



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

**Articulación entre la caída libre y las matemáticas.  
Aportes del analizador de video Tracker**

Autor(es)

John Alexander Giraldo López

Juan Luís Arenas Bedoya

Tatiana Lopera Hernández

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2019



Articulación entre la caída libre y las matemáticas. Aportes del simulador computacional  
Tracker

**John Alexander Giraldo López**

**Juan Luís Arenas Bedoya**

**Tatiana Lopera Hernández**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

**Licenciado en Matemáticas y Física**

Asesores (a):

Mg. Jaime Andrés Carmona-Mesa

Dr. Jhony Alexander Villa-Ochoa

Línea de Investigación:

Enseñanza y aprendizaje de la Física y las Matemáticas

Grupo de Investigación:

MATHEMA

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2019

*Dedicatoria*

*A Dios, a nuestros asesores, a nuestras familias  
y en especial a la profesora Nancy Pantoja,  
cuyos consejos e interés en nosotros aportó a  
que este trabajo saliera adelante.*

## CONTENIDO

|   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| INTRODUCCIÓN .....  | 1                                    |
| 1.1. Planteamiento del Problema .....                                     | 1                                    |
| 1.2. Justificación .....  | 2                                    |
| 1.3. Objetivo .....   | 5                                    |
| 2. MARCO TEÓRICO .....  | 5                                    |
| 2.1 Conexiones entre las matemáticas y la física .....                    | 6                                    |
| 2.2 ¿Cómo lograr una integración entre las matemáticas y la física? ..... | 11                                   |
| 3. METODOLOGÍA .....  | 18                                   |
| 3.1 ¿Qué es un diseño metodológico? .....                                 | 18                                   |
| 3.2. ¿Por qué escogimos el enfoque cualitativo? .....                     | 19                                   |
| 3.3. Estudio de casos .....   | 20                                   |
| 3.4 Descripción de los participantes .....                                | 21                                   |
| 3.5 Ético .....   | 21                                   |
| 3.6 Diseño de tareas .....  | 22                                   |
| 3.7 Criterios de evaluación .....   | <b>¡Error! Marcador no definido.</b> |
| 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS .....  | 27                                   |
| 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....                                   | 35                                   |
| 6. REFERENCIAS .....  | 37                                   |
| ANEXOS .....  | 41                                   |

**LISTA DE FIGURAS**

FIGURA 1. Tracker rastreando la caída de un balón.....47

## RESUMEN

En este estudio se cuestiona en qué medida las matemáticas y la física pueden integrarse en los procesos educativos y no necesariamente de forma aislada. A pesar de existir investigaciones que reconocen una fuerte relación entre las matemáticas y la física, se recomienda que esta relación se implemente de manera explícita en el cotidiano escolar pues persiste el problema de reconocer las diversas conexiones que entre ellas se presentan. En este sentido, se propone identificar posibles contribuciones de articular conceptos físicos y matemáticos en la comprensión de la caída libre por medio del analizador de video Tracker. Para atender a dicho objetivo, se analizaron casos específicos de estudiantes de un colegio privado de Medellín con los que se implementaron dos actividades; una de ellas, directamente relacionada con el analizador de video. Los resultados de esta implementación muestran formas de articular la enseñanza de las matemáticas y la física y se concluye que el software, además de posibilitar la vinculación de forma activa y dinámica al estudiante en su proceso de aprendizaje, potencia relaciones más constitutivas de las matemáticas y la física, específicamente en el trabajo de la caída libre.

**Palabras clave:** Caída Libre, Tracker, Pendiente, interdisciplinaridad.

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Planteamiento del Problema

En el transcurso de nuestra vida académica, en especial, en el pregrado, nos cuestionamos continuamente en qué medida las matemáticas y la física podrían integrarse y no estudiarse de tal forma que pareciera haber una “ruptura” entre las dos. Esta ruptura puede entenderse como la desconexión de los conceptos matemáticos al ser requeridos en la representación y comunicación de fenómenos físicos. Al profundizar al respecto, encontramos que interrogantes iguales o similares se plantean en diferentes investigaciones que trascienden al campo internacional; por ejemplo, Tan *et al.* (2017) en el trabajo de investigación acerca de un curso integrado de física y matemáticas, observaron cómo estudiantes universitarios son capaces de resolver la parte de matemáticas durante la lección de matemáticas, pero son incapaces de evaluar las preguntas de matemáticas similares o aún más fáciles durante las clases de física.

Complemento a lo anterior, se registra la investigación de Redish y kuo (2015) que busca relacionar el lenguaje de la física con el lenguaje de las matemáticas, ofreciendo una serie de ejemplos que muestran cómo esta relación difiere de un uso exclusivo en el contexto intramatemático. En esta investigación se resalta que, a pesar de existir investigaciones acerca del aprendizaje de las matemáticas y la física, persiste la necesidad de cómo hacer efectiva la inclusión interdisciplinar más efectiva entre ambas, lo cual ratifica el desafío que representa lograr procesos educativos interdisciplinares en la escuela, principalmente entre áreas como matemáticas y ciencia (Carmona, Arias y Villa, 2019).

A partir de ello nos surgen cuestionamientos en relación a la forma como se desarrolla el proceso de enseñanza de las matemáticas y la física y la relación entre ellas. De modo que nos vemos en la tarea de responder a preguntas tales como: ¿es necesario que esté articulada la enseñanza de las matemáticas con la física?, de ser así, ¿por qué es necesario?, para finalmente mirar, ¿cómo lograrlo? Cabe aclarar que no todo se puede

articular, pero es posible encontrar elementos que necesiten de una articulación. Por ejemplo, Doorman y Gravemeijer (2009) nos muestran que al entender cómo se organizó el cálculo y la cinemática históricamente, aportaría a evitar que los estudiantes adquieran un uso instrumental de símbolos matemáticos sin entender la representación de los conceptos. De forma similar, Freudenthal (1991) insiste en que la comprensión final de los estudiantes de matemáticas debe mantenerse conectada con su comprensión de los fenómenos experiencialmente reales de la vida cotidiana.

A partir de estas problemáticas no ajenas al entorno educativo local, que afecta tanto a estudiantes como a docentes de física y de matemáticas, se intentó aportar en la disminución de la brecha que se ha reportado entre las matemáticas y la física por medio de estrategias tecnológicas como lo son los analizadores de video, en especial Tracker, del cual también se reportan hallazgos en investigaciones educativas.

## **1.2. Justificación**

La investigación en el campo educativo permite generar conocimiento con relación a los procesos de educativos, se busca comprender el rol social de la escuela y su función respecto del vínculo social (Ardiles, 2009). En ese sentido, se puede entender que la educación es un proceso para formar, desarrollar, transformar y construir en los estudiantes esquemas de pensamiento que los enfrente a nuevos retos en el pensar, el sentir y en el hacer en contexto, como es el caso de los procesos interdisciplinarios. De otra parte, complementa Ardiles (2009), se conoce que el centro del proceso educativo es el estudiante; sin embargo, el proceso de enseñanza no puede subordinarse a la demanda del educando, olvidando la rica experiencia de los docentes y condenándolos a una actitud inmovilizable. Adiciona lo anterior diciendo “si no se propone y se construye algo que permita trabajar juntos para entrar en el juego y comprometerse a partir de una anticipación razonada, es difícil pensar en condiciones para aprender” (p. 308).

Con base en dichos puntos de vista, corresponde al docente ser mediador y buscador de mecanismos que permitan el mejoramiento del proceso de enseñanza interdisciplinarios



(Carmona, Arias y Villa, 2019); por lo cual, previa identificación de la problemática abordada sobre la desarticulación de lo aprendido en matemáticas al necesitar su uso en la clase de física, justifica la realización de la presente investigación mediante la profundización en la literatura que existe al respecto y las estrategias pedagógicas aportadas por la tecnología en un mundo comunicado globalmente por esta.

Para llevar a cabo esta investigación, se revisaron experiencias del uso de la tecnología en el campo educativo (p. ej. Cardona y López, 2017; Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa; 2018; Martínez, Susano y Espinosa, 2015), y se logró identificar que una posibilidad es el uso de los analizadores de video. Partimos de las garantías legales colombianas y distintas fuentes consultadas que muestran investigaciones de diversa índole en diferentes países, para que la dicotomía presentada entre las dos áreas que parecen no tener ninguna relación sea superada en alguna medida; esto es, articulación o conexión entre las matemáticas y la física para dinamizar su enseñanza.

Dentro de los garantes legales está la Constitución Política de Colombia (1991), en apartes relacionados con los Derechos Fundamentales “El Estado garantiza las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra” (República de Colombia, 1991). En ella se brinda la posibilidad de buscar, mediante la investigación o estudios, la mejora de los procesos de enseñanza. Hecho este al que están llamados todos los agentes que tienen que ver con la educación. De igual manera, *la Ley General de Educación (MEN, 1994)*, contempla como objetivo específico:

El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos, de operaciones y de relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana. (Ministerio de Educación de Colombia (MEN), 1994).

En estos apartes se destaca la importancia de las matemáticas, sus operaciones y relaciones para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, es importante tener presente que la física como parte fundamental de las ciencias naturales, ha generado leyes universales con apoyo de las matemáticas. Al respecto, Karam (2014), afirma que “La Filosofía Natural (Física) es y debe ser matemática, es decir, la ciencia en la que las leyes

en relación con la cantidad, se tratan de acuerdo con los principios del razonamiento preciso”. Además, este autor considera que para la investigación de la naturaleza, las matemáticas son lo principal y la mejor creación del hombre, ya que contribuyen a la comprensión y dominio del mundo físico; sin embargo, la imagen que se tiene desde la antigüedad en contextos educativos no es la de dos asignaturas profundamente interrelacionadas, sino que las matemáticas son vistas como una mera herramienta para calcular y poder describir; caso contrario sucede en la educación matemática, en la cual se ve a la física como la aplicación de los conceptos que esta trata de manera abstracta.

También justifica esta propuesta Redish y Kuo (2015), basados en el trabajo realizado acerca del lenguaje de las matemáticas y la física que abordan el problema de cómo hacer efectiva la inclusión de las matemáticas y la física para que llegue a la mayoría de estudiantes, debido a que los estudiantes utilizan el lenguaje matemático y las ecuaciones sin hacer efectiva la dinámica del razonamiento. Además, expresan que el problema es que los estudiantes no han aprendido lo que se les enseñó en la clase de matemáticas; ya que no son capaz de actuar en otros campos, por eso luchan con la manipulación de conceptos matemáticos básicos, debido a que tienen dificultades para traducir la simbología, lo que hace que el significado sea distinto en una clase y otra. En ese sentido, sugieren que este problema aún no está resuelto y, por tanto, se debe hacer una exploración más amplia por parte de los docentes. Es ahí en donde encontramos el impulso para buscar mecanismos que permitan ese acercamiento entre las dos áreas. Por lo tanto, se aplicó una propuesta educativa direccionada al aula, con alumnos de grado 10° de un colegio privado de la ciudad de Medellín, mediante el uso de analizadores de video en la caída libre. La metodología estará centrada en un estudio cualitativo y concretamente el que se conoce como estudio de caso.

