UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES DE DÉCIMO GRADO: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y GEOGEBRA

Yuri Marcela Hincapié Montes

José Wilson Hincapié Montes

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación, Departamento de enseñanza de las ciencias y las artes

El Carmen de Viboral, Colombia

2019

Actividad matemática de estudiantes de décimo grupo: funciones trigonométricas y Geogebra

Yuri Marcela Hincapié Montes
José Wilson Hincapié Montes

Tesis o trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Educación Matemática

Asesores:
Walter Fernando Castro Gordillo, Doctor en Didáctica de las Matemáticas
Héctor Mario Carvajal Rueda, Magíster en Comunicaciones

Línea de Investigación:
Educación Matemática
Grupo de Investigación:
Matemática, Educación y Sociedad (MES)

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación, Departamento de enseñanza de las ciencias y las artes
Carmen de Viboral, Colombia
2019

Dedicatoria

A Dios, por brindarnos la oportunidad de lograr nuestra metas personales y profesionales.

A nuestra familia, por apoyarnos en cada una de las etapas de este proceso, pese a las adversidades y escasez de tiempo, siempre nos impulsaron a crecer en nuestra vida laboral y profesional.

A nuestros asesores, Walter Castro y Héctor Carvajal, por el apoyo, consejos, asesorías, paciencia, que hicieron de este proceso una experiencia única al trabajar con ellos.

A la universidad de Antioquia con sede en Oriente, por ser la institución formadora que ofreció la oportunidad de superación académica.

A la gobernación de Antioquia, por cofinanciar la beca que hizo posible este proceso.

A los estudiantes del grupo 10-4 de le I. E. León XIII El Peñol, que con sus aportes y participación hicieron posible el desarrollo de este proceso de investigación.

Al Grupo de investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES), por sus conocimientos que ayudaron a fortalecer este trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

En esta investigación se propuso analizar la actividad matemática de los estudiantes del grupo 10-4 de la Institución Educativa Urbana del Peñol, cuando se usa el software Geogebra para estudiar funciones trigonométricas. En la experiencia como profesores se evidencia la poca motivación que los estudiantes tienen hacia el estudio de las Matemáticas, esto los puede alejar de estudiar carreras tanto técnicas como profesionales que contengan contenidos matemáticos; una manera de abordar ese problema es con el uso de la tecnología específicamente con Geogebra como herramienta para realizar el estudio de las funciones trigonométricas. La actividad matemática se describe en la propuesta basada en el Enfoque Ontosemiótico, junto con la génesis instrumental y la orquestación instrumental. Los profesores usaron Geogebra para ilustrar representaciones, conceptos, procedimientos matemáticos y resolver tareas propias de la actividad matemática. Para el análisis de éstas, se construyeron Guías para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS), mediante las cuales se analiza tanto el componente matemático como el computacional involucrado en las soluciones estudiantiles. Se encontró que la actividad matemática en un ambiente natural de clase es diversa, se utilizan diferentes objetos primarios, se evidenciaron momentos de instrumentación e instrumentalización a partir de la génesis instrumental que dan cuenta de la actividad matemática, en esas relaciones de lo computacional con lo matemático. Otras formas de actividad matemática "in situ" se presentó en actitudes de los estudiantes, el trabajo en equipo, estrategias de resolución y la necesidad del docente en el aula configurando lo que llamamos orquestación instrumental.

Palabras clave: actividad matemática, génesis instrumental, EOS, software.

ABSTRACT

In this investigation, it was proposed to analyze the mathematical activity of the students of group 10-4 of the Urban Educational Institution of Peñol, when the Geogebra software is used to study trigonometric functions. In the experience as teachers, the little motivation that the students have towards the study of Mathematics is evident, this can distance them from studying both technical and professional careers that contain mathematical content; One way to tackle this problem is with the use of technology specifically with Geogebra as a tool to study trigonometric functions. Mathematical activity is described in the proposal based on the Ontosemiotic Approach, together with instrumental genesis and instrumental orchestration. Teachers used Geogebra to illustrate representations, concepts, mathematical procedures and solve tasks typical of mathematical activity. For the analysis of these, Guidelines for the Recognition of Objects and Meanings (GROS) were constructed, by means of which both the mathematical and computational components involved in student solutions are analyzed. It was found that the mathematical activity in a natural classroom environment is diverse, different primary objects are used, moments of instrumentation and instrumentalization were evidenced from the instrumental genesis that account for the mathematical activity, in those relations of the computational with the mathematical. Other forms of mathematical activity "in situ" were presented in student attitudes, teamwork, resolution strategies and the need for the teacher in the classroom configuring what we call instrumental orchestration.

Keywords: Mathematical activity, instrumental genesis, EOS, software.

INTRODUCCIÓN

El proyecto se desarrolló en la Institución Educativa León XIII, donde actualmente nos desempeñamos como profesores de Matemáticas en los grupos noveno y décimo. La institución está ubicada al norte del municipio El Peñol (Antioquia), cuenta con un área de 7 hectáreas y está conformado por una infraestructura física de 3 bloques.

En El Peñol hay aproximadamente 3.284 estudiantes, de los cuales 2.332 se encuentran en la Institución Educativa León XIII. Esta Institución se convirtió en uno de los colegios digitales más grandes del Departamento en el año 2012, después de unas adecuaciones en su infraestructura física y mejoras en la dotación tecnológica. La propuesta de investigación se implementó en uno de los grados décimo, que tiene la modalidad de Programa Técnico en Sistemas; ya que la Institución cuenta con tres modalidades, estando además la modalidad Asistencia Administrativa y Sistemas Ecológicos Agropecuarios.

La institución Educativa permitió explorar, de manera sistemática y en el marco de una investigación, tanto el uso de recursos tecnológicos disponibles como la motivación para 'hacer Matemáticas'. Se propone trabajar en una perspectiva donde los contenidos matemáticos, los recursos tecnológicos y el diseño didáctico promuevan actividad matemática. Esta oportunidad nació de la experiencia como profesores en la Institución, donde se observa que estos recursos tecnológicos no logran un impacto ni en los conocimientos ni en la motivación hacia las Matemáticas.

Esta investigación pretendió responder a la pregunta: ¿Cómo es la actividad matemática de los estudiantes del grupo 10-4 de la I.E. Urbana del Peñol, cuando se usa el software Geogebra para estudiar funciones trigonométricas? Para ello nos orientamos en un paradigma cualitativo (Hernández, Fernández & Baptista, 2010). Se adoptó un enfoque fenomenológico-hermenéutico

(Sánchez, 1998), para interpretar la actividad matemática, mediante el estudio de producciones de los estudiantes cuando usan el software Geogebra en el tema de las funciones trigonométricas, con el desarrollo de algunas Guías propuestas, unas de exploración y otras de profundización. Además, utilizamos para el análisis de datos Guías de reconocimiento de objetos y significados (GROS) (Godino, Font & Wilhelmi, 2008).

La investigación tuvo su fundamentación teórica en el planteamiento de diversos autores en el desarrollo de las principales categorías del trabajo. Para la actividad matemática en el enfoque ontosemiótico (EOS) autores como Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, (2006); Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009); Godino, Batanero y Font (2007); Godino, Font y Wilhelmi, (2008); Para la génesis instrumental con el uso de Geogebra nos apoyamos en Rabardel (1995), Pérez (2014) y Trouche (2004). Referente al uso de las Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en autores como Moreno y Waldegg (2002), Acosta (2005), Fiallo y Gutiérrez (2009) y finalmente para la trigonometría en Fiallo y Algarín (2013) y Saraiva (2015).

Se desea promover el aprendizaje, así como el cambio de creencias sobre la Matemática, pero en este trabajo sólo se investigó sobre la actividad matemática desarrollada por los estudiantes del grupo 10-4 de la I. E. Urbana del Peñol, mientras responden a tareas matemáticas con la ayuda de un software, en nuestro caso Geogebra para estudiar funciones trigonométricas.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes

Las Matemáticas han sido de gran importancia para el desarrollo de la humanidad, por sus aplicaciones en diversos ámbitos, aportes al avance de las ciencias y la tecnología. La adquisición de ciertas habilidades matemáticas básicas y la comprensión de ciertos conceptos son imprescindibles para un funcionamiento efectivo de la sociedad actual. (Bazán & Aparicio, 2006). Además de que "posibilita no sólo la resolución de problemas sino también el planteamiento de nuevas situaciones generadoras de conocimientos en los diversos ámbitos del mundo laboral, profesional y personal de los individuos" (Cardozo & Cerecedo, 2008, p.1).

Pese a la importancia de las Matemáticas, en la educación matemática escolar se reportan diversas dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ruiz (2008), afirma que tradicionalmente la Matemática es una de las áreas del conocimiento que menos entusiasma a los estudiantes, quienes la rechazan, la valoran como difícil y carente de uso posterior en la vida, reconociendo su carácter abstracto.

Así mismo, entre las características, usualmente reportadas por los estudiantes y reconocidas por los profesores se encuentran, según, Leonard, Gerace & Dufresne, (2002), "el intento de cubrir gran cantidad de contenidos, muchos profesores usan metodologías que son eficaces para transmitir conocimientos, esto es, dar la clase y después poner muchos problemas para resolver como tarea, más que para aprender" (p.388). Con frecuencia el docente para promover el aprendizaje, suele asignar muchas tareas rutinarias no asociadas con el aprendizaje conceptual, entendido como aquel que se conecta fácilmente con otro conocimiento; Pero sí con el aprendizaje procedimental, que se refiere a la operación con los símbolos y al uso de reglas sintácticas que se memorizan sin relación (Ruíz, Alfaro & Gamboa, 2003). También se reporta sobre la monotonía del trabajo en clase, así como la descontextualización de los temas. Estas maneras de enseñar Matemáticas van en contravía de los procedimientos utilizados por los matemáticos y por las personas, para resolver problemas. Los procedimientos rutinarios en algunos casos no contribuyen al aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal de los estudiantes.

Las formas de enseñanza mencionadas pueden influenciar negativamente el aprendizaje de los estudiantes, y, en consecuencia, en el desarrollo de las respectivas competencias y adicionalmente en su rendimiento en pruebas estandarizadas (Saber[1] y Pisa[2]).

Por otro lado, muchos estudiantes tienen una opinión desfavorable hacia las Matemáticas, algunos las encuentran aburridas, no conocen algunas de sus aplicaciones y otro tanto las percibe difíciles (Ruíz, 2008). Los estudiantes suelen manifestar que no desean estudiar ni carreras técnicas ni profesionales que incluyan cursos de Matemáticas. Algunos estudiantes no desean profundizar en su estudio, con lo cual su formación matemática y, en consecuencia, sus posibilidades de acceder a niveles superiores de educación podrían verse afectadas. Estas opiniones negativas hacia las Matemáticas no sólo pueden afectar su aprendizaje, sino sus resultados en pruebas estandarizadas que son un requisito para acceder tanto a carreras técnicas como profesionales. Resultados deficientes en tales pruebas podría entorpecer la asignación de becas y ayudas económicas, lo cual podría afectar las posibilidades de estudio, de ascenso social, entendiéndose como mejorar la estabilidad económica y los ingresos y, finalmente afectar el desarrollo económico de la región. Según un estudio del banco mundial, se afirma que la educación superior es una condición necesaria para el progreso (Granja, 2017). Al no continuar con sus estudios superiores, se perpetúa el ciclo de pobreza (Quiroz, 2010).

En este mismo sentido, los resultados de las Pruebas Saber muestran que los estudiantes presentan rendimientos bajos en el área de Matemáticas. Así en los resultados de las Pruebas Saber

---

[1] Son pruebas que tiene el propósito de contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación colombiana mediante la realización de evaluaciones aplicadas periódicamente para grupo tercero, quinto y noveno, las anuales para once. Además tienen el fin de monitorear el desarrollo de las competencias básicas. En: www.mineducación.gov.co/1759/w3-article-244735.html

[2] Programa evaluación internacional de alumnos (PISA), evalúa el desarrollo de las habilidades y conocimientos de los estudiantes de 15 años a través de tres pruebas principales: lectura, Matemáticas y ciencias. La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) aplica este examen estandarizado cada tres años. En: www.mineducación.gov.co/1759/w3-article-363487.html

2016 a nivel nacional, el 20% de los estudiantes de grado noveno se ubican en el nivel Insuficiente, con lo cual éstos no superan las preguntas de menor complejidad de la prueba; el 50% se ubican en el nivel Mínimo, lo que implica que apenas son capaces de resolver problemas sencillos en los que se les proporciona la información necesaria para solucionarlos y se les sugiere alternativas de acción, solo el 24% logra llegar al nivel Satisfactorio, en el cual se requieren competencias matemáticas para resolver problemas con diferentes niveles de complejidad en los tres componentes: numérico-variacional, geométrico- métrico y aleatorio (ICFES, 2017). Estos datos dan un indicio de los bajos niveles de desempeño de los estudiantes para resolver problemas, una de las dificultades que se presentan en Matemáticas a nivel Nacional.

Hasta el momento se han mencionado dificultades reportadas en Matemáticas por los estudiantes, los profesores, en el aprendizaje conceptual y procedimental, bajos resultados en pruebas estandarizadas. Ante este panorama presentado en forma general, nos cuestiona la forma como nuestros estudiantes aprenden y como se les está enseñando, pues actualmente somos profesores de Matemáticas de una Institución Educativa que cuenta con recursos tecnológicos (computadores y acceso a internet), pero que no ha aportado significativamente en el aprendizaje de los estudiantes.

En nuestra experiencia profesional nace la preocupación de cómo hacer para cambiar las prácticas, que las clases sean más agradables para los estudiantes, utilizar lo que ofrece nuestro entorno sin desconocer el contexto de la institución y su modelo pedagógico desarrollista con enfoque en ambiente tecnológicos, articulado a nuestras pretensiones.

El interés de utilizar los equipos tecnológicos para las clases de Matemáticas se enfoca en la necesidad de resolver problemas que vayan aumentando el grado de dificultad, que tengan gráficas difíciles de visualizar en el papel, que se puedan ayudar con algunos softwares, para hacer estos procedimientos más fáciles y prácticos. Estos procesos que emergen cuando se proponen tareas, actividades, problemas, ejercicios, apoyados de un ordenador y diferentes programas ofrecidos en la red, se relacionan con la propuesta de algunos autores y que hacen parte de la actividad matemática, que tiene sus inicios en la teoría de la actividad.

La teoría de la actividad (Vygotsky, 1962; Leontiev, 1978) propone un proceso de transformación, a través del cual el individuo accede y hace propias las capacidades, propiedades y procedimientos de la conducta humana. La actividad posibilita el desarrollo tanto cognitivo como de la conciencia humana. Ponte (2004) reporta sobre la actividad de los niños en el salón de clase, y considera que tal actividad debe ser regulada por el profesor en términos de objetivos instruccionales y objetivos motivacionales.

Además, existen perspectivas o enfoques en la educación Matemática para abordar este concepto, una de ellas es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero, Font, 2007), en el cual aparece el concepto de actividad matemática, entendida como tareas desarrolladas por el estudiante y el análisis de las mismas. Este enfoque es el que se quiere indagar en este proyecto de investigación.

1.2 Justificación

Ante los bajos resultados en las pruebas estandarizadas, y ante la poca motivación hacia el estudio de las Matemáticas y su posible descontextualización con la vida cotidiana y la resolución de problemas, es importante enfocar una investigación que indague sobre la actividad matemática que los estudiantes desarrollan cuando trabajan en Matemáticas, cuya gestión sea apoyada por la tecnología. Tanto la presentación de tareas matemáticas interesantes por parte del profesor, como la ayuda que supone el uso del software pueden motivar a los estudiantes y poner las condiciones para que experimenten el “oficio” de la discusión como la que hacen los matemáticos.

La Institución Educativa León XIII, dispone de recursos tecnológicos para apoyar la enseñanza de las Matemáticas, cuenta con computadores, tabletas, acceso a internet, y como se mencionó anteriormente es considerado uno de los colegios digitales más grandes de Antioquia. Esta es una oportunidad para explorar, de manera sistemática y en el marco de una investigación, tanto el uso de recursos tecnológicos disponibles como la motivación para ‘hacer matemáticas’. Se propone trabajar en una perspectiva donde los contenidos matemáticos, los recursos tecnológicos y el diseño didáctico promuevan la actividad matemática. Esta oportunidad nace de nuestra experiencia como profesores en la Institución Educativa, donde se ha observado que estos recursos tecnológicos no logran un impacto ni en los conocimientos ni en la motivación hacia las Matemáticas.

