemáticas, 2016.**

<sup>4</sup> su propósito es contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación colombiana mediante la realización de medidas periódicas del desarrollo de competencias de los estudiantes de educación básica.

<sup>5</sup> Fuente: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.aspx>

De igual manera, en los resultados de la Prueba Saber del grado tercero, en el área de matemáticas para el año 2017, de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, se refleja un alto porcentaje de estudiantes ubicados en los desempeños insuficiente y mínimo, 35% y 39%, respectivamente. Solo el 26% de los estudiantes logran ubicarse en satisfactorio o avanzado, en la prueba de matemáticas. Cabe aclarar que los estudiantes del grado cuarto que fueron focalizados para la aplicación de la unidad curricular, hicieron parte de la población evaluada para obtener dichos resultados. Los resultados obtenidos se pueden observar en la ilustración 5<sup>6</sup>.



**Ilustración 5. Resultados prueba Saber de matemáticas del año 2017, grado tercero.**

Desde el aspecto teórico, se consideraron algunos autores que mencionan las dificultades en el conocimiento disciplinar de la geometría que presentan algunos maestros, lo cual repercute en la comprensión de los conceptos geométricos en los estudiantes. Al respecto, Santa y Jaramillo (2013) afirman:

Pero los obstáculos no solamente radican en mostrar la Geometría como un cuerpo formalizado de conocimientos en las aulas de clase de colegios o universidades. Por otro lado, también están las dificultades que tienen los maestros en formación o maestros en ejercicio, sobre esta rama de las matemáticas. Estos problemas, habitualmente, tienen que

<sup>6</sup> Fuente: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>

ver con el escaso conocimiento de la disciplina, pues se observa que muchos maestros exhiben grandes falencias en la comprensión de conceptos geométricos. (p. 4)

En otras palabras, la poca comprensión de los conceptos geométricos en los estudiantes, puede estar directamente relacionada con las dificultades que tienen los maestros en la comprensión de los mismos, dado que si no los comprenden, ¿cómo los van a enseñar? Esas dificultades podrían generar que algunos maestros decidan omitir estas temáticas en la básica primaria, aun cuando hagan parte del plan de estudios de la institución educativa, el cual está enmarcado en los referentes nacionales de calidad.

Por otra parte, algunos maestros enseñan a sus estudiantes sus falencias en la comprensión de conceptos geométricos. En este sentido, Santa, Jaramillo y Borba (2016) precisan:

[...] algunos maestros presentan carencias en cuanto al saber disciplinar de la geometría. Pero la dificultad no radica en el desconocimiento como tal, sino en los errores conceptuales que este puede causar, que pueden ser eventualmente transmitidos de manera directa a los estudiantes, cuando se aborda su enseñanza. Por ejemplo, algunos maestros suelen desconocer los conceptos relacionados con los lugares geométricos; hasta el momento no hay dificultad aparente; sin embargo, al enseñar algunas líneas notables de los triángulos (mediatriz y bisectriz), las muestran como elementos particulares de estos y no hay una trascendencia a su aspecto general como lugares geométricos. (p. 156)

Además, algunos maestros de Educación Básica Primaria manifiestan tener necesidades disciplinares y didácticas para abordar la geometría en el aula de clase. La anterior inferencia surgió de las múltiples entrevistas con varios maestros de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, en el marco del Programa Todos a Aprender.

Así mismo, algunos autores sustentan que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de conceptos geométricos; en ese sentido, Corberán et al. (1994) afirman que:

Los alumnos son incapaces de entender argumentaciones matemáticas formales, incluso cuando son ‘muy simples’. Esta situación se repite año tras año, a pesar de los esfuerzos del profesor por mejorar sus explicaciones y hacerlas más claras. Estos problemas surgen con más claridad en la Geometría, debido a que esta área de las Matemáticas se presta con toda

facilidad a desarrollar clases inductivas y en las que la manipulación de materiales didácticos concretos es una componente importante. (p. 13)

Adicionalmente, Aravena, Caamaño y Cabezas (2007), citados por Aravena y Caamaño, (2013), afirman que: “los alumnos presentan serias dificultades y obstáculos, tanto en la comprensión de los conceptos, como en los procesos geométricos y en el desarrollo de un pensamiento argumentativo y deductivo” (p. 141). Por lo tanto, desde el aspecto teórico, se puede inferir que los estudiantes suelen tener falencias en la comprensión y aplicación de conceptos geométricos.

Desde el aspecto metodológico, se resalta que el doblado de papel ha sido utilizado como medio para la comprensión o como una aproximación a la comprensión de conceptos geométricos tanto en la Educación Básica primaria como en la Secundaria, de acuerdo con cada nivel. En este sentido, Sánchez (2017) afirma que “el doblado de papel sirve para guiar procesos geométricos” (p. 244), en tanto posibilita que los estudiantes de primaria logren visualizar, establecer conexiones y conceptualizar objetos geométricos.

Por otro lado, Charys y Martínez (2017) sustentan que “el doblado de papel se convirtió en un material significativo para los estudiantes, en tanto que les permitió manipular, experimentar, observar y visualizar conceptos y procedimientos geométricos” (p. 222). Estos autores realizaron su estudio con estudiantes de secundaria. De acuerdo con lo anterior, se puede concluir que el doblado de papel puede posibilitar procesos de visualización, experimentación y conceptualización de objetos geométricos, tanto en primaria como en secundaria.

En el caso particular del presente estudio, se pretendió que los estudiantes del grado cuarto comprendan un concepto geométrico complejo, como lo es el de mediatriz, que se relaciona directamente con los conceptos de perpendicularidad y de punto medio, los cuales se deben alcanzar en este ciclo de grados, de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (MEN, 2006). La intención final fue aproximarlos a la comprensión del mismo como lugar geométrico.

Incluso, según Santa y Jaramillo (2013) “algunos maestros de las regiones desconocen, por ejemplo, los conceptos relacionados con los lugares geométricos” (p. 5); por esta razón, se considera un gran avance que estudiantes de grado cuarto logren aproximarse a la comprensión de este concepto como lugar geométrico.

### **Pregunta de investigación**

Este estudio pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿de qué manera comprenden los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel?

### **Objetivos**

De acuerdo con la pregunta de investigación, se plantean los siguientes objetivos:

#### **Objetivo general**

Analizar las maneras en que los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, comprenden el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel.

#### **Objetivos específicos**

Identificar las dificultades de los estudiantes del grado cuarto con respecto a la comprensión del concepto de mediatriz y de sus conceptos asociados.

Describir de qué manera los estudiantes del grado cuarto comprenden el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel.

Evaluar una unidad curricular que permita la comprensión del concepto de mediatriz mediante el doblado de papel.

### **Antecedentes**

Considerando los objetivos del estudio, se hizo ineludible hacer un rastreo en la literatura sobre los aspectos relacionados con la pregunta de investigación. En particular, se revisaron

algunos modelos o teorías de comprensión en Educación Matemática, para determinar cuál era el más pertinente para este estudio; así mismo, se plantearon aspectos sobre el objeto de estudio, como su historia, epistemología y definición basada en algunos referentes. Por otro lado, se indaga sobre el doblado de papel, teniendo en cuenta la historia del Origami, los axiomas de Huzita-Hatori, la importancia de la visualización y la experimentación para la comprensión y el doblado de papel como medio para la producción de conocimiento; por último, se rastrearon referentes legales para fundamentar la propuesta desde las directrices nacionales.

### **Comprensión en Educación Matemática.**

Es importante reconocer algunos modelos relacionados con la comprensión en Educación Matemática, para establecer el más pertinente para el estudio en cuestión. Los modelos o teorías más utilizados en estudios sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, son: el modelo de razonamiento de Van Hiele, la teoría de Pirie y Kieren y el marco de la Enseñanza para la Comprensión. A continuación, se describen sus generalidades.

#### ***Modelo de Van Hiele.***

Según Jaime y Gutiérrez (1990) el modelo de razonamiento de Van Hiele nació tras la preocupación de dos maestros holandeses de Matemáticas de Enseñanza Secundaria, Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, ya que sus estudiantes no lograban comprender conceptos geométricos. Así manifiesta Van Hiele dicha preocupación (1986), citado por Corberán et al., (1994):

Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aún así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la Geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples (p. 12)

Lo anterior provocó que los Van Hiele se interesaran profundamente por los procesos de aprendizaje de la Geometría, dando como fruto el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Corberán et al., 1994), el cual actualmente se encuentra vigente y ha sido ampliamente



estudiado y aplicado en el campo de la investigación y en la enseñanza de la Geometría. De hecho, este modelo es referenciado en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y se relaciona con el pensamiento geométrico.

Según Corberán et al. (1994), los Van Hiele proponen cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico:

*Nivel 1 Reconocimiento.* El estudiante percibe las figuras geométricas en su totalidad, de manera global; se limita a describir el aspecto físico de las figuras, identifica formas determinadas, no es capaz de generalizar las características de una figura, compara y clasifica figuras geométricas basándose en su apariencia ('se parece a', 'tiene la forma de'), no reconoce las propiedades de las figuras, identifica partes de una figura, pero no sus componentes, propiedades, ni características, y no usa un lenguaje apropiado (Corberán et al., 1994).

*Nivel 2 Análisis.* El estudiante reconoce que las figuras están formadas por partes y que tienen propiedades; define una figura, enumerando sus propiedades, compara figuras usando sus propiedades, pero no es capaz de relacionar propiedades de una figura con otra; privilegia sus propias definiciones, reconoce las propiedades mediante la observación de las figuras, no puede hacer clasificaciones lógicas de figuras, percibe cada figura de forma aislada y sin relacionarla con otras (Corberán et al., 1994).

*Nivel 3 Clasificación.* El estudiante comienza a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático, pero no comprende el significado de la deducción; comprende los pasos de un razonamiento lógico, pero no entiende la estructura de una demostración; sabe razonar de acuerdo con un sistema lógico deductivo informal, puede comprender demostraciones cuando se las explican, utiliza las representaciones físicas de las figuras más como una forma de verificar sus deducciones que como un medio para realizarlas, puede clasificar diferentes familias de figuras, no obstante, sus razonamientos lógicos los sigue apoyando en la manipulación, y sus demostraciones son de tipo informal; comprende el papel de las definiciones y puede dar definiciones correctas; es capaz de: identificar propiedades que caracterizan a una clase de figuras, identificar propiedades de una figura, formular y utilizar definiciones (Corberán et al., 1994).

*Nivel 4 Deducción formal.* El estudiante puede entender y realizar razonamientos lógicos formales; realiza conjeturas e intentos de verificarlas, puede hacer, comparar y contrastar demostraciones, acepta diferentes definiciones para el mismo concepto, puede comprender estructuras axiomáticas, da argumentos formales, pero no investiga los sistemas axiomáticos (Corberán et al., 1994).

*Nivel 5 Rigor.* El estudiante se encuentra en el máximo nivel de rigor matemático, no necesita apoyo concreto para desarrollar actividad matemática, acepta la existencia de sistemas axiomáticos diferentes y puede analizarlos y compararlos (Corberán et al., 1994).

De acuerdo con Corberán et al. (1994), “podemos decir que la capacidad de razonamiento geométrico de los individuos puede evolucionar a lo largo del tiempo pasando por diferentes grados de calidad” (p. 19); es decir, inicialmente el razonamiento no es considerado como matemático, ya que solo se tiene en cuenta lo visual; luego, comienza a identificar las propiedades de los objetos geométricos; después, empieza a manejar definiciones e implicaciones, con lo que evidencia que está en el nivel inicial del razonamiento riguroso para, finalmente, desarrollar el razonamiento matemático lógico-formal demostrando rigor del conocimiento y habilidad matemática.

Según Corberán et al. (1994), el modelo de Van Hiele también propone cinco fases de aprendizaje, que son pautas y recomendaciones para que los maestros de Geometría planeen de tal manera que ayuden al estudiante a avanzar en los niveles de razonamiento geométrico. Las fases son:

Fase de información: es una fase de ‘toma de contacto’; el maestro debe informar sobre: tema, contenidos, materiales y métodos que va a utilizar para despertar el interés y generar expectativas en el estudiante para empezar el trabajo matemático propiamente dicho. Además, le sirve al maestro para averiguar los saberes previos de los estudiantes y aprovechar los conocimientos geométricos intuitivos, originados en contextos extraescolares (Corberán et al., 1994).

Fase de orientación dirigida: en esta fase los estudiantes comienzan a indagar sobre el objeto de estudio, solucionando actividades y situaciones basadas en el material; se espera que

‘accedan’, ‘descubran’, ‘comprendan’ y ‘aprendan’ los conceptos y propiedades de la Geometría. “La misión del profesor es dirigir a los estudiantes en la línea de la solución cuando lo necesiten, dándoles indicaciones que les ayuden a superar sus dificultades, aunque evitando siempre llegar a dar la solución por sí mismo, sin la participación activa de sus alumnos” (p. 26).

Fase de explicitación: en esta fase los estudiantes comparten sus ‘experiencias’, revelan cómo han solucionado las situaciones, todo entre un contexto de diálogo; se hace el paso del vocabulario informal usado por los estudiantes al vocabulario geométrico formal (Corberán et al., 1994).

Fase de orientación libre: en esta fase los estudiantes deberán utilizar y combinar los saberes que han obtenido para ejecutar otras actividades. El maestro debe plantear problemas en los que intervengan varios conceptos o propiedades, que los estudiantes tendrán que combinar de forma adecuada para llegar a su solución (Corberán et al., 1994).

Fase de integración: en esta fase se deben promover las ‘comprensiones globales’, mediante la comparación, combinación y organización de los saberes que ya tienen los estudiantes (Corberán et al., 1994).

### ***Modelo de Pirie y Kieren.***

Por otra parte, según Rendón y Londoño (2013) la teoría de Pirie y Kieren para la comprensión matemática, fue desarrollada por Susan Pirie y Thomas Kieren, maestros norteamericanos; inicialmente se apoyaron en el concepto de comprensión de Glasersfeld (1987, citado por Meel, 2003); es decir, Pirie y Kieren (1989, citados por Meel, 2003) en su obra, afirman:

La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por lo que están fuera de él. (p. 235)

La teoría de Pirie y Kieren “consiste en un análisis de la gradación de la comprensión de conceptos matemáticos; proponen un modelo compuesto de ocho niveles, que describen la comprensión de un concepto matemático” (Rendón y Londoño, 2013, p. 110). La siguiente interpretación se toma de Meel (2003, citado por Londoño, 2011).

Nivel 1. Primitive knowing (Conocimiento primitivo): el estudiante establece una relación entre sus saberes previos y el concepto objeto de estudio (Londoño, 2011).

Nivel 2. Image making (Creación de imagen): el estudiante determina una correlación entre el concepto objeto de estudio y su forma gráfica, para establecer una representación mental del concepto (Londoño, 2011).

Nivel 3. Image having (Comprensión de la imagen): el estudiante comienza a identificar y comprender las propiedades de los objetos geométricos a través de las imágenes y las representaciones mentales de las mismas (Londoño, 2011).

Nivel 4. Property noticing (Observación de la propiedad): el estudiante establece conexiones entre diferentes representaciones mentales, lo cual le permite establecer las características y propiedades de los conceptos (Londoño, 2011).

Nivel 5. Formalizing (Formalización): el estudiante comienza a construir definiciones matemáticas coherentes, aunque no utilice el lenguaje matemático (Londoño, 2011).

Nivel 6. Observing (Observación): el estudiante emplea el lenguaje matemático formal para establecer relaciones, definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones (Londoño, 2011).

Nivel 7. Structuring (Estructuración): el estudiante emplea un sistema axiomático para establecer relación entre lo particular y lo general de la matemática (Londoño, 2011).

Nivel 8. Inventising (Invención): el estudiante adquiere “una nueva dimensión de conocimiento dotado con otra estructura quizás isomorfa a la actual, que a su vez se convertirá en un nivel de conocimiento primitivo” (Londoño, 2011, p. 23).

Pirie y Kieren (1989, citados por Meel, 2003) plantean tres características fundamentales de su teoría para la comprensión matemática; a continuación, se citan cada una de ellas desde las ideas de Rendón y Londoño (2013):

*Folding back*: es el elemento más importante; se refiere a la posibilidad de ‘redoblar’ (Londoño, 2011, p. 14), o volver hacia atrás en un proceso dinámico que asegura al final la comprensión [...]. El sujeto avanza, retrocede o redobla entre los niveles para perfeccionar el proceso de comprensión. (p. 111).

*Los límites de falta de necesidad*: “ellos constituyen procesos de comprensión más elaborados y estables para un concepto” (p. 111).

*La complementariedad de la acción y la expresión*: “ocurre en todos los niveles a excepción del primero y el último. Se refiere a que los estudiantes en los niveles internos se ven en la necesidad de mostrar, los progresos en los respectivos niveles” (p. 111).

### ***Enseñanza para la Comprensión (EpC).***

De acuerdo con Stone (1999), el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión<sup>7</sup> se originó gracias a un proyecto colaborativo entre los investigadores David Perkins, Howard Gardner y Vito Perrone que, con sus reflexiones y compromiso, orientaron la concreción de dicho proyecto. El marco conceptual de la EpC está estructurado alrededor de dos componentes básicos y las relaciones entre ellos: los elementos y dimensiones de la comprensión, los cuales sirven como herramientas que permiten identificar las características de la comprensión para organizar y diseñar guías curriculares que posibiliten que los estudiantes avancen en su proceso de comprensión (Escobedo, Jaramillo y Bermúdez, 2004).

Para Perkins (1999), el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión posee cuatro elementos de comprensión, los cuales se definen de la siguiente manera:

Tópicos generativos: son los “temas y preguntas ricos, ofrecen un centro fértil para la enseñanza para la comprensión” (p. 88).

---

<sup>7</sup> El cual se conoce como el marco de la EpC.

Metas de comprensión: se refieren a los logros que el maestro y los estudiantes, de manera compartida, construyen o mínimamente los que el maestro da a conocer a sus estudiantes desde el inicio del proceso, las cuales se convierten en un reto que afrontar (Perkins, 1999).

Desempeños de comprensión: son desempeños ‘flexibles’ que el maestro debe planear, en ocasiones con la ayuda del estudiante, para determinar el avance en la comprensión del estudiante y, de ser posible, influenciarlo para avanzar más en su proceso (Perkins, 1999).

Evaluación diagnóstica continua: permite hacer seguimiento al avance en los desempeños de comprensión del estudiante (Perkins, 1999).

Según Stone (1999), se definen cuatro dimensiones que permiten articular el alcance de la comprensión: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación. También se establecen cuatro niveles (ingenuo, novato, aprendiz y maestría), para estimar la profundidad de la comprensión.

Así mismo, según Stone (1999) se plantearon tres categorías progresivas (fase de exploración, fase de investigación guiada, fase de proyecto final de síntesis) para fomentar la comprensión; los maestros deben mantener su atención en dos aspectos fundamentales: en los intereses de los estudiantes y en las metas de comprensión, para que las cadenas de desempeños sean generativas y planteen un desafío.

### ***Pertinencia de la EpC en la investigación.***

Teniendo en cuenta que el objeto de estudio de esta investigación es la comprensión del concepto de mediatrix, se considera que la EpC es pertinente, en tanto que posibilita que el maestro planee sus clases con una estructura que permite que los estudiantes alcancen la comprensión; además, brinda herramientas para construir una rúbrica que facilita el proceso de evaluación diagnóstica continua, a partir de las dimensiones de comprensión: contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación; enmarcadas en los niveles de comprensión: ingenuo, novato, aprendiz y maestría; estos últimos permiten valorar el progreso de la comprensión de cada estudiante.

En este sentido, Betancourth y Madroñero (2014), afirman que:

La Enseñanza para la Comprensión (EpC), por la forma como está estructurada, permite la flexibilidad de contenidos, espacios y tiempos, respetando el estilo y ritmos de aprendizaje y la individualidad de los estudiantes. También fortalece la autonomía y la responsabilidad. Al docente le facilita la utilización de diversos recursos para hacer de la clase un encuentro ameno y significativo. Todos, desde sus singularidades, participan de lo que en el escenario educativo –aula y contexto sociocultural– acontece. De esta manera se atiende a la diversidad y heterogeneidad, y se promueve aprendizajes relevantes, creativos y democráticos para todos los estudiantes (p. 52).

### *Investigaciones desde la EpC*

En el rastreo que se ha hecho de trabajos enmarcados en la EpC, se encontraron diversos proyectos o trabajos de grado, algunos de los cuales se mencionarán a continuación:

López (2017) realizó un estudio en el que buscaba la comprensión de los conceptos de área y de perímetro a partir del círculo y la circunferencia en el contexto de la EpC. Esta propuesta de investigación se apoyó en un enfoque de carácter cualitativo y se ejecutó con un grupo del grado quinto de la básica primaria de la Institución Educativa José María Bernal del municipio de Caldas, departamento de Antioquia. López (2017), en relación a la pregunta de investigación, concluye que, mediante la implementación de las actividades diseñadas en el marco de la EpC, los participantes mostraron progreso en la comprensión de los conceptos de área y de perímetro. Se pudo observar el avance parcial en los niveles durante el trabajo de campo; además, el autor determinó que es indiscutible que, para los estudiantes, fue productiva la realización de cada actividad para mejorar el nivel de comprensión.

Por otro lado, Cano, Flórez y Zapata (2017), analizaron la comprensión de los conceptos relacionados con las características de los triángulos, cuando los estudiantes realizan construcciones con doblado de papel, desde el marco de la EpC. Este proyecto de investigación se apoyó en un enfoque de carácter cualitativo y se desarrolló con los estudiantes de grado octavo, de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara. En cuanto a las conclusiones con respecto a la pregunta de investigación, Cano, Flórez y Zapata (2017) manifiestan que: gracias al desarrollo de las actividades que

fueron propuestas y al análisis de la rúbrica diseñada en el marco de la EpC, se pudo visualizar cómo comprendieron los estudiantes los conceptos asociados a los triángulos, evidenciando el progreso entre cada una de las fases, de modo que pudieron demostrar un avance en la comprensión de cada uno de los conceptos que fueron enseñados. Así mismo, en cuanto al doblado de papel, los autores sustentan que los participantes lograron clasificar los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos y definir las líneas notables de un triángulo, gracias a la visualización lograda mediante las construcciones hechas con doblado de papel.

Por último, Sánchez (2017) realizó un estudio en el pretendía que estudiantes del grado segundo se aproximaran a la comprensión de los conceptos de punto, recta y plano, mediante el doblado de papel, en el contexto de la EpC. Esta propuesta se abordó desde un paradigma cualitativo y se ejecutó con los niños de segundo grado de la básica primaria de la Institución Educativa Sagrado Corazón de Jesús, del municipio de Turbo, Antioquia. En cuanto a la respuesta a la pregunta de investigación, Sánchez (2017) plantea que, en primer lugar, el marco de la EpC le permitió diseñar y aplicar una unidad curricular y una rúbrica que le permitieron determinar el avance en las dimensiones de desempeño de los participantes; en segundo lugar, logró corroborar que “el doblado de papel sirve para guiar procesos geométricos, [...], y posibilita el análisis y procesamiento de la información sobre la forma en la que los niños conceptualizan y visualizan las figuras tridimensionales” (p. 244).

### **Marco conceptual.**

El objeto de estudio de esta investigación es el concepto de mediatriz y de sus conceptos asociados; por lo tanto, se considera importante reconocer histórica, epistemológica y conceptualmente conceptos geométricos como mediatriz, perpendicularidad y punto medio.

### ***Historia y epistemología del objeto de estudio.***

Después de hacer un rastreo de la literatura académica sobre el concepto de mediatriz, se torna complejo determinar cuándo, dónde y quién lo utilizó por primera vez; sin embargo, es importante resaltar algunos apartes encontrados, los cuales están relacionados con punto medio, perpendicularidad y mediatriz.



En primer lugar, es interesante mencionar el trabajo de Cantoral y Covián (2005), en el cual abordan, entre otras cosas, el uso de la geometría para las construcciones hechas por los Mayas. Por ejemplo, a continuación se hace la descripción de cómo construían una casa: “La forma de la casa es cuasi elíptica, se construye sobre una base que consta de un cuadrado en el centro y dos semi-circunferencias situadas en los lados opuestos de los cuadrados” (p. 816). Esta descripción es respaldada con la ilustración 6.



- Se sitúa la línea principal orientada de norte a sur, dejando que el viento circule de este a oeste.
- Sobre la línea de sitúan dos circunferencias tangentes con radios 3 varas cada una.
- Se sitúan posteriormente los cuatro puntos donde se encontrarán las columnas de la casa. Estos se encuentran justamente en los puntos donde se intersecta la mediatriz del Diámetro de la circunferencia.

**Ilustración 6. Construcción de casa Maya, según Cantoral y Covián (2005, p. 817)**

De acuerdo con la ilustración anterior, se puede inferir que los Mayas tenían un conocimiento geométrico avanzado para su época, el cual fue institucionalizado en sus prácticas socio-culturales. Además, en la explicación dada, se menciona que “[los cuatro puntos] se encuentran justamente donde se intersecta la mediatriz del diámetro de la circunferencia” (Cantoral y Covián, 2005, p. 817). Es muy probable que los Mayas no utilizaran la palabra mediatriz, sin embargo se puede concluir que aplicaban este concepto en sus construcciones.

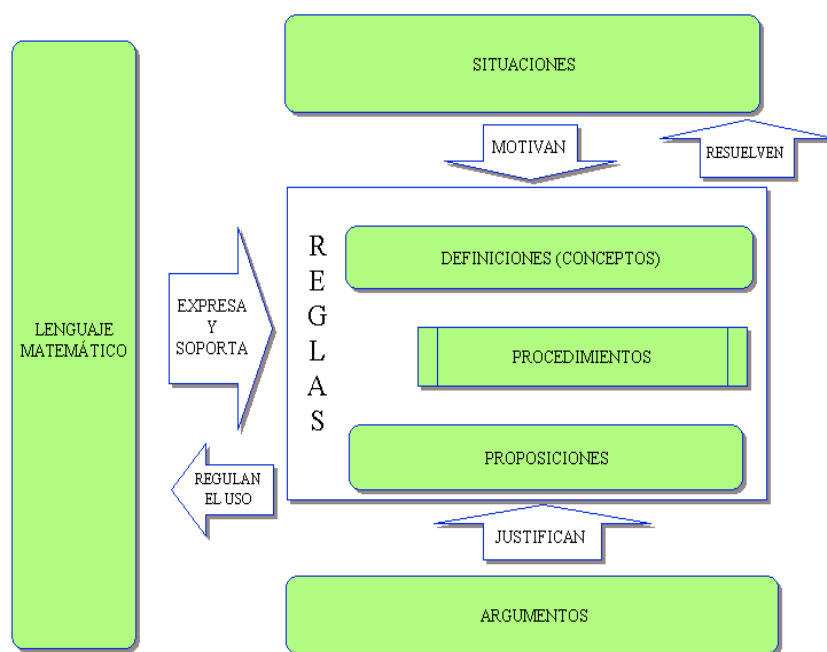
Actualmente existen algunos programas interactivos que, entre otras cosas, facilitan la construcción de la mediatriz, incluso como lugar geométrico. Entre dichos programas, se tiene que “GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar” (GeoGebra, 2018, página web).

Así mismo, “Cabri II Plus permite construir y manipular directamente los objetos matemáticos, para una comprensión más profunda de geometría, análisis, trigonometría y

física” (Cabrilog, 2017, página web). También está GeoLab, que fue creado por el Dr. Arturo Ramírez Flores y el Dr. Carlos Hernández Garciadiego, el cual “es un laboratorio interactivo de Geometría y Geometría Analítica que permite al usuario crear objetos geométricos de manera interactiva lo que le permite entender mejor y descubrir muchas propiedades geométricas” (Ramírez y Hernández, 2008, página web).

Para hablar de la epistemología del concepto de mediatriz, se tendrá en cuenta el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y “la configuración epistémica de objetos matemáticos” (Font y Rubio, 2016) desde la perspectiva de Font y Rubio (2016). Estos autores afirman que:

En el EOS se considera que es necesario contemplar una ontología más amplia formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema, 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas..., 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Estos seis tipos de objetos se articulan formando configuraciones epistémicas (p. 100-101). Tal como se observa en la ilustración 7.



**Ilustración 7. Componentes y relaciones en una configuración epistémica (Font y Rubio, 2016, p. 100)**

Teniendo en cuenta los seis elementos que, de acuerdo con Font y Rubio (2016), constituyen las configuraciones epistémicas y, el estudio en cuestión, se propone la siguiente configuración epistémica del concepto de mediatriz.

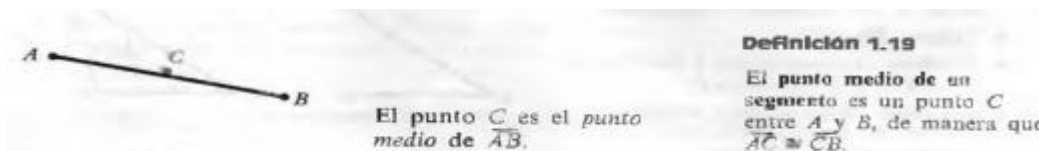
**Tabla 1. Configuración epistémica de mediatriz (construcción propia basada en Font y Rubio, 2016)**

Elementos	Configuración epistémica del concepto de mediatriz
Lenguaje	Lenguaje matemático – geométrico, oral y escrito.
Situaciones-problema	Comprensión del concepto de mediatriz con estudiantes de grado cuarto.
Conceptos	Mediatriz, perpendicularidad, punto medio, segmento, segmentos perpendiculares, ángulo recto, punto.
Procedimientos	Doblado de papel.
Teoremas	No hay teoremas. Se usan los axiomas de la geometría del doblado de papel (Axiomas de Huzita-Hatori)
Argumentos	El uso de material concreto, en este caso el doblado de papel, permite la experimentación y visualización de objetos matemáticos (punto medio, segmentos perpendiculares, mediatriz), lo que posibilita la comprensión o acercamiento a la comprensión de los mismos.

***Definición de los conceptos objeto de estudio.***

Para abordar las definiciones del concepto de mediatriz y de sus conceptos asociados, punto medio y perpendicularidad, se considerarán las definiciones y teoremas desde Clemens, O’Daffer y Cooney (1998) y Villarreal y González-Hernández (2005).

En primer lugar, Clemens et al. (1998) en su obra *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*, definen “el punto medio de un segmento es un punto C entre A y B, de manera que  $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ ” (p. 24), tal como se observa en la ilustración 8.



**Ilustración 8. Definición de punto medio según Clemens et al (1998).**

Por otro lado, Villarreal y González-Hernández (2005) definen punto medio de la siguiente manera: “sea  $A \neq B$ . Decimos que P es el punto medio de segmento  $\overline{AB}$ , si P está entre A y B y  $AP = PB$ ” (p. 7); así mismo, establecen el Teorema del punto medio, como: “todo segmento tiene únicamente un punto medio” (p. 7).

En cuanto al concepto de perpendicularidad, Clemens et al. (1998) definen que “dos rectas son perpendiculares si al intersectarse forman ángulos rectos congruentes” (p. 28), tal como se visualiza a en la ilustración 9.

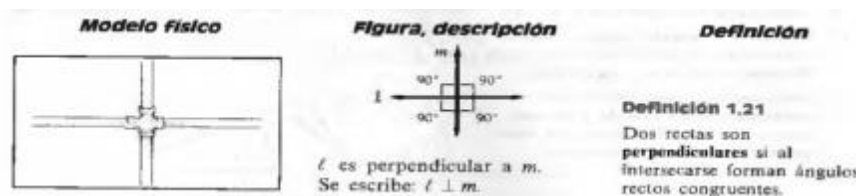


Ilustración 9. Definición de segmentos perpendiculares según Clemens et al. (1998).

Por otra parte, Villarreal y González-Hernández (2005) no definen explícitamente el concepto de perpendicularidad ni de segmentos perpendiculares; sin embargo, presentan el siguiente Teorema: “En un plano, dada una recta  $l$  y  $Q \in l$ . Existe solamente una recta  $l'$  tal que  $l \perp l'$  y  $Q \in l'$ .” (p. 31).

Con relación al concepto de mediatriz, Clemens et al. (1998) no presentan una definición explícita; no obstante, se encuentra que “la bisectriz de un segmento es cualquier punto, segmento, rayo, recta o plano que contenga al punto medio del segmento” (p. 24); este concepto se acerca al de mediatriz, pero no esclarece la relación de perpendicularidad, tal como se observa en la ilustración 10.

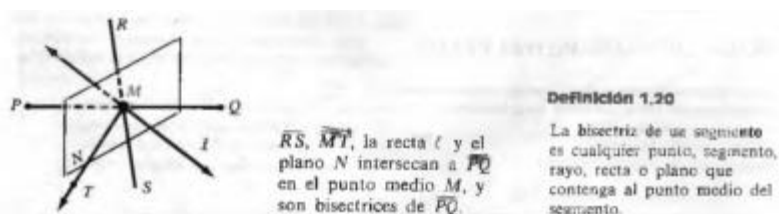


Ilustración 10. Definición de bisectriz de un segmento según Clemens et al. (1998).

Sin embargo, al observar la construcción para bisecar un segmento, según Clemens et al. (1998), se puede notar en la construcción la relación de perpendicularidad, tal como se establece en la ilustración 11.

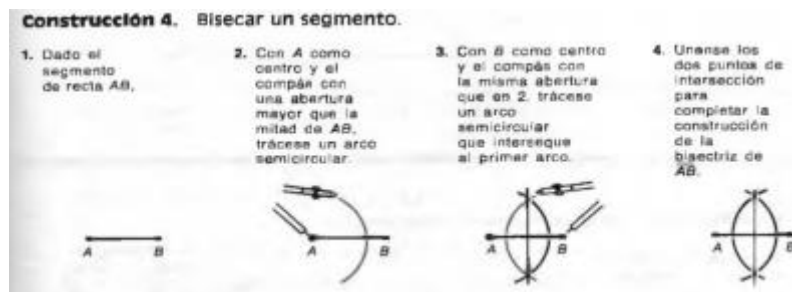


Ilustración 11. Construcción para bisecar un segmento según Clemens et al., 1998, p. 25.

Esta última definición y construcción, permite inferir que los autores se refieren a la mediatriz de un segmento como bisectriz perpendicular de un segmento, la cual se define como “una recta perpendicular al segmento y contiene su punto medio” (Clemens et al., 1998, p. 29). Lo anterior se observa en la ilustración 12.

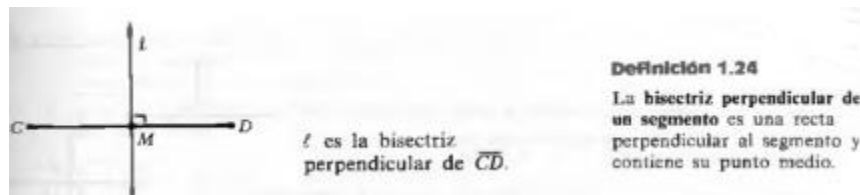


Ilustración 12. Definición de bisectriz perpendicular de un segmentos según Clemens et al (1998).

Por otro lado, Villarreal y González-Hernández (2005) definen la mediatriz de un segmento como “una recta perpendicular al segmento en su punto medio” (p. 32); así mismo, postulan el siguiente teorema de la mediatriz:

Si un segmento está incluido en un plano, entonces la mediatriz del segmento que está incluida en el plano es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de los extremos del segmento. Es decir, en un plano  $\Pi$ , si  $l$  es la mediatriz de un segmento  $\overline{AB}$ , entonces  $l = \{P \in \Pi: PA = PB\}$ . (p. 32)

### **Doblado de papel.**

El doblado de papel es el medio utilizado en este estudio para alcanzar la comprensión del concepto de mediatriz y de sus conceptos asociados: perpendicularidad y punto medio. Por lo tanto, fue important hacer un rastreo de la literatura asociada a la historia del Origami, los

axiomas del doblado de papel, la visualización y experimentación, y el doblado de papel como medio para la producción de conocimiento.

### ***Historia del Origami***

Para hablar de la historia del Origami, se tendrán en cuenta las ideas de Royo (2002), en su artículo *Matemática y Papiroflexia*. A continuación, se resaltan algunos apartes muy interesantes e importantes para este estudio.

Royo (2002) plantea que la “Papiroflexia es el arte de hacer figuras reconocibles utilizando papel plegado. [...], sin usar tijeras ni pegamento” (p. 175) y empleando un papel cuadrado para iniciar el doblado. A pesar de que estas normas puedan parecer restrictivas, las posibilidades que ofrece son casi infinitas.

Según Royo (2002), “el origen de la papiroflexia hemos de situarlo en Japón. La palabra japonesa para la papiroflexia es *origami*” (p. 175). Este autor descompone la palabra Origami de acuerdo a la escritura japonesa de la siguiente manera: “está compuesta por dos caracteres: en el primero, el radical de la izquierda deriva del dibujo de una mano, y significa doblar (*ori*). El segundo deriva del dibujo de la seda, y significa papel (*kami*)” (p. 175). En este sentido:

La historia de la papiroflexia comienza junto con la del papel, en China, allá por el siglo I ó II, y llega a Japón en el siglo VI. En un principio, era un divertimento de las clases altas, pues eran las únicas que podían conseguir papel, que constituía un artículo de lujo. (p. 176).

De acuerdo con Royo (2002) “en el período Muromachi (1338-1573), el papel era un producto más accesible, y surgieron ciertos adornos de papiroflexia con significados distintos que revelaban, por ejemplo, la clase social de cada persona [...]” (p. 176).

Así mismo, Royo (2002) afirma que: la ‘democratización’ de la papiroflexia se dio en el período Tokugawa (1603-1867), el cual conoció una gran explosión cultural. Durante este periodo aparecieron las dos primeras obras con instrucciones del Origami: “el *Sembazuru Orikata* (Cómo Plegar Mil Grullas) en 1797, y el *Kan No Mado* (Ventana abierta a la estación de invierno), de 1845, en el cual aparece por primera vez la base de la rana”. (p 176)

Los musulmanes también cultivaron el Origami; en la península ibérica esta práctica se vio truncada por la intervención de los Reyes Católicos y del Cardenal Cisneros, lo que minimizó el impacto de esta tradición japonesa en nuestros días (Royo, 2002, p. 176).

Al comienzo del siglo XVII, Miguel de Unamuno visitó la Exposición Universal de París de 1889 y descubrió una exposición de Origami de Japón; esto lo hace retomar su afición de doblar pajaritas y le permite fundar su escuela de “cocotología”, nombre dado por él al arte de construir pajaritas de papel. Todo esto lo convirtió en el gran impulsor de la papiroflexia (Royo, 2002).

Según Royo (2002), el japonés Akira Yoshizawa se considera el patriarca de la papiroflexia moderna; él fue quien creó los símbolos del “sistema Yoshizawa-Randlett” en 1956, el cual es usado actualmente, convirtiéndose en el aporte más importante de este arte, ya que ha permitido su difusión internacional. Para Yoshizawa, el Origami es una filosofía de la vida y establece una relación entre el artista y el papel. (p. 176 – 177)

Según Engel (1994, citado por Royo, 2002), en los años 80 surgieron dos escuelas de papiroflexia moderna: la escuela japonesa y la escuela occidental; en la primera, la papiroflexia es practicada por artistas no científicos, su filosofía radica en “expresar, sugerir, captar la esencia de lo que se quiere representar con un mínimo de pliegues, aunque la figura resultante no sea anatómicamente perfecta” (p. 177). La otra escuela, integrada por matemáticos, ingenieros, físicos, arquitectos, busca “la exactitud anatómica” (p. 177), para lograrlo han establecido varios métodos matemáticos.

Actualmente, no se puede hablar de esta diferenciación, ya que japoneses científicos integrantes del grupo *Origami Tanteidan* (Detectives de la Papiroflexia), han desarrollado modelos complejos; más bien se puede establecer la diferencia entre los que utilizan técnicas geométricas de diseño y los que buscan la expresividad en otros elementos, como “la textura del papel, la suavidad de los dobleces y la observación del modelo a representar” (Royo, 2002, p. 177).

Royo (2002) afirma que “otra rama de la papiroflexia moderna es la *papiroflexia modular*, o *unit origami*, en el cual se pliegan varias piezas sencillas independientemente para acabar

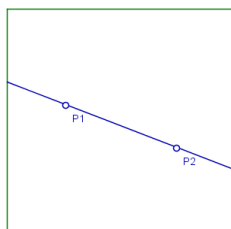
encajándolas (sin pegamento, por supuesto) con el fin de formar un motivo casi siempre geométrico” (p.178).

### ***Axiomas de la geometría del doblado de papel.***

Estos siete axiomas son conocidos como los axiomas del doblado de papel o de Huzita-Hatori; los seis primeros fueron presentados por Humiaki Huzita en el Primer Encuentro Internacional de Origami, Ciencia y Tecnología en 1989 y, en el año 2003, Koshiro Hatori presentó el último axioma; estos se relacionan con conceptos básicos de geometría euclidiana y con problemas del cálculo diferencial (Santa y Jaramillo, 2013).

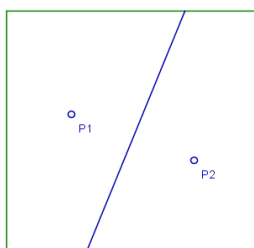
Según Lang (1996 – 2003, citado por Santa y Jaramillo, 2013), “teniendo en cuenta su traducción original, estos axiomas se enuncian de la siguiente manera” (p. 840):

“Axioma 1: Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , se puede hacer un doblado que pasa a través de ellos”. (p. 840), tal como se observa en la ilustración 13.



**Ilustración 13. Axioma 1, según Santa y Jaramillo (2010)**

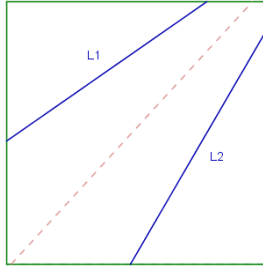
“Axioma 2: Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , se puede hacer un doblado que lleva a  $P_1$  sobre  $P_2$ ” (p. 840), tal como se observa en la ilustración 14.



**Ilustración 14. Axioma 2, según Santa y Jaramillo (2010)**

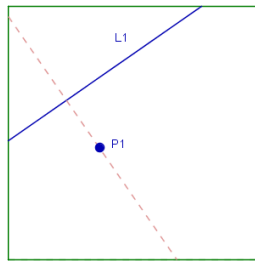
“Axioma 3: Dadas dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , se puede hacer un doblado que pone a  $l_1$  sobre  $l_2$ ” (p. 840), tal como se observa en la ilustración 15.





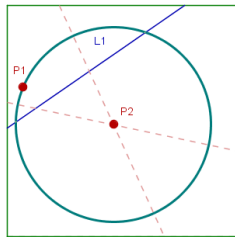
**Ilustración 15. Axioma 3, según Santa y Jaramillo (2010)**

“Axioma 4: Dado un punto  $P_1$  y una línea  $l_1$ , se puede hacer un dobléz que pone a  $l_1$  sobre sí misma y pasa por  $P_1$ ” (p. 841), tal como se observa en la ilustración 16.



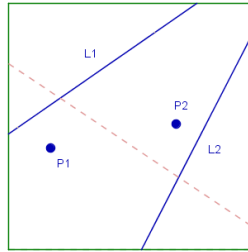
**Ilustración 16. Axioma 4, según Santa y Jaramillo (2010)**

“Axioma 5: Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  y una línea  $l_1$ , se puede hacer un dobléz que pone a  $P_1$  sobre  $l_1$  y pasa por  $P_2$ ” (p. 841), tal como se observa en la ilustración 17.



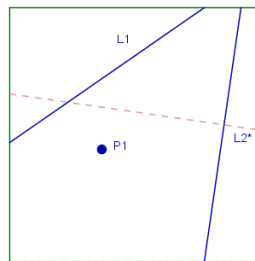
**Ilustración 17. Axioma 5, según Santa y Jaramillo (2010)**

“Axioma 6: Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  y dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , se puede hacer un dobléz que pone a  $P_1$  sobre  $l_1$  y a  $P_2$  sobre  $l_2$ ” (p. 841), tal como se observa en la ilustración 18.



**Ilustración 18. Axioma 6, según Santa y Jaramillo (2010)**

“Axioma 7: Dados un punto  $P_1$  y dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , se puede hacer un doblar perpendicular a  $l_2$  que ponga el punto  $P_1$  sobre la línea  $l_1$ ” (p. 841), tal como se observa en la ilustración 19.



**Ilustración 19. Axioma 7, según Santa y Jaramillo (2010)**

Por su parte, Santa y Jaramillo (2010) percibieron que los axiomas de Huzita-Hatori presentaban ciertas limitaciones importantes, para poder “establecer que el sistema axiomático de la geometría del doblado de papel, cumpla con las tres condiciones: suficiencia, independencia y compatibilidad” (p. 342). Por lo tanto, los autores replantearon los axiomas de la siguiente forma:

Axioma 1: “Dados dos puntos distintos  $P_1$  y  $P_2$ , existe un único doblar que pasa a través de ellos” (p. 343).

Axioma 2: “Dados dos puntos distintos  $P_1$  y  $P_2$ , existe un único doblar que lleva a  $P_1$  sobre  $P_2$ ” (p. 343).

Axioma 3: “Dados dos dobleces distintos  $l_1$  y  $l_2$ , existen dos dobleces o un doblar que pone a  $l_1$  exactamente sobre  $l_2$ ” (p. 344).

Axioma 4: “Dado un doblar  $l_1$  y un punto  $P_1$ , existe un único doblar que pone a  $l_1$  sobre sí misma y pasa por  $P_1$ ” (p. 345).

Axioma 5: “Dados un doblez  $l_1$  y dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , se puede encontrar un doblez, dos dobleses o ningún doblez, si se lleva el punto  $P_1$  sobre  $l_1$  y se garantiza que el doblez pase por  $P_2$ ” (p. 346).

Axioma 6: “Dados dos dobleses  $l_1$  y  $l_2$  y dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  exteriores a  $l_1$  y a  $l_2$  respectivamente, se puede encontrar un doblez, dos dobleses, tres dobleses o ningún doblez, si se pone el punto  $P_1$  sobre el doblez  $l_1$  y a su vez, el punto  $P_2$  sobre el doblez  $l_2$ ” (p. 348).

