

## SENSIBILIDAD AL DESENFQUE EN SISTEMAS CON PLACAS ZONALES HIPERBÓLICAS EQUILATERALES

*Edgar Rueda<sup>1,2,1</sup>, Juan Serna<sup>1</sup>, Alejandro Mira<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Grupo de Óptica y Fotónica, Instituto de Física, Universidad de Antioquia.*

(Recibido 07 de Sep.2005; Aceptado 12 de Feb.2006; Publicado 05 de Abr.2006)

### RESUMEN

Las placas zonales hiperbólicas equilaterales (PZHE) de foco fijo y de foco variable, las cuales exhiben un patrón focal en forma de cruz, son elementos que se emplean en sistemas de detección de desplazamientos transversales a grandes distancias, entre otros. No obstante, la forma de la cruz focal que se logra con estos elementos difractivos, se ve afectada por el desenfoque producido al hacer registros en planos a distancias distintas a la distancia focal. En el desarrollo del trabajo, se estudia como varía el patrón focal de las PZHE de foco fijo y como es afectada la precisión en la medida del desplazamiento, en planos cercanos al foco de la placa estudiada, con lo que se pretende determinar la sensibilidad al desenfoque de dichos elementos.

**Palabras claves:** Placas Zonales, Moirè, Difracción, Metrología.

### ABSTRACT

The equilateral hyperbolic zone plates (EHZP) of fixed and variable focal length, who exhibit cross focal shaped pattern, are elements used in far distance transversal detection systems, among others. Nevertheless, the shape that can be achieve with this diffractive systems, is affected by the out of focus produced when data is taken from planes at distances different to the focal distance. In this work we study how the focal pattern of a fixed focal length EHZP varies and how the precision in the measure of the displacement is affected, in planes close to the focal length of the EHPZ. With this we pretend to determine the out of focus sensibility of this elements.

**Keywords:** Zone Plates, Moirè, Diffraction, Metrology.

## 1. Introducción

En un trabajo anterior [1] se pusieron a prueba las Placas Zonales Hiperbólicas Equilaterales (PZHE) básicas y las PZHE varifocales como elementos centrales en la técnica de tres puntos [4], usada como sistema de detección de desplazamientos transversales en un montaje de prueba. Se encontró que las PZHE varifocales de codificación binaria de amplitud y bajo costo presentaban un buen desempeño según lo esperado, quedando la resolución de la medida restringida por el tamaño del pixel de la cámara CCD utilizada, siendo necesario que la magnitud del desplazamiento que se desea medir sea del orden del doble del tamaño del pixel. Las medidas se hicieron todas exactamente en el plano focal de la PZHE y usando programas de procesamiento de imágenes se ubicó de manera precisa el punto central de la cruz focal. No obstante, los algoritmos usados en dichos programas, resultaron ser difícilmente adaptables al análisis de cruces focales de menor definición. En este trabajo se estudia bajo aproximación paraxial como varía la forma de la cruz focal y cómo se afecta la precisión de las medidas hechas con una PZHE básica a medida que se aleja del plano focal.

## 2. Descripción teórica

El efecto producido por una PZHE sobre un frente de onda plano incidente, puede ser representado por medio de una función de transmitancia (codificada en fase) de la

<sup>1</sup>email: earueda@barlai.udea.edu.co

forma [2, 3]:

$$U(\xi, \eta) = \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} \phi(\xi, \eta) \right] = \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\xi^2 - \eta^2}{2f} \right) \right] \quad (1)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda,  $f$  es la distancia focal de la PZHE básica,  $\xi$  y  $\eta$  son las coordenadas del punto P donde se está evaluando el campo, y  $\phi(\xi, \eta) = -\frac{\xi^2 - \eta^2}{2f}$  que define el argumento de fase característico de una PZHE.