Los equipos mencionados anteriormente con los que cuenta la institución, son poco utilizados para apoyar las clases, otro tanto se encuentra guardados, pues los profesores no los quieren asumir, por falta de capacitación, o falta de interés por llevar otros recursos al aula. Otros profesores la utilizan para realizar consultas y evaluaciones en línea, pero no encuentran más aplicaciones. Se restringe por tanto el uso y las potencialidades de estos recursos, llamando la atención para nosotros especialmente para la enseñanza de las Matemáticas.

Ante la necesidad de usar más eficientemente estos recursos, por las características de la institución, se desea promover el aprendizaje, así como el cambio de creencias sobre la Matemática, pero en este trabajo sólo se investigará sobre la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, mientras responden a situaciones matemáticas con la ayuda de un software.

El uso de programas, como por ejemplo Geogebra, puede ayudar a la discusión en clase, a superar la actividad procedimental de naturaleza sintáctica que suele caracterizar los procesos que se llevan a cabo en los salones de clase, porque posibilita desarrollar actividades prácticas, más actividad y participación de los estudiantes (Saraiva, 2015). Para el estudio de los conceptos de la trigonometría circular se introduce el uso de un software que favorece, mediante acción del profesor, tanto el uso de varios sistemas de representación, como la representación dinámica de gráficas que promueven la comprensión de algunas propiedades de la trigonometría y sus usos.

Se quiere plantear problemas que cumplan con algunos de los siguientes criterios: relacionen conceptos de la trigonometría con conceptos de Física y de Ciencias Naturales; relacione conceptos matemáticos tales como la solución de identidades trigonométricas, cálculo de aproximaciones; relacionen el álgebra con la trigonometría y exploren las transformaciones de las gráficas de las funciones trigonométricas.

Se propone explorar la 'actividad matemática en el aula de clase', que se pone en acto cuando confluye el uso de la tecnología, los temas matemáticos y el diseño curricular que relaciona los dos anteriores.

La actividad matemática, por su parte, ha sido estudiada por diversos autores Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006); Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009); Godino, Batanero y Font (2007); Godino, Font y Wilhelmi (2008), quienes han realizado propuestas basadas en el Enfoque Ontosemiótico. Este enfoque propone incluir dimensiones cognitivas, epistémicas e instruccionales de la actividad matemática (Godino, Font & Wilhelmi, 2008). Estas dimensiones serán ampliadas en el marco de referencia.

En tanto que la enseñanza de las Matemáticas debe reconocer su naturaleza asociada con la resolución de problemas y con la actividad matemática, además de promover el uso de las Matemáticas en su doble papel para desarrollar competencias, estudiar conceptos y aprender procedimientos. Para la investigación conviene dar cuenta de la actividad matemática en el aula de clase con tareas matemáticas, donde el estudiante pueda argumentar, modelar, razonar y comunicar. Se requieren entornos de aprendizaje, que incluyan otras formas de acceder tanto al conocimiento matemático como a la posibilidad de poner en juego competencias matemáticas. Una oportunidad para lograr que el estudiante desarrolle actividad matemática en el aula, la ofrece la tecnología; en tanto que provee otras formas de manipulación de los objetos matemáticos (Moreno & Waldegg, 2002).

Estas alternativas que apoyan el aprendizaje de las Matemáticas deben estudiarse con su aplicación en el aula, dado que "el papel desempeñado por la tecnología pasó de ser un amplificador visual a ser un componente esencial significativo de las tareas, y como consecuencia, afecta las concepciones de los objetos matemáticos que podrían construir los estudiantes" (Laborde, 2002, p.283); implementar el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como herramienta didáctica en el aula de clase, implica que las actividades planteadas contribuyan a desarrollar el pensamiento matemático, a desarrollar los contenidos temáticos y, eventualmente, aumentar la motivación.

Diversas investigaciones reportan beneficios para los estudiantes cuando se usan ciertos tipos de tecnologías, Moreno y Waldegg, (2002) afirman que "un medio computacional permite generar una especie de realidad (virtual) Matemática. Trabajar en un medio computacional permite comprender cómo los recursos de ese medio estructuran la exploración y cómo los recursos expresivos del medio favorecen la sistematización" (p.64); Acosta (2005), afirma:

> La geometría dinámica constituye un nuevo sistema de representación de los objetos geométricos que utilizan nuevos objetos ostensivos, los dibujos computarizados, que se diferencian de los dibujos sobre el papel precisamente por su dinamismo: pueden ser arrastrados y deformados en la pantalla, conservando las propiedades geométricas que se les ha asignado por el procedimiento de construcción. (p.123)

Fiallo y Gutiérrez (2009), consideran que el software de geometría dinámica pone a disposición del estudiante un micro mundo geométrico, donde se pasa de simples dibujos o fórmulas a objetos geométricos dinámicos, que pueden ser construidos y manipulados.

Geogebra es un software de matemáticas dinámicas, para todos los niveles educativos, que reúne Geometría, Álgebra, Gráficos y Cálculo en un solo programa. Este software es gratuito y compatible con la mayoría de sistemas operativos, y en este caso será usado para estudiar las funciones trigonométricas.

En el tema de las funciones trigonométricas los estudiantes suelen manifestar dificultades y apatía para su estudio, Fiallo y Algarín (2013) afirman:

> Diversos estudios han contribuido al análisis de las dificultades en trigonometría, sin embargo, a nivel nacional como a nivel internacional no se profundiza en el tema ni se presentan propuestas para afrontar el problema, lo cual ha llevado a que la trigonometría se enseñe de la misma forma, (lo que está en los libros de texto), durante los últimos años (p. 62).

Saraiva (2015), informa que el trabajo con los estudiantes muestra que muchos de ellos, tienen dificultades para comprender conceptos sobre trigonometría. A pesar de la importancia de este tema para el estudio de las funciones, la Geometría y la comprensión de conceptos de Física Clásica.

La trigonometría se menciona explícitamente en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), y es parte de los conocimientos básicos del Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, así como del Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos. En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), para el Pensamiento Espacial se propone describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas y, para el Pensamiento Variacional, modelar situaciones de variación periódica de funciones trigonométricas. En los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), se refieren a comprender y utilizar funciones periódicas y justificar las soluciones, en la cual se propone algunas evidencias de aprendizaje como: modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas. En los tres documentos no se dan pistas de la utilización de software que ayude al estudio de las funciones trigonométricas, es decir, que sirva como herramienta de apoyo. En este trabajo se utilizará el software para explorar lo propuesto por los documentos estatales del MEN.

La trigonometría es un tema interesante tanto por su utilidad en la descripción de ciertos fenómenos naturales- sistemas dinámicos oscilatorios-, como por la riqueza de fenómenos intra-matemáticos asociados con las funciones trigonométricas, además de la posibilidad de usar varios sistemas de representación para estudiar las funciones y sus aplicaciones.

Luego la escogencia del tema específico obedece a varios factores: la dificultad declarada por los estudiantes, y reconocida por la experiencia de los investigadores, el señalamiento de dificultades por diversos autores, su presencia en el currículo matemático y su reconocimiento por los documentos curriculares estatales (Lineamientos Curriculares, MEN, 1998, Estándares Básicos de Competencias, MEN, 2006 y Derechos Básicos de Aprendizaje, MEN, 2015), así como su uso en la descripción de fenómenos naturales y su uso intra-matemático (series de Fourier).

1.3 Pregunta de investigación

¿Cómo es la actividad matemática de los estudiantes del grupo 10-4 de la I.E. urbana del Peñol, cuando se usa el software Geogebra para estudiar funciones trigonométricas?

1.4 Objeto/sujeto

La actividad matemática y los estudiantes del grupo 10-4

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Analizar la actividad matemática de los estudiantes del grupo 10-4 de la I.E. Urbana del Peñol, cuando se usa el software Geogebra para estudiar funciones trigonométricas.

1.5.2 Objetivos específicos

- Estudiar la actividad matemática de los estudiantes con base en categorías planteadas por el EOS (Enfoque Ontosemiótico), cuando usan un software para resolver tareas relacionadas con las funciones trigonométricas.
- Describir la actividad matemática estudiantil cuando se usa software para estudiar funciones trigonométricas.
- Diseñar y validar guías de trabajo para estudiar funciones trigonométricas.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 La actividad matemática en el Enfoque Ontosemiótico

Esta propuesta de investigación toma algunas de las herramientas teóricas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), “el cual es un sistema teórico inclusivo para la educación matemática desarrollado por Godino y colaboradores” (Giacomone, Godino, Wilhelmi & Blanco, 2018, p.3). Este enfoque aparece en 1994 y se desarrolló en tres etapas. La primera etapa refiere a las nociones de significado institucional y personal de un objeto matemático; la segunda etapa elaboró una ontología para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus producciones; y la tercera etapa se refiere a los modelos teóricos propuesto en el seno de la didáctica de las Matemáticas sobre la Instrucción Matemática (Godino, et al, 2007).

Del EOS se tomarán algunas nociones que permitan dar cuenta del objetivo general propuesto ´Analizar la actividad matemática de los estudiantes…’ en donde se proponen tareas para estudiar la actividad matemática estudiantil cuando se usa Geogebra para estudiar funciones trigonométricas. Las nociones que brinda el EOS pueden ser utilizadas como herramientas para analizar y comprender, procesos o aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Este enfoque es básicamente de significados, la primera etapa que desarrolló fue sobre significado personal e institucional de los objetos matemáticos, en el proyecto de investigación se asume como tal. En este sentido, para definir la actividad matemática, los productos resultantes de dicha actividad y de los procesos de comunicación matemática, se debe aclarar la noción de objeto matemático y significado.

Objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática (Godino & Font, 2007). Además, también el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos (Godino & Batanero, 1994).

El significado, es una palabra que, aunque común en nuestro lenguaje, presenta un carácter complejo en su definición, por esta razón, es un tema central controvertido en filosofía, lógica, semiótica y demás ciencias y tecnologías interesadas en la condición humana (Godino & Batanero, 1994). El significado surge de acuerdo al uso que cada persona hace de las palabras. Es necesario diferenciar una dimensión personal e institucional para este significado.

Al tratar de resolver ciertas tareas matemáticas, las personas construyen un significado personal de los objetos matemáticos que aparecen en la tarea y cuando entran a confrontarse con los significados propuestos con la institución (profesor, currículo, libro de texto, entre otros), puede ocurrir que las prácticas adquiridas de forma individual entren en conflicto con las admitidas por la institución. Entonces Godino y Batanero (1994), definen "un significado personal como sistemas de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado" (p. 343) y significado institucional refiere cuando un profesor planifica el proceso de instrucción sobre un objeto matemático, comienza por delimitar lo que es dicho objeto para las instituciones, acudirá a los textos, a las orientaciones curriculares, a lo que los expertos conciben como las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto y así mismo sus propios conocimientos (Godino &Batanero, 1994).

Después de hablar de la diferencia entre significado personal e institucional, se habla entonces de conflictos de significados, no de errores, porque hay una comprensión por parte del estudiante y una comprensión por parte de la institución, puede ser el libro y los profesores. Esa diferencia entre lo que el profesor, el currículo, la comunidad de profesores de Matemáticas y los estudiantes consideran, esa diferencia en la interpretación de los significados, se llama conflicto de significado.

Godino et al (2007) denominan conflicto semiótico a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las pretendidas por el profesor o investigador. Estos errores de interpretación, producen equivocaciones en los estudiantes que no son debidos a falta de conocimiento, sino a no haber relacionado adecuadamente los términos de una función semiótica. Mayén, Díaz & Batanero (2009) la definen como una correspondencia entre conjuntos, que pone en juego tres elementos:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia (esto es un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido).

> Esta idea de función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática, pues cualquier posible objeto matemático (concepto, propiedad, argumento, procedimiento, etc.) puede jugar el papel tanto de expresión como de contenido en una función semiótica. (p. 78)

Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados, como se observa en la Figura 1 (Godino, Font, wilhelmi & Lurduy, 2009, p. 5)

Figura 1. Tipos de significados pragmáticos

La visión antropológica, pragmatista y semiótica sobre el conocimiento didáctico-matemático asumida por el EOS se ha concretado en una manera de concebir y analizar la actividad matemática con claras consecuencias para la educación matemática (Giacomone, et al, 2018). Para el análisis de la actividad matemática, se requiere entonces las nociones de práctica matemática y sistemas de prácticas.

Se considera práctica matemática o sistemas de prácticas matemáticas a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas (Godino, et al, 2007).

En el EOS se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas, lo que implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen en la actividad matemática, los que se refieren al texto y los que se refieren a las habilidades.

> En el primero están aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En el segundo nivel esta la tipología de objetos que emergen de las formas de ver, hablar, operar, sobre los objetos del primer nivel (Godino, Batanero, Font, 2007).

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), que evocamos al desarrollar actividad matemática y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual (Godino y Font, 2007).

A partir de estos objetos mencionados, ostensivos y no ostensivos, que intervienen en las prácticas matemáticas, el EOS propone que 'participen y emerjan' distintos tipos de objetos primarios matemáticos, los cuales según su naturaleza y función son clasificados en las siguientes categorías:

- Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.);
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-Matemáticas, ejercicios);
- Conceptos-definiciones, introducidos mediante definiciones o descripciones (recta, punto, número, media, función);
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos);
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo). (Giacomone, et al, 2018).

Estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales y teorías. Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática (Godino, et al, 2007). Para un análisis más preciso de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades mencionadas. En cada caso estos objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, formando configuraciones (Giacomone et al., 2018). En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas (Godino, Batanero, Font, 2007). Esta interconexión se muestra en la Figura 2 (Font & Godino, 2006, p.69).

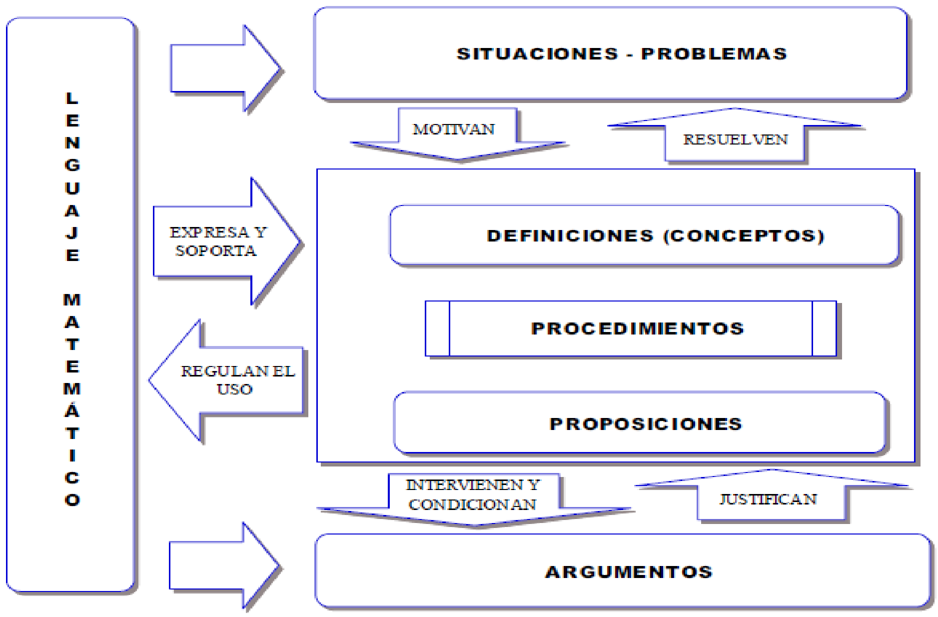


Figura 2. Configuración de objetos primarios

El EOS considera que, para describir la actividad matemática, es necesario contemplar estos seis elementos: lenguajes, situaciones problema, conceptos, procedimientos-técnicas, proposiciones-propiedades y argumentos. Los cuales como ya se mencionó se articulan formando configuraciones. Las configuraciones informan de las condiciones epistémicas para dicha actividad (configuración previa) o de los indicadores del producto o resultado de dicha actividad (configuración emergente) (Godino, Font, Wilhelmi, De Castro, 2009). Por ello la propuesta de investigación busca analizar la actividad matemática estudiantil, cuando se estudian funciones trigonométricas y se usa un software matemático que favorezca el análisis de las configuraciones previas o emergentes de los estudiantes.