De acuerdo con los planteamientos mencionados, la investigación se propone aportar en alguna medida en la articulación de conceptos matemáticos y físicos al trabajar la caída libre. Para ello, el paso siguiente fue buscar alternativas que apoyaron en alternativas para superar la problemática, evaluar el trabajo en el aula y profundizar en metodologías que cooperen a dicha articulación. Fue así como se encontraron

investigaciones que muestran en sus hallazgos una mejora significativa con el uso de analizadores de video, de las cuales se profundiza en el siguiente capítulo.

### **1.3. Objetivo**

Identificar posibles contribuciones de articular conceptos físicos y matemáticos en la comprensión de la caída libre por medio del analizador de video Tracker.

## **2. MARCO TEÓRICO**

Toda investigación está motivada por algo que inquieta, que se desea profundizar o en lo posible solucionar. En el caso del presente trabajo, las motivaciones están dadas alrededor de lograr que la física y las matemáticas se integren en la enseñanza de la caída libre, esto es, que las teorías y relaciones matemáticas, tengan sentido al analizar dicho fenómeno físico. De acuerdo con la Real Academia Española integrar es hacer que alguien o algo pase a formar parte de un todo, es aunar, fusionar, dos o más conceptos, divergentes entre sí, en uno solo que los sintetice.

En este orden de ideas, al referirnos en esta investigación a integrar los conceptos matemáticos y físicos se trata de que, aun conservando la esencia de cada área, logren hacerlo en un mismo contexto. Un ejemplo típico de esto sucede al abordar el tema Movimiento Armónico Simple (MAS) cuyas gráficas son sinusoidales, para el cual es necesario retomar conceptos tratados específicamente en la Función Seno, como son amplitud y periodo, por mencionar algunos, y al intentar hacer la conexión matemático-física, el estudiante no siempre logra establecer esa relación e interpretar qué se puede deducir del fenómeno estudiado.

En la búsqueda de literatura acerca de las investigaciones que se han realizado con relación a la desarticulación entre las matemáticas y la física y las estrategias que se han implementado para contribuir a articularlas, se encuentran estudios tanto a nivel

internacional y nacional. Existen diversas investigaciones movilizadas por cuestionamientos similares que muestran avances, al tiempo que invitan a profundizar y aportar más elementos, como se evidencia a continuación.

## **2.1 Conexiones entre las matemáticas y la física**

Las inquietudes acerca de la enseñanza de la física y su relación con las matemáticas se remontan al siglo XVII (Marc y Leblond, 2011), la existencia de dicha relación especial entre las matemáticas y la física, tiene carácter universal, tal como lo expresó Galileo Galilei (1623) en su obra *Il Saggiatore* en la cual afirma que “la filosofía (natural) está escrita en ese inmenso libro que tenemos abierto ante los ojos (quiero decir universo) pero no se le puede entender si antes no se aprende a entender la lengua y los caracteres en que está escrito; el lenguaje de las matemáticas” (Galilei, 1623, citado por L'esayeur, 1980), esta frase resume que para entender los fenómenos naturales no bastan las palabras, se es necesario del lenguaje universal de las matemáticas.

Estas afirmaciones cobran importancia por el propósito de esta investigación centrada en la relación cuantitativa y conceptual necesaria para la física, tal como lo dan a entender Marc y Leblond (2011) la física utiliza con éxito las matemáticas; sin embargo, están cargados de presupuestos, ¿cómo puede ser que las matemáticas, consideradas en general como estudio de abstracciones puras, “funcionen” en física, si es considerada como la ciencia de lo concreto por excelencia? No obstante, es notorio que ninguna de las construcciones abstractas que la matemática realiza con necesidad de perfección lógica y generalizante, haya de permanecer sin utilidad para el físico. Para responder a este cuestionamiento, Marc y Leblond (2011) dicen que científicos y filósofos concluyen en su gran mayoría que las matemáticas son el lenguaje de la física.

A su vez, alrededor de la palabra “lenguaje” existen muchas interpretaciones, de una parte, porque el pensamiento se preocupa por construir una representación adecuada de la realidad y dan la sensación de haber sido previstas por el análisis lógico y la estética de las matemáticas, y de otra parte, el creer que las matemáticas pueden adaptarse a los objetos de nuestra experiencia, lo que sería ideal. Para corroborar lo expresado por Galileo es

conveniente retomar lo que al respecto dijo Einstein “de acuerdo con nuestra experiencia hasta el momento, tenemos derecho a estar convencidos de que la naturaleza es la realización del ideal de la simplicidad matemática”. Lo cual invita a pensar en que la naturaleza y el lenguaje matemático son perfección, precisión, armonía y la una es representación de la otra.

En ese orden de ideas, se evidencia que, desde épocas remotas hasta la actual, se ha intentado dar respuesta al papel de las matemáticas en la física y de la física en las matemáticas como lo muestran en el aparte anterior las frases célebres de Galileo y Einstein por mencionar algunas y como favorecer al aprendizaje del lenguaje abstracto, propio de las matemáticas, formulado en leyes universales pero una limitante para el estudiante. Al ubicarnos en este milenio se destaca la investigación realizada por Hansson, Hansson y Juter (2015), en la cual analizan el papel de las matemáticas en el desarrollo de las clases de física en la escuela secundaria mediante siete lecciones con resolución de problemas, conferencias y laboratorios. Dicha investigación apunta a que las matemáticas son inherentes a los modelos teóricos de la física y a los fenómenos naturales por la predicción que hace de ellos, debido a que la capacidad de usar modelos y matemáticas se convierte en el eje en la física.

Esto ha llevado a que en la enseñanza de la física, las debilidades matemáticas se vean como un obstáculo para su aprendizaje. Como ejemplo a esta afirmación, un estudio adelantado de las pruebas de Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) discute que los bajos resultados de estudiantes suecos en física, son atribuidos a la disminución de los conocimientos matemáticos que afectan los procesos de enseñanza; situación que permea posteriormente a la educación superior (Hansson et al, 2015). Esto invita a fortalecer las relaciones entre los conceptos matemáticos y físicos desde secundaria con proyección a la educación superior.

Por lo cual se debe empezar a familiarizar al estudiante con la conexión entre las dos áreas, en tal sentido, mencionan consideraciones como: cuando el papel de las matemáticas es “técnico”, las matemáticas se consideran como mera herramienta de cálculo; en cambio si el papel de las matemáticas es “estructural” pasan a ser “instrumento

de razonamiento”, que conllevan a que la instrucción sea de interpretaciones o consecuencias de fenómenos físicos (Karam, 2014).

Otro aporte basado en Due (2009) está relacionado con cierta confusión de parte de los docentes al creer que los estudiantes que son capaces de resolver problemas estándar de física tienen también buena comprensión de los conceptos y modelos matemáticos; sin embargo, la investigación muestra que no siempre es así, debido a que los estudiantes tienden a buscar una fórmula ajustada a los números o datos del problema, es decir, acomodan los datos con las ecuaciones que los relacionen, pero al tratar de dar explicación de la realidad y los modelos, presentan dificultad.

En el mismo sentido, Tan *et al* (2007) hablan de una experiencia realizada durante cinco días en un curso preparatorio en una Universidad de Singapur, procuraron que los estudiantes relacionaran los temas matemáticos con la física, ya que estas áreas se han trabajado como sujetos individuales. Los autores expresan que algunos estudiantes ven las matemáticas como meras fórmulas sin aplicación, lo que provoca que pierdan interés. Y complementan, “varios estudiantes están en capacidad de resolver la porción de matemáticas durante la lección de matemáticas, pero no pueden responder preguntas similares durante la clase de física” (p.1148)

Con el fin de lograr el objetivo de que los estudiantes que apenas iniciaban su pregrado encuentren la vinculación entre las asignaturas, Tan *et al* (2017) hizo una planeación de manera que la física sea aplicación de las matemáticas. Su estrategia se planteó de tal forma que al comienzo mezclaron temas de matemáticas y de física, empezando por una revisión de “Funciones y Trigonometría”, y con ellas se introdujo los conceptos de Cinemática como Desplazamiento, Velocidad Media, Velocidad Instantánea, Aceleración, entre otros. Estos autores logran en los estudiantes la comprensión de área bajo la curva, la integración, el vector y la energía.

Para evaluar la pertinencia de su curso integrado Tan *et al* (2017) hacen una comparación entre las dos opciones de trabajo, esto es, iniciar con las temáticas de física como motivación para las matemáticas y abordar al inicio los temas de matemáticas para ser llevados a los conceptos de la física. Los datos recolectados indicaron que si abordaban primero los conceptos de física para servir de motivación para cubrir luego las matemáticas

no fue adecuado para los estudiantes elegidos al azar ni para los instructores; debido a que la cantidad de contenido que debe aprender un estudiante puede ser demasiado. Para este caso recomiendan que se aplique a temas de física que generalmente son más fáciles de entender.

Con relación a introducir primero las temáticas de las matemáticas para abordar luego la física, tanto los alumnos como los instructores determinaron que era la más positiva por el hecho de que la primera apoya a la segunda y a su vez se ve la aplicabilidad de las matemáticas, se logra ver la relación entre ellas en las discusiones de la clase. Tan *et al* (2017) finalizan diciendo, a diferencia de casos en los cuales cada materia se enseña por separado, la enseñanza integrada requiere mayor nivel de coordinación entre los docentes o instructores para la planificación y ejecución del plan de trabajo y si la institución académica crea un entorno para permitir que los estudiantes aprecien mejor el vínculo entre las materias; este se convierte en un componente importante para preparar a los estudiantes para su vida laboral. Así mismo refieren que, al enseñar y evaluar como asignaturas separadas, da como consecuencia resultados no deseados. Por tanto, los autores enfatizan en la importancia del aprendizaje entre conceptos integrados, con lo cual aseguran que es posible la articulación, mediada por una planeación acorde.

En esa misma línea de reflexión acerca de la desarticulación de las matemáticas y la física, se encuentra la investigación realizada por Romero y Rodríguez (2005), ellos parten afirmando que hay dos formas posibles como se dan las relaciones entre la física y las matemáticas. En un primer caso se trata de la indagación histórica- epistemológica de la física con fines pedagógicos y un segundo caso, la modelación en física. Nuestra investigación acoge la segunda propuesta de este autor.

En concordancia con lo anterior, Laird (s.f) citado por Malagón (1988) con relación al enfoque de modelación dice que, los modelos conforman la esencia del conocimiento científico y la modelación es la actividad sistemática a través de la cual se puede cimentar y aplicar este conocimiento. Este enfoque se basa en algunos presupuestos epistemológicos, siendo quizás uno de los más relevantes aquel que afirma, que nunca llegamos a conocer los objetos “en sí”, sino por medio de representaciones de ellos; es decir, todo nuestro

conocimiento conocido como “mundo exterior” depende de la habilidad nuestra para construir modelos de él.