Axioma 7: “Dados dos dobleses  $l_1$  y  $l_2$  y un punto  $P_1$  exterior a  $l_1$ , se puede encontrar un doblez o ningún doblez, que sea perpendicular a  $l_2$  y que ponga el punto  $P_1$  sobre el doblez  $l_1$ ” (p. 350).

### ***Visualización y experimentación.***

La visualización y experimentación posibilitan la comprensión de conceptos geométricos, tal como lo mencionan Castiblanco, Urquina, Camargo, Acosta y Rodríguez (2004), en el documento Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales del Ministerio de Educación Nacional.

Según Castiblanco et al. (2004), la exploración y manipulación directa, a través de la construcción de figuras geométricas por parte de los estudiantes, les facilita la elaboración de conjeturas que les ayudará a comprender conceptos geométricos. Así mismo, al permitir la experimentación con una especie de “materialización” (p. XXV) mediante la manipulación directa de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, los estudiantes pueden acceder a una nueva conceptualización de la geometría.

Por otro lado, “la construcción de modelos geométricos físicos y su relación con la percepción visual, la representación de objetos en dos y tres dimensiones y la exploración acerca de propiedades geométricas” (Castiblanco et al., 2004, p. 3), cobran especial importancia en el proceso de comprensión de la geometría. Además, es importante reconocer que la visualización y el razonamiento discursivo están estrechamente ligados a los cinco procesos matemáticos (la comunicación, la modelación, el razonamiento, la ejercitación y la

resolución de problemas) enunciados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998).

No obstante, “los procesos de visualización requieren, para su desarrollo, superar dificultades asociadas a las condiciones fisiológicas propias de la percepción visual” (Castiblanco et al., 2004, p. 9). Con respecto a la visualización, Castiblanco et al. (2004) plantean “tres niveles de visualización que caracterizan su desarrollo” (p. 10), los cuales son:

Nivel global de percepción visual: es el nivel más elemental; en este, se relacionan figuras con objetos, se percibe la forma total de la imagen y se identifican formas que se asocian con nombres de figuras geométricas; en la percepción de estas, prevalecen aspectos no matemáticos como la posición o el tipo de trazo (Castiblanco et al., 2004).

Nivel de percepción de elementos constitutivos: en este nivel, se percibe la imagen como constituida por elementos de una misma dimensión o dimensiones inferiores; la identificación de estos elementos y las relaciones entre ellos, son importantes para construir conceptos y relaciones geométricas. El enunciado, aunque no hace parte de la representación visual, influencia la visualización y ayuda a reenfocar la atención de manera que se perciban aspectos que pueden pasar desapercibidos (Castiblanco et al., 2004).

Nivel operativo de percepción visual: en este nivel se puede operar sobre las figuras, realizando transformaciones visuales; no se trata solamente de la percepción de características, sino de una manipulación mental o reorganización de los elementos constitutivos de una figura para obtener otra disposición significativa y útil para la solución de un problema (Castiblanco et al., 2004).

La geometría dinámica se transforma en un campo de experimentación, en el cual los estudiantes pueden explorar y ordenar sus acciones y argumentos para hacer procesos de abstracción (Castiblanco et al., 2004); se puede decir que algo similar sucede con la geometría del doblado de papel; es decir, con el doblado de papel es posible experimentar, manipular la hoja de papel, tanto al anverso como al reverso, para visualizar y comprender conceptos geométricos. En consecuencia, la experimentación favorece la interacción entre el estudiante y los objetos geométricos, con lo cual se facilita la construcción del conocimiento, la

comprensión de conceptos y el acercamiento a la resolución de problemas (Castiblanco et al., 2004).

***El doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico.***

Según Santa, Jaramillo y Borba (2015), la interacción entre un colectivo de maestros y el doblado de papel puede producir conocimiento geométrico, mediante la visualización, la experimentación y la justificación de las construcciones hechas mediante el doblado, lo que propicia procesos de comprensión (p. 156-157). Para concluir esta idea, los autores se basaron en el siguiente camino metodológico:

Diseño y revisión de algunas tareas de formación con doblado de papel; generación de procesos de producción de conocimiento al interior de algunos colectivos, con el fin de evaluar dichas tareas; conformación del colectivo de maestros propio del estudio y generación de procesos de producción de conocimiento en el mismo, considerando tanto aspectos disciplinares de la geometría, como el análisis de su enseñanza, lo que implica el diseño y revisión de actividades para los estudiantes [...] (p. 158).

Para conformar el primer colectivo de maestros, Santa, Jaramillo y Borba (2015) realizaron un taller que pretendía “brindar herramientas conceptuales y procedimentales a los participantes” (p. 159), desde la geometría; por ello, plantearon varias actividades con doblado de papel; al inicio del mismo, se propició un espacio de reflexión mediante algunas preguntas intencionadas, donde cada participante, desde su experiencia y necesidades, compartiera su opinión argumentada de manera válida; este espacio posibilitó un ambiente de respeto y apoyo, necesario para la conformación de un colectivo. Así mismo, los maestros de este colectivo participaron de manera voluntaria y, además, mostraron interés en la cualificación docente.

Santa, Jaramillo y Borba (2015) plantearon tres ideas primordiales que surgieron del proceso de evaluación y desarrollo del taller, relacionadas con los procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros-con-doblado-de-papel; estas son:

En primer lugar, la comprensión de algunos conceptos y procedimientos geométricos es posible abordarla desde el doblado de papel como medio, ya que posibilita procesos de visualización, experimentación, generación y validación de conjeturas visuales, pruebas visuales, procesos de argumentación, entre otros; estos aspectos contribuyen con la producción de conocimiento geométrico del colectivo (Santa, Jaramillo y Borba, 2015).

En segundo lugar, los procesos de producción de conocimiento geométrico se pueden dar mediante: conversatorios, diálogos reflexivos y aportes de cada maestro desde su experiencia. Así mismo, la interrelación entre investigadores, maestros y doblado de papel, también contribuye con la producción de conocimiento geométrico (Santa, Jaramillo y Borba, 2015).

En tercer y último lugar, las actividades diseñadas mediante el doblado de papel deben posibilitar la visualización de propiedades geométricas en el proceso de experimentación en cada construcción, potenciando la comprensión (Santa, Jaramillo y Borba, 2015).

Finalmente, “la conexión entre la mano, el cerebro y el ojo, es decir, la capacidad de manipular unos objetos, guiada por el cerebro, bajo el control de los ojos, está en la base de la evolución del hombre y de su vida cotidiana. Pocas actividades desarrollan esta capacidad como la papiroflexia” (Atiza, s.f. citado por Otero y Ansemil, 2001, p. 48).

### **Marco legal.**

Este estudio está relacionado con las palabras clave: comprensión, doblado de papel y conceptos geométricos como mediatriz, perpendicularidad y punto medio; por esta razón, es fundamental hacer un rastreo de estos en los referentes de calidad nacionales: Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (MEN, 2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas (MEN, 2016).

#### ***Lineamientos Curriculares de Matemáticas***

Son un documento propuesto por el MEN, para orientar y estructurar el currículo del área de matemáticas a nivel nacional; estos brindan orientaciones para generar procesos de reflexión, análisis y ajustes por parte de las comunidades educativas. En este sentido, el

pensamiento espacial es definido como “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (MEN, 1998, p. 56).

En cuando al desarrollo del pensamiento espacial, se considera “la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio” (MEN, 1998, p. 56); esta geometría promueve el uso de material concreto, el cual favorece la exploración y visualización, y facilita la comprensión de conceptos geométricos.

### ***Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas.***

Establecen los niveles básicos de calidad para el área de matemáticas. Para este estudio, se considera importante mencionar el pensamiento espacial y sistemas geométricos, ya que este busca potenciar: el sentido espacial, la exploración activa y la modelación del espacio, el uso de herramientas de exploración y representación del espacio, además posibilita el tránsito de lo concreto a lo pictórico y abstracto (MEN, 2006).

Así mismo, este estudio está permeado por todos los procesos generales; adicionalmente, se puede establecer una relación entre ellos y las dimensiones de comprensión enmarcados en la EpC, de la siguiente manera: razonamiento con contenido, ejercitación con métodos, solución de problemas con propósito, comunicación con formas de comunicación; en cuanto a la modelación, se puede relacionar con todas las dimensiones de comprensión.<sup>8</sup>

Se encuentran varios Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (MEN, 2006) relacionados directa o indirectamente con el concepto objeto de estudio: la mediatriz y sus conceptos asociados punto medio y perpendicularidad. Se resalta que el concepto de mediatriz como lugar geométrico, es complejo para ser abordado por estudiantes de grado cuarto; sin embargo, la comprensión de los conceptos de punto medio y perpendicular, podría permitir la comprensión general del concepto de mediatriz y, quizás, una aproximación a su comprensión

---

<sup>8</sup> Se aclara que las dimensiones de comprensión de la EpC, serán abordadas en el capítulo 2 del presente trabajo.

como lugar geométrico. Los siguientes estándares asociados con los conceptos mencionados, pertenecen al Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, de la básica primaria:

***Primero a tercero.***

“Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia” (p. 80).

“Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales” (p. 80).

“Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño” (p. 80).

“Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir)” (p. 80).

***Cuarto a quinto.***

“Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características” (p. 82).

“Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas” (p. 82).

“Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras” (p. 82).

“Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura” (p. 82).

***Derechos Básicos de Aprendizaje.***

Los Derechos Básicos de Aprendizaje de matemáticas (DBA) permiten identificar los aprendizajes estructurantes para cada grado; guardan coherencia con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), y plantean elementos para establecer rutas de enseñanza que propicien la consecución de aprendizajes; no obstante, se debe tener en cuenta que por sí solos no forman una



propuesta curricular y deben ser articulados con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en cada establecimiento educativo (MEN, 2016).

Según el MEN (2016), la estructura para la enunciación de los DBA está compuesta por tres aspectos: (1) el enunciado, que referencia el aprendizaje fundamental para el área; (2) las evidencias, que muestran indicios para verificar si se está alcanzando el aprendizaje esperado y (3) el ejemplo que puntualiza y completa las evidencias de aprendizaje. Los DBA de matemáticas asociados directa e indirectamente al concepto objeto de estudio y sus conceptos asociados, son detallados en la tabla 2.

**Tabla 2. DBA de Matemáticas de primaria por grado, asociados al concepto objeto de estudio (MEN, 2016, p. 11-40)<sup>9</sup>**

Grado	DBA	Enunciado	Evidencias de aprendizaje
Primero	6	Compara objetos del entorno y establece semejanzas y diferencias empleando características geométricas de las formas bidimensionales y tridimensionales (Curvo o recto, abierto o cerrado, plano o sólido, número de lados, número de caras, entre otros).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Crea, compone y descompone formas bidimensionales y tridimensionales, para ello utiliza plastilina, papel, palitos, cajas, etc.</li> <li>• Describe de forma verbal las cualidades y propiedades de un objeto relativas a su forma.</li> <li>• Identifica objetos a partir de las descripciones verbales que hacen de sus características geométricas.</li> </ul>
Segundo	6	Clasifica, describe y representa objetos del entorno a partir de sus propiedades geométricas para establecer relaciones entre las formas bidimensionales y tridimensionales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce las figuras geométricas según el número de lados.</li> <li>• Compara figuras y cuerpos geométricos y establece relaciones y diferencias entre ambos.</li> </ul>
Tercero	6	Describe y representa formas bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con las propiedades geométricas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relaciona objetos de su entorno con formas bidimensionales y tridimensionales, nombra y describe sus elementos.</li> </ul>
Cuarto	6	Identifica, describe y representa figuras bidimensionales y tridimensionales, y establece relaciones entre ellas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Arma, desarma y crea formas bidimensionales y tridimensionales.</li> </ul>
	7	Identifica los movimientos realizados a una figura en el plano respecto a una posición o eje (rotación, traslación y simetría) y las modificaciones que pueden sufrir las formas (ampliación-reducción).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplica movimientos a figuras en el plano.</li> <li>• Diferencia los efectos de la ampliación y la reducción.</li> <li>• Elabora argumentos referente a las modificaciones que sufre una imagen al ampliarla o reducirla.</li> </ul>
Quinto	6	Identifica y describe propiedades que caracterizan un cuerpo en términos de la bidimensionalidad y la tridimensionalidad y resuelve problemas en relación con la composición y descomposición de las formas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relaciona objetos tridimensionales y sus propiedades con sus respectivos desarrollos planos.</li> <li>• Reconoce relaciones intra e interfigurales.</li> <li>• Reconoce diferentes distribuciones de plantillas de un cuerpo en una superficie, las formas en que pueden acoplarse o encajar, lee la información que presenta la plantilla del cuerpo o su representación en un plano.</li> </ul>

<sup>9</sup> Se aclara que los enunciados y las evidencias de aprendizaje fueron tomados de manera textual.

## **Capítulo dos**

### **Enseñanza para la Comprensión**

El marco conceptual que fundamenta este estudio, es el marco de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), por dos razones principales: en primer lugar, presenta orientaciones concretas para diseñar guías curriculares; en segundo lugar, hace uso de rúbricas que facilitan hacer el seguimiento y la evaluación diagnóstica continúa de los estudiantes. En este capítulo se describirán cada una de estas bondades.

#### **Generalidades del marco**

Según Stone (1999), el marco de EpC es producto de un proyecto colaborativo que duró seis años, con el apoyo económico de la Fundación Spencer; las bases teóricas que lo sustentan están relacionadas con el arduo trabajo de tres investigadores reconocidos: David Perkins, Howard Gardner y Vito Perrone. “Sus reflexiones y su compromiso configuraron a cada paso la orientación intelectual de este esfuerzo” (p. 11). Los inicios del proyecto se dan con un seminario enmarcado en un ‘diálogo colegiado’ de docentes interesados en investigar sobre la ‘pedagogía de la comprensión’.

Durante los primeros años, maestros de diversas ‘escuelas’ se reunían para analizar y documentar sus prácticas pedagógicas de manera reflexiva, proponer y ensayar en sus clases ‘enfoques experimentales’ los cuales ayudaron a fundamentar el proyecto (Stone, 1999). El marco de la EpC brinda herramientas a los docentes para diseñar y planear sus clases de tal manera que permitan que sus estudiantes avancen en su proceso de comprensión (Stone, 1999).

Este marco está centrado en la comprensión como base fundamental del desarrollo integral del ser humano. Según Stone (1999), consta de cuatro elementos, que son: “tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua” (p. 95); así mismo, según Boix y Gardner (1999) cuenta con cuatro dimensiones de comprensión, que son: “contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación” (p. 230) y dentro de cada dimensión, se enuncian cuatro niveles de comprensión, los cuales son:

“ingenua, novato, aprendiz y maestría” (p. 239-241). A continuación, se describirá cada uno de los componentes de este marco.

### **Concepto de comprensión**

Antes de iniciar este estudio, las investigadoras concebían la comprensión solo como la adquisición de conocimientos y la destreza para usarlos en determinados contextos matemáticos; sin embargo, en el transcurrir de este proceso, esta concepción fue modificada y enriquecida, al analizar el marco de la EpC.

Para Perkins (1999), comprender es “la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la ‘capacidad de desempeño flexible’ con énfasis en la flexibilidad” (p. 70). En concordancia con lo expuesto por Perkins (1999), la comprensión está relacionada con la habilidad de utilizar el conocimiento que se tiene para desempeñarse en todos los ámbitos en los que se desenvuelve una persona.

De acuerdo con lo anterior, Perkins (1999) afirma:

La comprensión se presenta cuando la gente puede pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que sabe. Por contraste, cuando un estudiante no puede ir más allá de la memorización y el pensamiento y la acción rutinarios, esto indica falta de comprensión. (p. 72)

Así mismo, Perkins (1999) afirma que alcanzar la comprensión de un tema es poder “desempeñarse flexiblemente” (p. 73); es decir, “explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria” (p. 73). Todo esto es posible de enlazar y de procesar con la ayuda de los desempeños de comprensión, que son “actividades que van más allá de la memorización y la rutina” (p. 73).

### **Elementos de la comprensión**

De acuerdo con Stone (1999), una pedagogía de la comprensión requiere de un marco conceptual que oriente cómo enseñar para la comprensión, que vaya más allá de la

comprensión y de su desarrollo. En este sentido, enseñar para la comprensión compromete a los estudiantes con desempeños de comprensión.

Según Stone (1999), este marco conceptual está fundamentado en cuatro interrogantes:

1. “¿Qué tópicos vale la pena comprender?” (p. 95).
2. “¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?” (p. 95).
3. “¿Cómo podemos promover la comprensión?” (p. 95).
4. “¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?” (p. 95).

El marco de la EpC propuso una manera de dar respuesta a estos interrogantes. A estas respuestas las llamó elementos y son: “tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua” (Stone, 1999, p. 95). Los elementos de la EpC son herramientas valiosas para los maestros, ya que les ayudan a diseñar unidades curriculares que les posibilite a los estudiantes alcanzar la comprensión. A continuación, se ampliará cada uno de estos elementos.

### **Tópicos generativos.**

De acuerdo con Stone (1999), son los contenidos, temas e ideas que satisfacen los intereses, preguntas, problemas, pasiones, gustos, preocupaciones de un grupo de estudiantes y que, al mismo tiempo, estén en relación con sus experiencias y vida cotidiana; se resalta que se deben establecer conexiones y relaciones entre varios tópicos para darle un carácter generativo.

Para Stone (1999), un tópico es generativo cuando es “central para el dominio o la disciplina, es accesible e interesante para los alumnos, excita las pasiones intelectuales del docente y se conecta fácilmente con otros tópicos tanto dentro como fuera del dominio o disciplina particular” (p. 99). En este sentido, se plantean una serie de criterios y características que un tópico debe cumplir para ser generativo (Stone, 1999), a saber:

Centrales para un dominio o disciplina: deben estar relacionados con “conceptos centrales, controversias perdurables o modalidades de indagación importantes” (p. 99).

Accesibles e interesantes para los alumnos: deben estar relacionados con las experiencias y las preocupaciones de los estudiantes; por lo tanto, cambian según la “edad, los contextos sociales y culturales, los intereses personales y la formación intelectual” (p. 99).

Interesantes para el docente: deben despertar en el maestro, pasión, asombro y curiosidad, para que pueda influir positivamente en el estudiante.

Ricos en conexiones: el maestro debe considerar los saberes previos del estudiante, tanto de la escuela como de otros contextos, para poder establecer conexiones entre las disciplinas y las experiencias del estudiante (p. 100).

### **Metas de comprensión.**

Son un elemento fundamental del marco de la EpC; deben ser amplias y ‘abarcadoras’, preferiblemente de largo plazo; estas ayudan al maestro a orientar y refinar la práctica en el aula; según Stone (1999), “las metas de comprensión afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender [...]. Las metas definen de manera más específica las ideas, procesos, relaciones o preguntas que los alumnos comprenderán mejor por medio de su indagación” (p. 101).

Stone (1999) afirma que algunos integrantes del equipo que contribuyó en la construcción del marco conceptual de la EpC, le dieron el nombre de hilos conductores a las metas de comprensión más abarcadoras; esto se debe a su carácter general, el cual permite tejer relaciones entre los elementos de la EpC.

Según Stone (1999), las metas de comprensión son más útiles cuando cumplen con las siguientes características:

Explícitas y públicas: los estudiantes, incluso los padres de familia, deben conocer las metas que se quieren alcanzar, ya que al saber hacia dónde van, podrían aunar esfuerzos para avanzar juntos hacia la consecución de la mismas.

Dispuestas en una estructura compleja: esto posibilita establecer las conexiones entre la meta abarcadora y las metas específicas de cada unidad curricular diseñada para alcanzar la meta de comprensión.

Centrales para la materia: deben llevar a docentes y a estudiantes hacia las ideas centrales de la materia o tópico en cuestión.

### **Desempeños de comprensión.**

Stone (1999) afirma que “los desempeños de comprensión tal vez sean el elemento más importante del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión” (p 109), dado que son configuraciones complejas que están centradas en el estudiante y en su compromiso para alcanzar la comprensión. Los desempeños deben estar relacionados con actividades creativas y novedosas, que permitan que los estudiantes realicen procesos de análisis, comparación e interpretación para que desarrollen y demuestren comprensión.

Según Stone (1999), para fomentar la comprensión, se propusieron tres etapas o fases secuenciales, que son:

Fase de exploración: en esta etapa, los estudiantes pueden establecer vínculos entre sus experiencias e intereses con el tópico generativo. Busca garantizar que los estudiantes pongan en práctica sus comprensiones preliminares y verifiquen algunos de los fenómenos o incógnitas que presenta el tópico generativo.

Fase de investigación guiada: en esta etapa, los estudiantes deben emplear conceptos y métodos organizados para constituir sus conocimientos y avanzar en su proceso de comprensión, que cada vez debe ser más completo y refinado.

Fase de proyecto final de síntesis: puede ser semejante a los proyectos y exposiciones que se determinan para finalizar una unidad curricular; sin embargo, en la EpC, el valor agregado es que los estudiantes muestran con claridad y precisión el empoderamiento que tienen de las metas de comprensión establecidas.

Para Stone (1999. p. 114), los desempeños de comprensión son efectivos cuando:

- Se vinculan directamente con metas de comprensión.
- Desarrollan y aplican la comprensión por medio de la práctica.
- Utilizan múltiples estilos de aprendizaje y formas de expresión.
- Promueven un compromiso reflexivo con tareas que entrañan un desafío y que son posibles de realizar.
- Demuestran la comprensión.

### **Evaluación diagnóstica continua.**

Para Stone (1999), la evaluación diagnóstica continua “se considera el elemento del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión que más desafíos presenta” (p. 120), ya que se deben entender los otros elementos de la EpC, para poder articular la evaluación formativa; además, las metas y desempeños de comprensión deben estar claramente definidos y, con ello, facilitar la definición de criterios ajustados para evaluar desempeños.

En este sentido, en la evaluación diagnóstica continua se debe considerar la valoración del propio desempeño, reforzar, repasar, mejorar y evaluar al mismo tiempo. Otro componente clave de la evaluación diagnóstica continua, es que tanto los estudiantes como el docente son responsables del proceso de analizar el avance en la comprensión.

Según Stone (1999), los criterios de evaluación diagnóstica continua son:

- Criterios relevantes, explícitos y públicos: están relacionados con las metas de comprensión; el maestro debe procurar que sus estudiantes los conozcan antes de iniciar la unidad curricular.
- Evaluaciones diagnósticas continuas: las evaluaciones se realizan durante todo el proceso, lo que permite verificar el avance en la comprensión.
- Múltiples fuentes: es recomendable que los estudiantes evalúen tanto su propio proceso, como el de sus compañeros y maestros, lo que les permite fortalecer su proceso de comprensión.

- Estimar el avance y configurar la planificación: permite verificar el avance individual y grupal de los estudiantes; además, brinda la oportunidad a estos últimos de mejorar su desempeño y, al maestro, de hacer los ajustes pertinentes para refinar la unidad curricular.

### **Dimensiones de la comprensión**

Según Boix y Gardner (1999), las dimensiones de comprensión son un instrumento que, apoyado en la reflexión, posibilita a los docentes diseñar una guía para valorar y orientar el avance de la comprensión de sus estudiantes, teniendo en cuenta cualidades como: “precisión disciplinaria, importancia social y espíritu crítico” (p. 216).

En este sentido, Boix y Gardner (1999) afirman que la calidad de la comprensión obedece a la capacidad de utilizar adecuadamente los conocimientos, conjeturas, relaciones, procedimientos y métodos disponibles en cada área del conocimiento para tomar decisiones, construir y validar conceptos, solucionar problemas, descubrir productos, compartir el conocimiento y, con ello, transformar su mundo. Teniendo en cuenta lo anterior, los autores plantean cuatro dimensiones de la comprensión en el marco de la EpC:

#### **Dimensión de contenido.**

De acuerdo con Boix y Gardner (1999), esta dimensión valora el recorrido entre las creencias intuitivas del estudiante hasta el dominio de teorías y conceptos probados, donde pueden desenvolverse con “flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones en una red conceptual, coherente y rica” (p. 230). Los estudiantes, en sus primeros años de vida, cimientan conjeturas, muchas veces desde su imaginación, sobre el mundo, la sociedad y ellos mismos, las cuales están tan arraigadas en sus mentes que en ocasiones entran en choque con la construcción colectiva y social del conocimiento formal. En este sentido, Boix y Gardner (1999) afirman que “refinar, transformar o reemplazar estas intuiciones iniciales es un desafío central que enfrentan los alumnos cuando apuntan a comprender en profundidad el mundo que los rodea” (p. 231).



### **Dimensión de métodos.**

De acuerdo con Boix y Gardner (1999), esta dimensión evalúa la habilidad del estudiante para que, de manera crítica y respetuosa, tome postura sobre lo que sabe, lo que escucha o lo que lee; así como el uso de métodos, procedimientos, estrategias, metodologías y técnicas, para brindar, construir y validar argumentos, explicaciones, significados y afirmaciones. En este sentido, los autores afirman que la dimensión de métodos se relaciona con “las herramientas más válidas con las que cuentan los individuos para construir una comprensión que va más allá de la experiencia inmediata y caprichosa y el sentido común” (p. 232).

### **Dimensión de propósitos.**

De acuerdo con Boix y Gardner (1999), esta dimensión valora la destreza del estudiante para identificar los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, como instrumento para “explicar, reinterpretar y operar el mundo” (pp. 234-235) y para utilizarlo en diversos contextos y situaciones, con autonomía y eficacia. Así mismo, los autores manifiestan que “una vez que los alumnos muestran la capacidad de comprometerse espontáneamente en este tipo de desempeños más allá del entorno del aula, demuestran dominio de su comprensión” (p. 236).

### **Dimensión de formas de comunicación.**

De acuerdo con Boix y Gardner (1999), esta dimensión evalúa la apropiación del estudiante en el proceso de comunicación y el uso de sistemas de símbolos (visual, verbal, gráfico, corporal), de manera creativa y segura, para expresar lo que sabe. En este sentido, los autores afirman que “poner en práctica la comprensión ante otros exige que los alumnos tomen en cuenta a su público y a los contextos” (p.238).

### **Niveles de comprensión**

Según Boix y Gardner (1999), los niveles de comprensión muestran la propiedad “multidimensional de la comprensión” (p. 239) y están caracterizados en cada dimensión; estos niveles son:

### **Ingenuo.**

Este nivel está fundamentado en la intuición de los estudiantes, pues ellos no establecen la conexión entre los saberes previos y lo que aprenden en el colegio; incluso, no reconocen para qué sirve el conocimiento, ni cómo acceden a él y mucho menos están en capacidad de comunicarlo (Boix y Gardner, 1999).

### **Novato.**

En este nivel, el estudiante comienza a construir relaciones simples entre conceptos e ideas; sin embargo, no cuenta con una postura crítica sobre las mismas, ya que dichas relaciones son más bien mecánicas y rutinarias (Boix y Gardner, 1999).

### **Aprendiz.**

En este nivel, el estudiante establece conexiones entre el conocimiento disciplinario y el contexto de manera flexible, teniendo en cuenta las oportunidades y consecuencias de utilizar dicho conocimiento; además, está en capacidad de comunicarlo de manera clara y precisa (Boix y Gardner, 1999).

### **Maestría.**

En este nivel, el estudiante está en capacidad de desenvolverse de manera fluida, crítica, creativa e integradora entre las dimensiones; está en capacidad de utilizar el conocimiento para reinterpretar el mundo y actuar en consecuencia; en resumen, es capaz de expresar y argumentar públicamente de manera reflexiva, crítica y creativa lo que sabe, demostrando dominio disciplinar (Boix y Gardner, 1999).

## Capítulo tres

### Marco Metodológico

Este capítulo está relacionado con la metodología utilizada para el estudio; en esta se define el enfoque de la investigación, se especifica el tipo de estudio y se describen los participantes, junto con su proceso de selección; así mismo, se detallan los métodos de recolección de la información: observación, producción de los estudiantes y entrevista semiestructurada; luego, se presenta el camino metodológico y, finalmente, se explica cómo se hizo el análisis de los datos constituidos durante la aplicación de la unidad curricular en el trabajo de campo.

#### Enfoque

En coherencia con la pregunta de investigación: ¿de qué manera comprenden los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo el concepto de mediatrix mediante el doblado de papel?, y desde el horizonte epistemológico y pedagógico, se considera pertinente para esta investigación establecer un paradigma con enfoque cualitativo; en este sentido, Hernández, Fernández y Baptista (2006) afirman que la investigación cualitativa se “enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto” (p. 364).

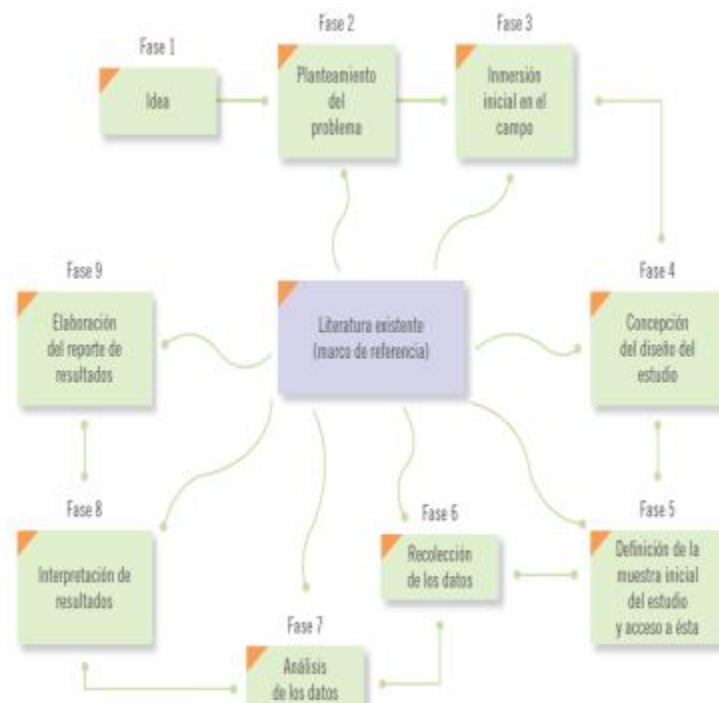


Ilustración 20. Proceso investigación cualitativa (Hernández et al., 2006, p. 8).

Otra de las razones para emplear el enfoque cualitativo, es la flexibilidad en el proceso de investigación, ya que permite desplazarse entre sus fases; es decir, durante el trabajo de campo o el análisis de la información, da la posibilidad de revisar y reajustar las otras fases de dicho proceso; de hecho, Hernández et al. (2006) menciona que en “la investigación cualitativa con frecuencia es necesario regresar a etapas previas” (p. 8), tal como se observa en la ilustración 20.

De igual manera, según Hernández et al. (2006), el enfoque cualitativo tiene las siguientes particulares:

- El planteamiento del problema y la pregunta de investigación pueden ser reajustados y refinados durante el proceso investigativo.
- Tiene una mirada “de lo particular a lo general” (Hernández et al. 2006, p. 9); por lo tanto, para poder generar teoría debe ‘explorar’ y ‘describir’ el proceso.
- Los datos se constituyen teniendo en cuenta la relación entre el investigador y el investigado, mediante “la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales, registro de historias de vida, e interacción e introspección con grupos o comunidades” (Hernández et al. 2006, p. 9).
- Es holístico, ya que contempla el ‘todo’ sin disminuirlo al ‘estudio de sus partes’.
- “El enfoque cualitativo evalúa el desarrollo natural de los sucesos, es decir, no hay manipulación ni estimulación con respecto a la realidad” (Corbetta, 2003 citado por Hernández et al., 2006, p. 9).
- Es interpretativa en tanto busca entender el significado de lo que ocurre en el transcurso de la investigación.
- El investigador es parte activa del fenómeno estudiado.
- Es naturalista porque los participantes permanecen en su contexto.

## **Tipo de estudio**

Teniendo en cuenta que el presente estudio está bajo el enfoque cualitativo y que una de las características de dicho enfoque es ser interpretativo, el tipo de estudio abordado en esta investigación, es el estudio de casos; en este sentido, se busca analizar, con profundidad, cuáles son las maneras en que los estudiantes del grado cuarto comprenden el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel. De acuerdo con Yin (1989, citado por Martínez, 2006), “el método de estudio de caso es una herramienta valiosa de investigación, y su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se mide y registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado [...]” (p 167). Por esta razón, se considera que el ‘estudio de caso’ es un método pertinente para el estudio en cuestión.

Adicionalmente, Stake (1999) afirma que “el estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11). En este sentido, el estudio de caso no busca generalizar, ni generar teoría, sino más bien, identificar, entender, comprender las características y particularidades del caso estudiado, aquello que lo hace único (Stake, 1999).

Así mismo, Stake (1999) menciona que el estudio de casos intenta no intervenir en la actividad cotidiana del caso; en lo posible, la información y los datos son constituidos mediante la observación directa, y la revisión, el análisis y la interpretación de lo producido durante la actividad.

## **Participantes**

Los participantes de este estudio fueron los estudiantes del grado 4A de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, del municipio de Apartadó, conformado por 27 estudiantes con edades comprendidas entre los 8 y 11 años; fueron seleccionados de acuerdo a los bajos desempeños que se evidenciaron en los resultados de las Pruebas Saber grado tercero, en el área de matemáticas en el año 2017; además, por las dificultades conceptuales en geometría detectadas en la actividad diagnóstica, tal como se describió en el planteamiento del problema; así mismo, por el interés y disposición mostrado por desarrollar actividades con doblado de papel.

El trabajo de campo se realizó con todo el grupo; sin embargo, para efectos del análisis, se focalizaron siete estudiantes, atendiendo a las particularidades anteriormente descritas para su selección; para proteger su identidad se nombraron con los siguientes seudónimos: Lucía, Samara, Diana, Diego, Alfredo, Alejandro y Federico. Cabe resaltar que Diana, inicialmente, no hacía parte de este grupo de estudiantes focalizados, pero en el transcurso del proceso mostró avances significativos en la comprensión del objeto de estudio: el concepto de mediatriz y sus conceptos asociados; en este sentido, “al analizar los datos, podemos advertir que necesitamos un número mayor de participantes u otras personas que al principio no estaban contempladas, lo cual modifica la muestra concebida originalmente” (Hernández et al., 2006, p. 8).

A continuación, se hará una breve descripción de cada uno de los participantes:

**Lucía.** Es una niña extrovertida y alegre; sin embargo, en ocasiones se le dificulta hablar en público. En general, tiene un excelente desempeño académico y maneja buenas relaciones con sus compañeros; vive en un sector vulnerable del corregimiento llamado los Chispiados; su familia está constituida por padre, madrastra y hermana.

**Samara.** Es una niña divertida y dinámica; tiene habilidades para comunicarse en público con fluidez; en general, tiene un excelente desempeño académico y maneja buenas relaciones con sus compañeros; vive en un sector central del corregimiento, cerca del colegio; su familia es monoparental: madre y hermanos.

**Diana.** Es una niña tímida e introvertida, por lo cual, no destaca mucho en el aula de clase; aun así, es inteligente; no obstante, su desempeño académico no es alto y maneja buenas relaciones con sus compañeros; vive en un sector vulnerable del corregimiento llamado los Chispiados; su familia está constituida por madre, padrastro y hermano.

**Diego.** Es un niño activo y deportista, de hecho, le encanta el fútbol; su desempeño académico es bueno aunque a veces es indisciplinado; sin embargo, durante el trabajo de campo, su comportamiento fue bueno y mostró interés por las actividades desarrolladas; vive en un sector del corregimiento llamado los Campanos; su familia está construida por madre y hermanos

*Alfredo.* Es un niño tímido y callado, incluso, interactúa muy poco con sus compañeros; su desempeño académico es bajo y muestra signos de problemas de aprendizaje<sup>10</sup>; vive en un sector vulnerable del corregimiento llamado los Chispados; su familia está constituida por madre, tía y hermana.

*Alejandro.* Es un niño inquieto y deportista; le gusta el fútbol; su desempeño académico es bajo y es indisciplinado; no obstante, durante el trabajo de campo su comportamiento fue bueno; vive en un sector central del corregimiento, cerca del colegio; su familia está constituida por madre, padre y hermanos.

*Federico.* Es un niño tímido e introvertido, pero su desempeño académico es bastante bueno y maneja buenas relaciones con sus compañeros; vive en un sector del corregimiento llamado los Campanos; su familia está construida por padre, madre y hermana.

### **Métodos de recolección de la información**

Los métodos para recolectar la información que se utilizaron en el presente estudio, fueron: observación, entrevista semiestructurada y producción o material de los estudiantes; en correspondencia con lo anterior, Chetty (1996, citado por Martínez, 2006) manifiesta que en el método de estudio de caso “los datos pueden ser obtenidos desde una variedad de fuentes, tanto cualitativas como cuantitativas; esto es, documentos, registros de archivos, entrevistas directas, observación directa, observación de los participantes e instalaciones u objetos físicos” (p. 167). A continuación, se describirán brevemente los métodos seleccionados para constituir los datos:

#### **Observación.**

De acuerdo con Hernández et al. (2006), es un medio que permite recopilar información; debe hacerse de forma objetiva, analítica y reflexiva. Los datos deben ser consignados en una libreta de notas, la cual sirve como insumo para describir la información que emerge para el proceso de análisis. Es importante tener en cuenta que un ‘observador cualitativo’ requiere

---

<sup>10</sup> Se remitió a Sico-orientación escolar, para que inicien el proceso de diagnóstico.


estar en capacidad se usar todos sus sentidos, ser detallista y minucioso, leer el contexto y a las personas, ser metódico y ordenado para sistematizar la información.

Con respecto a este estudio, se hicieron observaciones durante todo el trabajo de campo; las investigadoras grabaron en audio o video las sesiones, con previo consentimiento informado de los padres de familia, y recopilaron en sus libretas de notas los principales hechos que mostraron avances en los procesos de comprensión de los estudiantes.

### **Entrevista semiestructurada.**

La entrevista se constituyó en un conjunto de preguntas, diseñadas por las investigadoras, para ser aplicadas al finalizar el trabajo de campo, es decir, después de la fase de proyecto final de síntesis, en este caso, después de la Feria del doblado de papel, con el objetivo de identificar el nivel de comprensión de los estudiantes en cuanto al concepto objeto de estudio y a sus conceptos asociados; así mismo, para comprobar el dominio o apropiación del doblado de papel como medio para la comprensión de dichos conceptos. Es importante tener en cuenta que la entrevista semiestructura, según Hernández et al. (2006), permite al entrevistador, en este caso las investigadoras, incorporar o ajustar las preguntas para determinar la comprensión del concepto objeto de estudio o de sus conceptos asociados.

**Tabla 3. Entrevista Semiestructurada diseñada por las investigadoras.**

 <p><b>UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA</b>  <b>Facultad de Educación – Modalidad Profundización</b>  <b>Línea: Educación Matemática</b></p>
<p><b>Propuesta:</b> El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz con estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo</p>
<p><b>Objetivos de la entrevista:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar el nivel de comprensión de los estudiantes en cuanto al concepto objeto de estudio y a sus conceptos asociados</li> <li>• Comprobar el dominio o apropiación del doblado de papel como medio para la comprensión de dichos conceptos</li> </ul>
<p>1. Para usted, ¿qué es el punto medio de un segmento?, ¿cómo se puede construir un punto medio de un segmento con doblado de papel?</p>
<p>2. Para usted, ¿cuándo dos segmentos son perpendiculares?, ¿cómo se pueden construir dos segmentos perpendiculares con doblado de papel?</p>
<p>3. Para usted, ¿qué es la mediatriz de un segmento?, ¿cómo se puede construir la mediatriz de un segmento con doblado de papel?</p>



4. ¿Cree usted que la mediatriz es un lugar geométrico?, ¿por qué?
5. ¿Qué aprendió durante este proceso?
6. ¿El doblado de papel le permitió aprender conceptos de geometría?, ¿por qué?, ¿cuáles?

### **Material de los estudiantes.**

Constituyen todas las producciones de los estudiantes; esto es, el desarrollo de las preguntas de las guías diseñadas por las investigadoras en el marco de la EpC; de igual manera, las construcciones con doblado de papel hechas y los instructivos elaborados por los estudiantes durante el proceso. Según, Hernández et al. (2006), los documentos y materiales se pueden convertir en una fuente importante que posibilita interpretar y entender el fenómeno central que, para este estudio, es la comprensión del concepto mediatriz y de sus conceptos asociados.

### **Camino metodológico**

La ruta que muestra el camino metodológico de este estudio, se desarrolló en tres fases enmarcadas en la EpC, las cuales fueron llevadas a cabo con los estudiantes del grado 4<sup>a</sup> de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo; a continuación, se describiré de manera sucinta dicha ruta:

#### **Fase de exploración.**

Esta fase se desarrolló en tres momentos, que giraron en torno a la construcción de la cara de un conejo con doblado de papel; inicialmente, se les entregó a los estudiantes el instructivo, la guía y el material para hacer la figura y resolver las preguntas asociadas con los dobleces; el objetivo de la actividad era detectar las dificultades conceptuales iniciales que traían los estudiantes antes de empezar el trabajo de campo; luego, se envió la misma actividad, pero con un instructivo que solo contenía las imágenes, a los padres de familia o acudientes. El propósito era identificar la autoridad académica y que los estudiantes explicaran y practicaran los dobleces con sus familiares cercanos; por último, se repitió la actividad en el aula de clase para hacer la puesta en común e identificar las debilidades y fortalezas del proceso.

### **Fase de investigación guiada.**

Esta fase se desarrolló en seis momentos; la estructura de la mayoría de ellos fue la siguiente: entrega del instructivo y material para hacer una construcción con doblado de papel, resolución de las preguntas asociadas con la guía correspondiente y puesta en común. Los momentos de esta fase fueron:

1. Cuento: “Los Cuadrados Soñadores” (instructivo), que contenía la construcción de una rana con doblado de papel; luego, se respondían las preguntas asociadas con la guía correspondiente; dicho cuento es una creación de las investigadoras y se presentó en formato audiovisual.
2. Construcción de la rana (nuevamente) y puesta en común; por una parte, se hizo por el interés mostrado por los estudiantes y, por otro lado, como estrategia para mejorar los dobleces y refinar la construcción, teniendo en cuenta que la rana es una figura compleja de realizar. En este momento, todos los participantes recordaron los pasos, sin el instructivo, y paralelamente se hizo nuevamente la construcción.
3. Construcción del corazón separador; primero, se les entregó a los estudiantes el material e instructivo para hacer la figura; seguidamente, se respondieron las preguntas asociadas con la respectiva guía.
4. En este momento se construyó nuevamente el corazón separador, sin el instructivo, ya que entre todos los estudiantes recordaron los pasos para hacerlo; luego, se motivó a los participantes a que elaboraran un instructivo para construir la figura.
5. Construcción del portalápiz y resolución de la guía con las preguntas asociadas; inicialmente, se les entregó el instructivo y el material (seis hojas con forma cuadrada de tres colores diferentes) a los estudiantes; luego, se hicieron los seis módulos y el material para ensamblar la figura; este proceso tuvo cierto nivel de complejidad, en especial, al unir el último módulo del portalápiz; después, se les entregó la guía con las preguntas y otra hoja para hacer un módulo adicional, el cual

debían desdoblar para hacer la lectura del mosaico de pliegues como un insumo que les ayudaría a responder las preguntas.

6. Construcción y definición de mediatriz como lugar geométrico; en primer lugar, se entregó la guía con las preguntas e instrucciones para posibilitar la comprensión del concepto de mediatriz; así mismo, para construirla como lugar geométrico con doblado de papel; luego, se les entregó un esquema para que relacionaran los conceptos de punto medio, segmentos perpendiculares y mediatriz de un segmento con una definición válida.

### **Fase de proyecto final de síntesis.**

Para finalizar el trabajo de campo, se organizó la feria del doblado de papel a nivel institucional, a la cual se invitó a los padres de familia, estudiantes y docentes de toda la institución. En esta feria, los siete estudiantes focalizados, que fueron mencionados y descritos anteriormente en el apartado de participantes, en forma individual o grupal, se ubicaron en cada uno de los stands con las cinco construcciones realizadas durante el proceso: rana, conejo, corazón separador, portalápiz y mediatriz, para exponer y explicar a los asistentes los dobleces necesarios para hacer las construcciones, empleando el lenguaje geométrico apropiado. Es importante aclarar que entre los estudiantes focalizados, hubo uno que logró hacer las construcciones pero que no estaba en capacidad de explicar los dobleces para que otras personas los hicieran (Alfredo).

### **Análisis**

Para analizar la información, en primer lugar, se organizó una carpeta con todas las producciones escritas y fotos de las construcciones con doblado de papel de los siete estudiantes focalizados; en segundo lugar, se hizo una revisión preliminar y se determinaron tres casos generales de comprensión en los que se podían ubicar los siete estudiantes; se eligió un estudiante por caso y, posteriormente, se hizo un análisis detallado de la comprensión considerando las tres fuentes de información: observaciones, material de los estudiantes y entrevista final. Así mismo, se tuvieron en cuenta las tres fases de la EpC y la rúbrica de descriptores por nivel, para determinar el avance final de la comprensión de cada estudiante.

Con respecto al material de los estudiantes, se consideraron cada una de las guías desarrolladas durante el proceso, acompañadas por las fotos de las construcciones con doblado de papel hechas por el estudiante en cuestión y los instructivos creados por este; de igual manera, se contempló el registro fotográfico de todo el proceso; de la entrevista, se retomó el audio de cada estudiante y se realizaron las transcripciones respectivas para contrastar con todo el proceso de comprensión; por último, pero no menos importante, de las observaciones, se retomaron los registros escritos de las libretas de notas de las investigadoras. Luego de tener todos los datos constituidos, se hizo un análisis descriptivo, inferencial y deductivo, el cual se encuentra en el capítulo 6; adicionalmente, se hizo el análisis del nivel de comprensión de cada uno de los casos, mediado por la rúbrica, en el marco de la EpC, diseñada por las investigadoras y refinada durante el trabajo de campo. Esta rúbrica establece cada nivel de comprensión: ingenuo, novato, aprendiz y maestría, para cada una de las dimensiones: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación.

