UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Razonamiento inductivo desde el enfoque del Conocimiento Pedagógico del Contenido -PCK- utilizando material de apoyo

Carmen Camila Acero Toscano

Doraini Callejas Parra

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación, Departamento de la Enseñanza de las Ciencias y las Artes

Apartadó, Colombia

2019

Razonamiento inductivo desde el enfoque del Conocimiento Pedagógico del Contenido -PCK- utilizando material de apoyo

Carmen Camila Acero Toscano
Doraini Callejas Parra

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Licenciado en Matemáticas y Física

Asesores (a):
Jose Wilde Cisneros
Maestría en Educación, Línea Educación Matemática

Línea de Investigación:
Formación de maestros

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Departamento de la Enseñanza de las Ciencias y las Artes
Apartadó, Colombia
2019

Dedicatorias

A mi padre aunque ya no esté, sé que sentiría orgulloso de verme alcanzar esta meta, a mi madre y hermanos porque su amor y cariño me han acompañado en cada momento de mi vida, a mis amigos Johnatan y Jorge que de una forma u otra aportaron sus ideas y conocimientos de manera sincera, a mi amiga y compañera Camila que nos apoyamos en esta vida universitaria y por último, a mi querida alma mater por ayudarme en mi crecimiento personal y profesional.

Doraini Callejas

A cada una de las personas que aporto a que este propósito se cumpliese, principalmente a mi familia el motor de mi vida.

A Dios por darnos fuerzas cada día para culminar con este proyecto y acompañarnos en todo momento.

Carmen Acero

"Mira que te mando que te esfuerces y seas valiente; no temas ni desmayes, porque Jehová tu Dios estará contigo en dondequiera que vayas."

Josué 1:9

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ILUSTRACIONES

TABLA DE GRÁFICOS

TABLA DE IMÁGENES

GLOSARIO

Abstracción: *f.* Acción y efecto de abstraer o abstraerse.

Abstraer: *tr.* Separar por medio de una operación intelectual un rasgo o una cualidad de algo para analizarlos aisladamente o considerarlos en su pura esencia o noción. *Prnl.* Concentrarse en los propios pensamientos apartando los sentidos o la mente de la realidad inmediata.

Axiomas: *m.* Proposición tan clara y evidente que se admite sin demostración. *m. Mat*. Cada uno de los principios fundamentales e indemostrables sobre los que se construye una teoría.

Conjunción: *f.* Junta (unión).

Currículo: *m.* Plan de estudios. *m.* Conjunto de estudios y prácticas destinadas a que el alumno desarrolle plenamente sus posibilidades. *m.* Currículum.

Disyunción: *f.* Acción y efecto de separar y desunir.

Epígrafe: *m.* Resumen que suele preceder a cada uno de los capítulos u otras divisiones de una obra científica o literaria, o a un discurso o escrito que no tenga tales divisiones.

Insolvencia: *f.* Falta de solvencia, incapacidad de pagar una deuda.

Premisa: *adj.* Prevenido, propuesto o enviado con anticipación. *f.* Señal o indicio por donde se infiere algo o se viene en conocimiento de ello. *f. Fil.* Cada una de las dos primeras proposiciones del silogismo, de donde se infiere y saca la conclusión.

Silogismo: *m. Fil.* Argumento que consta de tres proposiciones, la última de las cuales se deduce necesariamente de las otras dos.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se realiza en el marco de la práctica pedagógica de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia para pregrado; el análisis se centró en cómo el uso de material de apoyo promueve el desarrollo del razonamiento inductivo en estudiantes del grupo 6°A de la Institución Educativa San Pedro Claver del municipio Apartadó (Antioquia, Colombia) en su contexto escolar, basado en la perspectiva del conocimiento pedagógico del contenido - PCK- por sus iniciales en inglés: Pedagogical Content, Knowledge, Shulman, L., (1986, 1999); Ball, D., (2000,2005); Hill, H., Schilling, S., & Ball, D., (2004), que debe tener un maestro en la enseñanza de matemáticas para describir, explicar, valorar y guiar el avance de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La investigación está enmarcada, bajo una metodología cualitativa según Cohen, L. y Manion, L (1990), la cual permite analizar, describir e interpretar resultados de una investigación. Concluimos que los materiales[1] de apoyo definidos por Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M (2011) como parte del desarrollo del conocimiento y la actividad escolar permiten promover el razonamiento inductivo.

Palabras Claves: Conocimiento pedagógico del contenido, Razonamiento inductivo y material de apoyo.

[1] (Carretero, Coriat y Nieto, 1995), definen el material como medios que facilitan el actuar del estudiante, diseñados específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, se diseñan con fines educativos (Si bien, en general, en un buen material didáctico transciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material y qué es un recurso, entendiendo recurso como cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje, que el maestro decide incorporar en sus enseñanzas.)

ABSTRACT

This research work is carried out within the framework of the pedagogical practice of the Bachelor of Mathematics and Physics of the University of Antioquia for undergraduate; the analysis focused on how to use the support material to promote the development of inductive reasoning in 6th grade students of the San Pedro Claver Educational Institution of the Apartadó municipality (Antioquia, Colombia) in its school context; based on the perspective of pedagogical content knowledge -PCK- Shulman, L., (1986, 1999); Ball, D., (2000,2005); Hill, H., Schilling, S., & Ball, D., (2004), that a teacher must have in teaching mathematics to describe, explain, assess and guide the progress of teaching and learning processes.

The research is framed, under a qualitative methodology according Cohen, L. y Manion, L, (1990), which allows to analyze, describe and interpret the results of an investigation. We conclude that the support materials[2] defined by Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M (2011) as part of the development of knowledge and school activity promote inductive reasoning.

Keywords: Pedagogical content knowledge, Inductive reasoning, and support material.

[2] (Carretero, Coriat y Nieto, 1995), define the material as means that facilitate the student's actions, designed specifically for the learning of a particular concept or procedure, they are designed for educational purposes (Although, in general, in a good didactic material it transcends the intention of original use and admits varied applications, therefore, there is no line that clearly delimits what is a material and what is a resource, understanding resource as any material, not designed specifically for learning, that the teacher decides to incorporate in his teachings.)

Introducción

Esta investigación se centra en el campo del Conocimiento Pedagógico del Contenido -PCK- y se asume desde la utilización de material de apoyo en las aulas de clase para el fortalecimiento del razonamiento inductivo.

La pregunta de investigación es, ¿Cómo fortalecer el razonamiento inductivo en los estudiantes del grado sexto de la Institución Educativa San Pedro Claver utilizando material de apoyo desde el enfoque del Conocimiento Pedagógico del Contenido?

Se plantea como objetivo general de la investigación: Fortalecer las habilidades del razonamiento inductivo en los estudiantes del grado sexto de la IESPC utilizando material de apoyo. Con el propósito de brindar una posible respuesta a la pregunta es necesario conocer el contexto escolar, en tal sentido, un primer acercamiento está dado por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas en Colombia los cuales proponen un currículo en las instituciones educativas que tenga como uno de sus pilares el razonamiento. Buscando desarrollar competencias que permitan a los estudiantes afrontar los problemas matemáticos de la vida empleando los mejores medios posibles. Para ello, los maestros deberían optar por estrategias didácticas que busquen fortalecer aquel razonar en el estudiante, que ayuden en la formación de sujetos críticos, que se apropien del contenido matemático mediante actúan en el aula.

Además, es necesaria una fundamentación teórica para analizar el papel fundamental del maestro desde un enfoque del PCK, el proceso de razonamiento inductivo, y cómo los materiales de apoyo pueden aportar al fortalecimiento de éste, donde se justifique la búsqueda de una solución de la problemática inquiriendo darle respuesta. Para ello este trabajo se bosqueja en siete capítulos, cuya descripción se esboza a continuación.

El primer capítulo presenta la caracterización de la población, objeto de estudio y la contextualización del centro de prácticas donde se llevó a cabo la práctica pedagógica. En el segundo se analizan los instrumentos necesarios para identificar la problemática, dando pie a la pregunta problematizadora y objetivos.

El tercer capítulo se centra en la identificación de los aspectos que pueden ayudar y dar aportes a la solución de la problemática; continuando con una muestra breve estado del arte en relación a esa situación. En el cuarto capítulo se presentan de manera detallada los fundamentos teóricos que se tuvieron en cuenta en esta investigación para brindar una solución a la problemática, además de los elementos considerados en el análisis de los resultados en búsqueda de indagar cómo el uso de material desde el PCK ayuda a fortalecer el razonamiento inductivo. También se aborda en este capítulo la metodología cualitativa, la cual supone una aproximación interpretativa a la comprensión de los objetos matemáticos manifestada por los alumnos. Denzin y Lincoln (2005).

El quinto capítulo presenta tres etapas que fueron el escenario natural donde se desarrolló la investigación. Se destacan los aspectos asociados con la metodología de la investigación, con su estructura, con la descripción general de la investigación, con la caracterización de los participantes y con el contexto institucional. Adicionalmente se presentan los instrumentos de producción de la información y, finalmente se procede con la descripción metodológica de las etapas de la investigación y de los criterios de análisis de la información.

El sexto capítulo se centra en los análisis realizados a los resultados obtenidos a través de actividades de aprendizaje por parte de los estudiantes, donde se realiza desde ciertas categorías que permitan visualizar una forma de razonar inductiva, la utilidad del material y la importancia del PCK que un maestro debe tener para la trasposición de contenidos disciplinares.

En el último capítulo se presentan las conclusiones de la investigación dejando entre ver algunos resultados obtenidos durante todo el proceso investigativo que suministraron respuesta a la pregunta problematizadora, todo esto desde la recolección de información y su respectivo análisis a partir de los objetivos planteados; lo cual aportó a la verificación de cómo el maestro desde un enfoque del PCK puede utilizar el material de apoyo orientándolo hacía un fortalecimiento del razonamiento inductivo.

1. CONTEXTO

La Facultad de Educación mediante el acuerdo 284 (2012), que define el Reglamento de Prácticas Académicas para los programas de pregrado de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, propone: "La práctica pedagógica será un espacio para la producción de saber pedagógico mediante la reflexión, la investigación y la sistematización de las experiencias de práctica" (p. 3), en este sentido se llevó a cabo el proceso de Práctica Pedagógica en la Institución Educativa San Pedro Claver -IESPC- del municipio de Apartadó (Antioquia), en los semestres 2018-1,2; y 2019-1, con el objetivo de aportar a la transformación de la realidad educativa en el municipio.

En el semestre 2018-1 se analizaron aspectos referentes al contexto social, mediante las siguientes acciones: un análisis teleológico, una caracterización de los estudiantes del grupo 6°A y profesores de la institución educativa, revisión del plan de área del grado en el cual se desarrolló la intervención de aula, un diagnóstico inicial a los estudiantes, observaciones de clases al maestro cooperador, análisis de las pruebas institucionales tanto internas como externas e intervención en el aula.

En el semestre 2018-2 se continua con la intervención en el aula, diseño y ejecución de planes de clase y en el semestre 2019-1 se realizaron los análisis y sistematización de las experiencias del proceso de la práctica.

1.1 Análisis Teleológico

En este apartado se identifican todas las características de del centro de prácticas, tal como se describen en el Proyecto Educativo Institucional -PEI- de la IESPC.

1.1.1 Misión y Visión.

La IESPC es una institución de carácter público, aprobada por el Ministerio de Educación Nacional -MEN- según la resolución N°7643 del 27 de septiembre del 2000 y se encuentra ubicada en la zona urbana del municipio de Apartadó, en el Bloque 3 del Barrio Obrero.

Desde su misión se centra como una institución inclusiva ofreciendo una educación de calidad basada en el respeto a la diversidad, la solidaridad y la honestidad; fomentando el trabajo en equipo, la convivencia pacífica y el intercambio cultural; que contribuye a la formación de hombres y mujeres íntegros a través del desarrollo y fortalecimiento de sus potencialidades, talentos, valores y actitudes que les permitan responder a las demandas del medio, aportando al mejoramiento y transformación de la calidad de vida de la región de Urabá.

Como visión el plantel educativo se proyecta para el año 2020 como una institución pionera en la región de Urabá en procesos de educación inclusiva, convivencia pacífica y cultura organizacional proyectada al desarrollo comunitario y conservación del medio, el trabajo social, cultural, recreativo y deportivo.

1.1.2 Filosofía.

La IESPC toma el nombre de Pedro Claver debido al religioso español perteneciente a la orden de los jesuitas (Compañía de Jesús), quien solicita ser enviado a América para servir a la comunidad más necesitada de la época. Debido a las diversas situaciones de violencia que se vivía en 1993 en Apartadó, la IESPC nace con la necesidad de atender a la población desplazada de bajos recursos y en diversas situaciones de violencia, en especial grupos terroristas armados, distribuyendo así sus sedes en los diferentes sectores del barrio Obrero denominados bloques 1, 2, 3, 4, y 5.

En consecuencia, la institución atiende a diferentes grupos poblacionales, incluyendo población en condición de vulnerabilidad (extrema pobreza, condición de discapacidad), es por lo anterior, que la institución toma la filosofía de San Pedro Claver como defensor de los derechos humanos y las personas en estado de vulnerabilidad, para adoptar en sus áreas de gestión educativa acciones encaminadas al proceso de inclusión de todos los estudiantes a través de un modelo pedagógico *social-humanístico***,** el cual está contemplado en el PEI.

1.1.3 Modelo Pedagógico.

El modelo pedagógico social- humanístico tiene como meta formar personas íntegras de gran calidad humana comprometidas a impulsar el desarrollo social comunitario para mejorar la calidad de vida en la región, en el país y el mundo. Para dar cumplimiento a lo anterior, se proponen una interdisciplinariedad de todos sus componentes pedagógicos como son: los objetivos institucionales, los contenidos básicos por áreas, los procedimientos técnicos y metodológicos, las relaciones profesor-estudiante y estudiante-profesor, la comunidad educativa, padres de familia, los criterios de evaluación y las experiencias previas de los estudiantes.

Lo anterior teniendo como fundamentación la Psicología Socio-cultural de Vygotsky, el Desarrollismo Pedagógico de Dewey y Piaget, el Romanticismo Pedagógico de Rousseau, la Pedagogía Socialista de Makarenco, Freinet y Paulo Freire, los valores éticos, morales y el contexto donde se desenvuelve el estudiante PEI (2013).

En la concepción del maestro en la IESPC, éste se proyecta como un orientador en la formación integral del estudiante, un facilitador del aprendizaje orientándolo al desarrollo de competencias. Una persona crítica con vocación, que hace de su práctica educativa un proceso dinámico mediante el uso de las didácticas y metodologías activas apropiadas, investigador en su quehacer, reflexionando a la vez sobre los distintos estilos de aprendizaje.

Por otro lado, en la concepción del estudiante en la IESPC, se concibe como un ciudadano respetuoso y participativo, capaz de comunicarse, comprometido consigo mismo y con la sociedad, realizado como persona que valora la realidad histórica y cultural del país, así como la cultura universal. Con actitud positiva ante la vida y competente para afrontar con éxito los retos que la sociedad le plantea; una persona capaz de construir su proyecto de vida, comprender su papel en la sociedad y generar soluciones a problemas de su entorno. Además, la evaluación de la IESPC es concebida como un proceso dinámico, continuo y sistemático, enfocado hacia los cambios de las conductas y rendimientos, mediante el cual verificamos los logros adquiridos en función de los objetivos propuestos.

1.1.4 Administración.

La IESPC presta servicios educativos en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media técnica, ofreciendo formación técnica con especialidad en entrenamiento deportivo en convenio con el Servicio Nacional de Aprendizaje -SENA- y los programas ofrecidos por la Fundación de Estudios Superiores de Urabá -FESU-. La comunidad educativa está conformada por 4 coordinadores académicos, 2 maestras orientadoras, 1 bibliotecaria, 3 auxiliares administrativas, 13 personas como personal de apoyo y el rector; posee 89 maestros, de los cuales, 7 son de matemáticas en la jornada de la mañana y sólo 5 de ellos son licenciados en el área, 2 de ellos son un contador y un ingeniero; además la institución posee 3299 estudiantes ubicados en dos jornadas, de los cuales el grupo al que está dirigida la investigación, es el grupo 6°A y cuenta con de 49 estudiantes, 20 hombres y 29 mujeres, y sus edades oscilan entre 11 y 15 años.

La IESPC cuenta con recursos que ofrece a los estudiantes para su proceso educativo como: sala de sistemas con software gratuito (Geogebra), video Beam, un tablero digital, biblioteca, y un salón audio visual. Además de material de apoyo en el área de matemáticas como: Tangram, triqui tridimensional, damas, torres de Hanói, escalera algebraica, pistas algebraicas, parques con números racionales, suma pantano y ajedrez.

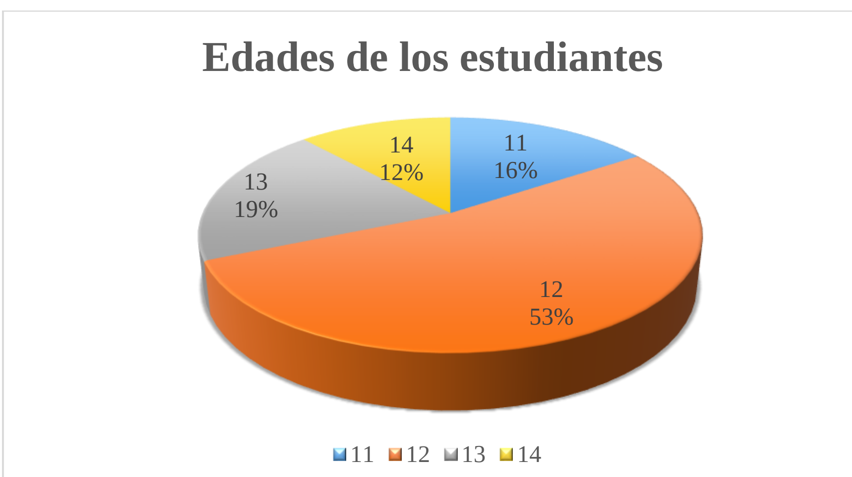
El Plan Integral de Área -PIA- está elaborado de acuerdo a las normas y documentos rectores del MEN, la maya curricular se encuentra elaborada por competencias, componentes y Derechos Básicos de Aprendizajes -DBA-; promoviendo la metodología de la IESPC social-humanística, mediante el trabajo colaborativo donde se busca fortalecer los estándares básicos de matemáticas, las relaciones sociales suscitando la buena comunicación y la tolerancia.

1.2 Caracterización de los estudiantes

Al inicio de la práctica pedagógica se realizó una encuesta a los estudiantes del grado sexto de la IESPC, con el objeto de analizar el entorno social donde se desenvolvía el estudiante, su compromiso con el estudio y la afinidad que tenía o no con el área de las matemáticas. Por lo anterior, la encuesta tuvo como objetivo brindar mayor rigor al proceso de interpretación de datos o respuestas da como resultado que se llegan a dar a lo largo del desarrollo de está practica pedagógica.

1.2.1 Encuesta a estudiantes.

Se realizó una encuesta con una muestra 51 estudiantes de los cinco grupos del grado sexto que tiene la institución, cuyo objetivo fue identificar y conocer las características sociales. Los resultados más relevantes que se obtuvieron fueron los siguientes: los estudiantes del grado sexto son adolescentes entre los 11 y 14 años de edad como se muestra en la Gráfica 1, de estos el 53% son niños y niñas de 12 años.

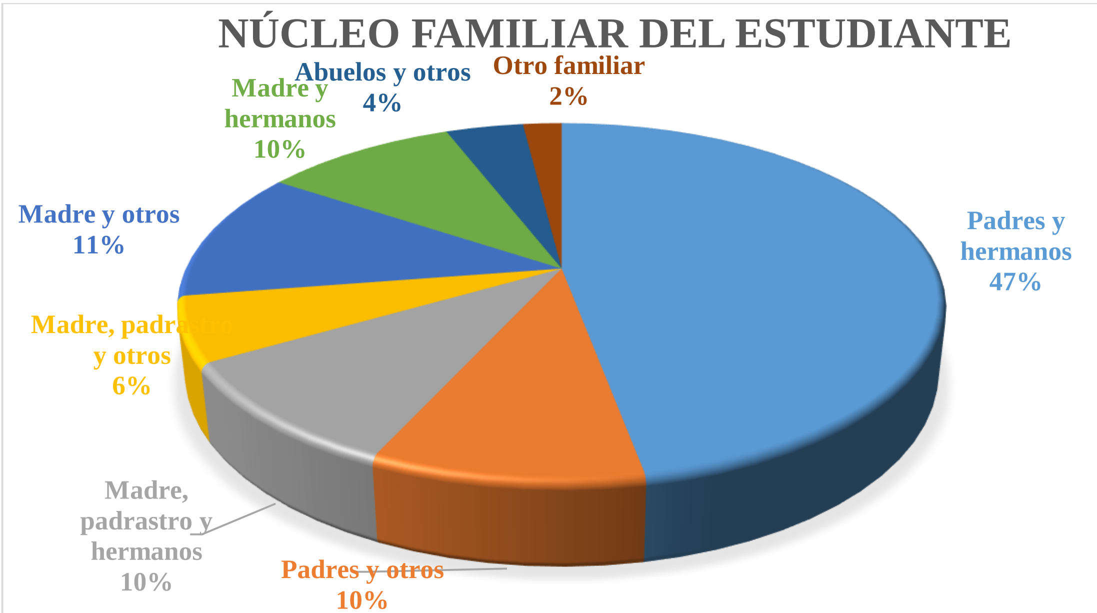


Gráfica 1. Edades de los estudiantes

De la Gráfica 2 se observa que el 53% pertenecen a hogares estrato socio-económico 1, el 39% a estrato socio-económico 2 y un 8% a estrato socio-económico 3.

Gráfica 2. Estrato socio-económico

La Gráfica 3 muestra que el 47% presenta que su núcleo familiar está conformado por el papá, la mamá y los hermanos, dentro de lo que podríamos considerar como un núcleo familiar común, el resto conviven con la madre y padrastro, madre y hermanos, y en otros casos viven en una misma casa con otros familiares como tíos, abuelos, primos, un 2% vive con otro familiar que no es ni el padre ni la madre.

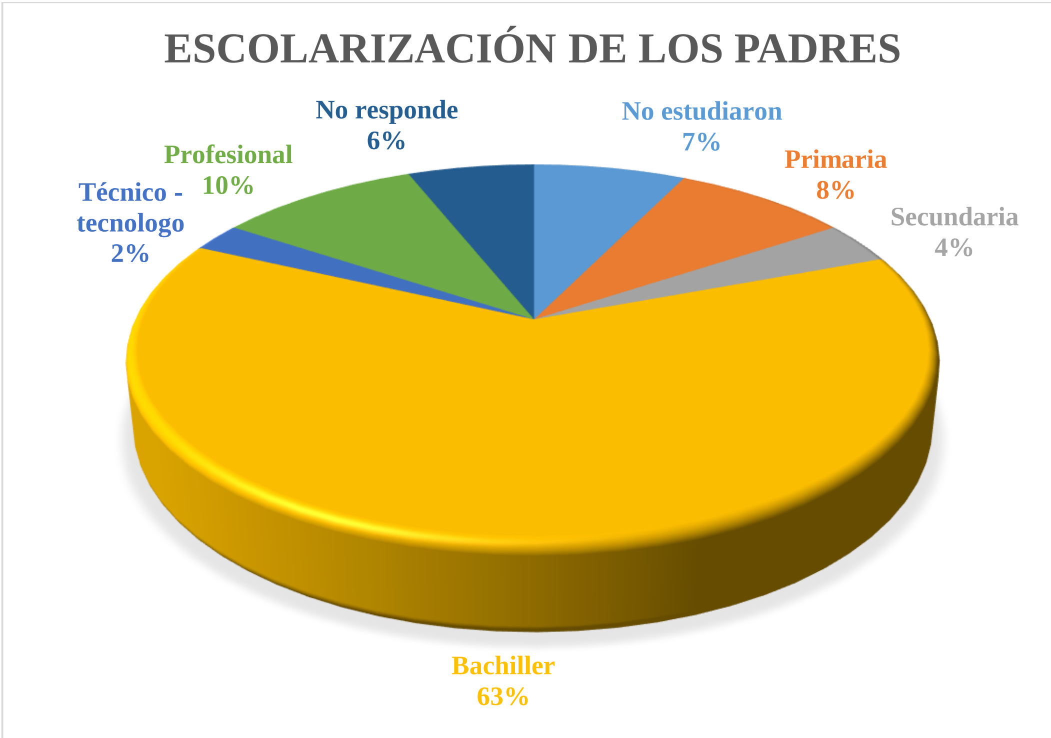


Gráfica 3. Núcleo familiar del estudiante

La Gráfica 4 muestra que un 25% de los estudiantes labora, lo cual es una cifra significativa, ya que son menores de edad.

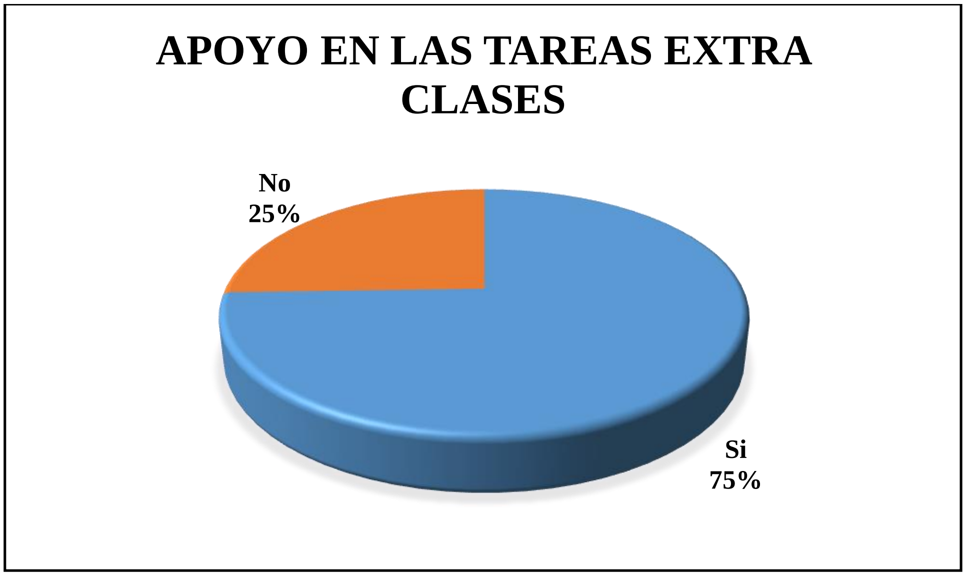
Gráfica 4. Situación laboral del estudiante

También se infiere en la Gráfica 5 sobre la escolarización de los padres que, 63% terminaron el bachillerato, un 8% se terminaron primaria, un 4% secundaria y un 7% no estudiaron.



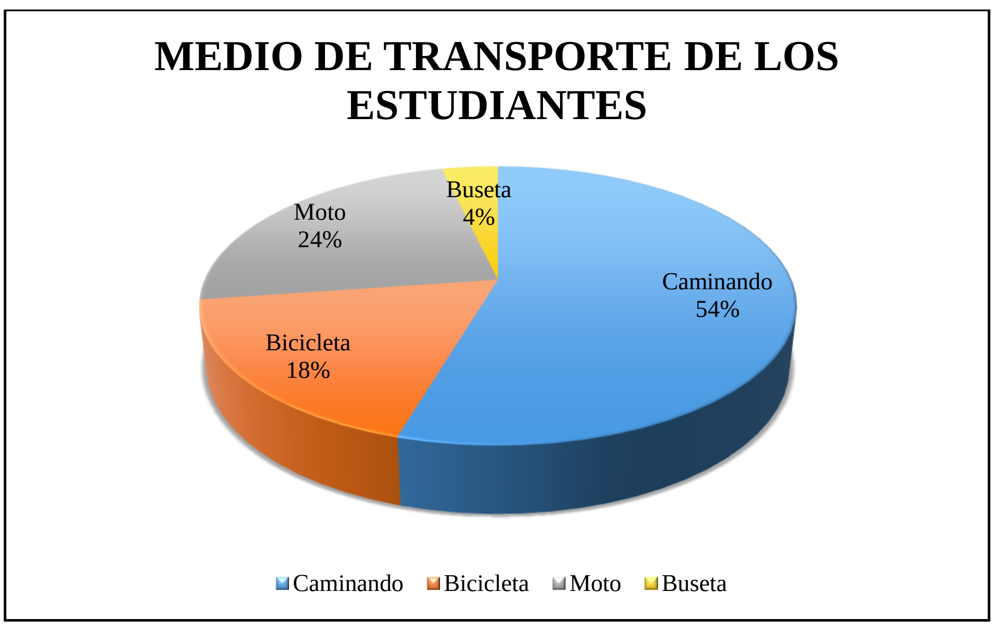
Gráfica 5. Escolarización de los padres

En la Gráfica 6 se puede inferir que los estudiantes podrían tener el apoyo de sus familiares asesorándolos, guiándolos o consultándoles sobre las tareas extra clase, donde el 75% de los estudiantes encuestados respondieron que si tienen un familiar que les ayuda con las tareas educativas.



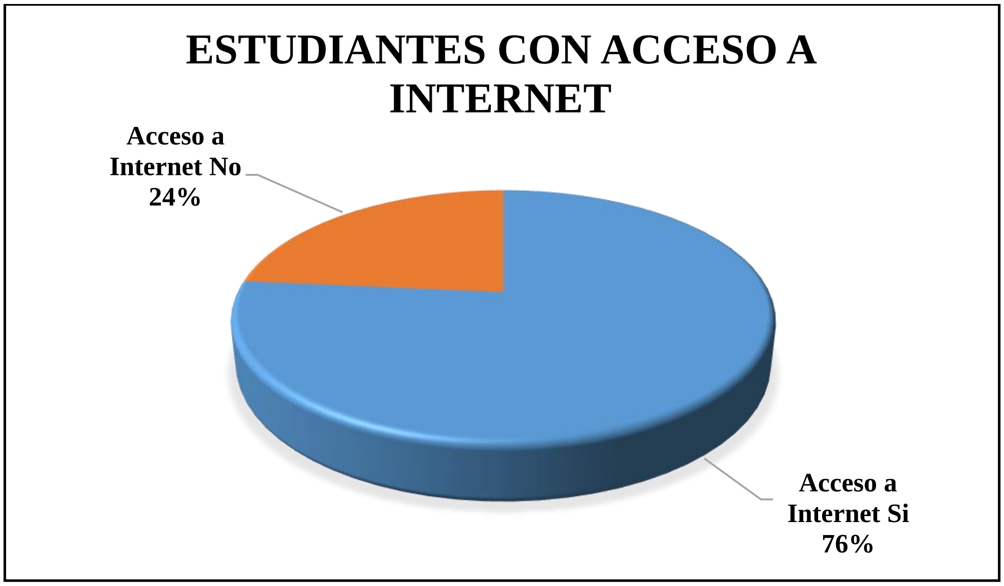
Gráfica 6. Escolarización de los padres

En cuanto al medio de transporte, en la Gráfica 7 se observa que el 54% de los estudiantes camina para llegar a su respectivo destino, esto se debe a que en su gran mayoría las viviendas de los estudiantes no están muy alejadas de la institución.



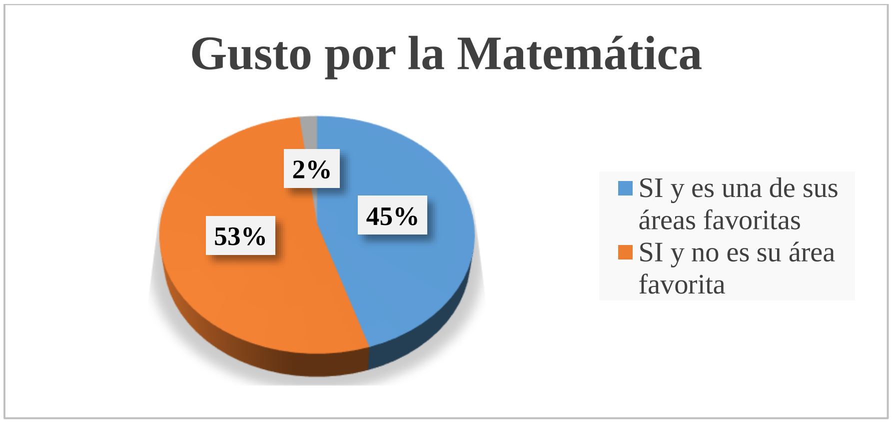
Gráfica 7. Medio de transporte de los estudiantes

Respecto al acceso a Internet que tiene el estudiante en su hogar, en la Gráfica 8 se visualiza que el 76% puede contar con este recurso, como herramienta de gran ayuda para facilitar la consulta de distintos temas a la hora de estudiar o realizar tareas.