Como consecuencia, al hacer cualquier integración entre diversas disciplinas implica comparar y relacionar entre sí modelos y diversas estructuras entre estos. Tal como lo expresa Castro, Rico, y Romero (1997) “hacer matemáticas no es solamente la manipulación de símbolos matemáticos, al construir o explorar sistemas matemáticos, lo que interesa son las propiedades estructurales y no los elementos aislados dentro del sistema ni las reglas aisladas que actúan sobre esos elementos”. En el mismo sentido, cuando finalizaba el segundo milenio ya se había pronunciado al respecto Lesh (1997) al afirmar que, para matematizar situaciones problemáticas y utilizar representaciones matemáticas, estas actúan como simplificaciones de sistemas externos y también como externalizaciones de sistemas internos.

Para algunos autores la forma de plantear propuestas didácticas es por medio de casos de cómo se constituyen y formalizan conceptos físicos particulares donde se podrá explicitar el uso de representaciones y establecimiento de modelos que formalicen la identificación y cuantificación de magnitudes importantes (Moreno, Galiazzi y Pino, 2017). Por ejemplo, Romero y Rodríguez (2005) abordaron desde diferentes teorías y discusiones las relaciones entre, el concepto de velocidad instantánea y su formalización, el movimiento desde una perspectiva fenomenológica, perspectiva Galileana del movimiento: la velocidad instantánea, la representación cartesiana y la formalización del concepto de velocidad. Además, estos autores aseguran que formalizar una magnitud física no consiste solamente en asignar cifras a las propiedades y manipularlas a través de algoritmos, ni debe remitirse a la manipulación de instrumentos para obtener datos: “se trata, ante todo, de un problema de adecuación entre las formas de razonamiento – el pensamiento numérico o el geométrico- y las fenomenologías identificadas” (p. 137). En la forma como se traten las variables dependiente e independiente y sus relaciones dependerá el no caer en contradicciones, tanto en su cuantificación como en su representación cartesiana, ya que en ciertos casos es necesario incluir conceptos de mayor nivel como el límite y la continuidad. Con lo cual aportan elementos importantes para lo que nos proponemos en esta investigación al ratificar



que debe primar el razonamiento y la interpretación por encima de la manipulación o mecanización de reglas matemáticas en su relación con los conceptos físicos.

## 2.2 ¿Cómo lograr una integración entre las matemáticas y la física?

La matematización de un fenómeno no consiste solamente en asignar cifras o manipular símbolos matemáticos, también consiste en identificar las magnitudes, sus relaciones, procedimientos apropiados para representarlos y cuantificarlos, lo que llevará a la construcción de modelos y sus estructuras. Además de crear entornos en los cuales los estudiantes aprecien mejor el vínculo entre las ciencias, que los prepare incluso para sus relaciones laborales y que puedan hacer una conexión entre diferentes áreas desde la etapa escolar para que no persistan las dificultades de ver los conceptos útiles en un contexto de clase y no en otro.

De otra parte, el docente no puede perder de vista la orientación del *Ministerio de Educación Nacional (MEN)* por medio de los *Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)*. Versión 2. Los cuales, de acuerdo con el MEN (2015), le apuntan a mejorar la calidad educativa convirtiéndose en una herramienta para identificar los conocimientos mínimos en cada uno de los grados de educación escolar en las áreas de lenguaje y matemáticas. Los DBA guardan coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos en Competencias, cuya importancia radica en que plantean elementos para las rutas de aprendizaje. Esto es, que pueden ser articulados con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos que define cada institución educativa, convirtiéndolos en la oportunidad de mejora de los procesos de aprendizaje.

De acuerdo a la organización de los DBA V.2 en matemáticas, se puede observar el afán de movilizar el pensamiento matemático, mediante situaciones problematizadoras que permiten aplicar los conocimientos básicos de las matemáticas centrándose en el análisis y la interpretación. Los DBA son un referente para el propósito de articular los conceptos matemáticos y físicos ya que su estructura permea distintas áreas de aplicación de las matemáticas, entre las cuales, están los fenómenos físicos. Ejemplo de ello, que el MEN

(2015) enuncie que los estudiantes puedan resolver problemas que involucren el significado de medidas de magnitudes relacionales a partir de tablas, gráficas y expresiones algebraicas. También que comprendan y usen el concepto de razón de cambio para estudiar el cambio promedio y el cambio alrededor de un punto y lo reconozcan en representaciones gráficas, numéricas y algebraicas (MEN, 2015). Con base en los DBA, la forma de plantear propuestas didácticas es por medio de entender cómo se constituyen y formalizan conceptos físicos particulares para poder explicitar el uso de representaciones que den lugar a modelos que le den formalidad a la identificación y cuantificación de magnitudes. Estos objetivos propuestos serán más eficientes si la planeación va enfocada a las mallas curriculares.

Para llevar a cabo la presente investigación, se tuvo en cuenta que a nivel de secundaria los planes de estudio se basan en la física clásica y que los autores citados recomiendan mediar entre relaciones matemáticas y físicas en el estudio de la física clásica. La física clásica surgió desde la publicación de las leyes de Newton y tiene como principal característica que se fundamenta en las leyes básicas del movimiento sobre objetos cotidianos. De ella hacen parte la Cinemática, la Mecánica Clásica, la Hidrostática e Hidrodinámica, la Termodinámica, las Ondas y la Óptica, la Electricidad y el Magnetismo conocido también como electromagnetismo.

Si bien se ha hablado de investigaciones que evidencian inquietudes relacionados con la articulación de las matemáticas y la física y se centran en el porqué, nos detenemos a reflexionar en el papel del docente y las estrategias que apoyarían en la enseñanza de la física. Para lo cual, se encuentra un estudio exploratorio centrado en los docentes como mediadores en esa relación de abstracción, sus autores Uhden, Karam, Pietrocola y Pospiech (2012), desarrollaron un modelo basado en el *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (PCK sigla en inglés) aplicado en forma de entrevista a cuatro profesores de Alemania y cuatro profesores de Israel, con amplia experiencia en la enseñanza de las dos áreas. Enfocaron dicho estudio en preguntas como, si es posible que el dominio de las estructuras matemáticas pueda mejorar la comprensión de los conceptos físicos, de qué manera y cómo se puede lograr la articulación adecuada de las matemáticas para enseñar la física. El objetivo era la opinión de los profesores sobre el papel de las matemáticas para la

enseñanza de la física, la relevancia del aprendizaje de los alumnos y dificultades de los estudiantes, así como ejemplos de estrategias de instrucción.

De dicho estudio Uhden *et al.* (2012) encontraron, con relación a su primera pregunta de investigación, que hace referencia a los componentes de orientación hacia la docencia de la física, se destacan aspectos generales como: la articulación de las matemáticas y la física es muy importante porque ciertos conocimientos profundos de la física son alcanzados con las matemáticas; o sin matemáticas, la física no es posible; o que los métodos matemáticos son una contribución importante para desarrollar la comprensión de la relación experimento y teoría. El método matemático es la base para la adquisición de conocimientos, la exactitud de las matemáticas ya es un elemento importante, aún más si la interacción de matemáticas y física es la adecuada; sin embargo, debe cubrir una función técnica y una función estructural. Estos mismos autores afirman que en general, el dominio de la función puramente técnica, no garantiza el éxito en la física; se requiere no solo la aplicación de ecuaciones sino el significado físico de las estructuras matemáticas, el papel estructurado debe enseñarse intencionalmente. Esto implica la representación geométrica, la descripción cuantitativa de los procesos físicos en diagramas o con el álgebra. Y complementan diciendo que, en especial para los alumnos de secundaria, los primeros pasos de descripción matemática hacia la física son cruciales. Donde el docente debe distinguir que hay conceptos que no pueden ser formulados sin matemáticas como la velocidad y aceleración. Que además estos conocimientos profesionales deben incluir las implicaciones de procedimientos formales algorítmicos y el significado de dependencias funcionales, que permitan emitir sus puntos de vista y los de sus estudiantes.

Los maestros deben conocer ejemplos concretos donde se puedan aplicar las matemáticas en diferentes grados de complejidad, siendo conscientes de las oportunidades específicas y de las dificultades inherentes en cada curso en relación con los aprendizajes y los obstáculos; igualmente, los profesores pueden diferenciar entre los problemas meramente técnicos y más estructurales para los estudiantes. Y finalmente, el conocimiento de estrategias y métodos que ayude a esa interacción con ejemplos con los que se pueda dar a los estudiantes una visión sobre la naturaleza de la física y el método físico, lo cual

implica hacer deducciones para aclarar relaciones y conceptos con los experimentos; que, a su vez, se deban relacionar con los conceptos matemáticos y leyes físicas.

La explicación implica al maestro enseñar a organizar representaciones de los fenómenos con o sin imágenes espacio temporales, que conlleve a orientar a los alumnos para que encuentren relaciones entre imágenes y símbolos para que construyan un lenguaje con el cual puedan explicar un fenómeno, y a su vez expresen pensamientos que no eran posibles sin este lenguaje. Finalmente, se insiste en mostrar a los estudiantes que las ecuaciones son más que fórmulas para calcular un valor, estas son relaciones entre símbolos con significados particulares en función del sistema.

Como complemento a lo expresado en los apartados anteriores, es oportuno referenciar la investigación relacionada con las diferencias trascendentales de la matematización para la enseñanza de la física. En esta Vizcaino y Terrazán (2015) se refieren a que explicar algo conlleva a pensar en qué se va a explicar y a quién, la historia demuestra que los hechos que en una época parecían estar explicados de una forma, hoy tengan lógicas diferentes para su explicación. Si nos preguntamos en qué aporta esto a la investigación, la respuesta es que desde que surgió la Física Moderna, los fenómenos se describen de forma más abstracta que sensorial inmediata y no son susceptibles de ser observados directamente. Antes un científico interpretaba lo que consideraba la realidad, y más tarde, con el uso de la medición ubica al científico como parte de la realidad que pretende explicar. De esta forma, explicar no se limita a describir con palabras las relaciones representadas en una ecuación; la explicación se da necesariamente cuando hay comprensión de las representaciones del fenómeno, tanto en el campo de las funciones que relacionan las magnitudes involucradas, como en el campo de los porqués de la existencia de tales funciones. En cuanto al uso de las matemáticas refieren que:

“En este momento histórico, la descripción de los sistemas físicos se hace principalmente con base en relaciones entre símbolos que representan variables del sistema, construyendo expresiones que contienen principios lógicos, no solo de la geometría sino también del álgebra y del cálculo” (Vizcaino, 2015, p.100).

En la misma línea, retoman a Poincaré quien había expresado que el objetivo de la Física matemática no es solo facilitar el cálculo numérico para el estudio de los fenómenos físicos sino que otorga a las matemáticas un estatus en su lenguaje que permite explorar de mejor manera las leyes que vienen de la experiencia.