## **Capítulo Cuatro**

### **Unidad Curricular**

#### **Doblando y doblando de la mediatriz vamos conceptualizando**

En este capítulo se presenta la unidad curricular que se diseñó para analizar de qué manera comprenden los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel. Esta unidad se hizo bajo los parámetros de la EpC, siguiendo las tres fases: fase de exploración, fase de investigación guiada y fase de proyecto final de síntesis. También se expone la evaluación diagnóstica continua, a través de las rúbricas que se diseñaron para dicho fin.

#### **Elementos de la unidad curricular**

A continuación, se presentan los elementos del marco de la EpC que fundamentan la unidad curricular ‘Doblando y doblando de la mediatriz vamos conceptualizando’.

##### **Tópico generativo.**

Con la unidad curricular se busca la comprensión del concepto de mediatriz mediante el doblado de papel.

##### **Metas de comprensión.**

Con la unidad curricular, se espera que los estudiantes logren:

- Comprender el concepto de punto medio mediante el doblado de papel.
- Comprender el concepto de perpendicularidad mediante el doblado de papel.
- Comprender el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel.
- Aproximarse a la comprensión del concepto de mediatriz como lugar geométrico mediante el doblado de papel.

## Desempeños de comprensión.

Los desempeños de comprensión, de acuerdo con la EpC, se evalúan en tres fases: fase de exploración, fase de investigación guiada y fase de proyecto final de síntesis. Para cada una de las actividades realizadas en las dos primeras fases, se creó un instructivo, con imágenes propias, para cada una de las construcciones con doblado de papel; además, se diseñó una serie de preguntas intencionadas relacionadas con los conceptos geométricos objeto de estudio y con el mosaico de pliegues de cada construcción. Adicionalmente, para refinar los dobleces y reforzar los conceptos geométricos, se hizo necesario hacer una puesta en común de algunas de las actividades, instructivos y construcciones. Para el caso de la fase de proyecto final de síntesis, se organizó la feria del doblado de papel en la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo. A continuación, se detallan las actividades siguiendo cada una de las fases de la EpC.


### *Fase de exploración.*

En esta fase, se realiza la construcción de un conejo con doblado de papel, la cual se desarrolla en tres momentos:

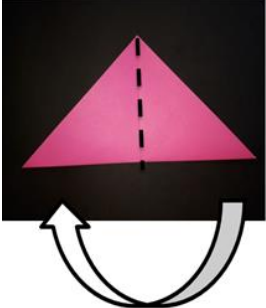
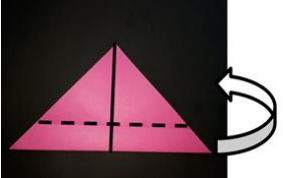





#### Momento 1. Actividad inicial.

Se les entrega a los estudiantes el instructivo y el material para hacer la construcción de un conejo con doblado de papel y, posteriormente, la actividad inicial con las preguntas asociadas para que los estudiantes las respondan de forma individual. A continuación, en la tabla 4, se presenta el instructivo para construir el conejo.

**Tabla 4. Instructivo conejo, para los estudiantes, creación propia basada en Corredor (2001)<sup>11</sup>**

PASO	INSTRUCCIÓN	IMAGEN
1	Lleve el vértice inferior sobre el vértice superior, tal como indica la flecha.	

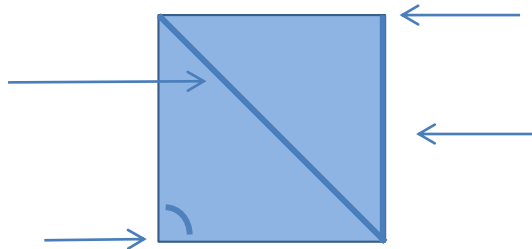
<sup>11</sup> Las imágenes utilizadas para el instructivo son propiedad de las autoras.

2	Lleve el vértice derecho sobre el vértice izquierdo, tal como lo indica la flecha.	
3	Desdoble el paso 2. Realice un doblez horizontal a la base, tal como lo indica la flecha.	
4	Identifique el punto central del lado inferior. Considerando este punto, haga coincidir tanto el lado inferior derecho, como el lado inferior izquierdo, con el doblez central vertical, como lo indican las flechas.	
5	Ahora, voltee la figura de manera que las pestañas formadas en el paso anterior, queden hacia atrás.	
6	Observe el cuadrilátero que sobresale en la figura. Haga un doblez horizontal que le permita llevar el vértice superior hacia atrás, por la parte punteada, según indica la flecha.	
7	Realice otro doblez horizontal, llevando el vértice inferior hacia atrás (por la parte punteada), según indica la flecha.	
8	Ahora, ¡YA TIENES TU CREACIÓN!	

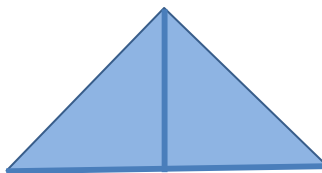
### Actividad inicial

1. Describa las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción.

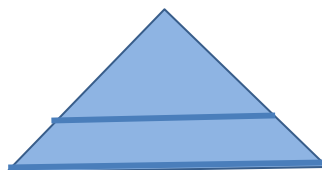
2. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:



3. ¿Qué figura observa al hacer el primer dobléz?, ¿por qué? Dibújela.
4. ¿Cómo se llama el dobléz que le permitió hallar las figuras que mencionó en el paso anterior?
5. Al hacer el segundo dobléz, ¿en cuántas partes queda dividida la hoja con la que se inició la construcción?
6. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el dobléz marcado en el paso 2?, ¿por qué?



7. ¿Cree que el dobléz realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales?, ¿por qué?
8. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el dobléz marcado en el paso 3?, ¿por qué?



9. Hoy construyo una carita de \_\_\_\_\_, con doblado de papel. ¿Qué otras figuras ha construido?
10. ¿Qué ha aprendido de matemáticas con doblado de papel?
11. ¿Le gusta construir figuras con doblado de papel? Sí \_\_\_ No \_\_\_ ¿Por qué?

Momento 2. Actividad en casa con la autoridad académica (padres, hermanos o acudiente).



Se envía una nota a los padres junto con el material, el instructivo y las preguntas, para que ellos realicen la construcción, con la ayuda de sus hijos, e intenten resolver la actividad con las preguntas relacionadas.

Respetado padre de familia o acudiente:

El día de hoy, lo invitamos a realizar la siguiente actividad, en el marco de la Maestría en Educación modalidad Profundización, en la línea de Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia.

Por favor, observar con atención las imágenes para construir una figura con doblado de papel, su hijo(a) o acudido(a) podrá ayudarlo. Adicionalmente, le solicitamos responder las preguntas asociadas.

Por último, nos gustaría conocer su opinión, después de hacer la figura y responder las preguntas:

1. ¿Cómo le pareció la actividad?
2. ¿Cree que este tipo de actividades puede favorecer el aprendizaje de las matemáticas?, ¿por qué?

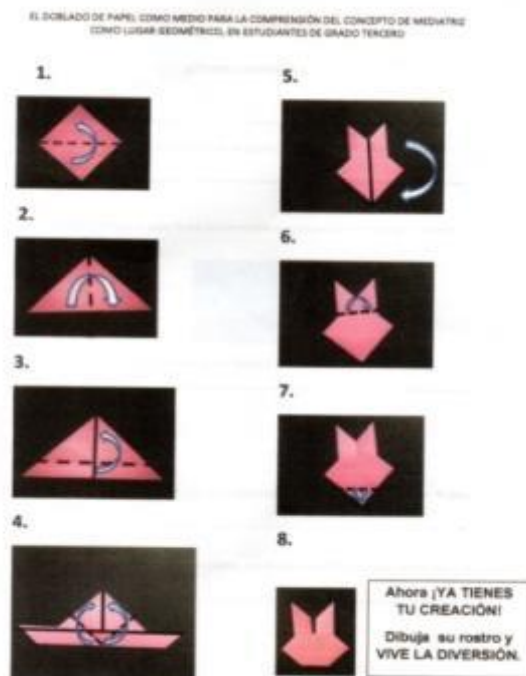


Ilustración 21 .Instructivo para padres de familia.

Momento 3. Puesta en común y análisis de fortalezas o debilidades del proceso.

Después de hacer el análisis de los momentos 1 y 2, se construye nuevamente la figura, sin instructivo, y se aplica la actividad inicial nuevamente.

### ***Fase de investigación guiada.***

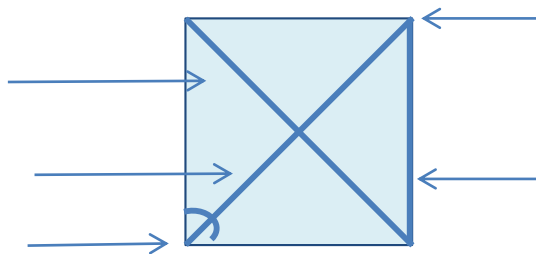
Esta fase se desarrolla en seis momentos:

Momento 1: Cuento: “Los Cuadrados Soñadores”<sup>12</sup> y preguntas.<sup>13</sup> (Ver anexo 3)

Se proyecta el cuento “Los Cuadrados Soñadores”, y se hacen las actividades inmersas en el mismo; adicionalmente, se resuelve la siguiente actividad.

#### “Los Cuadrados Soñadores”

1. Describa las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción.
2. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:

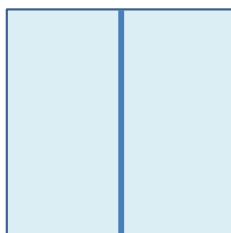


3. Cuando realizó el primer doblez, ¿en cuántas partes quedó dividido el cuadrado?
4. Si se ubica el cuadrado de tal manera que el primer doblez sea vertical:
  - a. ¿En cuántas partes queda dividido el lado superior?
  - b. ¿En cuántas partes queda dividido el lado inferior?
  - c. ¿Son iguales esas partes en ambos lados? ¿Por qué?

<sup>12</sup> El cuento se puede visualizar en el siguiente link: <https://youtu.be/deWFE7UMgzM>

<sup>13</sup> Las preguntas se pueden visualizar en el siguiente link: <https://youtu.be/IdKfcQ1OVIA>

- d. ¿El doblez pasa por el punto medio del lado superior y del lado inferior? ¿Por qué?



5. Si se ubica el cuadrado de tal manera que el primer doblado sea vertical:
  - a. ¿Qué relación hay entre el primer doblado y el lado superior de la hoja de papel?
  - b. ¿Qué relación hay entre el primer doblado y el lado inferior de la hoja de papel?
6. ¿Cree que el primer doblado es perpendicular al lado superior y al lado inferior? ¿Por qué
7. Después de realizar el tercer y cuarto doblado:
  - a. ¿Cómo se llaman los dobleces marcados en el cuadrado?
  - b. ¿Se puede decir que los dobleces son perpendiculares entre ellos? ¿Por qué
  - c. ¿Qué características tiene el punto donde se cortan los dos dobleces?
  - d. ¿Este punto divide los dos dobleces en partes iguales? ¿Por qué?

Momento 2. Puesta en común de la construcción de la rana.

Se hace nuevamente la construcción colectiva de la rana. Entre todos los estudiantes, se recuerda el paso a paso para hacer la construcción, sin necesidad de escuchar nuevamente el cuento. Dado que se busca promover la sana convivencia entre los estudiantes, se propone una competencia de ranas saltarinas.

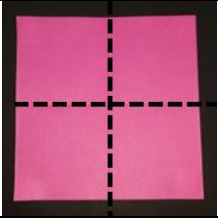
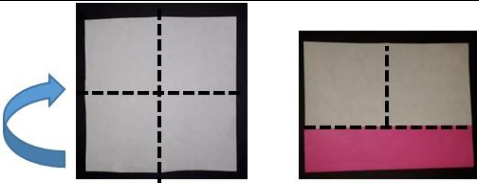
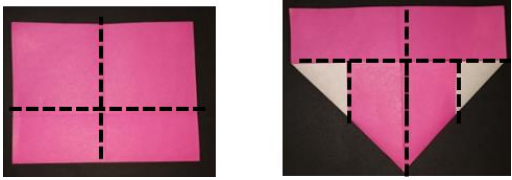
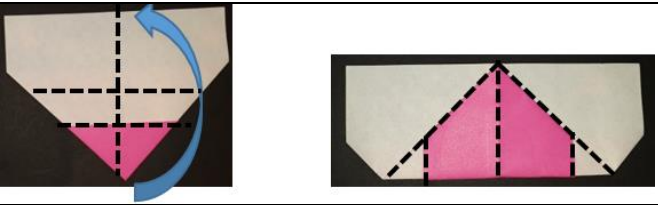
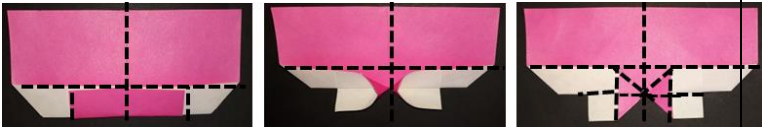
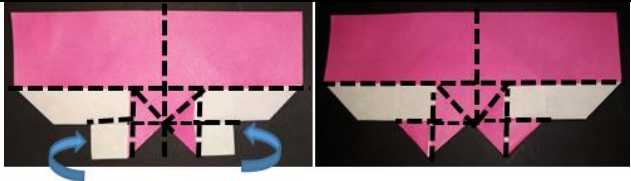

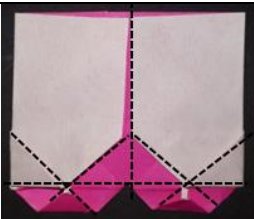
Momento 3. Construcción corazón separador.

A continuación, en la tabla 5, se presenta el instructivo para la construcción de corazón separador con doblado de papel.

**Tabla 5. Instructivo corazón separador, creación propia basada en Corredor (2001)<sup>14</sup>**

PASO	INSTRUCCIÓN	IMAGEN
------	-------------	--------

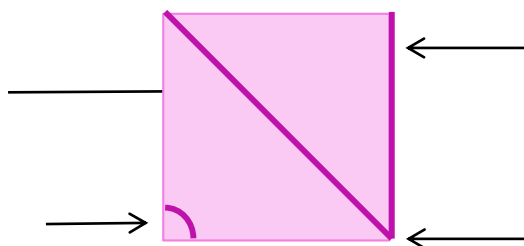
<sup>14</sup> Las imágenes utilizadas para el instructivo son propiedad de las autoras.

1	<p>Halle las dos mitades de la hoja, de tal manera que quede dividida en cuatro cuadrados iguales, como se muestra en la imagen.</p>	
2	<p>Rote la figura sobre sí misma 180°, de tal manera que la cara inicial con la que se inició la construcción quede hacia atrás; lleve el lado inferior de la hoja cuadrada sobre el doblez central horizontal, como lo indica la flecha.</p>	
3	<p>Rote nuevamente la figura sobre sí misma 180°; ubique el punto medio de la base del rectángulo que se observa; lleve el lado derecho que determina el punto medio de la base sobre el lado central vertical; de la misma manera, lleve el lado izquierdo que determina el punto medio de la base también sobre el lado central vertical.</p>	
4	<p>Rote nuevamente la figura 180° sobre sí misma y lleve el vértice inferior de la figura hacia el punto medio del lado superior.</p>	
5	<p>Devuelva la rotación anterior; abra las pestañas que se observan en la base de la figura, de tal manera que se formen dos triángulos.</p>	
6	<p>Observe los dos cuadrados blancos pequeños que se forman en la parte inferior de la figura; pliegue como indica la flecha, formando triángulos.</p>	
7	<p>Los vértices inferiores de los triángulos que sobresalen en la parte de debajo de la figura y que se formaron en el paso anterior, pliéguelos hacia el punto medio de su lado opuesto.</p>	
8	<p>Lleve los dos lados laterales (izquierdo y derecho de la figura) hacia el doblez central vertical.</p>	

9	Ahora, rote la figura $180^\circ$ sobre sí misma y aprecie su lindo separador de páginas.	
---	---	--

Preguntas sobre construcción de corazón separador con doblado de papel

1. ¿Qué forma tiene la hoja con la que se inició la construcción? ¿Por qué?
2. ¿Cuáles son las características de la forma de la hoja?
3. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura.



4. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan los dos dobleces marcados en el *paso 1*?
5. ¿Qué relación existe entre los dobleces que se hicieron en el *paso 1*?
6. ¿Qué relación existe entre el dobléz marcado en el *paso 2* y el lado central horizontal al que se lleva?
7. Cuando se rota la figura al inicio del *paso 3*, ¿qué relación hay entre la base del rectángulo y el dobléz central vertical? ¿Por qué?
8. ¿Cree que la base del rectángulo está dividida en dos partes iguales? ¿Por qué?

Aporte de información:

Se llama mediatriz a la perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

9. ¿Cree que el dobléz central vertical es una mediatriz de la base del rectángulo? ¿Por qué?
10. ¿Dónde más puede observar una mediatriz? ¿Por qué?
11. En el *paso 3*, al llevar los lados laterales al centro de la figura, se establece una relación entre los dobleces marcados. ¿Puede decir cuál es?
12. En el *paso 4* se lleva el vértice inferior al punto medio del lado superior. ¿Por qué cree que ese punto se llama punto medio?


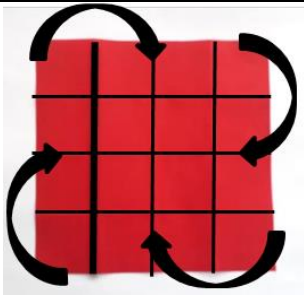
13. ¿Qué relación hay entre los lados laterales (izquierdo y derecho) y el dobléz central vertical de la figura, en el *paso 8*?
14. Describa el corazón construido. ¿Cuántos lados y vértices tienen?

Momento 4. Instructivo para construir corazón separador hecho por los estudiantes.

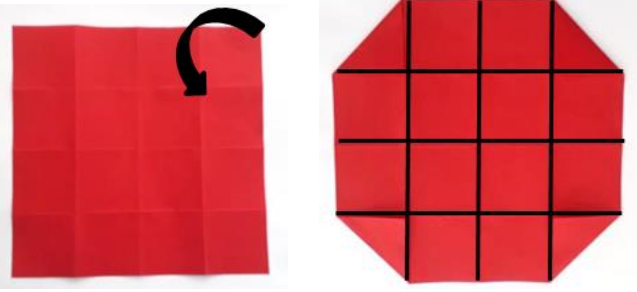
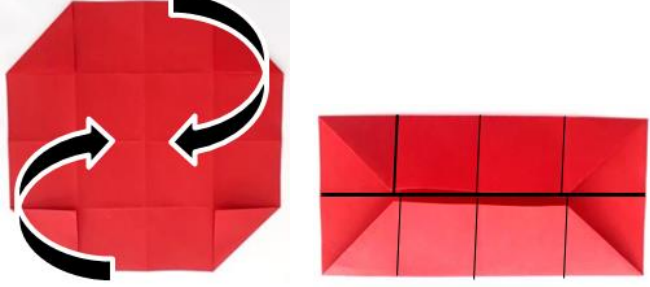

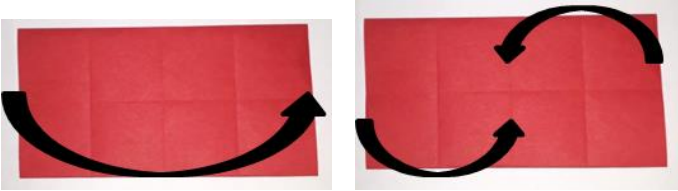
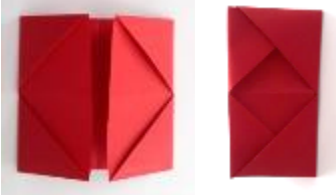

Se motiva a los estudiantes a realizar nuevamente el corazón separador recordando entre todos los participantes el paso a paso. Luego de hacer la puesta en común para construir la figura, se invita a los estudiantes a crear, de manera individual, su propio instructivo, para determinar la incorporación acertada de los términos geométricos trabajados; además, verificar la coherencia y secuencia de los pasos.

Momento 5. Construcción de portalápiz.

**Tabla 6. Instructivo para el portalápiz, creación propia, basado en Corredor (2001).<sup>15</sup>**

PASO	INSTRUCCIÓN	IMAGEN
1	Lleve el lado superior sobre el lado inferior; desdoble. Luego, lleve el lado izquierdo sobre el lado derecho, luego desdoble.	
2	Lleve tanto el lado superior como el lado inferior sobre el dobléz central horizontal; desdoble. Lleve tanto el lado derecho como el lado izquierdo sobre el dobléz central vertical; desdoble.	

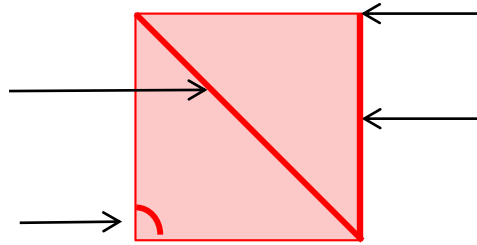
<sup>15</sup> Las imágenes utilizadas para el instructivo son propiedad de las autoras.

3	<p>Ahora, construya las diagonales de los cuadrados pequeños que están en las esquinas del cuadrado grande. Esto es, lleve el vértice superior derecho sobre el punto de intersección más cercano de los dobleces horizontal y vertical. Realice el mismo procedimiento con los demás vértices (esquinas).</p>	
4	<p>Lleve el lado superior y el lado inferior sobre el doblez central horizontal.</p>	
5	<p>Rote la figura 180° (medio giro) con respecto al doblez central vertical, tal como lo muestra la imagen.</p>	
6	<p>Lleve el lado derecho sobre el lado izquierdo, remarque el doblez y desdoble nuevamente. Posteriormente, lleve tanto el lado derecho como el lado izquierdo sobre el doblez central vertical. Remarque ambos dobleces.</p>	
7	<p>Note que las pestañas que se observan en la figura son también bolsillos; introduzca uno dentro del otro.</p>	
8	<p>Realice seis módulos iguales, de diferentes colores, y luego péguelos como lo ilustra la imagen. Tenga cuidado al introducir el último módulo.</p>	

### Preguntas sobre el portalápiz

1. ¿Qué forma tiene la hoja con la que hizo el módulo?

2. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura.



3. ¿Qué forma tiene cada una de las cuatro partes en que quedó dividida la hoja en el paso uno?
4. ¿Qué nombre recibe el lugar donde se cortan los dos dobleces en el paso uno? ¿Por qué?
5. ¿Los dobleces contruidos en el paso uno, son perpendiculares entre sí? ¿Por qué?
6. ¿Los dobleces contruidos en el paso dos, son perpendiculares entre sí? ¿En qué casos sí y en qué casos no?
7. ¿Los dobleces horizontales contruidos en el paso dos, son paralelos entre sí? ¿Por qué?
8. ¿Los dobleces verticales contruidos en el paso dos, son paralelos entre sí? ¿Por qué?

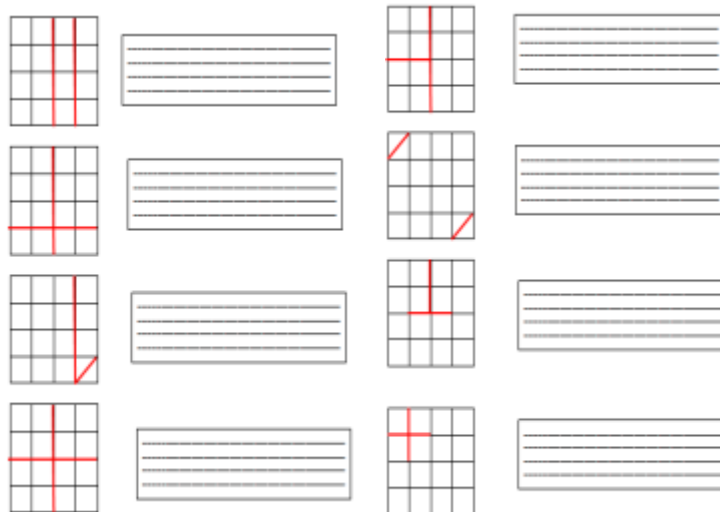
Aporte de información:

Se llama mediatriz a la perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

9. ¿Qué es un segmento?
10. Señale los segmentos que observa en la hoja original, después de realizar todos los pasos.
11. ¿El dobléz central vertical del paso uno es mediatriz del lado superior o del lado inferior? ¿Por qué?
12. ¿El dobléz central horizontal del paso uno es mediatriz del lado derecho o del lado izquierdo? ¿Por qué?
13. ¿Los dobleces marcados en el paso uno son mediatrices uno del otro?, ¿por qué?
14. Al desdoblar la hoja a su forma original, se ven marcas dejadas por los dobleces, las cuales se nombran como plano de cicatrices o mosaico de pliegues.



Observe las siguientes imágenes y compárelas con su hoja. Determine si las líneas rojas son mediatrices entre sí y explique. Recuerde observar que la mediatriz es una perpendicular que divide el segmento en dos partes iguales.



Momento

**Ilustración 22. Esquema actividad portalápiz**

Para lograrlo, siga los pasos con atención.

1. Dibuje dos puntos en una hoja de papel.



**Ilustración 23. Paso 1 para construir la mediatriz con doblado de papel**

- ¿Cuántos dobleces pasan por esos dos puntos?
2. Halle el segmento que une los dos puntos mediante el doblado de papel.



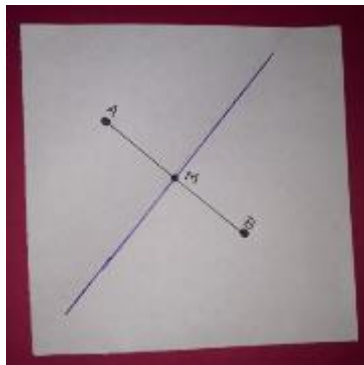
**Ilustración 24. Paso 2 para construir la mediatriz con doblado de papel**

- ¿De qué manera se pueden nombrar esos dos puntos?
3. Nombre los dos puntos con las letras A y B (en mayúsculas).



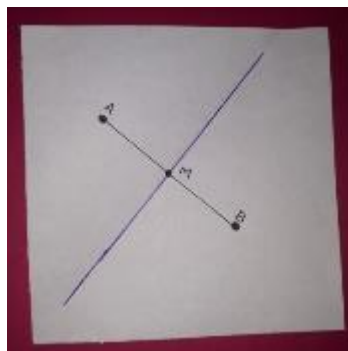
**Ilustración 25. Paso 3 para construir la mediatriz con doblado de papel**

- ¿Cómo se puede hallar el punto medio del segmento AB?
4. Sobreponga los puntos A y B (uno sobre el otro) para construir un nuevo segmento.



**Ilustración 26. Paso 4 para construir la mediatriz con doblado de papel**

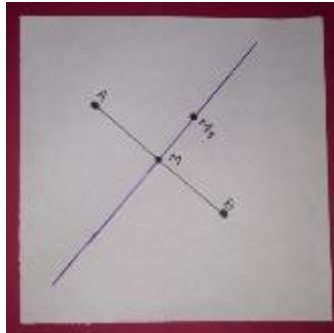
- ¿Cómo se llama el lugar donde se intersectan los dos segmentos?
5. Nombre  $M$  el punto de intersección entre el doblado hecho y el segmento  $AB$



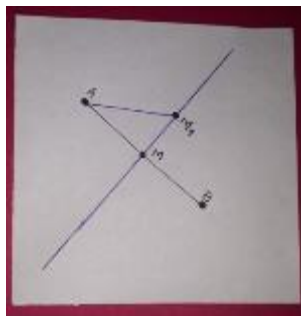
**Ilustración 27. Paso 5 para construir la mediatriz con doblado de papel**

- ¿M es el punto medio del segmento  $AB$ ?, ¿por qué?
- ¿El doblado construido es perpendicular al segmento  $AB$ ?, ¿por qué?
- ¿El doblado construido será una mediatriz del segmento  $AB$ ?, ¿por qué?

6. Ubique un punto ( $M_1$ ) sobre el nuevo segmento.

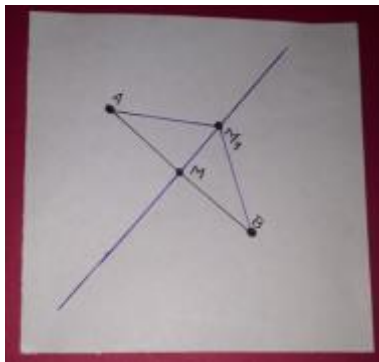


7. Una **Ilustración 28. Paso 6 para construir la mediatriz con doblado de papel**



**Ilustración 29. Paso 6 para construir la mediatriz con doblado de papel**

8. Una el punto B con el punto  $M_1$  mediante el doblado de papel.



**Ilustración 30. Paso 8 para construir la mediatriz con doblado de papel**

- ¿Cuáles son las características del triángulo  $ABM_1$ ?

- ¿Los lados  $AM_1$  y  $BM_1$  son iguales? ¿Por qué?
9. Repita los pasos 5, 6 y 7, con otros tres puntos diferentes ( $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$ ).
- ¿Cuáles son las características de los triángulos  $ABM_2$ ,  $ABM_3$  y  $ABM_4$ ?
  - ¿Los lados  $AM_2$  y  $BM_2$  son iguales? ¿Por qué?
  - ¿Los lados  $AM_3$  y  $BM_3$  son iguales? ¿Por qué?
  - ¿Los lados  $AM_4$  y  $BM_4$  son iguales? ¿Por qué?
  - ¿Los puntos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$  están a la misma distancia de A y de B? ¿Por qué?
  - ¿Qué característica tienen estos puntos, con respecto a los puntos A y B?

Aporte de información:

Al conjunto de puntos que cumple una determinada propiedad, se le llama lugar geométrico.

10. Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta el aporte de información anterior.

- ¿Es la mediatriz un lugar geométrico? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la característica que cumplen los puntos de la mediatriz para ser un lugar geométrico?
- Coloree la definición más adecuada para cada uno de los conceptos: punto medio, segmentos perpendiculares y mediatriz de un segmento, teniendo en cuenta todo lo aprendido durante el proceso.

**Tabla 7. Esquema de los conceptos objeto de estudio**

<b>PUNTO MEDIO</b>	Es un punto ubicado en cualquier parte del segmento.	Es el punto que divide un segmento por la mitad.	Es el <i>punto</i> que divide un segmento en dos partes iguales.	Es el punto que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos de un segmento.
<b>SEGMENTOS PERPENDICULARES</b>	Son dos segmentos que nunca se cortan en un punto.	Son dos segmentos que se cortan en un punto.	Son dos segmentos que se cortan en un punto formando ángulos de noventa grados.	Son dos segmentos que se cortan en un punto formando ángulos rectos.
<b>MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO</b>	Es una recta que corta a un segmento por la mitad.	Es una recta que corta a un segmento por la mitad de forma perpendicular.	Es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.	<i>Lugar geométrico</i> de los puntos <i>que son</i> equidistantes a los dos extremos de un segmento.

### ***Fase de proyecto final de síntesis.***

Feria del doblado de papel.

Se organizaron cinco stands y, en cada uno de estos, los estudiantes que participaron del proceso dieron instrucciones precisas para realizar las diferentes construcciones que se realizaron durante el trabajo de campo: cara de conejo, rana, corazón separador, portalápiz y mediatriz. Con esta última actividad, se buscaba verificar la comprensión de conceptos geométricos que lograron los participantes durante la aplicación de esta unidad curricular, al intentar explicarle a otra persona los pasos de una figura con doblado de papel.

### **Evaluación diagnóstica continua.**

Esta evaluación se hizo durante todo el proceso, a través de la observación directa y de unas rúbricas que se diseñaron de acuerdo con la EpC. A continuación, se presentan los desempeños que deben alcanzar los estudiantes, considerando los niveles: ingenuo, novato, aprendiz y maestría, y las dimensiones: contenido, métodos, propósito y formas de comunicación. Las subcategorías que se establecieron, se relacionaron con los conceptos objeto de estudio: concepto de punto medio, concepto de perpendicularidad y concepto de mediatriz.

### ***Rúbricas según la EpC.***

Dimensión de contenido.

**Tabla 8. Descriptores de categoría por nivel, dimensión de contenido**

<b>Niveles</b>	<b>Nivel 1. Ingenuo</b>	<b>Nivel 2. Novato</b>	<b>Nivel 3. Aprendiz</b>	<b>Nivel 4. Maestría.</b>
<b>Categorías</b>				
<b>Concepto de punto medio</b>	No identifica el concepto de punto medio.	Identifica el concepto de punto medio.	Define el concepto de punto medio.	Explica el concepto de punto medio en contextos matemáticos y extra matemáticos.

<b>Concepto de perpendicularidad</b>	No identifica el concepto de perpendicularidad.	Identifica el concepto de perpendicularidad.	Define el concepto de perpendicularidad.	Explica el concepto de perpendicularidad en contextos matemáticos y extra matemáticos.
<b>Concepto de mediatriz</b>	Desconoce el concepto de mediatriz.	Define erróneamente el concepto de mediatriz.	Establece que la mediatriz es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.  Reconoce la mediatriz como lugar geométrico.	Explica las características de la mediatriz en contextos matemáticos y extra matemáticos.  Define el concepto de mediatriz como lugar geométrico.

Dimensión de métodos.

**Tabla 9. Descriptores de categoría por nivel, dimensión de métodos**

<b>Niveles</b>	<b>Nivel 1. Ingenuo</b>	<b>Nivel 2. Novato</b>	<b>Nivel 3. Aprendiz</b>	<b>Nivel 4. Maestría.</b>
<b>Concepto de punto medio</b>	No construye el punto medio de un segmento con doblado de papel.	Construye erróneamente el punto medio de un segmento con doblado de papel.	Construye el punto medio de un segmento con doblado de papel.	Explica cómo se construye un punto medio de un segmento con doblado de papel.
<b>Concepto de perpendicularidad</b>	No construye dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.	Construye erróneamente dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.	Construye dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.	Explica cómo se construyen dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.
<b>Concepto de mediatriz</b>	No construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.	Construye erróneamente la mediatriz de un segmento con doblado de papel.	Construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.  Construye puntos en la mediatriz que equidistan de los extremos del segmento.	Explica cómo se construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.  Explica cómo se construyen puntos en la mediatriz que equidistan de los extremos del segmento.

Dimensión de propósito.

**Tabla 10. Descriptores de categoría por nivel, dimensión de propósito**

<b>Niveles</b> <b>Categorías</b>	<b>Nivel 1.</b> <b>Ingenuo</b>	<b>Nivel 2.</b> <b>Novato</b>	<b>Nivel 3.</b> <b>Aprendiz</b>	<b>Nivel 4.</b> <b>Maestría.</b>
<b>Concepto de punto medio</b>	No identifica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	Identifica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	Explica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.
<b>Concepto de perpendicularidad</b>	No identifica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.	Identifica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.	Explica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.
<b>Concepto de mediatriz</b>	No identifica las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	Identifica las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	Explica las características de la mediatriz como lugar geométrico en una construcción con doblado de papel.

Dimensión de formas de comunicación.

**Tabla 11. Descriptores de categoría por nivel, dimensión de formas de comunicación**

<b>Niveles</b> <b>Categorías</b>	<b>Nivel 1.</b> <b>Ingenuo</b>	<b>Nivel 2.</b> <b>Novato</b>	<b>Nivel 3.</b> <b>Aprendiz</b>	<b>Nivel 4.</b> <b>Maestría.</b>
<b>Concepto de punto medio</b>	No expresa el concepto de punto medio.	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de punto medio.	Expresa, de manera escrita, el concepto de punto medio con un lenguaje no matemático.	Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de punto medio con lenguaje matemático.
<b>Concepto de perpendicularidad</b>	No expresa el concepto de perpendicularidad.	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de perpendicularidad.	Expresa, de manera escrita, el concepto de perpendicularidad con un lenguaje matemático.	Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de perpendicularidad con lenguaje matemático.

<b>Concepto de mediatriz</b>	No expresa el concepto de mediatriz.	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de mediatriz.	Expresa, de manera escrita, el concepto de mediatriz con un lenguaje matemático.	Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de mediatriz con lenguaje matemático.
------------------------------	--------------------------------------	---	--	--



## **Capítulo Cinco**

### **Análisis del proceso de comprensión de los estudiantes**

En este capítulo se presenta el análisis y la descripción del proceso de comprensión del concepto de mediatriz mediante el doblado de papel, de algunos estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo. Para ello, se consideró tanto la unidad curricular diseñada, como la rúbrica enmarcada en la EpC.

#### **Proceso de comprensión y análisis de la información**

Para el análisis del proceso de comprensión de los estudiantes del concepto objeto de estudio, se aplicó una unidad curricular en el marco de la EpC; los resultados previos permitieron establecer tres casos de comprensión con características particulares para la clasificación de desempeños alcanzados por los estudiantes. Estos casos se enuncian a continuación:

Caso 1: son los estudiantes que mostraron menor progreso en los desempeños esperados y no respondieron, de manera correcta, a la mayoría de las actividades propuestas. En este caso, solo se ubicó el estudiante Alfredo.

Caso 2: son los estudiantes que mostraron progreso en los desempeños esperados y respondieron, de manera correcta, algunas de las actividades propuestas. En este caso, se ubican los siguientes estudiantes: Alejandro, Federico y Diego. Dado que los procesos de comprensión son similares en los tres estudiantes, solo se presentará el análisis de Federico.

Caso 3: son los estudiantes que mostraron progreso avanzado en los desempeños esperados y respondieron, de manera correcta, a la mayoría de las actividades propuestas. En este caso se ubican las siguientes estudiantes: Lucía, Samara y Diana. Dado que los procesos de comprensión son similares en las tres estudiantes, solo se presentará el análisis de Diana.

## **Análisis del avance del proceso de comprensión del caso 1: Alfredo**

El estudiante que hace parte de este caso, muestra ciertas deficiencias en su proceso de comprensión; se observó que necesita el acompañamiento permanente y personalizado del maestro es poco participativo y, por lo general, no desarrolla las actividades propuestas en clase porque tiene bajo nivel de concentración. Sin embargo, se evidenció un cierto avance en su proceso de comprensión, que será detallado a continuación.

### ***Fase de exploración.***

En esta fase se realizó la construcción de un conejo con doblado de papel, la cual se desarrolló en tres momentos: 1) actividad inicial; 2) actividad en casa con la autoridad académica (padres, hermanos o acudiente) y 3) puesta en común y análisis de fortalezas o debilidades del proceso.

La construcción del conejo se hizo en grupos de trabajo; se les entregó a los estudiantes un instructivo con el paso a paso y sus respectivas imágenes; además, el material necesario para dicha construcción. Las investigadoras apoyaron a los estudiantes cuando fue pertinente, tanto en la interpretación de las instrucciones como en los dobleces mismos. Para finalizar la actividad, los estudiantes respondieron de forma escrita las preguntas relacionadas con la construcción hecha.

Alfredo, durante la elaboración del conejo, se mostró distraído y ansioso, dado que se le dificultaba comprender los pasos de la construcción. Él logró realizar la figura, por primera vez, con dobleces poco definidos e imprecisos, pero con ayuda de las investigadoras y de sus compañeros. Posteriormente, se le observó interesado y entusiasmado al realizar por segunda vez la figura; esta quedó más definida y no necesitó tanta ayuda como en la primera construcción. En la ilustración 31 se observa el primer conejo elaborado por Alfredo.



**Ilustración 31. Construcción conejo de Alfredo.**

Con respecto a la actividad escrita, se observó que el estudiante no respondió la mayoría de las preguntas y las que respondió, estaban incorrectas. Por ejemplo, en la pregunta 1, que estaba relacionada con las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción, Alfredo mencionó que era un “*triangulo papel*”, lo que permitió inferir que confundió el concepto de cuadrado con el concepto de triángulo. Sin embargo, en la pregunta 3, la cual se refería a la figura formada por una diagonal del cuadrado, intentó dibujar un triángulo. Posteriormente, se le preguntó por el nombre del doblez hecho en el paso 1 de la construcción y respondió “*se llama diavona*”. Parece que el estudiante intentó escribir diagonal. Lo anterior se corrobora en la ilustración 32.

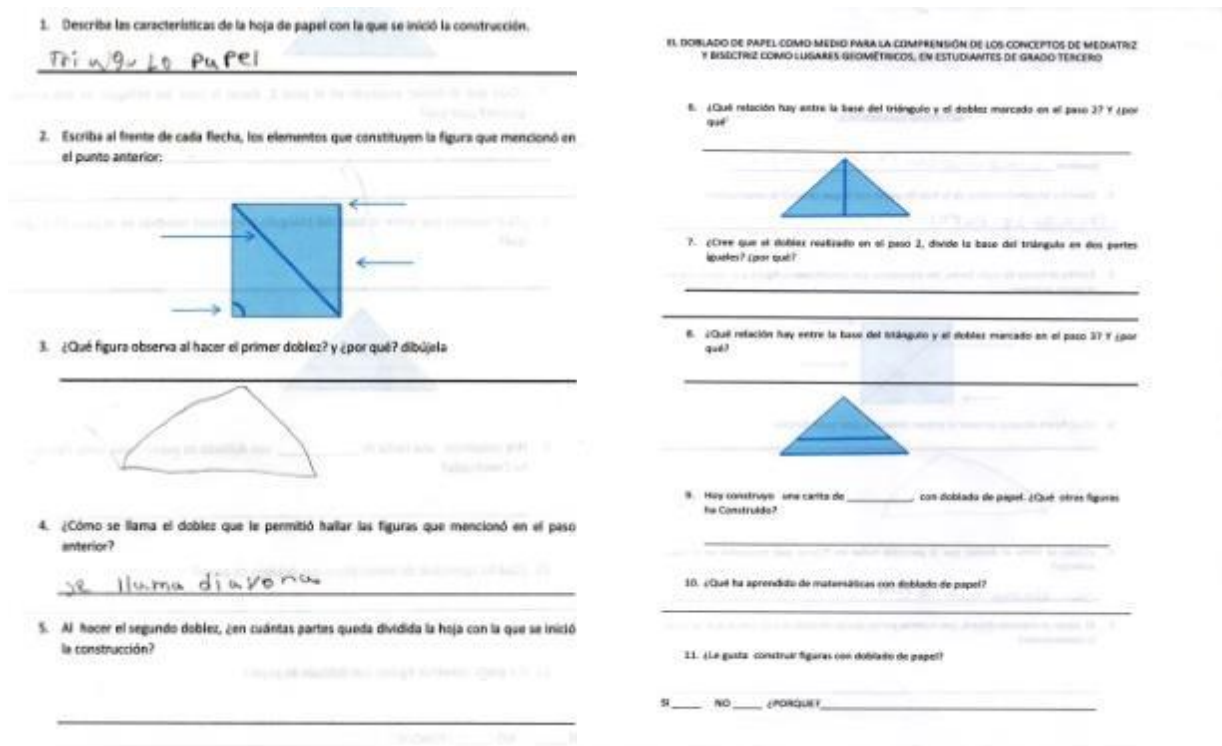


Ilustración 32. Actividad inicial de Alfredo.

Para el segundo momento, se envió a los padres de familia la construcción del conejo, pero el instructivo solo tenía las imágenes, pues se buscaba que los estudiantes les explicaran a sus acudientes cómo hacer la figura. El objetivo de la actividad era determinar la autoridad académica de los niños, dado que desde el marco de la EpC, se hace fundamental identificar cómo surgen o de dónde surgen algunos conocimientos previos que traen los estudiantes,


algunos de ellos errados. Así mismo, se buscaba que los estudiantes adquirieran mayor dominio en la construcción y afinaran o pulieran los dobleces para lograr un trabajo más prolijo. En la ilustración 33, se muestra la actividad desarrollada por la madre de Alfredo.


EL DOBLADO DE PAPEL COMO MEDIO PARA LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO, EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

Nombre: \_\_\_\_\_


1. Describa las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción.  
cuadrada, flexible, roja

2. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:  

Triángulo rectángulo


3. ¿Qué figura observa al hacer el primer doblez? ¿Por qué? Dibújela.  
un triángulo rectángulo  


4. ¿Cómo se llama el doblez que le permitió hallar las figuras que mencionó en el paso anterior?  
Línea recta

5. Al hacer el segundo doblez, ¿en cuántas partes queda dividida la hoja con la que se inició la construcción?  
en cuatro partes

6. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el doblez marcado en el paso 2? ¿Por qué?  
en que juntos conforman un ángulo de 90 grados  


7. ¿Cree que el doblez realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales? ¿Por qué?  
si porque al dividirla resulta un ángulo de 90 grados

8. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el doblez marcado en el paso 3? ¿Por qué?  
en que realiza un cuadrado en los bordes  


9. Hoy se construyó una carita de de gato, con doblado de papel. ¿Qué otras figuras ha construido?  
curva y pentágulo triángulo

10. ¿Qué ha aprendido de matemáticas con doblado de papel?  
Triángulos rectángulos y ángulos de 90 grados

11. ¿Le gusta construir figuras con doblado de papel?  
 Si  NO  ¿Por qué? descubro cosas

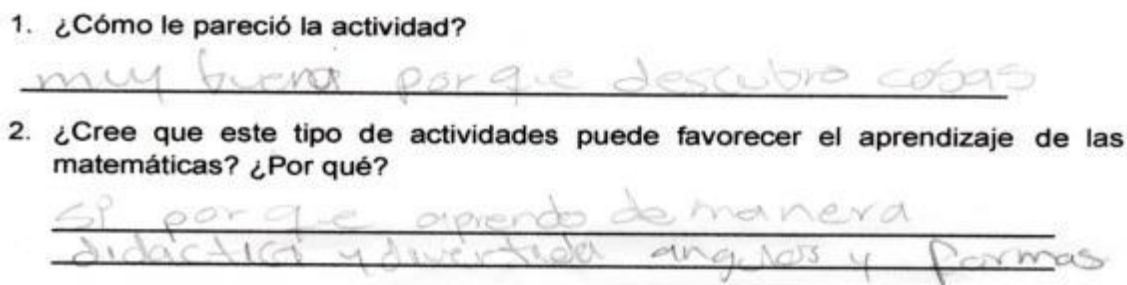
Ilustración 33. Actividad autoridad académica madre de Alfredo.