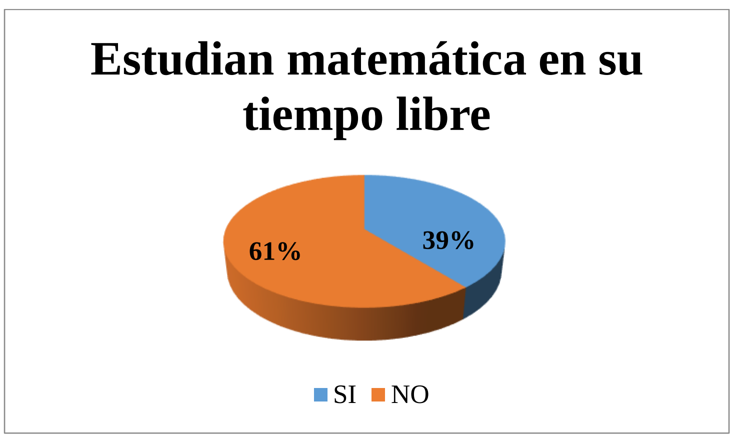
Gráfica 8. Estudiantes con acceso a Internet

Referente al elemento académico se logró identificar que en cuanto al área de matemática no son apáticos a ella, por el contrario, en la Gráfica 9 se manifiesta que un 45% responde que les gusta y es una de sus áreas favoritas, mientras un 53% responde que les gusta, pero muestran más simpatía por otras materias con las que se logran identificar, bien sea por los hobbies o porque entienden mucho mejor otras áreas.



Gráfica 9. Gusto por la matemática

A una gran mayoría les agrada las matemáticas debido a la gran importancia que tiene ella para la vida; pero a pesar de que responden positivamente al agrado por las matemáticas esto no se ve reflejado en la Gráfica 10 donde se les preguntó a los estudiantes si le dedican tiempo extra clase a esta materia, el 61% respondió que No y si por el contrario se lo dedicasen sólo sería para cumplir con una exigencia académica.



Gráfica 10. Estudian matemática en su tiempo libre

1.3 Planteamiento del problema

La problemática de investigación se sustenta desde tres instrumentos, el primero refiere a las observaciones de clases realizadas al maestro cooperador, el segundo se enfoca en los resultados de las pruebas externas institucionales que plantea el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior -Icfes-, el tercer instrumento se vincula con la prueba diagnóstica referida a la competencia razonamiento inductivo.

1.3.1 Desde las observaciones de clase

Desde las observaciones de clase que se realizaron referente al actuar del docente en el aula, se puede identificar, que, en el proceso de enseñanza, la mayoría de las veces no se brinda a los estudiantes los objetivos de la clase por parte del maestro, ni se menciona cuáles son los derechos básicos de aprendizaje -DBA- a trabajar durante el periodo; de igual forma no se evidencia el uso de algún medio didáctico para apoyar dicho proceso. La mayoría del tiempo el maestro utiliza el tablero, marcador y discurso matemático como recursos orientadores, por lo cual se infiere que el maestro opta por una estrategia metodológica clásica.

> Arrieta (2003) resalta que, las clases de matemáticas se imparten tradicionalmente de forma magistral, donde el profesor explica con la mayor claridad posible cómo se aplican los conceptos, lo ilustra con unos ejemplos en la pizarra y luego los estudiantes realizan una serie de ejercicios del libro de texto, de una manera repetitiva, donde se supone, que esto sirve para que el alumno adquiriera el conocimiento deseado. Expresando que una de las dificultades radica en que el mero hecho de impartir clases magistrales no garantiza que la mayoría de estudiantes adquiera el conocimiento deseado desde la intencionalidad del maestro y, aunque muchos maestros utilizan libros de texto, y éste proponga e ilustre el uso de diferentes materiales, es el mismo maestro quien decide dicho uso y, a veces, algunos maestros se conforman con los dibujos del propio libro de texto sin hacer uso del material recomendado, quitándole así el poder manipulativo esencial que caracteriza al material.

Desde el PIA se plantean demasiados conceptos referentes al contenido a enseñar y, en las competencias que se proyectan para fortalecer en las clases, no se destaca o menciona el razonamiento, lo cual, es importante para el currículo de una institución educativa, ya que en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas que establece el MEN (2017), se resalta que el razonamiento debe hacer parte del currículo de toda institución educativa.

Además, el PIA plantea la enseñanza a través del uso de estrategias didácticas que promuevan el uso de recursos y materiales en el aula; lo cual no se refleja en las observaciones de clase realizadas, como consecuencia de lo anterior, es evidente el poco interés y motivación por parte de algunos estudiantes hacia las clases de matemáticas y los contenidos conceptuales se presentan a los estudiantes a través de dictado.

La institución cuenta con variedad de recursos para la enseñanza, como una sala de sistemas, y varios materiales de apoyo; sin embargo, en las observaciones realizadas se detecta que éstos no son utilizados por el maestro. Como consecuencia, el poco uso de estos recursos hace poco significativo el aprendizaje para los estudiantes, como lo afirma Moreno (2012, p. 24), "Todo acto cognitivo está mediado por un artefacto que pueden ser materiales o simbólicos, entonces, las acciones cognitivas están mediadas por los artefactos y los conocimientos producidos permanecen intrínsecamente vinculados a dichos artefactos”.

1.3.2 Desde las pruebas externas

Para continuar con el análisis en la identificación de la problemática se analizaron los resultados de las Pruebas Saber del grado quinto en los años 2015 y 2016 a partir de un documento que ofrece el Icfes (2018), llamado *guía de uso e interpretación de resultados: reporte de estudiantes, saber 3°, 5° y 9°*, que se ofrece para la adecuada interpretación de los resultados en sus respectivas pruebas. En la Ilustración 1 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes del grado quinto de la IESPC para los años 2015 y 2016.

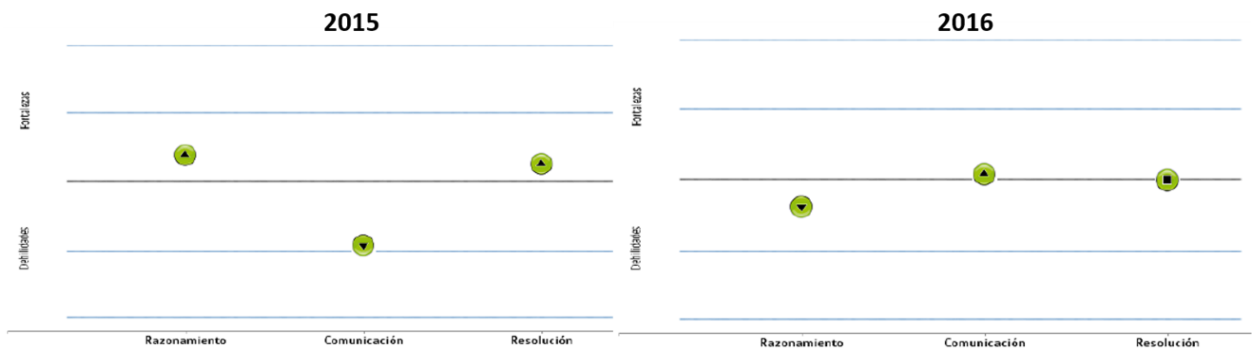


Ilustración 1. Resultados de las pruebas externas 2015-2016

Se visualiza para el año 2015 un bajo desempeño en la competencia comunicación, el Icfes (2018) afirma:

> Los estudiantes de la IESPC poseen debilidades a la hora de expresar ideas, interpretar, usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas, relacionar materiales físicos y diagramas con ideas matemáticas, modelar usando lenguaje escrito, oral, concreto, pictórico, gráfico y algebraico, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas, utilizar variables y construir argumentaciones orales y escritas, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones, interpretar lenguaje formal y simbólico y traducir de lenguaje natural al simbólico formal.

Además, la debilidad que los estudiantes presentaron frente a la competencia razonamiento se interpreta con relación al Icfes (2018) de la siguiente manera:

> Lo que se interpreta como una debilidad a la hora de dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas, reconocer distintos tipos de razonamiento y distinguir y evaluar cadenas de argumentos (p. 17).

1.3.3 Desde la prueba diagnóstica

Se realizó una prueba diagnóstica con la intencionalidad de analizar las estrategias que utilizan los estudiantes en el proceso de razonamiento inductivo para dar solución a problemas. La prueba diagnóstica constó de cuatro situaciones problemas, en los cuales se indagó por conceptos referentes a interpretación de gráficas, promedio, disyunción, conjunción, divisiones y número racional.

En la situación problema 1 de la prueba diagnóstica se diseñó una situación problema conformada por una gráfica de barras que muestra la cantidad de dinero que gasta semanalmente un estudiante de una institución educativa, como se muestra en la Ilustración 2 y consta de 5 preguntas.

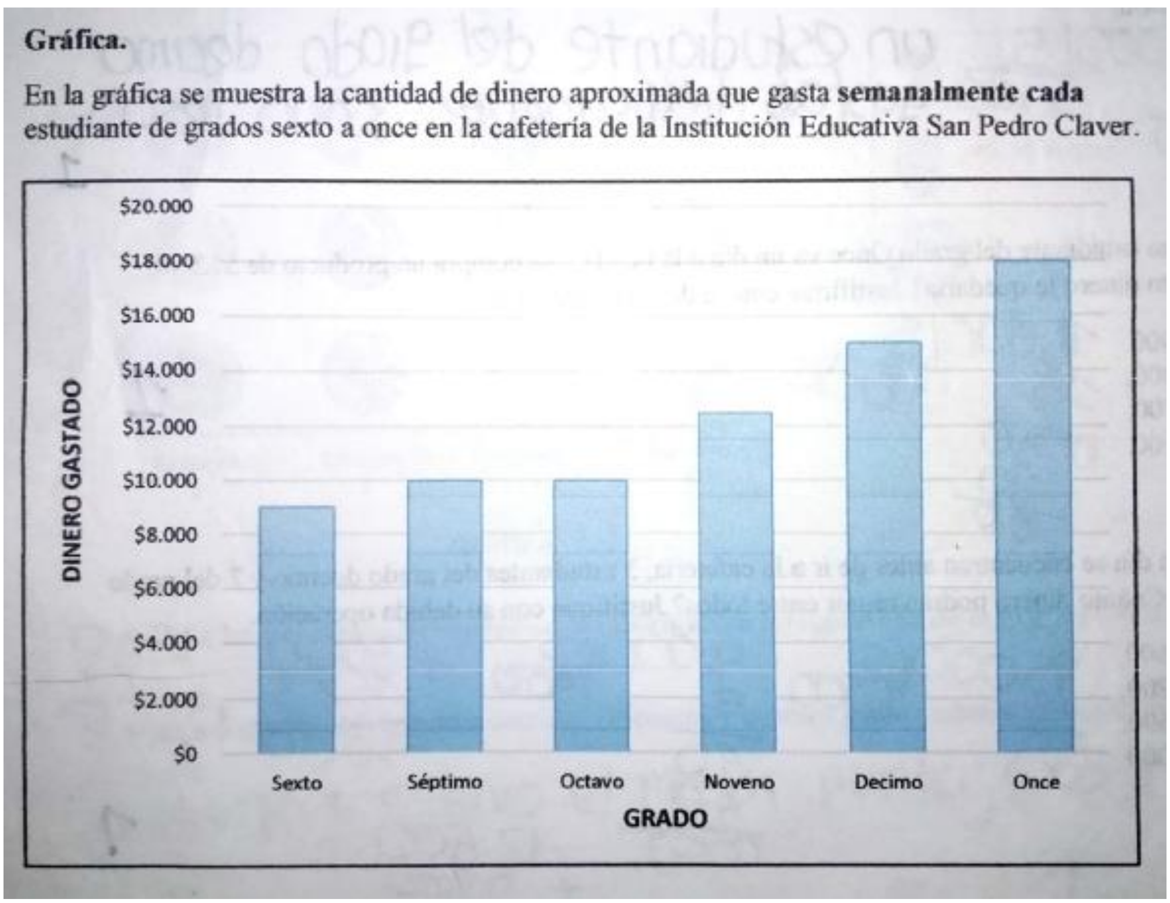


Ilustración 2. Situación Problema 1 de la prueba diagnóstica

Las preguntas para la situación problema 1 estaban organizadas en un orden que indujera a los estudiantes a realizar un razonamiento coherente y secuencial. Como se muestra en la Ilustración 3.

La pregunta A se plantea para verificar si los estudiantes comprendieron el enunciado de la situación problema y la relación con la gráfica respectiva, específicamente el valor que representa una barra; mientras que la pregunta B orienta a los estudiantes a observar la relación entre los valores correspondientes a cada barra de la gráfica.

A partir de las respuestas obtenidas referentes a la pregunta A y la pregunta B en la ilustración se puede observar que las principales falencias en los estudiantes se presentan en la comprensión lectora de un enunciado e interpretación de un gráfico de barras. Dado que, aunque en el enunciado de la situación problema se resalta que el valor de una barra equivale al dinero gastado por un estudiante semanalmente; la mayoría de los estudiantes asume que las barras corresponden a valores diarios.

En la ilustración 3 no se evidencia qué razonamiento utilizaron los estudiantes para justificar la operación que realizaron en la respuesta a la pregunta A; como también se evidencia en la respuesta a la pregunta B que los estudiantes no interpretaron adecuadamente la gráfica de barras debido a que no relacionaron el valor para la altura de una barra con el correspondiente en el eje vertical. Tampoco se observa una relación entre las respuestas a las preguntas A y B, con lo cual se infiere que los estudiantes poseen falencias a la hora de razonar.

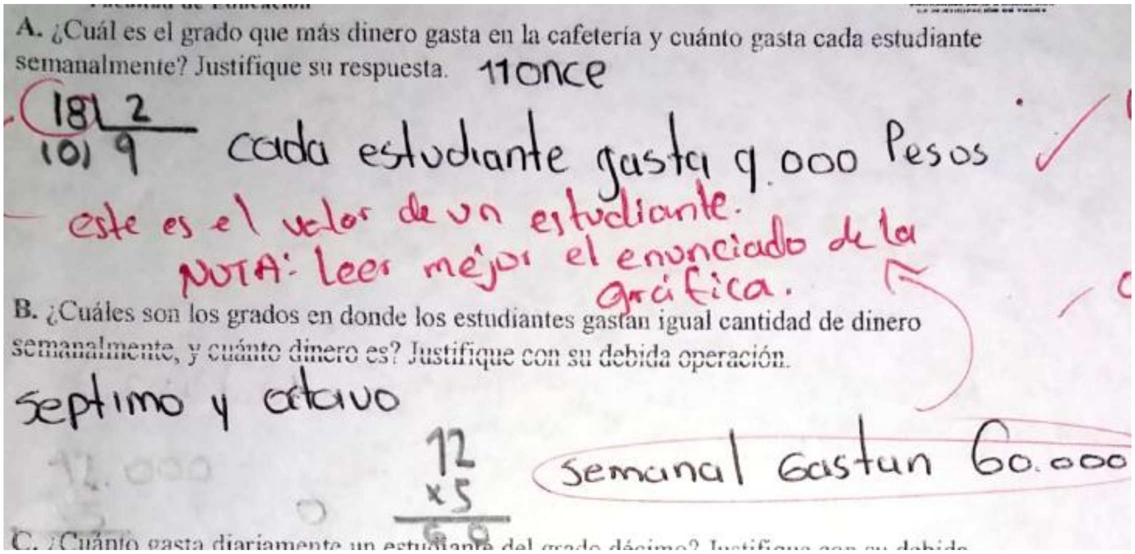
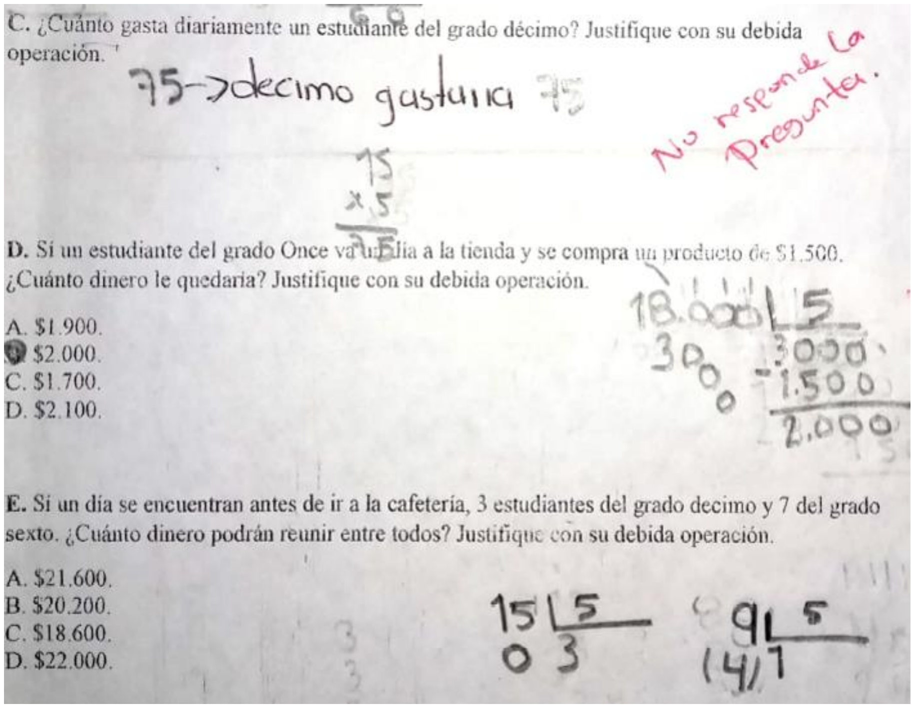


Ilustración 3. Preguntas A y B para la situación problema 1

Las preguntas C, D y E (ver Ilustración 4), son un complemento a las preguntas A y B (ver Ilustración 3), están planteadas para verificar si los estudiantes comprenden el enunciado de la gráfica e interpretan correctamente los datos representados en el tipo de grafico correspondiente. Encaminando a los estudiantes que realicen todo un proceso de razonamiento respecto a la gráfica de barras brindada para la situación problema 1. Lo que se espera con respecto a la pregunta C, es que los estudiantes a partir del gasto semanal pueda determinar el gasto diario, mientras que en la pregunta D, los estudiantes luego de saber realizar la debida operación para conocer un gasto promedio diario a partir de un dato semanal obtenido en la gráfica, pueda simular que cuenta con la cantidad de dinero diaria para así restarle un posible gasto que se plantea en la situación, obteniendo una respuesta acertada para el problema planteado.

Y con la pregunta E lo que se espera es que los estudiantes logren identificar el dinero disponible de estudiante por día y por grado, relacionando así los resultados obtenidos con las preguntas anteriores. Sin embargo, lo que se evidencia en las respuestas de la mayoría de estudiantes es que no logran plasmar esta relación, ni identificar los procesos que dan una respuesta acertada a cada una de las preguntas.


C. ¿Cuánto gasta diariamente un estudiante del grado décimo? Justifique con su debida operación.

75->decimo gastaria 75

No responde la pregunta.

D. Si un estudiante del grado Once va un día a la tienda y se compra un producto de $1.500. ¿Cuánto dinero le quedaría? Justifique con su debida operación.

A. $1.900.
B. $2.000.
C. $1.700.
D. $2.100.

E. Si un día se encuentran antes de ir a la cafetería, 3 estudiantes del grado decimo y 7 del grado sexto. ¿Cuánto dinero podrán reunir entre todos? Justifique con su debida operación.

A. $21.600.
B. $20.200.
C. $18.600.
D. $22.000.

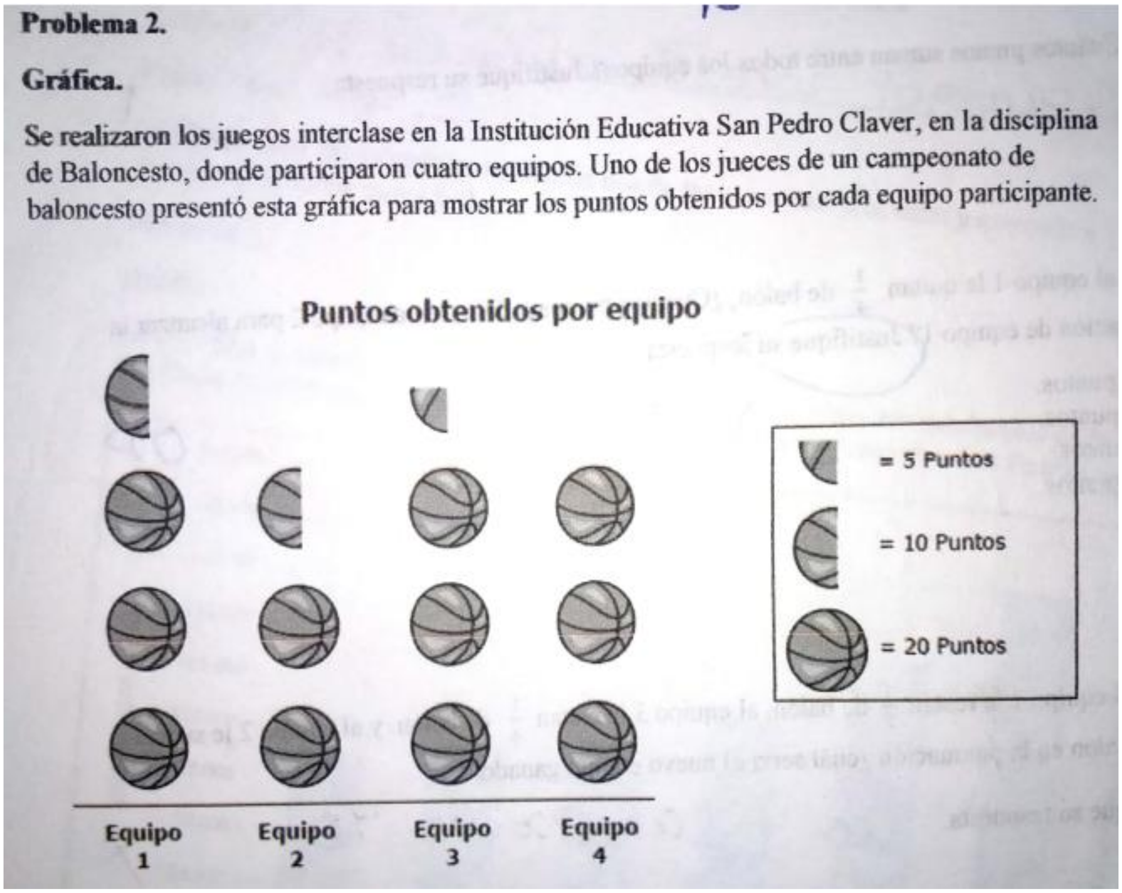
Ilustración 4. Preguntas C, D y E Situación 1

En relación a la pregunta C, en la Ilustración 4 se observa en las respuestas que los estudiantes aún no identifican que los valores de cada una de las barras corresponden a un gasto semanal, por lo cual no realiza la operación matemática pertinente.

En la pregunta D, los estudiantes logran identificar que el valor de una barra corresponde para una semana, logrando plantear la operación matemática correspondiente, no obstante, los estudiantes tienen dificultades a la hora de realizar el algoritmo, por lo cual no logran dar una respuesta acertada.

Finalmente, en la pregunta E se observa que los estudiantes no logran realizar las operaciones matemáticas adecuadas para brindar una respuesta acertada a la respectiva pregunta.

La siguiente ilustración muestra la gráfica planteada para la situación problema 2 de la prueba diagnóstica, la cual se basó en un pictograma con su correspondiente enunciado, como se muestra en la Ilustración 5, y un total de 5 preguntas, las cuales están organizadas para orientar a los estudiantes hacia una comprensión del análisis de la gráfica y al fomento del razonamiento inductivo.


Problema 2.

Gráfica.

Se realizaron los juegos interclase en la Institución Educativa San Pedro Claver, en la disciplina de Baloncesto, donde participaron cuatro equipos. Uno de los jueces de un campeonato de baloncesto presentó esta gráfica para mostrar los puntos obtenidos por cada equipo participante.

Ilustración 5. Situación Problema 2. Prueba diagnóstica

Las preguntas A, B y C (Ver Ilustración 6) se plantearon de modo que se afirmara en su respuesta una adecuada interpretación de la gráfica. Sin embargo, en las respuestas que se muestran en la Ilustración 6 con respecto a la pregunta A, en donde se indaga por el equipo que obtuvo mayor cantidad de puntos según la gráfica, se refleja que no se interpreta el pictograma de una manera correcta por lo cual no se ve una respuesta acertada hacia esta primera pregunta.

Respecto a la pregunta B, se indaga por el equipo que obtuvo la menor cantidad de puntos, independientemente de que la pregunta A no se haya obtenido una respuesta correcta por parte de la mayoría de estudiantes, cualquiera que sea el razonamiento que éstos utilizaron, deberían haber obtenido una respuesta diferente a la anterior dado el carácter de la pregunta. Por el contrario, se puede evidenciar en la ilustración 5 que las respuestas por parte de este estudiante muestra son las mismas, lo que muestra una contradicción y delata una falencia en su modo de razonar; falencia que destaca cuando se compara la respuesta a la pregunta A y C, cuando menciona que la sumatoria de todos los puntos obtenidos por los equipos es menor a la obtenida por un solo equipo.

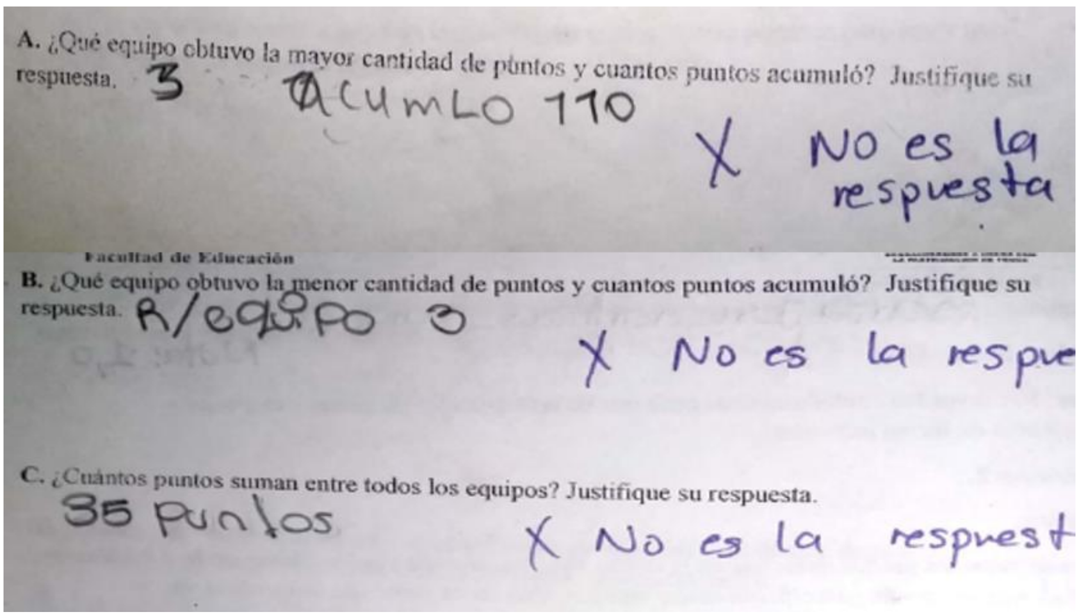
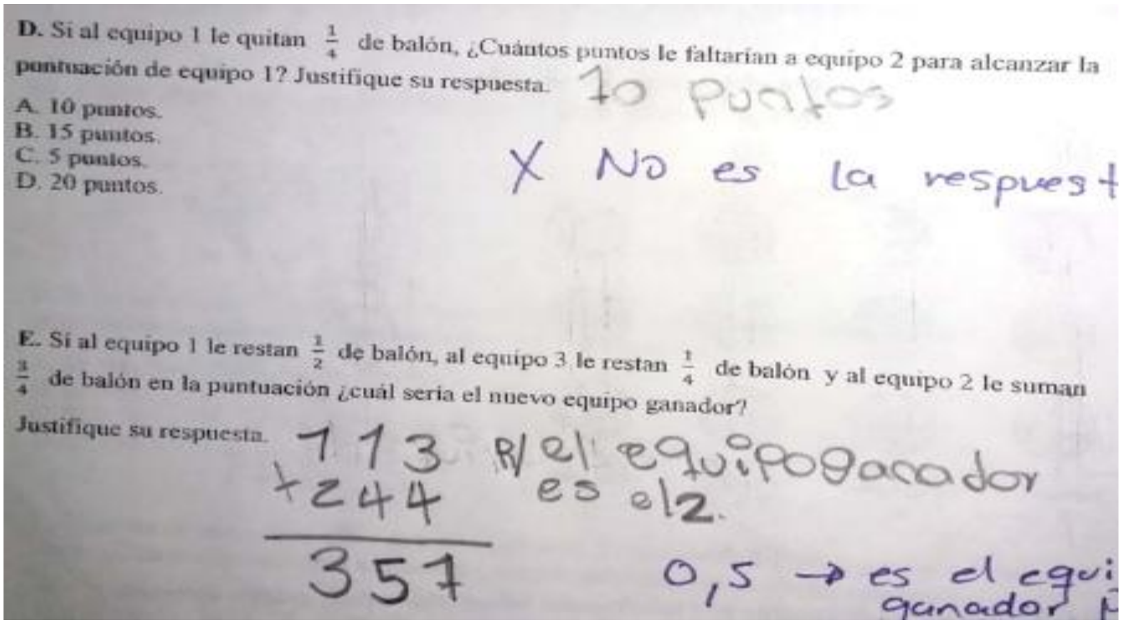


Ilustración 6. Preguntas A, B y C de la situación problema 2

Respecto a las preguntas D y E, se confirma que el estudiante no lleva a cabo un proceso de razonamiento adecuado que le permita plantear las operaciones matemáticas correspondientes para dar respuestas asertivas a las respectivas preguntas.



D. Si al equipo 1 le quitan $\frac{1}{4}$ de balón, ¿Cuántos puntos le faltarían a equipo 2 para alcanzar la puntuación de equipo 1? Justifique su respuesta. 10 Puntos

A. 10 puntos.
B. 15 puntos.
C. 5 puntos.
D. 20 puntos.

X No es la respuest

E. Si al equipo 1 le restan $\frac{1}{2}$ de balón, al equipo 3 le restan $\frac{1}{4}$ de balón y al equipo 2 le suman $\frac{3}{4}$ de balón en la puntuación ¿cuál sería el nuevo equipo ganador? Justifique su respuesta.

$$\begin{array}{r} 713 \\ +244 \\ \hline 357 \end{array}$$

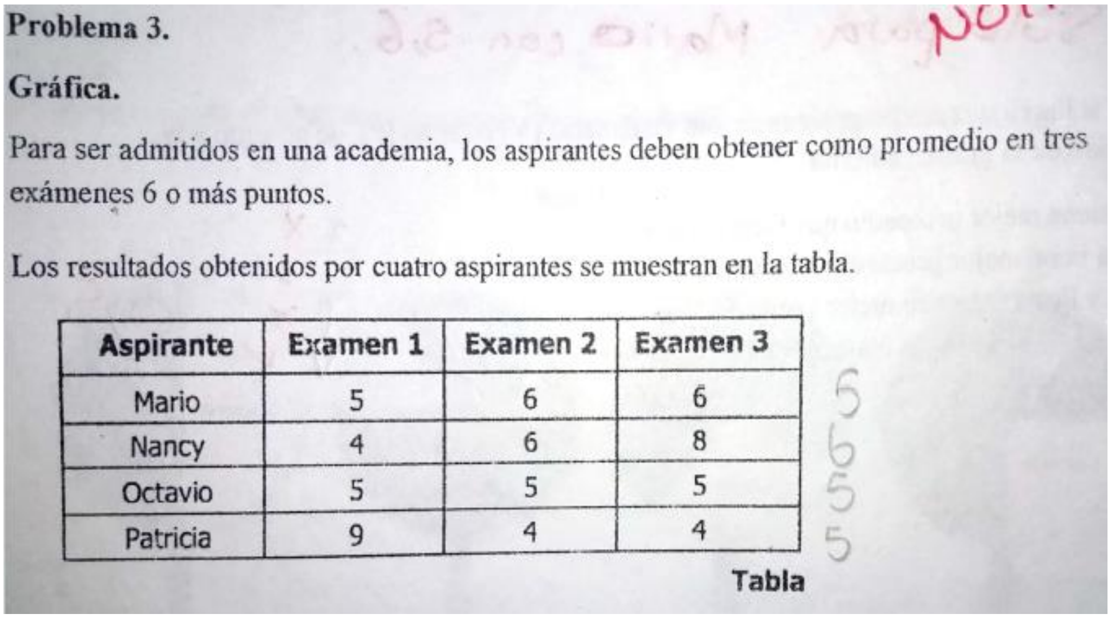
R/ el equipogacador es el 2.

0,5 → es el equi ganador

Ilustración 7. Pregunta D y E para la situación problema 2

Para finalizar el análisis a esta situación problema, se debe resaltar que se observa en la mayoría de estudiantes una dificultad en la interpretación de la gráfica, ya que no logran relacionar los valores correspondientes para cada imagen representada con un balón, mostrando así falencias en su forma de razonar, "Privándose así de todas la ventajas y cualidades que indica tener un buen desarrollo en la competencia razonamiento" Icfes (2018, p. 17)

Para la tercera situación problema de la prueba diagnóstica se continúa el análisis a partir de las respuestas brindadas por un estudiante, con el objeto de observar su forma de razonar, y cómo los conceptos previos frente a los respectivos temas afectan la calidad de las respuestas de cada una de las preguntas. En este problema se plantea una tabla de datos con su respectivo enunciado como se observa en la ilustración 8, a partir de dicho problema se plantean 5 preguntas que indagan por el concepto de promedio, disyunción y conjunción.