La actividad matemática es asumida como toda acción que los estudiantes desarrollan para resolver problemas, para comunicar las soluciones, para interactuar con los amigos cuando se enfrentan a objetos matemáticos.

2.2 Génesis instrumental

Las TIC tienen cada vez más presencia en el aula de clase de Matemáticas, debido al aumento de su presencia en la vida cotidiana. Diversos autores informan sobre los beneficios que tienen para el aprendizaje (Laborde, 2001; Moreno y Waldegg, 2002; Acosta, 2005) lo cual sugiere estudiar las prácticas educativas de los profesores para ofrecer tanto oportunidades de formación matemática a los estudiantes como para implementarlas en las clases.

Existen algunos enfoques teóricos para la integración de la tecnología digital (TDi) en la educación matemática. Algunos han sido adaptados de teorías existentes en educación matemática, con nuevos énfasis hacia marcos de trabajo hechos para investigar el aprendizaje y la enseñanza matemática en ambientes tecnológicos (Pérez, 2014). Algunos de ellos son: la Aproximación Instrumental (AI) (Rabardel, 2011 y Chevallard, 1999), Génesis Instrumental (Rabardel, 2005), la Orquestación Instrumental (OI) (Trouche, 2004).

La génesis instrumental, se considera en el horizonte conceptual, en tanto que ofrece conceptos tales como la instrumentación y la instrumentalización, dos fenómenos que caracterizan las relaciones que los sujetos establecen con la tecnología y los efectos de la tecnología en la actividad humana. El artefacto que usaremos, y cuya eventual transformación en "instrumento", es el software Geogebra.

La aproximación instrumental se da a principios de los años 90 con la participación de Artigüe en los trabajos de un grupo de expertos en la utilización de calculadoras y programas computacionales, de donde empezaron a surgir discusiones y reflexiones. Había una necesidad particular que los llevó a tomar decisiones importantes y al nacimiento de la AI como una concatenación apropiada entre la Teoría Antropológica didáctica y la Ergonomía Cognitiva (Pérez, 2014).

Los conceptos a través de los cuales la aproximación instrumental "permite analizar la actividad con el uso de una herramienta de TDi por un sujeto, sea el profesor, el estudiante o el colectivo de sujetos de la clase, en un contexto educativo, son artefacto, instrumento, esquemas de utilización, técnicas y génesis instrumental" (Pérez, 2014, p. 132).

La génesis instrumental propuesta por Rabardel (1995), propone un enfoque en el que se describe la génesis del instrumento por el sujeto, resaltando la importancia de la actuación humana que construye un instrumento mediante estructuras cognitivas. Según Pérez (2014), se le llama génesis instrumental a un proceso de gran generalidad, a partir del cual se da la producción o elaboración de los instrumentos por parte del sujeto, a través de la utilización del artefacto. Incluye también las formas como el sujeto atribuye funciones al artefacto que de acuerdo con Rabardel (1995), en toda situación de actividad o de utilización de artefactos e instrumentos existe siempre una triada de elementos formada por el sujeto, el instrumento y el objeto, siendo el instrumento un intermediario entre el sujeto y el objeto. Señalando entonces que:

- Artefacto: puede entenderse como una cosa susceptible de su uso, elaborada para inscribirse en actividades intencionales. Puede ser un medio material como un computador o un medio simbólico como el lenguaje algebraico, gráfico.
- Instrumento: se entiende como un artefacto en situación de uso. Esta noción involucra tanto el artefacto como esquemas mentales desarrollados por el sujeto cuando realiza una clase de tareas.

Este proceso de génesis tiene dos dimensiones: la dimensión instrumentalización y la dimensión instrumentación. Estas dos dimensiones son producto de la relación que se establece entre artefacto y usuario. La dimensión instrumentalización corresponde a los aspectos del proceso de génesis que se orientan hacia el artefacto, es el conocimiento del estudiante el que guía la manera como la herramienta es usada y en un sentido, da forma al artefacto (Pérez, 2014). Además, según Rabardel (1995) se refiere a la aparición y a la evolución de los componentes artefacto del instrumento. La dimensión instrumentación corresponde a los aspectos del proceso de génesis que se orientan al sujeto, las cualidades y restricciones de la herramienta influencian las estrategias de resolución de problemas del estudiante y las concepciones emergentes. (Pérez, 2014). Y esta dimensión según Rabardel (1995) se refiere a la adaptación del sujeto a las dificultades que constituyen el artefacto y sus funciones constitutivas.

Godino, Font, Wilhelmi & De Castro (2009) señalan que en la mayoría de los casos el uso de los artefactos (manipulativos, concretos o virtuales, programas de cálculo o graficación), requiere la comprensión estudiantil de configuraciones epistémicas (normas matemáticas) específicas de los tipos de problema abordables con los mismos. Esta aproximación requiere la comprensión de procesos de instrumentación que conviertan tales artefactos en instrumentos de la actividad matemática.

En la génesis instrumental el foco de preocupación de la teoría es la posibilidad que la tecnología escolar incremente habilidades o técnicas, y también el aprendizaje. Para atender a tales preocupaciones se hace referencia a la instrumentalización enfocada al conocimiento del propio artefacto en uso (Briceño & Cordero, 2008), el cual es el proceso usado por el profesor para analizar los diversos artefactos disponibles, para planificar actividades o tareas para potenciar las características y potencialidades del artefacto.

Se ha hablado de las relaciones con el artefacto en los procesos de instrumentación e instrumentalización; pero es necesario que el uso de los instrumentos sea planificado y coordinado, para que los logros que se propongan en la clase sean alcanzados. Ante esto, Trouche (2004) utiliza la noción de orquestación instrumental para describir la gestión que hace el profesor de los instrumentos individuales en los procesos de aprendizaje colectivo, en el sentido de que las génesis instrumentales necesitan ser monitoreadas por el profesor a través de la orquestación de situaciones matemáticas.

Una orquestación instrumental es definida como “la organización intencional y sistemática del uso de varios artefactos disponibles en un ambiente de aprendizaje, por parte del profesor en una situación de tarea matemática dada con el propósito de guiar las génesis instrumentales de los estudiantes” (Pérez, 2014, p.143). Cuando se asignan tareas matemáticas, éstas son organizadas por parte del profesor, guiando a los estudiantes en el uso de artefactos, en nuestro caso tecnológicos.

Para Trouche (2004) una orquestación instrumental está definida además por configuraciones didácticas (arreglo de los artefactos disponibles en el entorno, con un diseño para cada etapa del tratamiento matemático) y por los modos de explotación de estas configuraciones. Estas configuraciones producen registros de actividad, es decir, para dar cuenta de los resultados de la actividad que pueden ser observados por personas distintas del sujeto involucrado en esta actividad.

2.3 TIC: tecnologías de la información y la comunicación

López (2011) citado por Saraiva (2015) considera que las Tecnologías de la Información (TIC), juegan un papel cada vez más importante en la educación, especialmente en la educación matemática. Según el autor, la investigación sobre el uso de las TIC en el aula enfatiza su relevancia en la enseñanza de matemáticas, señalando que es de fundamental importancia su presencia en la formación inicial.

La importancia de las herramientas computacionales en la educación matemática está asociada a su capacidad para ofrecernos medios alternativos de expresión matemática. A su capacidad para ofrecer formas innovadoras de los objetos matemáticos (Moreno & Waldegg, 2003). Esto se ha evidenciado en las clases de Matemáticas donde las herramientas computacionales ofrecen gran cantidad de recursos para que el estudiante interactúe y explore, pasando de construcciones de lápiz y papel a gráficas en diferentes dimensiones, donde el objeto matemático puede ser manipulado sin distorsionar sus propiedades y se pueden cambiar parámetros para identificar características en una gráfica, que podrían ser más fácil de relacionar para el estudiante. Fiallo & Gutiérrez (2009) afirman que

> "Las nuevas tecnologías ofrecen herramientas que nos pueden ayudar a definir una metodología de enseñanza activa y participativa. El sistema de Geometría dinámica pone a disposición del estudiante un micromundo geométrico en el cual los conceptos trigonométricos pasan de ser simples dibujos o fórmulas a convertirse en objetos geométricos que pueden ser construidos y manipulados" (p. 149).

Estas herramientas le permiten al estudiante poner en juego todas sus capacidades para analizar, explorar, tomar datos, formular y comprobar demostraciones. Pero al mismo tiempo, la escuela debe adaptarse a la evolución tecnológica. Aún si es consciente de las nuevas posibilidades que la tecnología informática ofrece a la enseñanza de la matemática, apenas y se consigue sacar provecho de la integración de calculadoras y programas de Geometría dinámica, aún cuando las TIC ya se han generalizado modificando profundamente el contexto tecnológico (Artigue, 2004). Todas las posibilidades que ofrece la tecnología son accesibles para los profesores, muchas de ellas están enfocadas a mejorar la enseñanza de las Matemáticas, se requiere el compromiso de la institución y del profesor para aprenderlas y apropiarlas antes de integrarla a las clases. Se requiere estar en continua actualización de ellas porque están en constante cambio para lograr acercarlas al contexto de los estudiantes.

Existen muchas definiciones de las TIC, una de ellas es que son herramientas teórico conceptuales, soportes y canales que procesan, almacenan, sintetizan, recuperan y presentan información de la forma más variada. Los soportes han evolucionado en el transcurso del tiempo (telégrafo óptico, teléfono fijo, celulares, televisión) ahora en está era podemos hablar de la computadora y de la internet. (Ciberespacio profesional, 2011). Las TIC permiten desarrollar destrezas, habilidades y trabajo autónomo, que con la enseñanza tradicional sería difícil de lograr. Implementar las TIC requiere un cambio del ambiente escolar, del rol del profesor y estudiante, una integración de estos tres elementos puede posibilitar una inserción efectiva de estas tecnologías a la enseñanza.

Una de las herramientas posibles son algunos programas o software enfocados en Geometría dinámica que ofrecen gran cantidad de recursos para el área de Matemáticas, “A diferencia de otros softwares de Matemáticas, la Geometría dinámica fue destinada desde su origen a la enseñanza, por lo que se reconoce fácilmente su vocación didáctica y se resaltan sus potencialidades” (Acosta, 2005, p. 122). Uno de estos software es Geogebra, el cual puede considerarse que “posee características semejantes a un software simulador. Con el referido software, el alumno puede, desde una construcción, alterar los objetos preservando las características originales de la construcción” (González, Matilla & Rosales, 2017).

Además, Saraiva (2015) afirma que dado “el inmenso potencial pedagógico y facilidad de adquisición de Geogebra, es imposible no considerar las posibilidades de expansión del aprendizaje que ofrece este software en contenido de Matemáticas” (p. 145)

En este trabajo se asume las TIC como el ordenador, el software Geogebra y la internet para consultas de los estudiantes. En el capítulo de metodología se explica la intencionalidad del software Geogebra dentro del proyecto de investigación.

2.4 Funciones trigonométricas

2.4.1 Aspectos históricos

Los comienzos de la Trigonometría se remontan a las Matemáticas de la antigüedad. En Babilonia y Egipto hace más de 3000 años ya empleaban los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para realizar medidas en agricultura y en la construcción de las pirámides. En la antigua Grecia, Hiparco de Nicea (siglo II a.c) construyó las tablas de cuerdas que fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas de la actualidad. En India desarrollaron un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de en cuerdas. En Arabia a finales del siglo X ya habían completado tanto la función seno como las otras cinco funciones trigonométricas y en Occidente sobre el siglo XIII el alemán Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de ciertas líneas.

En la trigonometría de tiempos modernos, se produjo un gran avance por parte de algunos matemáticos reconocidos, como John Napier (siglo XVII), el cual produjo un gran avance en los cálculos trigonométricos, después Isaac Newton descubrió el cálculo diferencial e integral, logrando así representar muchas funciones matemáticas mediante el uso de series infinitas de potencias de la variable x.

Finalmente, en el siglo XVIII, el matemático Leonard Euler, fue quien verdaderamente fundó la trigonometría moderna, definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos (Flores, 2008).

2.4.2 Funciones trigonométricas y currículo

La Trigonometría se menciona explícitamente en los tres documentos rectores del Ministerio de Educación Nacional, como son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016). Algunos de los documentos anteriores no son expliciticos frente al desarrollo del pensamiento matemático, en el tema de las funciones trigonométricas. Sin embargo, en los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), se refieren a comprender y utilizar funciones periódicas y justifica las soluciones, en la cual se propone algunas evidencias de aprendizaje como: modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.

Fiallo (2010), afirma que analizando las sugerencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría contenida en los currículos de educación secundaria de Colombia vemos poca concreción del enfoque metodológico propuesto para la enseñanza de la Trigonometría. Tampoco se dan pautas claras sobre el papel que deben desempeñar en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos trigonométricos y sus distintas formas de representación (numérica, geométrica, algebraica, analítica y funcional).

En el plan de área de la institución León XIII, la trigonometría se enseña inicialmente con las funciones trigonométricas en el círculo unitario, luego las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y algunos problemas de aplicación con los ángulos de elevación y de depresión. Después la ley del seno y el coseno para finalizar con las identidades y ecuaciones trigonométricas. Todo lo anterior se puede agrupar en lo que se relaciona con el triángulo rectángulo. La otra forma de enseñar la trigonometría es a partir de las gráficas, propiedades, formas de representación y funciones inversas.

Para el trabajo de investigación, no se estudia la trigonometría, sino algunos aspectos de ella, como las gráficas de las funciones trigonométricas, las identidades y aplicación a la Física.

2.4.3 Algunas dificultades en la enseñanza de la trigonometría

Diversos estudios han contribuido al análisis de las dificultades en trigonometría, una de ellas menciona que “no se profundiza en el tema ni se presentan propuestas para afrontar el problema, lo cual ha llevado a que la trigonometría se enseña de la misma forma (lo que está en los libros de texto) durante los últimos años” (Fiallo y Algarín, 2013, p. 62).

La enseñanza de la trigonometría "se caracteriza por usar un enfoque algebraico consistente en la manipulación de símbolos, operaciones y propiedades abstractas que no ayuda a la comprensión de los conceptos y propiedades" (Fiallo, 2010). Otra de las dificultades la plantea Saraiva (2015):

> "Trabajar con estudiantes de secundaria nos muestra que muchos de estos estudiantes tienen dificultades para comprender los conceptos relacionados con la Trigonometría. Comprender las características de funciones como el seno y el coseno sigue siendo un desafío para muchos estudiantes. El trabajo en el Grupo de Matemáticas confirma esta tendencia y muestra que muchos estudiantes terminan la escuela secundaria sin siquiera estudiar Trigonometría" (p.144).

Estas dificultades alejan a los estudiantes de la comprensión de temáticas relacionadas con la Trigonometría, que tiene importancia para el estudio de conceptos de la Física Clásica y aplicaciones a la ingeniería y medición de distancias.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Paradigma y enfoque de la investigación

La investigación se abordó en un paradigma cualitativo, en tanto que este enfoque busca reconstruir la realidad, la cual se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades, además de la interpretación del investigador y de la que se produce mediante la interacción de todos los actores (Hernández, Fernández & Baptista, 2010). Se adoptó un enfoque fenomenológico - hermenéutico (Sánchez, 1998), porque la respuesta a la pregunta planteada requiere tanto de interpretación como de la capacidad de reflexión del investigador sobre el fenómeno u objeto de estudio, además de que los fenómenos objeto de investigación -objetos matemáticos, objetos computacionales, atribución de significados- necesitan ser comprendidos. Por ello en este trabajo se buscó interpretar la actividad matemática, mediante el estudio de producciones de los estudiantes cuando usan el software Geogebra en el tema de las funciones trigonométricas.

3.2 Participantes

En la Institución Educativa los estudiantes están organizados por modalidades con relación con la media técnica: Asistencia Administrativa, Programa Técnico en Sistemas y Sistemas Ecológicos Agropecuarios. Para la implementación de la investigación se seleccionaron los estudiantes que pertenecen a la modalidad de Programa Técnico en Sistemas porque tienen conocimiento base de manejo de computadores y algunos programas específicos, que se enfocan en la programación; Además este grupo de estudiantes tiene más intensidad horaria en Matemáticas que los otros grupos, lo que permitió parsimonia durante las diversas fases del trabajo de investigación.