Redish y Gupta (2009) defiende la idea de que para la comprensión de la relación entre la física y las matemáticas implica la diferenciación de lo que es hacer matemática y lo que es usar la matemática en la clase de física, lo cual significa que el físico no aprende matemática y física de forma separada y luego junta los dos conocimientos, pero toma el mundo físico y describe sus conceptos por medio de representaciones matemáticas que posibilita garantizar una interpretación física de tales representaciones para luego evaluar su validez en el mundo físico. Por tanto, no es en la matemática que se encuentra la validez de una expresión de la física, pero sí en la coherencia que dicha expresión presenta para describir la naturaleza. A su vez, Uhden *et al.* (2012) coinciden sobre ciclos de modelado con niveles graduales de matematización al formular leyes físicas. Resaltan la necesidad de partir de la realidad del mundo para elaborar modelos físicos-matemáticos, no lineales sino flexibles, hasta llegar a trabajar con cálculos. Tareas que corresponde al docente.

Dada la importancia del docente para lograr articular los conceptos físicos y matemáticos, es pertinente referenciar a Karam (2014) en su trabajo relacionado con un estudio de caso en un curso de electromagnetismo guiado por un reconocido docente. Manifiesta, que la pregunta ¿Cómo facilitar la comprensión de los estudiantes de los conceptos abstractos?, sin duda es una de las preocupaciones de los docentes de física, intenta contribuir a las respuestas. El enfoque fue dirigido a la forma de usar el razonamiento matemático en el discurso didáctico, se tuvo en cuenta la distinción entre el papel técnico y estructural de las matemáticas, se centró la atención en las estrategias del docente para enseñar a utilizar las matemáticas como instrumento de razonamiento que enmarca el mundo físico. Se presentó y ejemplificó un proceso de codificación mediante el software Videograph en el análisis de eventos educativos. Se retoma solo algunas observaciones y se deja a criterio del lector profundizar sobre este caso que ilustra los pros y los contras de lo que usualmente se hace en el aula.

En cuanto a las conclusiones Karam (2014) resalta, en general, que el profesor dedica una cantidad considerable de tiempo y esfuerzo para construir representaciones matemáticas de conceptos físicos con mención explícita de abstracciones y justificaciones claras para usar las estructuras matemáticas específicas. La matematización se descarta de la física cuando prematuramente se presentan las fórmulas y son solo herramientas de cálculo, lo que sería un enfoque técnico. El profesor del curso enfatiza en una construcción gradual y significativa de las representaciones de la física, convirtiéndose en un enfoque estructural.

En este punto de la presente investigación, el camino parece estar abierto, sin embargo, no basta con elegir las temáticas apropiadas para este estudio basándose en el plan de estudios para décimo grado, y tener presentes las sugerencias con relación al papel del docente, sino bajo qué mecanismos o estrategias se puede hacer. Así se continuó la búsqueda de referentes que se aproximen a la intencionalidad del trabajo y se encontró que el uso de simuladores como estrategia metodológica ha sido experimentado, además se conoce conclusiones frente al impacto logrado, las sugerencias y motivaciones que pueden generar. Ante el hecho de estar inmersos en la era computacional, se decidió la implementación de los simuladores como mediadores en esa búsqueda de integración de las matemáticas y la física para ciertas temáticas de la media técnica.

### **2.3 Los analizadores de video como estrategia de articulación de las matemáticas y la física**

Uno de los grandes desafíos para lograr la articulación de las matemáticas y la física en los procesos educativos se encuentra en los procesos de análisis de datos experimentales. Al respecto, se reporta en diferentes investigaciones los aportes de los analizadores de video en el registro de datos experimentales de forma rápida y sencilla mediante el uso de dispositivos electrónicos que forman parte de nuestra vida diaria, como tablets y celulares (Bonventi y Aranha, 2015; Caicedo-Ortiz *et al.*, 2018). En esta línea, Caicedo-Ortiz *et al.* (2018) describen los analizadores de video como software especializados que permiten el estudio de fenómenos físicos a través de la observación en cámara lenta (slow motion) de

videos grabados previamente, en los cuales se complementa el registro de datos experimentales por medio de desarrollos computacionales que los cuantifican y representan a través de diferentes recursos matemáticos (tablas, gráficas, entre otros).

Existen diferentes analizadores de videos, algunos pagos y otros gratuitos. Por ejemplo, Ezquerria, Iturrioz y Díaz (2012) usaron el software Avimèca para el estudio del tiro parabólico y la caída de una pelota. Sin embargo, investigaciones como la de Bonventi y Aranha (2015) han reportado el software Tracker como un recurso más preciso que otros similares. Adicional a ello y en coherencia con el interés del estudio de la física clásica declarado previamente, registramos diferentes investigaciones que incluyen el uso de Tracker en la enseñanza de la de conceptos básicos de cinemática y dinámica en sistemas con masa y aceleración variables (Bonventi y Aranha, 2015; Caicedo-Ortiz *et al.*, 2018; Sirisathitkul, Glawtanong, Eadkong y Sirisathitkul, 2013; Jesus y Barros, 2014), torque (Sasaki y Jesus, 2020), atracción magnética (Souza, Silva y Balthazar, 2018) y fricción (Jesus y Sasaki, 2014).

Lo anterior nos anima a llevar a cabo la enseñanza de la física con el uso del analizador de video Tracker (el cual se puede encontrar en <https://physlets.org/tracker/>), para apoyar la articulación de los conceptos matemáticos y físicos que lo permitan, mediante un plan estratégico que invita a apropiarse de los conocimientos para ser guías en las discusiones que se pretende generar. Para esto se requiere, retomar las experiencias y recomendaciones de las investigaciones consultadas con el fin de enriquecer o profundizar los hallazgos y mejorar la enseñanza.

Sánchez (2018) realizó una propuesta didáctica para la aplicación de la integral definida al cálculo de áreas con apoyo del software Tracker. En la cual, al tomar una fotografía a una hoja de árbol sobre una hoja de papel cuadriculada (en este software se hace importante tener una medida de referencia), podían los estudiantes encontrar con el software las curvas que mejor se adaptaran al borde del objeto e integrando pudiesen hallar el área de este. Este tipo de trabajos con Tracker, de acuerdo con Pantoja, Guerrero, Ulloa y Nesterova (2016), permite plantear estrategias didácticas en la que los estudiantes construyen modelos matemáticos, basados en el desarrollo de actividades dentro de

diferentes situaciones problemáticas relacionados con sus contextos y apoyados por la visualización, que potencia la resolución de problemas y el trabajo colaborativo.

Además, el rastreador de este software tiene un papel muy importante, ya que a partir de la grabación de un video de una situación problema; en la caída libre de un objeto, por ejemplo, los alumnos pueden interpretar y relacionar los datos, gráficos y funciones proporcionadas por el software, así, la acción del modelado se vuelve clara como lo propone (Ezquerria, Iturrioz, Díaz, 2012).

Pantoja *et al.* (2016), también nos sugiere que este software tiene la ventaja para los estudiantes, de que estos desempeñen el papel principal, ya que la intención de obtener datos y gráficos en tiempo real, y luego analizarlos e interpretarlos, se opone a lo que ocurre en el aula tradicionalmente, donde hay un conjunto de datos extraídos de libros de textos o inventados ficticiamente por el profesor.

En suma, las diferentes investigaciones reportan que el uso de estas tecnologías ofrece oportunidades tales como: se motiva a los estudiantes a aprender matemáticas (Sánchez, 2018), facilita la interpretación de datos y gráficos obtenidos en situaciones reales, permite a los estudiantes desarrollar conocimientos (Souza, Silva y Balthazar, 2018), además de reflexionar sobre los procedimientos que se utilizaron, los parámetros y las variables que intervinieron en el análisis del fenómeno en cuestión (Ezquerria, Iturrioz, Díaz, 2012).

### **3. METODOLOGÍA**

#### **3.1 ¿Qué es un diseño metodológico?**

El diseño metodológico se puede resumir como la ruta trazada para la consecución de los objetivos propuestos, para lo cual mantiene presente los distintos soportes teóricos que se han abordado, tanto en antecedentes investigativos y legales, como también las preguntas de investigación. Para esto es necesario recordar que el eje central de esta investigación está basado en lograr integrar los conceptos matemáticos en la caída libre de



los cuerpos, a medida que son requeridos en el grado décimo de una institución privada de la ciudad de Medellín, mediante el uso de Tracker como estrategia didáctica, para ello se implementará un diseño de tareas. En ese sentido, la tarea se convierte en un reto y permite que el estudiante pueda planear estrategias y representa un desafío para su forma de pensar, sentir y actuar, proceso en el cual se develan las contradicciones entre lo que se dice, lo que se vivencia y lo que se ejecuta en la práctica (García y Fernández, 2002).

Para el análisis de la información, adoptamos un enfoque cualitativo, específicamente un estudio de casos, este nos permite realizar un análisis particular de los datos obtenidos, donde sentimientos, sensaciones y aprendizajes de la experiencia de los participantes influya en las conclusiones de la investigación. Para Monge (2010), con el estudio de casos se proyecta encontrar nuevas evidencias o situaciones de un fenómeno, “la diferencia de lo que se está estudiando con su universo, la formulación de nuevas teorías de la realidad social, lo que se busca es encontrar las respuestas a preguntas en un escenario y momento dado, de ahí que no son formulaciones de verdades universales” (p.p 32)

### **3.2. ¿Por qué escogimos el enfoque cualitativo?**

Autores como a Lizarazu, Martínez, Marulanda y Muñoz (2008) definen este tipo de enfoque investigación como aquella basada en la experiencia que estudia un fenómeno en su contexto real, se centra en la descripción de un caso particular al general en interacción con los contextos. En ese sentido, busca elaborar hipótesis por medio de exploración, explicación, evaluación o transformación y puede corroborar teorías conocidas o generar conocimiento, que bajo una metodología rigurosa investiga fenómenos donde se busca conocer cómo y por qué suceden.

Este enfoque lo encontramos pertinente ya que permite estudiar sobre el quehacer cotidiano de grupos pequeños, analizar conocimientos y permite generar interpretaciones a partir de los datos obtenidos y reside en la importancia que tiene todo sujeto en un grupo social y su manera única de ver las cosas. Al respecto, Rodríguez y Gil (1996) consideran que la investigación cualitativa se propone, por un lado, que observadores competentes y cualificados pueden informar con objetividad, claridad y precisión acerca de sus propias

observaciones del mundo social, así como de las experiencias de los demás; por otro lado, los investigadores interpretan a un sujeto real, que está presente en el mundo y que puede, en cierta medida, ofrecernos información sobre sus propias experiencias, opiniones, valores.

En coherencia con lo anterior, nos basaremos en una lógica y proceso inductivo de observar, analizar y describir, para generar un análisis teórico, pasando de lo particular a lo general, generando hipótesis durante el proceso, las cuales se perfeccionan en el transcurso de las implementaciones y de la obtención de los datos esto nos parece pertinente, ya que el enfoque cualitativo nos lleva a realizar un análisis particular e individual, de los datos obtenidos, para luego sacar conclusiones, donde se involucre la experiencia de cada uno de los participantes. Además, este método inductivo “plantea un razonamiento ascendente que fluye de lo particular o individual hasta lo general” (Abreu, 2014, p.p.200).