Problema 3.

Gráfica.

Para ser admitidos en una academia, los aspirantes deben obtener como promedio en tres exámenes 6 o más puntos.

Los resultados obtenidos por cuatro aspirantes se muestran en la tabla.

Aspirante	Examen 1	Examen 2	Examen 3	
Mario	5	6	6	5
Nancy	4	6	8	6
Octavio	5	5	5	5
Patricia	9	4	4	5

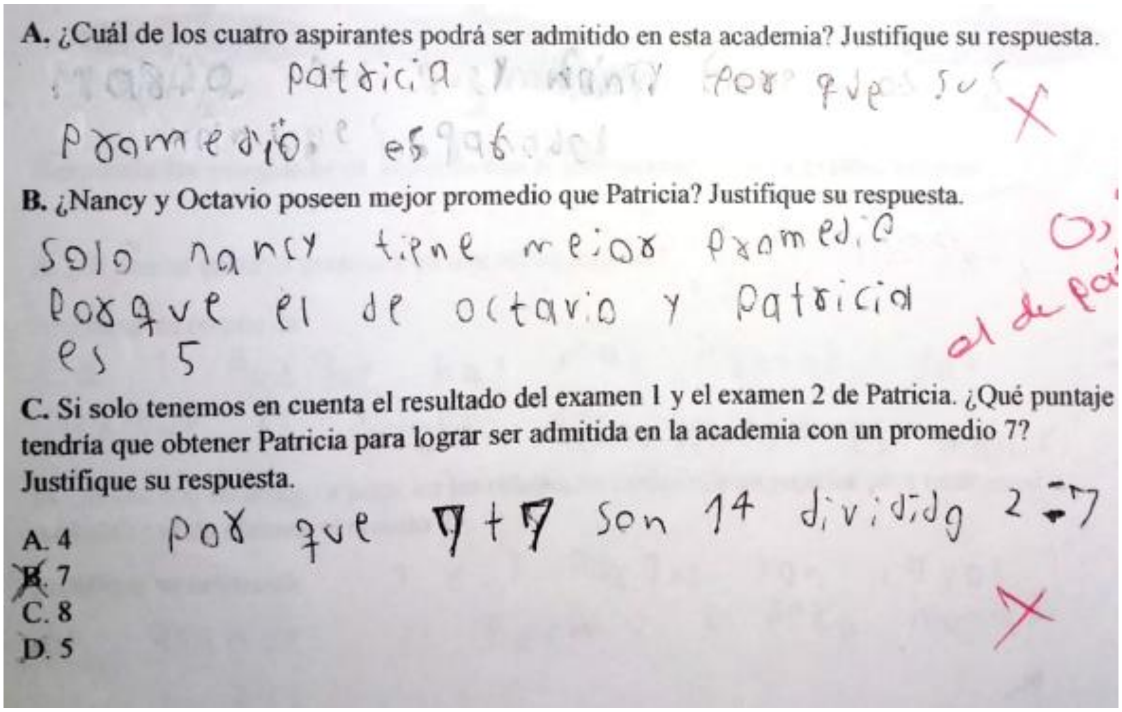
Tabla

Ilustración 8. Situación Problema 3 prueba diagnóstica

A partir de la ilustración 9 respecto a la pregunta A, se evidencia que el estudiante posee falencias respecto al objeto matemático promedio, lo que refleja falencias en la concepción de promedio y temas relacionados.

Por otra parte, en la respuesta a la pregunta B, se observa una claridad frente al tema de conjunción, cuando el estudiante es consciente que para dar una respuesta afirmativa se deben cumplir las dos premisas planteadas, sin embargo, al mismo tiempo verifica que la falencia frente al tema de los promedios no le permite dar una respuesta del todo acertada.

Cuando se analiza la respuesta a la pregunta C, no se logra observar una relación entre el enunciado planteado y los datos proporcionados por la tabla, dejando en evidencia insolvencias en la comprensión lectora y en la forma de razonar.



A. ¿Cuál de los cuatro aspirantes podrá ser admitido en esta academia? Justifique su respuesta.

patricia y nancy por que su promedio es

B. ¿Nancy y Octavio poseen mejor promedio que Patricia? Justifique su respuesta.

solo nancy tiene mejor promedio porque el de octavio y patricia es 5

al de pa

C. Si solo tenemos en cuenta el resultado del examen 1 y el examen 2 de Patricia. ¿Qué puntaje tendría que obtener Patricia para lograr ser admitida en la academia con un promedio 7? Justifique su respuesta.

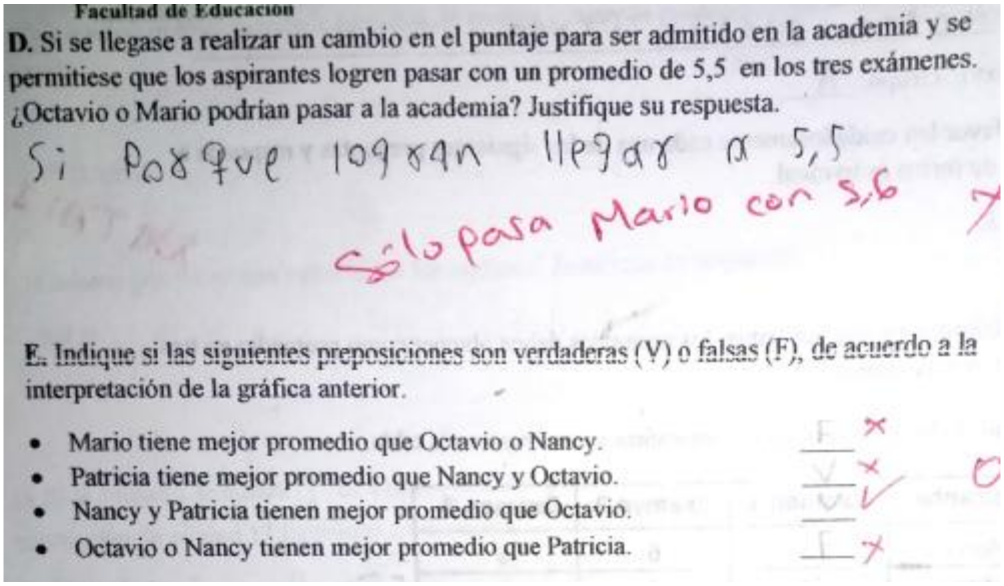
por que 7+7 son 14 dividido 2 = 7

A. 4
B. 7
C. 8
D. 5

Ilustración 9. Preguntas A, B y C para la situación problema 3

Respecto a la pregunta D, se ratifica que las falencias que se tiene frente al concepto de promedio, no permite brindar una respuesta del todo acertada mientras las preguntas involucren realizar un cálculo matemático para encontrar el valor correspondiente a un promedio.

En las respuestas a las preguntas E se logra identificar que el estudiante posee falencias a la hora de identificar cómo influye la conjunción y disyunción en una premisa.



Facultad de Educacion

D. Si se llegase a realizar un cambio en el puntaje para ser admitido en la academia y se permitiese que los aspirantes logren pasar con un promedio de 5,5 en los tres exámenes. ¿Octavio o Mario podrían pasar a la academia? Justifique su respuesta.

Si Porque logran llegar a 5,5

Sólo pasa Mario con 5,6

E. Indique si las siguientes preposiciones son verdaderas (V) o falsas (F), de acuerdo a la interpretación de la gráfica anterior.

- Mario tiene mejor promedio que Octavio o Nancy. F
- Patricia tiene mejor promedio que Nancy y Octavio. V
- Nancy y Patricia tienen mejor promedio que Octavio. V
- Octavio o Nancy tienen mejor promedio que Patricia. F

Ilustración 10. Preguntas D y E para la situación problema 3.

En forma general, desde la interpretación de los resultados obtenidos para la situación problema 3 (Ilustraciones 9 y 10) se evidencia desaciertos a la hora de realizar operaciones matemáticas, específicamente la división con cifras decimales, lo que se observa de forma general en los resultados en la mayoría de los estudiantes, por otra parte, los estudiantes no sabían o no recordaban lo que era un promedio. Además, aún con los promedios erróneos no se aplica adecuadamente el algoritmo de la división y la mayoría de estudiantes no logran dar respuestas acertadas a las preguntas de enunciados con Conjunción "Y" y con Disyunción "O"; pues los estudiantes no recuerdan dichos conceptos para interpretarlas de la manera adecuada, presentando así falencias en la competencia razonamiento lógico para dar respuestas a las preguntas planteadas para este problema.

La situación problema 4 de la prueba diagnóstica toma como base una gráfica con su respectivo enunciado, como se muestra en la Ilustración 11, el cual consta de 5 preguntas que son respondidas a partir del respectivo gráfico, en la búsqueda observar el tipo de razonamiento que poseen los estudiantes.

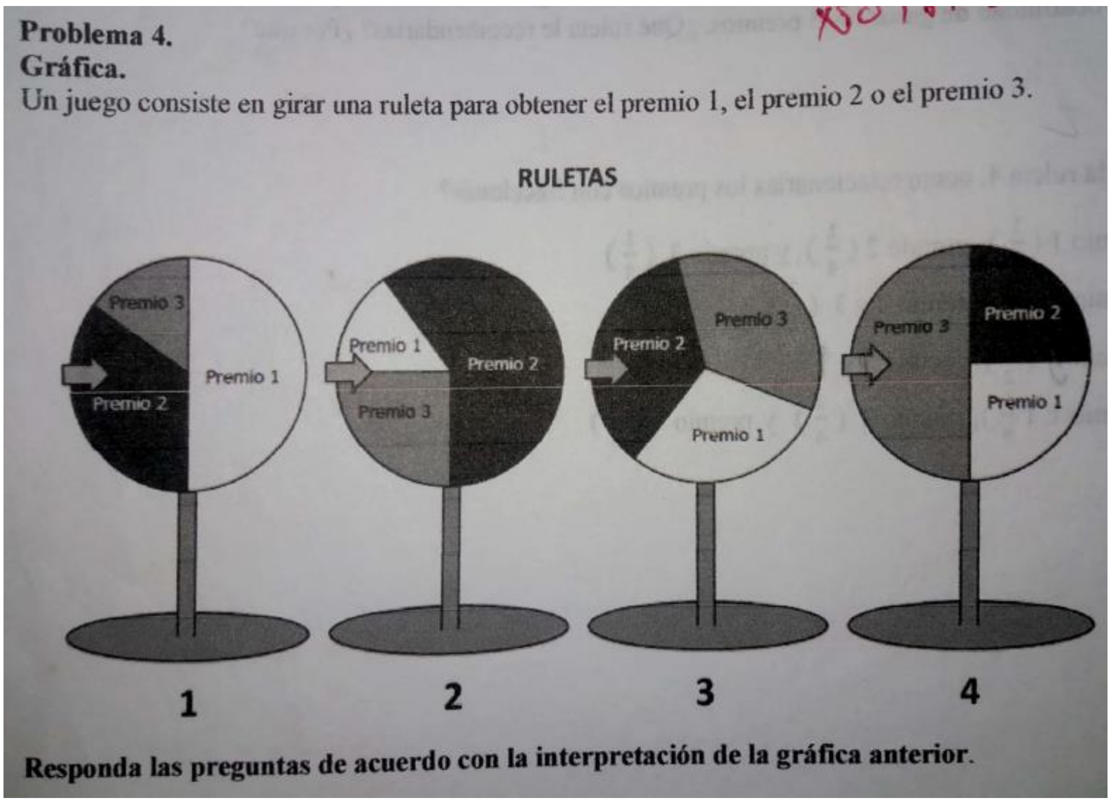
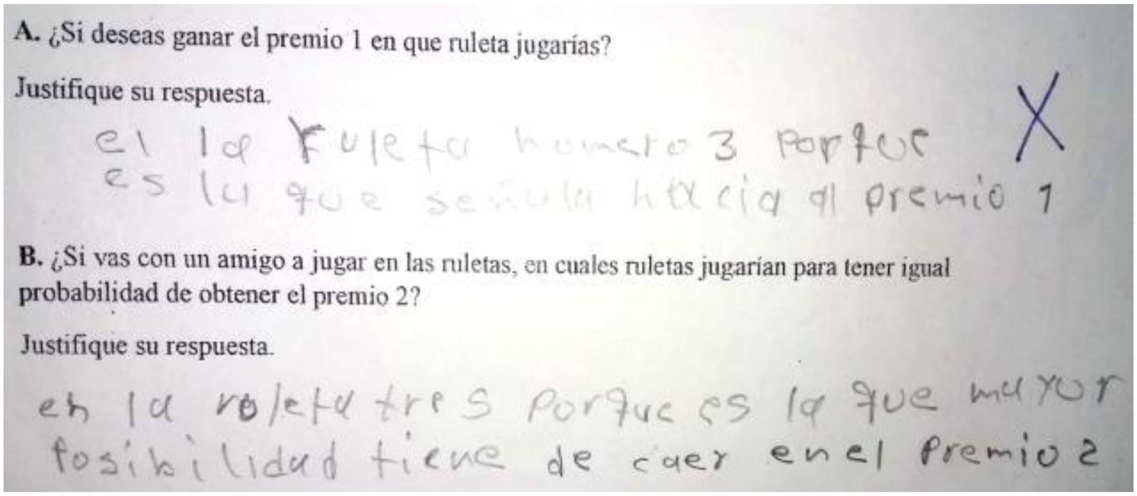


Ilustración 11. Problema 4 de la prueba diagnóstica.

Referente a la respuesta a la pregunta A, se puede inferir que el estudiante no comprende el funcionamiento de una ruleta, dado que no se visualiza la idea de ruleta girando, en cambio se tiene la idea de que a donde señale la flecha ese será el premio a obtener, así la mayoría de estudiantes considera que las respuestas acertadas son aquellas donde está apuntando la flecha en la imagen (Ver Ilustración 11).


A. ¿Si deseas ganar el premio 1 en que ruleta jugarías?

Justifique su respuesta.

el la Ruleta numero 3 porque es la que señula hacia al premio 1

X

B. ¿Si vas con un amigo a jugar en las ruletas, en cuales ruletas jugarían para tener igual probabilidad de obtener el premio 2?

Justifique su respuesta.

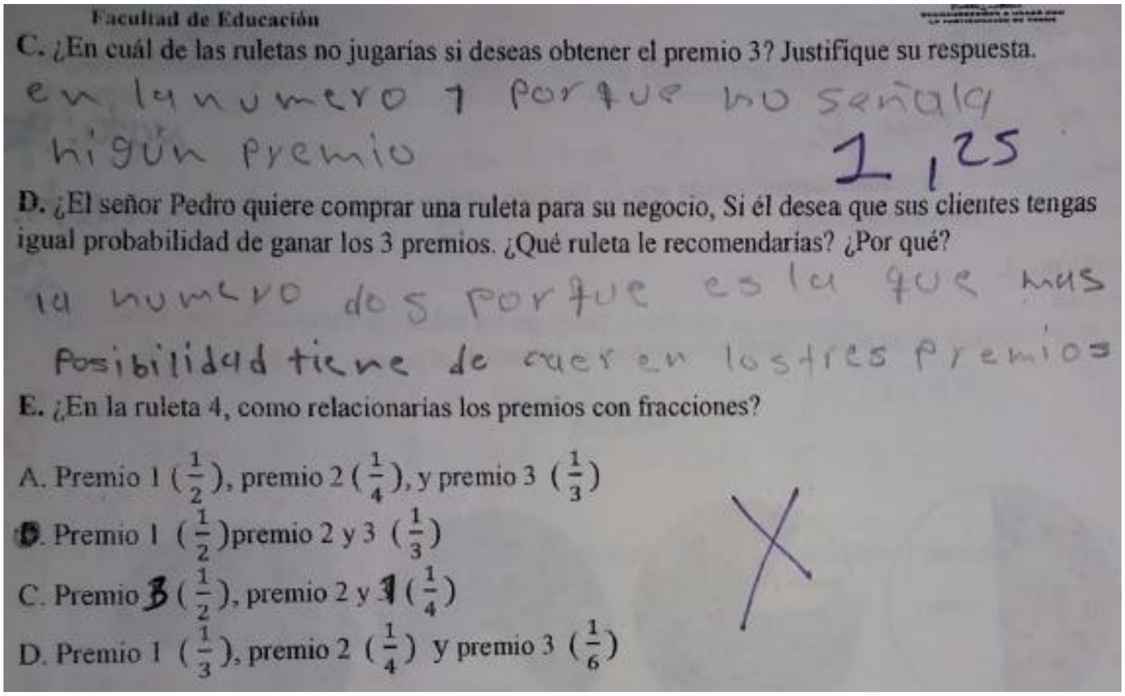
en la roleta tres porque es la que mayor fosibilidad tiene de caer en el premio 2

Ilustración 12. Preguntas A y B de la situación problema 4.

En la respuesta a la pregunta B se observa la misma forma de razonar, presentando una falla en la comprensión lectora del enunciado al responder la pregunta de forma singular.

Respecto a la respuesta a la pregunta C, se verifica como el estudiante razona a partir de la posición de la flecha, no obstante, se presenta una incoherencia en su respuesta, que desde su lógica hubiera sido una respuesta válida la ruleta 2, pero de igual forma menciona que es la ruleta 1 donde la flecha no señala ningún premio, dejando ver una falencia en el razonamiento inductivo del estudiante. Por otro lado, en la respuesta a la pregunta E se identifica una incoherencia a la hora de representar cada una de las partes de un círculo con su respectivo número racional equivalente

Para finalizar, podemos hacer un análisis general respecto a la prueba diagnóstica, resaltando las principales falencias encontradas en los estudiantes a partir de la interpretación de las preguntas, orientándolo a observar la forma como los estudiantes realiza un tipo de razonamiento inductivo a partir de premisas particulares.


Facultad de Educación

C. ¿En cuál de las ruletas no jugarías si deseas obtener el premio 3? Justifique su respuesta.

en lanumero 1 porque no señala
nigún premio

1,25

D. ¿El señor Pedro quiere comprar una ruleta para su negocio, Si él desea que sus clientes tengas igual probabilidad de ganar los 3 premios. ¿Qué ruleta le recomendarías? ¿Por qué?

la numero dos porque es la que mas
posibilidad tiene de caer en lostres premios

E. ¿En la ruleta 4, como relacionarias los premios con fracciones?

A. Premio 1 ($\frac{1}{2}$), premio 2 ($\frac{1}{4}$), y premio 3 ($\frac{1}{3}$)

B. Premio 1 ($\frac{1}{2}$)premio 2 y 3 ($\frac{1}{3}$)

C. Premio 3 ($\frac{1}{2}$), premio 2 y 1 ($\frac{1}{4}$)

D. Premio 1 ($\frac{1}{3}$), premio 2 ($\frac{1}{4}$) y premio 3 ($\frac{1}{6}$)

Ilustración 13. Preguntas C, D y E de la situación problema 4.

A partir de lo planteado anteriormente para cada situación problema, se puede inferir que los estudiantes no están realizando una lectura crítica y detallada del enunciado correspondiente a cada gráfica, lo que promueve que no se logre una interpretación asertiva de éstas.

Además, se observan muchas incoherencias en las respuestas brindadas por los estudiantes, cuando se analiza cada una con detalle, donde no se observa una forma de razonar inductiva de acuerdo a la relación de las respuestas brindadas a cada pregunta, ni en los procedimientos planteados para dar solución a cada situación problema.

Añadiendo a lo anterior, se observan insolvencias en muchos conceptos, como, promedio, disyunción, conjunción, división con números decimales y representación de un número racional. Y una gran dificultad a la hora de relacionar varios conceptos matemáticos para poder dar respuestas asertivas a preguntas, mostrando desventajas a la hora de razonar.

Con base en lo anterior desde la definición de razonamiento que plantea el Icfes (2018), se evidencia una gran debilidad en el razonamiento por parte de la mayoría de estudiantes, algo que es de vital importancia resaltar, debido a que "el razonamiento de los estudiantes no sólo es importante por ser uno de los cinco procesos generales que se contemplan en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, sino que además es primordial en el quehacer del estudiante en el aula".

Por otro lado, desde el MEN (2017) se afirma que el currículo de matemáticas de cualquier institución debe reconocer que el razonamiento, la argumentación y la demostración constituyen piezas fundamentales de la actividad matemática. Además de estimular estos procesos en los estudiantes, es necesario que se ejerciten en la formulación e investigación de conjeturas y que aprendan a evaluar argumentos y demostraciones matemáticas. Para ello deben conocer y ser capaces de identificar diversas formas de razonamiento y métodos de demostración.

Además, el MEN resalta la importancia del razonamiento a la hora de dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas, reconocer distintos tipos de razonamiento y distinguir y evaluar cadenas de argumentos. Icfes (2018).

1.4 Justificación

Esta investigación se centra en la búsqueda del desarrollo del tipo de razonamiento inductivo involucrado en las distintas actividades que lleven a cabo con el uso de material de apoyo, orientadas desde una intencionalidad por parte del maestro desde un enfoque del Conocimiento Pedagógico del Contenido.

Respecto al concepto e importancia del razonamiento inductivo Pólya (1945) afirma que:

> El razonamiento inductivo es el razonamiento natural que da lugar al conocimiento científico mediante el descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares; jugando un papel primordial en el descubrimiento de leyes generales. Además, el razonamiento inductivo requiere del trabajo con casos particulares, de la búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en los casos particulares, de la formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón, y de la comprobación posterior de dicha conjetura. (p. 3)

Con base en el planteamiento de Pólya se puede resaltar la importancia del desarrollo del razonamiento inductivo en los sujetos, ya que este permite desarrollar el conocimiento matemático y aún más importante el conocimiento científico en el aula, partiendo de premisas o situaciones particulares hasta alcanzar la generalización. Poincaré (1902).

> El razonamiento inductivo da paso a la observación de casos particulares y al parecer toda su atención se centra en ésta parte, pues es a partir de ella se llega al conocimiento, es decir, observando lo particular se llega al conocimiento general (Bacon, 2006 y Rivadulla, 1991 (citado en Dávila, 2006, p.185))

De acuerdo con Poincaré (1902); Pólya (1945); Rivadulla (1991) y Bacon (2006), sobre la importancia del razonamiento inductivo en los sujetos, se considera que dicho razonamiento permitirá a los estudiantes desarrollar capacidades que se adquieren durante las actividades que son encaminadas al desarrollo del razonamiento inductivo, capacidades que según Cañadas (2002) y Dávila (2006), son "acciones propias del razonamiento inductivo: construir, simbolizar, aplicar, formular y verificar ideas para así llegar a generalizar", entonces, podemos afirmar que, el razonamiento inductivo es una buena vía para que los estudiantes adquieran un conocimiento de las ciencias de manera más importante y significativa.

Ahora bien, el razonamiento inductivo por sí solo no se convertirá en un buen elemento indispensable a la hora de enseñar; también requiere del maestro y sus conocimientos, para fortalecer el desempeño docente. Shulman (1986; 1987). De lo anterior se alude que, el PCK del maestro es lo que permite potenciar y desarrollar los distintos tipos de conocimientos en sus estudiantes y a la vez desarrollar el razonamiento inductivo con ayuda de algunos materiales de apoyo.

Para tener un buen PCK, es de vital importancia la formación académica de la disciplina que se enseña, es decir el conocimiento pedagógico del contenido, el cual permite comunicar a los estudiantes qué es lo esencial y qué es lo periférico; de igual manera el docente puede observar las estructuras de los materiales didácticos que configuran los principios de la base para la enseñanza. Esto produce que los estudiantes logren (y a veces de manera intuitiva) transformar y articular los diferentes tipos de conocimientos en el contexto de enseñanza en que participa.

De esta forma, se considera fundamental iniciar de forma intencional la enseñanza de este tipo de razonamiento, lo cual es una estrategia en la articulación del conocimiento pedagógico del contenido con las prácticas pedagógicas.

> Así mismo, las acciones participantes en el razonamiento inductivo son importantes tanto en matemáticas como en otras ciencias. Encontramos la observación de los casos particulares y la búsqueda de regularidades. Actualmente, se considera las matemáticas como la ciencia de los patrones, basándose en que las matemáticas estudian las regularidades que se producen en la vida real Castro (2002, p. 137).

Otros autores e investigadores Pólya (1945, 1966); Whitehead (1911); Lalande (1963); Fetísov (1980); Cañadas (2002), enfatizan la importancia que tiene el docente de matemáticas de tomar una postura que apunte hacia el desarrollo del razonamiento inductivo, dado que siempre se observa en los contenidos disciplinares unos conceptos generales que pueden ser enseñados a partir de premisas particulares o ejemplos en particular que lleven a uno general, que permitan al estudiante deducir leyes matemáticas.

Y que mejor manera de hacer enseñable un contenido matemático desde el PCK, buscando fortalecer una competencia mediante una enseñanza con materiales de apoyo, ya que diversos autores Flores, P; Lupiáñez, J; Berenguer, L; Marín, A. y Molina, M. (2011), señalan que: los materiales permiten generar ideas, y para ello se requiere actuar por lo tanto los materiales facilitan ese actuar y aprendizaje del alumnado.

Los materiales en el proceso de aprendizaje generan que los estudiantes se empoderen de su conocimiento y su proceso educativo; Lupiáñez (2011), menciona que, los materiales que son llevados al aula permiten al estudiante más protagonismo en su actuar y en solucionar problemas.

Flores (2011, p. 21) enfatiza muchos más sobre la importancia del uso de materiales en el aula de clases afirmando:

> Si lo que quiere el maestro es realmente que el estudiante adquiera conocimiento matemático donde se hallen motivados para hacerlo, pues los materiales son una gran ayuda al llevarlos al aula de clase, porque se convierte en una clase que sale del modelo habitual, dando lugar a nuevas características y comportamientos en los estudiantes.

Del mismo modo, respecto a la importancia del material en el proceso de aprendizaje Flores, P; Lupiáñez, J; Berenguer, L; Marín, A. y Molina, M. (2011) argumentan que los materiales permiten en el estudiante la ejercitación de destrezas de manera lúdica y desarrollar conocimiento a partir de su manipulación.

Es necesario aclarar que no sólo se trata de llevar los materiales al aula y permitir que los estudiantes los manipulen, también se trata de cómo el maestro debe saber utilizarlos en el proceso de enseñanza; en la escuela, la mayor parte de la matemática está condicionada a los argumentos inductivos utilizados por los estudiantes Ortiz (1997) y Castro (2002), en este sentido, los maestros son los responsables de examinar y realizar búsquedas de situaciones que hagan visible el conocimiento pedagógico que construye sobre la forma de enseñar, de esta forma el maestro transforma lo que conoce en conocimiento enseñable y debe hacerlo a partir de materiales que ayuden a la comprensión de los procesos inductivos.

> Gómez (2004, p. 43) también señala que todos los materiales y recursos que puede usar el profesor en su labor docente han de jugar un papel muy concreto en ese proceso, donde el éxito del empleo del material depende de que el profesor diseñe y lleve a la práctica el currículo de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares adquieran aprendizaje.

En este sentido existe una relación entre el material de apoyo y la estrategia que utiliza el maestro al utilizar el PCK, pues de acuerdo con Toranzos (1996, p. 65) es "ese conocimiento que un maestro debe tener para llevar a cabo el proceso de enseñanza en forma eficiente y eficaz, entendiéndose eficiente como el uso de materiales y eficaz el logro de objetivos". Y para el logro de esos objetivos es necesario la aplicación de este conocimiento que tiene el maestro para enseñar matemáticas.

Grossman (1990) señaló que "es posible observar la generación y desarrollo del PCK: desde la observación de experiencias de aula, desde su posición como estudiante, hasta como maestro en formación; la formación disciplinar, los cursos específicos de pedagogía y la experiencia como maestro ya en el aula" (p. 33). Se resalta la validez de las observaciones de experiencias en el aula ya que se logra inferir la importancia del tipo de estrategias que utiliza el maestro para hacer enseñables los contenidos.

Por otro lado, las conexiones entre los conocimientos de la materia y los medios didácticos o de apoyo en la enseñanza, la visión y el propósito de la enseñanza; el conocimiento que tiene el maestro sobre cómo aprenden sus estudiantes, son de vital importancia, debido a que, el conocimiento sobre el currículo, las creencias, estrategias y representaciones que el docente usa en la enseñanza, y el conocimiento sobre cómo evaluar el aprendizaje de sus estudiantes, permiten la transformación del contenido para su enseñanza.

Además, se debe resaltar el papel fundamental del PCK en los maestros, ya que desde allí es donde se relacionan los contenidos, la pedagogía y el contexto escolar. Pues el conocimiento que el maestro posee referente a un contenido disciplinar matemático es algo que crece día a día mientras éste continua en proceso de formación, es por ello, que un maestro está en la capacidad de adaptar y hacer el contenido disciplinar enseñable y entendible para el alumno.

El PCK faculta al maestro diseñar sus clases para hacer enseñable un contenido, por ello, el maestro puede plantear el uso de material de apoyo en el aula con la intención de promover la comprensión de un contenido en específico al estudiante a través del actuar de éste; aclarando que no solo el material es quien ayuda a que el estudiante comprenda, sino también el papel fundamental que juega el docente como guía orientador en todo el proceso.

Shulman (1987) determinó la importancia que el proceso docente tiene cuando el maestro pone a disposición el PCK a sus estudiantes, al emprender su labor desde una planificación reflexiva de su actividad docente y la estructura conceptual. En este caso particular, el razonamiento inductivo y las ideas del tema que va a enseñar a través del uso del material de apoyo, da lugar a comprender lo que debe ser aprendido por sus estudiantes.

Añadiendo a lo anterior se puede afirmar que conocer las situaciones de los estudiantes frente a la competencia razonamiento, es relevante para el maestro en el sentido que ayuda a preparar sus clases en pro de un fortalecimiento de éste, aportando al currículo de la institución educativa y a su vez reconociendo la importancia del razonar en el aula planteado por el MEN.

El MEN (2002) plantea que el currículo de matemáticas de cualquier institución debe reconocer que el razonamiento, la argumentación y la demostración constituyen piezas fundamentales de la actividad matemática. Además de estimular estos procesos en los estudiantes, es necesario que se ejerciten en la formulación de conjeturas y que aprendan a evaluar argumentos y demostraciones.

El papel del razonamiento inductivo en los procesos de aprendizaje ha sido reconocido por diversos autores De Koning y Hamers (1999); Holland, Holyoak, Nisbett y Thagard (1986); Klauer (1996); Steinberg (1998); Sternberg y Gardner (1983). Donde destacan su importancia en el aprendizaje de los escolares. La justifican por las relaciones con el desarrollo de la inteligencia, la resolución de problemas y la lectura o la escritura y ha llevado a considerar el proceso de razonamiento inductivo como un dominio específico de conocimiento De Koning, Hamers, Sijtsma y Vermeer (2002).

Los párrafos anteriores sirvieron como referentes para plantear lo siguiente:

1.5 Pregunta problematizadora

¿Cómo fortalecer el razonamiento inductivo en los estudiantes del grado sexto de la IESPC utilizando material de apoyo desde el enfoque del Conocimiento Pedagógico del Contenido?

1.6. Objetivos

1.6.1 Objetivo General

Fortalecer las habilidades del razonamiento inductivo en los estudiantes del grado sexto de la IESPC utilizando material de apoyo.

1.6.2 Objetivos Específicos

- Categorizar y describir el razonamiento inductivo de los estudiantes.

- Identificar el PCK que debe tener un maestro para la enseñanza de las matemáticas.
- Identificar las ventajas del uso de material de apoyo en la ejecución de actividades de aprendizaje que aportan al fortalecimiento del razonamiento inductivo.

1.7 Antecedentes

Se presentan a continuación los resultados de una revisión de investigaciones relacionadas con el objeto de estudio que se desarrolla en este trabajo de investigación. Con la intención de asentar el estado de los conocimientos del mismo, se propone realizar dicha revisión desde los tres enfoques de este trabajo: razonamiento inductivo, material de apoyo y PCK.

1.7.1 Desde razonamiento inductivo.

La revisión llevada a cabo desde el razonamiento inductivo se halla una investigación doctoral por Cañadas (2007), caracterizando el razonamiento inductivo a partir de la resolución de tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas, centrada en el análisis del proceso razonamiento inductivo que llevan a cabo estudiantes de educación secundaria cuando se enfrentan a unas tareas concretas. Encontraron que algunos estudiantes expresan verbalmente la generalización en los problemas que les proponen y en algunos casos, los estudiantes no manipulan la expresión de la generalización, sino que llegan a ella cuando tratan de justificar sus conjeturas.

Una investigación de maestría por Durango (2009) se enfoca en la compresión del razonamiento inductivo, deductivo y conjetural desde un contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemática. La investigación se desarrolló a través de un carácter cualitativo, el cual permitió la construcción de las categorizaciones y descripciones; el método empleado fue el análisis de contenido que facilitó el estudio de los registros escritos presentados por los estudiantes. Los principales aportes del trabajo a la comunidad de investigadores y maestros en matemática fueron: la identificación y descripción de dificultades de los estudiantes desde los contextos de justificación y de descubrimiento, el aporte de estrategias para conjeturar en la clase y la categorización de las conjeturas construidas por los estudiantes.