Los estudiantes fueron informados tanto de la posibilidad de participación en la investigación, como de su derecho a no participar en ella sin que tal negación tuviera efectos negativos en la calificación del curso. Igualmente, se les informó que en cualquier momento podrían manifestar su negativa a continuar participando. Todos los estudiantes hicieron firmar por sus acudientes legales el consentimiento informado y de igual manera se les informó a todos ellos que se mantendría la confidencialidad en todo el proceso.

El grupo tiene un total de 35 estudiantes, se dividió en dos subgrupos, de acuerdo con el orden alfabético de la lista de clase, cada subgrupo trabajó con un investigador, y cada investigador estaba disponible para atender inquietudes del subgrupo correspondiente. Los estudiantes trabajaron individualmente, y la decisión de separar el grupo se tomó para disponer de un espacio más amplio para el desarrollo del trabajo.

3.3 Software y temática

El software elegido fue Geogebra porque es un software de Matemáticas dinámicas, para todos los niveles educativos, que reúne Geometría, Álgebra, gráficos y Cálculo en un solo programa, lo que favorece mostrar algunos elementos o proposiciones geométricas de manera dinámica, para la construcción e interacción de puntos, figuras, cónicas y gráfica de funciones. Además de ser de libre distribución y uso, es un software usable, intuitivo que permite interacción sencilla.

El tema elegido fue funciones trigonométricas por varias razones: está contemplado dentro del diseño curricular para el grupo décimo, la importancia del tema para las discusiones Matemáticas y aplicación a otras ciencias, en este caso la Física; también porque en la revisión de la literatura encontramos dificultades relacionadas con su enseñanza, reportadas nacional e internacionalmente (Fiallo & Algarín, 2013). Además, el trabajo con los estudiantes muestra que muchos de ellos, tienen dificultades para comprender conceptos sobre Trigonometría. A pesar de la importancia de este tema para el estudio de las funciones, la Geometría y la comprensión de conceptos de Física Clásica. (Saraiva, 2015). Se debe señalar que en esta investigación no estudiamos la Trigonometría sino algunos aspectos de ella, como las funciones trigonométricas.

3.4 Actividad matemática en clase

Durante las sesiones de trabajo con los estudiantes se favoreció la interacción entre compañeros durante el desarrollo de las actividades propuestas, asumiendo como estrategia la colaboración entre los estudiantes, para resolver dudas, compartir ideas, discutir soluciones o interpretaciones de los compañeros. En estas producciones se buscó identificar el significado de las representaciones de objetos matemáticos en relación con los significados de objetos computacionales que surgen cuando se usa el software para resolver tareas matemáticas. La posibilidad de preguntar a los compañeros, al profesor o de buscar información en internet, forma parte integral del concepto de 'actividad matemática' usado en la investigación.

Se propusieron actividades para ser desarrolladas como tareas matemáticas, en las clases de Matemáticas, con el objetivo de analizar la actividad matemática de los estudiantes, cuando se usa el software Geogebra para estudiar funciones trigonométricas. Los investigadores usaron las TIC por medio del software Geogebra, trabajando con el ordenador y con acceso a internet, con el propósito de ilustrar representaciones, conceptos, propiedades y procedimientos matemáticos para resolver tareas propias de la actividad matemática. Estas tareas fueron planeadas por el profesor por medio de guías matemáticas, que fueron desarrolladas por los estudiantes con la ayuda del software.

En el desarrollo de las Guías se trabajó con funciones trigonométricas, especialmente la función Seno, Coseno, Tangente, y la discusión se enfocó en las gráficas y en su interpretación, además de una aplicación en la Física sobre el movimiento armónico amortiguado.

La primera Guía reconocimiento del software, buscó que el estudiante por sí mismo interactuara con el software Geogebra, y se propusieron actividades sobre gráficas de la función lineal y cuadrática, circunferencia y recta tangente a ella; la intención de la Guía fue usar los comandos del Software que son más utilizados para graficar funciones, y que fueron tenidos en cuenta en nuestra investigación. Una segunda Guía buscó que, a través de las tareas propuestas los estudiantes realizarán gráficas de algunas de las funciones trigonométricas, como la función Seno, Coseno y Tangente, a partir del círculo unitario, y que indagarán acerca de elementos como dominio, rango, puntos de corte, asíntotas, máximos y mínimos. La tercera Guía se enfocó en la exploración de transformaciones, mediante el software Geogebra, de la función Seno, donde se apreció el efecto gráfico de cambiar el parámetro correspondiente a: amplitud, periodo, desplazamiento de fase, entre otros. La cuarta Guía tuvo como objetivo resolver identidades trigonométricas apoyadas por el software y finalmente, la Guía 5 planteó el estudio del movimiento armónico amortiguado utilizando las funciones trigonométricas, para discutir una aplicación Física. En todas las Guías se buscó abordar los aspectos más importantes de las funciones trigonométricas acorde con la propuesta curricular de la Institución y a la vez se pudiera analizar la actividad matemática a partir de los componentes teóricos del EOS.

Los estudiantes desarrollaron las Guías propuestas, y sus soluciones fueron consignadas en un documento de Word con su nombre, así como también carpetas con capturas de pantalla, donde agregaba pantallazos de cada ítem realizado y después lo subía a la carpeta de Google Drive de Matemáticas 10-4, cuando se presentaron dificultades para cargar la carpeta, se sugirió enviar el trabajo al correo personal de los investigadores. En la sección de resultados se mostrará evidencia de algunas de las soluciones de los estudiantes.

Para el análisis de cada una de las Guías previas, se propusieron Guías para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) (Godino et al., 2008). Una de las Guías fue para analizar la componente matemática de las tareas propuestas y otra para el componente computacional involucrado en las soluciones estudiantiles de las tareas. Además, se propuso utilizar una Guía para estudiar el uso y emergencia de objetos matemáticos y computacionales de las GROS emergentes para cada una de las soluciones planteadas por los estudiantes, rastreando los significados institucionales y personales.

El concepto de actividad matemática asumido en este trabajo, basado en el EOS, se enfoca en tres momentos principales: el primero de ellos es el que nos aporta el enfoque y refiere a toda acción que los estudiantes desarrollan para resolver problemas, comunicar las soluciones, interactuar con los compañeros cuando se enfrentan a objetos matemáticos; el segundo refiere a la actitud de los estudiantes, la forma en que trabajan en el computador mediante el software Geogebra, cómo interactúan con la herramienta computacional; Y el tercero refiere a procesos de instrumentación e instrumentalización, que también dan cuenta de la actividad matemática, en ese proceso de realcionar objetos matemáticos con objetos computacionales.

El papel de los investigadores fue de observador- participante, pues en algunos momentos se interactuó con los estudiantes en el papel de profesores, es decir, participantes para recordar conceptos de manera breve, problemas con el software y todo el tiempo estuvimos como observadores del desarrollo del trabajo, en nuestro papel de investigadores con apoyo de registros fotográficos y videos.

Las actividades fueron planeadas por los profesores investigadores, ya que las tareas necesitaron ser coordinadas y direccionadas, este proceso es lo que se denomina Orquestación Instrumental y refiere a “la organización intencional y sistemática del uso de varios artefactos disponibles en un ambiente de aprendizaje, por parte del profesor en una situación de tarea matemática dada con el propósito de guiar las génesis instrumentales de los estudiantes” (Pérez, 2014, p.143). La orquestación instrumental se analizó como un tercer elemento de la génesis instrumental, porque resalta el papel del docente de acompañar el desarrollo de las Guías por parte de los estudiantes, los cuales a medida que avanzaron en ellas, fueron adquiriendo cierta experiencia en el manejo de algunos elementos del software que le ayudaron a adquirir procesos de génesis instrumental.

Las fuentes de datos fueron: documentos de Word con las respuestas de los estudiantes a las cinco Guías y pantallazos de las construcciones en Geogebra, video de la aplicación de la Guía 5 donde se utilizaron momentos de la clase pero en imágenes para analizar la actividad matemática en la actitud, en el trabajo colaborativo, concentración en el desarrollo de las tareas, entrevista escrita a tres estudiantes y en audio a otros tres, esto con el fin de identificar actitudes y formas de expresarse acerca de la investigación y su participación en este proceso y fotos de trabajo en el aula.

3.5 Criterios de análisis de datos

El grupo elegido como ya se había mencionado antes, corresponde al grupo 10-4, que tiene 35 estudiantes. Con ellos se aplicaron las cinco guías matemáticas. Luego seis de esos estudiantes aceptaron conceder entrevistas posteriores. El análisis de los datos se realizó de acuerdo con los siguientes criterios:

- Objetos primarios matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007)
- Conceptos matemáticos
- Conceptos computacionales
- Objetos matemáticos que se proponen en cinco guías matemáticas
- Procesos de instrumentación, instrumentalización y orquestación instrumental
- Respuestas de los estudiantes a las cinco guías
- Entrevistas semiestructuradas realizadas a seis estudiantes
- Comparación entre las respuestas dadas a las guías, las GROS matemáticas y las GROS computacionales.
- Todas las novedades encontradas en el desarrollo de las guías de los estudiantes.

4. RESULTADOS

En este capítulo se presentan algunos de los hallazgos obtenidos en la solución de las tareas propuestas, que fueron desarrolladas por los estudiantes en cinco guías, con apoyo del software Geogebra.

Se desarrollaron un total de cinco guías. En el diseño de las guías se incluyeron notas para los estudiantes para dar cuenta del seguimiento de la clase. En la investigación el objetivo fue analizar la interacción del estudiante con el artefacto (Geogebra), mediante la indagación de la actividad matemática presente en cada una de las tareas matemáticas propuestas.

A continuación, se presenta el análisis de cada una de las Guías con sus respectivas Tablas GROS (Guía de reflexión sobre objetos y significados) con los conceptos matemáticos y computacionales, a su vez con los significados emergentes que utiliza el estudiante.

Las Tablas GROS proponen posibles significados que pueden ser conferidos a los objetos matemáticos, y si son conceptos, procedimientos, lenguajes, argumentos. Esta Tabla no se cumplimenta de manera única, pero los significados conferidos ayudan a reconocer posibles conflictos de significado que surjan durante la solución de una tarea matemática.

4.1 Guía 1: Reconocimiento del software

El objetivo de la Guía fue explorar la interfaz gráfica de Geogebra y los comandos básicos. Con base en la experiencia de los investigadores, se cumplimenta y se presenta la Tabla 1, en ella se asignan algunos significados a los objetos matemáticos bajo estudio. Los significados asignados no son los de referencia, pero sirven para fijar términos para el estudio.

Después que los estudiantes interactuaron con el software para el desarrollo de la Guía propuesta, surgieron objetos emergentes tanto matemáticos como computacionales, para dar solución a las tareas planteadas, por tanto, estos conceptos aparecen en cursiva en la tercera columna de las Tablas 1 y 2.

A continuación, se presenta la Tabla 1 correspondiente a los objetos matemáticos y también los objetos emergentes.

Tabla 1. GROS-Conceptos matemáticos Guía 1-

Tipos de Objetos	**Significados**	**Significados emergentes**
Conceptos (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)		
Función	Es una relación que se establece entre dos conjuntos, a través de la cual del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto	
Función lineal	Función polinómica de primer grado, cuya representación en el plano es una línea recta	
Función cuadrática	Función polinómica de grado 2. La forma general de una función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$. La gráfica de una función cuadrática es una parábola	
Puntos de corte	Son los puntos de intersección de la gráfica de la función con cada uno de los ejes de coordenadas	
Circunferencia	Línea curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro situado en el mismo plano que se llama centro	

Segmento	El segmento es un fragmento de recta que está comprendido entre dos puntos, llamados puntos extremos o finales	
Perpendicular	Las líneas perpendiculares son líneas, segmentos o rayas que se interceptan para formar ángulos rectos	*Es la unión de dos segmentos a una recta que pasa por el centro de la circunferencia*
Recta tangente	Es la recta que pasa por un punto de la circunferencia y es perpendicular al radio	*Es una recta que pasa por el centro de la circunferencia*
Punto de la circunferencia	Es un punto que pertenece a la circunferencia y satisface su ecuación $x^2+y^2=1$	
Ángulo	Parte del plano determinado por dos semirrectas llamadas lados que tienen el mismo punto de origen llamado vértice	
Intersección	Es el punto donde se cortan las dos gráficas de las funciones	• *Es el punto donde se cortan dos rectas* • *Es el punto (0,0)*

La Tabla 2 refiere a los significados asociados con los términos propios del uso del software con sus significados emergentes. Su identificación previa es importante para contrastar con los usos y atributos que los estudiantes les asignan. Esto permite identificar posibles conflictos de significado entre el conocimiento personal de los estudiantes y el conocimiento institucional.

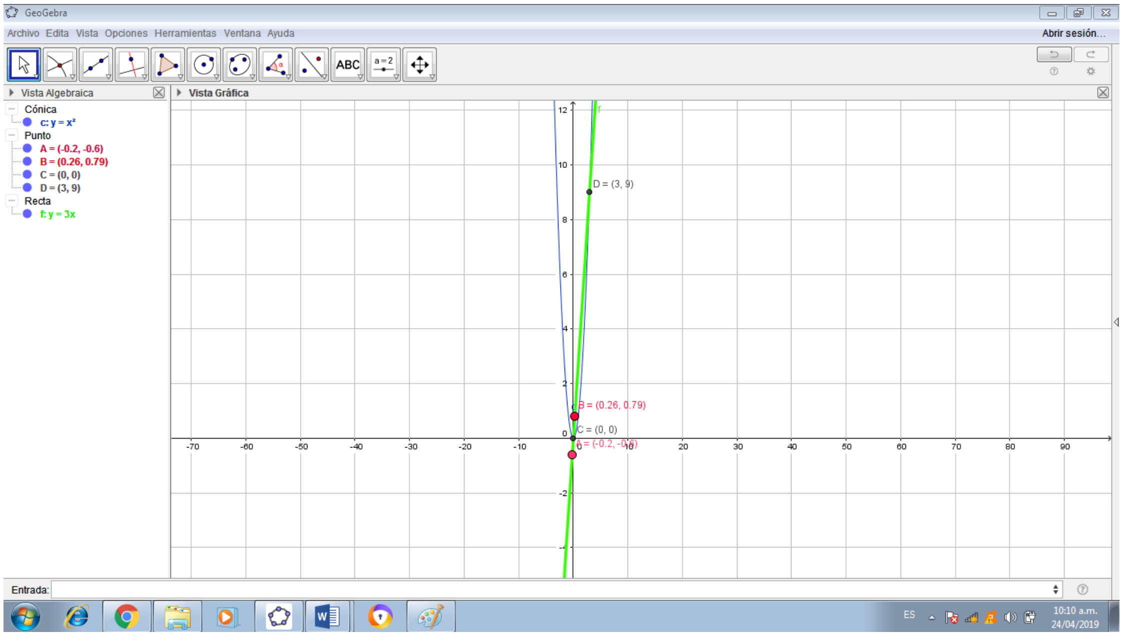
Tabla 2. GROS-Conceptos computacionales Guía 1-

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)	**Significados emergentes**
Conceptos (referentes a herramientas computacionales para las cuales se puede formular una definición)		

Vista Gráfica	Refiere a diversos tipos de cuadrículas y ejes	
Barra de entrada	Permite introducir directamente expresiones (números, operaciones, coordenadas, ecuaciones) y comandos, así como redefinir los objetos ya existentes	
Comandos	Instrucción que permite, al programa, realizar una acción predeterminada	
Propiedades de objetos	Cambiar el color Redefinir valores Grosor de la línea Mostrar las coordenadas de un punto Ocultar las coordenadas de un punto	*Estilo de trazo punteado*
Barra de menú	Agrupa los comandos del sistema o software por categorías de acuerdo a su uso. El acceso a ella puede ser vía mouse o teclado	
Alejar o Aproximar	Instrucción que permite, acercar la imagen o alejarla (zoom)	*Instrucción que permite sólo alejar*

La Guía, incluyó dos tareas, con ítems de instrucciones, ambas con seis literales. En la tarea 1, se preguntaba por los puntos de corte entre la gráfica de la función lineal y la gráfica de la función cuadrática y en la tarea 2 se preguntaba por la recta tangente a una circunferencia y la medida del ángulo central.