### **3.3. Estudio de casos**

El estudio de caso basa su intencionalidad en la contemplación y descripción del fenómeno, para la reformulación de hipótesis explicativas acerca del comportamiento, las causas y las consecuencias del fenómeno, el contraste y justificación de las hipótesis para garantizar su verdadera capacidad de explicación. De acuerdo con Martínez (2006), el estudio de caso, aunque cuestionado por algunos, es una herramienta valiosa, su mayor fortaleza la constituye en que posibilita registrar la conducta de las personas estudiadas, lo que lo constituye en un método de estudio cualitativo.

Se realizó un diseño de tareas, que son aquellas situaciones que el profesor propone. El cuál, genera como producto final el aprendizaje. Las tareas tuvieron en cuenta los planes de área de Ciencias Naturales, los Derechos Básicos de Aprendizaje, los Estándares y Competencias propias de grado décimo, el docente será el encargado de despertar la participación y el interés de los estudiantes, direccionando las discusiones que nos van a dar los insumos para descubrir cuáles son las preguntas de investigación más importantes, se estudiaron a nivel individual los resultados, pero también a nivel colectivo,

promoviendo la interacción con el otro en la observación directa a las reacciones de los estudiantes frente al uso de Tracker para la enseñanza de la caída libre.

### **3.4 Descripción de los participantes**

Los participantes de este estudio son nueve alumnos del grado décimo de un colegio privado de Medellín. Siete de ellos demuestran, de acuerdo con los resultados en los exámenes, habilidades relacionadas con buena capacidad de abstracción frente a problemas matemáticos; en la participación evidencian análisis sobre el significado de lo que hacen, no se limitan a realizar procedimientos mecánicamente. De los demás estudiantes, uno presenta diagnóstico de necesidades educativas especiales y el resto de alumnos presenta poca motivación por las áreas de matemáticas y física.

Para los nueve estudiantes, el presente estudio se constituye como el primer acercamiento al área de física, lo que permite garantizar un análisis sin sesgos de experiencias explícitas en la caída de los cuerpos previamente. En cuanto a conocimientos previos en matemáticas, los nueve estudiantes están familiarizados con procesos como: construcción de gráficas a partir de puntos o funciones dadas, análisis de gráficas mediante las ecuaciones punto pendiente, hallar la pendiente de una recta, hallar la velocidad media de un objeto en movimiento, manejo de teoría de errores y vectores en el plano cartesiano.

La temática de caída libre se presenta con base a los estándares estipulados por el MEN, el cual propone para el grado décimo la temática de cinemática para trabajar los indicadores de: establecimiento de relaciones entre los diferentes movimientos en el análisis de los cuerpos en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme y el reconocimiento y diferencia entre cuerpos acelerados y con velocidad uniformemente variado.

### **3.5 Ético**

Para la implementación de estas actividades, se les pidió a los acudientes de los estudiantes que firmaran un consentimiento informado (ver anexo A) donde nos

comprometíamos a mantener oculta la identidad de los estudiantes. Para esto se utilizan seudónimos y se censuran los rostros de los estudiantes en las fotografías tomadas como fuente de información.

### **3.6 Diseño de tareas**

Al utilizar el diseño de tareas se debe tener en cuenta lo que reporta la literatura. “Las tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.), a los alumnos. Éstas son el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje” (Pochulu y Font, 2016, p. 3). Por lo tanto, cada tarea tiene propósitos conectados a los objetivos trazados en este estudio, se ha definido logística, tiempo de aplicación, materiales o recursos, criterios de evaluación, estrategia para la recolección de datos.

Con respecto a los estudiantes, el objetivo es comprender el concepto de caída libre y su relación con los modelos matemáticos, mediante la manipulación de un software especializado para analizar videos. En este sentido, permitimos identificar cómo los estudiantes relacionan el concepto de caída libre con objetos matemáticos y en qué medida el uso de Tracker favorece la articulación matemáticas-física.

Para el desarrollo de esta actividad, se estipularon dos momentos que permitan generar un ambiente propicio para el desarrollo de nuestro objetivo, siendo así, se propone una sensibilización en la cual los estudiantes interactúen con la caída libre a partir de la observación de movimientos de este tipo y su respectiva toma de datos; el segundo momento consiste en el análisis de la caída libre desde el simulador Tracker, donde se pretende establecer relaciones matemático físicas.

Para el segundo momento, se propuso hacer uso del concepto de pendiente de una gráfica, como único recurso para relacionar la velocidad y aceleración de un objeto físico con un objeto matemático. Se aclara que no se hizo uso de conceptos matemáticos como las derivadas, límites, ni demás conceptos pertinentes a la temática, debido a que el plan de estudio estipulado por el MEN y por la malla curricular de la institución no los contemplan en el grado décimo.

**Primer momento: Sensibilización:**

Esta sensibilización se llevó a cabo a partir de situaciones que ilustren la caída libre con miras a establecer relaciones entre modelos matemáticos y la física. En ese sentido, se plantearon las siguientes actividades:

1. Dejar caer sobre un papel periódico gotas de pintura con un gotero y analizar las manchas de pintura que quedan sobre el papel, de modo que se cuestionen ¿Qué influye para que la gota salpique más? Posteriormente se orientó a los estudiantes a que dejen caer la gota de pintura verticalmente al interrogarlos sobre ¿cómo sería la mejor manera para analizar esta situación?, se espera que los estudiantes identifiquen las variables que influyen en la caída de un cuerpo al momento de establecer una relación entre el área que cubre cada mancha de pintura y la altura desde la cual ha sido arrojada.

Con esta pregunta se buscó que los estudiantes, relacionaran la altura de lanzamiento de la gota con la velocidad de la misma, al observar que la mancha de la gota cubre más área mientras se le arroja de mayor altura, debido a que ganaba más velocidad. De no haber logrado dicho análisis, se propondría llegar a este con la siguiente situación.

2. El docente pide a dos estudiantes, que se desplacen a partir de un punto en el salón en dirección hacia una misma pared, pero de modo que uno salga corriendo y el otro caminando, y se le pregunta, ¿quién se golpea más duro si no se detienen antes de alcanzar la pared?

Luego de que los estudiantes establecieran dicha relación entre altura y velocidad, se les solicitó que hicieran el ejercicio de arrojar una cartuchera desde diferentes alturas e intentaran calcular su velocidad, con esta parte de la actividad, se pretendía que los estudiantes quedaran inquietos por la dificultad que hay al tratar de tomar los datos; llevarlos a que se preguntaran cómo obtener datos más precisos, con la intención de que alguno propusiera hacer un video que les permitiera cronometrar con exactitud la caída. Posteriormente al lograr algunas hipótesis, se procedió a analizar los datos tomados del video y se les hicieron las siguientes preguntas:

- compare las velocidades obtenidas desde las diferentes alturas ¿a qué se debe que las velocidades sean diferentes?
- sabemos tomar la velocidad desde la distancia y el tiempo, pero ¿estos datos nos sirven para algo más?

En este momento de la actividad, se pretendía que los alumnos se familiaricen con el concepto de aceleración, de no lograrlo, se procedería a plantearles la siguiente situación: usted va en una moto a 30 km/h en la av 80, y cuando llega a la autopista su velocidad aumenta a 70 km/h ¿Por qué aumenta la velocidad?

Esto se propone con el objetivo de lograr en los estudiantes algunos argumentos iniciales en relación: ejemplo, “profe, porque la moto se está acelerando”. Ya sensibilizados con la palabra “aceleración” se les cuestionara: ¿De cuánto es la aceleración de la cartuchera? y con esto se les invitara a calcular la aceleración, y encontrar estrategias de cómo hallarla utilizando el video, la intención es que los estudiantes vean la necesidad de la ayuda de un programa que facilite los cálculos, ahí es donde se propone Tracker.

**Segundo momento:** análisis de la caída libre con la ayuda de Tracker.

Ya haciendo uso de Tracker para la el análisis de los datos y las gráficas, se propuso un análisis de la velocidad y la aceleración, a partir del concepto matemático de pendiente, ya que en grado décimo este concepto es la única herramienta matemática que tienen para hallar dichos datos a través de una gráfica.

Lo anterior se hizo tomando deltas de tiempo y espacio pequeños, haciendo zoom a las gráficas (espacio vs tiempo y velocidad vs tiempo), para acercarnos a la definición de velocidad y aceleración instantánea y ocasionar que coincidan con los datos arrojados por Tracker. Luego, el paso a seguir, fue hacer notar a los estudiantes que la velocidad arrojada por Tracker en cada punto, coincide con las pendientes halladas en la gráfica espacio vs tiempo, para darle sentido con esta relación, a el concepto de velocidad en física. Después de hacer el cálculo de estas pendientes, se les planteó a los estudiantes las siguientes preguntas con respecto a la gráfica espacio vs tiempo:

- ¿sabiendo la correspondencia que conservan la velocidad y la pendiente de esta gráfica, a qué se debe que se observen cambios de pendiente?
- ¿Sabe el nombre del concepto físico que da origen a este cambio de pendiente?

Con la primera pregunta se pretendía que los estudiantes llegarán a la siguiente conclusión: como el cambio de pendiente en esta gráfica es lo mismo que el cambio de velocidad, entonces estos cambios se deben a que va más rápido o más despacio. La intención de la segunda pregunta era saber si los estudiantes relacionaban estos cambios con la aceleración.

Para terminar con los ejercicios propuestos en el segundo momento, se propuso un análisis de la gráfica de velocidad vs tiempo que arrojó Tracker; en el cual se les cuestionó a los estudiantes sobre el cambio de pendientes en esta gráfica de la siguiente manera:

- se observa un cambio en la velocidad con el paso del tiempo, ¿Qué causa esto?
- Sabiendo que a la pendiente de la gráfica espacio vs tiempo, se le llama velocidad, ¿Qué nombre cree que recibe la de pendiente de esta gráfica?

Con las preguntas anteriores se esperaba que los estudiantes mencionaran la palabra aceleración, para aprovechar el momento y mostrar la relación de la pendiente de la gráfica velocidad vs tiempo con la aceleración. Luego, teniendo clara esta relación, se procedió a hablar de la aceleración que presentan los cuerpos en caída libre, para terminar, hablando de esta aceleración como la de la gravedad y afinar el concepto de caída libre como un movimiento acelerado por la gravedad.

Como cierre de la actividad se realizó el siguiente conversatorio. En mesa redonda los estudiantes expresaran sus opiniones respecto a:

- Aspectos que consideran importantes para resaltar frente al análisis de la caída de los cuerpos.
- Sacar leyes y conjeturas propias de la experiencia vivida para contrastarlos con las leyes y conjeturas del campo de la caída libre.
- Sacar conclusiones acerca del análisis de los datos obtenidos.