García (1998) centra su investigación en la utilización de contextos numéricos y gráficos para investigar el proceso de generalización de estudiantes de educación secundaria y bachillerato al introducir la componente gráfica. Sus principales objetivos de investigación tratan de estudiar el proceso de generalización desarrollado de forma espontánea por los alumnos al resolver problemas de generalización lineal y derivar indicaciones y sugerencias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las sucesiones lineales.

La investigación de Stacey (1989) pretende analizar el proceso de generalización en su totalidad. Para ello propone tareas sobre patrones que corresponden a sucesiones lineales o cuadráticas, a estudiantes de entre 9 y 13 años. Una vez recogidas las respuestas de estos estudiantes, presentan en la investigación los patrones matemáticos que ellos seleccionaron, las estrategias utilizadas al implementarlos y las explicaciones que dieron. Las principales conclusiones que Stacey extrae de su investigación son: se observan inconsistencias en la elección de los patrones, los estudiantes que asistieron a un curso específico sobre resolución de problemas comprenden, de forma más completa, la relación entre los datos y la generalización y no hubo un uso espontáneo de álgebra para expresar la generalización.

1.7.2 Desde material de apoyo.

Prosiguiendo con la revisión desde este enfoque no se hallaron muchos trabajos encaminados a esta línea de investigación; Moris, Tello y Culqui (2014) focalizan su investigación en la influencia de los materiales didácticos en el aprendizaje de los niños y niñas de 5 años, concluyendo que son importantes los materiales didácticos ya que favorecen el desarrollo de todas sus capacidades en todas sus áreas al mismo tiempo su capacidad de invención y creación.

Juárez (2015) centra su investigación en la relación entre los materiales didácticos y el aprendizaje significativo, ya que a partir de las ideas previas se construyen procesos concretos que ayudaran al niño a sobrellevar problemas de la vida escolar y cotidiana. También, resalta la utilización del material didáctico como medio de enlace entre el docente y el alumno, propiciando un ambiente agradable, construcción de aprendizajes significativos y acompañados de procesos pedagógicos con niños de educación inicial y preprimaria.

1.7.3 Desde el PCK.

Por último, desde el PCK Cañadas (2011) realiza su investigación con entrenadores de baloncesto analizando, por un lado, el conocimiento pedagógico que posee sobre cada una de las dimensiones que conforman el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y, por otro lado, las variables pedagógicas que definen el entrenamiento para profundizar en la planificación de dos de las temporadas deportivas que ha desarrollado al inicio y tras dos años de formación. Los resultados de la investigación muestran que se producen cambios en el conocimiento pedagógico del entrenador y en la forma en que planifica el entrenamiento deportivo entre el inicio y el final del estudio (temporada 1 y 2 del estudio). A través del discurso del entrenador se obtienen relaciones entre las distintas dimensiones del conocimiento pedagógico que muestran la forma en que se plantea el entrenamiento deportivo en iniciación.

Ramos (2008) plantea una propuesta inicial, la cual trata de establecer el conocimiento de los profesores expertos dentro del concepto PCK de forma que se establezca una estructura teórica que la sustente. Por ello diseña dos modelos de conocimiento del profesor: un modelo integrativo y un modelo transformativo. Ambos modelos explican el PCK como la integración de tres componentes: materia, la pedagogía y el contexto.

Amade-Escot (2000) centra su estudio a partir del PCK realizando una comparación entre los profesores “expertos” y “noveles”, cuyo objetivo es establecer patrones de referencia que caractericen a un experto de forma que sirvan de guía en la formación del profesional, donde al mismo tiempo también se estudie la forma como se va adquiriendo el conocimiento pedagógico.

Después de haber mencionado algunos trabajos de investigación, y realizar un pequeño análisis de los correspondientes trabajos, se puede observar como cada una de ellos ha influido sustancialmente en su línea de investigación. Pero es necesario resaltar que, el presente trabajo de investigación es diferente e innovador porque en esta investigación se articularon los tres enfoques: razonamiento inductivo, material y PCK, no trabajando cada uno por aparte; por lo cual se espera que los resultados sean importantes y significativos en cuanto a la forma de enseñar el contenido científico.

2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico de esta investigación se basa desde tres fundamentaciones teóricas; el Conocimiento Pedagógico del Contenido -PCK- Shulman, L., 1986, 1999; Ball, D. (2000,2005); Hill, H., Schilling, S., & Ball, D. (2004), el Razonamiento inductivo; Fetísov (1980); Whitehead (1911); Hadamard (1947) y Cañadas (2002) como medio para la construcción de conocimiento matemático. Y por último el uso de Material de Apoyo; Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011) como estrategia para cumplir objetivos de aprendizaje en el aula.

2.1 Conocimiento Pedagógico del Contenido -PCK-

De acuerdo con Shulman (1986, p. 9) el Conocimiento pedagógico del contenido (**PCK**, por sus siglas en inglés) es:

> Una categoría de conocimiento, involucra los saberes que le permiten al docente hacer enseñable el contenido e incluye: las más poderosas formas de representación, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, o sea, las formas de representar y formular la materia para hacerla comprensible a otros. Además, es la comprensión de qué hace un aprendizaje de un tópico específico fácil o difícil.

El -PCK- es el tema más importante en la formación de maestros, Shulman propuso que "dicha categoría es la que distingue al pedagogo del especialista en el contenido, ya que este es el conocimiento específico formado en la intersección del contenido y la pedagogía" Shulman (1987, p. 14). Desde este aspecto se resalta la importancia del conocimiento pedagógico que deben tener las personas dedicadas a la enseñanza, ya que son las que permiten comprender cómo determinados temas o contenido a enseñar se transforma para ser transmitido a un estudiante, de forma que a éste se le facilite el aprendizaje.

Con relación a lo anterior, Shulman proyecta que "el -PCK- representa la mezcla entre el contenido y la pedagogía en un esfuerzo por comprender cómo un tópico, problema o tema específico es organizado, representado y adaptado para los diversos intereses y habilidades de los estudiantes y presentado para la enseñanza." Shulman (1987, p. 8). Por otro lado, esta adaptación no debe limitarse a estar orientada a que el estudiante comprenda simplemente, sino que debe identificar al estudiante como protagonista de este proceso, en búsqueda de que el estudiante no sólo comprenda tal contenido, si no que le dé un sentido desde sus cualidades contextuales y capacidades cognitivas.

Stengel, 1992, p. 7, (en Bolívar, 1993, p. 8) afirma que:

El profesor inevitablemente transforma el contenido en algo, un contenido enseñable que tiene su propia lógica, estructura, y tiene sentido para los alumnos. Además, es el conocimiento que ayuda a que se produzca esta transformación del contenido incluido en el currículo escolar, en algo que tenga sentido para los alumnos, es a lo que se denomina PCK.

La relación entre el contenido y la pedagogía implica que, para poder ejercer la docencia, se requiere *la transformación de lo comprendido* de determinado cuerpo disciplinar. Shulman (1999, p. 11) lo define como "la capacidad de enseñabilidad de determinado contenido descansa, entre otros, en el conocimiento profundo, flexible y cualificado del contenido disciplinar, pero, además, en la capacidad para generar representaciones y reflexiones poderosas sobre ese conocimiento".

Berliner (1986) al respecto afirma:

El estudio del PCK ofrece la oportunidad de entender cómo los y las docentes llegan a hacer enseñables los contenidos. Esta categoría de conocimiento le permite al docente tener la habilidad de convertir sus comprensiones acerca de un tema, en distintas estrategias de enseñanza que le faciliten el logro de los aprendizajes en sus estudiantes. Esto supone cómo los y las docentes “conocedores de la materia” trascienden y se convierten en “maestros de la materia”.

2.2 Razonamiento

Desde la Educación Matemática, "el razonamiento es una actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información" Balacheff (2000, p. 13).

Por otra parte, Rico destaca el aspecto conceptual que forma parte del razonamiento en esta disciplina y define el razonamiento como:

> La capacidad para establecer nuevas relaciones entre las unidades de información que constituyen un concepto y se expresa mediante una secuencia argumental. El razonamiento es la forma usual de procesar conceptos, es decir, de derivar unos conceptos de otros o implicar una nueva relación sobre la base de las relaciones ya establecidas. Rico (1997, p. 33).

2.2.1 Razonamiento Inductivo

La inducción aparece con Aristóteles (384-322 a.C.), quien habló de la inducción con una significación precisa e insistió en la importancia de establecer la diferencia entre silogismo e inducción. En esta distinción, el silogismo se mueve de lo más universal a lo menos universal, y la inducción se mueve en el sentido opuesto. Ferrater (1988).

> "La inducción proviene del término griego epagogé, creado por Aristóteles para denotar al establecimiento de proposiciones universales mediante la utilización de casos particulares que pudieran estar contenidos en ella. En una primera definición, se consideró que la inducción es un tránsito de las cosas individuales a los conceptos universales". Cañadas (2009, p. 34)

Aristóteles distingue dos formas de razonamiento inductivo: El razonamiento inductivo perfecto como el caso límite del razonamiento inductivo general. Sólo es posible con objetos que pueden ser enumerados por entero y con propiedades fácilmente obtenibles por abstracción. Se establece una conexión racional efectiva entre un concepto y otro inferido por este concepto. Y el razonamiento inductivo imperfecto, que expresa los razonamientos inductivos habituales. Opera a base de una especie de “mediación psicológica” hecha posible por una revisión de los casos particulares.

Desde la Matemática, la inducción se relaciona con el *Principio de Inducción Matemática*. La *inducción matemática* o *inducción completa* es considerada como una forma de demostrar propiedades matemáticas y, por lo tanto, solo se utiliza en la ciencia Matemática. Pólya (1945, p. 36).

Según Pólya (1966, p. 159), se llega a propiedades matemáticas por un proceso de *inducción* y, posteriormente, se demuestran por el método de inducción completa. Esta puede ser la causa de que en los problemas matemáticos se encuentren ambos procedimientos ligados a una misma tarea, la inducción previa a la generalización y la inducción matemática pan probar la veracidad de la misma. La inducción matemática es un procedimiento útil, a menudo, para verificar conjeturas matemáticas, a las que hemos llegado por algún procedimiento inductivo.

De acuerdo a Fetísov (1980, p. 9) llama inducción al “razonamiento que parte de los conocimientos o verdades particulares para obtener mediante ellos una verdad más general o que observa varios fenómenos para inferir la ley que los explica”. Es decir, el razonamiento inductivo parte de premisas particulares a las leyes generales. Es desde aquí donde esta forma de razonar da un gran aporte a el aprendizaje de los contenidos matemáticos, dado que mucha teoría se rige a partir de leyes matemáticas, axiomas y colorarios generales, que se pueden explicar y hacer más entendibles al estudiante si se explican desde casos particulares.

Otro autor que concuerda con Fetísov es Whitehead (1911, p. 23), y coincide en señalar el papel destacado de la inducción, de la percepción de lo general en lo particular, de la distinción entre lo que es permanente y lo que es transitorio, en la generación de conocimiento científico. Ambos autores consideran que el razonamiento inductivo se basa de lo particular a lo general y este razonamiento permite llegar a un conocimiento científico.

Aunque varios autores tengan la misma perspectiva sobre el razonamiento inductivo, entre ellos mismos clasifican o caracterizan, el razonamiento inductivo, es decir, por una parte, tenemos a Hadamard (1947, p. 16) considera que el razonamiento inductivo debe darse en cuatro fases, y por otro lado a Lalande (1963, p. 21) considera que hay varios tipos de inducción.

Hadamard (1947, p. 17) menciona que "las cuatro fases que se deben dar para el razonamiento inductivo son: preparación, incubación, iluminación y verificación o comprobación. Y así de esta manera se puede alcanzar el conocimiento matemático".

Por otra parte Lalande (1963) Afirma:

Hay varios tipos de inducción. Distingue entre un concepto amplio y otro más estricto. El concepto amplio de inducción es una operación que se realiza cuando se llega a una conclusión sobre un hecho, partiendo de otro hecho y la llama inducción reconstructiva. El concepto estricto es un proceso de razonamiento que va de lo particular a lo universal. Este concepto lo subdivide en dos: la inducción amplificadora o inducción ordinaria, que consiste en “enunciar un juicio universal sobre una serie de objetos cuya reunión permitiría solamente un aserto particular con el mismo sujeto y el mismo predicado.” Y la inducción completa o inducción formal, “consistente en enunciar en una sola fórmula, relativa a una clase o a un conjunto, una propiedad que ha sido afirmada separadamente de cada uno de los términos que abarca esta clase o de los elementos que componen este conjunto.” Lleva a la práctica un racionalismo que puede ser considerado radical.

Cañadas (2002, p. 18) también da su aporte de lo que considera razonamiento inductivo; como "la forma común que todas las ciencias utilizan para descubrir leyes generales partiendo de evidencias particulares, y plantea cuatro acciones propias del razonamiento inductivo que son: construir, simbolizar, aplicar y generalizar ideas matemáticas".

El razonamiento inductivo se considera un elemento clave en la construcción de conocimiento. Es significativa la afirmación de Klein al señalar que, "en cierto sentido, las matemáticas han progresado más gracias a las personas que se han distinguido por la intuición, no por los métodos rigurosos de demostración" (citado por Perero, 1994, p. 24). Este sentido intuitivo necesario para avanzar en el conocimiento matemático es el que Pólya (1966) defiende en su trabajo al hablar de la importancia de una actitud inductiva. La inducción en el sentido que señala Pólya, la consideramos equivalente al razonamiento inductivo ya que expresa el proceso cognitivo que comienza con el trabajo de casos particulares y, pasando por la formulación de conjeturas, llega a la comprobación de éstas.

Pólya (1966) considera la necesidad de una actitud inductiva en matemáticas y la importancia de la generalización como paso de la observación de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o bien, pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado. Para un resolutor de problemas *ideales*, Pólya identifica que el proceso de inducción se inicia trabajando con casos particulares y concretos, se pasa por la formulación de una conjetura, llegando a la comprobación de la conjetura con nuevos casos particulares.

Pólya (1945) considera que se suele llamar inducción al procedimiento que usan los científicos para tratar con la experiencia. La inducción es un método para descubrir propiedades tras la observación de los fenómenos, la regularidad que presentan dichos fenómenos y la coherencia que se les supone a los mismos. La inducción empieza frecuentemente con alguna observación.

A partir del trabajo de Pólya se construye una aproximación a un modelo ideal a seguir en el proceso de razonamiento inductivo. Este modelo consta de varios pasos, de los cuales rescatamos para nuestro trabajo de investigación los siguientes:

1. *Trabajo con premisas particulares.*
2. *Identificación de patrones*.
3. *Generalización.*

Se dedican los siguientes epígrafes a precisar el significado que se le atribuye a estos pasos y a algunos términos con los que se relacionan.

2.2.2 Trabajo con Premisas Particulares.

Los casos particulares son los ejemplos o casos concretos con los que se inicia un proceso inductivo. Las premisas particulares juegan un papel fundamental como punto de partida de la inducción. Además, las premisas particulares pueden servir para validar una conjetura de una manera informal, como se detallará en un paso que se corresponde con los procesos de validación. Cañadas (2007, p. 28)

Klauer (1996) parte de su definición de razonamiento inductivo como proceso en el que se lleva a cabo la comparación de casos particulares con la intención de descubrir regularidades e irregularidades.

2.2.3 Identificación de Patrones.

Los patrones se consideran como “algo” que se repite con regularidad. Castro (1995), Stacey (1989). Los patrones se refieren a representaciones internas y externas. Las internas al individuo se encuentran relacionadas de manera significativa con lo que observan en su entorno; cuando a partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos, se ha hablado de generalización.

Pólya (1966) afirma:

El reconocimiento de patrones es, por tanto, esencial en el desarrollo de la habilidad para generalizar. Y defiende en sus trabajos el uso del razonamiento inductivo como método para descubrir propiedades tras la observación de los fenómenos, la regularidad que presentan dichos fenómenos y la coherencia que se les supone a los mismos.

Los patrones tienen un lugar destacado dentro del razonamiento inductivo de cualquier ciencia si se tiene en cuenta que el reconocimiento de patrones puede ayudar a alcanzar fórmulas y relaciones generales. Desde hace algunos años, la importancia de los patrones en matemáticas ha sido tal, que ha habido un cambio significativo en lo que la comunidad científica entiende por saber y hacer matemáticas. Los patrones matemáticos se han considerado como la estructura que permite modelizar las *reiteraciones* que se observan en el entorno. El principal avance en esta reconceptualización es pensar en las matemáticas como la ciencia de los patrones. Devlin (1994); Keith (1994) y Sawyer (1963).

Las matemáticas son una actividad inherentemente social, en la que una comunidad de practicantes entrenados (científicos matemáticos) se ocupan de la ciencia de los patrones, como intentos sistemáticos basados en la observación, estudio, y experimentación, para determinar la naturaleza de los principios de las regularidades en los sistemas definidos axiomáticamente o teóricamente (matemática pura) o modelos de sistemas abstraídos de objetos del mundo real (matemática aplicada). Las herramientas de las matemáticas son la abstracción, la representación simbólica y la manipulación simbólica. Schoenfeld (1992, p. 335).

2.2.4 Generalización.

Cuando la conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada, se habla de generalización. Este es el principal objetivo del razonamiento inductivo, por el que se le considera generador de conocimiento, en particular de conocimiento matemático. Respecto a lo anterior, Pólya (1945) toma la generalización como una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos y se detecta y se sistematiza una regularidad.

Krutestskii (1976) habla de la habilidad para generalizar un contenido matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado.

El trabajo con lo particular es un paso fundamental en la generalización. El tipo de trabajo con los casos particulares que se realice puede ayudar a caracterizar la generalización. Cañadas (2002). Una situación particular es la generalización, que parte de un único ejemplo en el que, con la indicación que corresponda e ignorando algunas características no relevantes, sirve de ejemplo genérico donde se puede leer lo general. Esto se aproxima más al modo en que actúan los matemáticos en el sentido de que se está considerando un ejemplo específico como representante de su clase. Marrades y Gutiérrez (2000); Mason y Pimm (1984).

El proceso de generalización en las matemáticas escolares ha sido analizado por Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985), quienes identifican los siguientes pasos que conforman el ciclo de generalización: (a) percibir la generalidad, (b) expresar la generalidad, (c) elucidar una regla general, verbal o numérica para generar una secuencia, (d) expresar simbólicamente la generalidad, y (e) manipular la generalidad.

2.3 Material de Apoyo

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M (2011) consideran que para hablar de material de apoyo en el aula primero hay que puntualizar lo que se entiende por materiales y recursos; definiendo recursos como todas aquellos instrumentos que se encuentran en un medio y no han sido diseñadas específicamente para la enseñanza, pero que aun así, el docente decide llevar al aula de clases; por otro lado define al material como un instrumento que fue diseñado específicamente para la enseñanza, es aquí donde los recursos llevados al aula trasciende al ser utilizados con un objeto de aprendizaje convirtiéndose en un material de apoyo para el estudiante. Reconociendo que tanto el material como el recurso son medios que facilitan el hacer en el aula.

Carretero, Coriat y Nieto (1995, p. 17) definen el material como medios que facilitan el actuar del estudiante, diseñados específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, se diseñan con fines educativos.

Carretero *et al* (1995) Aclaran:

Si bien, en general, en un buen material didáctico transciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material y qué es un recurso, entendiendo recurso como cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje, que el maestro decide incorporar en sus enseñanzas. Aclarando que los materiales y recursos permiten al profesor plantear tareas para que los alumnos utilicen los conceptos matemáticos.

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011) Afirman que:

Recursos y materiales son instrumentos para enseñar. Se diferencian en que los materiales han sido diseñados con intención educativa, mientras que los recursos existen con otras finalidades, y el profesor decide emplearlos en su enseñanza. Para aprender el alumno debe generar ideas, y para ello se requiere actuar, hacer. Para facilitar la enseñanza y el aprendizaje se utilizan recursos y materiales. Su intención es tanto mejorar la comunicación como facilitar la acción del alumno.

Flores *et al*. (2011, p. 38) describen que:

Para aprender el alumno debe generar ideas, y para ello se requiere actuar (hacer). En este sentido, para facilitar la enseñanza y el aprendizaje se utilizan recursos y materiales, donde su intención es tanto mejorar la comunicación como facilitar la acción del alumno. Del mismo modo resaltan que una enseñanza que utiliza materiales y recursos da mayor protagonismo al alumno, manipulando los materiales y resolviendo problemas, donde materiales y recursos

> tienen que emplearse con una finalidad didáctica, formando parte de tareas bien definidas, basadas en problemas comprensibles por los alumnos y haciendo funcionales los materiales.

En este sentido, de acuerdo a Flores *et al*. (2011), una enseñanza que utiliza materiales y recursos da mayor protagonismo al alumno, ya que promueve su actuar en el aula, orientado hacia una buena comprensión de situaciones problemas planteadas por el maestro desde el uso de material desde un objeto didáctico, donde promueva la funcionalidad del material.

El maestro de matemáticas debe promover una búsqueda de cambio de la perspectiva en que solo en las clases de física se puede experimentar, ya que si el docente de matemáticas utiliza materiales en el aula puede potenciar a que el empleo de materiales haga concebir el aula de matemáticas como un laboratorio donde se promueva la comprensión del conocimiento matemático.

Respecto a todo lo mencionado en los párrafos anteriores se debe aclarar que la importancia de estos materiales y recursos no reside en sí mismos, sino en la adecuación, papel orientador y contribución de aprendizaje que establezca el maestro. Pues un material por sí mismo no crea conocimiento, es el papel fundamental del guía y orientador en las distintas actividades, es quien involucra el material promoviendo la funcionalidad de éste, en la búsqueda de una buena representación entre el contenido a enseñar y el papel que el material debe cumplir en las actividades planteadas por el docente desde su intencionalidad de carácter pedagógico.

De acuerdo a lo anterior, Gómez (2004, p. 29) señala que:

> Todos los materiales y recursos que puede usar el profesor en su labor docente han de jugar un papel muy concreto en ese proceso. El éxito de su empleo depende de que el profesor diseñe y lleve a la práctica el currículo de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares adquieran aprendizaje.

Flores *et al*. (2004, p. 13) Afirman que: El material didáctico es una ayuda para obtener los objetivos de aprendizaje. Incluso modificar o utilizar varios recursos puede ser imprescindible según los objetivos pretendidos. materiales puede ayudar a desarrollar las competencias de “pensar y razonar”, “argumentar”, “comunicar”, “resolver problemas”, “simular y modelizar, etc." Simultáneamente se analiza que los materiales dan grandes aportes para el desarrollo de la competencia razonamiento inductivo, dado que se encuentra incluida dentro de las competencias que ayuda desarrollar los materiales, desde su categoría mayor que es razonar, enfocándonos en una forma particular de razonar como lo es el razonamiento inductivo.

2.4 Metodología Cualitativa

En este apartado se profundiza sobre el enfoque metodológico bajo en cual se fundamenta teóricamente esta investigación. En esta investigación se realiza en el marco de un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo-interpretativo, la cual fue diseñada para realizar un análisis del contexto donde se llevaría a cabo la práctica pedagógica y del proceso investigativo.

Desde los planteamientos de Goetz y Le Compte (1988), la fiabilidad del proceso investigativo se mejora proporcionando la mayor información posible tanto de la situación escolar en que se desarrolla la experiencia, de la selección de la población y de la muestra, como de los métodos de recolección de datos, el análisis de los datos a partir de la aplicación de rejillas de análisis y la revisión de investigaciones en el mismo campo problemático.

La presente investigación se enmarca en el paradigma cualitativo por su interés humanista, desde la definición de Denzin y Lincoln (2005, p. 2):

La investigación cualitativa tiene un enfoque multi-metodológico, que implica un enfoque interpretativo y naturalista a su objeto de estudio. Esto significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en sus ambientes naturales, intentando darles sentido e interpretando los fenómenos en función de los significados que las personas les otorgan. La investigación cualitativa involucra el estudiado uso y recopilación de una variedad de materiales empíricos (estudio de caso, experiencia personal, introspectiva, historia de vida, textos observacionales, históricos, interactivos y visuales), los cuales describen momentos y sentidos rutinarios y problemáticos en la vida de los individuos.

Por otra parte Creswell (1994, p. 32) afirma:

La investigación cualitativa es un proceso interrogativo de comprensión basado en distintas tradiciones metodológicas de indagación que exploran un problema social o humano. El investigador construye un panorama complejo y holístico, analiza discursos, refiere visiones detalladas de los informantes y lleva a cabo el estudio en un entorno natural.

Hay que resaltar el papel importante que tienen como investigadores los maestros en su proceso de formación constante, ya que aprenden según sus experiencias en el aula, mejorando así su práctica docente. Respecto a lo anterior, Dey (1995, p. 78) aporta: "Los investigadores cualitativos aprenden haciendo". Afirmando que la investigación cualitativa es ampliamente intuitiva, suave y relativista o que los analistas de información cualitativa recurren tres aspectos: percepción, intuición e impresión.

Para Sandoval (2002, p. 32) la investigación cualitativa es entendida como:

> La captación, del sentido de lo que el otro o los otros quieren decir a través de sus palabras, sus silencios, sus acciones y sus inmovilidades mediante la interpretación y el dialogo, es la posibilidad de construir generalizaciones, que permitan entender los aspectos comunes a muchas personas y grupos humanos en el proceso de producción y apropiación de la realidad social y cultural en la que desarrollan su existencia.

En este sentido, la investigación cualitativa puede analizar las descripciones e interpretaciones que realizan los estudiantes frente a las distintas situaciones, ya que estas son las que permiten dar cuenta de cómo y de qué manera razona el estudiante. Relacionado a esto, Hernández, Fernández y Baptista (2003) afirman que "la investigación cualitativa está ligada con la naturalidad de los fenómenos tantos en sus descripciones como en las interpretaciones".

A través de una investigación cualitativa se puede reconstruir en las aulas de clase la forma como razonan los estudiantes y sus actitudes frente a los conceptos matemáticos. En este sentido, Sampieri (2004, p. 10) afirma que el propósito de la investigación cualitativa consiste en “reconstruir la realidad tal y como la observan los actores de un sistema social previamente definido”. Percibiendo la vida social como la creatividad compartida de los individuos. El hecho de que sea compartida, determina una realidad percibida como objetiva, viva, cambiante, mudable, dinámica y cognoscible.

Desde los planteamientos de Goetz y LeCompte (1988), la fiabilidad del proceso investigativo se mejora proporcionando la mayor información posible tanto de la situación escolar en que se desarrolla la experiencia, de la selección de la población y de la muestra, como de los métodos de recolección de datos, el análisis de los datos a partir de la aplicación de rejillas de análisis y la revisión de investigaciones en el mismo campo problemático.

Goetz y LeCompte (1988) añaden a lo anterior, afirmando:

El análisis de la información recolectada debe ser abordado de forma sistemática, orientado a generar constructos y establecer relaciones entre ellos, constituyéndose esta metodología en un camino para llegar de modo coherente a la teorización. La validez se mejora exponiendo presupuestos de base, realizando una permanente colación de los datos y una descripción lo más profunda y detallada posible del análisis realizado.

Stake (1999, pp. 20-21) afirma:

> Cuando diseñamos los estudios, los investigadores cualitativos no confinamos la interpretación a la identificación de variables y al desarrollo de instrumentos con anterioridad a la recogida de datos, ni al análisis e interpretación para el informe final. Por el contrario, destacamos la presencia de un intérprete en el campo para que observe el desarrollo del caso, alguien que recoja con objetividad lo que está ocurriendo, y que a la vez examine su significado y reoriente la observación para precisar o sustanciar esos significados. A mitad del estudio, el investigador de casos puede modificar e incluso sustituir las preguntas iniciales. El objetivo es entender en su totalidad. Si las primeras preguntas no funcionan, si aparecen temas nuevos, se cambia el diseño.

2.5 Otros epígrafes

En el desarrollo de este escrito referente al trabajo investigativo se utilizan ciertos conceptos con el objeto de realizar un análisis detallado de cada aspecto de la investigación y proyectar una estructura para el análisis de resultados de ésta. Algunas de los conceptos utilizados son los siguientes:

2.5.1 La entrevista.

La entrevista de investigación como método de recogida de información, la define Cohen y Manion (1990, p. 378) como “un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especificado por los objetivos de investigación de descripción, de predicción o de explicación sistemática”. Se trata de un método que comprende la reunión de datos a través de una interacción oral directa entre individuos. De los distintos tipos de entrevista, en la entrevista semiestructurada a los entrevistados se les plantea una situación abierta y éstos tienen flexibilidad y libertad para dar respuesta. La única limitación son las preguntas que la entrevistadora va haciendo y que les van a servir de guía a los entrevistados. No hay otras limitaciones sobre el contenido o el modo de respuesta del entrevistado más que la de la materia de la pregunta o cuestión, que viene determinada por la naturaleza del problema. En términos de Cohen y Manion, se trata de una entrevista semiestructurada y dirigida, en la que el entrevistador puede, cuando sea conveniente, representar un papel más activo, introducir indicaciones orales más explícitas al patrón de estímulos. Esas cuestiones “suministran un marco de referencia para las contestaciones de los informantes, y ponen un mínimo de restricción sobre las contestaciones y su expresión” (p. 384).

2.5.2 Actividad de aprendizaje.

Penzo *et al*. (2010) afirman: las actividades de aprendizaje son recursos para conseguir el aprendizaje y no sólo medios para comprobarlo Las actividades de aprendizaje son, en primer lugar, acciones. Quien aprende hace algo que puede ser, en principio, cualquier cosa: leer, copiar, subrayar, repetir…; aunque es evidente que hay actividades que facilitan o consolidan más el aprendizaje que otras y que, por tanto, son mejores recursos. Definirlas como «recursos» señala su carácter instrumental para el aprendizaje, lo que las diferencias de las actividades mediante las cuales aquél se demuestra o se comprueba. Para cumplir un fin u otro –y ambos son fundamentales–, la programación y el diseño de las tareas deben ser, en parte, distintos. Puesto que estas actividades son, en primer lugar, medios para asimilar una información, el punto de partida y el eje cardinal en la programación es un conjunto de contenidos de información que se pretende que se conviertan en conocimiento. Por tanto, las actividades de aprendizaje sirven para aprender, adquirir o construir el conocimiento disciplinario propio de una materia o asignatura; y para aprenderlo de una determinada manera, de forma que sea funcional, que pueda utilizarse como instrumento de razonamiento.

2.5.3 Análisis de datos.

El procedimiento de análisis de resultados incluye las funciones de edición y codificación. La edición comprende la revisión de los formatos de datos en cuanto a la legibilidad, consistencia y totalidad de los datos. La codificación implica el establecimiento de categorías para las respuestas o grupos de respuestas. Kinnear y Taylor (1993).

Una vez que se ha realizado la recopilación y registro de datos, estos deben someterse a un proceso de análisis o examen crítico que permita precisar las causas que llevaron a tomar la decisión de emprender el estudio y ponderar las posibles alterativas de acción para su efectiva atención. El propósito del análisis es establecer los fundamentos para desarrollar opciones de solución al factor que se estudia, con el fin de introducir las medidas de mejoramiento en las mejores condiciones posibles. Franklin (1998).

Como dice (Encinas, 1993; citado en Alva, 2001), los datos en sí mismos tienen limitada importancia, es necesario "hacerlos hablar", en ello consiste, en esencia, el análisis e interpretación de los datos.

El propósito del análisis es resumir las observaciones llevadas a cabo de forma tal que proporcionen respuesta a la interrogante de la investigación. La interpretación, más que una operación distinta, es un aspecto especial del análisis su objetivo es buscar un significado más amplio a las respuestas mediante su trabazón con otros conocimientos disponibles que permitan la definición y clarificación de los conceptos y las relaciones entre éstos y los hechos materia de la investigación. (Selltiz, 1970; citado en Alva, 2001).

La relación entre análisis e interpretación y la forma específica que toman, tanto separada como conjuntamente, varían de un estudio a otro", dependiendo de los distintos esquemas o niveles de investigación y, fundamentalmente, del diseño propuesto.

Los datos, a partir de los cuales el investigador inicia el análisis, son diferentes según el nivel de elaboración realizado, el cual depende de la naturaleza del problema de investigación y, consecuentemente, del tipo de investigación; también de las técnicas y procedimientos seguidos en la elaboración.

De acuerdo a estas consideraciones, los datos que se utilizan en el análisis pueden ser: datos cuantificados, datos no cuantificados, y datos no estructurados. En esta investigación nos centraremos en el análisis de los datos no cuantificados y no estructurados.

2.5.4 Análisis de los datos no cuantificados.

No todos los aspectos del material recogido pueden ser categorizados y, consecuentemente, cuantificados, debido, en algunos casos, a la falta de precisión en la definición de las categorías, lo que dificulta el análisis de los resultados. Por este motivo, se recomienda considerar que cada categoría propuesta comprenda un amplio margen de criterios para las respuestas.

De todos modos, los datos sin elaborar, "pueden ser utilizados en el análisis e interpretación sin tener en cuenta si han sido o no cuantificados en todos los aspectos", pues cumplen una función importante: ayudan a entender el significado de las categorías; aclaran la naturaleza de las relaciones entre las variables determinadas estadísticamente; y permiten orientar al investigador a formular nuevas hipótesis para futuras investigaciones.

2.5.5 Análisis de los datos no estructurados.

El material no estructurado es el que proviene, por ejemplo, de observaciones o entrevistas no estructuradas, en las cuales se recoge mucho material, a veces valioso, pero sin ninguna pauta que permita alguna forma de organización y menos de clasificación.