En la tarea 1 encontramos que la mayoría de los estudiantes graficaron correctamente las dos funciones, pero no dieron cuenta de los puntos de corte y otros pocos estudiantes las graficaron y encontraron los puntos de corte, resaltando que la mayoría de ellos encontraron el punto (0,0), que era el visible en la pantalla, pero sólo dos estudiantes identificaron que había dos puntos de corte. A continuación, se presentan soluciones dadas por algunos estudiantes.



Tuve que alterar el zoom para plasmar en el pantallazo el punto de intersección "D: (3,9)" ya que en un inicio no aparecía en pantalla.

Figura 3. Respuesta de José, Tarea 1 Guía 1, abril 24

En la tarea 1, la cual preguntó por los puntos de corte, se aprecia que José (Figura 3) dibuja tanto la parábola como la recta. El estudiante deduce que hay dos puntos de corte, pero la gráfica sólo muestra uno, por lo cual él utiliza el comando Zoom para incluir el otro punto de corte. Se aprecia que, entre las dos opciones de Zoom, ampliar o disminuir, el estudiante toma la opción apropiada al caso y obtiene la gráfica donde se muestran los dos puntos de corte. En este caso se aprecia la interacción entre los conceptos matemáticos- una ecuación de segundo grado puede tener dos cortes, uno o ninguno- y los recursos computacionales para encontrar el otro punto de corte, en caso que exista. Se aprecia el uso instrumental del software al servicio de la exploración matemática propuesta por el estudiante. La dimensión instrumentación (Pérez, 2014) corresponde a los aspectos del proceso de génesis que se orientan al sujeto, las cualidades y restricciones de la herramienta influencian las estrategias de resolución de problemas del estudiante y las concepciones emergentes. Para el caso ilustrado, el estudiante atribuye cualidades al software, que le permiten resolver la tarea.

El estudiante utiliza el comando *Zoom*, que fue definido en la Tabla 2 como "alejar o aproximar" con el objetivo de encontrar el punto de corte, cuya existencia reconoce matemáticamente, pero que no aparece en la gráfica. El sentido conferido al comando Zoom supera el conferido en la Tabla, y ha sido usado por el estudiante, con base en los requerimientos de la tarea matemática.

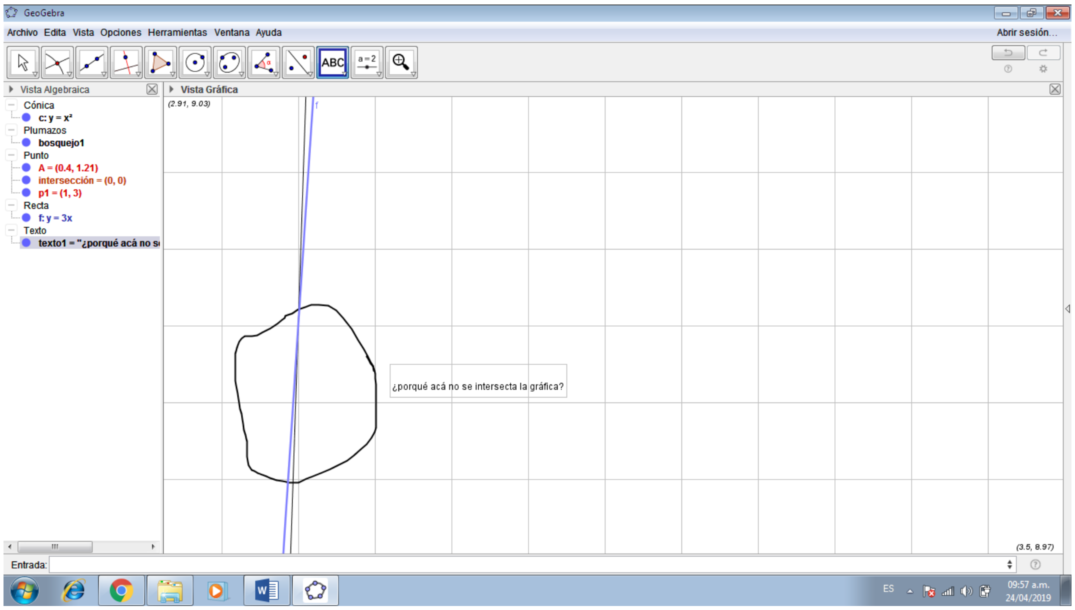


Figura 4. Respuesta de Carlos, Tarea 1 Guía 1, abril 24

La pregunta que el estudiante formula: ¿por qué acá no se intercepta la gráfica? supone que él sabe que las dos gráficas se deben “interceptar”, pues el concepto matemático intersección que está definido en la Tabla 1, es el que reconoce; sin embargo, su representación gráfica no da cuenta de esta propiedad matemática. El estudiante no ha percibido que la escala utilizada no permite ver a la gráfica de la parábola, porque al intentar buscar el segundo punto de corte altera la escala de una manera que distorsiona la gráfica de tal suerte que la parábola parece una línea recta.

El sentido conferido al comando Zoom es el definido en la Tabla 2 como un concepto computacional emergente referido a solamente alejar. Por lo tanto, la relación entre los significados matemáticos y los significados computacionales, en este caso, produjo un conflicto de significado, donde el significado computacional conferido cuestiona su significado personal sobre el concepto matemático, ya que no logró encontrar el segundo punto de corte. Esa diferencia entre lo que la institución considera, lo que el currículo considera y lo que consideran los estudiantes, esa diferencia en la interpretación, en los significados, se llama conflicto de significados.

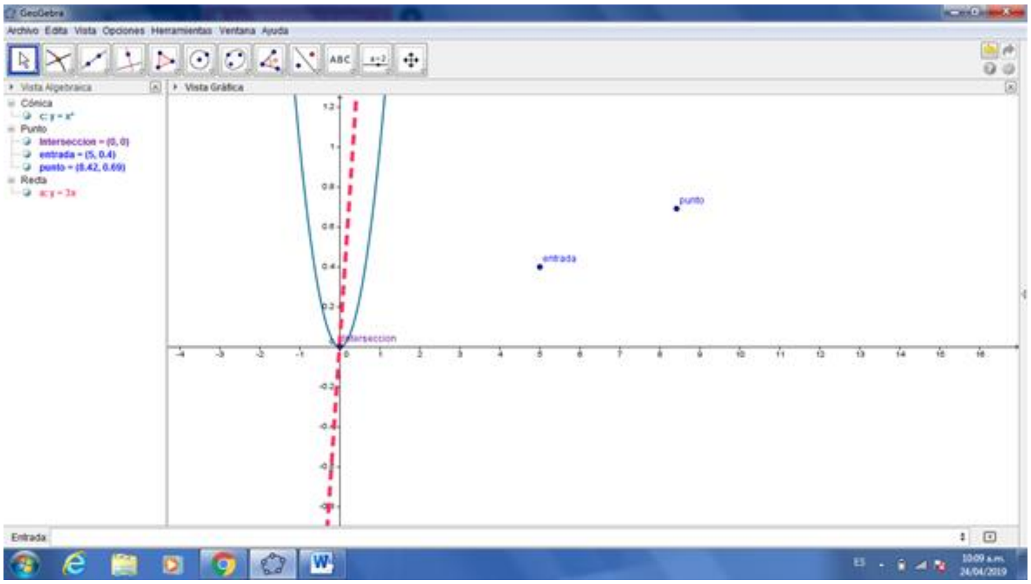


Figura 5. Respuesta de Juan José, Tarea 1 Guía 1, abril 24

La respuesta dada por Juan José, supone que él tiene un conflicto de significado para el ‘concepto matemático intersección’ entre la función lineal y la función cuadrática, definido en la Tabla 1. Se aprecia que reconoce que el punto de intersección es solamente el que observa en la vista gráfica del ordenador, lo que implica que no necesite utilizar el concepto computacional alejar o aproximar, definidos en la Tabla 2, para poder visualizar el otro punto de corte. Este conflicto de significado se pudo deber a que la enseñanza del significado institucional del concepto intersección, sólo se enfocó en la intersección de dos rectas donde el punto de corte sólo es uno, entonces para esta situación se considera desprovista de significado para el estudiante.

Además, se aprecia que el estudiante utilizó un concepto computacional emergente definido en la Tabla 2 como propiedades de objetos: “estilo de trazo punteado”, que no estaba dentro de los ítems para desarrollar en la guía. La figura 5 evidencia que el estudiante buscó diferenciar la función lineal de la función cuadrática, con ayuda de las propiedades de los objetos del software

Geogebra, que para él no son limitadas. Una de las principales características de un software de Geometría dinámica interactiva es la posibilidad de que, en una actividad desarrollada, se puedan hacer indagaciones, descubrir relaciones, confirmar resultados (González, Matilla & Rosales, 2017).

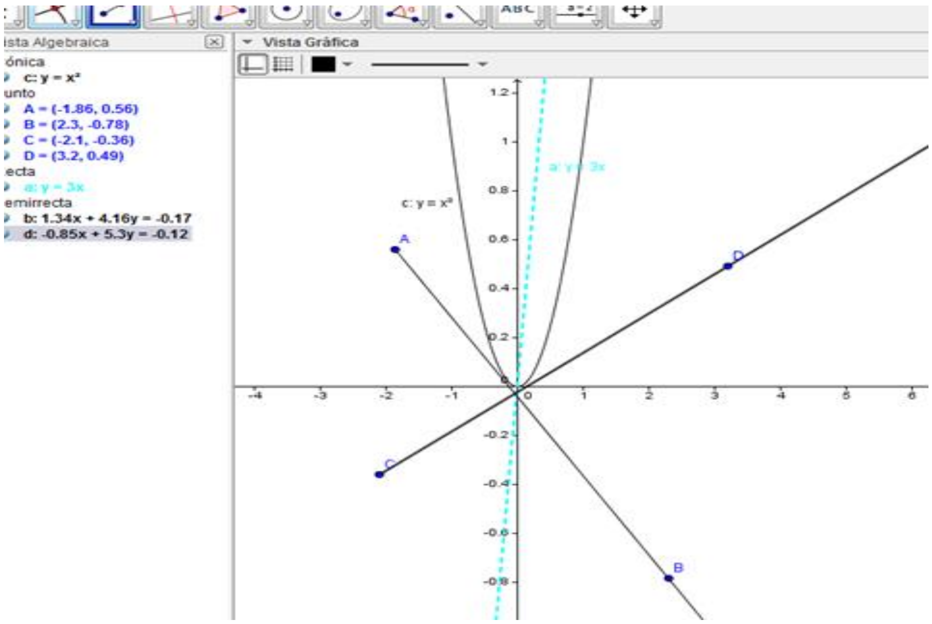


Figura 6. Respuesta Alexandra, Tarea 1 Guía 1, abril 24

La respuesta dada por la estudiante, supone que también presenta un conflicto de significado para el concepto matemático intersección definido en la Tabla 1, pues aparece el concepto emergente definido como la intersección entre dos rectas, con ayuda del objeto computacional insertar recta. Su significado personal de intersección difiere del significado institucional, pues ella con sus objetos computacionales emergentes demuestra que la intersección se presenta es entre rectas, no reconoce las funciones lineal y cuadrática. Además, hay confianza con el ordenador (Gómez, 2010), porque se siente seguridad en las operaciones efectuadas con éste, cuando cree que puede manejar los procedimientos que requiere su uso. Sin embargo, la estudiante no llega al desarrollo de la tarea, porque los conceptos matemáticos y computacionales se ven limitados por el conflicto de significados, que fue lo observado en la respuesta de Alexandra (Figura 6).

En la tarea 2, encontramos la mayor dificultad en el concepto matemático recta tangente, se presenta la Figura 7 y 8 con algunas soluciones de los estudiantes.

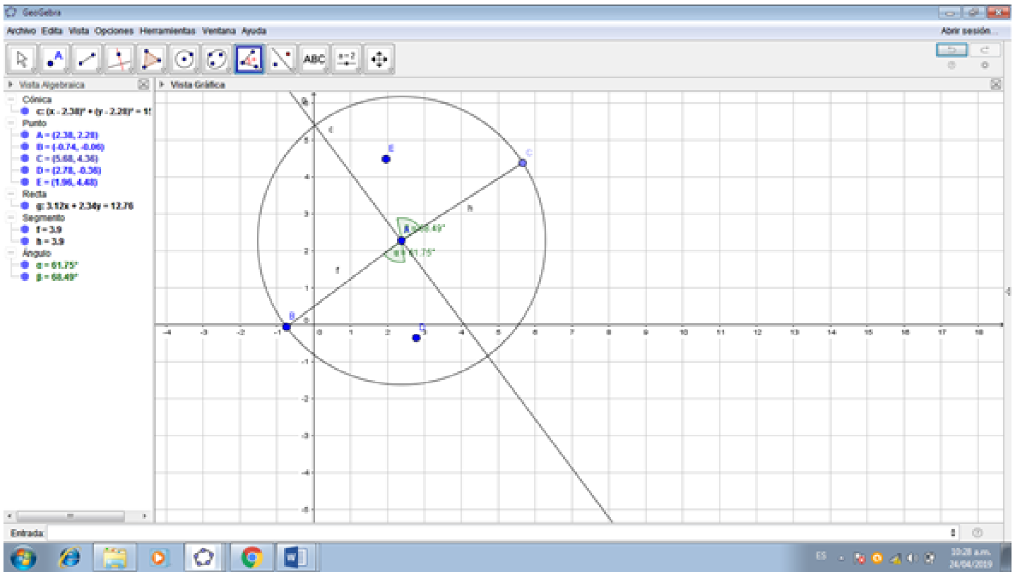


Figura 7. Respuesta Kevin, Tarea 2 Guía 1, abril 24

La respuesta del estudiante supone que la tarea de trazar una recta tangente a la circunferencia, presenta varios conflictos de significados: uno de ellos es el de la recta tangente, definido en la Tabla 1 como: "la recta que pasa por un punto de la circunferencia y es perpendicular al radio", pues para él aparece un concepto matemático emergente de la Tabla 1, como la recta que pasa por el centro. Otro fue el de perpendicularidad referido en la misma Tabla, porque asume el concepto emergente, como unión de dos son segmentos a una recta que pasa por el centro de la circunferencia. En cuanto al concepto ángulo, tiene claridad en el comando de Geogebra, que se debe seleccionar tres puntos para hallar la medida de un ángulo, pero se evidencia su conflicto de significado en el ángulo central.

Los conceptos computacionales le ayudan a realizar la tarea matemática; pero sus conflictos de significado de los conceptos matemáticos, no le permiten que llegue a resolver la tarea matemática de la forma esperada. Por ello se resalta que en este proceso adquiere relevancia la detección de conflictos semióticos o de significado, planteados como discordancias entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, ya sean personas o instituciones (Figueroa & Aznar, 2017).

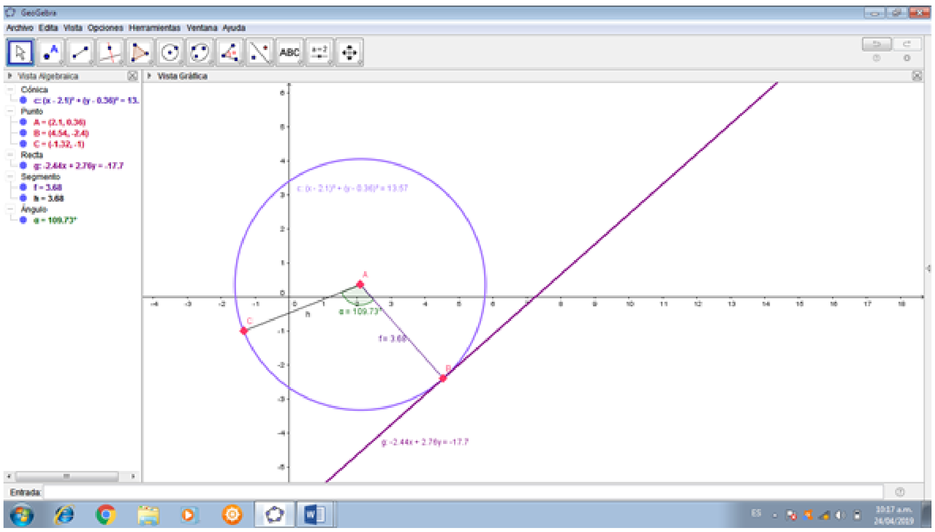


Figura 8. Respuesta María Camila, Tarea 2 Guía 1, abril 24

En la Figura 8, el significado personal de la estudiante respecto el concepto matemático de recta tangente definido en la Tabla 1 corresponde al significado institucional, utilizando para ello los conceptos computacionales definidos en la Tabla 2 de una manera adecuada para hacer bien las construcciones y dar cuenta de la tarea matemática propuesta.