De acuerdo con la ilustración anterior, se puede concluir que la madre de familia realizó la actividad en su totalidad; sin embargo, tal como se evidencia en las respuestas dadas, tiene dificultades en el conocimiento disciplinar geométrico. Por ejemplo, en la pregunta 7 (¿cree que el doblez realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales?, ¿por qué?), cuya intención era que respondieran que sí, porque pasa por el punto medio de la base o porque divide la base en dos partes iguales, la respuesta dada fue: “*si porque al dividirla realizo un ángulo de 90 grados*”; esta afirmación permite inferir que la madre relaciona el concepto de punto medio con el concepto de ángulo de  $90^\circ$ ; de igual forma, en la pregunta 8

(¿qué relación hay entre la base del triángulo y el doblado marcado en el paso 3?, ¿por qué?), que buscaba establecer la relación de paralelismo, la madre respondió “*en que realizo un cuadrado en los bordes de la hoja*”, lo cual no responde al cuestionamiento establecido ni a las razones de la relación de los doblados.

Vale la pena resaltar la respuesta correcta dada a la pregunta 6 (¿qué relación hay entre el triángulo y el doblado marcado en el paso 2?, ¿por qué?), “*en que juntas conforman un ángulo de 90 grados*”; aunque es la respuesta adecuada, no se puede concluir que la madre tenga claro el concepto de ángulo de  $90^\circ$ , dado que en otras respuestas ha mostrado confusión con otros conceptos abordados.

Posteriormente, se consideró pertinente conocer también la opinión de la madre de familia respecto a la actividad realizada, ya que es importante determinar de dónde provienen los saberes previos con los que los niños llegan a la escuela e identificar el nivel de apoyo de la familia para desarrollar este tipo de actividades de clase y extra clase; por lo tanto, se envió una nota para que mandaran sus comentarios; la madre de Alfredo respondió que le pareció “*muy buena*” la actividad, “*porque descubro cosas*”; lo anterior se muestra en la ilustración 34.



**Ilustración 34. Opinión madre de Alfredo.**

En el tercer momento, según lo trabajado y de acuerdo con las respuestas obtenidas tanto de los estudiantes como de los padres, se hizo necesario volver a aplicar la actividad con los estudiantes para mejorar los doblados en la construcción, hacer la puesta en común y analizar las fortalezas o debilidades del proceso. A continuación, en la ilustración 35, se observa la construcción de Alfredo en este tercer momento.



Ilustración 35. Construcción de Alfredo en el tercer

De acuerdo con la ilustración anterior, se puede concluir que el estudiante mejoró los dobleces al hacer el conejo, con relación al primer momento. No obstante, se puede observar que, aunque respondió más preguntas, se alejó de las respuestas correctas. Por ejemplo, en la pregunta 1 (describa las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción), Alfredo respondió “*la doble en una punta para que nediera costrusio*”, lo que permite inferir que no tenía claro la intención de respuesta.

Además, en la pregunta 3 (¿qué figura observa al hacer el primer dobles?, ¿por qué?), en el primer momento afirmó que estaba construyendo un triángulo, lo cual era correcto, pero en el tercer momento respondió: “*ca la del conejo*”; así mismo, en la pregunta 4 (¿cómo se llama el dobles que le permitió hallar las figuras que mencionó en el paso anterior?), en el primer momento respondió “*se llama diavona*”, pero en el tercer momento respondió: “*lo ise fasilito*”; esta respuesta llama la atención ya que con ella da a entender que la construcción del conejo se le facilitó gracias a la práctica, sin embargo, no logró obtener respuestas correctas. Lo anterior se corrobora en la ilustración 36.

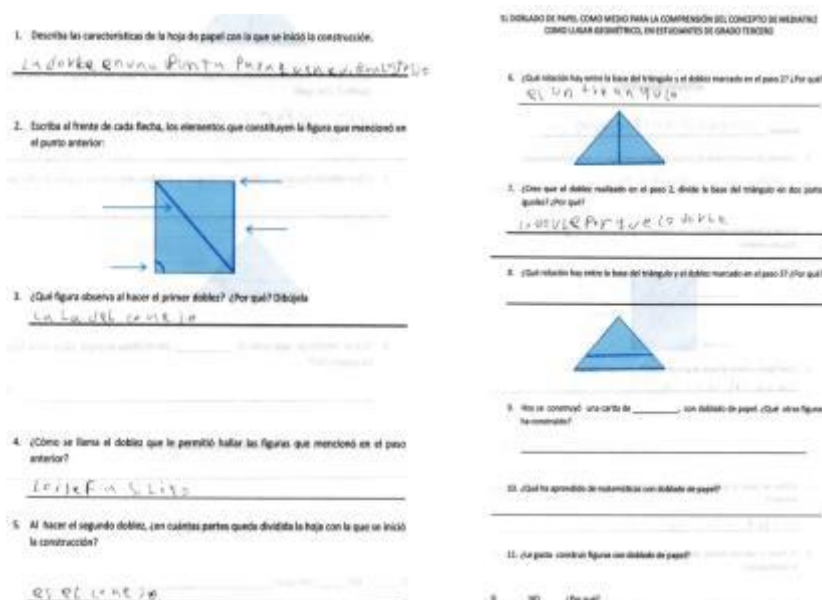


Ilustración 36: Actividad conejo momento 3 de Alfredo.

### ***Fase de investigación guiada.***

Esta fase se desarrolló en seis momentos: 1) cuento “Los cuadrados soñadores” y preguntas; 2) puesta en común de la construcción de la rana; 3) construcción corazón separador; 4) instructivo para construir corazón separador hecho por los estudiantes; 5) construcción de portalápiz y 6) construcción y definición de mediatriz.

En el primer momento, se organizaron los estudiantes en grupos de cuatro integrantes; a cada estudiante se le entregó la hoja de papel de forma cuadrada; posteriormente, se proyectó el cuento “Los Cuadrado soñadores”, el cual contenía las instrucciones para construir una rana con doblado de papel; el propósito era hacer la construcción paralela a la lectura del cuento; finalmente, se entregó a cada estudiante una hoja con las preguntas relacionadas con el cuento y la construcción.

Alfredo estuvo distraído durante el cuento, lo que le dificultó la construcción de la rana; los dobleces quedaron poco definidos y no logró darle la forma final a la figura, tal como lo evidencia la ilustración 37.





**Ilustración 37. Construcción de la rana de Alfredo.**

Además del comportamiento observado en el estudiante durante la lectura del cuento y la construcción de la rana, se pudo visualizar que no respondió la mayoría de las preguntas; incluso, solo contestó dos preguntas: 1) describa las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción, con la cual se buscaba que enunciara las características de la forma de la hoja, es decir, de un cuadrado; en este caso, Alfredo respondió: “*la oja es vede*”; aparte que no responde lo que se busca, confunde el color de su hoja, la cual era azul; 2) cuando realizó el primer doblado, ¿en cuántas partes quedó dividido el cuadrado?, Alfredo contestó “*eldu*”, por lo que se intuye que trató de responder que en dos, la cual sería la

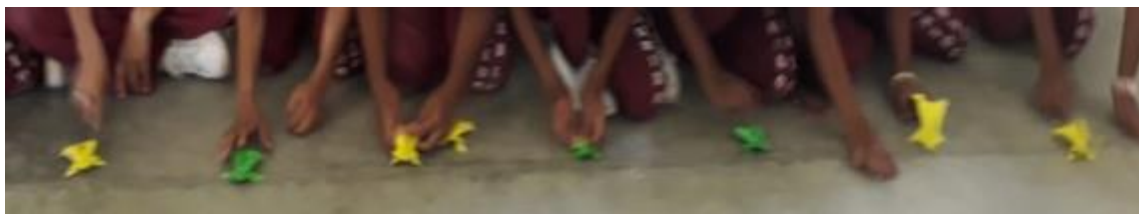


respuesta correcta. El resto de las preguntas no las respondió tal como se evidencia en la ilustración 38.

1. Describa las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción.  
La hoja es cuadrada
2. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:  

3. Cuando realizó el primer doblé, ¿en cuántas partes quedó dividido el cuadrado? 2
4. Si se ubica el cuadrado de tal manera que el primer doblé sea vertical:
  - a. ¿En cuántas partes queda dividido el lado superior? \_\_\_\_\_
  - b. ¿En cuántas partes queda dividido el lado inferior? \_\_\_\_\_
  - c. ¿Son iguales esas partes en ambos lados? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - d. ¿El doblé pasa por el punto medio del lado superior y del lado inferior? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
5. Si se ubica el cuadrado de tal manera que el primer doblé sea vertical:
  - a. ¿Qué relación hay entre el primer doblé y el lado superior de la hoja de papel? \_\_\_\_\_
  - b. ¿Qué relación hay entre el primer doblé y el lado inferior de la hoja de papel? \_\_\_\_\_
6. ¿Cree que el primer doblé es perpendicular al lado superior y al lado inferior? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
7. Después de realizar el tercer y cuarto doblé:
  - a. ¿Cómo se llaman los dobleces marcados en el cuadrado? \_\_\_\_\_
  - b. ¿Se puede decir que los dobleces son perpendiculares entre ellos? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - c. ¿Qué características tiene el punto donde se cortan los dos dobleces? \_\_\_\_\_
  - d. ¿Este punto divide los dos dobleces en partes iguales? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

**Ilustración 38. Actividad "Los Cuadrados soñadores" de Alfredo.**

En el segundo momento, se hizo la construcción colectiva de la rana. Entre todos los estudiantes se recordó el paso a paso para hacer la construcción, sin necesidad de escuchar nuevamente el cuento; lo anterior se hizo por el interés de los estudiantes por construir nuevamente la rana y hacer una competencia de ranas saltarinas para ver cuál saltaba más y mejor; además, se buscaba promover la sana convivencia entre los estudiantes. Esto se visualiza en la ilustración 39.



**Ilustración 39. Competencia de ranas saltarinas.**



Alfredo mejoró los dobleces y la rana le quedó más pulcra y refinada, como se puede visualizar en la ilustración 40; se observa que entendió y puso en práctica los pasos para lograr construir la figura.



**Ilustración 40. Segunda construcción, de la rana, de Alfredo.**

En el tercer momento, se le entregó a cada estudiante el instructivo para la construcción de un corazón separador con doblado de papel, una hoja de forma cuadrada con una de sus caras de color blanco y otra de un color diferente, y una hoja con las preguntas relacionadas con la construcción a realizar. Alfredo, gracias al proceso, fue mejorando su habilidad con el doblado de papel, ya que sus dobleces eran más definidos y pulidos, tal como se puede observar en la ilustración 41.



**Ilustración 41. Construcción corazón separador de Alfredo.**

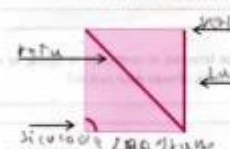
En general, el estudiante ha mostrado poco avance en la comprensión de los conceptos geométricos abordados, pero, se observa que ha incorporado a su vocabulario términos como: “cuadrado, *vertise*, *reta*, *semirecta*, *retagulo*”, aunque no están bien escritos ni los asocia al concepto correcto. Cabe resaltar que en la pregunta 3 (escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura), el estudiante escribió y ubicó correctamente dos de los cuatro elementos: “*vertise*, *lado*”.

La poca comprensión de los conceptos geométricos se percibe en las respuestas dadas a las preguntas observadas en la ilustración 42; por ejemplo, en la pregunta 4 (¿cómo se llama el punto donde se cortan los dos dobleces marcados en el paso 1?), cuya intención de respuesta era

punto medio, al menos centro o mitad, Alfredo respondió: “*semirecta*”. En la pregunta 5 (¿qué relación existe entre los dobleces que se hicieron en el paso 1?), en la que se buscaba que establecieran la relación de perpendicularidad, Alfredo contestó: “*dovlale*” y, en la pregunta 9 (¿cree que el doblez central vertical es una mediatriz de la base del rectángulo?, ¿por qué?), en la que se pretendía que contestaran que sí, porque dividía la base a la mitad (punto medio), formando ángulos de  $90^\circ$  (perpendicularidad), Alfredo contestó “*vertise*”

EL DOBLADO DE PAPEL COMO MEDIO PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO, EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

**PREGUNTAS SOBRE CONSTRUCCIÓN DE CORAZÓN SEPARADOR CON DOBLADO DE PAPEL**

- ¿Qué forma tiene la hoja con la que se inició la construcción? ¿Por qué?  
*cuadrada*
- ¿Cuáles son las características de la forma de la hoja?  
*rectángulo*
- Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura.  

- ¿Cómo se llama el punto donde se cortan los dos dobleces marcados en el paso 2?  
*centro*
- ¿Qué relación existe entre los dobleces que se hicieron en el paso 2?  
*dovlado*
- ¿Qué relación existe entre el doblez marcado en el paso 2 y el lado central horizontal al que se lleva?  
*perpendicular*
- Cuando se rota la figura al inicio del paso 3, ¿qué relación hay entre la base del rectángulo y el doblez central vertical? ¿Por qué?  
*vertical*
- ¿Cree que la base del rectángulo está dividida en dos partes iguales? ¿Por qué?  
*paralelo*

EL DOBLADO DE PAPEL COMO MEDIO PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO, EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

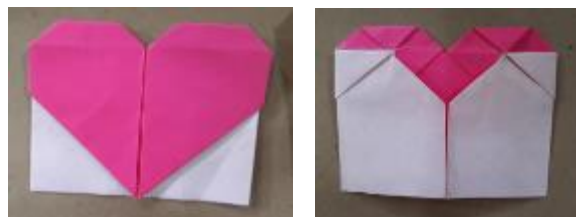
Aporte de información:

Se llama mediatriz a la perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

- ¿Cree que el doblez central vertical es una mediatriz de la base del rectángulo? ¿Por qué?  
*vertical*
- ¿Dónde más puede observar una mediatriz? ¿Por qué?  
*rectángulo*
- En el paso 3, al llevar los lados laterales al centro de la figura, se establece una relación entre los dobleces marcados. ¿Puede decir cuál es?  
*cuadrado*
- En el paso 4 se lleva el vértice inferior al punto medio del lado superior. ¿Por qué cree que ese punto se llama punto medio?  
*compartida*
- ¿Qué relación hay entre los lados laterales (izquierdo y derecho) y el doblez central vertical de la figura, en el paso 4?  
*horizontal*
- Describe el corazón construido. ¿Cuántos lados y vértices tiene?  
*vertical*

**Ilustración 42. Actividad corazón separador de Alfredo.**

En el cuarto momento, se le entregó a cada estudiante una hoja con forma cuadrada con una de sus caras de color blanco y otra de un color diferente; posteriormente, se les motivó a hacer nuevamente el corazón separador recordando entre todos los participantes el paso a paso. En la ilustración 43, se puede observar que el estudiante mejoró su habilidad con los dobleces, lo cual permite concluir que la práctica posibilitó que Alfredo afianzara la motricidad fina mediante el doblado de papel.



**Ilustración 43. Segunda construcción corazón separador de Alfredo**

Luego de hacer la puesta en común del paso a paso para construir la figura, se invitó a los estudiantes a que, de manera individual, crearan su propio instructivo, para determinar la interiorización acertada de los términos geométricos trabajados durante la actividad; además, verificar la coherencia y secuencia de los pasos. En la ilustración 44, se puede visualizar el instructivo realizado por Alfredo.

7- primero doblamos asia la mita.  
2- Doblamos por el sentido de la mita.  
3- Doblamos asia la otra punta.  
4- le aemos las pestañas.  
5- aemos la otras orejitas.  
6- luego doblamos asia la punta de las pestañas  
7- luego doblamos asia la mita  
8- y luego terminamos con el corazón  
9- y luego queda perfecto

**Ilustración 44. Instructivo corazón separador de Alfredo.**

Alfredo, en el instructivo, logra enumerar nueve pasos para la construcción, aunque estos no permiten hacer el corazón separador, ya que los pasos tienen poca claridad. Por ejemplo, en el paso 1 escribió “*primero doblamos asia la mita*”; en este caso, se observa que le falta especificar cuál mitad, si la que forma rectángulos o triángulos rectángulos; así mismo, en el paso 4 anotó: “*le aemos las pestañas*”, este paso no permite establecer a qué elemento se le va a hacer las pestañas; todo lo anterior indica que, a nivel conceptual, no se presentan muchos avances.

En el quinto momento, se les entregó a los estudiantes el instructivo para construir el portalápiz; adicionalmente, se les entregó seis hojas de forma cuadrada de tres colores diferentes para hacer la figura modular. En la ilustración 45 se puede observar la que construyó Alfredo.



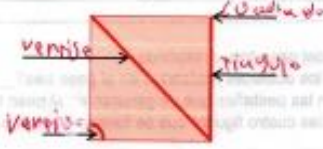
**Ilustración 45. Construcción portalápiz de Alfredo**

En la figura construida con doblado de papel, se puede observar que Alfredo logró hacer los dobleces necesarios para crear un portalápiz; no obstante, se observaron dificultades al momento de unir los seis módulos, en especial, el último, cuyo ensamblaje tiene un alto nivel de complejidad.

Después de terminar el portalápiz, se les entregó a los estudiantes las preguntas relacionadas con la actividad; así mismo, se les dio una hoja blanca de forma cuadrada para hacer un módulo adicional para el análisis de los dobleces y el mosaico de pliegues, para responder las preguntas.

EL DOBLADO DE PAPEL COMO MEDIO PARA LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO, EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

**PREGUNTAS PORTALÁPIZ**

- ¿Qué forma tiene la hoja con la que hizo el módulo? Triángulo
- Escribe al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura.
 
- ¿Qué forma tiene cada una de las cuatro partes en que quedó dividida la hoja en el paso uno? Rectángulo
- ¿Qué nombre recibe el lugar donde se cortan los dos dobleces en el paso uno? ¿Por qué? El lugar donde se cortan los dos dobleces es un punto
- ¿Los dobleces construidos en el paso uno, son perpendiculares entre sí? ¿Por qué? Los dobleces construidos en el paso uno, son perpendiculares entre sí
- ¿Los dobleces construidos en el paso dos, son perpendiculares entre sí? ¿En qué casos si y en qué casos no? Si y no
- ¿Los dobleces horizontales construidos en el paso dos, son paralelos entre sí? ¿Por qué? Los dobleces horizontales construidos en el paso dos, son paralelos entre sí
- ¿Los dobleces verticales construidos en el paso dos, son paralelos entre sí? ¿Por qué? Los dobleces verticales construidos en el paso dos, son paralelos entre sí

**Aporte de información.**

**Semejanza:**  
Es la variación en tamaño entre dos objetos o cuerpos pero sus formas son idénticas.

EL DOBLADO DE PAPEL COMO MEDIO PARA LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO, EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

9. Al hacer los dobleces en el paso dos, responde:  
a. ¿Cuáles cuadrantes quedan rotados?  
b. ¿Son semejantes los cuadrantes?  
c. ¿Por qué?

10. Analiza los cuadrantes del paso tres y responde:  
a. ¿Cómo se forman los cuadrantes rotados en el paso tres?  
b. ¿Qué semejanza tienen los cuadrantes que se generan en el paso tres?  
c. ¿Son semejantes los cuatro triángulos que se forman en este paso?  
d. ¿Por qué?

**Aporte de información:**  
**Mediana:** Es aquella recta que corta a un segmento por la mitad de forma perpendicular.

11. ¿Qué es un segmento?  
12. Señala los segmentos que obtienes en la hoja original, después de realizar todos los pasos.  
13. ¿El doblez central vertical del paso uno es mediana del lado superior o del lado inferior? ¿Por qué?  
14. ¿El doblez central horizontal del paso uno es mediana del lado derecho o del lado izquierdo? ¿Por qué?  
15. ¿Los triángulos marcados en el paso uno son mediatrices uno del otro?  
16. ¿Por qué? ¿Por qué?  
17. Al doblar la hoja a su forma original, se ven líneas después de los dobleces, las cuales se nombran como plano de simetría o mosaico de pliegues.

EL DOBLADO DE PAPEL COMO MEDIO PARA LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO, EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

Observa las siguientes imágenes y complétalas con tu hoja. Determina si las líneas rojas son mediatrices entre sí y explica. Recuerda observar que la mediana es una **DETERMINADA** que divide el segmento en dos partes iguales.

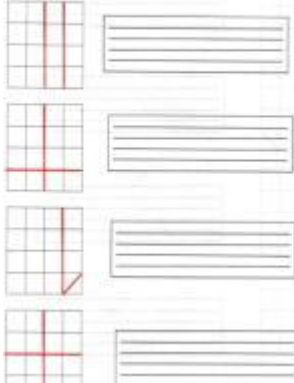
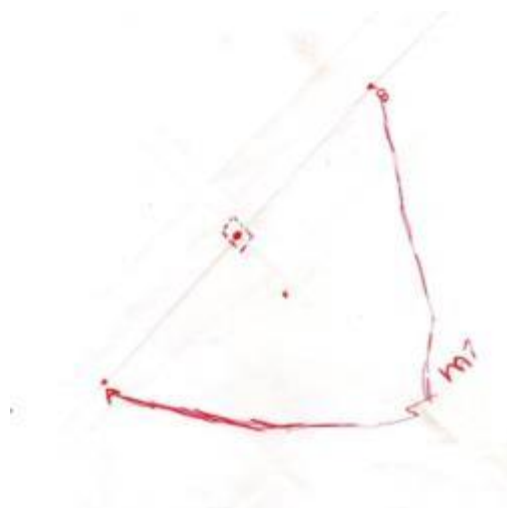


Ilustración 46: actividad portalápiz de Alfredo

De acuerdo con la ilustración 46 se puede concluir que el estudiante no logró avances significativos en la comprensión de los conceptos geométricos; por ejemplo, en la pregunta 4

(¿qué nombre recibe el lugar donde se cortan los dos dobleces en el paso uno?, ¿por qué?), cuya intención de respuesta era punto medio, porque los dobleces se cortan en la mitad de cada uno o se cortan en el centro de la hoja, Alfredo respondió “*triaguloquadra do y vertise*”, lo cual muestra que el estudiante no comprende el concepto de punto medio, ni tampoco lo que se le está preguntando; de hecho, responde relacionando cualquier término geométrico que cree observar. En la pregunta 5 (¿los dobleces contruidos en el paso uno, son perpendiculares entre sí?, ¿por qué?), en la que se buscaba que respondieran que sí, porque los dobleces, en el punto donde se cortan, forman ángulos de  $90^\circ$  o ángulos rectos, Alfredo contestó “*vertise logranbro tre lados lo votien un vovento*”. Esta respuesta nos permite inferir que logra reconocer algún punto de intersección, pero que no comprende ni la pregunta ni el mosaico de pliegues de la construcción. De hecho, se puede observar que Alfredo no contestó la mayoría de las preguntas.

En el sexto momento se le entregó a cada estudiante la guía para construir la mediatriz con doblado de papel y dos hojas blancas de forma cuadrada. Posteriormente, se hizo la construcción mediante el acompañamiento guiado de las investigadoras. En la ilustración 48 se puede visualizar la construcción de la mediatriz hecha por Alfredo.



**Ilustración 47. Construcción mediatriz de Alfredo**

En la ilustración 47, se puede determinar que Alfredo logró hallar el punto medio del segmento AB e hizo un doblado perpendicular que pasa por dicho punto, con lo cual se demuestra que logró hacer la mediatriz con doblado de papel. También se observa que el estudiante intentó ubicar un punto en la mediatriz, para mostrar que está a igual distancia de los puntos A y B, pero



en la construcción de los segmentos  $AM_1$  y  $BM_1$ , tuvo dificultades porque los hizo a puño alzado y no mediante el doblado de papel. Durante esta actividad, también se les solicitó a los estudiantes que respondieran las preguntas que estaban inmersas en la guía para construir la mediatriz con doblado de papel, tal como se muestra en la ilustración 48.

EL DOBLADO DE PAPEL COMO MEDIO PARA LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO, EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

CONSTRUCCIÓN DE MEDIATRIZ CON DOBLADO DE PAPEL

Para lograrlo, siga los pasos con atención.

- Dibuje dos puntos en una hoja de papel.
  - ¿Cuántos dobleces pasan por esos dos puntos? *cuadrado*
- Halie el segmento que une los dos puntos mediante el doblado de papel.
  - ¿De qué manera se pueden nombrar esos dos puntos? *segmento*
- Nombre los dos puntos con las letras A y B (en mayúsculas).
  - ¿Cómo se puede hallar el punto medio del segmento AB? *A+B*
- Sobreponga los puntos A y B (uno sobre el otro) para construir un nuevo segmento.
  - ¿Cómo se llama el lugar donde se intersectan los dos segmentos? *vertice*
- Nombre M el punto de intersección entre el doblez hecho y el segmento AB.
  - ¿M es el punto medio del segmento AB? *si*
  - ¿Por qué? *son iguales*
  - ¿El doblez construido es perpendicular al segmento AB? *si*
  - ¿Por qué? *segmento*
  - ¿El doblez construido será una mediatriz del segmento AB? *si*
  - ¿Por qué? *cuadrado*
- Ubique un punto ( $M_1$ ) sobre el nuevo segmento.
  - ¿Cuáles son las características del triángulo  $AM_1$ ? *triángulo*
  - ¿Los lados  $AM_1$  y  $BM_1$  son iguales? *si*
  - ¿Por qué? *cuadrado*
- Una el punto A con el punto  $M_1$  mediante el doblado de papel.
- Una el punto B con el punto  $M_1$  mediante el doblado de papel.

Ilustración 48. Actividad mediatriz con doblado de papel de Alfredo

De acuerdo con la ilustración anterior, se puede concluir que el estudiante no logró avances significativos en la comprensión de los conceptos geométricos trabajados durante el proceso. Por ejemplo, en la pregunta 1 (¿cuántos dobleces pasan por esos dos puntos?), cuya respuesta era un doblez, Alfredo contestó: “cuadrado”; en la pregunta 4 (¿cómo se llama el lugar donde se intersectan los dos segmentos?), en la cual se buscaba que afirmaran punto medio del segmento inicial AB, Alfredo respondió “vertise”, aunque es una respuesta correcta que permite determinar que el estudiante reconoce este concepto, se requería que fuera más específico.

Finalmente, se les entregó un esquema con los siguientes conceptos: punto medio, segmentos perpendiculares y mediatriz de un segmento, para que ellos asociaran cada uno con la definición correcta. El esquema de Alfredo se visualiza en la ilustración 49.

<b>PUNTO MEDIO</b>	Es un punto ubicado en cualquier parte del segmento.	Es el punto que divide un segmento por la mitad.	Es el punto que divide un segmento en dos partes iguales.	Es el punto que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos de un segmento.
<b>SEGMENTOS PERPENDICULARES</b>	Son dos segmentos que nunca se cortan en un punto.	Son dos segmentos que se cortan en un punto.	Son dos segmentos que se cortan en un punto formando ángulos de noventa grados.	Son dos segmentos que se cortan en un punto formando ángulos rectos.
<b>MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO</b>	Es una recta que corta a un segmento por la mitad.	Es una recta que corta a un segmento por la mitad de forma perpendicular.	Es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.	Lugar geométrico de los puntos que son equidistantes a los dos extremos de un segmento.

Ilustración 49. Esquema de los conceptos de Alfredo

En la ilustración anterior se observa que Alfredo coloreó una respuesta válida para el concepto de punto medio, una respuesta incorrecta para segmentos perpendiculares y una correcta para el concepto de mediatriz de un segmento; lo anterior permite inferir que el estudiante logró relacionar el concepto de punto medio con “el punto que divide a un segmento por la mitad”.

De acuerdo con las ilustraciones y anotaciones que emergieron del proceso, se puede concluir que Alfredo no logró avances significativos en la comprensión de los conceptos geométricos de punto medio, segmentos perpendiculares y mediatriz de un segmento; sin embargo, se puede rescatar que logró hallar la mediatriz de un segmento mediante el doblado de papel.

### ***Fase de proyecto final de síntesis.***

La feria del doblado de papel se realizó con la comunidad educativa de la Institución Educativa Churidó Pueblo; es decir, se invitaron a todos los estudiantes, a padres de familia y a profesores, en general. Se organizaron cinco stands y en cada uno se dieron instrucciones para realizar las diferentes construcciones que se trabajaron durante el proceso, las cuales fueron

orientadas por los estudiantes focalizados durante el desarrollo del trabajo de campo. En las fotografías de la ilustración 50, se pueden observar los diferentes escenarios de la feria.



**Ilustración 50: feria del doblado de papel**

Alfredo participó en la feria, sin embargo, no estaba en condiciones de explicarles a los asistentes cómo hacer las construcciones; incluso, solo pudo acompañar a sus compañeros en el stand del corazón separador; además, por iniciativa propia hizo un recorrido por todos los stands para hacer las construcciones.

En la entrevista oral que se le hizo a Alfredo, solo respondió la pregunta: ¿para usted qué es el punto medio de un segmento?, a la cual contestó que “*la mitad*”. Esta respuesta nos permitió inferir que, por lo menos, logró relacionar punto medio con la palabra mitad, lo cual es un avance en el proceso de este estudiante, que parece que tiene ciertos problemas de aprendizaje y se remitió a una persona especializada. Adicionalmente, al hacerle las otras preguntas, Alfredo se quedó callado, a pesar de que la entrevistadora intentó hacerlas con un lenguaje más cercano al estudiante.

***Clasificación general en los niveles de comprensión.***

A continuación, se subrayan los desempeños logrados por Alfredo en la dimensión de contenido, de acuerdo con el marco de la EpC.

**Tabla 12. Dimensión de contenido de Alfredo**

Niveles Categorías	Nivel 1. Ingenuo	Nivel 2. Novato	Nivel 3. Aprendiz	Nivel 4. Maestría.
-----------------------	---------------------	--------------------	----------------------	-----------------------



Concepto de punto medio	No identifica el concepto de punto medio.	<b><u>Identifica el concepto de punto medio.</u></b>	Define el concepto de punto medio.	Explica el concepto de punto medio en contextos matemáticos y extra matemáticos.
Concepto de perpendicularidad	<b><u>No identifica el concepto de perpendicularidad.</u></b>	Identifica el concepto de perpendicularidad.	Define el concepto de perpendicularidad.	Explica el concepto de perpendicularidad en contextos matemáticos y extra matemáticos.
Concepto de mediatriz	<b><u>Desconoce el concepto de mediatriz.</u></b>	Define erróneamente el concepto de mediatriz.	Establece que la mediatriz es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.  Reconoce la mediatriz como lugar geométrico.	Explica las características de la mediatriz en contextos matemáticos y extra matemáticos.  Define el concepto de mediatriz como lugar geométrico.

De acuerdo con la tabla 12, se puede concluir que Alfredo, durante el proceso, logró identificar el concepto de punto medio, lo cual se evidencia en algunas de las construcciones realizadas y en la respuesta dada en la entrevista oral; por lo anterior, se puede ubicar en el nivel de novato en la categoría de punto medio; sin embargo, no comprendió los conceptos de perpendicularidad y mediatriz, pues siempre se mantuvo en el nivel de ingenuo.

A continuación, se subrayan los desempeños logrados por Alfredo en la dimensión de métodos, de acuerdo con el marco de la EpC.

**Tabla 13. Dimensión de métodos de Alfredo**

<b>Niveles</b> <b>Categorías</b>	<b>Nivel 1.</b> <b>Ingenuo</b>	<b>Nivel 2.</b> <b>Novato</b>	<b>Nivel 3.</b> <b>Aprendiz</b>	<b>Nivel 4.</b> <b>Maestría.</b>
Concepto de punto medio	No construye el punto medio de un segmento con doblado de papel.	Construye erróneamente el punto medio de un segmento con doblado de papel.	<b><u>Construye el punto medio de un segmento con doblado de papel.</u></b>	Explica cómo se construye un punto medio de un segmento con doblado de papel.
Concepto de perpendicularidad	No construye dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.	Construye erróneamente dos segmentos perpendiculares	<b><u>Construye dos segmentos perpendiculares con doblado de</u></b>	Explica cómo se construyen dos segmentos perpendiculares

		con doblado de papel.	<u>papel.</u>	con doblado de papel.
Concepto de mediatriz	No construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.	Construye erróneamente la mediatriz de un segmento con doblado de papel.	<b><u>Construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.</u></b>  Construye puntos en la mediatriz que equidistan de los extremos del segmento.	Explica cómo se construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.  Explica cómo se construyen puntos en la mediatriz que equidistan de los extremos del segmento.

Según la tabla 13, se puede visualizar que Alfredo alcanzó el nivel de aprendiz en casi todas las categorías de la dimensión de métodos; sin embargo, no pudo construir puntos en la mediatriz que equidistaran de los extremos del segmento para poder determinar que la mediatriz era un lugar geométrico. Se puede resaltar que en esta dimensión fue en la que Alfredo logró mayor avance. De hecho, el doblado de papel le permitió construir objetos geométricos.

En la tabla 14, se subrayan los desempeños logrados por Alfredo en la dimensión de propósito, con respecto al marco de la EpC.

Tabla 14. Dimensión de propósito de Alfredo

Niveles Categorías	Nivel 1. Ingenuo	Nivel 2. Novato	Nivel 3. Aprendiz	Nivel 4. Maestría.
Concepto de punto medio	No identifica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	<b><u>Identifica erróneamente o de manera incompleta las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.</u></b>	Identifica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	Explica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.
Concepto de perpendicularidad	<b><u>No identifica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.</u></b>	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características de la perpendicularidad en una	Identifica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.	Explica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.

		construcción con doblado de papel.		
Concepto de mediatriz	<b><u>No identifica las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.</u></b>	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	Identifica las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	Explica las características de la mediatriz como lugar geométrico en una construcción con doblado de papel.

De acuerdo con la tabla 14, se puede concluir que Alfredo alcanzó el nivel de novato en la categoría de punto medio, dado que pudo relacionar este concepto con la palabra mitad, lo cual es un avance en el proceso de este estudiante, que tiene condiciones particulares; no obstante, no logró avances en las otras dos categorías y se quedó en el nivel de ingenuo.

En la tabla 15, se subrayan los desempeños logrados por Alfredo en la dimensión de formas de comunicación, con respecto al marco de la EpC.

**Tabla 15: Dimensión de formas de comunicación de Alfredo**

<b>Niveles</b>	<b>Nivel 1. Ingenuo</b>	<b>Nivel 2. Novato</b>	<b>Nivel 3. Aprendiz</b>	<b>Nivel 4. Maestría.</b>
<b>Categorías</b>				
Concepto de punto medio	No expresa el concepto de punto medio.	<b><u>Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de punto medio.</u></b>	Expresa, de manera escrita, el concepto de punto medio con un lenguaje matemático.	Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de punto medio con lenguaje matemático.
Concepto de perpendicularidad	<b><u>No expresa el concepto de perpendicularidad.</u></b>	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de perpendicularidad.	Expresa, de manera escrita, el concepto de perpendicularidad con un lenguaje matemático.	Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de perpendicularidad con lenguaje matemático.
Concepto de mediatriz	<b><u>No expresa el concepto de mediatriz.</u></b>	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de mediatriz.	Expresa, de manera escrita, el concepto de mediatriz con un lenguaje matemático.	Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de mediatriz con lenguaje matemático.

De acuerdo con la tabla 15, se puede inferir que Alfredo alcanzó el nivel de novato en la categoría de punto medio, dado que logró expresar el concepto de punto medio, de manera

incompleta; sin embargo, no logró avances en las otras dos categorías y se quedó en el nivel ingenuo.

En resumen se puede concluir que Alfredo alcanzó el nivel de novato en la categoría de punto medio en tres de las dimensiones de comprensión: contenido, propósitos y formas de comunicación; en la dimensión de método, pudo alcanzar el nivel de aprendiz puesto que logró utilizar el doblado de papel de manera correcta, para construir objetos geométricos. Con respecto a los conceptos de perpendicularidad y mediatriz, no se observaron avances en el nivel de comprensión en las dimensiones de contenido, propósitos y formas de comunicación.

### **Análisis del avance del proceso de comprensión del caso 2: Federico**

El estudiante que representa este caso, mostró algunos avances en su proceso de comprensión del concepto de mediatriz como lugar geométrico; se observó que es un niño introvertido y poco participativo en clase; no obstante, fue responsable y comprometido con el desarrollo de las actividades propuestas durante la aplicación de la unidad curricular; su proceso de comprensión será descrito a continuación.

#### ***Fase de exploración.***

En esta fase se realizó la construcción de un conejo con doblado de papel, la cual se desarrolló en tres momentos, que se presentaron en la unidad curricular, capítulo cuatro. Federico, durante la construcción del conejo (primer momento), se mostró interesado y concentrado en el trabajo realizado; no necesitó ayuda para comprender el instructivo, ni tampoco para realizar los dobleces; en la ilustración 51 se puede observar su construcción.



**Ilustración 51. Construcción conejo de Federico.**

Con respecto a la actividad escrita, se observó que el estudiante respondió todas las preguntas conceptuales (ocho en total); sin embargo, el 75% de sus respuestas no fueron acertadas con respecto a la intención de la pregunta. Por ejemplo, en la pregunta 2, en la que se solicitaban los elementos que constituyen un cuadrado y que buscaba que el estudiante escribiera: diagonal, ángulo, vértice y lado, al frente de cada flecha, Federico respondió: “*doblamos la oja*”, “*la coji en forma de barco*”, “*la cojimos y la alsamos para acer las orejas*” y “*luego doble 2 puntas asi atras*”, respectivamente, lo que permite inferir que el estudiante confundió la pregunta con las instrucciones para hacer el conejo.

En la pregunta 6 (¿qué relación hay entre la base del triángulo y el doblez marcado en el paso 2?, ¿por qué?), cuya intención era que el estudiante escribiera sobre la relación de perpendicularidad, Federico respondió: “*que las 2 punta se unen para ase el triangulo*”; en la pregunta 7 (¿cree que el doblez realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales?, ¿por qué?), se buscaba que los estudiantes mencionaran mitad o partes iguales, para identificar la aproximación al concepto de punto medio; en esta pregunta, Federico respondió: “*si porque las doblo y las buelboa abrir*”. De acuerdo con las dos respuestas dadas anteriormente, se puede concluir que Federico confundió los pasos para construir la figura con los conceptos geométricos solicitados. Lo anterior se puede visualizar en la ilustración 52.

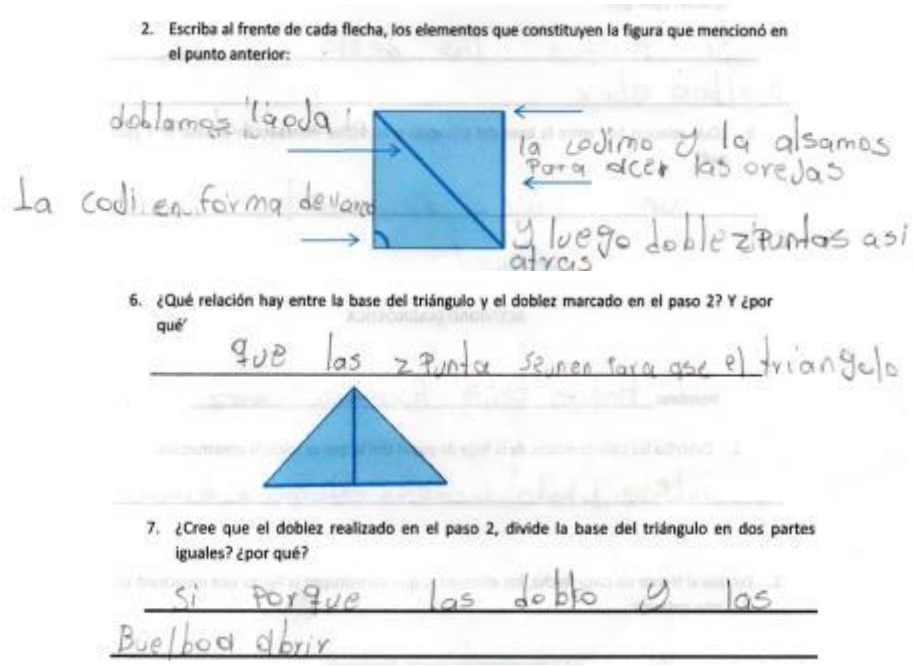



Ilustración 52. Actividad inicial de Federico.

En el segundo momento, se les envió a los padres de familia la actividad, para que la realizaran junto con sus hijos y respondieran las preguntas asociadas. A continuación, se muestra la actividad desarrollada por la madre de Federico en la ilustración 53.

1. Describe las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción.  
4 vertice, 4 lados y 4 angulos y 2 Diagonales

2. Escribe el frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:  


3. ¿Qué figura observa al hacer el primer doblez? ¿Por qué? Dibújala.  
un triángulo porque al doblar la otra la figura es un triángulo

4. ¿Cómo se llama el doblez que le permitió hallar las figuras que mencionó en el paso anterior?  
una diagonal

5. Al hacer el segundo doblez, ¿en cuántas partes queda dividida la hoja con la que se inició la construcción?  
en 2 lados queda la figura

6. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el doblez marcado en el paso 2? ¿Por qué?  
porque se encuentran

7. ¿Cree que el doblez realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales? ¿Por qué?  
si porque al unirlo y desdoblarlo se forma la base en 2 partes

8. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el doblez marcado en el paso 3? ¿Por qué?  
porque al subir la base se encuentra

9. Hoy se construyó una carta de telares con doblado de papel. ¿Qué otras figuras ha construido?  
la plana el porta lapiz y el corchero

10. ¿Qué ha aprendido de matemáticas con doblado de papel?  
al tener más aplicaciones matemáticas y en mi momento Geometría y doblado de papel y construcción

11. ¿Le gusta construir figuras con doblado de papel?  
 SI  NO (Por qué? aprendo Geometría y doblado de papel)

Ilustración 53. Actividad autoridad académica madre de Federico.

De acuerdo con la ilustración anterior, se puede concluir que la madre de familia realizó la actividad en su totalidad y que tiene claridad en los elementos que constituyen un cuadrado, lo cual se puede observar en la respuesta a la pregunta 2: “*diagonales, angulo, vertices, lados*”, ya que respondió de manera pertinente de acuerdo a la figura dada; en la pregunta 4 (¿cómo se llama el doblez que le permitió hallar las figuras que mencionó en el paso anterior?), ella respondió: “*una diagonal*”; en este caso, se nota que hizo una relación entre el doblez elaborado y uno de los elementos que constituyen el cuadrado.

Sin embargo, las respuestas a las preguntas 6 (¿qué relación hay entre la base del triángulo y el doblez marcado en el paso 2?, ¿por qué?) y 7 (¿cree que el doblez realizado en el paso 2 divide la base del triángulo en dos partes iguales?, ¿por qué?) no corresponden a las intenciones conceptuales geométricas asociadas; esto es, la madre contestó: “*porque se encuentran*” y “*si porque al unirlo y desdoblarlo se forma la base en 2 partes*”, respectivamente. Por lo tanto, se

concluye que no presentó argumentos suficientes para validar las respuestas y no logró establecer las relaciones geométricas solicitadas.

Se consideró pertinente conocer la opinión de la madre de familia respecto a la actividad realizada; por ello, se envió una nota con ciertas preguntas para conocerla; ante el interrogante: ¿cómo le pareció la actividad?, la madre respondió: “*creativa, divertida y pase un buen rato con mi hijo*”; adicionalmente, mencionó que esas actividades pueden favorecer el aprendizaje de las matemáticas porque “*me ayuda con la geometría a conocer más triángulos, líneas, curvas y líneas rectas*”; esto se observa en la ilustración 54.

1. ¿Cómo le pareció la actividad?  
*Creativa, Divertida y pase un buen rato con mi hijo*
2. ¿Cree que este tipo de actividades puede favorecer el aprendizaje de las matemáticas? ¿Por qué?  
*SI porque me ayuda con la geometria a conocer mas triángulos, líneas, curvas y líneas rectas*

**Ilustración 54. Opinión madre de Federico.**

En el tercer momento, se volvió a aplicar la actividad con los estudiantes para mejorar los dobleces en la construcción y reforzar los conceptos geométricos asociados. A continuación, se observa la construcción de Federico en la ilustración 55.



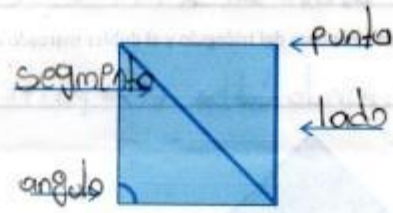
**Ilustración 55. Construcción de Federico en el tercer momento.**

De acuerdo a lo observado durante el proceso, se puede concluir que Federico no utilizó el instructivo ya que había adquirido dominio en el reconocimiento de instrucciones y en la elaboración de los dobleces; razón por la cual, su segunda construcción fue más pulida y

refinada. Además, al responder las preguntas, se observa que tuvo más aciertos en sus respuestas. Por ejemplo, en la pregunta 2, en la que se solicitaban los elementos que constituyen un cuadrado y que buscaba que el estudiante escribiera: diagonal, ángulo, vértice y lado, al frente de cada flecha, Federico respondió: “*segmento, angulo, punta y lado*”, lo que permite concluir que el estudiante se está acercando a las respuestas deseadas. En la pregunta 6 (¿qué relación hay entre la base del triángulo y el doblar marcado en el paso 2?, ¿por qué?), cuya intención era que los estudiantes reconocieran la relación de perpendicularidad, Federico respondió: “*porque el primero es mas grande que el 2*”; en este caso, el estudiante respondió de manera acertada, en cuanto a la comparación entre las medidas de los segmentos; sin embargo, esta no era la relación esperada.


La pregunta 7 (¿cree que el doblar realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales?, ¿por qué?), buscaba que los estudiantes mencionaran mitad o partes iguales para identificar la aproximación al concepto de punto medio; Federico, en este caso, contestó “*si porque el triangulo primero era grande y a doblarlo se buelbe en 2 partes pequeñas y son iguales*”; esto permite concluir que el estudiante ya se estaba acercando al concepto de punto medio. Lo anterior se puede visualizar en la ilustración 56.

2. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:



6. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el doblar marcado en el paso 2? ¿Por qué?

*Porque el primero es mas grande que el 2*



7. ¿Cree que el doblar realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales? ¿Por qué?

*Si porque el triangulo primero era grande y a doblarlo se buelbe en 2 partes pequeñas y son iguales*

Ilustración 56. Actividad conejo momento 3 de Federico.