- Puntualizar conceptos matemáticos y físicos que estén débiles, no se hayan logrado relacionar o estén por resolver (en este punto, el maestro juega un papel importante como maestro orientador)

Esta actividad de sensibilización se aplicó con el fin de identificar las relaciones que usan los estudiantes entre las matemáticas y la física. Cuando los estudiantes dejan caer la gota de agua debemos estar atentos al tratamiento que le dan al lenguaje de la física y como este lo relacionan con el lenguaje de las matemáticas. También como propone Karam (2014) identificar si los estudiantes le están dando un papel técnico a la matemática, es decir, las están utilizando como una simple herramienta de cálculo, o si por el contrario, la están utilizando como un instrumento de razonamiento, que se puede evidenciar en las interpretaciones físicas, y en el significado que los estudiantes le están dando a los procesos que modelan.

Una vez identificadas las relaciones, utilizamos Tracker, para contemplar cómo el analizador de video puede potenciar dichas relaciones, y así, en concordancia con lo que muestra Malagón (1998) la mejor manera de conocer un fenómeno es por medio de sus representaciones: así, nuestro conocimiento sobre el tema, dependerá de nuestra habilidad para construir modelos de este. De modo que en este proceso cuando los estudiantes construyen todo un modelo gráfico, para explicar la caída de un objeto, inevitablemente tendrán que pensar en las magnitudes que hay en juego, y así en correspondencia con este mismo autor, matematizar un fenómeno físico consiste en construir magnitudes, relaciones, procedimientos apropiados para representarlo y cuantificarlo. Al igual que como lo sugiere Doorman y Gravemeijer (2009), se buscó saber si los estudiantes son capaces de entender cómo se construye la cinemática, en este caso específico, se propició que la caída libre, aporte a evitar que los estudiantes adquieran un uso instrumental de símbolos sin entender la representación de los conceptos.



#### 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Una de las preocupaciones que se tenía con la actividad era llegar el momento en que los estudiantes identificaran las limitaciones en la toma de datos, resaltarán la necesidad de utilizar recursos más robustos para su análisis y así poder proponer Tracker como recurso que les permitiera tomar datos más precisos y además obtener información numérica y gráfica que abriera las puertas a potenciar el análisis de la caída libre mientras matematizábamos este fenómeno físico (Sánchez, 2018; Ezquerro, Iturrioz, Díaz, 2012). Al respecto, desde el primer instante en que se preguntó a los estudiantes sobre una manera con la cual optimizar el análisis y recolección de datos, lo primero que propusieron fue hacer un video y observarlo después.

*Estudiante 1: grabar un video en cámara lenta*

En cuanto a los objetivos de la actividad de sensibilización, “dejar caer gotas de pintura y analizar las manchas que dejan”, se encontró que los estudiantes lograron establecer relaciones entre el área que cubría la mancha y la altura con la que se tiraba.

*Estudiante 2: entre más alto, cae con más fuerza.*

*Profesor: ¿Cómo que con más fuerza?*

*Estudiante 3: el impacto que la gota da es tan fuerte, que hace que se expanda.*

Esto está mostrando que los estudiantes para intentar explicar este fenómeno, hacen uso de un lenguaje matemático y físico. Por un lado, identifican que a mayor altura, el área en el que se esparce la gota es mayor, y por el otro, intuyen que la fuerza aumenta con la altura. Lo que concuerda con Redish y Kuo (2015) quienes señalan que el aprendizaje de las matemáticas en la clase de física debe ser tratado como el aprendizaje de dos lenguajes relacionados. Además, muestra que los estudiantes lograron evidenciar magnitudes físicas que se comportan como variables matemáticas, y que varían unas en función de otras, evidenciando que estas relaciones físicas toman sentido matemático (Souza, Silva y Balthazar, 2018), al hacer una asociación entre variables dependientes e independientes.

Se destaca también, que fue fácil para ellos relacionar la altura, con la velocidad con la que cae la gota, a partir de la relación entre la altura y el área que cubre la gota.

*Profesor: ¿se expande más: mientras más alto o mientras más bajito?*

*Estudiante 3: gana más fuerza por que se demora más en caer.*

*Profesor: ¿entonces entre más alto...?*

*Estudiante 2: más grande*

*Estudiante 1: más velocidad*

*Estudiante 2: entre más bajito, menos fuerte y menos se esparce. Y entre más alto, más fuerte y más se esparce por la velocidad que trae.*

Así, los estudiantes identificaron diferentes variables que influían en que la gota se expandiera más. Hicieron comparaciones entre las gotas que dejaban caer, identificando variables como: la altura, la fuerza con la que se tiraba la gota, su velocidad y la cantidad de gotas que se dejaban caer (la masa). Esto fue importante dentro de la articulación de las matemáticas y la física, porque, así como en Romero y Rodríguez (2005) sugieren preguntarse si una propiedad es o no una magnitud, es decir cuestionarse por si tal propiedad es susceptible de ser medida; lo que implica cuestionarse por la estructura que se le está asignando a tal propiedad, muestra además, que se está utilizando matemáticas para analizar un fenómeno físico. Pero ese papel que se le está dando a las matemáticas no está subordinado a ser una mera herramienta de cálculo, sino que son utilizadas principalmente como herramienta de razonamiento para la caída libre.

En ese proceso de encontrar la mejor manera para analizar el fenómeno, los estudiantes fueron conscientes de varios aspectos que evidencian un uso de las matemáticas en la física para el razonamiento. Si tiraban la gota en vez de dejarla caer, se terminaban dando cuenta que el resultado variaba mucho y esto complicaba el análisis del fenómeno, que lo único que se podía decir era que “*al tirar la gota con más fuerza, el área que deja la gota es mayor*”. Reflexionaron también que el análisis se complicaba si se dejaban caer varias gotas al mismo tiempo. Todo esto los llevó, a que depuraran variables que les favoreciera el

análisis, de modo que lo delimitaron en una sola gota de pintura. Todo esto muestra otra relación entre estas dos áreas, como señala Malagón (1988) los estudiantes matematizaron la caída libre. Es decir, construyeron relaciones y procedimientos apropiados para representar la caída de la gota de pintura.

Después de esto, hay una invitación por parte del profesor hacia sus estudiantes para que propusieran formas de calcular la velocidad con la que cae el objeto.

*Profesor: hemos conjeturado que mientras más alto se deje caer la gota, más velocidad adquiere. Les pregunto ¿cómo medir esa velocidad?*

Los estudiantes no responden, se quedan pensando cómo hacerlo, con esto se identifica que estos estudiantes presentan dificultades para relacionar lo que están haciendo, con las magnitudes físicas y con las variables matemáticas ya vistas en clase; como señala Redish y Kuo (2015) la falta de éxito con las matemáticas en la física, se atribuye a la falta de transferencia de conocimientos matemáticos de la clase de matemáticas a la clase de física. Así que el profesor reacciona escribiéndoles en el tablero  $\Delta x$  sobre  $\Delta t$  (lo hace con el fin de que los estudiantes relacionen esta fórmula con las mediciones que están tomando) y les pregunta:

*Profesor: ¿Qué es esto chicos, qué significa?*

*Estudiante 2: es un vector profe*

*Profesor: ¿Qué vector?*

*Estudiante 2. Espere yo busco un cuaderno... profe es el vector velocidad.*

*Profesor: ¿qué es delta de X? ¿La podemos encontrar?*

*Estudiante 4: sí profe es la altura desde la silla y la persona que lo está tirando.*

*Profesor: ¿Pero en este caso si sería delta de X?*

*Estudiante 3: ¿Cómo así profe?*

*Profesor: es decir delta de x nos habla de una distancia en el eje x, pero ¿el eje x si es el que nos ayudaría a analiza este movimiento?*

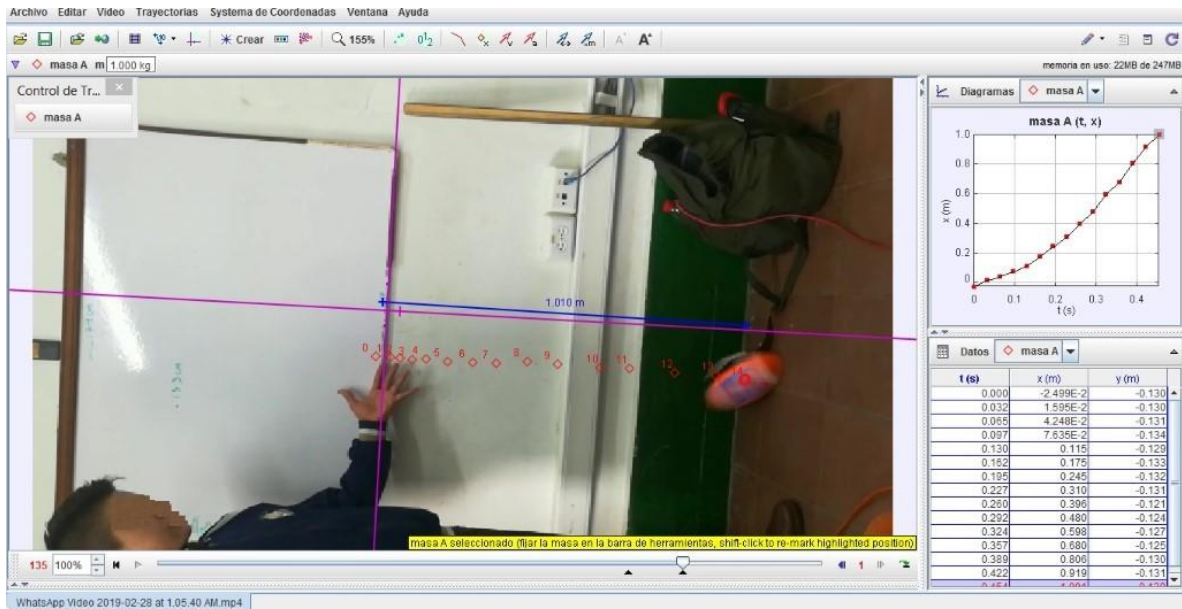
*Estudiante 3: no profe seria delta de y, porque es la altura (...).*

De la anterior verbalización cabe resaltar que aunque hay un uso instrumental de las matemáticas, al emplear simplemente la fórmula de rapidez media. Posteriormente se empieza a encaminar a los estudiantes para que generen un proceso de razonamiento que trascienda lo instrumental. Por ejemplo: al grabar el video, este no quedo con la orientación correcta; como lo muestra la figura 1, por lo cual, al insertar el sistema de referencia, este quedo trocado. Esto constituyo una oportunidad interesante para comprender mejor, como los estudiantes relacionaban ese marco de referencia; que incluso al estar los ejes al revés, los estudiantes tenían una relación del eje vertical con la altura desde la que caía el objeto sin importar si era el eje x, o el eje y, así, utilizaron de las matemáticas ejes coordenados y lo llevaron con éxito a la física.