En la figura 7 y 8, se observa la respuesta de dos estudiantes a la misma tarea, el primero con conflictos de significado tanto matemáticos como computacionales, la segunda con significados personales que concuerdan con los significados institucionales propuestos. en ambos casos se presenta actividad matemática estudiantil diversa, con posibilidad para el docente de poner en discusión con el estudiante sus conflictos de significado, pues en el EOS no se consideran respuestas como erróneas. Este enfoque es básicamente de significados, cómo surgen esos significados, cómo cambian y cuáles son los significados alrededor en unas actividades muy centrales.

4.2 Guía 2: Gráfica de las funciones trigonométricas

El objetivo de la Guía fue graficar las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente a partir del círculo unitario, usando el programa Geogebra. Se presentan las Tablas GROS que corresponden a la Guía. La Tabla 3 presenta los conceptos matemáticos que podrían ser puestos en juego en el desarrollo de la tarea y la Tabla 4 presenta los conceptos computacionales.

Tabla 3. GROS-Conceptos matemáticos Guía 2-

Tipos de Objetos	**Significados**	**Significados emergentes**
Conceptos (entidades Matemáticas para las cuales se puede formular una definición)		
Coordenadas de un punto	Son las distancias ortogonales de dicho punto respecto a los ejes, llamada abscisa y ordenada	
Proyección de un punto sobre los ejes	Es el punto de intersección entre la recta perpendicular y el eje "y" o "x" que pasa por el punto dado	
Punto exterior a la circunferencia	Es el punto que está a una distancia mayor al radio de la circunferencia respecto a la posición de su centro.	
Puntos de corte	Son los puntos de intersección de la gráfica de la función con cada uno de los ejes de coordenadas	
Circunferencia	Línea curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro situado en el mismo plano que se llama centro	

Segmento	El segmento es un fragmento de recta que está comprendido entre dos puntos, llamados puntos extremos o finales	
Perpendicular	Las líneas perpendiculares son líneas, segmentos o rayas que se interceptan para formar ángulos rectos	
Asíntota vertical	Son rectas verticales a las cuales la función se va acercando indefinidamente sin llegar nunca a cortarlas	
Punto de la circunferencia unitaria	Es un punto que pertenece a la circunferencia y satisface su ecuación $x^2+y^2=1$	
Ángulo	Parte del plano determinada por dos semirrectas llamadas lados que tienen el mismo punto de origen llamado vértice	
Función trigonométrica	Es la función derivada de las razones trigonométricas de un ángulo dado	
Función Seno	Es una función trigonométrica que es el resultado del cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa Es una función periódica, cuyo período es 2π	
Función Coseno	Es una función trigonométrica que es el resultado del cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa Es una función periódica, cuyo período es 2π	

Función Tangente	Es una función trigonométrica que es el resultado del cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente Es una función periódica, cuyo periodo es 2π	
Dominio	Es el conjunto de todos los valores para los cuales la función está definida	• *El dominio es donde la función toma a x (-2,2)* • *El dominio es de -1 a 1* • *El dominio es de 0 hasta 180* • *El dominio es el eje x* • *El dominio es desde 0 hasta ∞* • *El dominio es de -∞ hasta ∞* • *El dominio son todos los reales* • *El dominio es de 0 hasta π/2* • *Dominio: [0 ;1.6 aprox] [4.6; 4.7] [4.8;6.3]* • *El dominio de Seno y Coseno es infinito*
Rango	Es el conjunto de todos los valores que la función toma	• *Es donde toma la función de los números reales* • *Es de 0 hasta infinito* • *[π/4; -π/4)*
Punto máximo	Es un punto en el que la función adquiere su valor máximo posible	
Punto mínimo	Es un punto en el que la función adquiere su valor mínimo posible	
Cero de una función	Son los puntos en los que la gráfica corta al eje x	
Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo)		
Gráfica de las funciones trigonométricas	Se toman los valores de la variable independiente como abscisas y los valores de la función como ordenadas,	

	obteniendo así una serie de puntos, los que al unirlos nos dará una línea que será la representación gráfica de la función	
Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)		
Expresión gráfica	Representación en el plano cartesiano de la función Seno, Coseno o Tangente	
Expresión algebraica	Ecuación del círculo unitario	
Argumentos (enunciados usados para validar)		
Soluciones	En relación al dominio, rango, punto máximo, punto mínimo, asíntotas.	

Esta Tabla servirá para contrastar los conceptos matemáticos con los conceptos computacionales que, eventualmente serán utilizados por los estudiantes para la solución de las Tareas.

Tabla 4. GROS-Conceptos computacionales Guía 2-

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)	**Significados emergentes**
Conceptos (referentes a herramientas computacionales para las cuales se puede formular una definición)		
Vista Gráfica	Refiere a diversos tipos de cuadrículas y ejes	

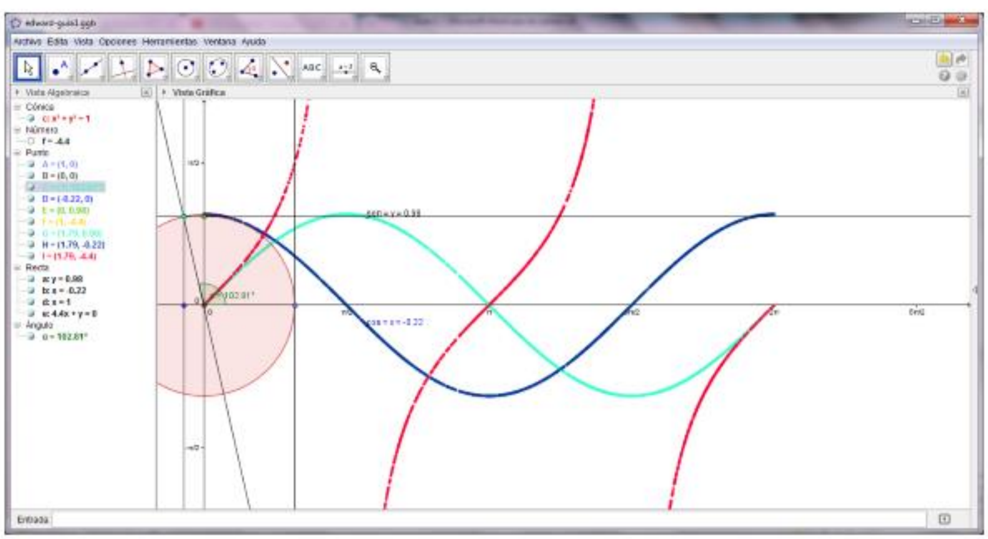
Barra de entrada	Permite introducir directamente expresiones (números, operaciones, coordenadas, ecuaciones) y comandos, así como redefinir los objetos ya existentes	
Propiedades de objetos	Cambiar el color Redefinir valores Grosor de la línea Mostrar las coordenadas de un punto Ocultar las coordenadas de un punto Rastro Cambiar el valor de la escala del eje x	*Perpendicular al eje x*
Barra de menú	Agrupa los comandos del sistema o software por categorías de acuerdo a su uso. El acceso a ella puede ser vía mouse o teclado	
Alejar o Aproximar	Instrucción que permite, acercar la imagen o alejarla	
Barra de herramientas	Organiza las correspondientes herramientas de trabajo de cada barra Elige y mueve Punto Circunferencia Ángulo Segmento Perpendicular Texto	
Vista algebraica	Ofrece registros diferentes de cada objeto matemático.	

En la barra de herramientas aparecen iconos, una vez que los despliega aparecen los términos que hemos enumerado en la Tabla 4.

La Guía la desarrollaron de manera individual, pero en varios argumentos presentados por los estudiantes se evidenció la necesidad de compartir experiencias, discutir sobre conceptos matemáticos, de utilizar el internet, páginas de búsqueda para consultar algunos conceptos que generaron conflictos de significado en las preguntas de la Guía.

El análisis de esta Guía se enfocó en el objeto primario referido a los argumentos (respuestas dadas por los estudiantes) en relación a los conceptos matemáticos definidos en las Tablas 3 y 4. La Guía se desarrolló en dos tareas principales, la primera trataba de la gráfica de la función Seno, Coseno y Tangente a partir del círculo unitario con un dominio restringido de 0 a 2π y la segunda tarea fue responder con base a las construcciones sobre los conceptos matemáticos dominio, rango, punto máximo, punto mínimo, ceros y asíntotas.

La tarea 1 fue desarrollada hasta la construcción de las gráficas de las tres funciones trigonométricas por 27 de los 35 estudiantes. Las figuras 9 y 10 muestran algunas de las respuestas a la primera tarea:

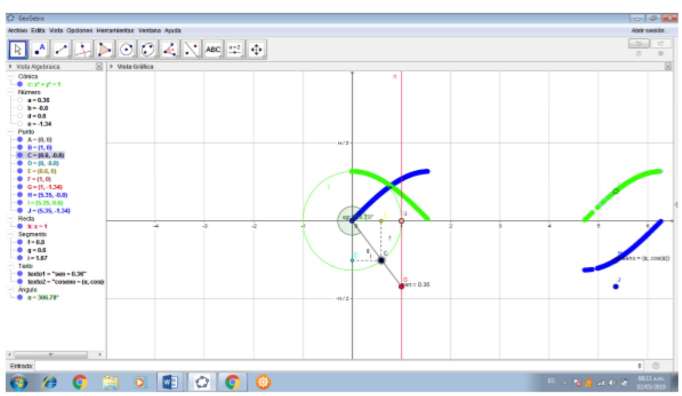


Cambié los colores de los rastros para poder observar mejor cuál es cuál y no confundirme

Figura 9. Respuesta Edward, Tarea 1 Guía 2, mayo 2

La Figura 9 muestra un pantallazo de la gráfica de las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente realizada por el estudiante Edward. Se aprecia que utilizó colores diferentes para identificarlas, el texto “cambie los colores de los rastros para poder observar mejor cuál es cuál y no confundirme”, fue escrito por el estudiante.

La respuesta dada por el estudiante, evidencia que los conceptos computacionales referidos en la Tabla 4, fueron utilizados en su mayoría, para obtener la solución de la tarea propuesta-las gráficas de las funciones trigonométricas-. Además, el concepto computacional *propiedades* de los objetos, fue explorado para diferenciar las gráficas de las funciones trigonométricas, por color, por grosor de las curvas. Al resolver la tarea matemática, el estudiante reemplaza el concepto matemático por el computacional, cuando la gráfica de la función trigonométrica la asocia al rastro que va dejando cada punto, que es otra de las propiedades de los objetos del software. Acosta (2005) afirma que los dibujos computarizados, se diferencian de los dibujos sobre el papel precisamente por su dinamismo: pueden ser arrastrados y deformados en la pantalla, conservando las propiedades geométricas que se les ha asignado por el procedimiento de construcción. Además, cuando el estudiante refiere la necesidad de cambiar los colores a los rastros que determina las gráficas de las funciones trigonométricas, se da cuenta de un momento de instrumentación, pues como lo afirma Pérez (2014), la dimensión instrumentación corresponde a los aspectos del proceso de génesis que se orientan al sujeto, las cualidades y restricciones de la herramienta influencian las estrategias de resolución de problemas del estudiante y las concepciones emergentes.



Nuevamente no sé qué hice, ni tampoco porque falle.

Figura 10. Respuesta José, Tarea 1 Guía 2, mayo 2

La figura 10 muestra la respuesta dada por el estudiante a la construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas, en el texto: “Nuevamente no sé qué hice, ni tampoco porque fallé”, evidencia lo que aparece en el pantallazo, en la cual una parte de la vista gráfica no mostró el rastro de las tres gráficas. Se indaga con el estudiante por la construcción obtenida, en la cual manifiesta que siguió todos los pasos, pero no entiende porque quedó de esa manera. En el EOS se asume un primer nivel que emerge de la actividad matemática, y refiere a los objetos primarios, en el cual se resalta para la figura 10, el objeto primario argumentos que son enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo (Godino, Batanero & Font, 2007), porque el estudiante sabe que su respuesta está mal comparada con la de sus compañeros, porque así lo manifiesta en la figura 10, pero que no le impide resolver la tarea 2 de la guía, que consistió en responder algunas preguntas relacionadas con las gráficas. A continuación, se muestra la respuesta del Estudiante José a partir de la construcción de la figura 10, a la pregunta ¿Cuál es el dominio y rango de la función?

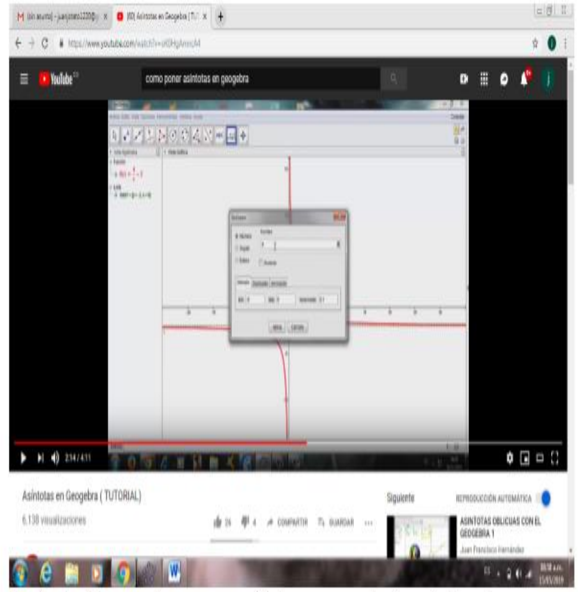
Observé que las respuestas de mis compañeros eran compartidas, pues la mayoría en el dominio colocaba todos los reales, pero en lo personal había fragmentos que no eran plasmados en su trayectoria, entonces…
Dominio: [0 ;1.6 aprox.] [4.6; 4.7] [4.8;6.3]
Rango: [π/4; -π/4)

Figura 11. Respuesta José, Tarea 2 Guía 2, mayo 2

Se evidencia en la respuesta de José, que el significado personal de los conceptos matemáticos dominio y rango corresponden a los significados institucionales, en este argumento se observa que el conflicto de significado en la respuesta se dio a partir de conceptos computacionales, como es el caso del cambio de la escala que debía hacerse en el eje x y el estudiante la realizó en el eje y.

a. Dominio de la función seno es el eje x, rango de la función va desde -1 hasta 1
b. Punto máximo de función coseno es 1 y punto mínimo de función coseno es -1
c. Cuando empiezan desde el punto 0 en x, la función coseno va descendente y la función seno va ascendente, cada 90° están separados por 1, en 45° y 225° se cruzan, 45° en la parte positiva y 225° en la parte negativa

d. (0,0),(π,0) cada 180° hay un punto 0 en el eje x, cuando llega a un punto 0 se cruza con la función coseno
e. La función tangente tiene asíntotas, por el punto de la función coseno cuando toca el eje 0, en 90° y 270° que es cuando la función coseno tiene un punto 0. En el punto (1.57,0) y en el punto (4.71,0) o en π/2 radianes y 3π/2 radianes se dan las asíntotas poniendo una perpendicular en estos puntos.