Para determinar la forma del campo a una distancia  $d$  de la placa, se emplea la ecuación de trazado de rayos en aproximación paraxial, lo cual nos restringe a trabajar en puntos muy cercanos al eje óptico. De este modo, se puede expandir el argumento de fase en una serie de Taylor alrededor de un punto de coordenadas  $(\xi_0, \eta_0)$ , conservando sólo los términos lineales:

$$\phi(\xi, \eta) = \phi(\xi_0, \eta_0) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{(\xi_0, \eta_0)} (\xi - \xi_0) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{(\xi_0, \eta_0)} (\eta - \eta_0) \quad (2)$$

Reemplazando (2) en la ecuación (1) y separando los términos que son constantes se obtiene

$$U(\xi, \eta) = (cte) \exp [i (k_\xi \xi + k_\eta \eta)] \quad \text{con} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{(\xi_0, \eta_0)} = k_\xi \quad y \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{(\xi_0, \eta_0)} = k_\eta \quad (3)$$

donde  $k_\xi$  y  $k_\eta$  son componentes del vector de propagación  $\mathbf{k}$ .

Ahora, si se considera la propagación del campo hasta un plano  $xy$  a una distancia  $d$  y se evalúa en un punto  $P'$  de dicho plano, se obtienen las ecuaciones de rayos paraxial:

$$x = \xi + d \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{(\xi_0, \eta_0)} \quad y = \eta + d \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{(\xi_0, \eta_0)} \quad (4)$$

Finalmente al reemplazar el argumento de fase de una PZHE en (4) y volviendo a tener en cuenta la aproximación paraxial, donde  $\xi - \xi_0 \approx 0$  y  $\eta - \eta_0 \approx 0$  se encuentra que:

$$x = \xi \left( 1 - \frac{d}{f} \right) \quad y = \eta \left( 1 + \frac{d}{f} \right) \quad (5)$$

De las dos ecuaciones anteriores se observa que para una distancia  $d = f$  se obtiene una línea focal a lo largo del eje  $y$  en  $x = 0$ . Ahora, se desea observar que ocurre con esta línea cuando  $d$  es cercano a  $f$ . Como se está trabajando bajo aproximación paraxial se restringe el número de puntos en el plano  $\xi\eta$  que aportan al campo en un punto dado del plano  $xy$ . Así, los puntos del plano  $\xi\eta$  que limitan el área que aporta al campo en el punto central del plano  $xy$  forman un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje óptico tal que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{d} \approx \alpha$$

Analizando el caso en que  $\xi = \eta$  para una distancia focal  $f$ , se obtiene

$$\xi \approx \frac{\alpha f}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

donde la escogencia de  $\alpha$  se debe hacer bajo un criterio que cumpla la aproximación paraxial.

El ancho de la línea focal  $\Delta x$  se determina reemplazando  $\xi$  por  $2\xi$  en (5), reorganizando

$$\Delta x = \sqrt{2}\alpha f - \sqrt{2}\alpha d \quad (7)$$

Esta expresión indica que la variación del ancho en función de la distancia  $d$  es lineal, proporcional a  $m = \sqrt{2}\alpha$  e independiente de la distancia focal.

### 3. Resultados

Para elegir el ángulo  $\alpha$  se realizó una simulación en LightSword de una placa con distancia focal  $f = 1000mm$ . Como el valor  $m$  es independiente de la distancia focal, se comparó el obtenido para la placa de  $f = 1000mm$  con el obtenido para una placa de  $f = 500mm$ , tanto de forma experimental como por medio de una simulación. Para ambas placas se realizaron desplazamientos longitudinales de  $1mm$  hacia adelante y hacia atrás respecto al punto focal hasta una distancia de  $10mm$  en cada dirección (ver figura 2 y tabla 1). En los experimentos, la toma de datos se hizo con una cámara CCD SONY con tamaño de pixel de  $8\mu m$  y el programa Matrox Inspector. Tanto para los datos experimentales como para los de la simulación, el ancho de la cruz se determinó utilizando algoritmos hechos en Matlab 7.04.

Tabla 1. Comparación de resultados para la placa de 500mm de distancia focal.

Resultado	Distancia focal (mm)	m	Diferencia porcentual	Correlación lineal
Simulación	1000	0.018	0.0	0.96
Teórico	1000	0.018	0.0	1.0
Experimental	500	0.0045	0.80	0.87
Simulación	500	0.031	0.35	0.99

Finalmente, para cada uno de los planos cercanos al plano focal, se estudió la fiabilidad de algoritmos hechos en Matlab para la determinación del centro de la cruz calculando el número de píxeles recorridos para un desplazamiento de  $40\mu m$ [1]. Se encontró un desplazamiento promedio de 2 píxeles en todos los planos incluyendo el focal.