### ***Fase de investigación guiada.***

Esta fase se desarrolló en seis momentos, en los que se realizaron las siguientes construcciones con doblado de papel: rana, corazón separador, portalápiz y mediatriz. Se aclara que cada una de las figuras, estaba acompañada de su respectivo conjunto de preguntas, asociadas a conceptos geométricos.

Federico, en el primer momento, se mostró atento e interesado durante la lectura del cuento “los cuadrados soñadores”, en cuyas líneas se expresaban los pasos para construir una rana. Se observó que los dobleces de su figura quedaron bien definidos; además, realizó las actividades inmersas en el cuento, como, por ejemplo, trazar con un lápiz del mismo color los segmentos perpendiculares y enumerar cada uno de los triángulos; esto se evidencia en la ilustración 57.




**Ilustración 57. Construcción de la rana. Material de Federico.**

Con respecto a las preguntas asociadas al cuento, se observó que Federico respondió la mayoría de estas; de hecho, fue avanzando en su proceso de comprensión de los conceptos de punto medio, perpendicularidad y mediatriz, lo que se evidencia en las respuestas dadas a ciertos interrogantes; por ejemplo, en la pregunta 1, la cual buscaba que enunciara las características de la forma de la hoja, es decir, de un cuadrado, Federico respondió: “*la oja es cuadrada*”, aunque no mencionó todas las características del elemento geométrico, definió correctamente su forma.

En la pregunta 4 (si se ubica el cuadrado de tal manera que el primer dobléz sea vertical, ¿el dobléz pasa por el punto medio del lado superior y del lado inferior?, ¿por qué?), que pretendía que el estudiante respondiera que sí, porque pasa por la mitad, el medio o el punto medio, Federico contestó: “*se com bierten en medio*”, lo cual permite intuir que se aproximó al concepto esperado. En la pregunta 6 (¿cree que el primer dobléz es perpendicular al lado superior y al lado inferior?, ¿por qué?), cuya intención era que relacionaran la perpendicularidad con los ángulos rectos, es decir, ángulos de  $90^\circ$ , Federico respondió: “*que van de un lado al otro*”; en este caso se concluye que no logró establecer esta relación. Los resultados mencionados se observan en la ilustración 59.

1. Describa las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción.  
 4. el dobléz es cuadrada

4. Si se ubica el cuadrado de tal manera que el primer dobléz sea vertical:  
 d. ¿El dobléz pasa por el punto medio del lado superior y del lado inferior? ¿Por qué? se com bierten en medio



6. ¿Cree que el primer dobléz es perpendicular al lado superior y al lado inferior? ¿Por qué? que van de un lado al otro

Ilustración 59. Actividad "Los Cuadrados soñadores" de Federico

En el segundo momento se hizo la construcción colectiva de la rana. Federico refinó los dobleces hechos y la rana le quedó mejor definida con relación a la primera construcción; además, no necesitó el instructivo porque comprendió los pasos requeridos para lograr la figura, la cual se puede visualizar en la ilustración 60.



Ilustración 60. Segunda construcción de la rana de

En el tercer momento, se realizó la construcción de un corazón separador. Federico, durante el proceso, mostró habilidad con el doblado de papel, construyendo dobleces cada vez más pulidos, claros y definidos, como se visualiza en la ilustración 61.



**Ilustración 61. Construcción corazón separador de Federico.**

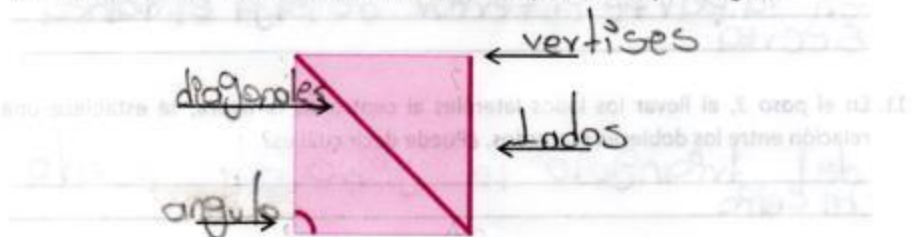
Federico muestra avance en la comprensión de los conceptos geométricos trabajados, lo cual está respaldado con las respuestas dadas. Por ejemplo, en las preguntas 1, 2 y 3 relacionadas con las características de la hoja y con los elementos que constituyen un cuadrado, Federico contestó: *“cuadrada porque todos sus lados son iguales”, “la oja tiene una forma cuadrada 4 lados 2 diagonales 4 vertises 4 angulos rectos de (90°)”* y *“diagonales, angulos, vertises, lados”*, respectivamente. Las respuestas anteriores muestran que Federico comprende el concepto de cuadrado. En la pregunta 4 (¿cómo se llama el punto donde se cortan los dos dobleces marcados en el paso 1?), Federico respondió: *“en el punto medio”*, lo cual permite concluir que reconoce este concepto.

En la pregunta 5 (¿qué relación existe entre los dobleces que se hicieron en el paso 1?), Federico escribió: *“2 segmentos que se encuentran en el punto medio que forman 4 angulos rectos”*; esta respuesta corresponde a la intención de la pregunta; además, constata que el estudiante reconoce el concepto de perpendicularidad y nuevamente corrobora que ha interiorizado el concepto de punto medio. En la pregunta 8 (¿cree que la base del rectángulo está dividida en dos partes iguales?, ¿por qué?), el estudiante contestó: *“si, porque están divididas por el punto medio”*, lo cual corresponde al concepto geométrico esperado; pero, en la pregunta 9 (¿cree que el doblez central vertical es una mediatriz de la base del rectángulo?, ¿por qué?), Federico respondió: *“si, porque tiene 2 triangulos casi en la mita”*; la anterior respuesta permite inferir que el estudiante aún no reconoce el concepto de mediatriz. Todos los hechos descritos se pueden visualizar en la ilustración 62.

1. ¿Qué forma tiene la hoja con la que se inició la construcción? ¿Por qué?  
Cuadrada porque todos los lados son iguales

2. ¿Cuáles son las características de la forma de la hoja?  
La hoja tiene una forma cuadrada 4 lados 2 diagonales 4 vértices 4 ángulos rectos de  $90^\circ$

3. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura.



4. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan los dos dobleces marcados en el paso 1?  
en el punto medio

5. ¿Qué relación existe entre los dobleces que se hicieron en el paso 1?  
2 segmentos que se encuentran en el punto medio que forman 4 ángulos rectos

8. ¿Cree que la base del rectángulo está dividida en dos partes iguales? ¿Por qué?  
si, porque están divididas por el punto medio

9. ¿Cree que el doblez central vertical es una mediatriz de la base del rectángulo? ¿Por qué?  
si, porque tiene 2 triángulos casi en la mitad

Ilustración 62: actividad corazón separador de Federico.

En el cuarto momento, se realizó nuevamente la construcción del corazón separador. De acuerdo con la ilustración 63, se puede concluir que Federico afianzó la habilidad con el doblado de papel, gracias a su dedicación y disposición para construir las figuras.



Ilustración 63. Segunda construcción corazón separador de Federico.

Después de hacer el corazón separador por segunda vez, se solicitó a los estudiantes que crearan su propio instructivo. En la ilustración 64, se puede observar que Federico, en el instructivo, escribió una cantidad de pasos sin enumerar; en general, trató de utilizar terminología matemática, que no era usual en su lenguaje común, por ejemplo, “*mitad, punto medio, vertise, 180 grados*”; sin embargo, la lectura del instructivo no permitió alcanzar la construcción del corazón separador porque no hubo claridad frente a las acciones sugeridas.

Doblar ala mitad  
 lo Desdoblo y lo doblo ala otra mitad  
 lodesdoblo y lo yebo al Dobles del punto  
 medio  
 Yebo el vertise asia el punto medio  
 Doblo 180 grados y Yebo el vertise asia  
 el media  
 Doblo 180 grados y obro las orejitas y  
 Doblo otros 180 grados y doblo los dos  
 vertises que estan por las orejas  
 Doblo los lados asia el punto  
 medio  
 Doblo las dos vertises o puntas de  
 arriba y las yebo asia bajo

**Ilustración 64. Instructivo corazón separador de Federico**

Vale la pena resaltar algunas de las instrucciones dadas como: “*Doblar ala mitad*”; se observa que el estudiante inició la instrucción de manera adecuada, pero le faltó especificar a cuál mitad se refería, ya sea en forma escrita o gráfica. En la segunda instrucción, Federico manifestó: “*lo desdoblo y lo doblo a la otra mitad*”; en este caso, también era pertinente especificar de forma escrita o gráfica a qué mitad hacía alusión. En la tercera instrucción, el estudiante escribió: “*lodesdoblo y lo yebo al dobles del punto medio*”; en este paso se resalta el uso de la expresión “*dobles del punto medio*”, ya que da la impresión que tiene claro cuál es el dobles que contiene el punto medio. Finalmente, vale la pena destacar la instrucción: “*Doblo las dos vertises o*

*puntas de arriba y las yebos hacia abajo*”, en la que llama la atención la relación correcta entre las puntas de la construcción con los vértices de la figura.

En el quinto momento, se hizo la construcción del portalápiz. En la ilustración 65 se puede observar que Federico logró hacer los seis módulos correctamente y los unió, de tal manera que la figura le quedó definida y refinada.

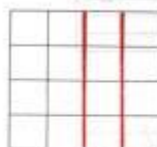


**Ilustración 65. Construcción portalápiz de Federico.**

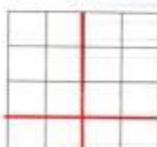
Después de terminar el portalápiz, Federico respondió las preguntas asociadas a la construcción, referidas a conceptos geométricos como: punto medio, perpendicularidad y mediatriz. En la ilustración 66, se visualizan algunas de sus respuestas.

4. ¿Qué nombre recibe el lugar donde se cortan los dos dobleces en el paso uno? ¿Por qué?  
el punto medio, porque es el punto que queda en el medio
5. ¿Los dobleces construidos en el paso uno, son perpendiculares entre sí? ¿Por qué?  
Si, porque tienen la misma medida
15. ¿Los dobleces marcados en el paso uno son mediatrices uno del otro?  
 Si si No no ¿Por qué? tienen la misma medida y el mismo tamaño
16. Al desdoblar la hoja a su forma original, se ven marcas dejadas por los dobleces, las cuales se nombran como plano de cicatrices o mosaico de pliegues.

Observe las siguientes imágenes y compárelas con su hoja. Determine si las líneas rojas son mediatrices entre sí y explique. Recuerde observar que la mediatriz es una perpendicular que divide el segmento en dos partes iguales.



no se encuentran las líneas rojas



si son mediatrices porque se encuentran



De acuerdo con la ilustración 66, se puede concluir que Federico avanzó en su nivel de comprensión con respecto al concepto de punto medio, lo cual se ve reflejado en la respuesta dada a la pregunta 4 (¿qué nombre recibe el lugar donde se cortan los dos dobleces en el paso 1?, ¿por qué?), en la que contestó: “*Punto medio, [porque] es el punto queba en el medio*”. En cuanto al concepto de perpendicularidad, cuya pregunta detonante es la 5 (¿los dobleces construidos en el paso 1, son perpendiculares entre sí?, ¿por qué?), Federico respondió: “*si porque tiene la misma medida*”; en este caso, se infiere que al observar los dobleces, el estudiante logra identificar los segmentos perpendiculares, pero aún no da los argumentos suficientes que validen esta relación.

La pregunta 15 está relacionada con el concepto de mediatriz (¿los dobleces marcados en el paso 1 son mediatrices uno del otro?, ¿por qué?), a la cual Federico responde: “*si [porque] tienen la misma medida y el mismo tamaño*”; de igual manera, la pregunta 16 se relaciona con este concepto (determine si las líneas rojas son mediatrices entre sí y explique); en este caso, el estudiante pudo reconocer cuáles imágenes eran mediatrices y cuáles no, tal como se observa en la ilustración 66; lo anterior permite concluir que Federico visualmente identificó el concepto de mediatriz, sin embargo, le faltaron argumentos conceptuales para validar sus respuestas.

En el sexto momento se realizó la construcción de la mediatriz como lugar geométrico, mediante el doblado de papel. En la ilustración 67, se puede visualizar la construcción hecha por Federico.



**Ilustración 67. Construcción mediatriz de Federico.**

Federico halló el punto medio del segmento  $AB$  el cual nombró  $M$ ; luego, hizo un doblez perpendicular que pasó por dicho punto; sobre este doblez ubicó cuatro puntos y, mediante el doblado de papel, unió cada uno de ellos con los extremos del segmento  $AB$ , construyendo la mediatriz como lugar geométrico. Durante esta actividad también se pretendía que los estudiantes respondieran las preguntas que estaban inmersas en la guía para construir la mediatriz con doblado de papel. A continuación, en la ilustración 69, se muestran algunas de sus respuestas.

3. Nombre los dos puntos con las letras  $A$  y  $B$  (en mayúsculas).
- ¿Cómo se puede hallar el punto medio del segmento  $AB$ ?  
Doblarlo por la mitad
4. Sobreponga los puntos  $A$  y  $B$  (uno sobre el otro) para construir un nuevo segmento.
- ¿Cómo se llama el lugar donde se intersectan los dos segmentos?  
en el punto medio del segmento  $AB$

Ilustración 69. Actividad mediatriz con doblado de papel. Preguntas 3 y 4 de Federico.

De acuerdo con la ilustración 69, se puede concluir que Federico logró comprender el concepto de punto medio mediante el doblado de papel, lo cual se evidencia con las respuestas dadas a las preguntas 3 (¿cómo se puede hallar el punto medio del segmento  $AB$ ?) y 4 (¿cómo se llama el lugar donde se intersectan los dos segmentos?), respectivamente: “doblarlo por la mitad” y “en el punto medio del segmento  $AB$ ”. Así mismo, en la pregunta 5, en sus dos primeros incisos (¿ $M$  es el punto medio del segmento  $AB$ ?, ¿por qué?), Federico respondió: “sí”, “porque pasa por la mitad de el segmento  $A,B$ ”. Las respuestas dadas permiten reafirmar que el estudiante en mención logró identificar y caracterizar el concepto de punto medio. Las respuestas a la pregunta 5, se visualizan en la ilustración 70.

5. Nombre  $M$  el punto de intersección entre el doblez hecho y el segmento  $AB$
- ¿ $M$  es el punto medio del segmento  $AB$ ? sí
  - ¿Por qué? Porque pasa por la mitad de el segmento  $AB$
  - ¿El doblez construido es perpendicular al segmento  $AB$ ? sí
  - ¿Por qué? forman ángulos de noventa grados
  - ¿El doblez construido será una mediatriz del segmento  $AB$ ? sí
  - ¿Por qué? es un segmento perpendicular que pasa por el punto medio

Ilustración 70. Actividad mediatriz con doblado de papel Pregunta 5 de Federico



Según la ilustración 70, Federico también logró reconocer los conceptos de perpendicularidad y de mediatriz. En particular, el estudiante escribió que dos segmentos son perpendiculares cuando “*forman ángulos de noventa grados*”; así mismo, manifestó que la mediatriz “*es un segmento perpendicular que pasa por el punto medio*”. Lo anterior nos permite concluir que el estudiante avanzó en su proceso de comprensión de los conceptos de perpendicularidad y de mediatriz.

De acuerdo a la ilustración 71, se puede concluir que Federico no alcanzó a comprender la mediatriz como lugar geométrico, lo cual se evidencia en las repuestas dadas a las preguntas 9, inciso f (¿qué características tienen estos puntos en comparación a los puntos A y B?) y 10 (¿es la mediatriz un lugar geométrico?, ¿por qué?); en este caso, Federico respondió: “*si porque todos son iguales*” y “*si, porque todos los lados son iguales*”, respectivamente. En el caso de las otras preguntas (9, incisos b, c, d), se observa que Federico responde frente a la igualdad de los lados de los triángulos formados, de manera correcta y lógica, que ningún lado es más grande que el otro o ningún lado es más pequeño que el otro. Lo anterior demuestra que, aunque se aproximó al concepto de mediatriz como lugar geométrico, le faltaron argumentos para validar sus repuestas.

9. Repita los pasos 5, 6 y 7, con otros tres puntos diferentes ( $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$ ).
- ¿Cuáles son las características de los triángulos  $ABM_2$ ,  $ABM_3$  y  $ABM_4$ ?  
 porque tienen 2 lados iguales
  - ¿Los lados  $AM_2$  y  $BM_2$  son iguales? SI ¿Por qué? ningun lado es mas grande que el otro
  - ¿Los lados  $AM_3$  y  $BM_3$  son iguales? SI ¿Por qué? ningun lado es mas pequeño que el otro
  - ¿Los lados  $AM_4$  y  $BM_4$  son iguales? SI ¿Por qué? porque ningun lado el mas grande que el otro
  - ¿Los puntos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$  están a la misma distancia de A y de B? SI  
 ¿Por qué? todos son iguales
  - ¿Qué característica tienen estos puntos, con respecto a los puntos A y B? SI  
porque todos son iguales
10. Responde las siguiente preguntas teniendo en cuenta el aporte de información
- ¿Es la mediatriz un lugar geométrico? SI ¿Por qué? porque todos los lados son iguales

Ilustración 71: Actividad mediatriz con doblado de papel. Preguntas 9-10 de Federico.

Finalmente, se les entregó a los participantes un esquema con los siguientes conceptos: punto medio, segmentos perpendiculares y mediatriz de un segmento, para que ellos asociaran cada uno con la definición correcta. El esquema de Federico se muestra en la ilustración 72.

<b>PUNTO MEDIO</b>	Es un punto ubicado en cualquier parte del segmento.	Es el punto que divide un segmento por la mitad.	Es el punto que divide un segmento en dos partes iguales.	Es el punto que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos de un segmento.
<b>SEGMENTOS PERPENDICULARES</b>	Son dos segmentos que nunca se cortan en un punto.	Son dos segmentos que se cortan en un punto.	Son dos segmentos que se cortan en un punto formando ángulos de noventa grados.	Son dos segmentos que se cortan en un punto formando ángulos rectos.
<b>MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO</b>	Es una recta que corta a un segmento por la mitad.	Es una recta que corta a un segmento por la mitad de forma perpendicular.	Es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.	Lugar geométrico de los puntos que son equidistantes a los dos extremos de un segmento.

Ilustración 72. . Esquema de los conceptos de Federico.

Federico coloreó una respuesta válida para el concepto de punto medio, una respuesta correcta para segmentos perpendiculares y una correcta para mediatriz de un segmento; no obstante, teniendo en cuenta lo anteriormente descrito, no hay total seguridad de que la opción coloreada respecto al concepto de mediatriz de un segmento como lugar geométrico, se haya seleccionado de manera consciente.

De acuerdo con el proceso descrito, se puede concluir que Federico logró avances en la comprensión de los conceptos geométricos: punto medio, segmentos perpendiculares y mediatriz de un segmento, aunque este último no lo comprendió como lugar geométrico. Estas ideas se ampliarán en las rúbricas de evaluación del proceso, que se presentarán más adelante.

### ***Fase de proyecto final de síntesis.***

La feria del doblado de papel se realizó con la comunidad educativa de la Institución Educativa Churidó Pueblo; es decir, se invitaron a todos los estudiantes, a padres de familia y a profesores, en general. En las fotos de la ilustración 73, se pueden observar otros escenarios de la feria.



Federico orientó el stand de la construcción de la carita de conejo, con doblado de papel, en la feria institucional; estaba en condiciones de explicarles a los asistentes cómo hacer la figura de forma correcta, haciendo referencia a algunos de los conceptos trabajados, sin necesidad de apoyarse en el instructivo.

En la entrevista oral que se le hizo a Federico, respondió con cierto nivel de comprensión algunas de las preguntas; las otras no las logró responder. En el siguiente diálogo, se evidencian las respuestas dadas:

Entrevistador: ¿Para usted qué es el punto medio de un segmento?

Federico: *“es el punto que está en la mitad del segmento”*.

Entrevistador: ¿Cómo se puede construir un punto medio de un segmento con doblado de papel?

Federico: *“doblado el segmento que está en la hoja de papel a la mitad”*

Entrevistador: ¿Para usted cuándo dos segmentos son perpendiculares?

Federico: *“cuando se encuentran y forman ángulos rectos de noventa”*

Entrevistador: ¿Cómo se pueden construir dos segmentos perpendiculares con doblado de papel?

Federico: *“doblado a la mitad”*.

Con relación a las preguntas que hacían referencia a la mediatriz, Federico se notó intimidado y no logró dar ninguna respuesta.

De acuerdo con la entrevista oral, se puede concluir que Federico comprendió los conceptos de punto medio de un segmento y segmentos perpendiculares; no obstante, le faltaron argumentos para explicar cómo hacerlos con doblado de papel; aun así, cabe aclarar que durante

el proceso, Federico logró hacer todas sus construcciones y apoyó a sus compañeros en la elaboración de estas, de la misma manera como lo hizo en la feria; es por ello que se intuye que el estudiante se sintió cohibido al momento de la grabación de la entrevista.

***Clasificación general en los niveles de comprensión.***

A continuación, se subrayan los desempeños logrados por Federico, en la dimensión de contenido, de acuerdo con el marco de la EpC.

**Tabla 16. Dimensión de contenido de Federico**

<b>Niveles</b> <b>Categorías</b>	<b>Nivel 1.</b> <b>Ingenuo</b>	<b>Nivel 2.</b> <b>Novato</b>	<b>Nivel 3.</b> <b>Aprendiz</b>	<b>Nivel 4.</b> <b>Maestría.</b>
Concepto de punto medio	No identifica el concepto de punto medio.	Identifica el concepto de punto medio.	<b><u>Define el concepto de punto medio.</u></b>	Explica el concepto de punto medio en contextos matemáticos y extra matemáticos.
Concepto de perpendicularidad	No identifica el concepto de perpendicularidad.	Identifica el concepto de perpendicularidad.	<b><u>Define el concepto de perpendicularidad.</u></b>	Explica el concepto de perpendicularidad en contextos matemáticos y extra matemáticos.
Concepto de mediatriz	Desconoce el concepto de mediatriz.	Define erróneamente el concepto de mediatriz.	<b><u>Establece que la mediatriz es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.</u></b>  Reconoce la mediatriz como lugar geométrico.	Explica las características de la mediatriz en contextos matemáticos y extra matemáticos.  Define el concepto de mediatriz como lugar geométrico.

De acuerdo con la tabla 16, se puede concluir que Federico, durante el trabajo de campo, logró avanzar en su proceso de comprensión de los conceptos de punto medio, de perpendicularidad y de mediatriz, lo cual se evidencia en algunas de las construcciones realizadas, en las respuestas dadas a ciertas actividades y en las respuestas dadas en la entrevista oral; por lo tanto, se concluye que Federico alcanzó el nivel de aprendiz en todas las categorías;

sin embargo, en la categoría de mediatriz solo logró uno de los descriptores, puesto que no pudo reconocerla como lugar geométrico.

A continuación, se subrayan los desempeños logrados por Federico, en la dimensión de métodos, con referencia al marco de la EpC.

**Tabla 17. Dimensión de métodos de Federico.**

<b>Niveles</b> <b>Categorías</b>	<b>Nivel 1.</b> <b>Ingenuo</b>	<b>Nivel 2.</b> <b>Novato</b>	<b>Nivel 3.</b> <b>Aprendiz</b>	<b>Nivel 4.</b> <b>Maestría.</b>
Concepto de punto medio	No construye el punto medio de un segmento con doblado de papel.	Construye erróneamente el punto medio de un segmento con doblado de papel.	Construye el punto medio de un segmento con doblado de papel.	<u>Explica cómo se construye un punto medio de un segmento con doblado de papel.</u>
Concepto de perpendicularidad	No construye dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.	Construye erróneamente dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.	<u>Construye dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.</u>	Explica cómo se construyen dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.
Concepto de mediatriz	No construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.	Construye erróneamente la mediatriz de un segmento con doblado de papel.	<u>Construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.</u>  <u>Construye puntos en la mediatriz que equidistan de los extremos del segmento.</u>	Explica cómo se construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.  Explica cómo se construyen puntos en la mediatriz que equidistan de los extremos del segmento.

Según la tabla 17, se puede visualizar que Federico alcanzó el nivel de maestría en la categoría de punto medio y el nivel de aprendiz en las categorías de perpendicular y de mediatriz, en la dimensión de métodos, ya que se le dificultó explicar cómo se construyen estas dos últimas mediante el doblado de papel, cuando se hizo la entrevista oral.

En la siguiente tabla se subrayan los desempeños logrados por Federico, en la dimensión de propósitos, de acuerdo al marco de la EpC.

**Tabla 18. Dimensión de propósito de Federico.**

<b>Niveles</b> <b>Categorías</b>	<b>Nivel 1.</b> <b>Ingenuo</b>	<b>Nivel 2.</b> <b>Novato</b>	<b>Nivel 3.</b> <b>Aprendiz</b>	<b>Nivel 4.</b> <b>Maestría.</b>
Concepto de punto medio	No identifica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	Identifica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	<u>Explica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.</u>
Concepto de perpendicularidad	No identifica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.	<u>Identifica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.</u>	Explica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.
Concepto de mediatriz	No identifica las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	<u>Identifica las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.</u>	Explica las características de la mediatriz como lugar geométrico en una construcción con doblado de papel.

De acuerdo a la tabla 18, se puede concluir que Federico alcanzó el nivel de maestría en la categoría de punto medio, y el nivel de aprendiz en las categorías de perpendicularidad y de mediatriz, ya que se le dificultó explicar, de manera oral, las características de cada concepto, utilizando argumentos válidos.

En la tabla 19, se subrayan los desempeños logrados por Federico en la dimensión de formas de comunicación, considerando el marco de la EpC.

**Tabla 19. Dimensión de formas de comunicación de Federico.**

<b>Niveles</b> <b>Categorías</b>	<b>Nivel 1.</b> <b>Ingenuo</b>	<b>Nivel 2.</b> <b>Novato</b>	<b>Nivel 3.</b> <b>Aprendiz</b>	<b>Nivel 4.</b> <b>Maestría.</b>
-------------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------

Concepto de punto medio	No expresa el concepto de punto medio.	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de punto medio.	Expresa, de manera escrita, el concepto de punto medio con un lenguaje matemático.	<b><u>Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de punto medio con lenguaje matemático.</u></b>
Concepto de perpendicularidad	No expresa el concepto de perpendicularidad.	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de perpendicularidad.	<b><u>Expresa, de manera escrita, el concepto de perpendicularidad con un lenguaje matemático.</u></b>	Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de perpendicularidad con lenguaje matemático.
Concepto de mediatriz	No expresa el concepto de mediatriz.	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de mediatriz.	<b><u>Expresa, de manera escrita, el concepto de mediatriz con un lenguaje matemático.</u></b>	Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de mediatriz con lenguaje matemático.

Según la tabla 19, se puede inferir que Federico alcanzó el nivel de maestría en la categoría de punto medio; además, alcanzó el nivel de aprendiz en las categorías de perpendicularidad y de mediatriz, esto se puede evidenciar en las respuestas dadas a las preguntas relacionadas con estos dos conceptos a lo largo del desarrollo de las actividades propuestas durante la implementación de la unidad curricular.

Para finalizar, se puede concluir que Federico, en la categoría de punto medio, mostró mayor avance, ya que alcanzó el nivel de maestría en tres de las cuatro dimensiones enmarcadas en la EpC. En la categoría de perpendicularidad logró el nivel de aprendiz en todas las dimensiones de comprensión y en la categoría de mediatriz, avanzó hasta el nivel de aprendiz; no obstante, en la dimensión de contenido solo consiguió uno de los dos descriptores, ya que no logró reconocer la mediatriz como lugar geométrico. En general, logró avanzar en su nivel de comprensión en todas las categorías y en cada una las dimensiones enmarcadas en la EpC, ya que en la mayoría quedó en aprendiz y en otras en maestría. Este avance se alcanzó, en gran medida, gracias al doblado de papel, que fue el medio que posibilitó la comprensión de conceptos geométricos en estos estudiantes.

### **Análisis del avance del proceso de comprensión del caso 3: Diana.**

La estudiante que se seleccionó para este caso, mostró avances significativos en su proceso de comprensión; se observó que es introvertida; incluso, al inicio del proceso, no hacía parte de los estudiantes focalizados; sin embargo, a medida que se avanzó en la aplicación de la unidad curricular fue mostrando dominio en el doblado de papel y en la comprensión de los conceptos trabajados, tanto así que en la actividad más abstracta de la fase de investigación guiada, ella demostró habilidad no solo para hacer la construcción de la mediatriz como lugar geométrico mediante el doblado de papel sino en el desarrollo de la guía; lo anterior será descrito con mayor detalle a continuación.

#### ***Fase de exploración.***

En esta fase se llevó a cabo la construcción de un conejo con doblado de papel, la cual se desarrolló en tres momentos, que se presentaron en la unidad curricular, capítulo cuatro. Diana, durante el primer momento (construcción de conejo), se mostró callada y poco participativa, pero muy atenta y concentrada en el trabajo propuesto; incluso, ayudó a sus compañeros de equipo con los dobleces en la construcción de figura; en la ilustración 74 se puede visualizar su construcción.



**Ilustración 74. Construcción conejo de Diana.**


Con relación a la actividad escrita, se observó que Diana respondió siete de las ocho preguntas conceptuales; pero de forma poco acertada con respecto a las intenciones de las preguntas. Por ejemplo, en la pregunta 2, que pedía los elementos que constituyen un cuadrado y que buscaba que el estudiante escribiera: diagonal, ángulo, vértice y lado, al frente de cada flecha, Diana respondió: “*triangulo, triagulo, triangulo, y, triangulo*”, respectivamente, lo que permite inferir que Diana, al observar la ilustración, se enfocó solo en esta figura. En la pregunta 3, la cual



hacía referencia a la figura formada por una diagonal del cuadrado y pedía que la dibujara, Diana escribió “cuadrado” y dibujó un triángulo, lo cual evidencia la poca comprensión de los conceptos de triángulo y de cuadrado; con esto se puede inferir que, para ella, un cuadrado tiene tres lados.


En la pregunta 6 (¿qué relación hay entre la base del triángulo y el dobléz marcado en el paso 2?, ¿por qué?), cuya intención era que el estudiante escribiera sobre la relación de perpendicularidad, Diana contestó: “que en la dos paso tiene la misma figura”; se deduce entonces que ella se remite a lo que observa al hacer la construcción y a la imagen que aparece en la actividad. En la pregunta 7 (¿cree que el dobléz realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales?, ¿por qué?), cuya intención era que mencionara mitad o partes iguales, la estudiante escribió “si porque tiene en mismo tamaño”, lo cual se aproxima a la respuesta acertada. Lo anteriormente descrito su puede observar en la ilustración 75.

2. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:




3. ¿Qué figura observa al hacer el primer dobléz? y ¿por qué? dibújela

cuadrado



6. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el dobléz marcado en el paso 2? Y ¿por qué?

que en la dos paso tiene la misma figura



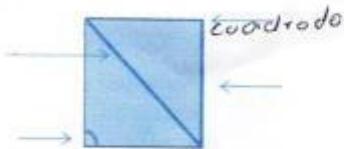
7. ¿Cree que el dobléz realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales? ¿por qué?

si Por que tiene en mismo tamaño

Ilustración 75. Actividad inicial de Diana.

En el segundo momento, se les envió a los padres de familia la actividad, para que la realizaran con sus hijos y contestaran las preguntas relacionadas. A continuación, en la ilustración 76, se muestra la actividad desarrollada por la madre de Diana.


1. Describe las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción.  
cuadrada

2. Escribe al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:  
 cuadrado


3. ¿Qué figura observa al hacer el primer dobléz? ¿Por qué? Dibújela  
un triángulo

4. ¿Cómo se llama el dobléz que le permitió hallar las figuras que mencionó en el paso anterior?  
un barco

5. Al hacer el segundo dobléz, ¿en cuántas partes queda dividida la hoja con la que se inició la construcción?  
en tres

6. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el dobléz marcado en el paso 2? ¿Por qué?  
Por que tiene la misma figura  


7. ¿Cree que el dobléz realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales? ¿Por qué?  
si

8. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el dobléz marcado en el paso 3? ¿Por qué?  
Por que se parece  


9. Hoy se construyó una carita de carrito, con doblado de papel. ¿Qué otras figuras ha construido?  
 \_\_\_\_\_

10. ¿Qué ha aprendido de matemáticas con doblado de papel?  
que es así lo mismo

11. ¿Le gusta construir figuras con doblado de papel?  
 Si Y NO \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Ilustración 76. Actividad autoridad académica madre de Diana.

De acuerdo con la ilustración 76, se puede concluir que la madre de familia respondió casi todas las preguntas, pero se evidencia poca formación académica, lo cual se corrobora con las respuestas dadas en la actividad. Por ejemplo, en la pregunta 2, la cual pide los elementos que constituyen un cuadrado, ella contestó: “cuadrodo”, esto da la impresión que desconoce los elementos de un cuadrado. En la pregunta 4 (¿cómo se llama el dobléz que le permitió hallar las figuras que mencionó en el paso anterior?), la madre escribió: “un barco”; esta respuesta no se acerca a la intención de la pregunta, es decir, una diagonal. En las preguntas 6 (¿qué relación hay entre la base del triángulo y el dobléz marcado en el paso 2?, ¿por qué?) y 7 (¿cree que el dobléz realizado en el paso 2 divide la base del triángulo en dos partes iguales?, ¿por qué?) ella

contestó: “*por que Tiene lo mismo Figura*” y “*si*”, respectivamente; en este caso se puede concluir que no estableció la relación pedida ni escribió ninguna razón para validarla.

Se consideró pertinente conocer la opinión de la madre de familia respecto a la actividad realizada; por la tanto, se enviaron en una nota algunas preguntas, para que fueran respondidas por el acudiente; con respecto a la pregunta: ¿cómo le pareció la actividad?, la madre contestó “*vien*”; cuando se le preguntó que si este tipo de actividades puede favorecer el aprendizaje de las matemáticas, ella escribió que: “*si ai doble de papel*”; ambas respuestas apoyan la deducción hecha anteriormente, y es que la madre tiene poca formación conceptual en geometría y carece de argumentos para validar sus respuestas. Esto se observa en la ilustración 77.

1. ¿Cómo le pareció la actividad?  
  vien  

2. ¿Cree que este tipo de actividades puede favorecer el aprendizaje de las matemáticas? ¿Por qué?  
  Si ai doble de papel  

**Ilustración 77. Opinión madre de Diana.**

En el tercer momento, se volvió a aplicar la actividad con los estudiantes para mejorar los dobleces en la construcción y reforzar los conceptos geométricos trabajados. A continuación, en la ilustración 78, se observa la construcción de Diana.




**Ilustración 78. Construcción de Diana en el tercer momento.**

De acuerdo con lo observado durante esta construcción, se puede deducir que Diana adquirió más habilidad en el doblado de papel y no necesitó el instructivo para hacer la figura. Además, al responder las preguntas, se observa que aumentó el número de aciertos, lo cual se evidencia en las respuestas dadas. Por ejemplo, en la pregunta 2, que pedía los elementos que constituyen un

cuadrado y que buscaba que la estudiante escribiera: diagonal, ángulo, vértice y lado, al frente de cada flecha, Diana respondió: “*diagonal, vertice y lado*”, aunque le faltó uno de los elementos, ubicó correctamente los tres que nombró. En la pregunta 3, la cual hacía referencia a la figura formada por una diagonal del cuadrado y pedía que la dibujara, Diana escribió “*veo un triangulo porque tiene 3 puntos*” y dibujó un triángulo, lo cual se acerca a la intención de la pregunta.


En la pregunta 6 (¿qué relación hay entre la base del triángulo y el dobles marcado en el paso 2?, ¿por qué?), cuya intención era que la estudiante escribiera sobre la relación de perpendicularidad, Diana respondió: “*Queson perpeculares*”; esto nos permite deducir que, aun cuando está mal escrita la idea, se acerca a la intención de la pregunta. En la pregunta 7 (¿cree que el dobles realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales?, ¿por qué?), cuya intención era que hablara de mitad o partes iguales, para identificar la aproximación al concepto de punto medio, la estudiante contestó “*si porque el triangulo primero en mas grande de los dos segundos*”; se puede concluir que Diana no se acercó a la respuesta correcta, pero sí mejoró con respecto a la dada en el primer momento. Lo anterior se puede visualizar en la ilustración 79.

2. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:




3. ¿Qué figura observa al hacer el primer dobles? y ¿por qué? dibújela

*veo un triangulo porque tiene 3 puntos*



6. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el dobles marcado en el paso 2? Y ¿por qué?

*queson perpeculares*



7. ¿Cree que el dobles realizado en el paso 2, divide la base del triángulo en dos partes iguales? ¿por qué?

*si porque el triangulo primero en mas grande de los dos segundos*

Ilustración 79. Actividad conejo momento 3 de Diana

### ***Fase de investigación guiada.***

Esta fase se desarrolló en seis momentos, en los que se realizaron las siguientes construcciones con doblado de papel: rana, corazón separador, portalápiz y mediatriz. Cada momento está detallado en la unidad curricular, capítulo cuatro.

En el primer momento, Diana se mostró interesada durante la lectura del cuento “los cuadrados soñadores”, dispuesta para hacer la construcción de la rana y las actividades inmersas en el cuento. Los dobleces le quedaron definidos y pulidos, tal como se observa la ilustración 80.



**Ilustración 80. Construcción de la rana de Diana.**

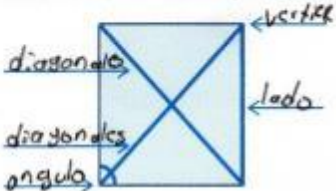
Con relación a las preguntas asociadas a los conceptos geométricos trabajados, se observó que Diana respondió todas las preguntas y fue progresando en su proceso de comprensión, tal como lo demuestran las respuestas dadas a algunas preguntas detonantes. Por ejemplo, en la pregunta 1, la cual buscaba que enunciara las características de la forma de la hoja, es decir, de un cuadrado, Diana respondió: “*una hoja de papel forma cuadrada*”; esta respuesta corresponde con la forma de la hoja, pero, la estudiante no mencionó todas sus características. En la pregunta 2, que pide los elementos que constituyen un cuadrado, la estudiante contestó: “*digonales, diagonales, angulo, vertice, lado*”, lo que corresponde correctamente con la intención de la pregunta; además, en relación a la actividad anterior, logró nombrar el elemento que le faltó.

La pregunta 4 (todos sus incisos) enunciaba que: si se ubica el cuadrado de tal manera que el primer doblez sea vertical, en cuántas partes queda dividido el lado superior e inferior, si son iguales, y si dicho doblez pasa por el punto medio de estos lados; Diana respondió respectivamente lo siguiente: “*dos*”, “*dos*”, “*si porque tiene lomismo tamaño*” y “*si porque se dobla porlamita*”; todas estas respuestas son acertadas y corresponden con las intenciones de las

preguntas. En la pregunta 5 (con sus dos incisos), la cual pretendía establecer la relación de perpendicularidad entre el doblez anteriormente mencionado y los lados superior e inferior, Diana, en ambos casos, respondió: “*son perpeculares*”; aunque la palabra no está escrita correctamente, se infiere, dadas las conversaciones con la estudiante, que trata de escribir perpendiculares, lo cual responde a la intención de las preguntas. Todo lo anteriormente detallado se observa en la ilustración 81.

1. Describa las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción.  
una hoja de papel forma cuadrada

2. Escriba al frente de cada flecha, los elementos que constituyen la figura que mencionó en el punto anterior:



4. Si se ubica el cuadrado de tal manera que el primer doblez sea vertical:

a. ¿En cuántas partes queda dividido el lado superior? dos

b. ¿En cuántas partes queda dividido el lado inferior? dos

c. ¿Son iguales esas partes en ambos lados? ¿Por qué? si porque tiene la misma longitud

d. ¿El doblez pasa por el punto medio del lado superior y del lado inferior? ¿Por qué? si porque se dobla por la mitad

5. Si se ubica el cuadrado de tal manera que el primer doblez sea vertical:

a. ¿Qué relación hay entre el primer doblez y el lado superior de la hoja de papel? son perpeculares

b. ¿Qué relación hay entre el primer doblez y el lado inferior de la hoja de papel? son perpeculares

**Ilustración 81. Actividad "Los Cuadrados soñadores" de Diana**

En el segundo momento, se hizo la construcción colectiva de la rana; Diana mejoró tanto los dobleces que, incluso, la rana le quedó más definida y refinada con relación a la primera construcción; de hecho, se puede inferir que comprendió los pasos para hacer la figura porque no necesitó el instructivo, es decir, el cuento. Además, logró hacerla con mayor agilidad. Dicha construcción se puede visualizar en la ilustración 82.



**Ilustración 82. Segunda construcción de la rana de Diana.**



En el tercer momento, durante la construcción del corazón separador con el doblado de papel, Diana construyó dobleces claros, definidos y refinados. La figura se visualiza en la ilustración 83.



Ilustración 83. Construcción corazón separador de Diana

Con relación a las preguntas asociadas a los conceptos geométricos: punto medio, perpendicularidad y mediatriz, Diana muestra progreso en la comprensión, lo cual está respaldado con las respuestas dadas a estos interrogantes. Por ejemplo, en la pregunta 4 (¿cómo se llama el punto donde se cortan los dos dobleces marcados en el paso 1?), Diana respondió: “*punto medio*”; esta respuesta corresponde con la intención de la pregunta. En la pregunta 5 (¿qué relación existe entre los dobleces que se hicieron en el paso 1?), la estudiante escribió: “*se encuentra en la mita*”; esto nos permite inferir que no logró establecer la relación de perpendicularidad; no obstante, la respuesta tiene validez.

En la pregunta 9 (¿cree que el doblez central vertical es una mediatriz de la base del rectángulo?, ¿por qué?), Diana respondió: “*si porque pasa por el punto medio del segmento*”; esta respuesta se acerca a la intención de la pregunta, pero, le falta especificar una de las condiciones para ser mediatriz. Por último, en la pregunta 12 (en el *paso 4* se lleva el vértice inferior al punto medio del lado superior, ¿por qué cree que ese punto se llama punto medio?), la estudiante contestó “*si porque parte un segmento en dos parte iguales*”; en este caso, se intuye que la respuesta corresponde a la intención de la pregunta, sin embargo, se nota que la estudiante tiene dificultades para escribir. Todo lo descrito se puede evidenciar en la ilustración 84.

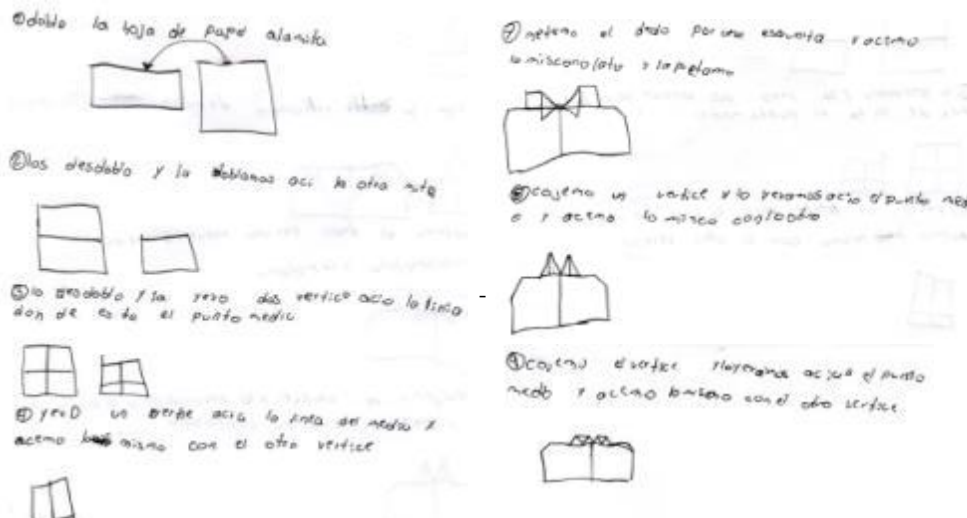
4. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan los dos dobleces marcados en el paso 1?  
punto medio
5. ¿Qué relación existe entre los dobleces que se hicieron en el paso 1?  
se encuentra en la mita
9. ¿Cree que el doblez central vertical es una mediatriz de la base del rectángulo? ¿Por qué?  
Si porque pasa por el punto medio del segmento
12. En el *paso 4* se lleva el vértice inferior al punto medio del lado superior. ¿Por qué cree que ese punto se llama punto medio?  
Si porque parte un segmento en dos parte iguales

En el cuarto momento, se hizo nuevamente la construcción del corazón separador. De acuerdo con lo observado, se puede deducir que Diana afianzó la habilidad con el doblado de papel, gracias a su empeño, dedicación, disposición y compromiso para hacer la figura. En la ilustración 85 se puede observar del corazón separador que Diana realizó.



**Ilustración 85. Segunda construcción corazón separador de Diana**

Después de realizar el corazón separador por segunda vez, se solicitó a los estudiantes que elaboraran su propio instructivo. En la ilustración 86 se puede observar que Diana enumeró 10 pasos para hacer la figura, además, añadió un dibujo para cada una de las instrucciones; en general, trató de utilizar terminología matemática, por ejemplo: “mita, vertice, punto medio, 180 grado”. Aunque la lectura del instructivo no permite hacer el corazón separador, los primeros pasos diseñados por ella, posibilitan avanzar correctamente en la construcción de la figura; además, los dibujos hechos por la estudiante podrían permitir una figura muy cercana a la deseada.





-  
-  
-

Vale la pena resaltar algunos de los pasos que Diana escribió. Por ejemplo, en el paso 1 mencionó: *“dobla la hoja de papel alamita”*, y en el paso 2 precisó: *“los dosdoblo y la doblamos aci la otra mita”*; con estas instrucciones y los dibujos hechos por Diana, se puede hacer el primer paso del instructivo presentado por las investigadoras en el tercer momento. En el paso 3, Diana escribió: *“lo desdoblo y la yevo dos vértice hacia la linia don de esta el punto medio”*; esta instrucción y los dibujos realizados se acercan mucho al doblado correcto que se debe construir.