Uso de este video para saber que es una asíntota y como encontrarla mas facilmente

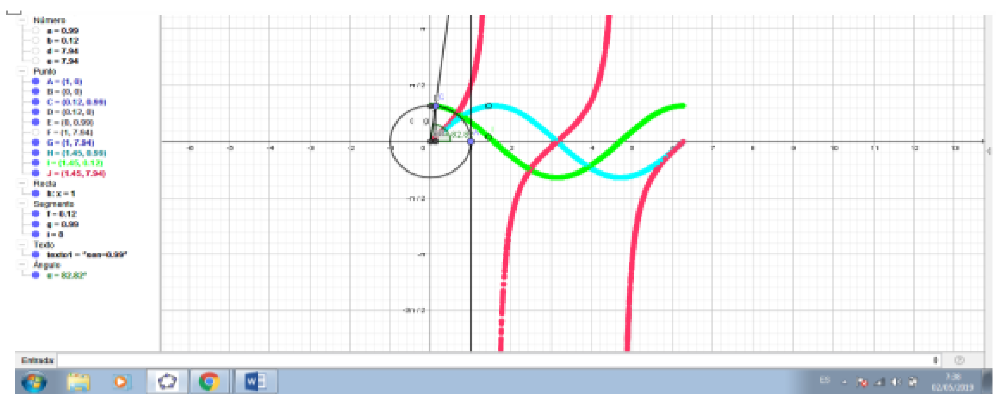
Figura 12. Respuesta Juan José, Tarea 2 Guía 2, mayo 2

En la figura 12 se presentan las respuestas dadas por el estudiante Juan José a las preguntas de la tarea 2, en las que se preguntó sobre el dominio y rango de la función Seno, puntos máximos y mínimos de la función Coseno, diferencias de la función Seno y Coseno, ceros de la función Tangente y en los valores que las funciones tienen asíntotas verticales. En la primera respuesta se evidencia un conflicto de significado en el concepto matemático dominio, pues la gráfica propuesta en la guía tiene un dominio restringido y el argumento presentado es para la función Seno completa, al responder que el dominio es todo el eje x, respuesta "a" (figura 12).

Para la respuesta "c", el estudiante presenta la diferencia de las gráficas de la función Seno y Coseno en la relación de las variaciones que se describe verbalmente en el crecimiento y decrecimiento, lo asocia con que "*desde el punto 0 la función Coseno va descendente y la del Seno va ascendente*". Esto es escrito por el estudiante (figura 12). En esta descripción verbal con base en la gráfica se puede dar cuenta del proceso de la génesis instrumental que corresponde a la instrumentalización, que refiere a que es el conocimiento del estudiante el que guía la manera como la herramienta es usada y en un sentido, da forma al artefacto (Pérez, 2014).

En la respuesta "e", el estudiante utiliza un video para realizar la consulta sobre el significado que no entiende, en este caso un concepto computacional para hallar un concepto matemático, referido a la asíntota de la función Tangente, el cual lo expresa como "*uso este video para saber que es una asíntota y como encontrarla más fácilmente*" (figura 12). Lo anterior da cuenta del Enfoque Ontosemiótico sobre los significados que los estudiantes adquieren y que están en función de las prácticas. El significado está modelado por esa práctica. Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos (Godino, Batanero & Font, 2007).

El estudiante prueba que entendió el video mostrando su tarea al aplicar lo visto en él, requiere el conocimiento y como no lo tiene, utiliza un recurso que es la internet, ve el video que le explica como trazar una perpendicular con la función racional y finalmente utiliza el concepto computacional emergente definido en la Tabla 4 para trazar la perpendicular.



¿las graficas (funciones trigonométricas) son finitas?

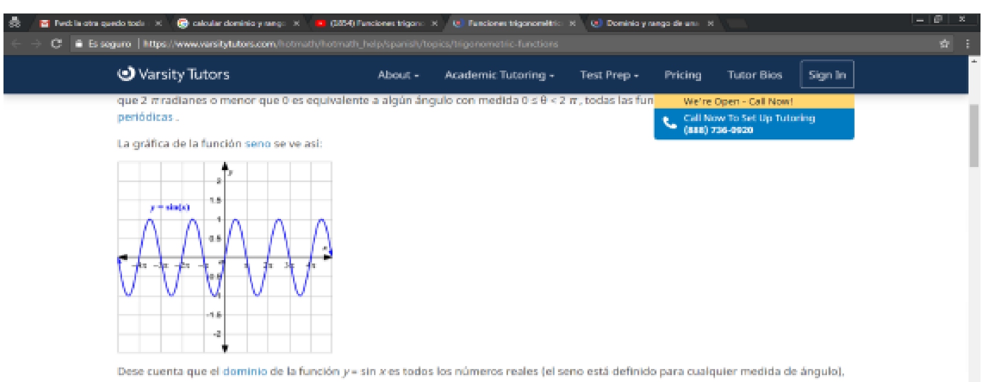


Figura 13. Respuesta Carlos, Tarea 2 Guía 2, mayo 2

En la figura 13, el estudiante se hace la pregunta "¿las gráficas (funciones trigonométricas) son finitas?, y para solucionarla, explora en algunas páginas de internet acerca del significado matemático dominio de la función Seno. En la pregunta él utiliza lenguaje matemático y lo relaciona con su gráfica, pues en la página se muestra la gráfica sin dominio restringido. El conocimiento adquirido lo lleva a cuestionarse con la tarea desarrollada, sobre los conceptos finito e infinito. Se resalta que en la génesis instrumental el foco de preocupación de la teoría es la posibilidad que la tecnología escolar incremente habilidades o técnicas, y también el aprendizaje (Briceño & Cordero, 2008) que se evidencia en el lenguaje matemático utilizado después de apoyarse en las TIC.

4.3 Guía 3: Análisis de la gráfica función Seno

El objetivo de la Guía fue explorar las transformaciones de la función Seno donde se aprecie el efecto gráfico de cambiar: el parámetro de la amplitud, del período, desplazamiento de fase, entre otros, con el uso del software Geogebra. Se presentan la Tabla 5 que corresponde a los conceptos matemáticos de la Guía y la Tabla 6 que muestra los conceptos computacionales.

Tabla 5. GROS-Conceptos matemáticos Guía 3-

Tipos de Objetos	**Significados**	**Significados emergentes**
Transformaciones de las gráficas de las funciones trigonométricas		
Conceptos (entidades Matemáticas para las cuales se puede formular una definición)		
Función	Es una relación que se establece entre dos conjuntos, a través de la cual del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto	

Función trigonométrica	Es la función derivada de las razones trigonométricas de un ángulo	
Traslación vertical	Refiere a sumar o restar una constante a la función trigonométrica. Indica cuánto se va a trasladar la gráfica hacia arriba o hacia abajo	• *Se observa un crecimiento de 1 ante que sigue de la misma forma* • *Se puede observar que se decrece a una parte del eje y para seguir su forma* • *Se desplaza verticalmente, pero seguirá estando a una distancia del eje x de cada pi/2* • *La gráfica cambia ahora está en la parte negativa, pero el valor de su desplazamiento horizontal es constante* • *El punto inicial de la función Seno cambia respecto al eje "y"* • *La función se desplaza dos unidades en el "y" positivo, cabe aclarar que en todos los puntos ocurre lo mismo* • *Se desplaza dos unidades en el eje "y" negativo* • *Se desplaza hacia arriba* • *Se desplaza hacia abajo* • *Se desplaza hacia arriba y comienza en dos* • *Se desplaza hacia abajo y comienza en -2* • *La función se refleja negativo* • *Sube con respecto al eje "y"* • *Baja respecto al eje "y"* • *Aparece el Seno alterado con la misma forma del Seno, pero mucho más arriba* • *Vemos que el Seno alterado baja un poco más acercándose al Seno normal* • *Se coloca más arriba y solo rosa un poco el eje x* • *Tiene un desplazamiento hacia arriba* • *Tiene un desplazamiento hacia abajo* • *Se desplaza hacia la parte superior* • *Se desplaza hacia la parte inferior* • *Se sube dos puntos en "y"* • *Se baja dos puntos en "y"* • *La posición en "y" aumento*

		• *La gráfica cambió su posición de "y" a -2* • *Se movió hacia arriba* • *Se movió hacia abajo* • *La gráfica se mueve verticalmente sin alargarse ni desfasarse, dependiendo lo que valga D, dependiendo lo que valga D, es lo que va a mover verticalmente* • *Las montañitas suben hasta 2* • *Las montañitas bajan hasta -2* • *Se desplaza Dos rangos hacia arriba*
Traslación horizontal (Desplazamiento de fase)	Refiere a sumar o a restar una constante a la función trigonométrica Indica cuánto se va a trasladar la gráfica hacia la izquierda o hacia la derecha	• *El rango va a estar desde -1 hasta 1 estando constante* • *Si el valor del deslizador es <0 la función, ésta se desplaza hacia el eje x+, si es lo contrario va hacia el x-* • *La función se desplaza en el eje x negativo llegando un poco más de allá de -π/2 conservando la posición* • *La función se desplaza en el eje x positivo, quedando un poco más allá de π/2 conservando la misma forma y tamaño* • *Se ve como la función se desplaza hacia la izquierda* • *La función se desplaza hacia la derecha* • *Las funciones tienen un desfase, por eso se ve una más delante de otra, pero las ondas son iguales* • *La gráfica avanza hacia adelante en el eje x y crea un desfase* • *El valor máximo 1 y mínimo -1 y se desplaza hacia la izquierda* • *El desplazamiento es cada 2, y su valor máximo es 1 y su valor mínimo es -1* • *Se desliza hacia el otro lado y gráficamente queda como f(x)=senx* • *La función se mueve hacia el lado derecho y cambia en la forma como inicia y obvio como termina* • *No se ve que cambie, tampoco se ve que se ponga más grande ni más pequeña*

		• *No se ve ningún cambio con respecto a la gráfica de sen(x)* • *Se puede ver que ya cambió de posición* • *Se ve que la gráfica está diferente a las otras* • *Se puede observar que la gráfica se retrocede cuando son números positivos* • *La gráfica empieza a avanzar hacia el lado positivo de la gráfica* • *Se separan y forma una especie de estructura parecida a el ADN, la función y=senx se queda en la forma periódica de o a pi, pero la otra onda se mueve un poco hacia la izquierda* • *Una de las dos ondas se mueve hacia la derecha y se colocan después de pi/2 y 3pi/2* • *Se desplaza hacia el lado negativo* • *Se desplaza hacia el lado positivo* • *Traslada el eje x a la izquierda* 2 • *Traslada el eje x a la derecha* 2 • *Puede verse que y=senx casi que puede reflejarse a y=Asen (Bx+C) +D* • *Vemos que y=sen(x) se corre un poco para alinearse un poco con el otro* • *Da una función par la cual es el espejo de los dos ejes* • *Se cambia de positivo al eje y negativo* • *Se desplaza hacia atrás en x con respecto a la otra gráfica, se desplaza más o menos 3π/8 hacia atrás* • *Se desplaza hacia adelante en x con respecto a la otra gráfica, se desplaza más o menos 3π/8 hacia adelante* • *Las rectas son iguales solo que una de ellas se corre un cuadrito más* • *Una de las rectas se mueve un cuadrito a la izquierda y queda así como la anterior, solo que una se corre para el lado derecho y otra para el lado derecho* • *Las gráficas se ven iguales, solo se ve un pequeño desplazamiento*

		• *La gráfica tiene la misma magnitud, solo se ve un desplazamiento* • *Es una especie de transición* • *Es una especie de clon entre el deslizador C y D* • *La línea se corrió hacia el lado izquierdo* • *Se desplazó hacia el lado derecho* • *La otra onda se mueve un poca hacia la izquierda* • *Las ondas se mueven hacia la derecha* • *Observo que si muevo el deslizador hacia el lado negativo la función se mueve hacia la derecha y viceversa*
Reflexión	Es la imagen especular de una gráfica	• *La gráfica se invierte, el Período pasa de* π a π/2 *y empieza decreciente* • *Si el valor de B=2 cambia a -2 la función Seno se invierte como si fuese un espejo* • *Gira y ya viene desde* +∞ • *La función cambia de lugar, para al lado negativo, se refleja* • *Se mantiene igual y su rango es de -2 hasta 2* • *Cambia de posición y gira* • *Es lo contrario de mover el deslizador hasta 2* • *Su trayectoria es inversa* • *Queda como una especie de espejo, queda lo mismo que la de A=2 pero negativo* • *Se pone más angosta pero más grande* • *Las curvas quedan del mismo tamaño* • *Se invierte totalmente* • *Cambia de posición* • *Pasa por cero, se puede ver en los lados x positivo y x negativo y no se refleja* • *Es la inversa* • *Se voltea la gráfica* • *Está en contra de la función* • *La gráfica volteo* • *La gráfica se invierte y también tiene punto máximo 2 y -2, tiene mismo*

		Período que f(x) = senx pero empieza decreciendo • *Hace montañitas de dos en dos tanto arriba como abajo* • *Queda más grande, que al contrario de la gráfica si fuera A=2* • *Se crea un reflejo exacto a como se veía con A=2* • *Rota por los ejes negativos hasta llegar a un punto en el que parece el reflejo del literal C, en otro cuadrante del plano, conservando el mismo tamaño y forma* • *Se encoge, pero en un sentido contrario* • *Efecto "espejo"* • *Sigue siendo la mitad que, en un inicio, pero lo que cambia es de posicionamiento* • *Se invierte totalmente* • *Hace lo inverso* • *La función cambia y pasa a ser una especie de montaña rusa*
Alargamiento vertical (Amplitud)	Refiere a multiplicar la función por un valor constante mayor a 1 Es el promedio de la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la función	• *El tamaño gráfico de la función Seno incrementa y parecería unas olas.* • *Es un poco más larga* • *Se vuelve un poco más alta* • *Cambia su rango de -2 hasta 2* • *Crea parábolas* • *El cambio es proporcional a la variable A, define el valor máximo y mínimo de la función* • *La onda es más amplia* • *Se contrae la anchura de la función aumentando su Frecuencia y su altura aumenta* • *El Seno se expande y su forma se ve más grande* • *La gráfica se hace más grande y se va poniendo más angosta* • *Sus curvas son más altas* • *La gráfica queda en 2* • *Montañas más altas* • *La función se incrementa en 2 en el eje y*

		• *Se vuelve un poco más grande* • *Se aumenta la Frecuencia, entonces queda más ondulada* • *La gráfica llega a un punto más alto en y* • *No supera los límites de -2 y 2* • *Se duplica* • *Se hacen unas montañitas que se desplazan cada dos cuadros* • *Línea curva de una magnitud más grande* • *La onda asciende hasta tocar 2 en "y" que sería su máxima altitud*
Alargamiento horizontal (Período, Frecuencia)	Refiere a multiplicar la variable x en la función por un valor constante entre 0 y 1, sin tomar esos valores Indica cada 'cuanto' se repite la gráfica Refiere a una magnitud que mide el número de repeticiones por unidad de tiempo	• *Se estira* • *La función Seno se extiende* • *Se expande* • *Se altera o estira* • *Se puede alargar la onda* • *La función se hace más larga* • *La amplitud crece y se ve una onda más grande*
Compresión vertical (Amplitud)	Refiere a multiplicar la función por un valor constante entre 0 y 1 sin tomar esos valores Es el promedio de la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la función	• *La función Seno cambia de posición cambia del eje y a fusionarse con el eje x* • *Quedó como una recta infinita y quedo totalmente en cero de x* • *La recta queda en el punto de origen y todo queda en cero* • *Está en un ángulo llano o una recta por el eje x* • *Se ve como una línea, pasa de estar curva a estar completamente recta* • *La Frecuencia se reduce entonces queda recta* • *La función se acopla al eje x* • *Se vuelve horizontal porque A es la onda que genera la función Seno* • *El Seno vuelve a aparecer, pero sobre el eje x* • *La gráfica es más pequeña*

		• *La gráfica se mueve hasta estar en el centro o en la línea del eje x* • *La función se mantiene constante en cero* • *Es recta y pasa pegada al eje x* • *Queda en cero* • *La función queda horizontal* • *Que todo queda en el eje x* • *Se observa que el Seno se estira y se vuelve una línea recta y horizontal* • *La gráfica se pone recta* • *Desaparece la forma curva, desaparece la onda y se iguala con el eje x* • *La gráfica se redujo quedando una curva más corta* • *Puede encogerse*
Compresión horizontal (Período, Frecuencia)	Refiere a multiplicar la variable x en la función por un valor constante mayor a 1 Indica cada 'cuanto' se repite la gráfica Refiere a una magnitud que mide el número de repeticiones por unidad de tiempo	• *Cambia el desplazamiento y queda una distancia de pi/2 en la gráfica* • *Pasa cada* $\pi/2$ • *Afecta el tamaño del periodo, como un acordeón* • *La función empieza a levantarse del eje x para volver a pasar por el cero del plano cartesiano, cortando un poco su longitud con respecto al ancho* • *Se encoge* • *La onda se reduce a la mitad, es decir, si antes iba de 0 a pi ahora va de 0 a pi/2* • *Su desplazamiento en el eje x disminuye y es hacia la derecha* • *Se contrae* • *Aumenta la Frecuencia* • *Se reduce a la mitad* • *Se altera y contrae* • *El Seno alterado aparece, pero unas montañas más seguidas* • *Es más repetitiva* • *Cambiaron de posición* • *Se acorta* • *La gráfica cambia el periodo de a pi/2* • *Las montañitas son largas y muy delgadas* • *Se reduce Seno a la mitad del normal*