En algunos casos, los estudios de nivel exploratorio, que no se inician con hipótesis, cubren aspectos diversos, los cuales conducen al acopio de datos en cantidad excesiva y no estructurado. El problema que plantea este tipo de datos es doble: primero porque se necesita determinar qué aspectos del material requieren ser categorizados, y segundo, saber qué principios de clasificación pueden utilizarse.

(Selltiz, 1970, citado en Alva, 2001) propone, como soluciones al problema expuesto, elaborar, en primer término, hipótesis de trabajo que permitan establecer principios de clasificación y, en segundo lugar, utilizar algunos procedimientos que puedan ayudar en el análisis, tales como: Estudiar el material correspondiente a un grupo que contrasta con el que se está investigando, con el objeto de obtener elementos que sugieran ideas sobre las diferencias significativas entre ambos grupos, respecto de la característica que se analiza.

Otro procedimiento consiste en formar grupos con los casos motivo de estudio sobre características comunes; después se analizan para ver si aquellos que tienen características semejantes han pasado por experiencias parecidas. También, pueden formarse grupos sobre la base de aquellos que han tenido experiencias similares, y ver en qué medida, son semejantes respecto de las características comunes que presentan.

2.5.6 Encuesta.

Se puede definir la encuesta, siguiendo a García (1993), como una técnica que utiliza un conjunto de procedimientos estandarizados de investigación mediante los cuales se recoge y analiza una serie de datos de una muestra de casos representativa de una población o universo más amplio, del que se pretende explorar, describir, predecir y/o explicar una serie de características.

Para Sierra (1994) la observación por encuesta, que consiste igualmente en la obtención de datos de interés sociológico mediante la interrogación a los miembros de la sociedad, es el procedimiento sociológico de investigación más importante y el más empleado. Entre sus características se pueden destacar las siguientes:

1. La información se obtiene mediante una observación indirecta de los hechos, a través de las manifestaciones realizadas por los encuestados, por lo que cabe la posibilidad de que la información obtenida no siempre refleje la realidad.
2. La encuesta permite aplicaciones masivas, que mediante técnicas de muestreo adecuadas pueden hacer extensivos los resultados a comunidades enteras.

3. El interés del investigador no es el sujeto concreto que contesta el cuestionario, sino la población a la que pertenece; de ahí, como se ha mencionado, la necesidad de utilizar técnicas de muestreo apropiadas.

4. Permite la obtención de datos sobre una gran variedad de temas.

5. La información se recoge de modo estandarizado mediante un cuestionario (instrucciones iguales para todos los sujetos, idéntica formulación de las preguntas, entre otros), lo que faculta hacer comparaciones intragrupales.

2.5.7 Situación problema.

Mesa (1998, p. 9) define una situación problema como:

"un espacio de interrogantes frente a los cuales el sujeto está convocado a responder. En el campo de las matemáticas, una situación problema se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático", definición que tiene como punto de partida la noción de lo que es un problema dada por Piaget, Pólya y Garret, entre otros.

Mesa (1998) afirma que una situación problema se procesa o se plantea de una forma que motive y desencadene razonamientos de orden matemático, que incorpore el planteamiento de preguntas abiertas y cerradas y que finalmente contribuya al desarrollo de las competencias lógico matemáticas, donde lo anterior debe ser el propósito para plantear una situación problema.

2.5.8 Resolución de Problemas.

La importancia dada a la resolución de problemas en Psicología y en Matemáticas trasciende a la Educación Matemática, donde la resolución de problemas es considerada una actividad altamente formativa que pone de manifiesto distintos modos de razonamiento. Cañadas y Castro (2006); Segovia y Rico (2001).

Diversos autores como Kilpatrick (1985); Lester (1980) y Schoenfeld (1992) se han preocupado por realizar revisiones de trabajos sobre la resolución de problemas matemáticos. En sus conclusiones, ponen de manifiesto la evolución de la resolución de problemas como tema de investigación en Educación Matemática, desde sus inicios en los años setenta.

Por lo general, una situación se considera problema cuando un individuo o resolutor no conoce a priori algoritmos o métodos que permitan la obtención de la solución de manera inmediata. El resolutor es un elemento fundamental para caracterizar un problema. En este sentido, la consideración de Schoenfeld (1985, p. 74) es significativa: " ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace la tarea un problema para esa persona."

> Según Puig y Cerdán (1988) el proceso de resolución de problemas es la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea. Esta actividad comienza con la percepción del problema y finaliza con la solución del mismo, considerando que resolución del problema es todo aquello que conduce desde el planteamiento a la conclusión.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se presentarán los aspectos relacionados con el diseño metodológico de la investigación, una descripción metodológica de las 3 etapas con las que se llevó a cabo el proceso investigativo. La primera etapa se enfoca en los elementos que se tuvieron en cuenta para la caracterización de la población con el propósito de obtener un contexto bien definido; la segunda etapa se centra en los instrumentos analizados para identificar la problemática central de la investigación y una tercera etapa que se enfoca en el uso de información mediante actividades de aprendizaje que promuevan una posible solución a la pregunta problematizadora.

La investigación se desarrolla bajo el enfoque cualitativo en la búsqueda orientar y buscar transformar a los estudiantes en su forma de razonar, buscando reconocer, comprender, interpretar, describir, analizar los fenómenos y los significados que emerge de la realización de actividades de aprendizaje enfocadas principalmente en el razonamiento inductivo en estudiantes del grado sexto de la IESPC. Por la intencionalidad de la investigación se adopta el enfoque cualitativo, dado que el interés es fortalecer la forma como razonan inductivamente los estudiantes a través del uso de material de apoyo desde el Conocimiento Pedagógico del Contenido. A continuación, se presenta la tabla 1, en donde se muestra de manera sintética las tres etapas que fueron el escenario de la investigación:

Tabla 1

Etapas del diseño metodológico

ETAPA I: CARACTERIZACIÓN DEL CONTEXTO	ETAPA II: IDENTIFICACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA	ETAPA III: APLICACIÓN DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE
En esta etapa se construyeron los instrumentos para la identificación de toda la información correspondiente al	En esta etapa se identificó a partir del análisis de tres aspectos, la problemática; Se constituyó el marco teórico y se diseñaron las actividades de	En esta etapa se lleva a cabo la aplicación de actividades de aprendizaje en búsqueda del fortalecimiento del razonamiento inductivo

contexto en el cual se llevó a cabo la práctica pedagógica.	aprendizaje con las cuales se recogieron el cuerpo de datos de la investigación, con el objeto de dar respuesta a la pregunta de investigación y a los objetivos planteados.	utilizando material de apoyo desde el enfoque PCK. Y se da inicio al análisis de resultados de estudiantes donde se busca dar respuesta a la pregunta problematizadora y a los objetivos.

3.1 Etapa I

En esta etapa se diseñaron dos instrumentos que permitieron distinguir un poco el contexto de la institución educativa donde se efectuó este trabajo de investigación, conociendo su historia institucional, su Proyecto Educativo Institucional, sus servicios educativos, cómo se conforma la comunidad educativa, cómo es concebido el maestro, el estudiante, la evaluación e incluso explorar también el contexto o entorno social del estudiante fuera del ámbito escolar y como éste puede afectar en el proceso de aprendizaje.

Los instrumentos abordados en esta etapa y que permitieron la identificación de la información respecto al contexto educativo son: el análisis teleológico y la encuesta, desprendiéndose de cada uno de ellos categorías.

3.1.1 Análisis teleológico.

Realizar el reconocimiento del espacio educativo fue el primer paso para el desarrollo o ejecución del trabajo de investigación y por ende, para dar una mayor claridad frente a la información que se requirió para conocer el contexto educativo se optó por una categorización de la investigación.

3.1.2 Población o centro.

El trabajo de investigación se comprendió en la Institución Educativa San Pedro Claver ubicada en el municipio de Apartadó dentro del barrio Obrero Bloque 3, la institución educativa es de carácter público y mixto.

3.1.3 Servicios educativos.

La IESPC presta servicios educativos en los niveles de preescolar, primaria, secundaria y media técnica.

3.1.4 Comunidad educativa.

La comunidad educativa está conformada por el rector, 4 coordinadores académicos, 2 maestras orientadoras, 1 bibliotecaria, 3 auxiliares administrativas, 13 personas como personal de apoyo, 89 maestros y 3299 estudiantes.

3.1.5 Misión y visión.

La IESPC posee como misión ofrecer servicios educativos inclusivos y de calidad basados en respeto por la diversidad, solidaridad y honestidad, formando sujetos íntegros que contribuyan al mejoramiento y transformación de la región de Urabá.

Como visión la IESPC se proyecta en el 2020 ser pionera en la región de Urabá en educación inclusiva encaminada al desarrollo comunitario y conservación del medio ambiente.

3.1.6 Filosofía.

La IESPC toma el nombre y filosofía de religiosos español Pedro Claver por que solicitó ser enviado América para ayudar a las comunidades más necesitadas, y como la IESPC nace con la necesidad de atender a la población vulnerable y en situación de violencia del municipio en esa época.

3.1.7 Modelo pedagógico.

El modelo pedagógico social – humanista obedece a la filosofía de la IESPC pues tiene como meta formar personas con calidad humana comprometidas a impulsar el desarrollo comunitario, por ello sus los componentes pedagógicos se hallan en una interdisciplinariedad para el cumplimiento de la formación. El modelo pedagógico posee una fundamentación teórica, la Psicología Socio-cultural de Vygotsky, el Desarrollismo Pedagógico de Dewey y Piaget, el Romanticismo Pedagógico de Rousseau, la Pedagogía Socialista de Makarenco, Freinet y Paulo Freire.

3.1.8 Concepciones del maestro, el estudiante y la evaluación.

El maestro en la IESPC se proyecta como una persona critica, con vocación, facilitador de aprendizaje y orientador en la formación integral, que está en constante investigación de su quehacer.

El estudiante se concibe como un ciudadano respetuoso, participativo, con actitud positiva, conoce su papel en la sociedad y genera soluciones a los problemas de su contexto.

La evaluación por su parte es concebida como proceso dinámico y sistemático, enfocada al cambio de las conductas y rendimientos.

Para darle continuidad al diseño metodológico etapa 1 se prosigue en el instrumento número dos.

3.1.9 Encuesta.

La encuesta se realizó con la intención de conocer, analizar y explorar el entorno social de los estudiantes, la afinidad y compromiso que posee con la parte académica bien sea en el área de las matemáticas o no, encontrando alguna relación entre entorno social de los estudiantes con la forma o manera aprender.

Para dar una mayor claridad de cómo se procedió a conocer el contexto educativo desde la encuesta se plantearon las siguientes categorías:

3.1.10 Población muestra.

Para la ejecución de la encuesta se concretó una muestra de 51 estudiantes que comprendían niños y niñas de los cinco grupos de grado sexto de la IESPC donde sus edades oscilaban entre 11 y 14 años de edad.

3.1.11 Preguntas de la encuesta.

La pregunta en la encuesta hacia la población tomada como muestra, fueron diseñadas para conocer o tener una idea sobre el entorno social de los estudiantes fuera del ámbito educativo, su nivel de compromiso con lo académico y la afinidad que puede sentir con el área de las matemáticas. Para ello la encuesta contó con 20 preguntas que pueden ser apreciadas en el *Anexo 1*.

3.1.12 Análisis de la encuesta.

Después de efectuar la encuesta se procedió a recogerlos los datos arrojados y empezar a agrupar. El análisis detallado de la encuesta aplicada a la población muestra se halla en el capítulo I de este trabajo de investigación, donde se representa la información acumulada en gráficas circulares.

Aunque en la encuesta se impartieron varias preguntas, sólo se hizo el análisis de los aspectos más relevantes que pueden inferir en el aprendizaje de los estudiantes y cómo se involucra el contexto social en ese proceso.

Con base al análisis de la encuesta, de manera general podemos afirmar que son estudiantes con edades entre 11 y 14 años, donde la edad predominante son 12 años; el estrato socio – económico es 1 y 2 para la mayoría de los encuestados; el 50% corresponde a un núcleo familiar común conformado por madre, padre y hermanos, aunque también existe una parte significativa que posee madrastra o padrastro; en cuanto la escolarización de los padres de los estudiantes más del 60% terminó el bachillerato, un 12% es profesional, tecnólogo o técnico y un sólo un 7% no estudiaron; el 70 % tienen acceso a Internet en sus hogares, 75% de los estudiantes tienen apoyo con las tareas extra clase y además se muestra que el 25% de los estudiantes trabajan a pesar que son menores de edad.

Cuando las preguntas se acercaron al rendimiento académico de los estudiantes, se obtuvo que la mayoría de los encuestados sí les gustan las matemáticas y es su materia favorita, pero también existía otra población que, sí les gusta las matemáticas, pero no es su materia favorita, y a pesar de estas respuestas fueron muy alentadoras en cuanto al gusto por las matemáticas.

3.1.13 Población objeto de estudio.

El trabajo de investigación se enfocó hacia el grupo 6ºA que cuenta con 49 estudiantes, 20 hombres y 29 mujeres y sus edades oscilan entre los 11 y 15 años.

3.2 Etapa II

Los instrumentos involucrados para identificar la problemática fueron: pruebas externas institucionales que realiza el Icfes, observaciones de clase y prueba diagnóstica. Luego de realizar un análisis desde cada uno de estos aspectos e identificar la problemática, se constituyó las fundamentaciones teóricas desde las cuales se justificaría la posible solución a la problemática y orientarían el adecuado diseño de actividades de aprendizaje con las cuales se recogieron el cuerpo de resultados de la investigación.

3.2.1 Pruebas externas.

Se utilizó la guía de uso e interpretación de resultados: reporte de estudiantes, Saber 3°, 5° y 9°, que plantea el Icfes (2018) para una correcta observación de los resultados obtenidos en las pruebas externas institucionales realizadas por estudiantes del grado quinto de primaria de la IESPC. Se encontró que los estudiantes poseían falencias en la forma de razonar, tal como se muestra en el capítulo II. Cuando se expresa que los estudiantes poseen debilidades a la hora de dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, *generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente* y plantear preguntas, entre otras cualidades. Icfes (2018). Dado que el razonamiento es una categoría muy amplia, tal como se muestra en el capítulo IV, se centra esta investigación en fortalecer el tipo de razonamiento inductivo.

3.2.2 Observaciones de clase.

Se realizaron unas observaciones de clase centradas en el actuar del maestro cooperador en el aula, donde se identificó un tipo de enseñanza clásica, donde la mayor parte del tiempo se utiliza tablero, marcador y discurso, como único medio didáctico.

Además, se realizó un contraste entre lo que está establecido en el PIA y lo que realiza el maestro en su quehacer pedagógico. Se encontró que, desde el conocimiento del currículo, el maestro plantea en el PIA una serie de contenidos que no alcanzan a ser compartidos al estudiante en el periodo de tiempo estipulado; además, se observa poco interés por querer mejorar la forma en que razona el estudiante dado que no está esbozado dentro del PIA en las competencias o componentes a fortalecer, lo cual es de vital importancia según lo establecido por el MEN respecto al razonamiento, como se muestra en el capítulo II. Añadiendo a lo anterior desde el PIA se planea la enseñanza a través del uso de estrategias didácticas que promuevan el uso de recursos y materiales en el aula; lo cual no se constata en las observaciones.

A partir de las observaciones de clase en lo mencionado anteriormente y el análisis a las pruebas externas institucionales, se identifica que en el aula de clases debe promoverse el razonamiento en el estudiante, además de una estrategia que lleve a cabo el uso de materiales para promover el aprendizaje del contenido matemático. Con base en lo anterior se diseña una prueba diagnóstica teniendo como objeto analizar como razonan los estudiantes de 6°A de la IESPC, tal como se muestra en el capítulo II.

3.2.3 Prueba diagnóstica.

Se diseñó una prueba diagnóstica con el objetivo de analizar la forma de razonar de los estudiantes, enfocándola a un razonamiento inductivo, esto se buscó a través de 4 situaciones problema, las cuales se toman desde la definición que se plantea en el marco teórico en el capítulo III. Dichas situaciones constaron de un enunciado, una gráfica, y preguntas problematizadoras que nos permitieron analizar a partir de las respuestas brindadas por los estudiantes, como razonaban éstos, a partir de la relación que hacia entre las respuestas a cada pregunta. Dicho análisis se encuentra de una manera detallada en el capítulo II del presente trabajo de investigación.

Situación problema 1.

La situación problema 1 de la prueba diagnóstica se cimentó en una gráfica de barras que mostraba la cantidad de dinero que gasta semanalmente un estudiante de una institución educativa, acompañada de una enunciado con su respectiva descripción, como se muestra en la Ilustración 2 y constó de 5 preguntas nombradas alfabéticamente desde la letra A hasta la letra E, donde cada pregunta estaba diseñada para lograr identificar una forma de razonar de los estudiantes cuando realizaban la operación matemática adecuada para brindar una respuesta asertiva a cada pregunta, y como a su vez iba relacionando estas respuestas y procedimientos para responder nuevas preguntas que requerían de esta información.

Situación problema 2.

La situación problema 2 se fundamenta a partir de un gráfico de pictograma, donde se dan conocer los valores correspondientes a cada fracción de figura, acompañado de su respectivo enunciado como se muestra en la Ilustración 5, y un total de 5 preguntas ordenadas alfabéticamente de A hasta E, las cuales estaban organizadas para orientar a los estudiantes hacia una buena comprensión de la gráfica y fomento de un razonamiento inductivo. Esto con el fin de observar el proceso de razonamiento que tienen los estudiantes para dar respuesta a las preguntas de esta situación problema.

En cada una de las preguntas se buscaba que los estudiantes a partir de una adecuada interpretación del enunciado, una correcta relación entre las figuras dadas, sus valores correspondientes en forma de fracción y la gráfica, además, de un planteamiento de operaciones matemáticas adecuadas, pudiesen obtener respuestas asertivas mediante un razonamiento inductivo.

Situación problema 3.

La tercera situación problema de la prueba diagnóstica, fue planteada desde una tabla de datos con su respectivo enunciado como se observa en la ilustración 3 en el capítulo II. A partir de dicho problema se plantean 5 preguntas ordenadas alfabéticamente de A hasta E, indagando por el concepto de promedio, disyunción y conjunción. Para así analizar cada una de las respuestas con el objeto de observar la forma de razonar de los estudiantes, y cómo los conceptos previos frente a los respectivos temas afectan la calidad de las respuestas a cada una de las preguntas.

Situación problema 4.

La situación problema 4 de la prueba diagnóstica tiene como base una gráfica, que consta de 4 ruletas enumeradas del 1 al 4, cada ruleta tiene la misma forma circular, donde cada una está dividida en secciones correspondientes a un número de premios enumerados del 1 al 3, así cada círculo correspondiente a una ruleta está dividido en tres secciones equivalentes a la opción de obtener un premio; acompañada de su correspondiente enunciado, tal como se muestra en Ilustración 11 en el capítulo II donde se detalla en análisis de esta situación, la cual consta de 5 preguntas contadas de la A hasta la E, orientadas a observar el tipo de razonamiento que poseen los estudiantes y las relaciones que hacen frente a una fracción, áreas y probabilidades.

Para finalizar, lo que se buscó con cada situación problema correspondiente a la prueba diagnóstica fue analizar el proceso de razonamiento que efectúa cada estudiante cuando desarrolla los planeamientos para darle respuesta a cada pregunta, enfocados en la concordancia de cada forma de razonamiento en cada proceso de resolución del problema e identificar si el estudiante hacia una relación coherente entre cada una de las preguntas planteadas.

Se encontró a partir del análisis de las pruebas externas, falencias en el razonamiento; desde las observaciones de clase y lo planteado en el PIA, se identificó que la forma como razonan los estudiantes no es tenida muy en cuenta en las aulas; por otra parte prevalece un interés por el uso de recursos y materiales en el aula, que tampoco se está llevando a cabo, lo cual es importante, ya que gran variedad de autores afirman que, la implementación de estos en las aulas apuntarían hacia un mejoramiento en las formas de razonar del estudiante, como se destaca en el marco teórico del presente trabajo de investigación en el capítulo IV. Del mismo modo se encontraron debilidades en los estudiantes en su forma de razonar a partir del análisis que se muestra de una manera detallada en el capítulo II.

A partir de lo planteado en los párrafos anteriores, surgen: la pregunta problematizadora y objetivos. Para tratar de dar respuesta a esta problemática y objetivos planteados, se realiza un estudio frente al estado del arte que hay referente los aspectos identificados anteriormente; el cual se detalla en el Capítulo III con el título de antecedentes. Seguidamente se realiza un análisis profundo para identificar los aspectos que puedan brindar categorías bajo las cuales se pueda justificar la problemática y orientar a una posible solución a esta, tal como se detalla en el capítulo III con el título de justificación.

Luego a partir de toda la información obtenida, se funda un marco teórico el cual se profundiza en todo el capítulo IV orientado a la solución de la problemática, Para así proceder a diseñar las actividades de aprendizaje en búsqueda de un fortalecimiento de razonamiento inductivo en los estudiantes de la IESPC desde el PCK utilizando material de apoyo, estas actividades se llevaron a los estudiantes a través de unos planes de clase, los cuales se describían en la siguiente etapa.

3.3 Etapa III

En esta etapa se lleva a cabo el diseño y la aplicación de actividades de aprendizaje en búsqueda del fortalecimiento del razonamiento inductivo utilizando material de apoyo desde el enfoque PCK. Cada actividad de aprendizaje se plantearon a los estudiantes a través de un plan de clase compuestos por distintas situaciones que se plasmaron para ser resueltas a través del uso de materiales de apoyo que fueron diseñados por estudiantes y maestras en formación, para dar respuestas a unas preguntas interrogativas que den evidencia de la forma como razona el estudiante. Los planes de clase con los cuales se realizaron los respectivos análisis fueron 5, con los siguientes nombres: la canasta, Formando Cubos, dividiendo los colores, construyendo equivalencia y por último, $\frac{1}{4}$ de regleta.

3.3.1 Plan de clase No. 1: La canasta.

Este plan de clase surgió a partir de la lectura del Módulo 1 Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, documento escrito por Obando, Vanegas y Vásquez (2006), esta actividad de aprendizaje consistió en la utilidad de recursos reciclables para diseñar una forma donde los estudiantes pudiesen recoger información mediante un juego, dicho juego debía constar de 5 estudiantes por equipo, donde cada equipo contó con 25 tapas de gaseosa, 4 canastas de huevos pintada de diferentes colores, donde cada color correspondería a un valor de la siguiente manera: azul: -5, rojo: 8, amarillo: -4, verde: 10. (Los valores asignados a los colores pueden variar según las necesidades del grupo), tabla de registro, y lápices.

Donde los valores correspondientes a cada color fueron ocultos para el estudiante, ya que ellos primero debían recolectar la información mediante el lanzamiento de las tapas hacia las canastas de la siguiente forma:

Los participantes se enumeran de uno a cinco para determinar el orden de lanzamiento, ya que el juego consta de cinco turnos para cada participante, donde cada jugador en su turno lanzó de forma consecutiva 6 tapas hacía la canasta. Una vez efectuado cada turno, el jugador debía observar la ubicación de las tapas para determinar el puntaje obtenido teniendo en cuenta el valor de cada zona de la canasta respecto a su color. Posteriormente procedían a anotar dicho puntaje en la tabla de registro (ver Tabla 2).

Tabla 2

Tabla de registro

Turno N°	**N° de tapas en el color azul**	**N° de tapas en el color rojo**	**N° de tapas en el color amarillo**	**N° de tapas en el color verde**	**Total**
1					
2					
3					
4					

5

Luego de que los estudiantes tuvieron completa su tabla de acuerdo a los 5 turnos, el maestro procedió a darles a conocer los valores correspondientes a cada color, continuamente ellos debías realizar sumas en una fotocopia proporcionada por el docente, para obtener el puntaje obtenido en cada turno y así el puntaje final.

A continuación, se muestra en una imagen el proceso que siguieron los estudiantes para la ejecución de este plan de clase, es importante aclarar que cada imagen donde se observa a un estudiante cuenta con un permiso debidamente diligenciado por su acudiente con su respectiva firma y número de identificación. Algunos de estos formatos se muestran en los anexos, con el nombre de *Anexo 2.*

Imagen 1. Proceso recolección de datos.

Después de haber obtenido toda la información respecto a la puntuación de cada uno, el docente procedió a plantearles a los estudiantes situaciones problema a partir de la actividad con el material de apoyo. Para que ellos a partir de su experiencia pudieran brindar una respuesta acertada. Nota: una muestra de las fotocopias entregadas a los estudiantes para obtener los resultados de esta actividad se muestra en el *Anexo 3*.

3.3.2 Plan de clase No. 2: Formando Cubos.

Para llevar a cabo el desarrollo de este segundo plan de clase, se le pide a cada estudiante con anterioridad que lleve a la clase 1/8 de cartulina plana del color que prefieran, colbón y tijeras punta redonda. Ya contando con estos materiales en el aula, el docente procede a hacerle entrega a cada estudiante de una plantilla para realizar un cubo, de modo que el estudiante la transcriba a la cartulina, la recorte, pegue y arme el cubo, donde todos los estudiantes contaron con cubos de igual dimensiones.

Debido a la complejidad en la elaboración del material, el poco tiempo con que se contaba y la cantidad de cubos de dimensiones iguales que se requerían para formar un cubo más grande, los estudiantes se dividieron en dos equipos, de 24 y 23 participantes respectivamente, donde cada equipo conto con un total de 27 cubos. Luego, procedieron a salir al patio de la institución educativa, esto con el propósito de, a partir de la unión de los cubitos creados en el aula, componer uno o más cubos de mayor tamaño. Además, a cada estudiante se le hizo entrega de una fotocopia con una serie de preguntas y situaciones problema que tuvieron la intencionalidad de orientar al estudiante hacia una identificación de la fórmula para hallar el volumen de un cubo. Las guías con las preguntas para esta actividad de aprendizaje se encuentran en el *Anexo 4*.

Imagen 2. Actividad con cubos

3.3.3 Plan de clase No. 3: dividiendo los colores.

Este plan de clase se diseñó con el objeto de crear un material de apoyo que fuese útil para la enseñanza de varios conceptos matemáticos. El material fue elaborado por estudiantes con recursos de fácil acceso, como cartón paja, vinilos y lapiceros. El material creado se asimila a las regletas de Cuisenaire, las cuales han sido consideradas a lo largo de la historia como un material estructurado, especialmente pensado para la enseñanza de las matemáticas.

La primera utilidad que se dio al material fue a través de este plan de clase, el cual consistió en guiar al estudiante para que mediante el uso de las regletas de Cuisenaire, dando respuesta a unas preguntas pudiese comprender más el papel de la regleta para el aprendizaje de la división entre números enteros. De modo que cada pregunta iba encaminando al estudiante a una correcta interpretación del algoritmo de la división mediante el estudiante avanzaba utilizando el material para dar respuesta ajustada a cada pregunta. El análisis respecto a las respuestas que brindaron los estudiantes a cada pregunta y una muestra de las copias entregadas a los estudiantes junto con el material se observan en el capítulo V y en el Anexo 5 respectivamente.

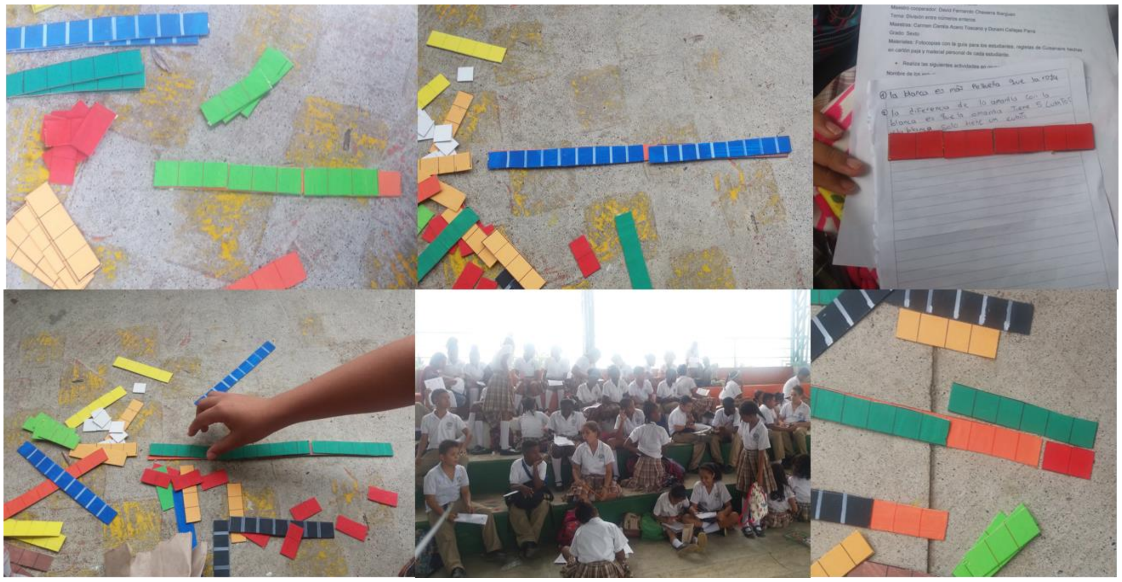


Imagen 3. Actividad dividiendo los colores

3.3.4 Plan de clase No. 4: Construyendo equivalencia.

En este plan de clase se buscó sacarle más provecho al material realizado por los estudiantes en el plan de clase anterior, similar a las regletas de Cuisenaire, una de las formas en que se aprovechó los beneficios que brindaba este material en la enseñanza y a su vez en el aprendizaje, mediante el estudiante fue utilizándolo para dar respuestas a unas preguntas que se planteaban en este cuarto plan de clase, orientadas a que los estudiantes comprendieran mejor con concepto de equivalencia e identificaran cuando varias fracciones eran equivalentes. Se profundizará más sobre las preguntas planteadas en este plan de clase en el capítulo VI en el análisis de resultados, como también se podrá observar una muestra de las preguntas entregadas a los estudiantes en el *Anexo 6*.

Imagen 4. Actividad construyendo equivalencia

3.3.5 Plan de clase No. 5: 1/4 de regleta.

Este plan de clase estuvo encaminando al fortalecimiento y complementación del plan anterior, ya que también estaba diseñado a partir de preguntas, donde la solución de éstas se encontraría mediante el uso del material de apoyo, el cual fue las regletas de Cuisenaire, donde éstas promovieron un buen entendimiento en el estudiante acerca de la equivalencia entre fracciones. Este plan de clase estuvo acompañado de una entrevista por parte del maestro hacía el estudiante, con el objeto de identificar y promover un razonamiento inductivo que llevara al estudiante a la creación de una premisa general a partir de las respuestas particulares que iba brindando a cada pregunta. El análisis de las respuestas y la entrevista se mostrarán en el siguiente capítulo, del mismo modo, los detalles de cada una de las preguntas se observan en el *Anexo 7*.

Imagen 5. 1/4 de regleta

A continuación se procede a realizar el análisis de datos que se obtuvieron a partir de aplicación de los planes de clases mencionados anteriormente.

4. RESULTADOS

En este capítulo se realiza el análisis de resultados que se obtuvieron a partir de la aplicación de las distintas actividades de aprendizaje, tal como se definen en el capítulo IV en el marco teórico, donde los datos a analizar se lograron obtener a través de los planes de clase mencionados anteriormente en el capítulo V. Una vez recopilada toda la información, la cual se obtuvo cuando los estudiantes emplearon material de apoyo con el objeto de dar respuestas a unas preguntas que buscaban promover el fortalecimiento del razonamiento inductivo, se sometió dicha información o resultados a un análisis mediante unas categorías.

El análisis de resultados de la investigación se llevó a cabo con datos de tipo no cuantificados y no estructurados, desde la definición que se ofrece de estos en el marco teórico del presente trabajo, ya que algunos de los datos o resultados recogidos provinieron de observaciones y entrevistas a los estudiantes que ayudaron a identificar las respectivas categorías de estudio.

Se realizó un análisis de acuerdo a la intencionalidad de cada plan de clase, con el propósito de resumir las observaciones relevantes que se identificaron en relación a la forma en que promovieron un acercamiento hacía una posible respuesta a la pregunta problematizadora de la investigación y objetivos. La interpretación de los resultados se ordenó de acuerdo a la intención de dar a conocer como se percibían desde: El PCK que debía tener el maestro al diseñar y aplicar el plan de clase, la influencia del uso de material en la ejecución de éstos y la forma en que se buscó promover el razonamiento inductivo mediante preguntas escritas, situaciones problema y entrevistas. Para lo anterior, se tomó una muestra de 7 estudiantes nombrados: E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E7. Así, se procedió a analizar los resultados obtenidos desde cada plan de clase, con sus respectivos nombres: la canasta, formando cubos, dividiendo los colores, construyendo equivalencia y por último, $\frac{1}{4}$ de regleta. De cada una de las fotocopias entregadas a los estudiantes con las preguntas orientadoras se haya una muestra en los anexos, ya que en este capítulo solo se hace análisis a las respuestas dadas por los estudiantes y qué tipo de postura tomaron ellos, frente a su forma de razonar a medida que se iban ejecutando cada una de las actividades de aprendizaje.