La instrucción dada en el paso 5: *“lo dobo 180 grado y yevoel vertice acia el punto medio”*, junto con los dibujos de los pasos 5 y 6, permiten observar el uso adecuado de la expresión *“punto medio”*. Por último, en el paso 9 ella escribió: *“cojemo el vertice yloyevamos aciaa el punto medio yacemos lomismo con el otro vertice”*; esta instrucción, apoyada con los dibujos de los pasos 8 y 9, también permite corroborar el uso adecuado de la expresión *“punto medio”*. Es importante aclarar que este tipo de producciones (textos instructivos) tiene un alto nivel de complejidad y son poco trabajados en primaria; aun así, Diana logró elaborar un texto instructivo con una estructura adecuada y entendible.

En el quinto momento, se hizo la construcción del portalápiz. Diana logró construir los seis módulos de manera correcta y los unió, de tal forma que la figura le quedó pulida, definida y refinada. En la ilustración 87 se puede observar la construcción de Diana.



Después de terminar el portalápiz, Diana respondió las preguntas asociadas a la construcción y a los conceptos geométricos: punto medio, perpendicularidad y mediatriz. En la ilustración 88 se pueden observar algunas de sus respuestas.

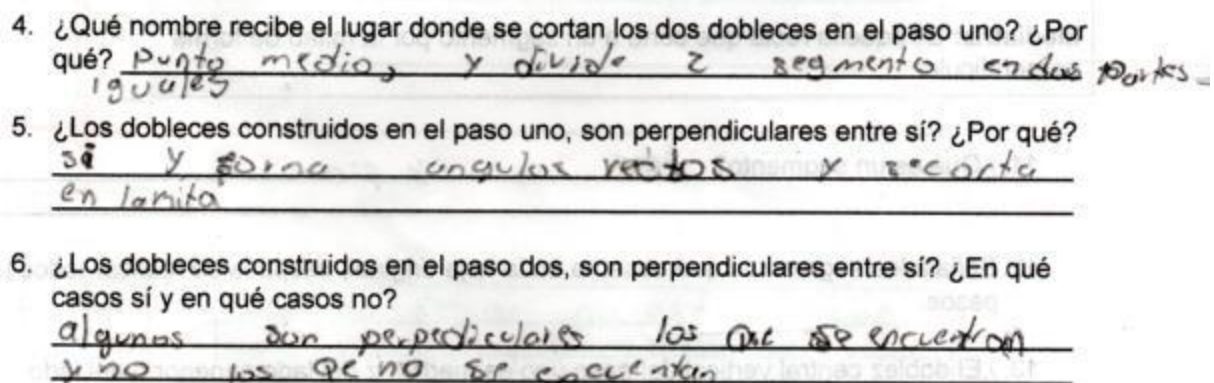
- 
4. ¿Qué nombre recibe el lugar donde se cortan los dos dobleces en el paso uno? ¿Por qué? punto medio, y divide 2 segmento en dos partes iguales
5. ¿Los dobleces construidos en el paso uno, son perpendiculares entre sí? ¿Por qué? sí y forma ángulos rectos y se corta en lamita
6. ¿Los dobleces construidos en el paso dos, son perpendiculares entre sí? ¿En qué casos sí y en qué casos no? algunos son perpendiculares los que se encuentran y no los que no se encuentran

Ilustración 88. Actividad portalápiz de Diana, preguntas 4, 5 y 6.

De acuerdo con la ilustración 88, se puede concluir que Diana progresó en su nivel de comprensión con respecto a los conceptos de punto medio y perpendicularidad, esto se corrobora con las respuestas dadas a algunos de los interrogantes. Por ejemplo, en la pregunta 4 (¿qué nombre recibe el lugar donde se cortan los dos dobleces en el paso uno?, ¿por qué?), Diana contestó: “*punto medio, y divide 2 segmento en dos partes iguales*”; esta respuesta corresponde completamente con la intención de la pregunta. En la pregunta 5 (¿los dobleces construidos en el paso uno, son perpendiculares entre sí?, ¿por qué?), cuya intención era que respondieran que dos segmentos son perpendiculares cuando forman ángulos rectos o ángulos de  $90^\circ$ , la estudiante respondió acertadamente: “*sí y forma ángulos rectos y se corta en lamita*”.

En la pregunta 6 (¿los dobleces construidos en el paso dos, son perpendiculares entre sí?, ¿en qué casos sí y en qué casos no?), se buscaba que los estudiantes pudieran identificar cuándo dos segmentos son o no son perpendiculares, Diana escribió: “*algunos son perpendiculares lo que se*

encuentran y no los que no se encuentran”; en este caso, se observa que la estudiante hizo una lectura adecuada del mosaico de pliegues. A continuación, en la ilustración 89 se pueden observar las respuestas dadas a las preguntas 15 y 16.

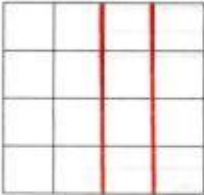
15. ¿Los dobleces marcados en el paso uno son mediatrices uno del otro?

Si X No      ¿Por qué? Por que se encuentran en la misma  
formando un ángulo recto

---

16. Al desdoblar la hoja a su forma original, se ven marcas dejadas por los dobleces, las cuales se nombran como plano de cicatrices o mosaico de pliegues.


Observe las siguientes imágenes y compárelas con su hoja. Determine si las líneas rojas son mediatrices entre sí y explique. Recuerde observar que la mediatriz es una perpendicular que divide el segmento en dos partes iguales.



No por que no se encuentran

\_\_\_\_\_

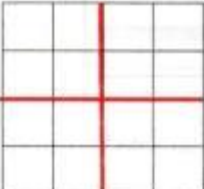
\_\_\_\_\_



una si y la otra no

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



si por que se encuentran en la  
misma formando un ángulo  
recto

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ilustración 89. Actividad portalápiz de Diana, preguntas 15 y 16.

De acuerdo con la ilustración 89, se puede concluir que Diana logró avanzar en su nivel de comprensión con relación al concepto de mediatriz; las respuestas dadas a los interrogantes 15 y 16, permiten confirmar lo anterior. Esto es, en la pregunta 15 (¿los dobleces marcados en el paso uno son mediatrices uno del otro?, ¿Por qué?), Diana respondió: “*si porque se encuentra en lamita for mando agulo reto*”. La pregunta 16, que se relaciona con el concepto de mediatriz, buscaba que los estudiantes determinaran si las líneas rojas eran mediatrices entre sí y que justificaran sus respuestas; en este caso, Diana hizo una lectura adecuada de las imágenes presentadas en la pregunta y pudo reconocer cuáles eran mediatrices y cuáles no.

Se resaltan los argumentos dados en cada una de las imágenes: en la primera respondió “*no porque no se encuentra*” (en este caso los dobleces son paralelos); en la segunda contestó: “*una sí y la otra no*” (en este caso, solo el doblez vertical es mediatriz del doblez horizontal) y en la tercer escribió: “*si porque se encuentra en la mita formando angulo recto*”. Es importante aclarar que aun cuando las respuestas son acertadas en cuanto a la intención de cada pregunta, es necesario que la estudiante mejore su proceso de escritura y redacción.


En el sexto momento, Diana halló el punto medio del segmento AB el cual nombró M; después, hizo un doblez perpendicular que pasó por dicho punto; sobre este doblez ubicó cuatro puntos ( $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$ ); por último, unió cada uno de ellos con los extremos del segmento AB, construyendo la mediatriz como lugar geométrico, mediante el doblado de papel. En la ilustración 90, se puede visualizar la construcción hecha por Diana.



**Ilustración 90. Construcción mediatriz de Diana**


Durante esta actividad también se pretendía que los estudiantes respondieran las preguntas que estaban inmersas en la guía para construir la mediatriz con doblado de papel. A continuación, en la ilustración 91, se muestran las respuestas de las preguntas 3 y 4 de Diana.

3. Nombre los dos puntos con las letras A y B (en mayúsculas).



- ¿Cómo se puede hallar el punto medio del segmento AB?  
*lo doblo por la mita*

4. Sobreponga los puntos A y B (uno sobre el otro) para construir un nuevo segmento.




- ¿Cómo se llama el lugar donde se intersectan los dos segmentos?  
*punto medio del segmento AB*

Ilustración 91. Actividad mediatriz con doblado de papel. Preguntas 3 y 4 de Diana.

De acuerdo con la ilustración 91, se puede concluir que Diana logró comprender el concepto de punto medio, mediante el doblado de papel, lo cual se corrobora con las respuestas dadas a las preguntas: 3 (¿cómo se puede hallar el punto medio del segmento AB?), en la que Diana contestó “*lo doblo por la mita*” y 4 (¿cómo se llama el lugar donde se intersectan los dos segmentos?), en la que la estudiante respondió: “*punto medio del segmento AB*”; lo anterior se reafirma con las repuestas de la pregunta 5, en sus primeros dos incisos (¿M es el punto medio del segmento AB?, ¿por qué?), en los que Diana escribió: “*si*”, “*porque se encuentra en el medio*”. Lo anterior se puede observar en la ilustración 92.

5. Nombre *M* el punto de intersección entre el doblez hecho y el segmento *AB*.



- ¿M es el punto medio del segmento *AB*? *si*
- ¿Por qué? *por que se encuentra en el medio*
- ¿El doblez construido es perpendicular al segmento *AB*? *si*
- ¿Por qué? *porque forman angulos rectos*
- ¿El doblez construido será una mediatriz del segmento *AB*? *si*
- ¿Por qué? *esto es el punto medio perpendicular*

Ilustración 92. Actividad mediatriz con doblado de papel. Pregunta 5 de Diana.

Según la ilustración 92, Diana logró la comprensión del concepto de mediatriz, teniendo en cuenta los conceptos de punto medio y perpendicularidad; esto se corrobora con las respuestas dadas a las preguntas: ¿el doblez construido es perpendicular al segmento AB?, ¿por qué?, en la que Diana contestó: “*si porQue formo angulos retos*”, y ¿el doblez construido será una mediatriz del segmento AB?, ¿por qué?, en la que la estudiante respondió: “*si [porque] esta en el punto medio perpeccular*”. Diana logró la comprensión de estos conceptos pero, como se dijo anteriormente, tiene dificultad en su proceso de escritura.

De acuerdo con la ilustración 93, se puede concluir que Diana logró identificar el concepto de mediatriz como lugar geométrico, lo cual se evidencia en las repuestas dadas a la pregunta 9 en cada uno de sus incisos; por ejemplo, en el a (¿cuáles son las características de los triángulos  $ABM_2$ ,  $ABM_3$  y  $ABM_4$ ?), Diana contestó: “*todos tienen dos lados iguales*”; esta respuesta corresponde totalmente con la intención de la pregunta. En el caso de los incisos b, c, d, en los que se buscaba que se estableciera la equidistancia entre los segmentos que se forman con los extremos del segmento AB y los puntos marcados en su mediatriz, Diana respondió que tienen la misma distancia o tamaño. En el inciso e (¿los puntos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$  están a la misma distancia de A y de B?, ¿por qué?), Diana escribió: “*si [porque] estos punto estan a la mismadistancia de A y B*”. Finalmente, en el inciso f (¿qué características tienen estos puntos con respecto a los puntos A y B?), Diana contestó: “*todos los puntos estan ala misma distacia de AyB*”.

Lo anterior se puede confirmar con las respuestas dadas a la pregunta 10 (inciso a: ¿es la mediatriz un lugar geométrico?, ¿por qué?; inciso b: ¿cuál es la característica que cumplen los puntos de la mediatriz para ser un lugar geométrico?); en este caso, Diana contestó: “*si [porque] todos lo puntos del segmento esta ala misma distancia de AyB*” y “*todo los punto del segmento esta ala misma distancia de AyB*” respectivamente; aunque su proceso de escritura no es el mejor, las respuestas corresponden con la intención de las preguntas.

9. Repita los pasos 5, 6 y 7, con otros tres puntos diferentes ( $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$ ).
- ¿Cuáles son las características de los triángulos  $ABM_2$ ,  $ABM_3$  y  $ABM_4$ ?  
*todos tienen dos lados iguales*
  - ¿Los lados  $AM_2$  y  $BM_2$  son iguales? Si, ¿Por qué? *tiene la misma distancia*
  - ¿Los lados  $AM_3$  y  $BM_4$  son iguales? Si, ¿Por qué? *tiene el mismo tamaño*

Finalmente, se les entregó a los estudiantes un esquema con los conceptos punto medio, segmentos perpendiculares y mediatriz de un segmento, para que ellos asociaran cada uno con la definición correcta. En la ilustración 94 se presentan los conceptos resaltados por Diana.

<b>PUNTO MEDIO</b>	Es un punto ubicado en cualquier parte del segmento.	Es el punto que divide un segmento por la mitad.	Es el punto que divide un segmento en dos partes iguales.	Es el punto que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos de un segmento.
<b>SEGMENTOS PERPENDICULARES</b>	Son dos segmentos que nunca se cortan en un punto.	Son dos segmentos que se cortan en un punto.	Son dos segmentos que se cortan en un punto formando ángulos de noventa grados.	Son dos segmentos que se cortan en un punto formando ángulos rectos.
<b>MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO</b>	Es una recta que corta a un segmento por la mitad.	Es una recta que corta a un segmento por la mitad de forma perpendicular.	Es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.	Lugar geométrico de los puntos que son equidistantes a los dos extremos de un segmento.

**Ilustración 94. Esquema de los conceptos de Diana**

Diana coloreó respuestas válidas para los conceptos de punto medio y segmentos perpendiculares, las cuales están sustentadas con las respuestas dadas durante la aplicación de la unidad curricular, y una correcta para mediatriz de un segmento, aunque no seleccionó el concepto de mediatriz como lugar geométrico; de todos modos, se concluye que durante el desarrollo de la actividad sobre la construcción y definición de la mediatriz, Diana se acercó a



este concepto como lugar geométrico, el cual sabemos que es complejo para los estudiantes de primaria.

De acuerdo con las ilustraciones y anotaciones anteriores, se puede concluir que Diana logró avances en la comprensión de los conceptos geométricos: punto medio, segmentos perpendiculares y mediatriz de un segmento como lugar geométrico. Estas ideas se ampliarán en las rúbricas de evaluación del proceso, que se presentarán más adelante.

### ***Fase de proyecto final de síntesis.***

La feria del doblado de papel se realizó con la comunidad educativa de la Institución Educativa Churidó Pueblo; es decir, se invitaron a todos los estudiantes, a padres de familia y a profesores, en general. En las fotos de la ilustración 95, se pueden observar otros escenarios de la feria.



**Ilustración 95. Feria del doblado de papel 3.**

Diana orientó el stand de la construcción de la mediatriz en la feria; de hecho, estaba en condiciones de explicarles a los asistentes cómo construir la mediatriz como lugar geométrico, haciendo referencia a los conceptos geométricos abordados durante el proceso, sin necesidad de apoyarse en el instructivo.

En la entrevista oral que se le hizo a Diana, respondió con cierto nivel de comprensión algunas de las preguntas. En el siguiente diálogo, se evidencian las respuestas dadas:

Entrevistador: ¿Para usted qué es el punto medio de un segmento?

Diana: “*es un punto que corta un segmento por dos partes iguales*”.



Entrevistador: ¿Cómo se puede construir un punto medio de un segmento con doblado de papel?

Diana: *“doblándolo por la mitad y hacemos el punto medio en la mitad”*

Entrevistador: ¿Para usted cuándo dos segmentos son perpendiculares?

Diana: *“cuando se encuentran en un punto formando un ángulo recto”*

Entrevistador: ¿Cómo se pueden construir dos segmentos perpendiculares con doblado de papel?

Diana: *“haciendo dos puntos y trazándolos con el doblado de papel”*.

Entrevistador: ¿Para usted qué es la mediatriz de un segmento?

Diana: *“es un segmento que pasa por el punto medio formado un ángulo recto”*.

Entrevistador: ¿Cómo se puede construir la mediatriz de un segmento con doblado de papel?

Diana: *“en la hoja de papel hacemos dos puntos, los nombramos A y B mayúscula, con el doblado de papel ponemos entre B y A, bueno, y hacemos que A y B se encuentren con el doblado de papel, por el punto medio hacemos un punto la nombramos M, luego arriba ponemos  $M_1$ , y trazamos con el doblado de papel una línea  $M_1$  y A, hacemos lo mismo con  $M_1$  y B, más arriba ponemos  $M_2$  y hacemos lo mismo que hicimos con  $M_1$  con el doblado de papel doblamos  $M_2$  con A, también lo hacemos con  $M_2$  y B, abajo ponemos un punto y lo nombramos  $M_3$ , con el doblado de papel trazamos otra línea y  $M_3$  con B, y más abajo nombramos por último  $M_4$ , y con el doblado de papel trazamos  $M_4$  con A y  $M_4$  con B, y ya tenemos la mediatriz”*.

Entrevistador: ¿Cree usted que la mediatriz es un lugar geométrico?, ¿Por qué?

Diana: *“si, porque todos los puntos del segmento de la mediatriz se encuentran a la misma distancia de A y B”*.

Entrevistador: ¿Qué aprendió durante este proceso?

Diana: “*todo lo que he aprendido, como el conejo, la mediatriz, el corazón, la ranita, el portalápiz, muchas cosas*”.

Entrevistador: ¿El doblado de papel le permitió aprender conceptos de geometría?, ¿Por qué?

Diana: “*que todos los punto de la mediatriz se encuentran a la misma distancia de A y B, punto medio, segmentos perpendiculares, la mediatriz, lugar geométrico, triángulos, ángulos rectos, segmentos*”.

De acuerdo con la entrevista oral, se puede concluir que Diana comprendió los conceptos de punto medio de un segmento y segmentos perpendiculares; además, durante el proceso, logró hacer todas las construcciones y apoyar a sus compañeros en las mismas; sin embargo, al momento de ser grabada en la entrevista, le faltaron argumentos para explicar cómo hacerlos con doblado de papel. En cuanto al concepto de mediatriz, se puede afirmar que Diana logró comprenderlo e identificarlo como lugar geométrico; además, fue capaz de explicar cómo hacer la mediatriz como lugar geométrico con doblado de papel, aunque le falta mejorar la terminología geométrica.

***Clasificación general en los niveles de comprensión.***

A continuación, se subrayan los desempeños logrados por Diana, en la dimensión de contenido, fundamentado en el marco de la EpC.

**Tabla 20. Dimensión de contenido de Diana**

<b>Niveles</b>	<b>Nivel 1. Ingenuo</b>	<b>Nivel 2. Novato</b>	<b>Nivel 3. Aprendiz</b>	<b>Nivel 4. Maestría.</b>
<b>Categorías</b>				
Concepto de punto medio	No identifica el concepto de punto medio.	Identifica el concepto de punto medio.	Define el concepto de punto medio.	<b><u>Explica el concepto de punto medio en contextos matemáticos y extra matemáticos.</u></b>
Concepto de perpendicularidad	No identifica el concepto de perpendicularidad.	Identifica el concepto de perpendicularidad.	Define el concepto de perpendicularidad.	<b><u>Explica el concepto de perpendicularidad en contextos matemáticos y</u></b>

				<u>extra matemáticos.</u>
Concepto de mediatriz	Desconoce el concepto de mediatriz.	Define erróneamente el concepto de mediatriz.	<u>Establece que la mediatriz es una perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.</u>  <u>Reconoce la mediatriz como lugar geométrico.</u>	Explica las características de la mediatriz en contextos matemáticos y extra matemáticos.  <u>Define el concepto de mediatriz como lugar geométrico.</u>

De acuerdo con la tabla 20, se puede concluir que Diana, durante el proceso, logró comprender los conceptos de punto medio y de perpendicularidad, lo cual se evidencia en las construcciones realizadas, en las respuestas dadas en algunas de las actividades y en la respuesta dada en la entrevista oral; por lo anterior, se puede ubicar a Diana en el nivel de maestría en las categorías de punto medio y de perpendicularidad. Además, en la categoría de mediatriz, alcanzó dos descriptores del nivel de aprendiz y uno del nivel de maestría.

A continuación, se subrayan los desempeños logrados por Diana, en la dimensión de métodos, con respecto al marco de la EpC.

Tabla 21. Dimensión de métodos de Diana

<b>Niveles</b> <b>Categorías</b>	<b>Nivel 1.</b> <b>Ingenuo</b>	<b>Nivel 2.</b> <b>Novato</b>	<b>Nivel 3.</b> <b>Aprendiz</b>	<b>Nivel 4.</b> <b>Maestría.</b>
Concepto de punto medio	No construye el punto medio de un segmento con doblado de papel.	Construye erróneamente el punto medio de un segmento con doblado de papel.	Construye el punto medio de un segmento con doblado de papel.	<u>Explica cómo se construye un punto medio de un segmento con doblado de papel.</u>
Concepto de perpendicularidad	No construye dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.	Construye erróneamente dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.	<u>Construye dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.</u>	Explica cómo se construyen dos segmentos perpendiculares con doblado de papel.

Concepto de mediatriz	No construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.	Construye erróneamente la mediatriz de un segmento con doblado de papel.	<b><u>Construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.</u></b>  <b><u>Construye puntos en la mediatriz que equidistan de los extremos del segmento.</u></b>	Explica cómo se construye la mediatriz de un segmento con doblado de papel.  <b><u>Explica cómo se construyen puntos en la mediatriz que equidistan de los extremos del segmento.</u></b>
-----------------------	--	--	--	---

Según la tabla 21, se puede visualizar que Diana alcanzó el nivel de maestría en la categoría de punto medio, el nivel de aprendiz en la categoría de perpendicularidad y en la categoría de mediatriz logró los dos descriptores del nivel de aprendiz y un descriptor del nivel de maestría. Diana, en la entrevista oral, explica cómo construir la mediatriz como lugar geométrico; sin embargo, se le dificulta explicar claramente cómo se construye la mediatriz mediante el doblado de papel.

En la siguiente tabla se subrayan los desempeños logrados por Diana, en la dimensión de propósito, considerando el marco de la EpC.

**Tabla 22. Dimensión de propósito de Diana**

<b>Niveles</b>	<b>Nivel 1. Ingenuo</b>	<b>Nivel 2. Novato</b>	<b>Nivel 3. Aprendiz</b>	<b>Nivel 4. Maestría.</b>
<b>Concepto de punto medio</b>	No identifica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	Identifica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.	<b><u>Explica las características del punto medio en una construcción con doblado de papel.</u></b>
<b>Concepto de perpendicularidad</b>	No identifica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características de la perpendicularidad en una	Identifica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.	<b><u>Explica las características de la perpendicularidad en una construcción con doblado de papel.</u></b>

		construcción con doblado de papel.		
Concepto de mediatriz	No identifica las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	Identifica erróneamente o de manera incompleta las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	Identifica las características de la mediatriz en una construcción con doblado de papel.	<b><u>Explica las características de la mediatriz como lugar geométrico en una construcción con doblado de papel.</u></b>

De acuerdo a la tabla 22, se puede concluir que Diana alcanzó el nivel de maestría en las categorías de punto medio, de perpendicularidad y de mediatriz, ya que logró explicar, de manera escrita y oral, las características de cada concepto utilizando argumentos válidos. En este caso, se observó también que dichas explicaciones se lograron gracias al uso del doblado de papel, el cual se convirtió en un medio para la comprensión de conceptos geométricos.

En la tabla 12 se subrayan los desempeños logrados por Diana, en la dimensión de formas de comunicación, de acuerdo con el marco de la EpC.

**Tabla 23. Dimensión de formas de comunicación de Diana**

<b>Niveles</b> <b>Categorías</b>	<b>Nivel 1.</b> <b>Ingenuo</b>	<b>Nivel 2.</b> <b>Novato</b>	<b>Nivel 3.</b> <b>Aprendiz</b>	<b>Nivel 4.</b> <b>Maestría.</b>
Concepto de punto medio	No expresa el concepto de punto medio.	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de punto medio.	Expresa, de manera escrita, el concepto de punto medio con un lenguaje no matemático.	<b><u>Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de punto medio con lenguaje matemático.</u></b>
Concepto de perpendicularidad	No expresa el concepto de perpendicularidad.	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de perpendicularidad.	<b><u>Expresa, de manera escrita, el concepto de perpendicularidad con un lenguaje matemático.</u></b>	Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de perpendicularidad con lenguaje matemático.
Concepto de mediatriz	No expresa el concepto de mediatriz.	Expresa erróneamente o de manera incompleta el concepto de mediatriz.	Expresa, de manera escrita, el concepto de mediatriz con un lenguaje matemático.	<b><u>Expresa, de manera escrita y oral, el concepto de mediatriz con lenguaje matemático.</u></b>

Según la tabla 23, se puede inferir que Diana alcanzó el nivel de maestría en las categorías de punto medio y de mediatriz, pero, en la categoría de perpendicularidad, llegó al nivel de aprendiz; esto se debe a que en la entrevista oral se le dificultó expresar este concepto. Esta caracterización final está fundamentada en el desarrollo de las actividades propuestas durante la implementación de la unidad curricular.

Para finalizar, se puede concluir que Diana, en la categoría de punto medio, logró mayor avance en su nivel de comprensión, alcanzando el nivel de maestría en las cuatro dimensiones de comprensión de la EpC. En la categoría de perpendicularidad alcanzó el nivel de maestría en las dimensiones de contenido, propósito y formas de comunicación, pero, en la dimensión de métodos, llegó hasta el nivel de aprendiz porque tuvo dificultades en explicar algunas construcciones durante la entrevista. Por último, en la categoría de mediatriz avanzó al nivel a maestría en las dimensiones de propósito y formas de comunicación, y en las dimensiones de contenido y métodos llegó hasta aprendiz pero alcanzando uno de los dos descriptores de maestría en cada dimensión. En general, la estudiante tuvo un avance significativo en su nivel de comprensión de los conceptos objeto de estudio, considerando todas las categorías en cada una las dimensiones enmarcadas en la EpC, ya que en la mayoría quedó en maestría, algunas en aprendiz y otras entre aprendiz y maestría.

## Capítulo 6

### Conclusiones y Recomendaciones

En este capítulo se presentan las principales conclusiones del estudio, las cuales surgieron del análisis del proceso de comprensión de los casos 1, 2, y 3, después de vivenciar el trabajo de campo. Se da respuesta a la pregunta de investigación y se analiza la consecución de los objetivos; así mismo, se plantean algunos aportes a la Educación Matemática y algunas líneas de investigación que se generan con el estudio. Finalmente, se presentan algunas recomendaciones para el abordaje de la unidad curricular y su evaluación en el aula de clase.

#### Conclusiones

##### **Respuesta a la pregunta de investigación.**

La pregunta de investigación que se planteó en este estudio, fue la siguiente: ¿de qué manera comprenden los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel? Para dar respuesta a este interrogante, se diseñó una unidad curricular, enmarcada en la EpC, cuyas actividades se desarrollaron con el doblado de papel, como medio que podría posibilitar la comprensión de conceptos geométricos.

Esta unidad se diseñó en tres fases: fase de exploración, fase de investigación guiada y fase de proyecto final de síntesis. Para cada una de las actividades realizadas en las dos primeras fases, se crearon instructivos, con imágenes propias, para cada una de las construcciones con doblado de papel; además, se diseñaron conjuntos de preguntas intencionadas, relacionadas con los conceptos geométricos objeto de estudio y con el mosaico de pliegues de cada construcción. Adicionalmente, para refinar los dobleces y reforzar los conceptos geométricos, se hizo necesario hacer una puesta en común de algunas de las actividades, instructivos y construcciones. Para el caso de la fase de proyecto final de síntesis, se organizó la feria del doblado de papel en la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo.

Después de diseñar y revisar la unidad curricular, se aplicó con los estudiantes del grado cuarto de dicha institución. El trabajo de campo nos permitió evaluarla, hacerle algunos ajustes y refinarla. A continuación, se detallará el proceso de aplicación de la unidad curricular.

La fase de exploración se realizó en tres momentos, en los cuales se desarrolló la construcción de un conejo con doblado de papel. El primero fue la actividad inicial, en la cual se entregó el instructivo para realizar la figura y, posteriormente, se respondieron las preguntas asociadas. En el segundo, se envió la misma actividad para ser desarrollada en casa con padres, hermanos o acudientes, con el propósito de conocer la autoridad académica de los estudiantes; teniendo en cuenta que el instructivo enviado solo tenía las imágenes, se buscaba que los participantes explicaran cómo hacer la figura en el hogar. Finalmente, en el tercer momento, se hizo una puesta en común de las respuestas, para hacer el análisis de fortalezas o debilidades del proceso.

La fase de investigación guiada se desarrolló en seis momentos. En el primero, se socializó el cuento “Los cuadrados soñadores”, el cual fue una producción de las investigadoras; este contenía las instrucciones para construir una rana con doblado de papel; posteriormente, se entregaron las preguntas intencionadas para ser resueltas por los estudiantes. En el segundo, se hizo la puesta en común de la construcción de la rana, por ello no se necesitó ningún instructivo, que para este caso era el cuento. En el tercero, se entregó el instructivo para hacer un corazón separador, el cual se construyó dos veces para ayudar a refinar los dobleces realizados y para contribuir a las respuestas de las preguntas intencionadas.

En el cuarto, se invitó a los estudiantes a construir nuevamente el corazón separador con doblado de papel, recordando entre todos el paso a paso; luego, se motivó a los participantes a que escribieran, de manera individual, su propio instructivo. En el quinto, se entregó el instructivo y seis hojas de papel (de forma cuadrada) para hacer el portalápiz con doblado de papel. Es importante resaltar que el ensamblaje de esta figura es complejo, especialmente el último módulo; después de terminar el portalápiz, se hizo un módulo adicional para hacer la lectura del mosaico de pliegues, la cual permite dar respuesta a las preguntas asociadas a los conceptos geométricos objeto de estudio. Por último, en el sexto momento, se hizo la construcción de la mediatriz con doblado de papel; se subraya que este concepto siempre estuvo inmerso en las construcciones y preguntas analizadas durante todo el proceso; se diseñó una



guía, con instrucciones y preguntas, para la construcción de la mediatriz y una aproximación al concepto como lugar geométrico. Por último, se diseñó un esquema de conceptos (punto medio, perpendicularidad y mediatriz) que contenía definiciones erradas o válidas para cada concepto, con el objetivo de que los estudiantes relacionaran los conceptos mencionados con una definición correcta.

En la fase de proyecto final de síntesis, se materializó la feria del doblado de papel con la participación de toda la comunidad educativa (padres de familia, estudiantes de las dos jornadas, maestros en general y personal de apoyo). En este evento, los estudiantes focalizados lideraron los cinco stands donde expusieron con fluidez y dominio del lenguaje geométrico, las construcciones realizadas en las fases anteriores del trabajo de campo, explicaron el paso a paso e invitaron a los asistentes a apreciar las figuras expuestas.

Con respecto al doblado de papel, se observó que propició la comprensión de los conceptos de: vértice, segmento, diagonal, cuadrado, ángulo recto, punto medio, perpendicularidad, mediatriz, entre otros. Lo anterior se pudo concluir porque se observó que los estudiantes, a medida que se avanzaba en el trabajo de campo, empezaron a involucrar estos términos en su lenguaje, para referirse a objetos geométricos.

Por ejemplo, en el caso de Diana, cuando realizó la entrevista, ella manifestó lo siguiente frente al concepto de punto medio: *“es un punto que corta un segmento por dos partes iguales”*; con respecto al interrogante cuándo dos segmentos son perpendiculares, la participante precisó *“cuando se encuentran en un punto formando un ángulo recto”*; cuando se le preguntó por mediatriz, ella manifestó que: *“es un segmento que pasa por el punto medio formado un ángulo recto”*; adicionalmente, cuando se le preguntó que si la mediatriz es un lugar geométrico, ella respondió: *“si, porque todos los puntos del segmento de la mediatriz se encuentran a la misma distancia de A y B”*, para este caso, A y B son los extremos del segmento inicial. Lo anterior corrobora que los estudiantes comprenden con más facilidad cuando tienen la posibilidad de visualizar, tocar, experimentar y manipular los objetos geométricos mediante el doblado de papel. En este sentido, partir de lo concreto para aproximarse a lo abstracto, jugó un papel fundamental en los procesos de comprensión de los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo.

Además, se pudo observar que el doblado de papel generó motivación en los estudiantes, lo cual se vio reflejado en la atención, participación, disponibilidad y compromiso demostrados durante el trabajo de campo; incluso, el grupo con el cual se desarrolló la unidad curricular asistió a la Institución Educativa en momentos extra clase.

Otro aspecto importante del doblado de papel, es que puede servir como herramienta para potenciar la motricidad fina. En el caso de Alfredo, que es un niño con necesidades educativas especiales, se observó que logró avanzar al nivel de aprendiz en la dimensión de método (doblado de papel), lo cual fue un gran logro, puesto que mejoró notablemente en su motricidad fina al realizar las construcciones con doblado de papel. También se resalta que el participante pudo avanzar al nivel de novato, en la comprensión del concepto de punto medio, dado que pudo relacionarlo con la palabra “*mitad*”.

Por otro lado, para evaluar la unidad curricular y establecer el avance en la comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes, se construyó una rúbrica considerando las dimensiones del marco de la EpC: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, y los niveles: ingenuo, novato, aprendiz y maestría. En esta rúbrica se establecieron tres importantes categorías de análisis: punto medio, perpendicularidad y mediatriz, dado que eran los conceptos básicos objeto de estudio. Esta rúbrica permitió hacer la evaluación diagnóstica continua de los estudiantes; es decir, nos permitió a nosotras, como investigadoras, analizar el proceso de comprensión de los estudiantes a medida que desarrollaban las actividades de la unidad curricular.

En el caso de Federico, por ejemplo, se pudo determinar que en la categoría de punto medio, mostró mayor avance, ya que alcanzó el nivel de maestría en tres de las cuatro dimensiones enmarcadas en la EpC; en la categoría de perpendicularidad, logró el nivel de aprendiz en todas las dimensiones de comprensión y en la categoría de mediatriz, avanzó hasta el nivel de aprendiz; no obstante, en la dimensión de contenido, solo consiguió uno de los dos descriptores, ya que no logró reconocer la mediatriz como lugar geométrico.

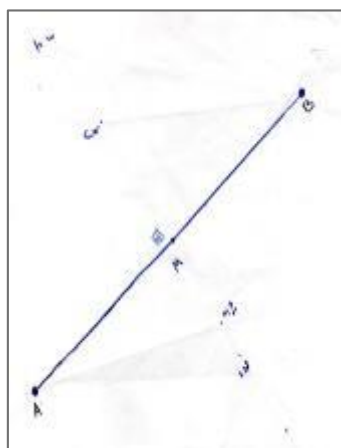
Lo anterior nos permite concluir que la pregunta de investigación se respondió. Los estudiantes comprenden el concepto de mediatriz, desde las dimensiones de contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, a partir de la comprensión de los conceptos de punto

medio y perpendicularidad, entre otros, y gracias al uso del doblado de papel como medio que propició la visualización y experimentación de objetos geométricos. Así mismo, la rúbrica permitió describir el proceso que llevaron a cabo los estudiantes para alcanzar la comprensión de los conceptos: punto medio, perpendicularidad y mediatriz.

### **Consecución de los objetivos.**

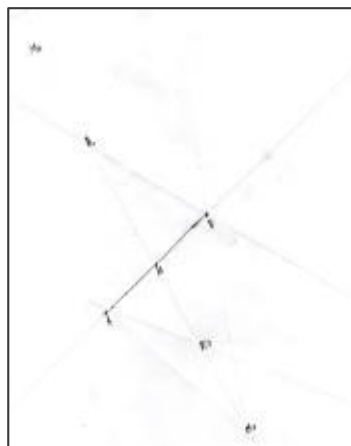
El objetivo general planteado para el estudio en cuestión, fue el siguiente: analizar las maneras en que los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, comprenden el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel. Este objetivo se cumplió dando respuesta a la pregunta de investigación. En este caso, se analizó el proceso de comprensión del concepto de mediatriz, en tres estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, con base en los datos constituidos y recolectados en el desarrollo de la unidad curricular, a partir de entrevistas, observaciones y registros de los estudiantes. Así mismo, la rúbrica de dimensiones por niveles permitió describir el avance en la comprensión no solo del concepto de mediatriz, sino de otros conceptos relacionados como: punto medio y perpendicularidad.

Vale la pena aclarar que se logró una aproximación a la comprensión del concepto de mediatriz como lugar geométrico. Diana y Federico pudieron visualizar algunos puntos de la mediatriz y determinar su equidistancia a los extremos del segmento inicial; esto se puede corroborar en las construcciones de la mediatriz como lugar geométrico y en las respuestas dadas a la pregunta: ¿es la mediatriz un lugar geométrico?, ¿por qué?; en este caso, Federico respondió: *“si, porque todos los lados son iguales”*, y Diana contestó: *“si [porque] todos los puntos del segmento esta a la misma distancia de A y B”*, teniendo en cuenta que A y B son los extremos del segmento inicial. Lo anterior se puede visualizar en la ilustración 96. Además, en la entrevista oral, en la misma pregunta, Diana respondió: *“si, porque todos los puntos del segmento de la mediatriz se encuentran a la misma distancia de A y B”*.



10. Responde las siguiente preguntas teniendo en cuenta el aporte de información

- ¿Es la mediatriz un lugar geométrico? si ¿Por qué? porque todos los lados son iguales



10. Responde las siguiente preguntas teniendo en cuenta el aporte de información

- ¿Es la mediatriz un lugar geométrico? si ¿Por qué? todos lo puntos del segmento este a la misma distancia de A y B

**Ilustración 96. Mediatriz como lugar geométrico de Federico y Diana, respectivamente.**

El doblado de papel permitió que los estudiantes comprendieran los conceptos de punto medio, perpendicularidad y mediatriz. Esto se puede concluir gracias a las construcciones hechas con doblado de papel, a las respuestas dadas a las preguntas detonantes en cada una de las actividades durante todo el proceso y a las respuestas en la entrevista oral, lo cual fue detallado ampliamente en el capítulo cinco. Además, se debe resaltar que la construcción de la mediatriz corresponde a uno de los axiomas de Huzita-Hatori, que fundamenta el doblado de papel; de hecho, es una de las construcciones básicas que posibilita este tipo de medio.

Se puede concluir entonces que los estudiantes comprenden el concepto de mediatriz a partir de la visualización y experimentación de construcciones con doblado de papel; además, la misma comprensión del concepto de mediatriz, desde el contenido, los métodos, los propósitos y las formas de comunicación, estuvo supeditada a la comprensión de los conceptos de punto medio y perpendicularidad. De esta manera, la descripción del proceso de comprensión se hizo a partir de la rúbrica de dimensiones por niveles enmarcada en la EpC.

El primer objetivo específico planteado en el estudio fue: identificar las dificultades de los estudiantes del grado cuarto con respecto a la comprensión del concepto de mediatriz y de sus conceptos asociados. Para dar cumplimiento a este objetivo, se diseñó y aplicó una actividad

diagnóstica (en la fase de exploración), en la que se hizo la construcción de un conejo con doblado de papel y se analizó su mosaico de pliegues a partir de preguntas relacionadas con el proceso de construcción y con los conceptos geométricos asociados.

Los resultados permitieron determinar varias situaciones: Alfredo no respondió la mayoría de las preguntas y las que contestó estaban erradas; Federico y Diana contestaron a la mayoría de las preguntas conceptuales, sin embargo, sus respuestas tampoco estuvieron relacionadas con las intenciones de las preguntas. En general, se concluye que las principales dificultades encontradas fueron las siguientes: los estudiantes del grado cuarto no relacionan un cuadrado con su forma, no identifican los elementos que constituyen un cuadrado, confunden un cuadrado con un triángulo, desconocen los conceptos: punto, vértice, ángulo, ángulo recto, diagonal, paralelismo, segmento, punto medio, perpendicularidad; se resalta que los dos últimos términos son la base para comprender el concepto de mediatriz.

Lo anterior se puede verificar en las respuestas dadas a la actividad diagnóstica, que fue detallada en el análisis de cada uno de los casos en el primer momento de la fase de exploración. Por ejemplo, Alfredo no logró describir las características de la hoja con la que se inició la construcción, la cual tenía forma cuadrada; el estudiante escribió que era un “*triagulo papel*”, tal como se observa en la ilustración 97.

1. Describa las características de la hoja de papel con la que se inició la construcción.

Triagulo Papel

Ilustración 97. Actividad diagnostica de Alfredo, pregunta 1.

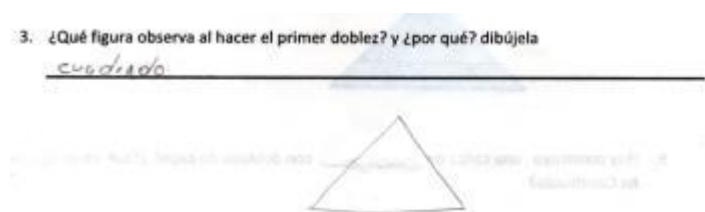
Otro ejemplo de las dificultades halladas, fue la respuesta de Federico a la pregunta 6 (¿qué relación hay entre la base del triángulo y el doblado marcado en el paso 2?, ¿por qué?), cuya intención era establecer la relación de perpendicularidad; en este caso, Federico contestó: “*que las 2 punta se unen para ase el triangulo*”, tal como se visualiza en la ilustración 98.

6. ¿Qué relación hay entre la base del triángulo y el doblado marcado en el paso 2? Y ¿por qué?

que las 2 punta se unen para ase el triangulo

Ilustración 98. Actividad diagnostica de Federico, pregunta 6.

Otra muestra de las dificultades encontradas, fue la respuesta de Diana en la pregunta 3 (¿qué figura observa al hacer el primer doblado?, ¿por qué?, dibújela) la cual hacía referencia a la figura formada por una diagonal del cuadrado; en este escenario, Diana escribió “cuadrado” y dibujó un triángulo, tal como se muestra en la ilustración 99.



**Ilustración 99. Actividad diagnóstica de Diana, pregunta 3.**

Todo lo anterior nos permite concluir que los estudiantes tenían dificultades marcadas de comprensión de los conceptos punto medio y perpendicularidad, los cuales son necesarios para abordar el concepto de mediatriz; incluso, no tenían claridad con respecto a otros conceptos geométricos como: vértice, diagonal, segmento, cuadrado, entre otros. Por lo tanto, los resultados de la actividad diagnóstica permitieron corroborar el problema de investigación: la poca comprensión de conceptos geométricos en los estudiantes del grado cuarto.

El segundo objetivo específico fue: describir de qué manera los estudiantes del grado cuarto comprenden el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel. Para dar cuenta de este objetivo, se diseñó una rúbrica de dimensiones por niveles con tres categorías (punto medio, perpendicularidad, mediatriz), que contribuyó con el análisis del proceso de comprensión de los casos: Alfredo, Federico y Diana.

La descripción de este proceso se presentó detalladamente en el capítulo cinco, a través del análisis de: las construcciones con doblado de papel, las producciones escritas y la entrevista oral, apoyados con los registros escritos y fotográficos tomados por las investigadoras. En la tabla 24, se resume el avance en la comprensión, con relación a las categorías: punto medio, perpendicularidad y mediatriz, de acuerdo con las dimensiones y los niveles de la EpC.

**Tabla 24. Resumen del avance en cada dimensión.**

Casos	Dimensión	Contenido	Métodos	Propósitos	Formas de comunicación
	Subcategoría				
Caso 1: Alfredo	Punto medio	Novato	Aprendiz	Novato	Novato
	Perpendicularidad	Ingenuo	Aprendiz	Ingenuo	Ingenuo
	Mediatriz	Ingenuo	Aprendiz	Ingenuo	Ingenuo
Caso 2: Federico	Punto medio	Aprendiz	Maestría	Maestría	Maestría
	Perpendicularidad	Aprendiz	Aprendiz	Aprendiz	Aprendiz
	Mediatriz	Aprendiz 1 de 2 descriptores	Aprendiz	Aprendiz	Aprendiz
Caso 3: Diana	Punto medio	Maestría	Maestría	Maestría	Maestría
	Perpendicularidad	Maestría	Aprendiz	Maestría	Aprendiz
	Mediatriz	Maestría 1 de 2 descriptores	Maestría 1 de 2 descriptores	Maestría	Maestría

De acuerdo con la tabla anterior y a los niveles de comprensión enmarcados en la EpC, que van en orden ascendente: ingenuo, novato, aprendiz y maestría, se puede concluir que, en el caso de Alfredo, hubo poco avance en la comprensión de los conceptos abordados (ver subcategorías), dado que en ninguna de las dimensiones alcanzó el nivel de maestría; solo alcanzó el nivel de aprendiz en la dimensión de métodos. En los casos de Federico y Diana, hubo avances significativos en la comprensión de los conceptos abordados, puesto que en todas las dimensiones obtuvieron el nivel de aprendiz o de maestría; así mismo, en cuanto a las subcategorías, en los tres casos se evidenció mayor avance en la comprensión del concepto de punto medio; por último, en las dimensiones contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, Diana mostró mayor avance con relación a los casos de Alfredo y Federico, ya que en la mayoría de las subcategorías alcanzó el nivel de maestría.

El último objetivo específico planteado para el estudio, fue el siguiente: evaluar una unidad curricular que permita la comprensión del concepto de mediatriz mediante el doblado de papel. Efectivamente, se diseñó y aplicó una unidad curricular, cuyas actividades involucraron construcciones con doblado de papel y sus análisis respectivos desde la geometría.

La evaluación de la guía se hizo desde la aplicación, durante el trabajo de campo; el análisis del proceso de comprensión de los estudiantes permitió refinar las preguntas y las instrucciones. La rúbrica también se refinó e hizo parte de la unidad curricular. Además, la unidad curricular se validó a partir de la revisión de expertos: la directora de la tesis y docentes de los seminarios, quienes dieron aportes valiosos que permitieron refinar las guías.

## **Aportes a la Educación Matemática.**

Este estudio permitió establecer cómo avanzan los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, en la comprensión del concepto de mediatriz y de sus conceptos asociados, mediante doblado de papel. Para ello, se diseñó una unidad curricular basada en construcciones con doblado de papel y una rúbrica de dimensiones por nivel, para la evaluación diagnóstica continua.