### 4. Conclusiones

Se encontró que el modelo teórico es capaz de predecir la variación lineal del ancho de la cruz focal en las cercanías del plano focal (ver figura (1)).

La precisión en la medida de los desplazamientos transversales para la PZHE y distancia focal  $f = 500mm$  no se vió afectada en lo absoluto en las cercanías del plano focal. Esto nos da un indicativo de la insensibilidad del sistema al desenfoque y de la efectividad de los algoritmos utilizados para la detección del centro de la cruz.

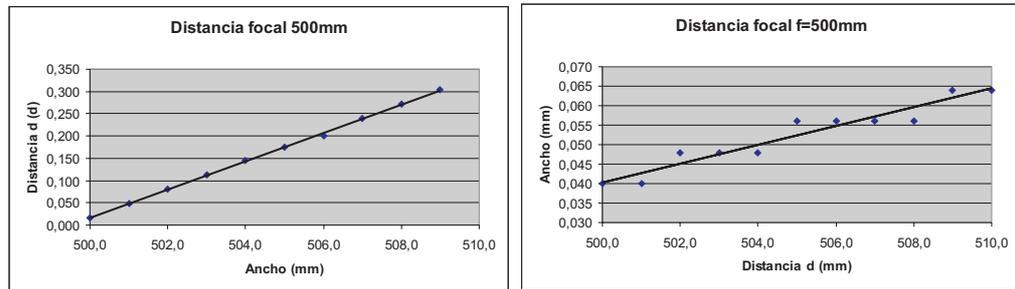


Figura 1. Variación del ancho en función de posición para simulación y experimental.

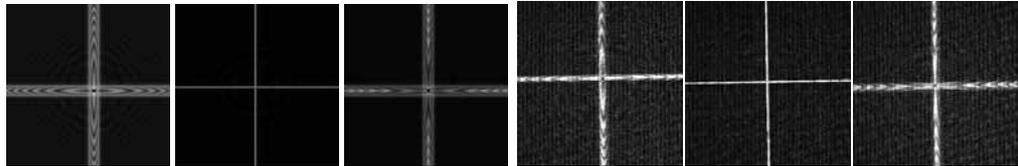


Figura 2. Imágenes de la simulación y experimentales para posición de la CCD a 490, 500 y 510 milímetros respecto de la placa.

Se observó que el patrón de difracción que aparece en la cruz focal cuando se está fuera del plano focal cambia de tal manera que es posible determinar si el detector CCD se encuentra antes o después del foco respecto a la posición de la placa. Para la posición anterior las franjas son elípticas mientras que para la posterior son hiperbólicas (figura 2).

Aunque en todos los casos la variación del ancho de la cruz focal de las PZHE fue lineal, el criterio hallado bajo la aproximación paraxial para encontrar dicha variación en función de la distancia al plano focal no está en correspondencia con los resultados obtenidos en las simulaciones y en forma experimental. Esto quiere decir que la variación si depende de la distancia focal y que es necesario emplear una teoría distinta a la paraxial.

## Referencias

- [1] A. Mira, J. Serna, R. Henao, *Detección de Desplazamientos Empleando Placas Zonales Hiperbólicas*, Memorias IX ENO, 2005.
- [2] A. Mira, *Elementos Ópticos Difractivos Obtenidos por Moirè*, Requisito para optar al título en Maestría en Física, Instituto de Física, Universidad de Antioquia, 2004.
- [3] Z. Jaroszewics, A. Kolodziejczyk, R. Henao, S. Bara, *Varifocal Equilateral Hyperbolic Zone Plates Obtained by Moirè*, Proc. of 13th Polish-Czech-Slovak Conference on Wave and Quantum Aspects of Contemporary Optics, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., **5259**, 88-91, Krzyzowa, 2003.
- [4] P. Harrison, *A Laser-based Technique for Alignment and Detection Measurement*, Civ. Eng. Public Works Rev., **68**, 224-27, 1973.