Cada plan de clase fue diseñado de acuerdo al maestro a partir un enfoque del PCK, desde la definición de Toranzos (1996, p. 65), sobre el *Conocimiento Pedagógico del Contenido*, definiéndolo como todo "ese conocimiento que un maestro debe tener para llevar a cabo el proceso de enseñanza en forma eficiente y eficaz, entendiéndose eficiente como el uso de materiales y eficaz el logro de objetivos". Y para el logro de esos objetivos es necesario la aplicación de este conocimiento que tiene el maestro para enseñar matemática, ya que desde allí es donde se relacionan los contenidos, la pedagogía y el contexto estudiantil.

Además, se debe resaltar el papel fundamental del PCK en los maestros, ya que desde allí es donde se relacionan los contenidos, la pedagogía y el contexto estudiantil, por lo que un maestro debe estar en la capacidad de adaptar y hacer el contenido disciplinar enseñable y entendible para el alumno, promoviendo que éste se apropie del conocimiento dando resultados satisfactorios y asertivos.

4.1 Plan de clase No. 1: La canasta

Dado que este plan de clase tenía como principal estándar de aprendizaje: Desarrollar y aplicar estrategias para estimar el resultado de una operación aritmética con números enteros. El maestro tuvo que pensarse la estrategia para llevar dicho contenido al estudiante de una manera que fuese comprensible para él, ya que, a partir de las observaciones de clase realizadas para la identificación de la problemática, se había logrado identificar falencias en los estudiantes al momento de realizar la operación adición entre números de distinto signo. Por lo cual el maestro rescato los aportes que tiene el uso del material en las aulas en cuanto promueve el proceso de enseñanza de una forma eficiente, permitiéndole al estudiante apoderarse del contenido disciplinar, adaptándolo para ser aprendido.

Promoviendo la elaboración en las aulas de un material que permitiese al estudiante apropiarse del sentido que tiene un valor negativo mediante el juego y realizar la operación de adición con esos determinados valores.

El procedimiento con que se llevó a cabo la actividad de aprendizaje "la canasta" se explica detalladamente en el capítulo V en la etapa III y en los anexos, donde se muestra que el estuante mediante un juego que consistía en lanzar tapas de gaseosa hacia unas canastas de huevos pintadas de distinto color, para así conseguir una puntuación de acuerdo a la ubicación de las tapas y el valor correspondiente a cada color, el cual podía ser negativo o positivo; para así luego realizar la operación matemática adición con el objeto de determinar la puntuación final.

A continuación se muestra un paralelo a partir de las observaciones hechas en clase cuando el estudiante no utilizó el material y cuanto lo utilizó. En las clases que se observaron para identificar la problemática, se brindó una clase tipo tradicional, donde solo se contó con el tablero y discurso del maestro, en la cual se plantearon ejercicios donde se debían resolver sumas entre números enteros positivos y negativos. Por otra parte, se realizan observaciones a partir de la ejecución de la actividad de aprendizaje "la canasta" tal como es definida anteriormente.

Tabla 3

Resultados de la actividad de aprendizaje "la canasta"

Observaciones	
En clases sin el material	**En la actividad de aprendizaje "la canasta"**
Los números con los cuales de realizaron las operaciones fueron impuestos por el maestro.	Los números con los cuales se realizaron las operaciones fueron obtenidos por los estudiantes mediante un juego.
Algunos estudiantes no comprendían el valor numérico ni posicional de un número negativo.	Los estudiantes representan un valor negativo como una pérdida, mientras que el valor positivo lo representaban con una ganancia.

Algunos estudiantes mostraron apatía y desinterés frente a la clase.	Los estudiantes se mostraban interesados y motivados frente a la clase.
Los estudiantes creían que el signo resultante entre la suma de dos números enteros estaba determinado por la multiplicación entre los dos signos	Los estudiantes identificaron que entre la suma de dos valores, la respuesta estaría asociada al mayor, según fuese pérdida o ganancia. El signo del valor resultante del correspondería al signo del número de mayor valor absoluto.
Los estudiantes no lograban determinar el signo de un numero resultante entre la operación adición entre un numero entero positivo otro negativo.	Los estudiantes lograron sumar adecuadamente un número positivo y otro negativo mediante la representación de pérdida y ganancia.
Cuando los estudiantes asocian valores para obtener el resultado a operaciones de más de dos términos, no lo hacen de la manera adecuada, debido a las falencias mencionadas anteriormente.	Los estudiantes lograron identificar que cuando sumaban valores correspondientes a pérdidas iban a obtener una pérdida total a igual que con la ganancia, realizando asociaciones pertinentes para llegar un resultado correcto.

En este análisis, respecto a este primer plan de clase que se realizó a partir la actividad de aprendizaje "la canasta", se puede observar que en cuanto al aprendizaje respecto a la operación adición entre números enteros de distinto signo, se evidenciaron mejores resultados por parte de los estudiantes que utilizaron el material, en cuanto éste les ayudo a apropiarse de los valores numéricos mediante una puntación que obtenían simultáneamente avanzaban en un juego, en el cual para obtener una puntuación final debían sumar unos valores, los cuales constaban de números positivos y negativos, donde identificaron que los negativos correspondían a una pérdida en la puntuación total, mientras que los negativos correspondían a una ganancia. Respecto al cómo *razonan* los estudiantes se pudieron identificar tres categorías: *trabajo con premisas particulares*, *identificación de patrones y generalización*; los cuales se describen en los siguientes epígrafes y están definidos en el capítulo IV del presente trabajo, correspondiente al marco teórico.

4.1.1 Trabajo con premisas particulares.

Los estudiantes que utilizaron el material, luego de obtener todos los datos mediante la actividad de aprendizaje, procedieron a agrupar datos de dos en dos para realizar la respectiva operación matemática adición, sin tener en cuenta algún orden en específico, en algunos casos sumaban dos números positivos correspondientes a ganancias de puntuación, en otros casos sumaban dos números negativos correspondientes con pérdidas, y en un último caso sumaban un valor positivo y otro negativo, donde los estudiantes lograron identificar qué si la puntuación pérdida era mayor a la ganada el puntaje que obtendrían al final representaría una pérdida.

4.1.2 Identificación de patrones.

A medida que los estudiantes avanzaban haciendo las operaciones anteriormente mencionas, lograron identificar 3 tipos de patrones, previamente, vieron que al sumar dos números con valor positivo el resultado seguía siento positivo, igualmente cuando sumaban dos números negativos, el resultado continuaba siendo negativo. Con lo anterior los estudiantes procedieron a asociar todos los valores positivos correspondientes a la ganancia, para así obtener un valor positivo general; y por otra parte asociaron todos los valores negativos, obteniendo un valor negativo general que representaba a la pérdida total de puntos. Con el objeto de solamente realizar una última suma entre un valor positivo y otro negativo para así obtener la puntuación total.

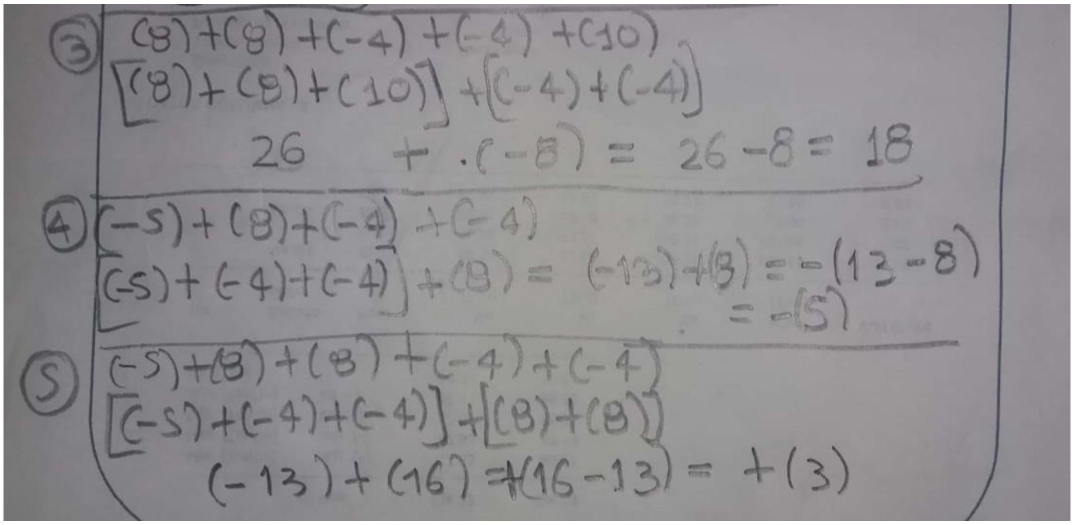


Ilustración 14. Operaciones matemáticas

Por otra parte, cuando sumaron dos números de distinto signo, vieron que no podían establecer el signo del resultado sin conocer los valores absolutos de cada número. Con lo que mediante iban resolviendo las sumas utilizando el concepto de perdida y ganancia, lograron observar que el signo resultante siempre correspondía al número que tuviese mayor valor absoluto, y que el valor absoluto del número resultante estaría determinado por la diferencia entre el mayor y menor valor absoluto de los números con los que estaba realizando la suma; con lo que pudieron inferir la siguiente generalización.

4.1.3 Generalización.

Los estudiantes a partir de su razonamiento y la relación que hacían entre lo que iban infiriendo a medida que iban avanzando en la actividad, llegaron a una generalización para resolver sumas entre números de igual signo y por otro lado números de diferente signo. Las cuales son correspondientes a los algoritmos para realizar la operación matemática adición entre dos números de igual y diferente signo. Inicialmente, para la adición de dos números iguales, determinaron que se debían sumar los valores absolutos de ambos números y que el signo del dicho resultado estaría determinado por el signo en común. Por otro lado, para la adición de dos números de diferente signo, se debe hacer la diferencia entre el número de mayor valor absoluto y el de menor valor absoluto, este resultado corresponderá al valor absoluto del número resultante, y cuyo signo estará determinado por el signo del sumando de mayor valor absoluto.

4.1.4 Apreciaciones.

Para concluir el análisis de los resultados referentes a este primer plan de clase, primeramente, desde el punto de vista del maestro, éste debe asumir una postura desde el PCK, donde tenga una claridad del contenido matemático a enseñar, un conocimiento del contexto estudiantil, donde el conozca a profundidad las falencias y ventajas del estudiante, para así ofrecerles una enseñanza mediante una estrategia que les ayude a apropiarse del conocimiento y aprender. En el caso de la actividad "la canasta" anteriormente mencionada, ésta le permitió a los estudiantes adueñarse de cada concepto matemático respecto al tema adición con números enteros, y mostrar gran mejoría en comparación a las clases donde se llevó a cabo este tema sin el uso de material; dando a conocer el tipo de razonamiento que hacían, relacionando toda la información mediante iba avanzando la actividad donde a partir de patrones que identificaron de forma particular llegaron a uno general, además de ello, algunos estudiantes expresaron gran agrado y motivación frente a la actividad.

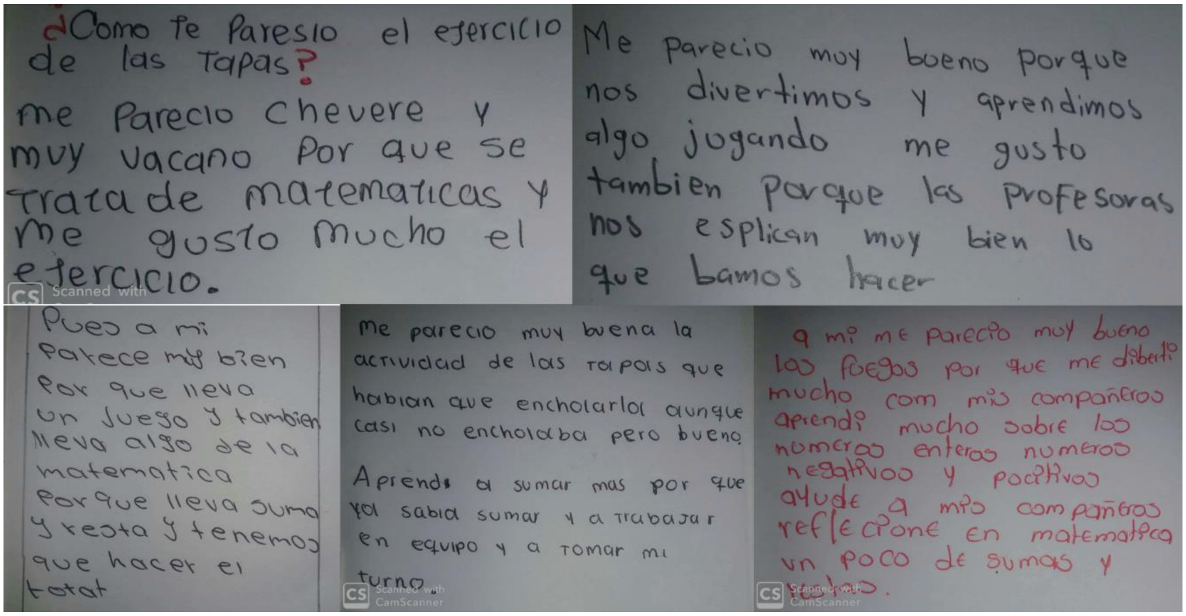


Ilustración 15. Apreciaciones de los estudiantes.

4.2 Plan de clase No. 2: Formando cubos

Después de que los estudiantes terminaron con ese proceso de armar cubos de igual dimensiones, como se describe en el capítulo anterior, procedieron a salir del aula, para así estar más cómodos con la utilización del material; allí se dividieron en dos equipos de trabajo, donde cada equipo reunió un total de 27 cubos de los anteriormente creados en el aula, esto con el propósito de a partir de la unión de estos cubitos crear uno o más cubos de mayor tamaño. Además, a cada estudiante se le hizo entrega de una fotocopia con una serie de preguntas y situaciones problema que tuvieron la intencionalidad de orientar al estudiante hacia una identificación de la fórmula para hallar el volumen de un cubo.

A continuación, se muestran las tablas: 5,4 y 6 con los resultados obtenidos por los estudiantes de forma general a partir de la actividad de aprendizaje aplicada. Para ello se toma una muestra de 7 estudiantes, nombrados desde E1 hasta E7; donde se mostrará cada una de las respuestas proporcionadas por ellos a las distintas situaciones para así luego realizar un análisis global referente a como influyó el uso del material en sus respuestas y visualizar el *razonamiento* que éstos tuvieron para dar respuesta a la pregunta final.

Tabla 4

Respuestas por parte los estudiantes preguntas 1-5

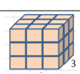
PREGUNTAS 1-5		
Preguntas		**Respuestas**
1. Identifique las dimensiones del cubo pequeño creado anteriormente, si se considera que el valor de una arista equivale a una unidad. Tenga en cuenta que el volumen de un prisma está determinado por la multiplicación entre las medidas del área de su base y su altura.	**E1**	Arista: 1, Área Cara: 1 y Volumen: 1
	E2	Arista: 1 U, Área Cara: 1 U y Volumen: 1 U
	E3	Arista: 1, Área Cara: 1x1 y Volumen: 1x1x1
	E4	Arista: 1U, Área Cara: 1 U^2 y Volumen: 1 U^3
	E5	Arista: 1, Área Cara: 1x1 y Volumen: 1x1x1
	E6	Arista: 1, Área Cara: 1x1 y Volumen: 1x1x1
	E7	Arista: 1, Área Cara: 1 y Volumen: 1
2. Con los 27 cubitos que se le entregó a su equipo de trabajo, determine las dimensiones del cubo máximo que podrían crear.	**E1**	Arista: 3, Área Cara: 9 y Volumen: 27
	E2	Arista: 3 U, Área Cara: 9 U y Volumen: 27 U
	E3	Arista: 3, Área Cara: 3X3 y Volumen:3X3X3
	E4	Arista: 3U, Área Cara: 9 U^2 yVolumen: $27U^3$
	E5	Arista: 3, Área Cara: 3x3 y Volumen: 3x3x3
	E6	Arista: 3, Área Cara: 3x3 y Volumen: 3x3x3
	E7	Arista: 3, Área Cara: 9 y Volumen: 27
3. ¿Podría construir otros cubos de menores dimensiones, cuales serian y cuantos cubitos sobrarían?	**E1**	Sí, 3 cubos y sobran 3 cubitos. Lado: 2, Área Cara: 4 y Volumen: 8
	E2	Sí podría, sería de 2 en los lados, y sobrarían 3 cubitos.
	E3	Sí, de dos dimensiones, 2 de lado, de ancho y de largo, hago 3 cubos de esos y me sobran 3 cubitos.
	E	3 cubos de 4 U^2 de area en sus caras, 8 U^3 de

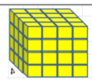
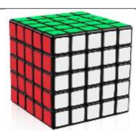
	4	volumen y me sobran 3 cubitos de 1 U^3
	E 5	Sí, tres con 2 cubitos de arista y sobran 3 cubitos.
	E 6	Claro que sí, 2 altura, ancho, largo, se puede hacer 3, así 2x2x2 y sobran 3 cubos.
	E 7	Sí, un cubo de 2 cubitos por cada lado serían 2x2xx2=8, puedo construir 3 cubos completos con esas medidas y me quedaron 3 cubos sin utilizar.
4. ¿Se podría formar un cubo compuesto por 25 cubitos? Justifique su respuesta.	**E 1**	No, porque los cubitos no alcanzan.
	E 2	No porque me faltarían 2 cubitos.
	E 3	No, no me alcanzan los cubitos, tengo que usar los 27.
	E 4	No, porque necesito completar $3U^3$ y me faltarían 2 cubitos.
	E 5	No, necesito 2 cubitos más.
	E 6	No me alcanza.
	E 7	No, porque de 25 cubos no queda completo.
5. ¿Para crear un cubo de arista igual a 4 unidades, cuantos cubos adicionales necesitaría tu equipo para formarlo?	**E 1**	Necesito 16x4.
	E 2	Tengo que tener en las caras 4x4, que son 16 cuadritos y 16x4 son todo el cubo y no sé cuánto da eso.
	E 3	Necesito 64 cubitos, tengo 27, así que me faltan 37.
	E 4	Necesitaría 4^3=4x4x4 = 16x4= 64
	E 5	Necesito 37 para ajustar 64 cubitos.
	E 6	Necesito 37 porque 4x4x4= 64 y 64-27= 37
	E 7	Tengo 27 cubos en total, porque 4x4x4= 64 y 64-27= 37, hacen falta 37 cubos para hacer un cubo de 4 lados.

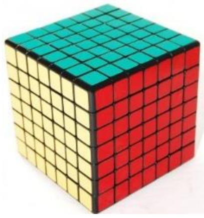
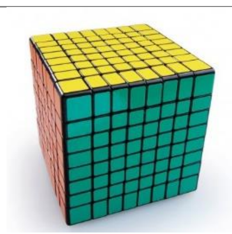
Con el objeto de que el estudiante identificara situaciones particulares en búsqueda de una generalización, se planteó una sexta situación la cual consistía en completar una tabla de acuerdo a la media de la arista un cubo, determinando el área y su volumen. La tabla se muestra a continuación con las respectivas respuestas brindadas por los siete estudiantes, donde a cada estudiante se le orienta para que asuma que cada división de una arista corresponde a una unidad.

Tabla 5

Pregunta 6 actividad de los cubos

Cubo	**Respuestas**			
		Medida de arista	**Área Cara**	**Volumen**
	**E 1**	1	1	1
	E 2	1 U	1 U	1 U
	E 3	1	1	1
	E 4	1 U	1 U^2	1 U^3
	E 5	1x1	1x1	1x1x1
	E 6	1	1	1
	E 7	1	1	1
	**E 1**	2	4	8
	E 2	2 U	4 U	8 U
	E 3	2	4	8
	E 4	2	4 U^2	8 U^3
	E 5	2	2x2	2x2x2
	E 6	2	4	8
	E 7	2	4	8
	**E 1**	3	9	27
	E 2	3 U	9 U	27 U
	E 3	3	9	27
	E	3	9 U^2	27 U^3

	4			
	E5	3	3x3	3x3x3
	E6	3	9	27
	E7	3	9	27
	E1	4	16	64
	E2	4 U	16 U	16X4 U
	E3	4	16	64
	E4	4	16 U^2	64 U^3
	E5	4	4x4	4x4x4
	E6	4	16	64
	E7	4	16	64
	E1	5	25	125
	E2	5 U	25 U	25X5 U
	E3	5	25	125
	E4	5	25 U^2	125 U^3
	E5	5	5x5	5x5x5
	E6	5	25	125
	E7	5	25	125
	E1	6	36	216
	E2	6 U	36 U	36X6 U
	E3	6	36	216
	E4	6	36 U^2	216 U^3
	E5	6	6X6	6x6x6
	E	6	36	216

	6			
	E7	6	36	216
	E1	7	49	343
	E2	7 U	49 U	49X7 U
	E3	7	49	343
	E4	7	49 U^2	343 U^3
	E5	7	7x7	7x7x7
	E6	7	49	343
	E7	7	49	343
	E1	8	64	512
	E2	8 U	64 U	64X8 U
	E3	8	64	512
	E4	8	64 U^2	512 U^3
	E5	8	8x8	8x8x8
	E6	8	64	512
	E7	8	64	512
	E1	9	81	729
	E2	9 U	81 U	81X9 U
	E3	9	81	729
	E4	9	81 U^2	729 U^3
	E5	9	9x9	9x9x9
	E6	9	81	729
	E7	9	81	729
	E	10	100	1000

	1			
	E2	10 U	100 U	1000 U
	E3	10	100	1000
	E4	10	100 U^2	1000 U^3
	E5	10	10x10	10x10x10
	E6	10	100	1000
	E7	10	100	1000

Por último, se plantea una última pregunta para visualizar el razonamiento que tuvieron los estudiantes a partir los procedimientos realizados para dar respuesta a las anteriores preguntas.

Tabla 6

Pregunta 7 actividad de los cubos

7. ¿Qué relación logras identificar luego de completar la tabla anterior?	**E1**	**Que el área por la arista me da el volumen, como si multiplicara la arista tres veces.**
	E2	Que el tamaño del lado se multiplica dos veces para llegar al área y tres para llegar al volumen.
	E3	Que para el área multiplico dos veces el lado, LXL=L^2 , y para el volumen 3 veces, LxLxL=L^3
	E4	Podemos adivinar el volumen de cualquier cubo solo sabiendo la medida del lado multiplicándolo 3 veces.
	E5	Para el área multiplico dos veces y para el volumen 3.
	E6	Para calcular el volumen multiplico 3 veces los lados, un cubo de 2x2x2 su volumen es 8.
	E7	Para el área seria dos veces LXL= L^2 y para el volumen seria 3 veces LxLxL=L^3.

A partir de los resultados que se muestran anteriormente para la actividad de aprendizaje correspondiente al plan de clase N°2, donde el maestro buscó que estudiante se apropiara del tema volumen de un cubo mediante el uso de material concreto, podemos realizar el siguiente análisis respecto a la forma de razonar del estudiante, con base en las siguientes categorías, las cuales están descritas en el capítulo IV en el marco teórico.

4.2.1 Trabajo con premisas particulares.

En el desarrollo del plan de clase se visualiza como el estudiante procedió a identificar en distintos momentos las dimensiones de distintos cubos de forma particular, desde la identificación del cubo que creó con material concreto asumiendo que su respetivo valor equivalía a la unidad cúbica, como con la identificación de dimensiones de otros cubos que fueron creados o supuestos a partir de éste.

4.2.2 Identificación de patrones.

Por otra parte cuando el estudiante empieza a hacerse suposiciones sobre la posibilidad de crear un cubo con 25 cubitos pequeños, él empieza a reflexionar sobre la relación entre el número de la medida de un lado referente a los cubitos pequeños y el total que necesitará para completar ese cubo mayor; continuamente cuando el estudiante procede a comenzar a completar la tabla, puede observar una relación e identificación de patrones entre la mediada de una arista, el área de una cara y el volumen, lo cual lo asemeja a partir del diseño de la tabla, la cual tiene esta intencionalidad por parte del maestro.

4.2.3 Generalización.

Mediante el estudiante avanza llenando la tabla va identificando que el número correspondiente a la medida de la arista de cada cubo se debe multiplicar dos veces para obtener el valor del área de una cara del cubo, lo que corresponde a un cuadrado como figura geométrica y a su vez a un número cuadrado al multiplicarse por sí mismo. Consecutivamente para encontrar el valor correspondiente a la medida del volumen del cubo, se da cuenta que corresponde al multiplicar el valor del área de la cara por el valor de la arista, lo que en otra forma es lo mismo que multiplicar el valor de la arista tres veces, encontrando así un número cúbico que representa a la figura geométrica cubo, tal como se muestra en la tabla 6 en las respuestas que plantean los estudiantes para la pregunta 7.

4.2.4 Apreciaciones.

A partir de lo anterior, la mayoría de estudiantes con ayuda del material, algunos conceptos previos que se explicaron en clases anteriores y la actividad de aprendizaje que sirvió como guía, logro identificar la formula general para hallar el área de un cuadrado y el volumen de un cubo mediante un razonamiento inductivo que promovía las guías, identificando cada uno de los elementos que conforman un cubo mediante aquel material tangible.

4.3 Plan de clases No. 3: Dividiendo los colores

El desarrollo de plan de clase No. 3 se diseñó con el objeto de crear un material de apoyo con los estudiantes para que éste sirviese de enseñanza de varios conceptos matemáticos y a su vez fortalecer el razonamiento inductivo mediante la manipulación del este material durante la actividad de aprendizaje. Como primero se realizó el material de apoyo con materiales fáciles de adquirir como lo son: cartón paja, vinilos, pinceles y marcadores; con ellos se pretendió hacer algo similar a las regletas de Cuisenaire las cuales han sido consideradas a lo largo de la historia como un material estructurado, especialmente pensado para la enseñanza de las matemáticas.

La imagen 6 y la tabla 7 indican que número representaba cada color de las regletas de Cuisenaire, además los estudiantes debían hacer por cada color de la regleta cierto número indicado de ellas como lo muestra la tabla 8 y éstas eran las necesarias para desarrollar de la actividad.

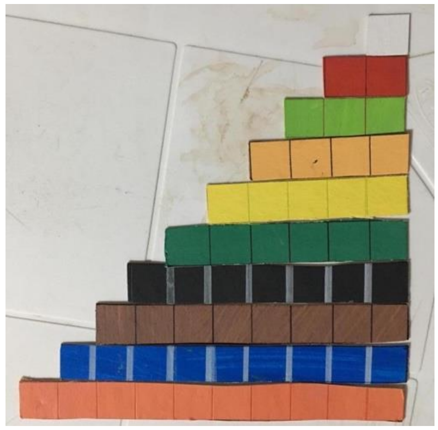


Imagen 6. Regletas de Cuisenaire

Tabla 7.

Regletas de Cuisenaire

Color	Número representativo
Blanco	1
Rojo	2
Verde claro	3
Naranjado claro	4
Amarillo	5
Verde oscuro	6
Negro	7
Café	8
Azul	9
Naranjado oscuro	10

Tabla 8.

Número de regletas por color

Color	Número de regletas
Blanco	10
Rojo	10
Verde claro	7
Naranjado claro	5
Amarillo	4
Verde oscuro	3
Negro	3
Café	3
Azul	3
Naranjado oscuro	2

Después de construir las regletas de Cuisenaire y apoyados con la guía del maestro, se les proporcionó una hoja con una serie de preguntas para abordar el tema de la división con números enteros, de este modo cada pregunta iba encaminando al estudiante a una correcta interpretación del algoritmo de la división y así se lograse un razonamiento inductivo conforme el estudiante avanzaba utilizando el material para dar respuesta ajustada a cada pregunta.

Para el análisis de los resultados dados por los estudiantes en estos tres últimos planes de clase, se hizo conforme a unas tablas que contiene las preguntas de cada plan de clase y las respuestas de las estudiantes escritas tal cual como plasmaron su idea en la guía; se toma la muestra de siete estudiantes correspondientes a E1 como Estudiante 1, E2 como Estudiante 2, E3 como Estudiante 3, entre otros y así a llegar a E7 como Estudiante 7.

Las categorías de análisis de los resultados se elaboraron con base al modelo de Pólya que consta de unos pasos a seguir en el proceso de razonamiento inductivo: *Trabajo con premisas particulares, identificación de patrones y generalización.*

La tabla 9 contiene las respuestas de los estudiantes dadas en el plan de clase No. 3, en este caso E1 corresponde a las respuestas de dos estudiantes debido que en este plan de clase se trabajó en grupos, igual ocurre con E2, E3, E4, E5, E6 y E7.

Tabla 9.

Respuestas de los estudiantes - Plan de clase No. 3

Pregunta	Respuestas	
1. Compara la regleta blanca con la roja. ¿Qué puedes decir sobre ello?	**E1**	Que la roja es más grande que la blanca
	E2	Que la blanca es más pequeña que la roja
	E3	Que la roja es el doble de larga que la blanca
	E4	Se puede decir que la roja tiene más cantidad que la blanca porque una es más grande que la otra
	E5	Que la roja tiene un cuadro más Que la roja es más grande que la blanca
	E6	Que la blanca vale por una unidad y la roja vale por 2
	E7	Que la roja es más grande que la blanca y que

		la roja es más oscura que el blanco
2. Compara la regleta blanca con la amarilla. ¿Qué interpretación haces sobre lo anterior?	**E1**	Que la amarilla es más grande y la blanca es diminutiva a comparación con la pequeña
	E2	La diferencia de la amarilla con la blanca es que la amarilla tiene 5 cubitos y la blanca solo tiene un cubito
	E3	Que la amarilla es 5 veces la blanca
	E4	Se puede decir que la amarilla es más grande que la blanca por 4 cubitos
	E5	Que la amarilla tiene 4 cuadros más que la blanca Que la amarilla es más grande que la blanca
	E6	Que una amarilla vale por 5
	E7	Eso quiere decir que $5 \div 1=5$
3. ¿Cuántas veces cabe la regleta roja en la de color café? ¿De qué manera podrías describir este suceso numéricamente?	**E1**	Cabe 4 veces la regleta roja
	E2	Las veces que cabe el rojo en el café son 4 veces, o sea $8 \div 2$, cociente 4, residuo 0
	E3	Caben 4, entonces 2x4 =8
	E4	Se puede decir que el color rojo cabe 4 veces
	E5	La roja cabe 4 veces en la café De la manera en que nosotras la describimos es dividiendo $8 \div 2$, cociente 4, residuo 0
	E6	La café equivale por 4 rojas
	E7	Eso quiere decir que $8 \div 2=4$
4. ¿Cuántas regletas rojas caben en la regleta de color naranjado oscuro? ¿Con qué división numérica puedes relacionar este hecho?	**E1**	Cabe 2 veces porque $4 \div 2 = 2$
	E2	Las veces que cabe el rojo en el naranjado oscuro es 5 veces o sea $10 \div 2$, cociente 5, residuo 0
	E3	5, $10 \div 2$
	E4	Se puede decir que el color rojo cabe 5 veces en el color naranja oscuro
	E5	La regleta roja cabe 5 veces en la naranjada $10 \div 2$, cociente 5, residuo 0
	E6	La naranjada vale por 5 rojas
	E7	Eso quiere decir que $10 \div 2 =5$
5. Ahora observa cuantas regletas de color verde claro caben en la regleta naranja oscuro. **a) ¿Estas regletas pueden cubrirla completamente sin**	**E1**	a. Cabe 3 veces y sobra 1 b. Queda sin cubrir 1, sobra 1 c. $10 \div 3$, cociente 3, residuo 1
	E2	Las veces que cabe el verde en el naranjado oscuro son 3 veces y queda sobrando 1.

excederse en tamaño? **b) ¿Cuántas unidades quedan sin cubrir y que representan?** **c) ¿Con cuál división de forma numérica relacionarías este hecho?**		a. está regleta no se puede tapar completamente o sea que la respuesta es uno b. quedan sin cubrir una unidad c. 10 ÷ 3, cociente 3 , residuo 1
	E3	a. No b. 1 que es el sobrante c. 10 ÷ 3, cociente 3 , residuo 1
	E4	Se puede decir que en la regleta naranjada caben 3 regletas verdes y sobra una. a. La regleta verde no cubre y sobra un cuadro de la regleta naranjada b. En este caso sobra 1 una porque todas dos miden diferente c. 10 ÷ 3=3, el residuo es 1
	E5	a. no b. Uno que es el residuo c. 10÷3, cociente 3, residuo
	E6	La regleta naranjada equivale por 3 verdes y sobra una a. no b. 1 c. 10÷3, cociente 3, residuo 1,
	E7	a. no, porque sobra 1 b. queda sin cubrir 1 c. 10÷3 = 3, residuo 1,
6. Haz el procedimiento anterior tratando de cubrir la naranjada oscura, con la naranja más clara, sin exceder el tamaño de la oscura. Responde las mismas preguntas del inciso anterior.	**E1**	Caben 2 y sobra 2
	E2	Quedan 2 unidades 10 ÷ 4, cociente 2 , residuo 2
	E3	a. No b. 2 c. 10 ÷ 4
	E4	10 ÷ 4, cociente 2, residuo 2 porque cabe dos veces la regleta naranjada clara
	E5	10÷2, cociente 2, residuo 2
	E6	La naranjada equivale por dos claras, sobra dos
	E7	a. no podemos porque sobran 2 b. 2 c. 10÷4 = 2 y sobran 2
7. Realiza el mismo procedimiento anterior con la pieza amarilla, tratando de cubrir la naranjada	**E1**	Caben 2 y no sobran
	E2	Quedan 2 lo mismo, no sobra ninguna unidad
	E3	2, 10 ÷ 5

oscura	**E4**	Se cubre completamente porque la regleta amarilla cubre toda la naranjada 10 ÷ 5, cociente 2, residuo 0
	E5	Quedan lo mismo porque no sobra ninguna de la fila naranjada
	E6	La naranjada equivale por dos amarillas
	E7	10÷5 = 2 y no sobra
8. Si pudieras añadir solo una pieza a la naranjada oscura, para formar una división homogénea entre la regleta naranja oscura y la verde oscuro ¿qué pieza añadirías y por qué?	**E1**	Caben 2 pero con adición de la regleta roja para hacer la división homogénea
	E2	Le añadimos la roja que es 2 para que se convirtiera la división 12 ÷ 6, cociente 2 , residuo 0
	E3	La naranja clara porque así no sobra ni se pasa
	E4	Añadiría la naranjada clara porque me sobra 4 cuadros y la naranjada clara tiene 4 cuadritos
	E5	La roja porque vale dos y la naranjada vale 10 12÷6, cociente 2, residuo 0
	E6	Una roja para añadir
	E7	Quiere decir que 10÷10 = 1 y no sobra
9. Arma una regleta larga que mida 18 unidades con el menor número de regletas posible. Luego cubre esta con regletas de igual tamaño, de modo que no quede residuo. **a) ¿Cuántas opciones posibles hay para cubrir las piezas?** **b) ¿Qué valores tendría cada una de las piezas de las posibles opciones?** **c) ¿Qué relación encuentras entre estos valores y el valor del largo que queríamos dividir?**	**E1**	a. solo hay 4 opciones para cubrir la regleta b. blanca 1, azules 9, rojas 2 y verdes 3 c. que uno tiene que elegir los opciones entre estos valores
	E2	a. 3 formas. b. Se puede con la 9 que es la azul, con la de 2 que es la roja, con la de 6 que es verde y con la de 1 que es la blanca, con tres también c. Que todos los valores son divisores de 18
	E3	a. 18 blancas, 9 rojas, 6 verdes claro, 3 verdes oscuros, 2 azules. b. 18 ÷ 1, 18 ÷ 2, 18 ÷ 3, 18 ÷6 y 18 ÷ 9 c. Por ejemplo, si junto 18 blancas, 18 es múltiplo
	E4	a. 5 opciones hay para cubrir las piezas b. roja= 2, blanca =1, verde= 3, azul=9, verde oscuro=6 c. Porque hay una relación entre multiplicación y la división
	E5	a. Cinco opciones b. 9, 2 ,3 ,6 , 1

		c. que esos valores son divisores
	E6	a. 2 azules, 18 blancas, 6 verdes claras, 3 verdes oscuras, 9 rojas b. 3, 1, 2, 9, 6 c. 18 es múltiplo de ellos
	E7	a. hay 5 opciones b. 1,2,3,9,6 c. porque hay una relación entre la multiplicación y la división para resolver el problema
10. ¿Qué relación debe haber entre el dividendo y el divisor en una división para que el residuo siempre sea cero?	**E1**	El dividendo debe ser múltiplo del divisor
	E2	Que los dividendos deben ser múltiplos del divisor
	E3	Que el divisor por otro número o multiplicado por otro número de la misma cantidad que el dividendo
	E4	Hay que multiplicar y dividir La relación que hay entre dividendo es múltiplo del divisor
	E5	Que el dividendo sea múltiplo del divisor
	E6	El dividendo tiene que ser múltiplo del divisor
	E7	Que sean múltiplos del divisor

4.3.1 Trabajo con premisas particulares.

Como se observa en la tabla, en la pregunta 1 todos los estudiantes en sus respuestas se basaron solo en el tamaño o dimensión de las regletas, pues se infiere que para ellos ésta fue la única relación que podían registrar y observar, ya que sus respuestas establecían que una era más grande que a otra o viceversa. En la pregunta 2 la mayoría sigue respondiendo de igual manera, solo se enfocan en la dimensión de las regletas, aunque E3 comienza a realizar un razonamiento un poco más acertado hacia el objetivo del material de apoyo y qué es lo que se pretende enseñar por medio de él, pues dada su respuesta, como se observa en la tabla comienza a referirse que una regleta "*x*" es tantas veces una regleta "*y*", con ello acuñamos la apreciación de una relación con la división. Por el contrario de E7 ya comienza a descubrir la relación de las regletas con la división. Pero fue sólo a partir de la pregunta 3 donde se empieza a interrogar al estudiante sobre cuántas veces cabe una regleta "*x*" en una regleta "*y*", es aquí donde varios estudiantes inician a observar la relación entre el material de apoyo y división en números enteros.