Con respecto al doblado de papel, se observó que fue un medio que propició la visualización y experimentación de objetos geométricos, lo que permitió ver, tocar, manipular y volver tangible lo abstracto de la geometría. Se concluye entonces que el doblado de papel contribuyó significativamente con el proceso de comprensión del concepto de mediatriz y de sus conceptos asociados, en los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo. Esto se corrobora con la respuesta dada a la pregunta ¿el doblado de papel le permitió aprender conceptos de geometría?, ¿por qué?, por parte de Diana: *“que todos los punto de la mediatriz se encuentran a la misma distancia de A y B, punto medio, segmentos perpendiculares, la mediatriz, lugar geométrico, triángulos, ángulos rectos, segmentos”*.

Este estudio, fundamentado en la EpC, aporta a la Educación Matemática una unidad curricular, diseñada y refinada gracias al trabajo de campo; dentro de esta unidad vale la pena resaltar el cuento “los cuadrados soñadores”, el cual es una herramienta audiovisual y es una creación de las investigadoras; también se resaltan los instructivos y las preguntas asociadas a cada construcción, ya que permiten utilizar el doblado de papel con una intención pedagógica, posibilitando la comprensión de conceptos geométricos; finalmente, se destaca también la rúbrica de dimensiones por niveles, que favorece la evaluación diagnóstica continua y permite determinar el nivel de comprensión.

Adicionalmente, la investigación abre la posibilidad de implementar el doblado de papel para abordar conceptos geométricos complejos, como el de la mediatriz, en la básica primaria, ya que permite, a partir de lo concreto, aproximarse a lo abstracto. Por ejemplo, los estudiantes lograron comprender el concepto de mediatriz gracias a las construcciones hechas mediante el doblado de papel; en especial, la construcción de la mediatriz como lugar geométrico, ya que, en primer



lugar, permitió la experimentación y visualización de la construcción, a través de la lectura del mosaico de pliegues; en segundo lugar, se pudo verificar que la distancia entre un punto cualquiera de la mediatriz equidista de los extremos del segmento  $\overline{AB}$ , tal como se observa en la ilustración 100.



**Ilustración 100. Construcción mediatriz de un estudiante**

Adicionalmente, en la entrevista oral, se logró demostrar que Diana, efectivamente, comprendió el concepto de mediatriz, tal como se evidencia en las respuestas dadas a las siguientes preguntas: ¿para usted qué es la mediatriz de un segmento?, en la que ella contestó: *“es un segmento que pasa por el punto medio formado un ángulo recto”*; ¿cree usted que la mediatriz es un lugar geométrico?, ¿por qué?, en este caso, la estudiante respondió: *“si, porque todos los puntos del segmento de la mediatriz se encuentran a la misma distancia de A y B”*.

### **Futuras líneas de investigación.**

Este estudio deja abiertas varias líneas futuras de investigación, desde lo didáctico, lo pedagógico y lo disciplinar. Entre ellas, están:

El uso del doblado de papel como medio para abordar los conceptos geométricos en primaria, posibilitando su comprensión.

La creación de cuentos, que utilicen adecuadamente el lenguaje y rigor matemático, como estrategia para acercar a los estudiantes a los conceptos geométricos que se desean abordar.

El diseño de unidades curriculares desde la EpC, que favorezcan la comprensión de conceptos en primaria.

## **Recomendaciones**

Después de diseñar la unidad curricular y aplicarla en el trabajo de campo, surgen las siguientes recomendaciones:

En cuanto al doblado de papel, se recomienda hacer una construcción varias veces, con el objetivo de pulir los dobleces y refinar las figuras. Además, este ejercicio contribuye a afianzar la motricidad fina de los estudiantes.

Así mismo, en la construcción del corazón separador y del portalápiz, es recomendable utilizar papel que tenga dos caras de colores diferentes, para facilitar la comprensión del instructivo y permitir una mejor visualización de la figura.

En cuanto a la unidad curricular, se recomienda utilizar los instructivos tanto como las preguntas asociadas a cada construcción, con el propósito de articular la parte lúdica con la parte conceptual de la actividad. También se aclara que las preguntas presentadas en todas las guías, tienen un grado de complejidad alto y lenguaje geométrico riguroso, ya que la unidad curricular es un material para los profesores. En este caso, de acuerdo al contexto, se pueden reescribir las preguntas considerando el grado de escolaridad de los estudiantes.

De igual manera, es factible aplicar la unidad curricular de forma parcial o total; es decir, se puede adaptar de acuerdo al concepto o conceptos que se deseen abordar, al grado de escolaridad de los estudiantes.

También se recomienda hacer una actividad con la autoridad académica del estudiante, para determinar el nivel de conocimiento de los padres o acudientes y con ello identificar el apoyo que se podría tener en actividades extra clase.

Finalmente, en cuanto a la rúbrica de evaluación, se recomienda emplearla de acuerdo a la aplicación de la unidad curricular; es decir, si la unidad curricular se aplica totalmente entonces

también la rúbrica, y si la unidad se aplica parcialmente será necesario ajustar la rúbrica para evaluar formativamente a los estudiantes.

## Lista de referencias

- Aravena, M., y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (2), pp. 139-178, doi: 10.12802/relime. 13.1621
- Betancourth, M., y Madroñero, E. (2014). *La enseñanza para la comprensión como didáctica alternativa para mejorar la interpretación y producción oral y escrita en lengua castellana en el grado quinto del centro educativo municipal la victoria de pasto* (Tesis de maestría). Universidad de Manizales, Pasto, Colombia.
- Boix, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles con las cualidades de la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 215 – 256). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Cabrilog (2017). Página web <https://cabri.com/es/estudiante/cabri-ii-plus/>
- Cano, Z., Flórez, M., y Zapata, A. (2017). *El doblado de papel en la comprensión de las características de los triángulos en los estudiantes del grado octavo* (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.
- Cantoral, R., y Covían, O. (2005). Los Usos Sociales de la Matemática en las Ciencias Prácticas de la Cultura Maya: Un Estudio Socio-epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18 (Adenda), pp. 813 -818.
- Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., Acosta, M., y Rodríguez, F. (2004), Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales. Bogotá: Enlace Editores Ltda.
- Clemens, S., O’Daffer, P., y Cooney, T. (1998). *Geometría. Con aplicaciones y solución de problemas*. Ciudad de México, México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margrit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en*

- enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid, España: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia (CIDE).
- Corredor, J. (2001). *Practiquemos el Origami*. Bogotá, Colombia: nissan
- Charys, D., y Martínez, L. (2017). *Aprendizaje significativo de los conceptos relativos a los sólidos platónicos mediante el doblado de papel* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Escobedo, H., Jaramillo, R., y Bermúdez, A. (2004). Enseñanza para la Comprensión. *Revista Educere*, 8 (027), pp. 529 – 534. Recuperado de <http://www.saber.ula.ve/handle/123456789/19909>
- Font, V., y Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas: Una perspectiva ontosemiótica. *La matematica e la sua didattica*, 24 (1), pp. 97 – 123.
- GeoGebra (2018). Página web <https://www.geogebra.org/about>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiele. En: S, Llenares, M.V. Sánchez (eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. España: Alfar, pp. 295 – 384.
- Londoño, R. (2013). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren* (Tesis doctoral). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- López, C. (2017). *Comprensión de los conceptos de área y de perímetro a partir del círculo y la circunferencia en el contexto de la EpC* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Martínez, P. (2006). El Método de Estudio de Casos. Estrategia Metodológica de la Investigación Científica. *Pensamiento y Gestión*, pp. 165-193.

- Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(3), pp. 221-278.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Santa Fe De Bogotá. D.C.: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de aprendizaje Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Otero, T., y Ansemil, E. (2001). Papiroflexia/Origami. *XIV Congreso de Enciga*. pp. 47–49. Recuperado de <http://www.enciga.org/?q=boletin048>
- Perkins, D. (1999). ¿Qué es la Comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. (pp. 69-94). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Ramírez, A. y Hernández, C. (2008). Página web:  
[http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC\\_2008/geolab/html/intro.html](http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/geolab/html/intro.html)
- Rendón, R., y Londoño, R. (2013). La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. *Uni-pluri/versidad*, 13 (3), 109 – 118. Recuperado de: <https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/unip/article/view/18631/15982>
- Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma: Revista de Matemáticas*, (21), pp. 175 – 192.
- Sánchez, A. (2017). *Una aproximación a la comprensión de los conceptos de punto, recta y plano en el grado segundo, mediante el doblado de papel* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

- Santa, Z., Jaramillo, C., y Borba, M. (2015). El doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (46), pp. 154-168. Recuperado de:  
<http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/706/1233>
- Santa, Z., y Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la Geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31). Recuperado de:  
[http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com\\_content&task=view&id=169&Itemid=1](http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_content&task=view&id=169&Itemid=1)
- Santa, Z., y Jaramillo, C. (2013). La geometría del doblado de papel. En G. Obando. (Ed), *Matemática Educativa. 13° Encuentro Colombiano* (pp. 834 – 844). Medellín, Colombia: Sello Editorial Universidad de Medellín
- Santa, Z., y Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. En: *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe CEMACYC*. República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra PUCMM.
- Stake, R. (1999). *Investigación con Estudio de Casos*. Madrid, España: Ediciones Morata S.L.
- Stone, M. (1999). ¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*, (pp. 95 - 126). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Stone, M. (1999). La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica, Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Stone, M. (1999). La importancia de la comprensión. En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*, (pp. 21 – 34). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Villarreal, C., y González-Hernández, J. (2005). *Geometría*. México.

## Anexos

### Anexo 1. Carta aval del rector

Apartadó, 22 de Febrero de 2018

Señor  
**JESÚS ORLANDO CETRE IBARGUEN**  
Rector  
Institución Educativa Rural Churidó Pueblo

Cordial saludo.

Nos dirigimos a usted con el propósito de solicitarle permiso para llevar a cabo el estudio "El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz", con los estudiantes del grado 4<sup>º</sup>A de Básica Primaria. El objetivo es Analizar las maneras en que los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Rural Churidó Pueblo, comprenden el concepto de mediatriz mediante el doblado de papel; adicionalmente, le solicitamos permitimos nombrar la Institución, dentro de nuestro trabajo escrito, para identificar el contexto donde se desarrolla el estudio.

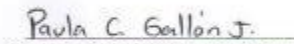
No sobra mencionarle que somos Tutoras del Programa Todos a Aprender del MEN y estudiantes de Maestría en Educación, Línea Educación Matemática – Profundización, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Dentro de nuestra formación académica, es fundamental presentar y defender un trabajo investigativo, que no solo brinde aportes a la Educación Matemática en la institución sino también al municipio de Apartadó.

Cabe anotar que la Institución no incurrirá en ningún gasto, a propósito del estudio. En este caso, se solicita un espacio o lugar adecuado para la realización del trabajo de campo y el tiempo pertinente para los encuentros con los estudiantes y la realización de las actividades; vale la pena aclarar que en este estudio se va a utilizar un método de estudio de casos, por lo cual sólo se elegirán a algunos de los estudiantes cuyos padres o acudientes, han sido previamente informados a través de un comunicado escrito.

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Atentamente

  
Elizabeth Mena Palacio  
Tutora PTA de la IER Churidó Pueblo

  
Paula Cristina Gallón Jaramillo  
Tutora PTA de la IE José Celestino Mutis

Visto Bueno



Jesús Orlando Cetre Ibarguen  
Rector IER Churidó Pueblo

Ilustración 101. Carta aval del rector



## Anexo 2. Consentimientos informados de los estudiantes

Apartadó, 20 de Febrero de 2018

### Consentimiento informado

Apreciado(a) padre de familia, madre de familia o acudiente.

Cordial saludo.

Es grato para nosotras dirigirnos a usted y desearle éxitos en sus labores.

El motivo del presente oficio es informarle que nos encontramos realizando estudios de Maestría en Educación, Línea Educación Matemática - Profundización, en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Dentro de nuestra formación académica, es fundamental presentar y defender un trabajo investigativo, que no solo brinde aportes a la Educación Matemática en la institución sino también al municipio de Apartadó. El estudio lleva por nombre “**El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz**”, en el cual es importante la participación de su hijo (a).

Por consiguiente, le solicitamos el favor de firmar este consentimiento, en el que manifiesta, libremente, que apoya la participación de su hijo (a) en el estudio. Cabe mencionar que, en algunas ocasiones, se realizarán actividades en horas extras, es decir, por fuera del horario establecido por la Institución, por lo que será necesario contar con el desplazamiento o traslado respectivo de cada estudiante.

En este estudio, la información se recolectará a través de observaciones, revisión del material de los estudiantes, que surge de las diferentes actividades académicas, y evaluaciones escritas u orales. En todos los casos, se tomarán registros fotográficos y se harán grabaciones de audio o video, siempre y cuando el estudiante esté de acuerdo. Además, tendrá la posibilidad de tomar la decisión de continuar o no con el proceso, sin que sienta algún tipo de presión.

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Nombre del estudiante: Andrés Felipe Avendaño

Nombre del padre de familia, madre de familia o acudiente: Claudia Suarez Cortines

Firma padre de familia, madre de familia o acudiente: Claudia Suarez

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Atentamente

Elizabeth M.P.

Elizabeth Mena Palacio

Tutora PTA de la IER Churidó Pueblo

Paula C. Gallón J.

Paula Cristina Gallón Jaramillo

Tutora PTA de la IE José Celestino Mutis

Ilustración 102. Consentimiento informado estudiante 1.

Apartadó, 20 de Febrero de 2018

### Consentimiento informado

Apreciado(a) padre de familia, madre de familia o acudiente.

Cordial saludo.

Es grato para nosotras dirigimos a usted y desearle éxitos en sus labores.

El motivo del presente oficio es informarle que nos encontramos realizando estudios de Maestría en Educación, Línea Educación Matemática - Profundización, en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Dentro de nuestra formación académica, es fundamental presentar y defender un trabajo investigativo, que no solo brinde aportes a la Educación Matemática en la institución sino también al municipio de Apartadó. El estudio lleva por nombre **“El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz”**, en el cual es importante la participación de su hijo (a).

Por consiguiente, le solicitamos el favor de firmar este consentimiento, en el que manifiesta, libremente, que apoya la participación de su hijo (a) en el estudio. Cabe mencionar que, en algunas ocasiones, se realizarán actividades en horas extras, es decir, por fuera del horario establecido por la Institución, por lo que será necesario contar con el desplazamiento o traslado respectivo de cada estudiante.

En este estudio, la información se recolectará a través de observaciones, revisión del material de los estudiantes, que surge de las diferentes actividades académicas, y evaluaciones escritas u orales. En todos los casos, se tomarán registros fotográficos y se harán grabaciones de audio o video, siempre y cuando el estudiante esté de acuerdo. Además, tendrá la posibilidad de tomar la decisión de continuar o no con el proceso, sin que sienta algún tipo de presión.

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Nombre del estudiante: Dayana Sofía Sánchez  
Nombre del padre de familia, madre de familia o acudiente: Paivén de la Vega  
Firma padre de familia, madre de familia o acudiente: [Firma]

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Atentamente

Elizabeth M.P.  
Elizabeth Mena Palacio  
Tutora PTA de la IER Churidó Pueblo

Paula C. Gallón J.  
Paula Cristina Gallón Jaramillo  
Tutora PTA de la IE José Celestino Mutis

Ilustración 103. Consentimiento informado estudiante 2.



Apartadó, 20 de Febrero de 2018

### Consentimiento informado

Apreciado(a) padre de familia, madre de familia o acudiente.

Cordial saludo.

Es grato para nosotras dirigirnos a usted y desearle éxitos en sus labores.

El motivo del presente oficio es informarle que nos encontramos realizando estudios de Maestría en Educación, Línea Educación Matemática - Profundización, en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Dentro de nuestra formación académica, es fundamental presentar y defender un trabajo investigativo, que no solo brinde aportes a la Educación Matemática en la institución sino también al municipio de Apartadó. El estudio lleva por nombre **“El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz”**, en el cual es importante la participación de su hijo (a).

Por consiguiente, le solicitamos el favor de firmar este consentimiento, en el que manifiesta, libremente, que apoya la participación de su hijo (a) en el estudio. Cabe mencionar que, en algunas ocasiones, se realizarán actividades en horas extras, es decir, por fuera del horario establecido por la Institución, por lo que será necesario contar con el desplazamiento o traslado respectivo de cada estudiante.

En este estudio, la información se recolectará a través de observaciones, revisión del material de los estudiantes, que surge de las diferentes actividades académicas, y evaluaciones escritas u orales. En todos los casos, se tomarán registros fotográficos y se harán grabaciones de audio o video, siempre y cuando el estudiante esté de acuerdo. Además, tendrá la posibilidad de tomar la decisión de continuar o no con el proceso, sin que sienta algún tipo de presión.

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Nombre del estudiante: Jose David Cantero  
Nombre del padre de familia, madre de familia o acudiente: Viviana Acosta  
Firma padre de familia, madre de familia o acudiente: Viviana Patricia Acosta

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Atentamente

Elizabeth M.P.  
Elizabeth Mena Palacio  
Tutora PTA de la IER Churidó Pueblo

Paula C. Gallón J.  
Paula Cristina Gallón Jaramillo  
Tutora PTA de la IE José Celestino Mutis

Ilustración 104. Consentimiento informado estudiante 3.

Apartadó, 20 de Febrero de 2018

### Consentimiento informado

Apreciado(a) padre de familia, madre de familia o acudiente.

Cordial saludo.

Es grato para nosotras dirigimos a usted y desearle éxitos en sus labores.

El motivo del presente oficio es informarle que nos encontramos realizando estudios de Maestría en Educación, Línea Educación Matemática - Profundización, en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Dentro de nuestra formación académica, es fundamental presentar y defender un trabajo investigativo, que no solo brinde aportes a la Educación Matemática en la institución sino también al municipio de Apartadó. El estudio lleva por nombre **“El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz”**, en el cual es importante la participación de su hijo (a).

Por consiguiente, le solicitamos el favor de firmar este consentimiento, en el que manifiesta, libremente, que apoya la participación de su hijo (a) en el estudio. Cabe mencionar que, en algunas ocasiones, se realizarán actividades en horas extras, es decir, por fuera del horario establecido por la Institución, por lo que será necesario contar con el desplazamiento o traslado respectivo de cada estudiante.

En este estudio, la información se recolectará a través de observaciones, revisión del material de los estudiantes, que surge de las diferentes actividades académicas, y evaluaciones escritas u orales. En todos los casos, se tomarán registros fotográficos y se harán grabaciones de audio o video, siempre y cuando el estudiante esté de acuerdo. Además, tendrá la posibilidad de tomar la decisión de continuar o no con el proceso, sin que sienta algún tipo de presión.

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Nombre del estudiante:

Nombre del padre de familia, madre de familia o acudiente:

Firma padre de familia, madre de familia o acudiente:

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Atentamente

Elizabeth M.P.

Elizabeth Mena Palacio

Tutora PTA de la IER Churidó Pueblo

Paula C. Gallón J.

Paula Cristina Gallón Jaramillo

Tutora PTA de la IE José Celestino Mutis

Ilustración 105. Consentimiento informado estudiante 4.



Apartadó, 20 de Febrero de 2018

### Consentimiento informado

Apreciado(a) padre de familia, madre de familia o acudiente.

Cordial saludo.

Es grato para nosotras dirigirnos a usted y desearle éxitos en sus labores.

El motivo del presente oficio es informarle que nos encontramos realizando estudios de Maestría en Educación, Línea Educación Matemática - Profundización, en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Dentro de nuestra formación académica, es fundamental presentar y defender un trabajo investigativo, que no solo brinde aportes a la Educación Matemática en la institución sino también al municipio de Apartadó. El estudio lleva por nombre **“El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz”**, en el cual es importante la participación de su hijo (a).

Por consiguiente, le solicitamos el favor de firmar este consentimiento, en el que manifiesta, libremente, que apoya la participación de su hijo (a) en el estudio. Cabe mencionar que, en algunas ocasiones, se realizarán actividades en horas extras, es decir, por fuera del horario establecido por la Institución, por lo que será necesario contar con el desplazamiento o traslado respectivo de cada estudiante.

En este estudio, la información se recolectará a través de observaciones, revisión del material de los estudiantes, que surge de las diferentes actividades académicas, y evaluaciones escritas u orales. En todos los casos, se tomarán registros fotográficos y se harán grabaciones de audio o video, siempre y cuando el estudiante esté de acuerdo. Además, tendrá la posibilidad de tomar la decisión de continuar o no con el proceso, sin que sienta algún tipo de presión.

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Nombre del estudiante: ENILSON GAVIRIA MOSQUERA

Nombre del padre de familia, madre de familia o acudiente: SEFERINO MOSQUERA

Firma padre de familia, madre de familia o acudiente: SEFERINO MOSQUERA

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Atentamente

Elizabeth M.P.

Elizabeth Mena Palacio  
Tutora PTA de la IER Churidó Pueblo

Paula C. Gallón J.

Paula Cristina Gallón Jaramillo  
Tutora PTA de la IE José Celestino Mutis

Ilustración 106. Consentimiento informado estudiante 5.

Apartadó, 20 de Febrero de 2018

### Consentimiento informado

Apreciado(a) padre de familia, madre de familia o acudiente.

Cordial saludo.

Es grato para nosotras dirigimos a usted y desearle éxitos en sus labores.

El motivo del presente oficio es informarle que nos encontramos realizando estudios de Maestría en Educación, Línea Educación Matemática - Profundización, en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Dentro de nuestra formación académica, es fundamental presentar y defender un trabajo investigativo, que no solo brinde aportes a la Educación Matemática en la institución sino también al municipio de Apartadó. El estudio lleva por nombre "**El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz**", en el cual es importante la participación de su hijo (a).

Por consiguiente, le solicitamos el favor de firmar este consentimiento, en el que manifiesta, libremente, que apoya la participación de su hijo (a) en el estudio. Cabe mencionar que, en algunas ocasiones, se realizarán actividades en horas extras, es decir, por fuera del horario establecido por la Institución, por lo que será necesario contar con el desplazamiento o traslado respectivo de cada estudiante.

En este estudio, la información se recolectará a través de observaciones, revisión del material de los estudiantes, que surge de las diferentes actividades académicas, y evaluaciones escritas u orales. En todos los casos, se tomarán registros fotográficos y se harán grabaciones de audio o video, siempre y cuando el estudiante esté de acuerdo. Además, tendrá la posibilidad de tomar la decisión de continuar o no con el proceso, sin que sienta algún tipo de presión.

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Nombre del estudiante: Lucy Lidia Hernandez B.  
Nombre del padre de familia, madre de familia o acudiente: Jorge Hernandez  
Firma padre de familia, madre de familia o acudiente: Jorge Hernandez

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Atentamente

Elizabeth M.P.  
Elizabeth Mena Palacio  
Tutora PTA de la IER Churidó Pueblo

Paula C. Gallón J.  
Paula Cristina Gallón Jaramillo  
Tutora PTA de la IE José Celestino Mutis

Ilustración 107. Consentimiento informado estudiante 6.



Apartadó, 20 de Febrero de 2018

### Consentimiento informado

Apreciado(a) padre de familia, madre de familia o acudiente.

Cordial saludo.

Es grato para nosotras dirigimos a usted y desearle éxitos en sus labores.

El motivo del presente oficio es informarle que nos encontramos realizando estudios de Maestría en Educación, Línea Educación Matemática - Profundización, en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Dentro de nuestra formación académica, es fundamental presentar y defender un trabajo investigativo, que no solo brinde aportes a la Educación Matemática en la institución sino también al municipio de Apartadó. El estudio lleva por nombre **“El doblado de papel como medio para la comprensión del concepto de mediatriz”**, en el cual es importante la participación de su hijo (a).

Por consiguiente, le solicitamos el favor de firmar este consentimiento, en el que manifiesta, libremente, que apoya la participación de su hijo (a) en el estudio. Cabe mencionar que, en algunas ocasiones, se realizarán actividades en horas extras, es decir, por fuera del horario establecido por la Institución, por lo que será necesario contar con el desplazamiento o traslado respectivo de cada estudiante.

En este estudio, la información se recolectará a través de observaciones, revisión del material de los estudiantes, que surge de las diferentes actividades académicas, y evaluaciones escritas u orales. En todos los casos, se tomarán registros fotográficos y se harán grabaciones de audio o video, siempre y cuando el estudiante esté de acuerdo. Además, tendrá la posibilidad de tomar la decisión de continuar o no con el proceso, sin que sienta algún tipo de presión.

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Nombre del estudiante: Nemer Santiago Torres Diela Jemu Boza  
Nombre del padre de familia, madre de familia o acudiente:  
Firma padre de familia, madre de familia o acudiente: Paula Jemu Boza

De antemano, muchas gracias por su apoyo.

Atentamente

Elizabeth M.P.  
Elizabeth Mena Palacio  
Tutora PTA de la IER Churidó Pueblo

Paula C. Gallón J.  
Paula Cristina Gallón Jaramillo  
Tutora PTA de la IE José Celestino Mutis

### Anexo 3. Cuento “Los Cuadrados Soñadores”

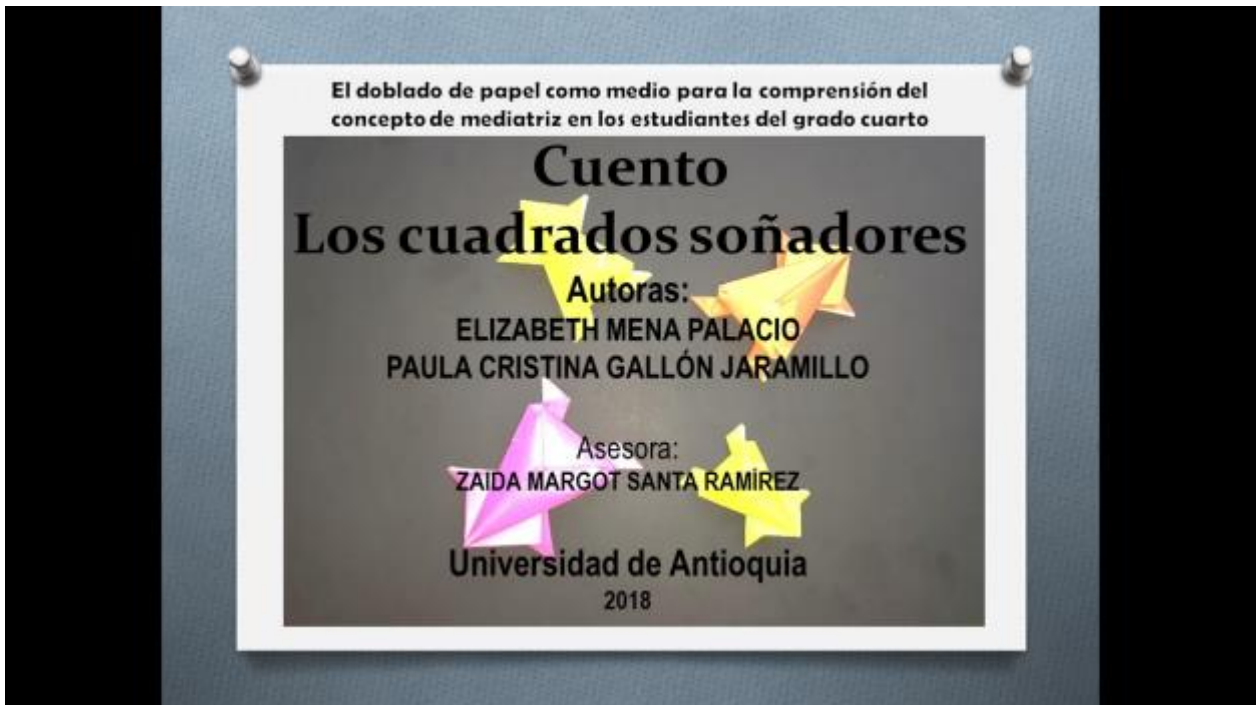


Ilustración 109. Cuento página 1.



Ilustración 110. Cuento página 2.



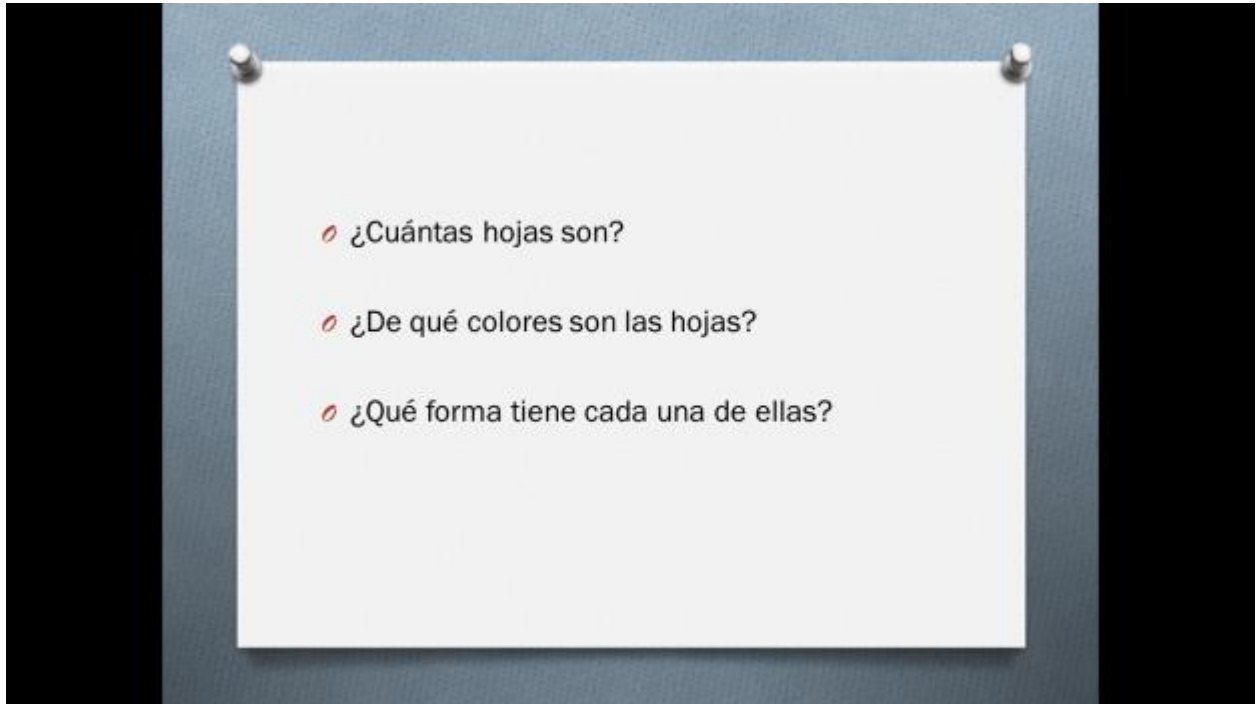


Ilustración 111. Cuento página 3.

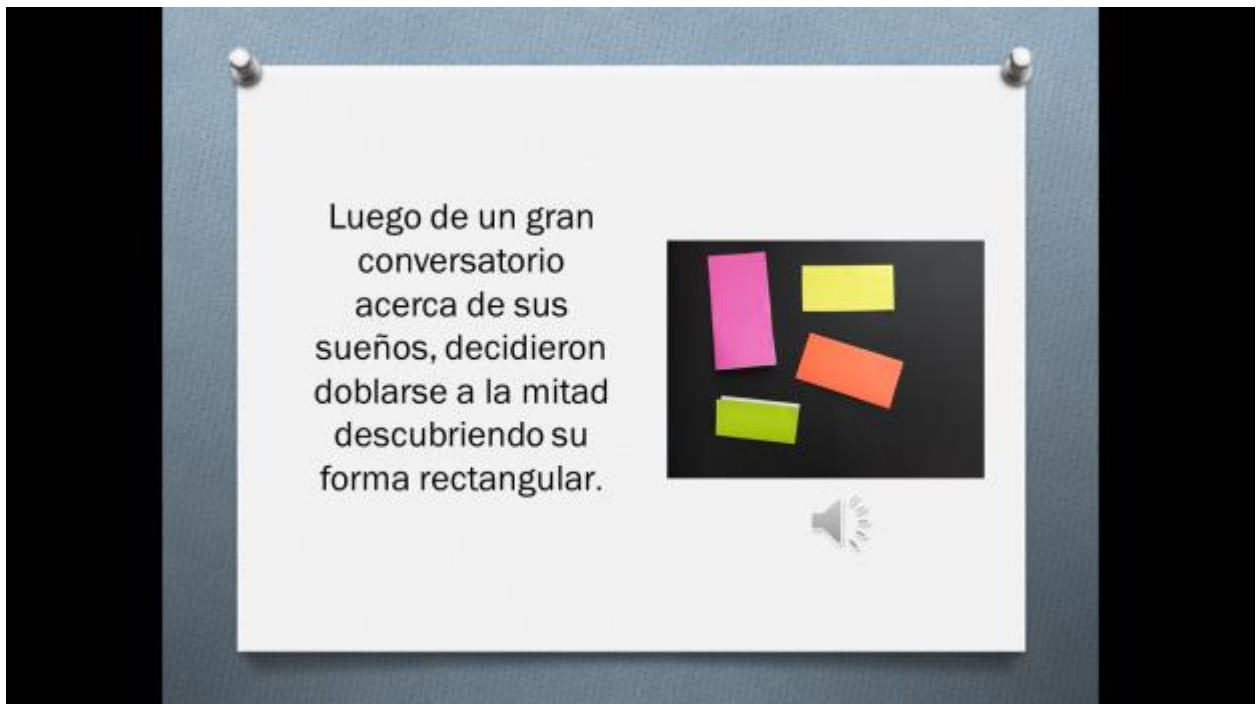


Ilustración 112. Cuento página 4.

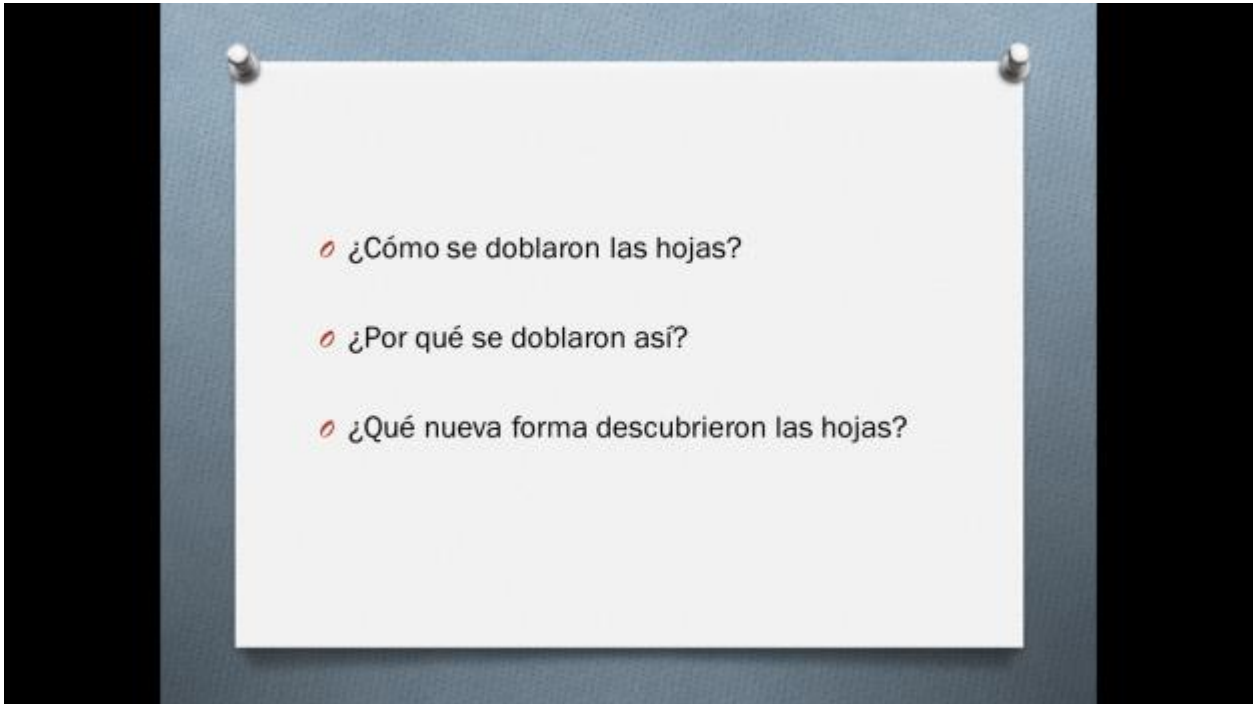


Ilustración 113. Cuento página 5.

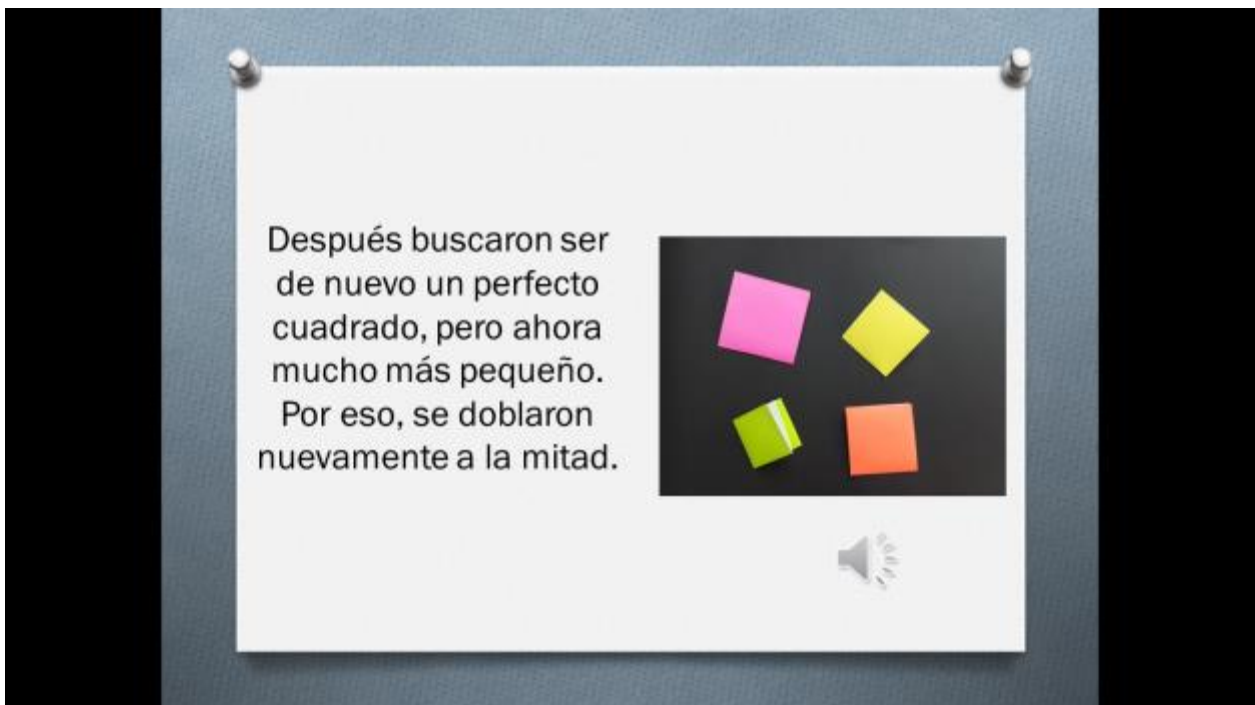


Ilustración 114. Cuento página 6.

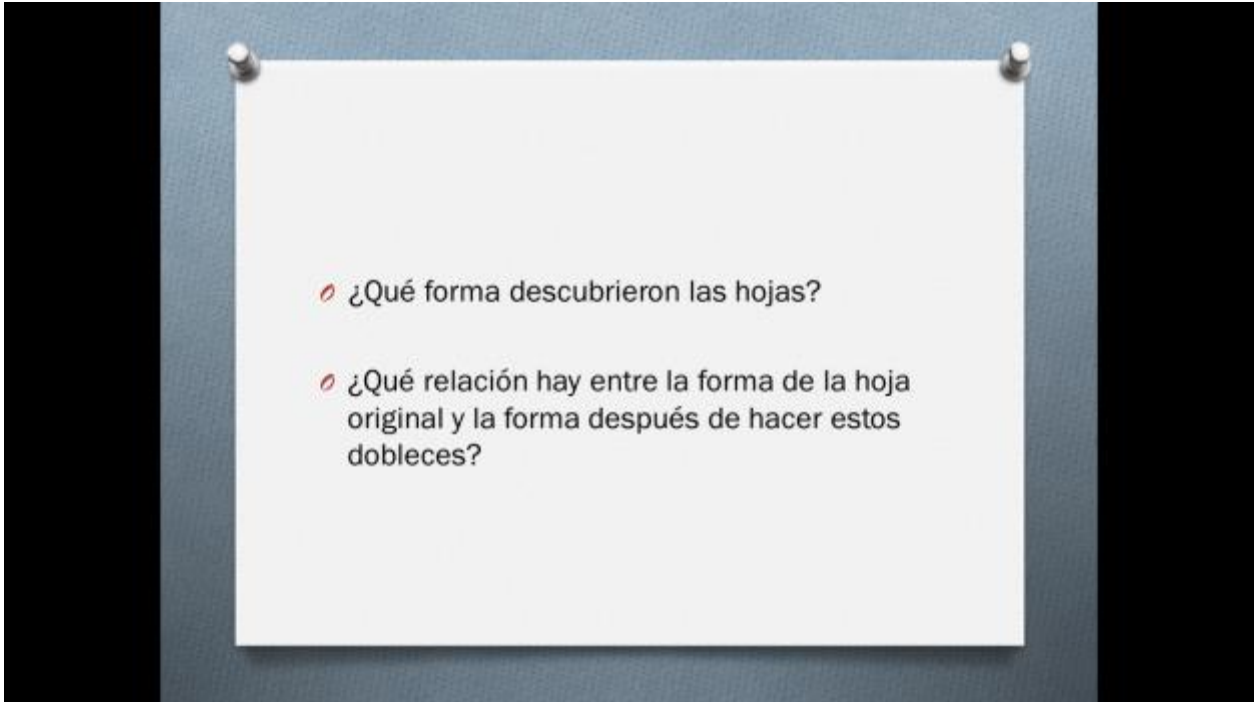


Ilustración 115. Cuento página 7.

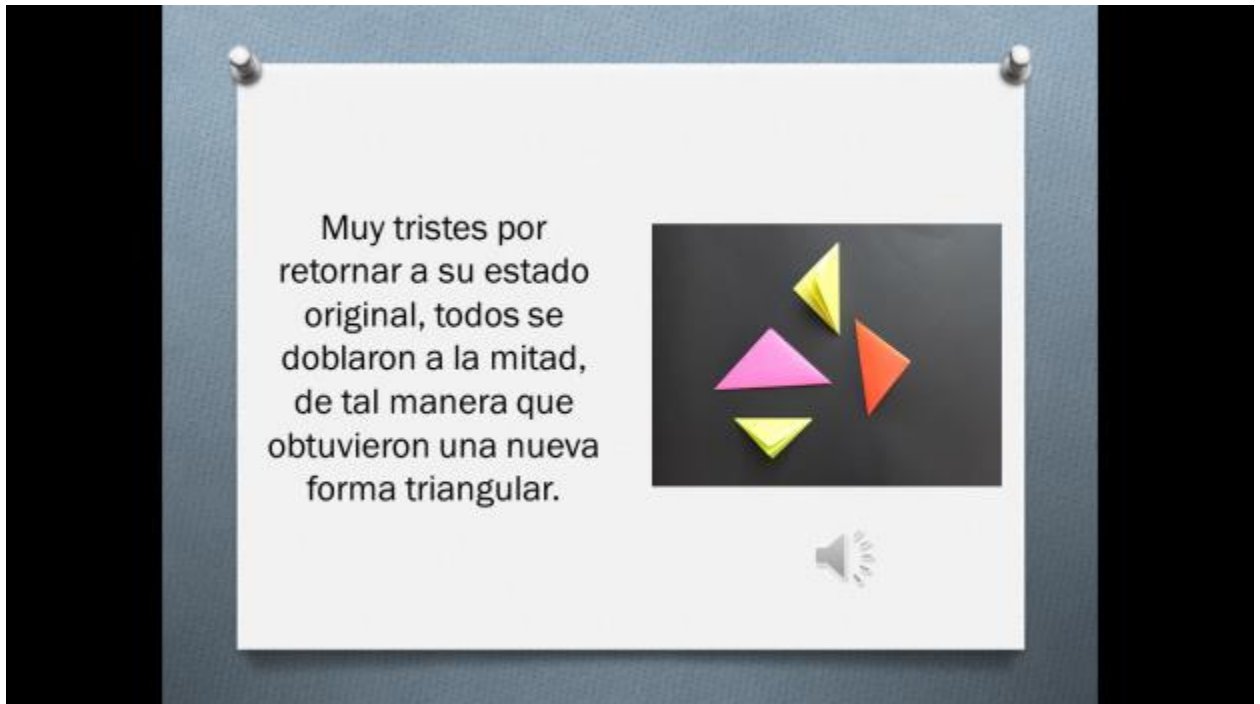


Ilustración 116. Cuento página 8.