El software se introduce debido a que los estudiantes creían que la velocidad final del objeto antes de tocar el suelo es la velocidad media: *(Estudiante 5) profe, ya calculé la velocidad, el tiempo es de (...) con una altura de (...) eso me da (...) haciendo la división del delta de y sobre el delta de t.* Y aunque intentaban analizar intervalos más pequeños para medir el  $\Delta y$  los estudiantes estaban teniendo problemas para medir esos  $\Delta t$ .

Es importante aclarar que al momento de ingresar el video al software fue pertinente modificar dos aspectos: debido a las especificaciones del software, el video se tomó arrojando un balón de futbol americano, en vez de gotas de pintura. A causa de un error en la grabación, el video solo se pudo manipular en Tracker con una rotación de noventa grados a la derecha como se muestra en la figura 1, este infortunio fue aprovechado para observar que los estudiantes supieron asimilar el cambio de ejes coordenados y aun así, seguían identificando

el desplazamiento y el tiempo con sus ejes correspondientes.



*Figura 1. Tracker rastreando la caída de un balón*

Con el video ya en el programa, la reacción de los estudiantes fue la siguiente:

*Profesor: ya tenemos aquí el video en el programa, miremos a ver el tiempo en el que se demora en caer.*

*Estudiante 6: profe que bueno, se ve en cámara lenta.*

*Estudiante 4: también se ve hacia atrás si devolvemos el video.*

*Profesor: miren esta herramienta que nos proporciona Tracker.*

*Estudiante 1: ¿ese es un plano cartesiano profe? Que chévere.*

*Estudiante 5: Aquí está más fácil tomar el tiempo.*

*Estudiante 1: ¿y esa gráfica que apareció ahí profe?*

*Profesor: esta es la gráfica de  $x$  vs  $t$ , donde  $t$  es la variable independiente y  $x$  la variable dependiente.*

El recurso nos permitió cuantificar el fenómeno de la caída libre a través de tablas y sus gráficos (Caicedo-Ortiz *et al.*, 2018; Sirisathitkul, Glawtanong, Eadkong y Sirisathitkul, 2013), ayudando así a razonar sobre el fenómeno físico dándole argumentos matemáticos. Además, aportó a que se pudiera llevar el suceso que están viviendo a la pantalla y así, se pudiera analizar por qué los cálculos que hizo el estudiante 5 no correspondían con los que arrojaba el programa. Un valor agregado del software es que los estudiantes se familiarizaron y se apropiaron fácilmente de él.

Luego de esto, para analizar la pertinencia de Tracker en relación a las múltiples formas de representación que nos permite el software a la hora de matematizar el fenómeno de la caída libre (Ezquerro, Iturrioz, Díaz, 2012), se propuso a los estudiantes hacer una relación entre las pendientes que se veían en las gráficas derivadas del fenómeno que arrojaba el programa y la forma como hallaban la velocidad del objeto que caía. Lo cual, nos permitió regresar sobre el fenómeno y empezar a establecer una correspondencia entre las pendientes en diferentes puntos.

*Profesor: sigamos analizando la gráfica que nos presenta el programa, observen lo que sucede de este punto a este*

*Estudiante 1: cambia la inclinación profe*

*Profesor: está gráfica es de espacio vs tiempo, ¿mientras más inclinada este la gráfica quiere decir qué?*

*Profesor: se desplazó más en menos tiempo.*

*Estudiante 1: profe, es decir, si recorremos más distancia en menos tiempo debemos ir más rápido*

*Profesor: ¿entonces el cambio de estas pendientes nos dice que hay un cambio de...?*

*Estudiante 2: La velocidad porque la pendiente es la velocidad*

*Profe: Ahora miremos esta otra gráfica que nos arroja Tracker. Esta es la gráfica velocidad vs tiempo. Qué me pueden decir de la pendiente de esta función.*

*Estudiante 7: ¿de cuál de todas profes?, tiene muchas.*

*Profe: tiene muchas... la gráfica es de velocidad versus tiempo, ¿si tiene varias pendientes qué significa?*

*Estudiante 6: qué tiene más velocidad en unos lados y menos en otra.*

*Profesor: muy bien, ¿alguno sabe por qué sucede este cambio de velocidad?*

*Estudiante 3: porque va más rápido.*

*Profe: ¿sí, pero por qué va más rápido? Es decir, supongamos que [el profesor está señalando la gráfica en un cambio de pendientes] yo voy en mi moto por la ochenta a 40 km/h y cuando llego a la autopista cambio mi velocidad a 80km/h; qué tuve que hacer yo para cambiar la velocidad.*

*Estudiante 3: acelerar profe.*

*Profe: ok entonces en la gráfica, cuando vemos qué cambie la velocidad entonces estamos...*

*Los estudiantes responden en coro: acelerando.*

*Profesor: muy bien, cada cambio de pendiente en esta gráfica es un cambio de velocidad, es decir una aceleración que puede ser negativa si va frenando o positiva si va más rápido. Es decir, al calcular la pendiente entre dos puntos muy cercanos de la función, está nos dirá con su signo, si está frenando o no.*

Se destaca que debido a los conocimientos previos que tenían los estudiantes, las discusiones tendieron a tratar sobre la pendiente, ya que era el argumento matemático que los estudiantes tenían; con lo que estaban familiarizados. De modo que hacían explícito la relación entre las variaciones en las representaciones gráficas del fenómeno de la caída libre y la pendiente. Cabe aclarar que, para efectos prácticos, se les propuso a los estudiantes hallar la pendiente de la gráfica en diferentes segmentos, haciendo zoom de la gráfica, con el fin de

que los estudiantes se acercaran al concepto de velocidad instantánea cuando delta de  $x$  tendía a cero.

Así, Tracker favoreció hacer varias representaciones matemáticas; como las tablas de datos que permitió analizar el fenómeno en intervalos cada vez más pequeños, el ajuste de curvas, que fue muy significativo para los estudiantes; ya que con base a los puntos que ofrecía el software, los estudiantes pudieron identificar que curva, específicamente, que función se acomodaba mejor a la descripción del fenómeno, en este proceso fue muy importante también las representaciones graficas que ofrecía el programa, lo cual evidenció otra relación entre estas dos áreas en el hecho de que los estudiantes lograron asociar el comportamiento del cuerpo cuando caía, con la gráfica que construyó Tracker del video que grabaron los estudiantes. Lo anterior corresponde con Patty (1994) quien nos muestra que efectivamente no hay una sola manera en concebir la relación entre las matemáticas y la física.



## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Esta investigación tenía como propósito identificar posibles contribuciones de articular conceptos físicos y matemáticos en la comprensión de la caída libre. Para esto, se hace necesario, que se dinamicen las estrategias de aprendizaje y se reflexione acerca de las metodologías y estrategias empleadas en el aula; también, implica buscar estrategias que apoyen el trabajo educativo de enseñanza de la caída libre y la articulación de conceptos físicos y matemáticos, por ello se utiliza el analizador de video Tracker, ya que para lograr cambios en el proceso educativo, el docente tiene como misión buscar alternativas que mejoren su práctica educativa tanto en la cualificación como en el uso de instrumentos mediadores.

Dado que en un primer momento los estudiantes presentaban dificultades para calcular la velocidad y a su vez, para relacionar un delta de  $x$  con la distancia recorrida por el objeto, entendiendo que inicialmente veían las clases de matemáticas y de física como dos áreas disyuntas, que en lo único que guardan relación es que en la física se utilizan “fórmulas” matemáticas. Se consigue que las actividades permitieran a los estudiantes identificar algunas otras relaciones entre la física y las matemáticas. Determinaron vínculos entre la velocidad con la que cae un objeto y una razón de cambio, asociaron variables que influían para que el área de una gota de pintura fuera mayor o menor, identificaron las variables que actúan en la caída libre, y además establecieron relaciones entre ellas, adicionalmente identificaron también, dependencia entre variables.

Segundo, respecto a nuestra pregunta de investigación, encontramos indicios que muestran la necesidad de articulación entre las matemáticas y la física, en el hecho de que una ruptura entre las dos, conlleva a una desconexión entre conceptos que genera que se pierda el sentido de lo que está aprendiendo y que el papel de las matemáticas sea meramente instrumental. Por lo cual, una forma de lograr esa articulación pudo ser con la mediación de Tracker.

En tercer lugar, el uso de este software potenció que los estudiantes identificaran relaciones más constitutivas entre la física y las matemáticas, se dieron cuenta que al construir y modelar la situación estaban matematizando un fenómeno físico ya que estaban construyendo estrategias para representar el fenómeno y poder así, analizarlo con un razonamiento lógico coherente. Ejemplo de esto, es que matematizaron la caída de un cuerpo asignando magnitudes físicas a variables matemáticas, como señala Malagon (1988) y se apoderaron de la situación, tanto de forma gráfica, como analítica, como conceptual.

Cuarto, respecto al analizador de video, este le brindó la posibilidad de vincular de forma activa y dinámica al estudiante en su proceso de aprendizaje, ya que le permitió construir conceptos y desarrollar habilidades, a través de la interacción entre los mismos estudiantes, los argumentos y las conclusiones por cada uno de estos para defender sus ideas. Además, posibilitó poner al estudiante frente a un escenario diferente y real, es decir pudieron alejarse por un momento de la enseñanza tradicional y se adentraron en el análisis de un fenómeno físico mediado por el uso de un simulador que los motivó a aprender matemáticas y física a través de su conexión con situaciones en contexto.

Quinto, respecto al recurso didáctico que se utilizó, la matematización de la caída libre, fue una opción favorable, que permitió que los estudiantes discutieran, compartieran sus ideas y perspectivas, fomentará el interés por aprender de matemáticas y de física a través del análisis de la caída libre y lo más importante es que permitió establecer una relación entre un fenómeno físico con conceptos matemáticos.

Como último, debe ser de interés para el docente, las experiencias y actitudes hacia la enseñanza de la física y las matemáticas, por ello, para lograr cambios en el proceso educativo, el docente tiene como misión buscar alternativas que mejoren su práctica educativa tanto en la cualificación como en el uso de instrumentos mediadores. Para sacarle el máximo provecho a Tracker se recomienda capacitarse en el manejo de la herramienta. Este resulta ser un software muy fácil de manipular, y muy oportuno para evidenciar y potenciar relaciones en la enseñanza de las matemáticas y la física.