4.3.2 Identificación de Patrones.

A partir de la pregunta 3 se observa que algunos estudiantes empezaron a representar la respuesta con una división y en las siguientes preguntas por medio de la socializaciones con ellos y entrevista que se les realizaba con base a las preguntas plantadas en la guía se puede notar que ya relacionaban el residuo de la división con los cuadritos que no podían tapar en la regleta y el cociente como las veces que cabe *"x"* regleta en otra como se muestra sus respuestas en la tabla 9 y en las Ilustraciones 16 y 17.

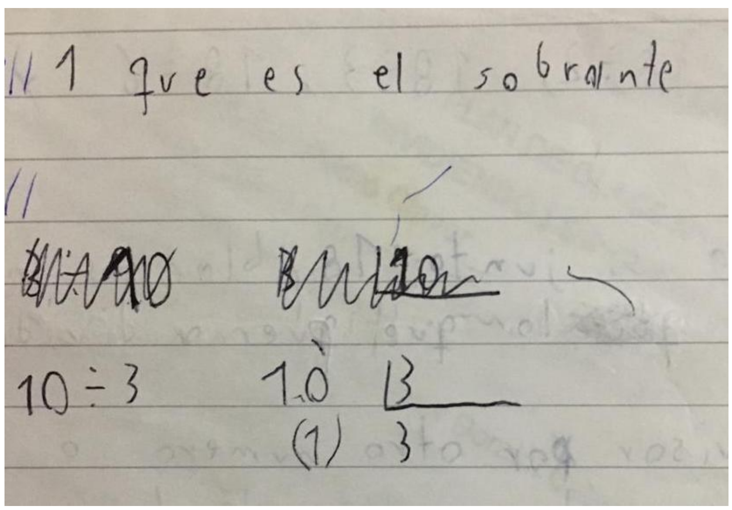


Ilustración 16. Respuesta de estudiante E3

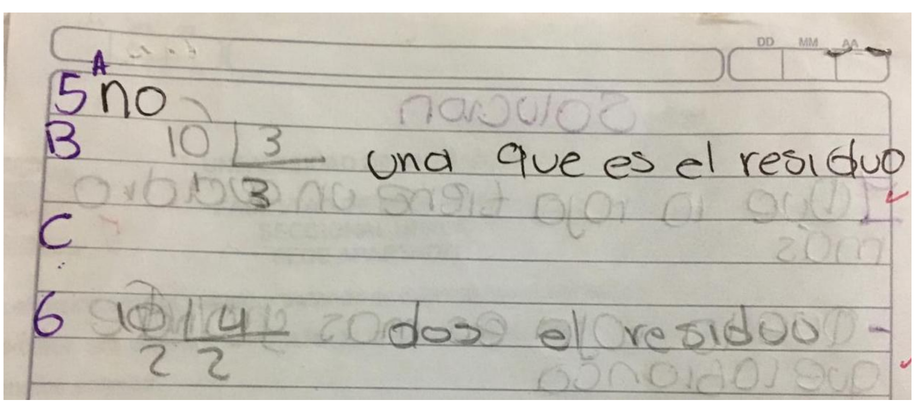


Ilustración 17. Respuesta de estudiante E5

Además, es necesario mencionar que en la pregunta 8 (ver tabla 9) hubo tres equipos E3, E4 y E7 donde dieron con una respuesta un poco diferente pero igual de valedera que las otras; estos estudiantes también se evidencian que razonaron pues se pedía: "*8. Si pudieras añadir solo una pieza a la naranjada oscuro, para formar una división homogénea entre la regleta naranja oscura y la verde oscuro. ¿Qué pieza añadirías y por qué?".* Considerando que la naranjada oscura tiene un valor de 10 y la verde oscura un valor de 6; para añadir un valor que este dé un división homogénea seria agregar la regleta roja que tenía un valor de 2 así como los demás equipos respondieron en sus guías, pero estos tres equipo hallaron que también podían añadir la regleta naranjada clara que tenía un valor de 4 y así dando como resultado $10 \div 10 = 1$ obteniendo una división homogénea. Aunque dieron una respuesta diferente igual se evidencia que hicieron un buen razonamiento de la situación problema.

4.3.3 Generalización.

De los resultados obtenidos y toda la interacción que se logró con los estudiantes durante la ejecución del plan de clases podemos inferir que la mayoría alcanzó a interpretar y razonar sobre lo que se pretendía con el material de apoyo, aprender el algoritmo de la división y que representa cada uno de sus elementos: dividendo, divisor, el cociente y el residuo en situaciones problemas. Además, se logra ver en los resultados de los estudiantes sobre la pregunta 11 que comprendieron el concepto de múltiplo y divisores, porque se puede conocer que expresan la misma idea general sobre la división homogénea: es necesario que el dividendo sea múltiplo del divisor, lo cual esto es un gran paso ya que en clases varios estudiantes mostraban confusión entre estos dos conceptos.

4.3.4 Apreciaciones.

El desarrollo del plan de clase No. 3 fue una actividad que permitió al estudiante un aprendizaje desde el inicio, desde la construcción del material de apoyo hasta lo que puede brindarle este material de apoyo en cuanto al conocimiento de conceptos matemáticos. Pero también el maestro desde su conocimiento es quien se piensa como puede ser implementada una estrategia en el aula de clase; por ello el PCK es el tema más importante en la formación del maestro según Shulman (1987), ya que éste permite al maestro direccionar su plan de clase hacia lo que pretenda en el estudiante y para este trabajo de investigación es el fortalecimiento del razonamiento inductivo por medio de materiales de apoyo.

4.4 Plan de clases No. 4: Construyendo equivalencias

En el plan de clase No. 4 permitió aprovechar un poco más los beneficios que brindan las regletas de Cuisenaire, por ello se diseñó un plan de clase guiado para enseñar por medio de las regletas los números racionales y un tema en específico: las fracciones equivalentes.

Para darle desarrollo al plan de clase No. 4 se proporcionó a cada estudiante una guía, la cual contenía unas preguntas que involucraban el trabajo directo con las regletas de Cuisenaire.

El diseño del plan de clase fue diseñado y abordado en el aula obedeciendo a los objetivos de este trabajo de investigación, por ello desde el PCK del maestro se pretendía que dicho material de apoyo ayudase a los estudiantes a facilitar el aprendizaje de número racional, el significado de las fracciones construidas y como éstas eran equivalentes unas a otras, obteniendo como generalización que todas ellas podrían ser representadas con un número racional común.

A continuación, la tabla 10 muestras las respuestas dadas de siete estudiantes en el desarrollo de la clase con ayuda del material de apoyo las regletas de Cuisenaire. Las tablas de respuestas en los planes de clases No. 4 y No. 5 cada E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E7, pertenece a un sólo estudiante, ya que en estos planes de clases cada estudiante trabajo de manera individual en la guía de aprendizaje, pero igualmente hubo socialización y entrevistas en aula de aprendizaje.

Tabla 10.

Respuestas de los estudiantes - Plan de clase No 4

Preguntas	Respuestas	
1. Une dos regletas, una naranjada oscura y una café. Ahora con las regletas blancas cubre 9 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	9/18
	E2	9/18
	E3	9/18
	E4	9/18
	E5	9/18
	E6	9/18
	E7	9/18
2. Une una regleta naranjada oscura y una verde oscura. Ahora cubre con las regletas blancas 8 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	8/16
	E2	8/16
	E3	8/16
	E4	8/16
	E5	8/16
	E6	8/16
	E7	8/16
3. Une dos regletas negras, Ahora cubre con las regletas blancas 7 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	7/14
	E2	7/14
	E3	7/14
	E4	7/14
	E5	7/14
	E6	7/14
	E7	7/14
4. Une dos regletas verdes oscuras. Ahora cubre con las regletas blancas 6 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	6/12
	E2	6/12
	E3	6/12
	E4	6/12
	E5	6/12
	E6	6/12
	E7	6/12
5. Une dos regletas amarillas. Ahora cubre con las regletas blancas 5 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	5/10
	E2	5/10
	E3	5/10
	E4	5/10
	E5	5/10
	E6	5/10
	E7	5/10
6. Cubre una regleta café con las regletas blancas 4 unidades. ¿Qué	**E1**	4/8
	E2	4/8

	número racional acabas de formar?	**E3**	4/8
		E4	4/8
		E5	4/8
		E6	4/8
		E7	4/8
7.	**Cubre una regleta verde oscuro con las regletas blancas 3 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?**	**E1**	3/6
		E2	3/6
		E3	3/6
		E4	3/6
		E5	3/6
		E6	3/6
		E7	3/6
8.	**Cubre una regleta naranjada claro con las regletas blancas 2 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?**	**E1**	2/4
		E2	2/4
		E3	2/4
		E4	2/4
		E5	2/4
		E6	2/4
		E7	2/4
9.	**Cubre una regleta roja con las regletas blancas 1 unidad. ¿Qué número racional acabas de formar?**	**E1**	½
		E2	½
		E3	½
		E4	½
		E5	½
		E6	½
		E7	½
10.	**¿Qué relación puedes observar en las construcciones realizadas anteriormente?**	**E1**	Que siempre las que tapas son las mitad siempre
		E2	Que puede cambiar por otros números que da la misma cantidad Todos se puede representar con un medio
		E3	Que en todas se cubre la mitad Todas las raciones son equivalentes
		E4	Observo una relación muy buena ya que con las regletas los entiendo mejor, y que cuando cuento los fraccionarios encuentro la mitad
		E5	En que es muy bueno para uno y que estamos en los fraccionarios Todas las construcciones se cubren la mitad.
		E6	Los que tapaba por ejemplo 5/10 era la mitad
		E7	Todas quedan la mitad
11.	**¿Se puede representar todas esas construcciones con un número**	**E1**	Siempre con la fracción 1/2
		E2	Si gráficamente ejemplo, tengo una chocolatina

racional en común? ¿por qué?		de 4 y me como 2 es igual a 2/4 = 1/2
	E3	Si porque en todas se cubre la mitad, entonces en todas puede ser un medio
	E4	Si porque sería igual a 1/2
	E5	Sí, porque si tenemos 2 rojas y cubrimos con 2 blancas formamos 2/4
	E6	Se puede tener un número racional un medio
	E7	Si, se puede representar con un medio

4.4.1 Trabajo con premisas particulares.

Los estudiantes antes de iniciar la actividad de aprendizaje ya poseían un conocimiento previo sobre la representación de números racionales, conocían muy bien cuando se habla sobre el numerador y el denominador y que representa cada uno de ellos en x situaciones, por ellos en las preguntas de la 1 al 9 la desarrollaron fácil y rápido, ya que todos como se muestra en la tabla 10 dieron con la repuestas correcta sobre el número correspondiente a la situación que se presentaba con las regletas de Cuisenaire. El papel del maestro fue como guía en estas primeras nueve preguntas, donde los estudiantes solo se dirigían al maestro para corroborar un poco más sus respuestas.

4.4.2 Identificación de patrones.

Algunos estudiantes desde la pregunta número 4 expresaron entre ellos que el numerador iba en orden descendente y el denominador también, sólo que en el denominador era de dos en dos y en números pares; pero a partir de la pregunta 10 se les pidió hacer un análisis más reflexivo y observaran detalladamente las construcciones que habían realizado con las regletas de Cuisenaire, concluyendo todos los estudiantes en común que se cubría la mitad de las regletas de determinado color. Ellos hicieron esta inferencia porque observaron detenidamente cada una de las construcciones hechas en los puntos anteriores, como se muestra en la imagen 7 y 8.

Imagen 7. Construcción de las regletas 1/2

Imagen 8. Construcción de las regletas 1/2

4.4.3 Generalización.

Los resultados obtenidos en la pregunta 11 fueron muy acertados ya que en sus respuestas se puede observar en la tabla 10 que lograron la generalización del conocimiento en ese tema en específico; encontraron que todas esas fracciones construidas con la regletas de Cuisenaire se podían representar con un numero en común 1/2 y éste es equivalente a todas ellas. Incluso un estudiante se evidencia un pequeño borrador en su guía sobre la equivalencia de fracciones como se muestra en la Ilustración 18.

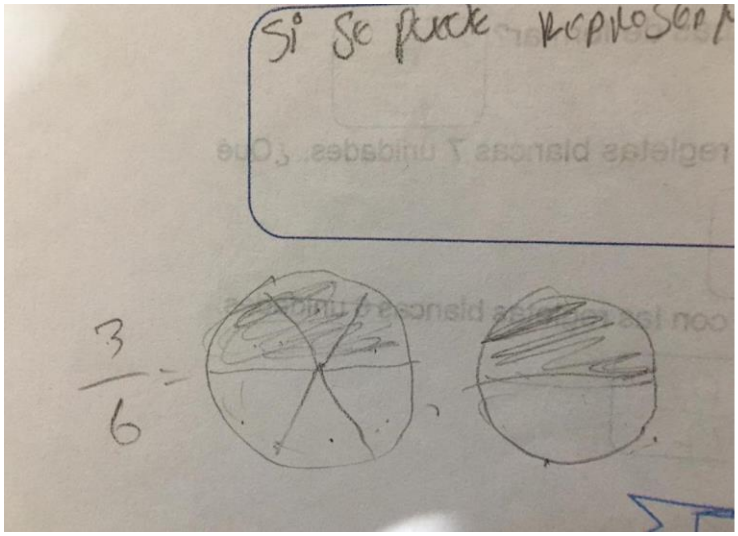


Ilustración 18. Representación de un estudiante sobre las fracciones equivalentes

4.5 Plan de clases No. 5: 1/4 de regleta

Como se evidenció en el plan de clases anterior las regletas de Cuisenaire ayudaron en gran medida a lograr la compresión en los estudiantes sobre las equivalencias de los números racionales y en este plan de clase No. 5 acata también a la misma finalidad, por ello se permite trabajar nuevamente con este material de apoyo las regletas de Cuisenaire.

El plan de clases No. 5 es una complementación del plan de clases No. 4 con la intención que el estudiante obtenga un mayor y buen entendimiento del concepto de equivalencia entre fracciones, pero esta vez con el número racional 1/4, así que las preguntas fueron orientadas a éste conocimiento.

La tabla 11 muestra las respuestas de siete estudiantes desarrolladas en la actividad de aprendizaje.

Tabla 11.

Respuestas de los estudiantes - Plan de clase No 5

Preguntas	Respuestas

1. Une dos regletas color naranjado oscuro. Ahora con las regletas blancas cubre 5 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	5/20
	E2	5/20
	E3	5/20
	E4	5/20
	E5	5/20
	E6	5/20
	E7	5/20
2. Une dos regletas color café. Ahora cubre con las regletas blancas 4 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	4/16
	E2	4/16
	E3	4/16
	E4	4/16
	E5	4/16
	E6	4/16
	E7	4/16
3. Une dos regletas color verde oscuro. Ahora cubre con las regletas blancas 3 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	3/12
	E2	3/12
	E3	3/12
	E4	3/12
	E5	3/12
	E6	3/12
	E7	3/12
4. Toma una regleta color café. Ahora cubre con las regletas blancas 2 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	2/8
	E2	2/8
	E3	2/8
	E4	2/8
	E5	2/8
	E6	2/8
	E7	2/8
5. Toma una regleta color naranjado claro. Ahora cubre con las regletas blancas 1 unidad. ¿Qué número racional acabas de formar?	**E1**	1/4
	E2	1/4
	E3	1/4
	E4	1/4
	E5	1/4
	E6	1/4
	E7	1/4
6. ¿Qué relación puedes observar en las construcciones realizadas anteriormente?	**E1**	Que de todos se está tomando un cuarto 1/4
	E2	Que se forman las mismas partes equivalentes en cada una
	E3	Es la cuarta parte de todo en total
	E4	La relación es que todas son un cuarto y equivalentes
	E5	Son equivalentes
	E6	La relación que puedo observar en las

			construcciones que son equivalentes
		E7	La relación es que siempre es un 1/4 y son equivalentes
7.	**¿Se puede representar todas esas construcciones con un número racional en común? ¿por qué?**	**E1**	Que se está tomando un cuarto y todas son equivalentes
		E2	Si porque podemos representar el numero como un 1/4
		E3	Sí, porque están tomando la cuarta parte
		E4	1/4
		E5	Sí, porque son equivalentes y se representan como un cuarto
		E6	Si con el numero común 1/4
		E7	Sí, porque todas son equivalentes
8.	**¿Cuáles otros números racionales consideras que son equivalentes a 1/4?**	**E1**	1/4, 2/8, 3/12, 4/16, 5/20
		E2	1/4, 2/8, 3/12, 4/16, 5/20
		E3	5/20, 4/16, 3/12, 2/8, 1/4
		E4	5/20, 4/16, 3/12, 2/8, 1/4
		E5	2/8, 3/12, 4/16 y 5/20
		E6	El numero racional que considero es 2/8, 3/12, 4/16 y 5/20
		E7	5/20, 4/16, 3/12, 2/8, 1/4
9.	**Si María compra 10 galletas y cada una la parte en 4 partes iguales y las echa en una bolsa, luego empieza a repartirlas a sus amigos. Si cada uno le toca una porción de los trozos que están en la bolsa. ¿A qué número racional equivale el trozo de galleta? Explica tu respuesta.**	**E1**	1/4 porque ellos están comiendo un trozo de las 4 que partió María
		E2	1/4 porque ellos se están comiendo 1 trozo de cuatro partes de la galleta
		E3	Cada pedazo equivale un 1/4
		E4	A cada uno le toca partes iguales 1/4
		E5	1/4 porque la galleta se rompe en cuatro trozos cada galleta y le da una a cada uno
		E6	1/4 porque cada 4 trozos le toco a cada uno de sus amigos y porque una galleta la parte en 4.
		E7	Lo que vamos a sacar 1/4 1/4 cada trozo equivale

4.5.1 Trabajo con premisas particulares.

Los estudiantes en esta actividad de aprendizaje se encontraban muy familiarizados con el material de apoyo por ello se encontraban muy cómodos trabajando con las regletas de Cuisenaire para darle respuestas a las preguntas. Los estudiantes de la pregunta 1 a 5 razonaron rápido, realizando construcciones de las situaciones planteadas en la guía muy acertadas y a medida que iban avanzando, observaban qué les pretendía mostrar las regletas de Cuisenaire; recordaban bien que el plan de clase anterior representó la fracción 1/2, pero en este caso la pista mayor fue el título de este plan de clase.

4.5.2 Identificación de patrones.

Los estudiantes no tardaron mucho en observar y comentar entre ellos que las regletas en todas cubrían 1/4 del total de la regleta (ver imagen 9, 10 y 11) e inmediatamente identificaron que se trata de otra equivalencia de fracciones. Incluso en la Ilustración 19 se muestra como un estudiante hace su equivalencia entre dos fracciones con círculo y en la Ilustración 20 el E4 en la pregunta 9, realizo el dibujo de la galleta para encontrar la respuesta a la situación problema.

Imagen 9. Construcción de las regletas 1/4

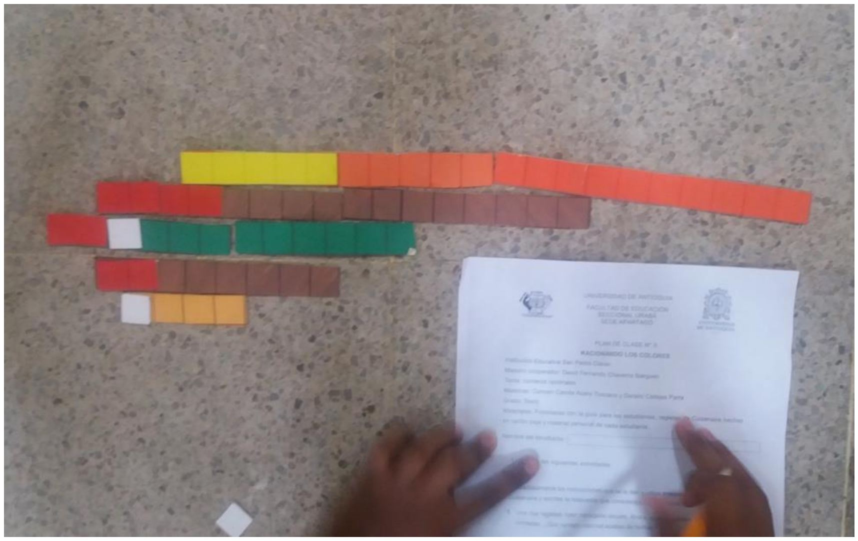


Imagen 10. Construcción de las regletas 1/4

Imagen 11. Construcción de las regletas 1/4

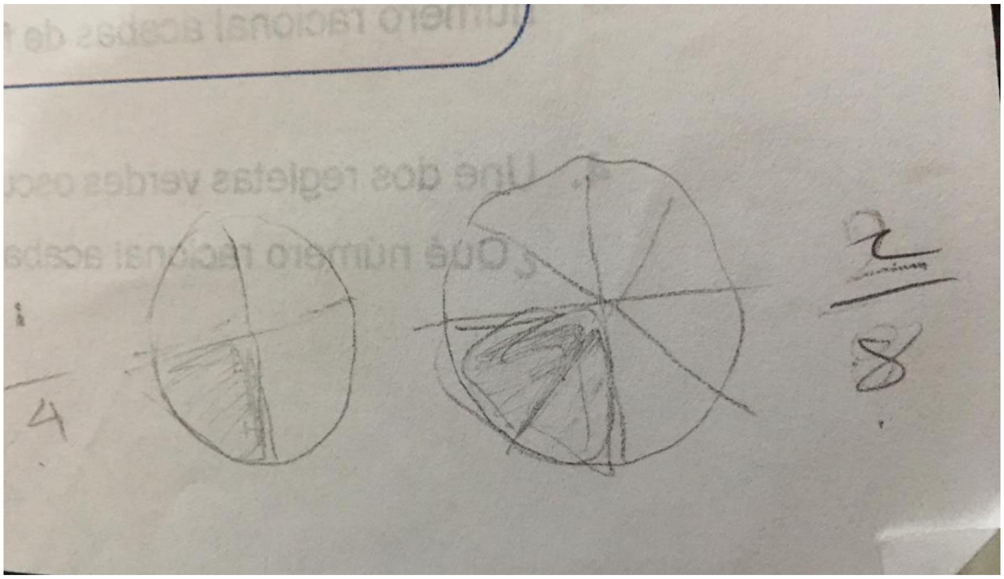


Ilustración 19. Representación de un estudiante sobre las fracciones equivalentes

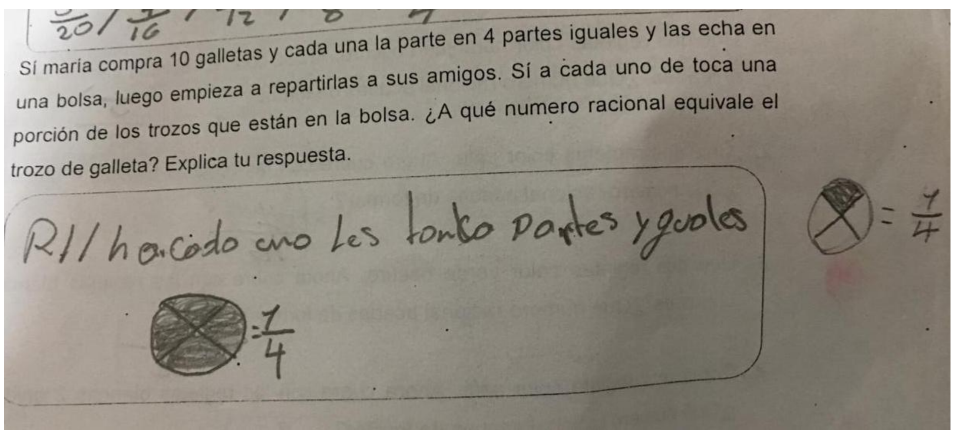


Ilustración 20. Respuesta de estudiante E4

4.5.3 Generalización.

Los estudiantes lograron llegar a la generalización que se pretendía con este material de apoyo como se evidencia en la tabla 11, de ella se concluye el aprendizaje de 1/4 como fracción equivalente de las construcciones realizadas en la actividad de aprendizaje. Además, al iniciar el plan de clases No. 5 se hizo un recuento de lo visto en el plan de clases No. 4, acompañado de una socialización con los estudiantes para que empezasen a analizar de que se trataba el plan de clase contiguo e hicieran relaciones en el conocimiento adquirido al finalizar dichas actividades de aprendizaje (ver imagen 12).

Imagen 12. Socialización inicial

4.5.4 Apreciaciones.

Los resultados obtenidos en el plan de clase No 4 y No 5 fueron muy alentadores en cuanto a la intención que se pretende en este trabajo de investigación, pues durante el desarrollo de éstas actividades de aprendizaje su puede identificar que los estudiantes poco a poco a partir de casos particulares iban llegando a la idea general, en este caso son las equivalencias en los números racionales; todo esto articulado con el material de apoyo como lo señala (Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M.; 2011) que la manipulación de ellos permitieron al estudiantes el hacer, la ejercitación de sus destrezas de manera lúdica y el desarrollo del conocimiento.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presenta una síntesis del proceso de investigación llevado a cabo con estudiantes de grado sexto de la IESPC, centrado en indagar cómo el razonamiento inductivo puede fortalecerse desde un enfoque del PCK que tiene un maestro de matemáticas a través del uso de material de apoyo en el aula. Y recogemos los principales resultados obtenidos relacionados con los objetivos de la investigación buscando brindar posibles respuestas a la pregunta problematizadora.

En este proceso investigativo las maestras en formación tomaron una postura crítica desde el PCK y el conocimiento contextual de los estudiantes, identificando las falencias que presentaban los estudiantes, para así, optar por una forma y alternativa de transformar contenido disciplinar en el área de matemáticas en algo comprensible para el estudiante, donde éste aprendiera de una forma donde fuese protagonista de dicho proceso de aprendizaje apropiándose de los conceptos matemáticos. Dicha forma de enseñar fue a través del uso de material de apoyo en el aula, fundamentados desde distintos autores que destacaban los grandes aportes de estos para la enseñanza.

En búsqueda de dar una posible respuesta a la pregunta problematizadora, se analizan resultados obtenidos mediante unas actividades de aprendizaje con el uso de material, donde se destacó en primer lugar la importancia y ventajas del uso del material de apoyo en la ejecución de cada una de las actividades de aprendizaje; identificando los momentos en que el estudiante realiza un tipo de razonamiento inductivo, relacionándolo y describiéndolo desde tres componentes del modelo teórico que plantea Pólya para la descripción del proceso inductivo que llevan a cabo los estudiantes mientras resuelven situaciones problema, los cuales son: trabajo con premisas particulares, identificación de patrones y generalización; de este modo se categoriza el razonamiento inductivo de los estudiantes.

Referente a los resultados obtenidos desde el componente trabajo con premisas particulares, se puede observar que permitió el afianzamiento y comprensión por parte de los estudiantes hacia la nueva temática a aprender, mientras iban identificando patrones en cada una de las situaciones planteadas por el maestro; donde cada situación permitió la ejercitación y puesta en práctica de distintos conceptos matemáticos que lo llevaron a identificar ciertos aspectos dentro del procedimiento que no se veían a simple vista con una mera explicación, sino que a partir de la puesta en práctica de la resolución de distintas situaciones problemas logran identificar patrones en casos particulares que los llevaron a una comprensión profunda del concepto matemático y a la vez a una generalización de éste.

En la descripción de los pasos del razonamiento inductivo que realizan los estudiantes frente a las situaciones problema propuestas para ser resueltas mediante el uso de material, se destaca el interés y motivación por parte del estudiante frente al uso de materiales en las clases, lo cual promovía que el estudiante disfrutara al responder las preguntas de cada situación problema utilizando el material, ya que ellos lo veían como un juego.

De esta forma, mientras el estudiante avanzaba creando respuestas, iba identificando y creando situaciones particulares con el material, relacionando cada procedimiento que hacia mediante un razonamiento inductivo, para así finalmente comenzar a generalizar teorías y conceptos matemáticos inmersos en cada actividad.

A partir de los análisis de cada plan de clase en las respuestas brindadas por cada estudiante, se puede observar que efectivamente el uso de material de apoyo en las aulas de las instituciones educativas funciona como una alternativa para ayudar a los estudiantes fortalecer el razonamiento inductivo, donde el maestro tiene un papel orientador en este proceso, desde que realiza el diseño de cada plan de clase, dejando ver los conocimientos y habilidades que posee en cuanto al PCK, y resaltando así su importancia en el quehacer docente; en la parte del contexto estudiantil se muestra la relevancia del conocimiento que se tiene de la población estudiantil para diseñar actividades acorde a sus características, habilidades y necesidades, además, del conocimiento disciplinar requerido en el área de matemáticas, centrado en todos los conceptos necesarias para el diseño y la ejecución de cada plan de aula, y por último, pero no menos importante, todas esas concepciones teóricas pedagógicas le permiten hacer enseñable un contenido, para así armonizar estos tres conocimientos al diseñar una estrategia acertada que permita la transformación del contenido disciplinar en algo enseñable teniendo sentido para el estudiante.