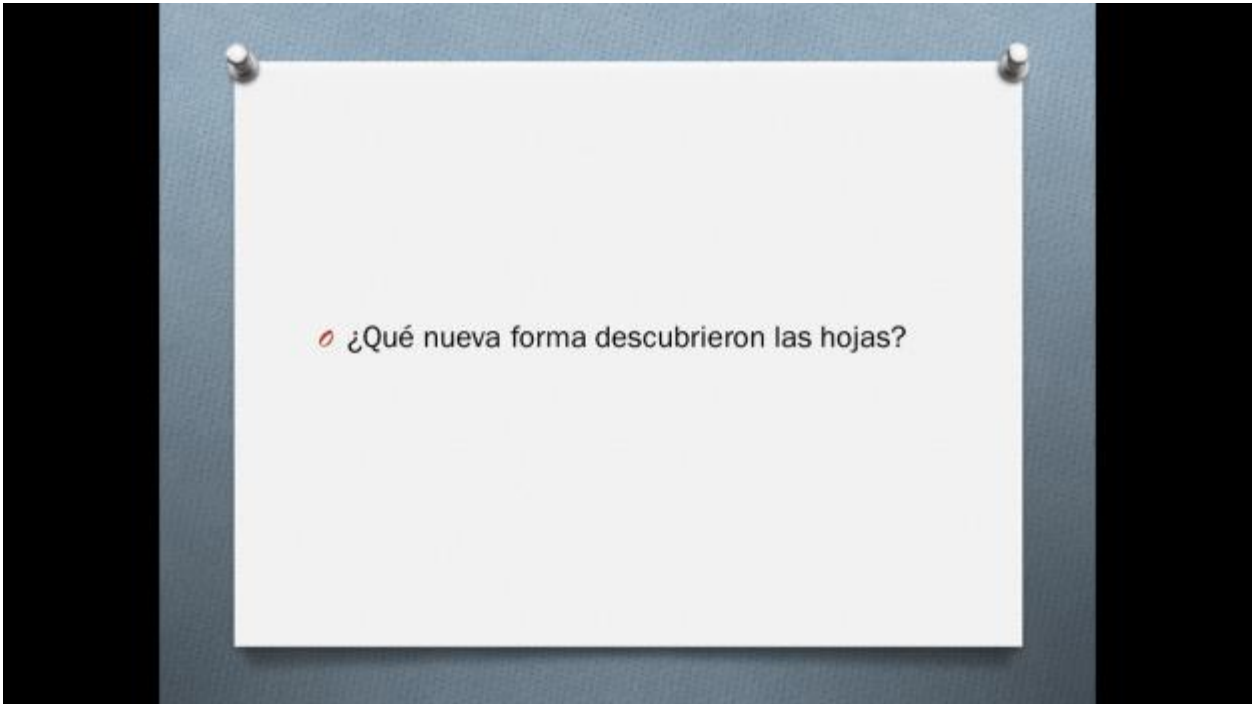


Ilustración 117. Cuento página 9.

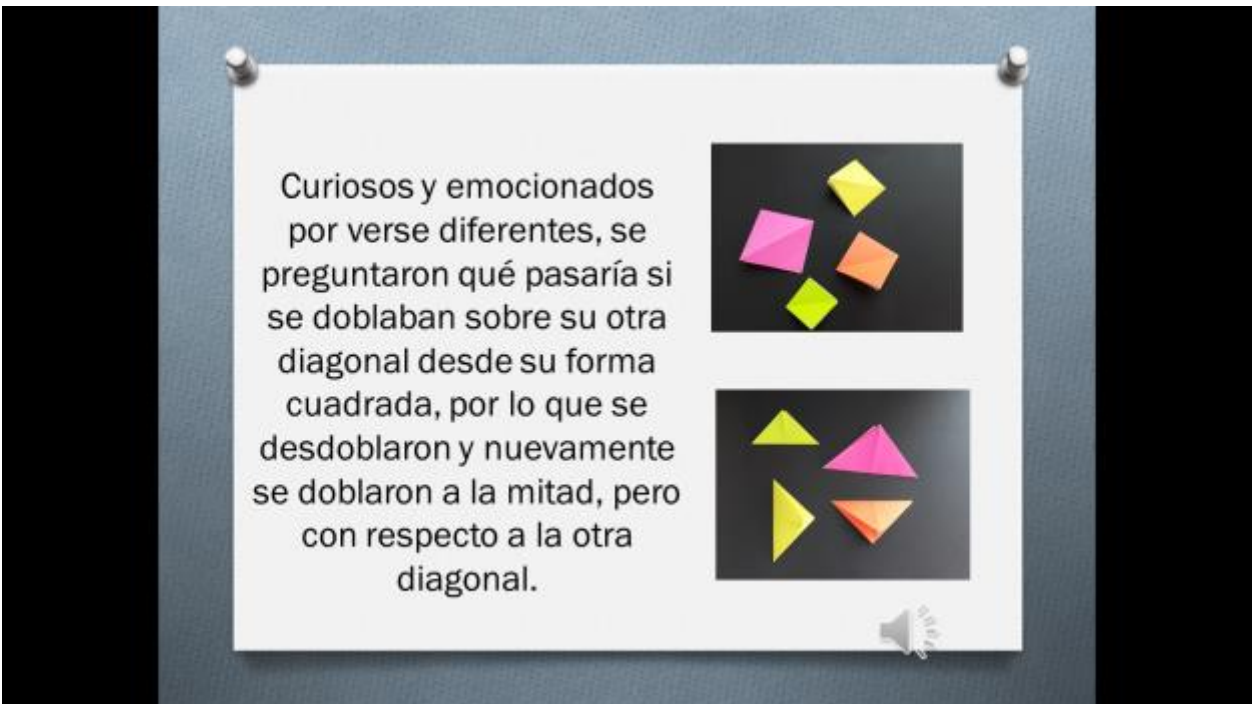


Ilustración 118. Cuento página 10.

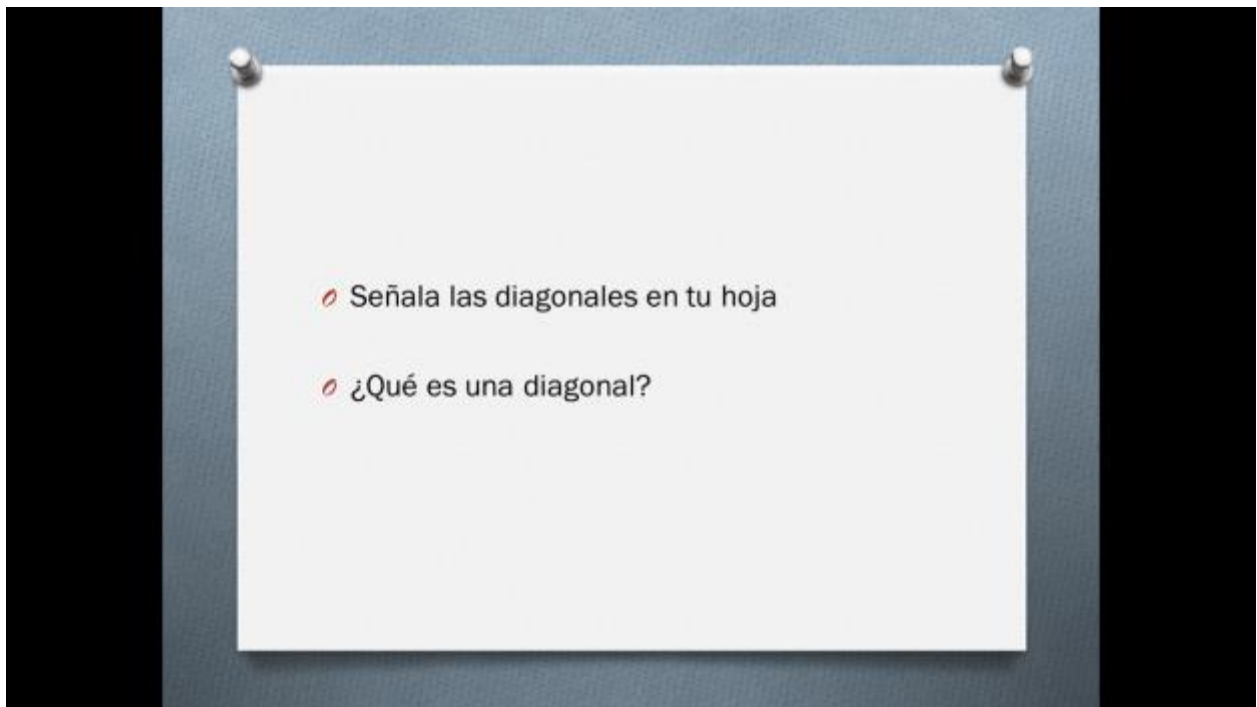


Ilustración 119. Cuento página 11.

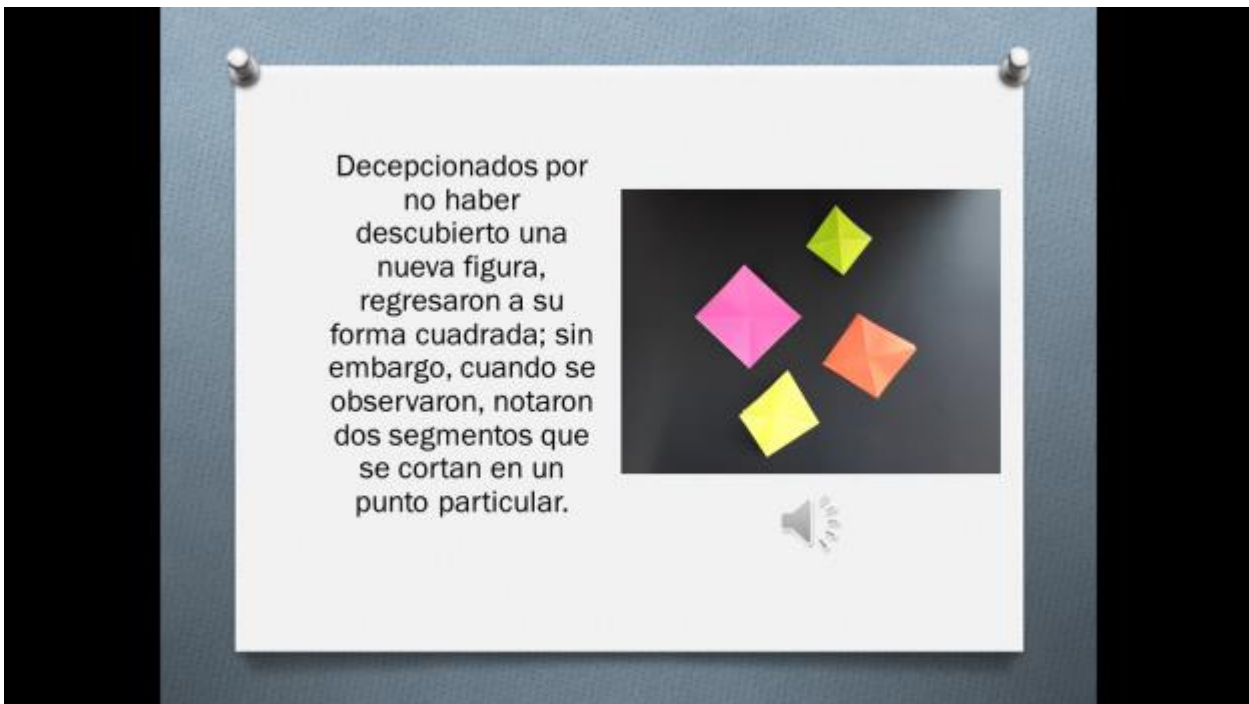


Ilustración 120. Cuento página 12.

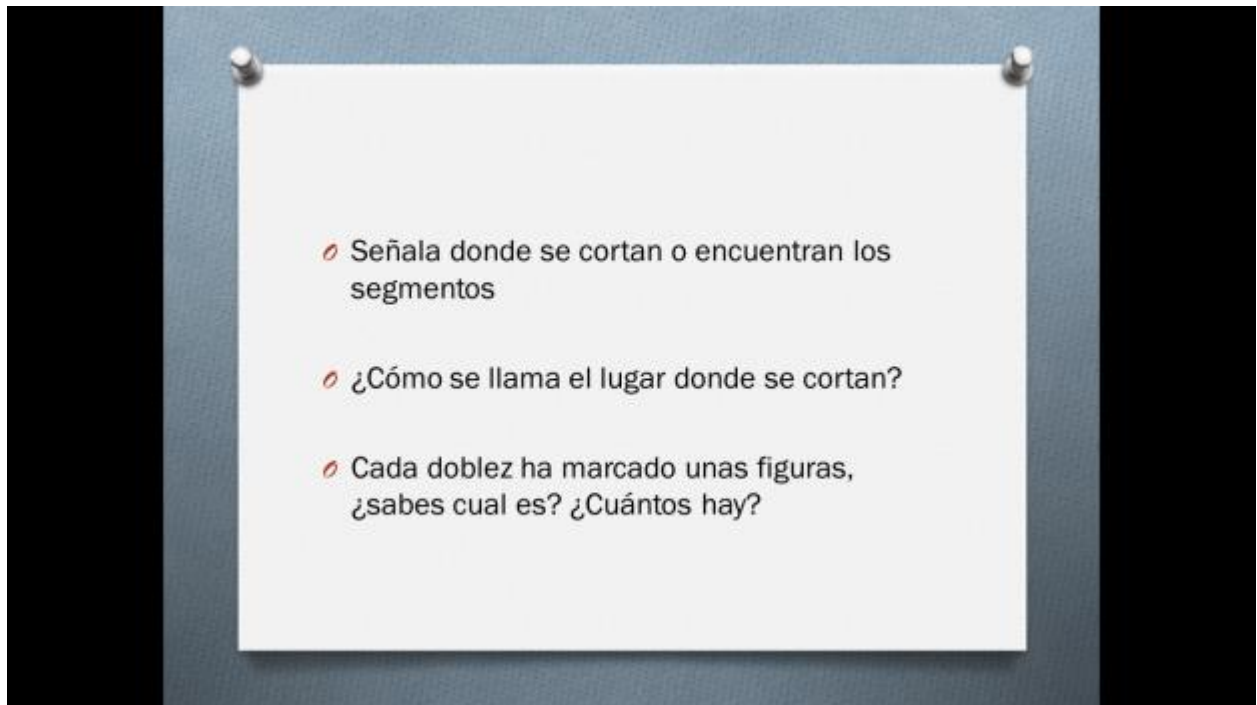


Ilustración 121. Cuento página 13.

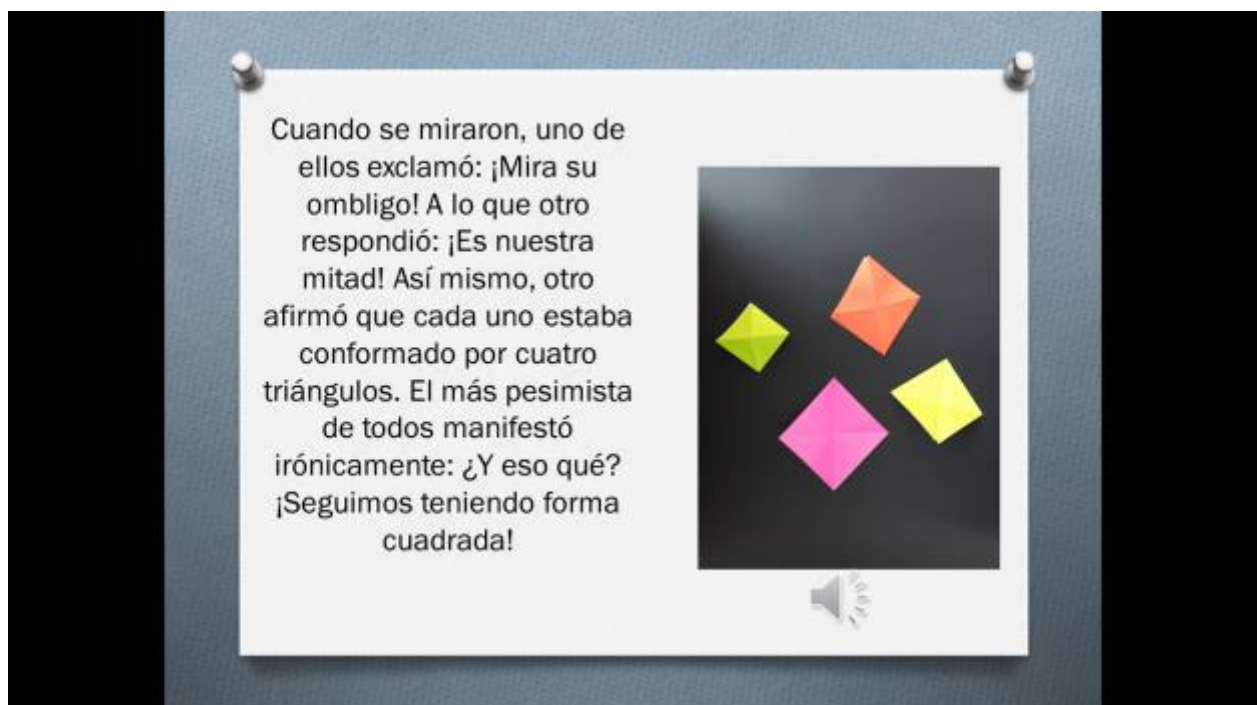


Ilustración 122. Cuento página 14.



o ¿Cada doblez ha marcado unas figuras, ¿sabes cual es? ¿Cuántas hay??

Ilustración 123. Cuento página 15.

Tristes de estar cuadrados y recordando que alguna vez fueron rectángulos, regresaron a esa forma, descubriendo varios segmentos, algunos perpendiculares entre sí; el más entusiasta de ellos, se dio cuenta que ya no contenían cuatro triángulos, sino que ya estaban conformados por ocho de estas figuras.



Ilustración 124. Cuento página 16.

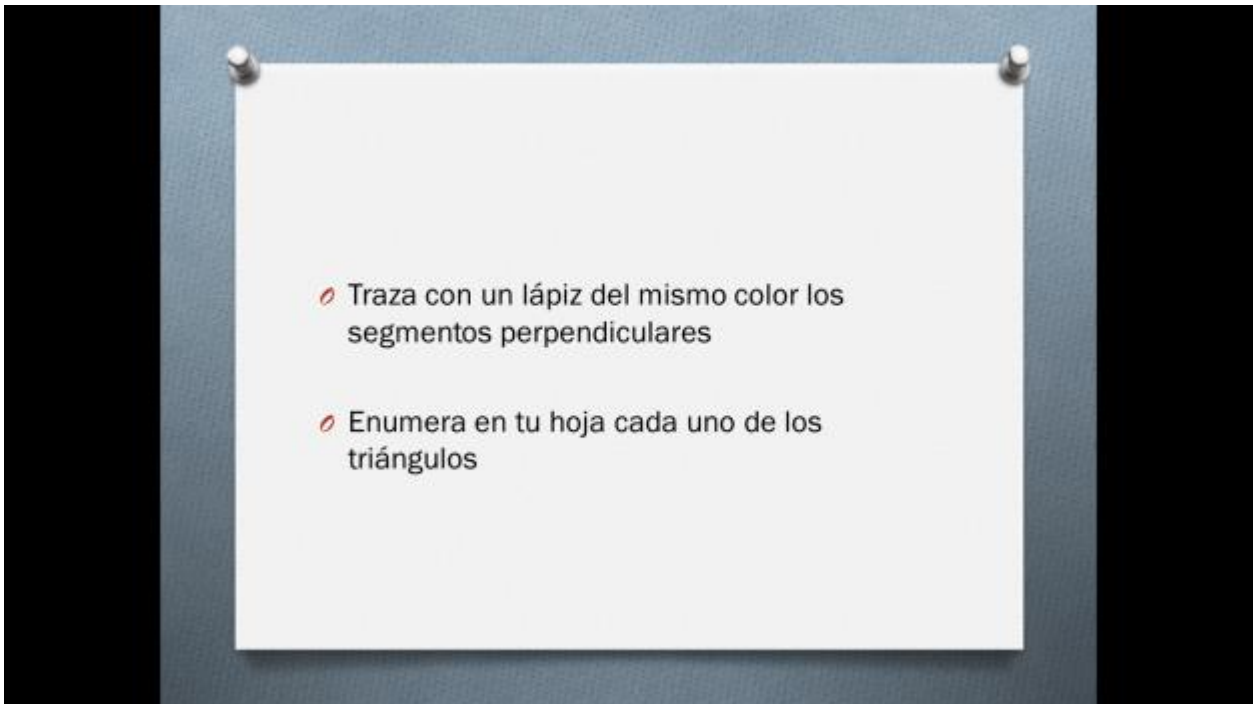


Ilustración 125. Cuento página 17.

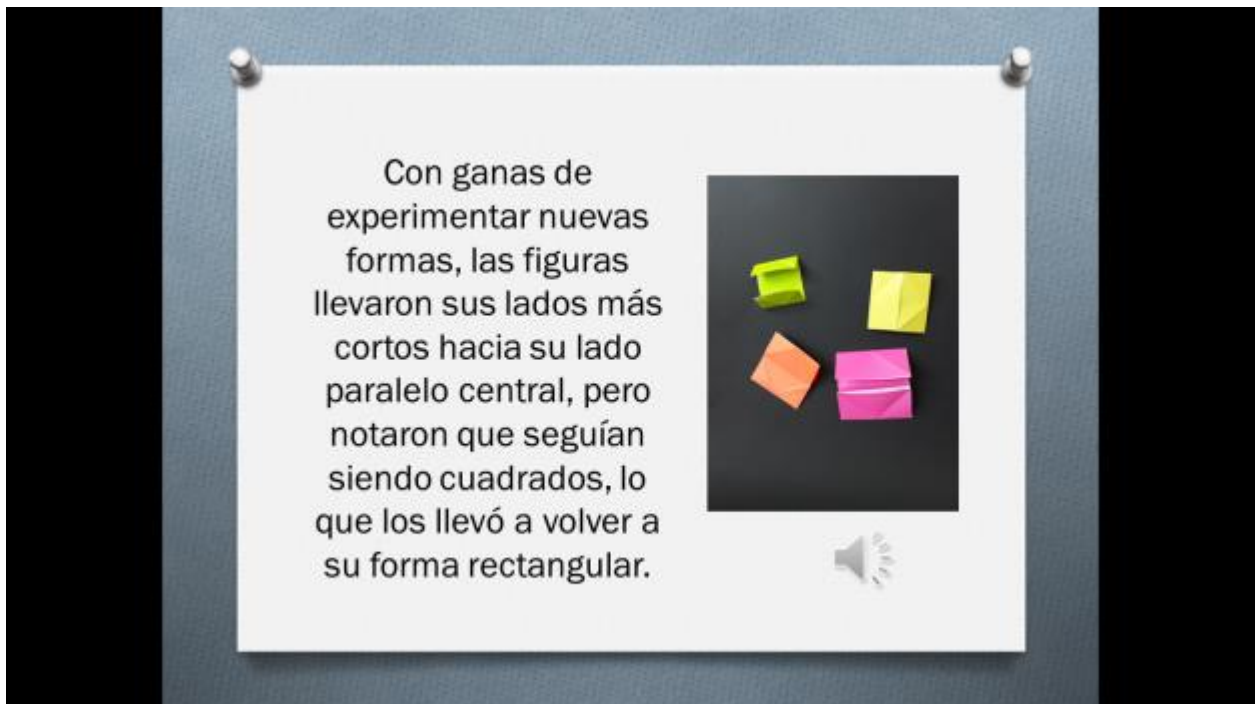


Ilustración 126. Cuento página 18.



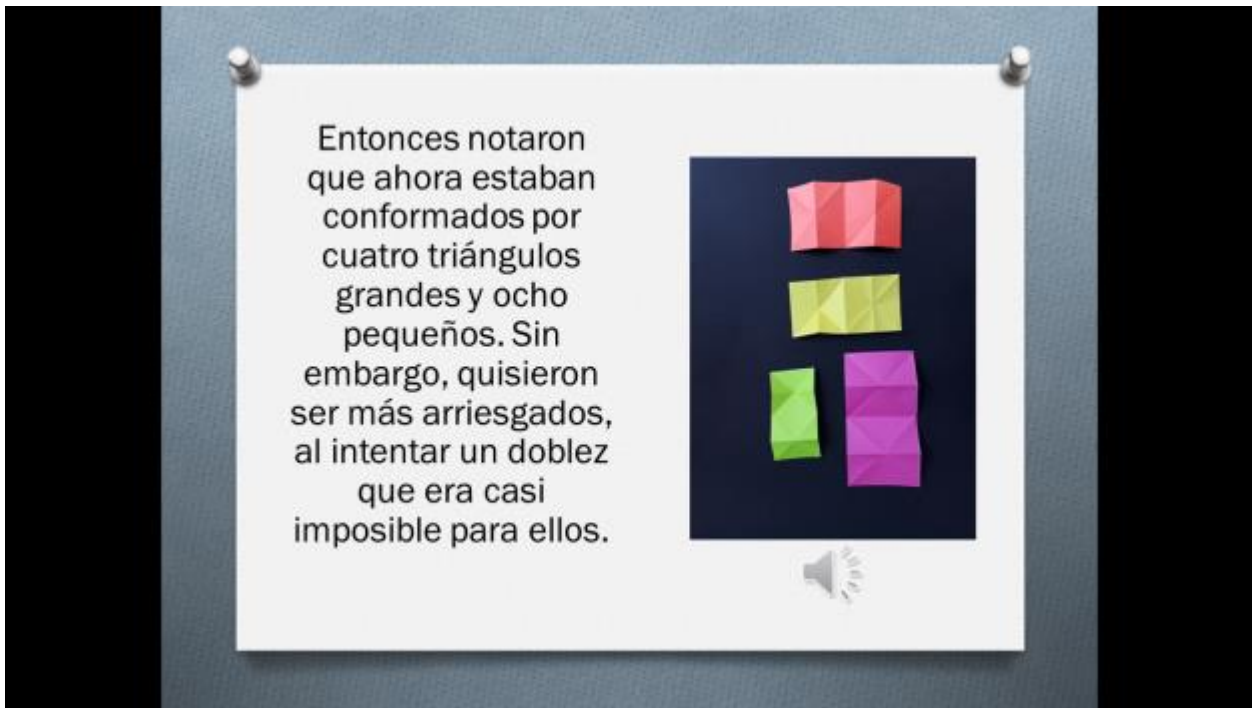


Ilustración 127. Cuento página 19.

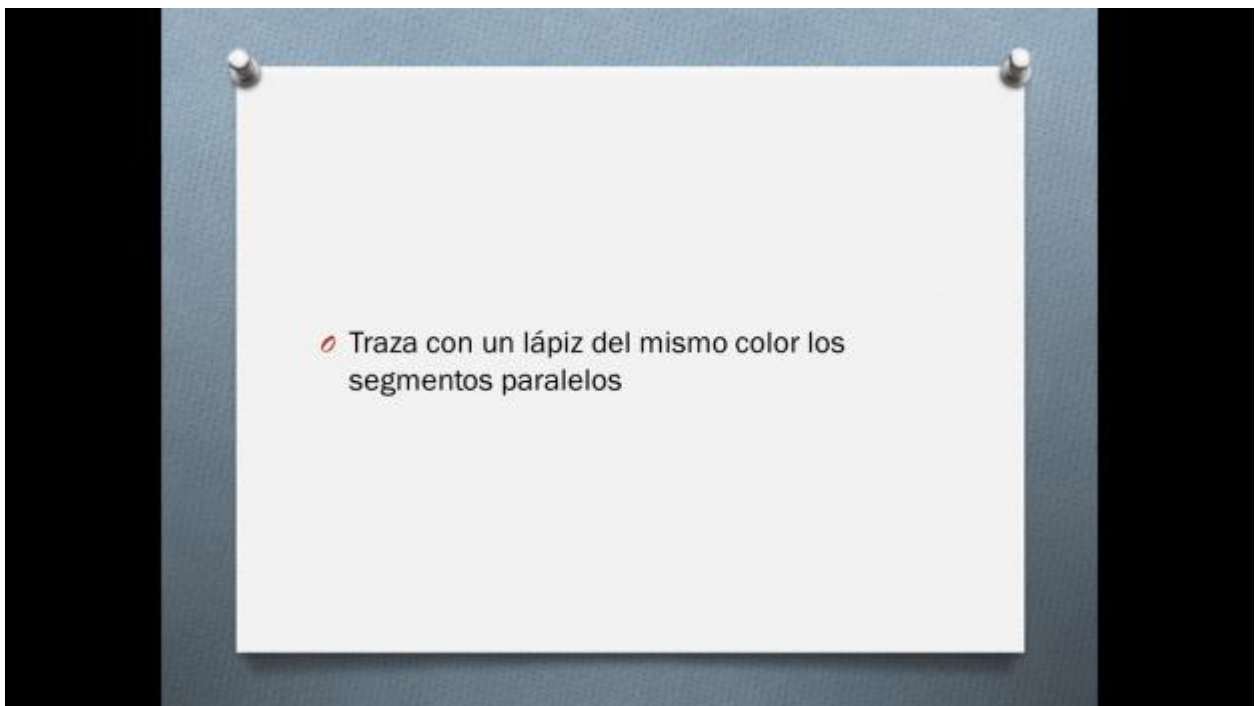


Ilustración 128. Cuento página 20.

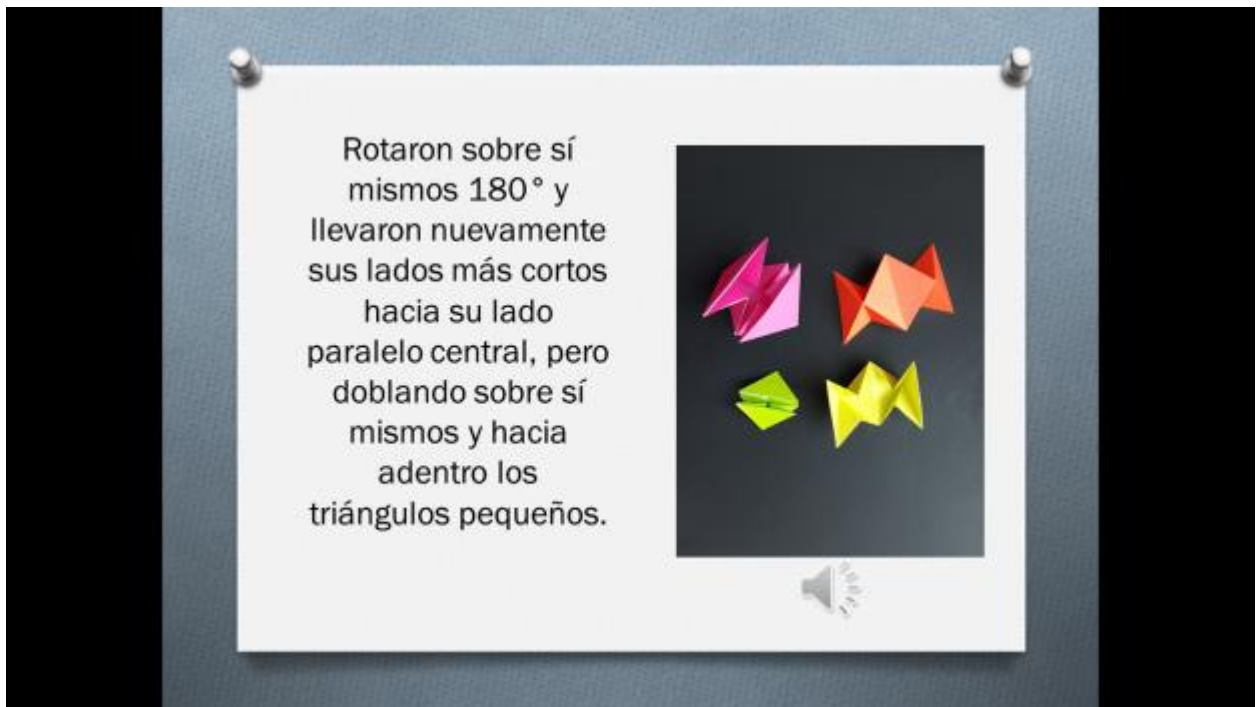


Ilustración 129. Cuento página 21.

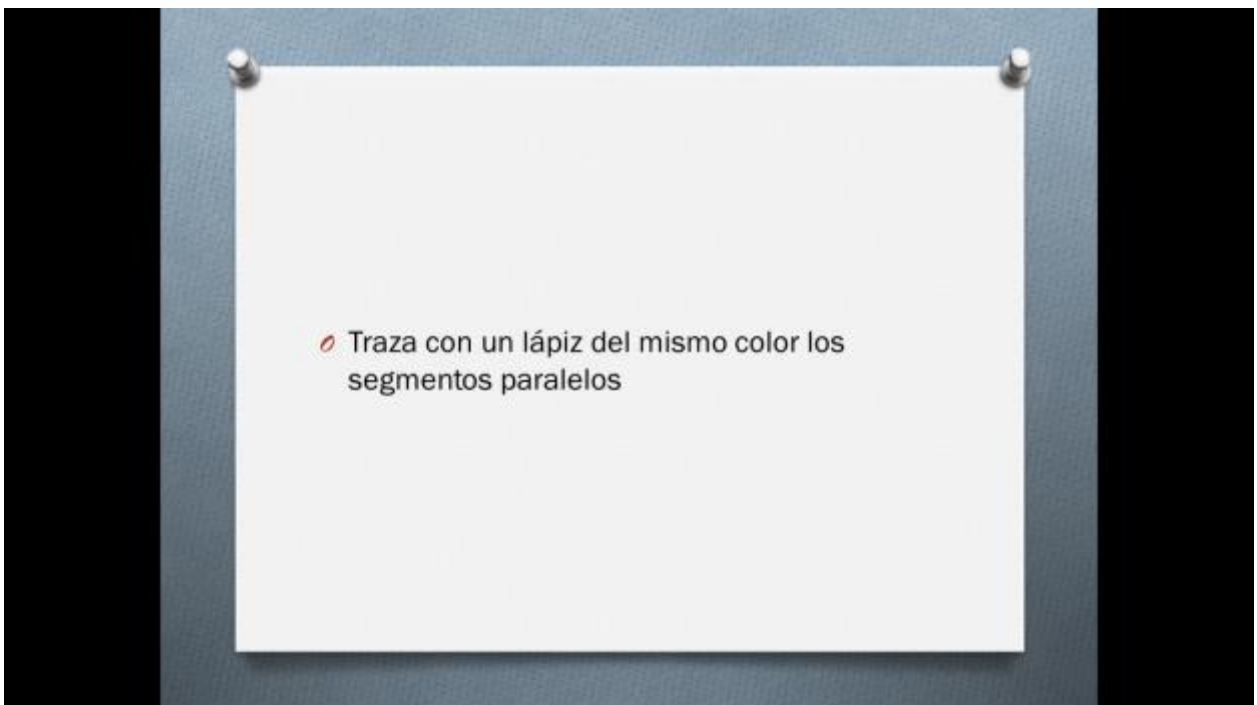


Ilustración 130. Cuento página 22.

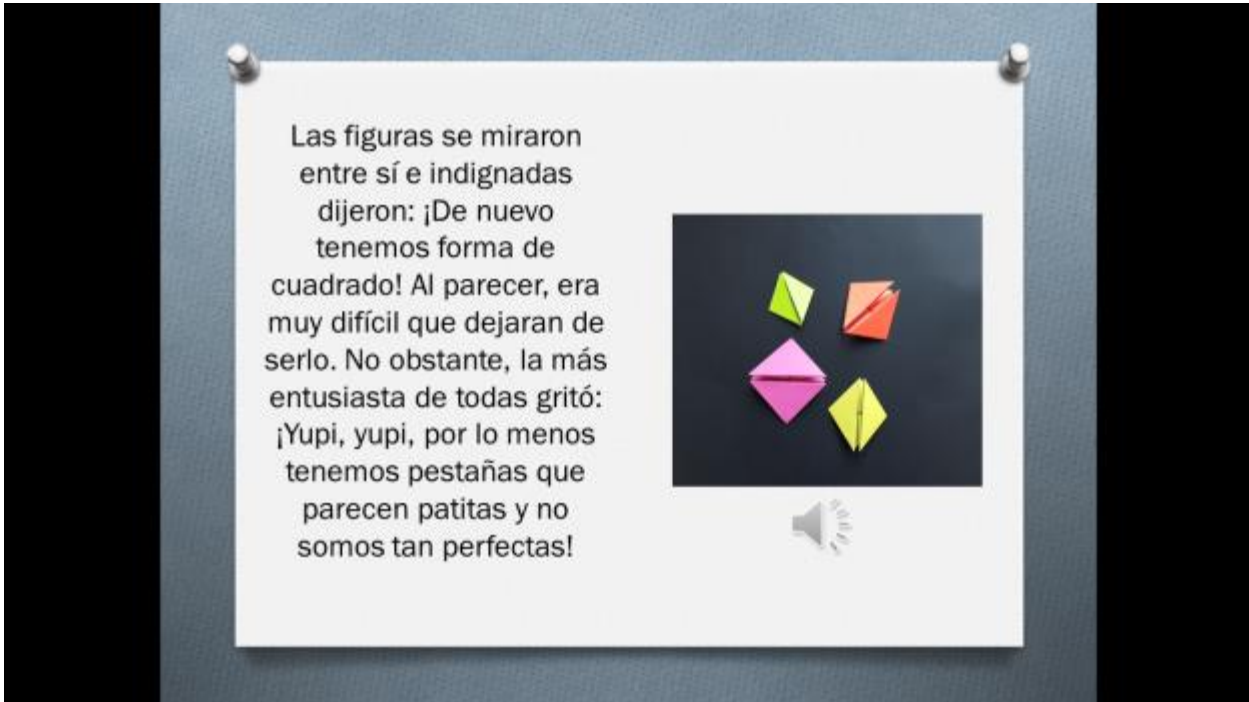


Ilustración 131. Cuento página 23.

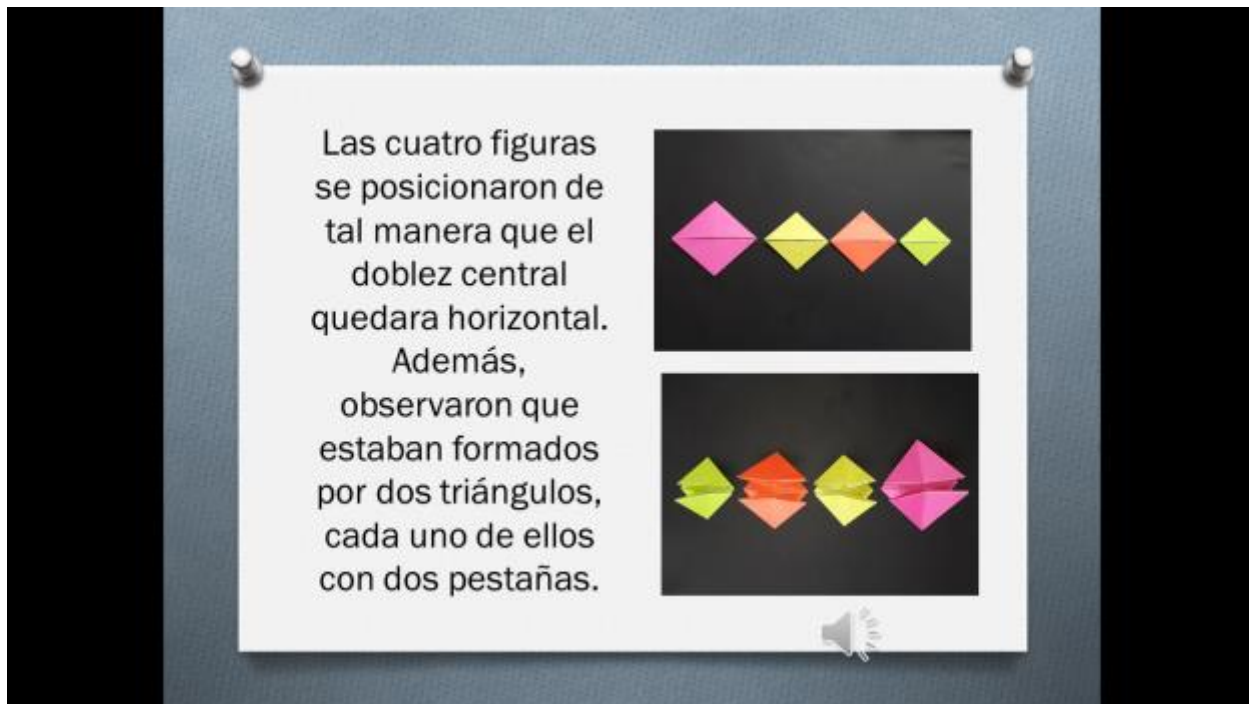


Ilustración 132. Cuento página 24.

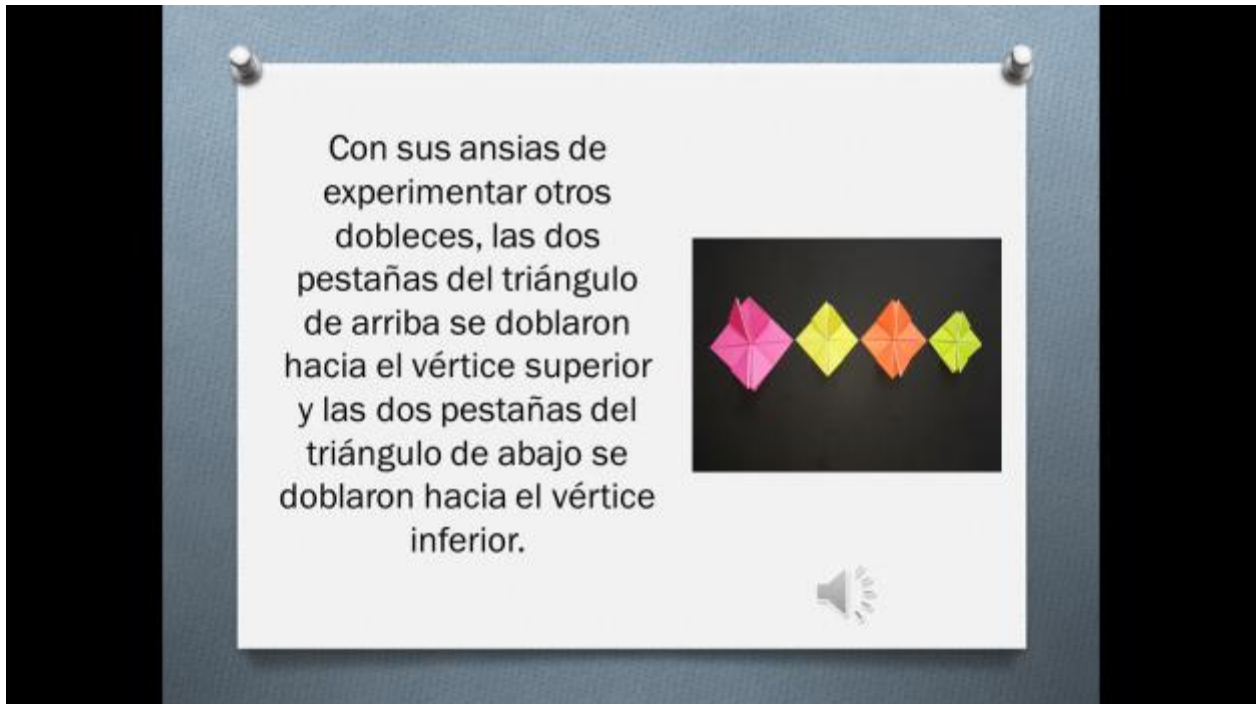


Ilustración 134. Cuento página 25.

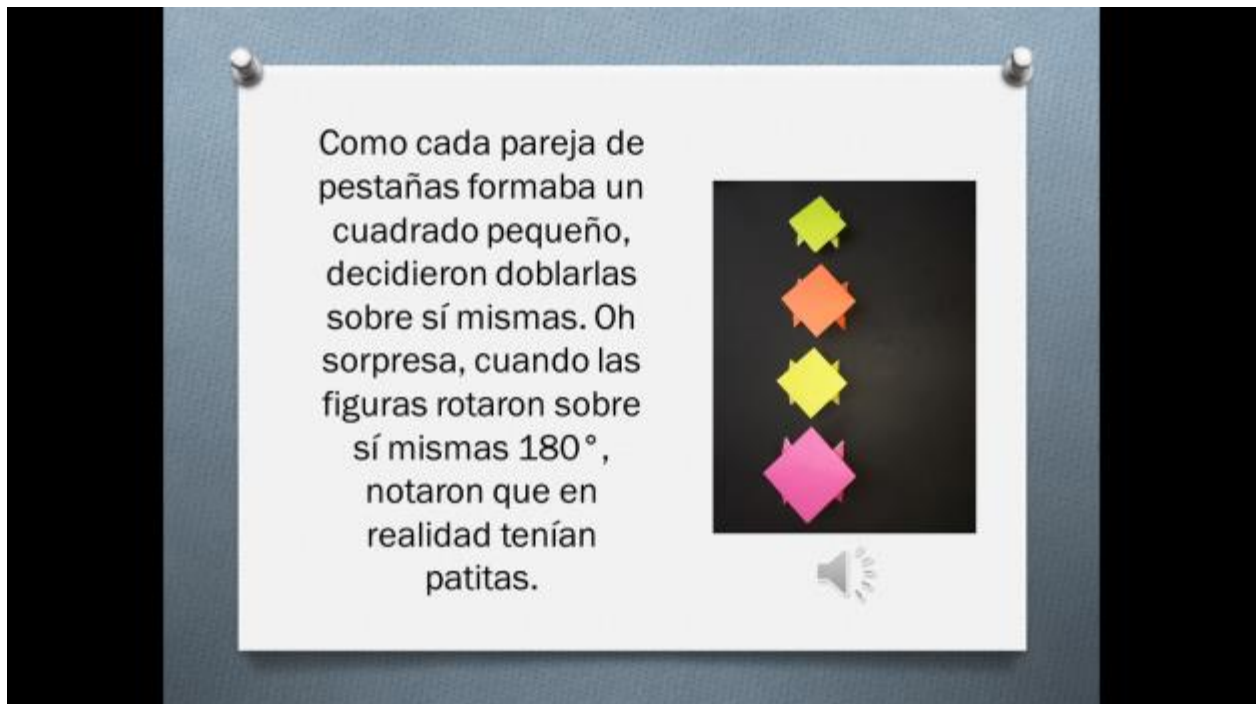


Ilustración 135. Cuento página 26.

Con el doblez central otra vez en la posición horizontal, el vértice inferior lo doblaron hacia la mitad de este doblez; posteriormente, doblaron los lados izquierdo y derecho hacia el centro vertical de la figura.



Ilustración 136. Cuento página 27.

Notaron que si guardaban las dos pestañas en forma de triángulo en los bolsillos de la pestaña inferior, tenían forma de rana, lo cual los maravilló enormemente.



Ilustración 137. Cuento página 28.



Finalmente, aquellas hojas de forma cuadrada y deseosas de aventurarse por formas diferentes a través de su fantástico viaje que las llevó a descubrirse en formas de triángulos o rectángulos, entendieron sus habilidades y características; después de este suceso que creyeron desventurado, doblando y doblando, juntas trabajando, se encontraron que su aventura en una rana las fue transformando.



Ilustración 139. Cuento página 29.



Ilustración 140. Cuento página 30.