## 6. REFERENCIAS

- Abreu, J. L. (2014). El Método de la Investigación Research Method. *Daena: International Journal of Good Conscience*, 9(3), 195-204.
- Ardiles, M. (2009). Formación docente, el otro y las huellas para anticipar la enseñanza y el aprendizaje. Dialogando con Zambrano. *Revista venezolana de Educación (Educere)*, 13(45), pp. 305-310.
- Bonventi Jr., W., & Aranha, N. (2015). Estudo das oscilações amortecidas de um pêndulo físico com o auxílio do “Tracker.” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 37(2), 2504-1-2504-9. doi: 10.1590/S1806-11173721728
- Caicedo-Ortiz, H. E., Santiago-Cortés, E., Castañeda Fernandez, H. O., & Hernández Hernández, C. (2018). Cohetes hidráulicos con videos en cámara lenta. *Revista Mexicana de Física E*, 64(2), 232. doi: 10.31349/RevMexFisE.64.232
- Cardona, M. E., y López, S. (2017). Una revisión de literatura sobre el uso de sistemas de adquisición de datos para la enseñanza de la física en la educación básica, media y en la formación de profesores. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 39(4), 11. doi: 10.1590/1806-9126-rbef-2016-0308
- Carmona, J. A., Arias, J., y Villa, J. A. (2019). Formación inicial de profesores basados en proyectos para el diseño de lecciones STEAM. In E. Serna (Ed.), *Revolución en la Formación y la Capacitación para el Siglo XXI* (2a ed.) (Vol. I) (pp. 483–492). Medellín: Editorial Instituto Antioqueño de Investigación. doi: 10.5281/zenodo.3524356
- Carmona-Mesa, J. A., Salazar, J. V., y Villa-Ochoa, J. A. (2018). Uso de calculadoras simples y videojuegos en un curso de formación de profesores. *Uni-pluriversidad*, 18(1), 13–24. doi: 10.17533/udea.uni-pluri.18.1.02
- Castro, Enrique, Rico, Luis, Romero, Isabel (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las ciencias*, 17(3), 361-371.
- Chávez, N. (2007). Introducción a la investigación educativa. *Maracaibo: Ars Gráfica Editores*.
- Doorman, L. M. y Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 41(1), 199-211
- Due, K. (2009). Physycs, learning conversations and gender-a study of group discussions in physics in upper secondary school. Recuperado de <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:207394/FULLTEXT01.pdf>

- Ezquerro, A., Iturrioz, I., & Díaz, M. (2012). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de Las Ciencias.*, 9(2), 252–264. doi: 10.25267/rev\_eureka\_ensen\_divulg\_cienc.2012.v9.i2.07
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Recuperado de <https://p4mriunismuh.files.wordpress.com/2010/08/revisiting-mathematics-education.pdf>
- Gomes, R., y Duarte, V. (2013). Modelação computacional, ambientes interactivos e o ensino da Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. *Revista Lusófona de Educação*, 25(25), pp. 35-58.
- Hansson, L., Hansson, O., & Juter, K. y. (2015). Reality-Theoretical Models-Mathematics: A Ternary Perspective on Physics Lessons in Upper- Secondary School. Kristianstad, Sweden. doi:10.1007/s11191-015-9750-1
- Jesus, V. L. B. de, & Barros, M. A. J. (2014). As múltiplas faces da dança dos pêndulos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 36(4), 1–7. doi: 10.1590/S1806-11172014000400010
- Jesus, V. L. B. de, & Sasaki, D. G. G. (2014). Video-Análise De Um Experimento De Baixo Custo Sobre Atrito Cinético E Atrito De Rolamento. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 36(3), 3503.
- Karam, R. (2014). Framing the structural role of mathematics in physics lectures: A case study on electromagnetism. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 10(1), pp. 010119.
- L'esayeur. (1980). *Il saggiaiore* . Les Blles Lettres "Annales littéraires de l'université de Bésancon", 234.
- Lesh, R. (1997). "Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones". *Enseñanza de las ciencias*, 15(3), 377-391.
- Lizarazu, U. V., Martínez, P. A., Marulanda, B. S. & Muñoz, C. P. (2008). ESTUDIO DE CASO. Recuperado de: [http://fido.palermo.edu/servicios\\_dyc/publicacionesdc/vista/estudio\\_de\\_caso](http://fido.palermo.edu/servicios_dyc/publicacionesdc/vista/estudio_de_caso)
- Martínez, M., Susano, J., & Espinosa, J. (2015). Redes sociales y tics en la cátedra universitaria. *Uni-pluriversidad*, 15(1), 87–99.
- Malagón, J. F. (1988). *La relación física y matemáticas en Galileo* (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación de Colombia (MEN). (1994). Ley General de Educación o Ley 115. Bogotá, Colombia. Recuperado de [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906\\_archivo\\_pdf.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf)

- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA V.2) Matemáticas*. Bogotá. Recuperado de:  
[http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA\\_Matem%C3%A1ticas.pdf](http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf)
- Moreno, A., Galiazzi, M., & Pino, J. (2017). As relações “Ciência, Tecnologia e Sociedade” em processos educativos: Estudo da produção científica na Revista Iberoamericana CTS. *Uni-Pluriversidad*, 17(1), 14–24.
- Monge, E. C. (2010). El estudio de casos como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas. *Revista Nacional de administración*, 1(2), 31-54.
- Pantoja, R., Guerrero, M. L., Ulloa, R. y Nesterova, E. (2016). Mathematical Modeling in Problem Situations of Daily Life. *Journal of Education and Human Development*, 5(1), pp. 62-76.
- Paty, M. (1994). *Le caractère historique de l'adéquation des mathématiques à la physique*. Recuperado de <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00167193>
- Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19(1), 71-98.
- Redish, E. F., y Gupta A. (2009). Making meaning with math in physics: a semantic analysis. Trabajo presentado en GIREP 2009, Leicester, Reino Unido. Recuperado de <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1002/1002.0472.pdf>
- Redish, E. F., y Kuo, E. (2015). Language of Physics, Language of Math: Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology. *SCIEDU*, 24(5), pp. 561-590.
- República de Colombia. (1991). *Constitución Política de Colombia (2 ed.)*. Bogotá, Colombia.
- Rodríguez y Gil, J. y. (1996). Metodología de la Investigación Cualitativa. Recuperado el Julio de 2018, Romero Chacón, A. E. (2003). La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea. *Educación y Pedagogía*, XV(35), 57-67.
- Romero, A. E., y Rodríguez, O. (2005). El concepto magnitud como fundamento del proceso de la medición. La cuantificación de los estados de movimiento y sus cambios. *Revista Educación y Pedagogía*, 17(43), pp. 127-140.
- Sánchez, T (2018). *Propuesta didáctica para el aprendizaje del cálculo del área de objetos cotidianos planos con los programas Tracker y GeoGebra* (Tesis de maestría). Universidad de Guadalajara, Guadalajara, México.

- Sasaki, D. G. G., & Jesus, V. L. B. De. (2020). Videoanálise do voo de um fidget spinner: torque e momento angular. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42. doi: 10.1590/1806-9126-rbef-2019-0223
- Sirisathitkul, C., Glawtanong, P., Eadkong, T., & Sirisathitkul, Y. (2013). Digital video analysis of falling objects in air and liquid using Tracker. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35(1), 1504.
- Souza, P. V. S., Silva, C. J. V. da, & Balthazar, W. F. (2018). O arrasto magnético e as correntes de Foucault: um experimento de baixo custo com vídeo-análise. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41(2). doi: 10.1590/1806-9126-rbef-2018-0257
- Tan, U., Zhu, Y., Lee, C.H., Toh, T., Sze, G., Tay, S., Wong, D., y Pey, K. (2017). Preliminary study of integrated physics and mathematics bridging course, *IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)*, pp. 1146-1151
- Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., y Pospiech, G. (2012). Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education. *Science & Education*, 21(4), pp 485–506
- Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D., y Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, 11(2), 25–34. doi: 10.4067/S0718-50062018000200025
- Vizcaino, D., y Terrazan, E. (2015). Diferencias trascendentales entre matematización de la física y matematización para la enseñanza de la física. *Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología- Tecné Episteme y Didaxis*, (38), pp. 95-111.

## ANEXOS

### Anexo A



#### Consentimiento informado

Participación en el proyecto de investigación dinamización de la relación matemáticas y física, haciendo uso de simuladores.

La Universidad de Antioquia y la Institución Educativa Colegio Sapiencia han celebrado un convenio para el desarrollo de Prácticas Pedagógicas de la Licenciatura en Matemáticas y Física, en el marco de este convenio, se adelanta una investigación que busca analizar, fomentar y mantener el interés hacia las matemáticas y la física por medio de la enseñanza de estas a partir de la relación que hay entre ellas. Para el desarrollo de esta, se invita a los estudiantes del grado 10° de la Institución Educativa Colegio Sapiencia para que participen a través de las interacciones que se dan entre estudiantes, profesores y contenido matemático. En ese sentido, los datos que serán importante para el análisis en la investigación son:

- Videos que registran cada una de las sesiones de clase.
- Diálogos, documentos y demás recursos que se utilice en clase.
- Audios y grabaciones de entrevistas.
- Fotografías

Nota: Aunque se registraran videos y fotos, los estudiantes no serán grabados ni fotografiados, ya que el foco de la investigación, son los datos q allí se recojan.

Por lo anterior, les solicitamos su colaboración y respaldo en este ejercicio autorizando que las actividades de los estudiantes John Alexander Giraldo López y Juan Luis Arenas Bedoya, sean registrada a través de los medios anteriormente mencionados, con el fin de que posteriormente sea analizada en función de los objetivos del proyecto. Sobre la participación en el proyecto informamos que:

1. La participación en el proyecto es voluntaria.
2. Los estudiantes se pueden retirar de la investigación en cualquier momento sin que eso represente un perjuicio para ellos.
3. La participación en la investigación no tendrá efectos sobre la calificación (notas) de los los desempeños de los estudiantes.
4. Los estudiantes no tendrán incentivos económicos por su participación en el proyecto.
5. Toda la información obtenida será archivada en papel y medio electrónico. El archivo se guardará en la Universidad de Antioquia bajo la responsabilidad del equipo de trabajo.
6. La información recolectada solo se utilizará para fines académicos. En caso de requerir usar alguna imagen o transcripción para algún informe de investigación se hará guardando la identidad de los participantes.

Agradecemos su aporte a la comunidad científica y educativa del país, con certeza permitirán ampliar los desarrollos y comprensiones se que tienen sobre los ambientes que propician un aprendizaje de las matemáticas en medios online.

Manifiesto que no he recibido presiones verbales, escritas y/o mímicas para participar en el estudio; que dicha decisión la tomo en pleno uso de mis facultades mentales, sin encontrarme bajo efectos de medicamentos, drogas o bebidas alcohólicas, consciente y libremente.

He leído y escuchado satisfactoriamente las explicaciones sobre la participación en esta investigación; así mismo, se me brindó copia del consentimiento informado y he tenido la oportunidad de hacer preguntas a las cuales se me han respondido satisfactoriamente, por lo que estoy de acuerdo en participar en ella y autorizo el uso de la información obtenida para los propósitos planteados en el apartado introductorio del presente consentimiento.

---

Firma de acudiente

Nombre:

Número de identificación:

Tel:

Fecha:

---

John Alexander Giraldo López

Practicante

Facultad de Educación – Universidad de Antioquia

---

Juan Luis Arenas Bedoya

Practicante

Facultad de Educación – Universidad de Antioquia

---

Jhony Alexander Villa Ochoa

Asesor

Facultad de Educación – Universidad de Antioquia

---

Jaime Andrés Carmona Mesa

Asesor

Facultad de Educación – Universidad de Antioquia