Luego de obtener posibles respuestas frente a la problemática objeto de estudio de la presente investigación, nos preguntamos ahora ¿De qué otras formas se podrían llevar materiales de apoyo al aula en búsqueda del fortalecimiento de algún tipo de razonamiento donde el estudiante sea protagonista en el proceso de aprendizaje? ¿De qué manera la enseñanza con el uso de material podría plantearse como algo natural en las aulas de Instituciones Educativas del país?

6. REFERENCIAS

Amade-Escot, C. (2000). The contribution of two research programs on teaching content: Pedagogical content knowledge and didactics of Physical Education. *Journal of Teaching Physical Education,* 20(1), 78-101.

Alva, A. (2001). *La investigación científica* (Tesis de doctorado). Universidad de La Habana - Cuba.

Arrieta, J (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis del Doctorado en Ciencias con especialidad de Matemática Educativa) Cinvestav, IPN, Mexico.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemática*s. Bogotá: Una Empresa Docente.

Berliner, D.C. (1986). *In pursuit of the expert pedagogue*. Educational Research. 15(7): 5-13.

Bolívar, A. (1993). Conocimiento didáctico del contenido y formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* (16), 113- 124. Enero-abril.

Cañadas, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de Secundaria.* Trabajo de Investigación Tutelada. Dpto. de Didáctica de la Matemática, Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa, IV*, 13-24.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Cañadas, M. (2011). *El conocimiento pedagógico en un entrenador de baloncesto en periodo de formación* (tesis doctoral). Universidad de Extremadura, Cáceres.

Carretero, R. Coriat, M. y Nieto, P. (1995). *Secuenciación, Organización de Contenidos y Actividades de Aula*. Junta de Andalucía, *Materiales Curriculares. Educación Secundaria Obligatoria*, Vol. 17, Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia.

Carrillo, J. (1994). Resolución de problemas: clave del desarrollo profesional. *Epsilon 30*, 27-38.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuale*s. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.

Castro, E. (2002). *Razonamiento inductivo desde la Didáctica de la Matemática*. En M.C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds). *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 157-166). Alicante, España, Universidad de Alicante.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Creswell, J. w. (1994). *Qualitative inquiry and research design.* Sage pubns.

Cruz, J. y Carrillo, J. (2004). ¿Qué ponen en juego los alumnos al resolver problemas? Diferencias entre alumnos de 12 y 14 años. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Actas del VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 195-205). A Coruña: Universidad de A Coruña.

Davila, G. (2006). *El razonamiento inductivo y deductivo dentro del proceso investigativo en ciencias experimentales y sociales*. Revista de educación Laurus, 180-205.

De Koning, E. y Hamers J. H. M. (1999). Teaching inductive reasoning: Theoretical background and educational implications. En J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit y B. Csapó (Eds.), *Teaching and learning thinking skills* (pp. 156-188). Lisse: Swets & Zeitlinger.

De Koning, E., Hamers, J. H. M., Sijtsma, K., Vermeer, A. (2002). Teaching Inductive Reasoning in Primary Education. *Developmental Review, 22*(2), 211-241.

Devlin, K. (1994). *Mathematics. The science of patterns*. New York: Scientific American Library.

Durango, J. (2009). *La compresión de los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales: "El contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemática"* (tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín.

Ferrater, F. J. (1988). *Diccionario de Francisco José Fernández Ferrater*. Madrid: Alianza Editorial.

Fetísov, J. (1980). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria.* (Documento Trabajo de investigación). Septiembre 2002. Pág. 28.

Flores, P. (2003). Evaluación ¡Qué risa! En Cardeñoso, J.M. Lupiáñez, J.L., Moreno, A.J. y Peñas, M. (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Evaluación en Matemáticas*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, SAEM THALES. 243-250.

Flores, P. (2004). *Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la Información y la Comunicación*. En Cardeñoso, Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, SAEM THALES.

Flores, P. (2004). *Chistes para contar*. Comunicación en CEAM, Huelva, abril 2004.

Flores, P. (2005).*Je ¡Oh! ¿Metría?* En Lupiáñez, J.L., Cardeñoso, J.M. García, M. (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. La Geometría*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, SAEM THALES

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.Gómez, J. (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, Paidós.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal* (Tesis Doctoral). Tenerife: Universidad de la Laguna.

Gómez, P. (2004). Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. En M. Peñas, A. Moreno, J. L. Lupiáñez (Eds.) Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la información y la comunicación. (pp. 73-95). Granada: SAEM “THALES” y Dpto. de Didáctica de la Matemática (Univ. de Granada).

Grossman, P.L. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. New York: Teachers College Press.

Guba, E. G & Lincoln, Y. S. (2000). *Paradigmas en competencia en la investigación cualitativa*. In C. A. Denman & J. A. Haro (Orgs.), *Por los rincones. Antología de métodos cualitativos en la investigación social* (pp. 113-145). México: El Colegio de Sonora.

Hadamard, J. (1947). *Psicología de la Invención en el Campo Matemático*. Historia y Filosofía de la Ciencia. Espasa Calpe: Buenos Aires.

Hernández, R.; Fernández, C.; Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Hill, H., Schilling, S., & Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, *105*, 11–30.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. (2018). Guía de interpretación de resultados. Reporte de estudiantes, Saber 3°, 5° y 9°. Recuperado de: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/investigacionFormulario/docman/estudiantes-y-padres-de-familia/saber-359-estudiantes-y-padres/documentos-juridicos-y-tecnicos-2017-saber-3-5-y-9/5236-guia-de-interpretacion-de-resultados-saber-3-5-y-9-2018/file?force-download=1

Juarez, A. (2015). *Material didáctico y aprendizaje significativo* (tesis de pregrado). Universidad Rafael Landívar, Quetzaltenango.

Keith. D. (1994). *Mathematics. The science of patterns*. New York: Scientific American Library.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving* (pp. 1-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Klauer, K. J. (1996). Teaching inductive reasoning: Some theory and there experimental studies. *Learning and Instruction, 6,* 37-57.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology. Philosophical Papers*. Vol. 2. Cambridge: University Press. (Trad. Castellano de Ribes Nicolás, D: Matemáticas, Ciencia y Epistemología. Madrid: Alianza, 1981).

Lalande (1963). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria*. (Documento Trabajo de investigación). Septiembre 2002. Pág. 22.

Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286 – 323). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Martínez, M. (2006). Pertinencia social en la investigación endógena. Espacio Abierto, 15(4), 16.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277-290.

Mesa, B. (1998). Contextos para el Desarrollo de Situaciones Problema en la Enseñanza de las Matemáticas. Colombia: Instituto de Educación no formal-Centro de Pedagogía Participativa, P. 9.

Ministerio de Educación Nacional. (2002). Estándares curriculares para las áreas de matemáticas, lengua castellana y ciencias naturales y educación ambiental para la educación preescolar, básica y media. Recuperado de: http://www.ierdsimonbolivar.edu.co/Templates/estandarescurriculares.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2017). lineamientos curriculares. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/portal/decadas/89869:

Ministerio de Educación Nacional. (2017). ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Moris, A. Tello, C. y Culqui, B. (2014). Influencia de los materiales didácticos en el aprendizaje de los niños y niñas de 5 años de la institución educativa inicial “María Reiche” (tesis de pregrado). Universidad Nacional de la Amazonia Peruana, Iquitos.

Obando, Z. G., Venegas, V. M., y Vásquez, L. N. (2006). Unidad No. 2 NÚMEROS ENTEROS. En *SERIE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, Módulo 1: Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos* (pp. 31-49). Medellín, Colombia: Artes y Letras Ltda.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en educación primaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en educación primaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Perero, M. (1994). Historia e historias de matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press. (Traducción al castellano: J. Zugazagoitia, 1965, Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.Poincaré, H. (1902). *Science and Hipótesis*. New York: Dover. (Traducción al castellano: A. B. Besio, y J. Banti, J., 1963, La ciencia y la hipótesis. Madrid: Espasa-Calpe.) Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Tesis Doctoral. Granada: Comares.

Ramos, V. (2008a). O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo: Estrutura e Implicações à Formação em Educação Física. *Revista Brasileira de Educação Física e Esporte*, 22(2), 161-171.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.

Sampieri, R. H., Fernandez, C., & Baptista, P. (2004). *Metodología de la investigación, cuarta edición.* México D.F: McGraw-Hili Interamericana.

Sandoval, C. A. (2002). *ESPECIALIZACIÓN EN TEORÍA, MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN SOCIAL. Módulo cuatro INVESTIGACIÓN CUALITATIVA.* Bogotá-Colombia D.C: ARFO Editores e Impresores Ltda.

Sawyer, W. W. (1963). *Prelude to mathematics*. Penguin Books.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371).New York: MacMillan.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Shulman, L. (1986). *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. Educational Researcher. 15(2): 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review. 57: 1-22.

Shulman, L. Wittrock, M (Ed). (1987). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: Una perspectiva contemporánea La investigación de la enseñanza. Barcelona: Editorial Paidós.

Sierra, M (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 51-67). Salamanca: Universidad de Salamanca.

Socas, M. M., Hernández, J. y Noda, A. (1998). Clasificación de los problemas aritméticos de estructura verbal aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 51-67). Salamanca: Universidad de Salamanca.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Toranzos, L. (1996). Evaluación y calidad. *Revista iberoamericana de educación,* 10, 63-78.

Whitehead (1911). *An introduction to mathematics*. Oxford University Press, Londres.

ANEXOS

Anexo 1. Encuesta inicial

Objetivo

Identificar las características de los estudiantes del grado sexto de la Institución Educativa San Pedro Claver mediante una encuesta.

Nombre: ____

Grado: Sexto Grupo: _________ Edad_________

Género: F_____ M_____

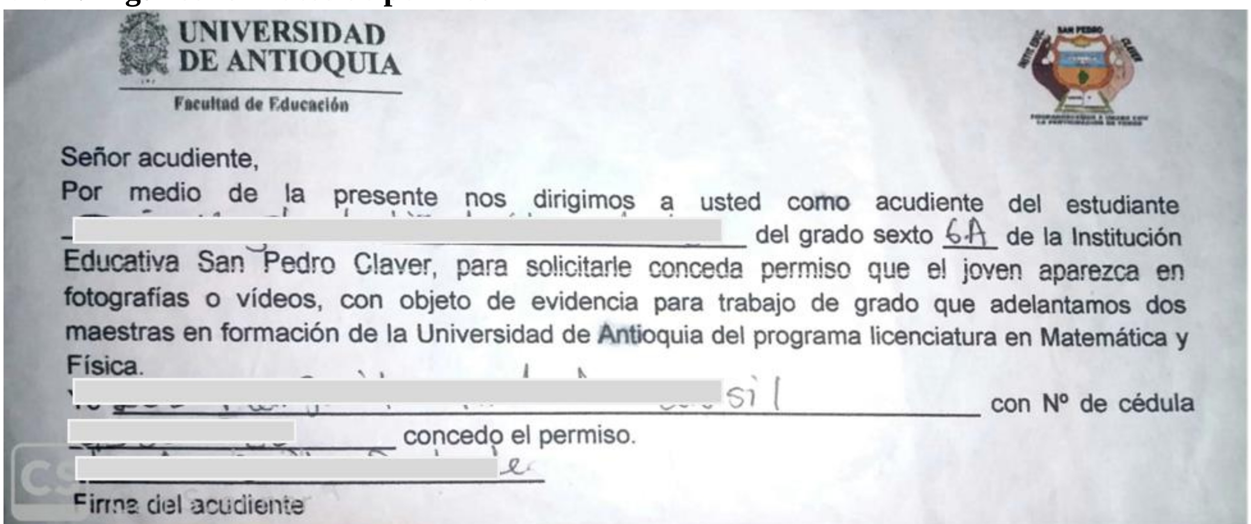
Por favor lee cuidadosamente cada una de las siguientes preguntas y responde a conciencia de forma individual.

1. ¿Con quién vives?	
2. ¿Cuál es la profesión de tus padres?	
3. ¿Qué grado de escolarización tienen tus padres?	
4. ¿Qué transporte utilizas para llegar a la institución educativa?	
5. ¿Cuantos hermanos tienes y que puesto ocupas entre ellos?	
6. ¿Cuál es tu estrato social?	
7. ¿Tienes acceso a Internet?	Sí ___ No___
8. ¿Posees alguna discapacidad o te han realizado alguna operación por tu salud?	
9. ¿Laboras?	Sí ___ No___
10. ¿Participas en algún grupo cultural?	
11. ¿Cuál es tu hobbies?	
12. ¿Qué haces en tu tiempo libre?	
13. ¿Cuál es la asignatura que más te gusta? ¿Por qué? ¿Le dedicas tiempo extra clase?	
14. ¿Te gustan las clases de matemáticas?	Sí___ No___ ¿Por qué?
15. ¿Te concentras en las clases de matemáticas?	Sí___ No___ ¿Por qué?
16. ¿Qué herramienta te gustaría que el docente utilizara en las clases de matemáticas?	
17. ¿Te gusta trabajar en equipo? ¿Obtienes mejores resultados trabajando en equipo? ¿Por qué?	
18. ¿Tienes a alguna persona que te ayuda con las tareas del colegio, en especial con el área de matemáticas?	

19. ¿Lees bien un problema o ejercicio matemático? Y después de leído ¿lo comprendes?	
20. ¿Te gustan las matemáticas?	Sí___ No___ ¿Por qué?

Muchas gracias por tu colaboración y participación.

Anexo 2. Algunos formatos de permiso



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

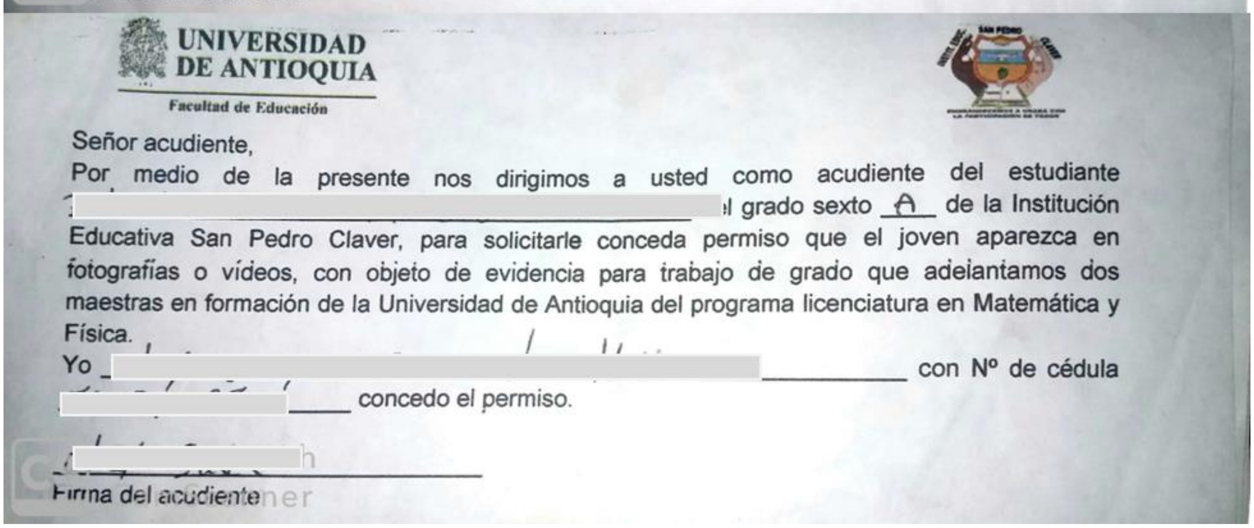
Señor acudiente,

Por medio de la presente nos dirigimos a usted como acudiente del estudiante [redacted] del grado sexto 6A de la Institución Educativa San Pedro Claver, para solicitarle conceda permiso que el joven aparezca en fotografías o vídeos, con objeto de evidencia para trabajo de grado que adelantamos dos maestras en formación de la Universidad de Antioquia del programa licenciatura en Matemática y Física.

[redacted] si con Nº de cédula [redacted] concedo el permiso.

[redacted]

Firma del acudiente



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Señor acudiente,

Por medio de la presente nos dirigimos a usted como acudiente del estudiante [redacted] grado sexto A de la Institución Educativa San Pedro Claver, para solicitarle conceda permiso que el joven aparezca en fotografías o vídeos, con objeto de evidencia para trabajo de grado que adelantamos dos maestras en formación de la Universidad de Antioquia del programa licenciatura en Matemática y Física.

Yo [redacted] con Nº de cédula [redacted] concedo el permiso.

[redacted]

Firma del acudiente

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Señor acudiente,
Por medio de la presente nos dirigimos a usted como acudiente del estudiante [redacted] del grado sexto A de la Institución Educativa San Pedro Claver, para solicitarle conceda permiso que el joven aparezca en fotografías o vídeos, con objeto de evidencia para trabajo de grado que adelantamos dos maestras en formación de la Universidad de Antioquia del programa licenciatura en Matemática y Física.
Yo [redacted] con Nº de cédula [redacted] concedo el permiso.

[redacted]
Firma del acudiente

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Señor acudiente,
Por medio de la presente nos dirigimos a usted como acudiente del estudiante [redacted] del grado sexto 6°A de la Institución Educativa San Pedro Claver, para solicitarle conceda permiso que el joven aparezca en fotografías o vídeos, con objeto de evidencia para trabajo de grado que adelantamos dos maestras en formación de la Universidad de Antioquia del programa licenciatura en Matemática y Física.
Yo [redacted] con Nº de cédula [redacted] concedo el permiso.

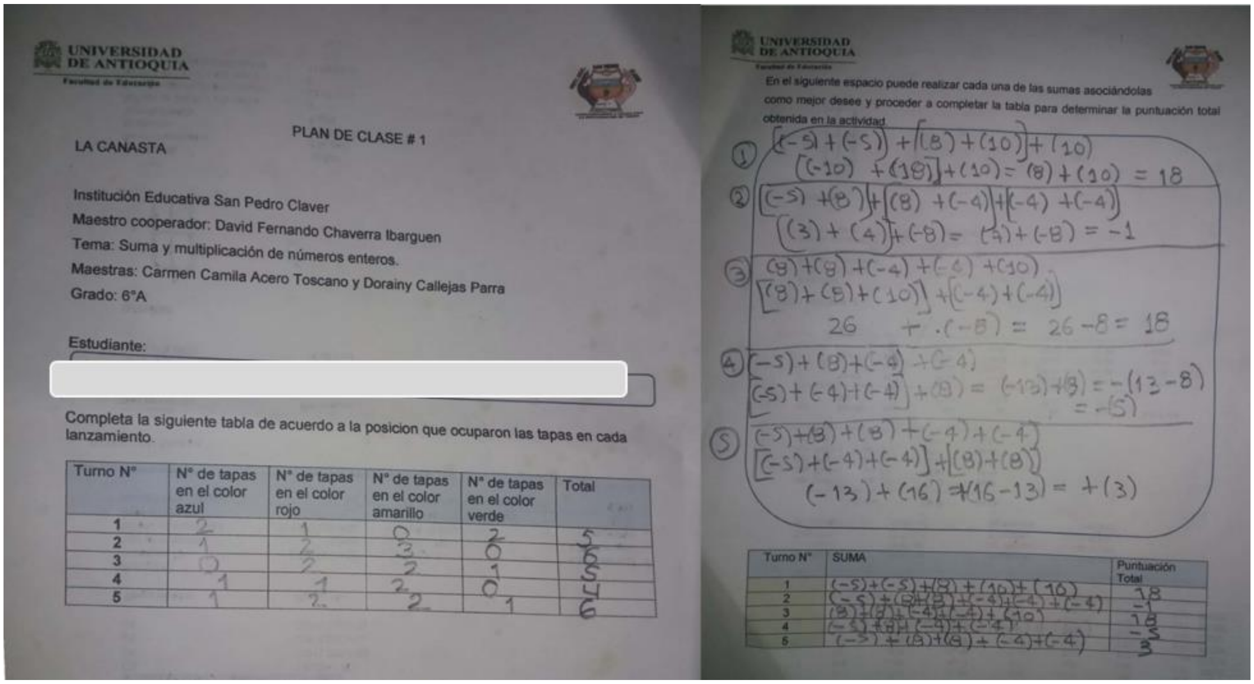
Erica Varela A.
Firma del acudiente

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Señor acudiente,
Por medio de la presente nos dirigimos a usted como acudiente del estudiante [redacted] del grado sexto A de la Institución Educativa San Pedro Claver, para solicitarle conceda permiso que el joven aparezca en fotografías o vídeos, con objeto de evidencia para trabajo de grado que adelantamos dos maestras en formación de la Universidad de Antioquia del programa licenciatura en Matemática y Física.
Yo [redacted] con Nº de cédula [redacted] concedo el permiso.

[redacted] cordoba.
Firma del acudiente

Anexo 3. Actividades Plan de clase No. 1: La canasta.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

PLAN DE CLASE # 1

LA CANASTA

Institución Educativa San Pedro Claver
Maestro cooperador: David Fernando Chaverra Ibarguen
Tema: Suma y multiplicación de números enteros.
Maestras: Carmen Camila Acero Toscano y Dorainy Callejas Parra
Grado: 6°A

Estudiante:

Completa la siguiente tabla de acuerdo a la posicion que ocuparon las tapas en cada lanzamiento.

Turno N°	N° de tapas en el color azul	N° de tapas en el color rojo	N° de tapas en el color amarillo	N° de tapas en el color verde	Total
1	2	1	0	2	5
2	1	2	3	0	6
3	0	2	2	1	5
4	1	1	2	0	4
5	1	2	2	1	6

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

En el siguiente espacio puede realizar cada una de las sumas asociándolas como mejor desee y proceder a completar la tabla para determinar la puntuación total obtenida en la actividad

1. $[(-5)+(-5)]+[(8)+(10)]+(10)$
$[(-10)+(18)]+(10)=(8)+(10)=18$

2. $[(-5)+(8)]+[(8)+(-4)]+[(-4)+(-4)]$
$[(3)+(4)]+(-8)=(7)+(-8)=-1$

3. $(8)+(8)+(-4)+(-4)+(10)$
$[(8)+(8)+(10)]+[(-4)+(-4)]$
$26+(-8)=26-8=18$

4. $(-5)+(8)+(-4)+(-4)$
$[(-5)+(-4)+(-4)]+(8)=(-13)+(8)=-(13-8)$
$=-(5)$

5. $(-5)+(8)+(8)+(-4)+(-4)$
$[(-5)+(-4)+(-4)]+[(8)+(8)]$
$(-13)+(16)=+(16-13)=+(3)$

Turno N°	SUMA	Puntuación Total
1	$(-5)+(-5)+(8)+(10)+(10)$	18
2	$(-5)+(8)+(8)+(-4)+(-4)+(-4)$	-1
3	$(8)+(8)+(-4)+(-4)+(10)$	18
4	$(-5)+(8)+(-4)+(-4)$	-5
5	$(-5)+(8)+(8)+(-4)+(-4)$	3

Anexo 4. Actividades Plan de clase No. 2: Formando Cubos.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

SITUACIONES

1. Identifique las dimensiones del cubo pequeño creado anteriormente, si se considera que el valor de una arista equivale a una unidad. Tenga en cuenta que el volumen de un prisma está determinado por la multiplicación entre las medidas del área de su base y su altura.

Medida de una arista: 1 U Área de una de sus caras: $1\ U^2$ Volumen: $1U^3$

2. Con los 27 cubitos que se le entregó a su equipo de trabajo, determine las dimensiones del cubo máximo que podrían crear.

Medida de una arista: 3U Área área de una de sus caras: $3U^2$ Volumen: $3U^3$

3. ¿Podría construir otros cubos de menores dimensiones, cuales serían y cuántos cúbitos sobrarían?

3 cubos de $4\ U^2$ de area, $8\ U^3$ de volumen
y me sobran 3 cubitos de $1\ U^3$

4. ¿Se podría formar un cubo compuesto por 25 cúbitos? Justifique su respuesta.

no porque nesecito completar $3\ U^3$ y me faltan 2 cubitos.

VERSIDAD
E ANTIOQUIA
Facultad de Educación

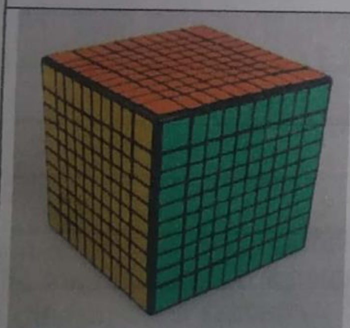
5. ¿Para crear un cubo de arista igual a 4 unidades, cuántos cubos adicionales necesitaría tu equipo para formarlo?

necesitaria $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4$ $\quad \begin{array}{r} 16 \\ \times 4 \\ \hline 64 \end{array}$

6. Complete la siguiente tabla de acuerdo a las dimensiones de cada cubo. Tenga en cuenta que se asume que cada medida de la arista de los cubos de menor tamaño que componen un cubo más grande, son correspondientes a una unidad.

Cubo	Medida de arista	Área de una cara	Volumen
	1U	$1U^2$	$1U^3$
	2U	$4U^2$	$8U^3$
	3U	$9U^2$	$27U^3$
	4U	$16U^2$	$64U^3$
	5U	$25U^2$	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 125 \end{array}$ $125U^3$
	6U	$36U^2$	$\begin{array}{r} 36 \\ \times 6 \\ \hline 216 \end{array}$ $216U^3$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

	7 u	49 u^2	$49 \times 7 = 343$ 343 u^3
	8 u	64 u^2	$64 \times 8 = 512$ 512 u^3
	9 u	81 u^2	$81 \times 9 = 729$ 729 u^3
	10 u	100 u^2	1000 u^3

7. ¿Qué relación logras identificar luego de completar la tabla anterior?

Que podemos adivinar el volumen de cualquier cubo sólo sabiendo la medida del lado multiplicandolo 3 velez

Anexo 5. Plan de clase No. 3: dividiendo los colores.

E 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
SECCIONAL URABÁ
SEDE APARTADÓ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

PLAN DE CLASE N° 3

DIVIDIENDO LOS COLORES

Institución Educativa San Pedro Claver

Maestro cooperador: David Fernando Chaverra Ibarguen

Tema: División entre números enteros

Maestras: Carmen Camila Acero Toscano y Doraini Callejas Parra

Grado: Sexto

Materiales: Fotocopias con la guía para los estudiantes, regletas de Cuisenaire hechas en cartón paja y material personal de cada estudiante.

- Realiza las siguientes actividades en grupos de dos estudiantes.

Nombre de los estudiantes:

ACTIVIDAD

Lee cuidadosamente las siguientes preguntas, y con ayuda de las regletas de Cuisenaire escribe la respuesta que consideres más acertada.

1. Compara la regleta blanca con la roja. ¿Qué puedes decir sobre ello?
2. Compara la regleta blanca con la amarilla. ¿Qué interpretación haces sobre lo anterior?
3. ¿Cuantas veces cabe la regleta roja en la de color café? ¿De qué manera podrías describir este suceso numéricamente?
4. ¿Cuántas regletas rojas caben en la regleta de color naranjado oscuro? ¿Con que división numérica puedes relacionar este hecho?
5. Ahora observa cuantas regletas de color verde claro caben en la regleta naranja oscuro.
   - a) ¿Estás regletas pueden cubrirla completamente sin excederse en tamaño?
   - b) ¿Cuántas unidades quedan sin cubrir y que representan?
   - c) ¿Con cuál división de forma numérica relacionarías este hecho?

1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
SECCIONAL URABÁ
SEDE APARTADÓ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

6. Haz el procedimiento anterior tratando de cubrir la naranjada oscura, con la naranja más clara, sin exceder el tamaño de la oscura. Responde las mismas preguntas del inciso anterior.
7. Realiza el mismo procedimiento anterior con la pieza amarilla, tratando de cubrir la naranjada oscura.
8. Si pudieras añadir solo una pieza a la naranjada oscuro, para formar una división homogénea entre la regleta naranja oscura y la verde oscuro. ¿Qué pieza añadirías y por qué?
9. Arma una regleta larga que mida 18 unidades con el menor número de regletas posible. Luego cubre ésta con regletas de igual tamaño, de modo que no quede residuo.

a) ¿Cuántas opciones posibles hay para cubrir las piezas?
b) ¿Qué valores tendría cada una de las piezas de las posibles opciones?
c) ¿Qué relación encuentras entre estos valores y el valor del largo que queríamos dividir?

10. ¿Qué relación debe haber entre el dividendo y el divisor, en una división para que el residuo siempre sea cero?

Anexo 6. Plan de clase No. 4: Construyendo equivalencia.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
SECCIONAL URABÁ
SEDE APARTADÓ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

PLAN DE CLASE N° 4

CONSTRUYENDO EQUIVALENCIAS

Institución Educativa San Pedro Claver

Maestro cooperador: David Fernando Chaverra Ibarguen

Tema: números racionales

Maestras: Carmen Camila Acero Toscano y Doraini Callejas Parra

Grado: Sexto

Materiales: Fotocopias con la guía para los estudiantes, regletas de Cuisenaire hechas en cartón paja y material personal de cada estudiante.

Nombre del estudiante:

- Realiza las siguientes actividades.

ACTIVIDAD

Lee cuidadosamente las instrucciones que se te dan y utiliza adecuadamente las regletas de Cuisenaire y escribe la respuesta que consideres más acertada.

1. Une dos regletas, una naranjada oscura y una café. Ahora con las regletas blancas cubre 9 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\boxed{\frac{9}{18}}$
2. Une una regleta naranjada oscura y una verde oscura. Ahora cubre con las regletas blancas 8 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\boxed{\frac{8}{16}}$
3. Une dos regletas negras, Ahora cubre con las regletas blancas 7 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\boxed{\frac{7}{14}}$
4. Une dos regletas verdes oscuras. Ahora cubre con las regletas blancas 6 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\boxed{\frac{6}{12}}$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
SECCIONAL URABÁ
SEDE APARTADÓ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

5. Une dos regletas amarillas. Ahora cubre con las regletas blancas 5 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{5}{10}$

6. Cubre una regleta café con las regletas blancas 4 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{4}{8}$

7. Cubre una regleta verde oscuro con las regletas blancas 3 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{3}{6}$

8. Cubre una regleta naranjada claro con las regletas blancas 2 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{2}{4}$

9. Cubre una regleta roja con las regletas blancas 1 unidad. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{1}{2}$

10. ¿Qué relación puedes observar en las construcciones realizadas anteriormente?

-Que en todas se cubre la mitad
-Todas las raciones son eqvivalentes.

11. ¿Se puede representar todas esas construcciones con un número racional en común? ¿por qué?

Si porqve en todas se cubre la mitad entonces en todas puede ser un medio

Anexo 7. Plan de clase No. 5: 1/4 de regleta.

E3

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
SECCIONAL URABÁ
SEDE APARTADÓ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

PLAN DE CLASE N° 5

$\frac{1}{4}$ DE REGLETA

Institución Educativa San Pedro Claver

Maestro cooperador: David Fernando Chaverra Ibarguen

Tema: números racionales

Maestras: Carmen Camila Acero Toscano y Doraini Callejas Parra

Grado: Sexto

Materiales: Fotocopias con la guía para los estudiantes, regletas de Cuisenaire hechas en cartón paja y material personal de cada estudiante..

Nombre del estudiante:

1. Realiza las siguientes actividades.

ACTIVIDAD

Lee cuidadosamente las instrucciones que se te dan y utiliza adecuadamente las regletas de Cuisenaire y escribe la respuesta que consideres más acertada.

1. Une dos regletas color naranjado oscuro. Ahora con las regletas blancas cubre 5 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{5}{20}$
2. Une dos regletas color café. Ahora cubre con las regletas blancas 4 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{4}{16}$
3. Une dos regletas color verde oscuro, Ahora cubre con las regletas blancas 3 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{3}{12}$
4. Toma una regleta color café. Ahora cubre con las regletas blancas 2 unidades. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{2}{8}$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
SECCIONAL URABÁ
SEDE APARTADÓ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

5. Toma una regleta color naranjado claro. Ahora cubre con las regletas blancas 1 unidad. ¿Qué número racional acabas de formar? $\frac{1}{4}$

6. ¿Qué relación puedes observar en las construcciones realizadas anteriormente?

R// es la cuarta parte de todo en tota

7. ¿Se puede representar todas esas construcciones con un número racional en común? ¿por qué?

R// si

R// Por que esta tomando la cuarta parte

8. ¿Cuáles otros números racionales consideras que son equivalentes a 1/4?

$\frac{5}{20}, \frac{4}{16}, \frac{3}{12}, \frac{2}{8}, \frac{1}{4}$

9. Sí maría compra 10 galletas y cada una la parte en 4 partes iguales y las echa en una bolsa, luego empieza a repartirlas a sus amigos. Sí a cada uno de toca una porción de los trozos que están en la bolsa. ¿A qué numero racional equivale el trozo de galleta? Explica tu respuesta.

Cada pedazo equivale un $\frac{1}{4}$