		• *Tiene un ciclo más seguido*
Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)		
Expresión algebraica	Ley de asignación de la función Seno y=sen(x) y ley de asignación de la función Seno con parámetros y=Asen(Bx+C)+D	
Expresión gráfica	Representación en el plano cartesiano de la función Seno	
Argumentos (enunciados usados para validar)		
Soluciones	Gráficas coincidentes en todos sus puntos y=sen(x) y y=Asen(Bx+C)+D	• *Colocar los deslizadores A=0, B=1, C=0 y D=1* • *Mover los deslizadores en un valor único para que las gráficas queden iguales* • *El deslizador D lo movería hasta cero* • *A=1, B=1, C=0 y D=0* • *Movería el deslizador D*
Soluciones	Relación de la gráfica Seno y Coseno utilizando y=senx y y=Asen(Bx+C)+D	• *Se cambia C=0 a C=1.56 para que la función se refleje así misma (sea par)* • *Colocando los deslizadores en los siguientes parámetros: A=1, D=0, B=1 y mover los parámetros del deslizador C hasta quedar acomodado* • *A=1, B=1, C=1.6 y D=0* • *Simplemente cambiamos C=2* • *Es necesario colocar los parámetros de la siguiente manera: A=1, B=1, C=1.8 y D=0* • *A=1, B=1, C=0, D=0* • *A=1 y B=1, D=0 y poner C en aproximadamente 1.6, para que la gráfica se desplace aproximadamente π/2 hacia atrás, ya que la función*

		Coseno tiene un desfase de π/2 con respecto a la función Seno • *Yo pondría A=1, B=-1, C=0 y D=0* • *A=1, B=1.8, C=1.8 y D=0* • *Para que quede la función Coseno moveremos C=1.6 ya que así el desfase coincidirá con la función Coseno*
Soluciones	Relación que se encuentra entre las gráficas Seno y Coseno	• *Las dos funciones tienen la misma amplitud y se demoran el mismo Período* *Las similitudes son todas, exceptuando la del desfase, tienen el mismo rango y el mismo dominio* • *Tiene la misma magnitud, tamaño, ciclo y Período.* • *Yo la relación que le veo es mucha, ya que sus coordenadas son iguales, cambia el signo* • *Ambas gráficas tienen el mismo Período A y B están en 1 en ambas funciones y D está en cero en ambas funciones, tienen diferencia con el punto C, para Seno está en cero y para Coseno está en 1.6 aprox. El punto máximo es ambas es 1 y el mínimo en ambas es -1* • *Encuentro la similitud de que ninguna de las dos pasa del intervalo 1 y -1* • *Ambas son funciones trigonométricas y que ambas tienen un Período de 2 pi y su continuidad es de menos infinito e infinito* • *Que coincide en todos los puntos en las dos partes Seno y Coseno* • *Las funciones son casi iguales, solo tiene pi/2 de diferencia* • *Una viene a ser como el reflejo de la otra* • *La relación que se encuentra es que tienen la misma distancia* • *Tiene la misma magnitud, el mismo ciclo y son periódicas*

		• *El Coseno empieza desde 1 mientras que la de Coseno, empieza desde 0. Ambas pasan cerca de cada 2π* • *Se diferencian en su desplazamiento horizontal y Coseno es par, el Seno no* • *La relación que encuentro, son similares, solo que la función de Coseno está hacia la izquierda*

Tabla 6. GROS-Conceptos computacionales Guía 3-

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)	**Significados emergentes**
Conceptos (referentes a herramientas computacionales para las cuales se puede formular una definición)		
Vista Gráfica	Refiere a diversos tipos de cuadrículas y ejes	
Barra de entrada	Permite introducir directamente expresiones (números, operaciones, coordenadas, ecuaciones) y comandos, así como redefinir los objetos ya existentes	
Propiedades de objetos	Redefinir valores Mostrar las coordenadas de un punto Ocultar las coordenadas de un punto Cambiar el valor de la escala del eje x	• *Cambiar color para diferenciar las gráficas* • *Grosor de la línea*
Barra de menú	Agrupa los comandos del sistema o software por categorías de acuerdo a su uso. El acceso a ella puede ser vía mouse o teclado	
Alejar o Aproximar	Instrucción que permite, acercar la imagen o alejarla	
Barra de herramientas	Organiza las correspondientes herramientas de trabajo de cada barra Elige y mueve Punto	

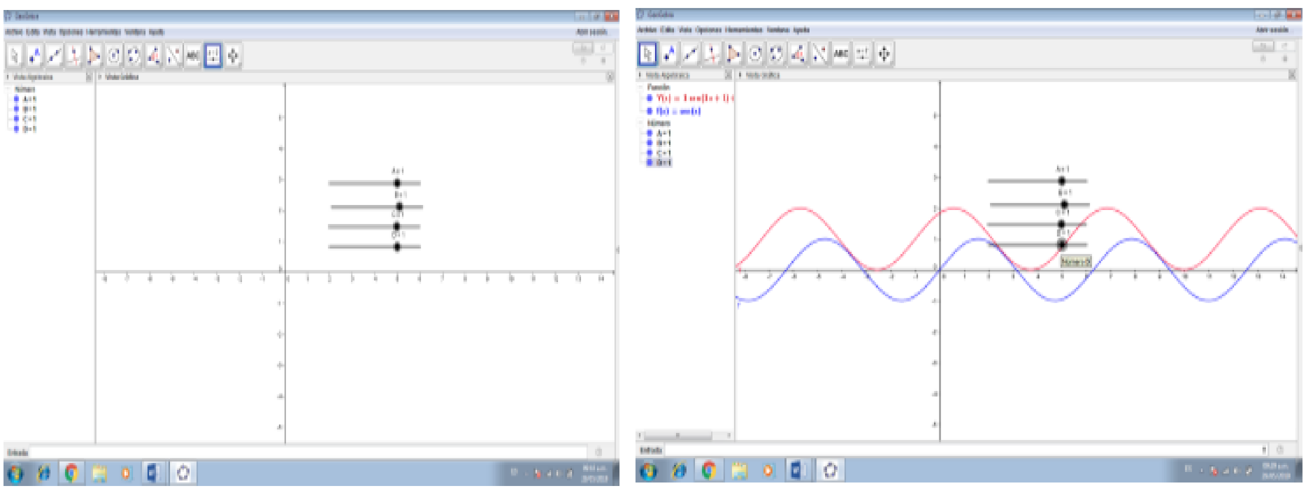
	Texto	
Vista algebraica	Ofrece registros diferentes de cada objeto matemático.	
Procedimientos (operaciones y técnicas)		
Deslizador	Es una representación gráfica de un número libre o ángulo libre	

La Guía la desarrollaron de manera individual, pero en el objeto primario referido a argumentos, se evidenció mucha interacción entre los estudiantes para compartir posturas, soluciones y discusiones sobre las preguntas planteadas. El análisis de la Guía se enfocó en los objetos primarios, inicialmente los conceptos matemáticos y los conceptos emergentes que daban los estudiantes al realizar la tarea propuesta y luego los argumentos a partir de la interacción mediante el objeto computacional "deslizadores" para hacer comparaciones entre las gráficas de la función Seno.

La Guía, incluye tres tareas principales, en la tarea 1 se propuso realizar la gráfica de la función Seno en una misma ventana sin parámetros (cuya ley de asignación es y=sen(x)) y otra gráfica de la función Seno pero con parámetros (cuya ley de asignación es y=Asen(Bx+C)+D), estos parámetros tienen unos valores específicos y son dados mediante el objeto computacional "deslizadores", que permite moverse en un rango de valores.

La tarea 2 consistió en estudiar las transformaciones de la gráfica de la función trigonométrica Seno, en el punto 4 la transformación estaba asociada al parámetro A y se estudiaba la compresión vertical, alargamiento vertical, también conocidos como la "amplitud" y "la reflexión" para valores negativos con respecto al eje x. El punto 5 la transformación estaba asociada al parámetro C y exploraba los conceptos de traslación horizontal (derecha e izquierda) también relacionado con el desplazamiento de fase. En el punto 6 la transformación estaba asociada al parámetro B y exploraba el "alargamiento y compresión horizontal" asociada al concepto Período y Frecuencia. En el punto 7 la transformación estaba asociada al parámetro D y exploraba los conceptos de traslación vertical (arriba y abajo). Finalmente, en la tarea 3 se pretendía buscar argumentos de los estudiantes sobre la relación entre la función Seno con la del Coseno.

La tarea 1 la desarrollaron los 35 estudiantes, solo a una de las estudiantes le dio una gráfica diferente que a los demás compañeros. A continuación, se presentan algunas soluciones de los estudiantes.



PASO2.En este paso tuve problemas debido a que no seguí las indicaciones al ingresar las funciones. Colocando "y= sen(X)" en vez de "y= senx", entonces me la reconocía como la misma

Figura 14. Respuesta José, Tarea 1 Guía 3, mayo 29

En la figura 14 se puede apreciar, que el estudiante tuvo dificultades al inicio de la Guía, el texto "*tuve problemas debido a que no seguí las indicaciones al ingresar las funciones*" fue escrito por el estudiante, lo que evidencia que el software no le mostraba las gráficas ya que la variable independiente x la escribió en mayúscula, pero en su interacción con la barra de entrada de Geogebra, se dio cuenta de que debía estar en minúscula para que la ecuación fuera reconocida por el software. Se puede apreciar que el ensayo y error que realiza el estudiante se permiten hacer con mayor facilidad con estas herramientas del software. En la solución de esta tarea se aprecia procesos de instrumentalización, porque es el conocimiento del estudiante el que Guía la manera como la herramienta es usada y en un sentido, da forma al artefacto (Pérez, 2014).

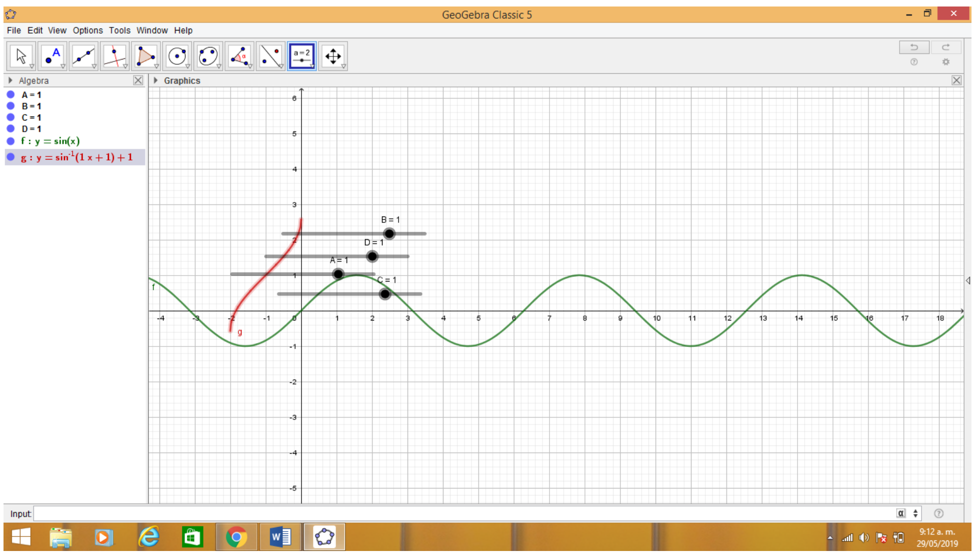
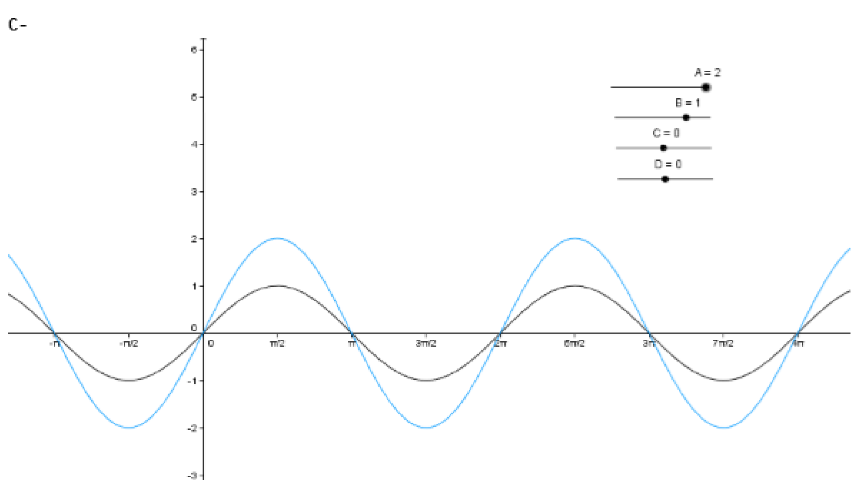


Figura 15. Respuesta Carolina, Tarea 1 Guía 3, mayo 29

La respuesta dada por la estudiante (Figura 15), evidencia que presentó un conflicto de significado con la herramienta computacional "barra de entrada", en la tarea de la gráfica de la función Seno con parámetros. Al escribir la ecuación, la estudiante digitó fue la de la función Seno inverso sin el parámetro A, esto no le impidió desarrollar el resto de la Guía, ya que este conflicto de significado lo tiene por el concepto computacional barra de entrada, pero los argumentos presentados están ligados a la construcción de la función Seno inverso, donde la transformación de carácter horizontal le va a dar vertical y viceversa. Se resalta una limitante del software Geogebra, pues al utilizar mal la barra de entrada, la estudiante tuvo varios conflictos de significado matemático, porque todas las preguntas se relacionaban con las transformaciones en esta gráfica.

En la tarea 2, se propuso 4 preguntas relacionadas con las transformaciones, como se mencionó antes, cada una de ellas tenía 4 literales, donde se exploraron las transformaciones mediante los deslizadores. Los 35 estudiantes resolvieron 3 de esas preguntas, y sólo 3 estudiantes no terminaron la última. En todas las preguntas surgieron significados emergentes (Tabla 5), lo que hizo interesante y enriquecedor el desarrollo de la Guía, porque los estudiantes en sus argumentos evidencian muchos significados personales, que describen en su lenguaje cotidiano, otros estudiantes dieron argumentos muy cercanos a los significados institucionales y algunos presentaron conflictos de significados, porque tienen confusiones entre las transformaciones. Todas estas maneras de resolver tareas matemáticas por los estudiantes, es lo que llamamos actividad matemática. Para el análisis de esta actividad, se requiere entonces las nociones de "práctica matemática" y "sistemas de prácticas". Se considera que práctica matemática es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas (Godino, et al, 2007). Los sistemas de prácticas son considerados como una de las posibles maneras de entender el significado del objeto matemático, son siempre relativos a un contexto o marco institucional (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2009).



si dezlizamos a A=2 se observa que las lineas se separan y quedan periodicamente la misma forma pero en f(x)=sen(x)pero la funcion y=A*sen (Bx+C)+D se vuelve un poco más alta por lo que le cambiamos 2

Figura 16. Respuesta Alexandra, Tarea 2 Guía 3, mayo 29

En la figura 16 se muestra la respuesta de la estudiante a la pregunta relacionada con la amplitud, en la cual se le pedía interactuar con el deslizador A, el argumento presentado evidencia que el significado personal corresponde al significado institucional, del concepto matemático "amplitud" definido en la Tabla 5, en este caso alargamiento vertical, además la estudiante le atribuye la propiedad "conservación del período a la función trigonométrica Seno", que no se ve alterada por el cambio de amplitud. Esta situación se puede explicar por la interfaz gráfica del software que permite ver estas propiedades, a diferencia de gráficas a lápiz y papel. Otra característica que se resalta es el objeto computacional "propiedades de los objetos", cambiar color, definido en la Tabla 6 de los significados emergentes, ya que la estudiante utiliza este objeto para diferenciar las gráficas de la función Seno y la función con parámetros. En este caso se puede ver que el instrumento afecta el sujeto, permite que el sujeto desarrolle su actividad y elabore esquemas de acción instrumentada que le permiten construir conocimiento matemático (Trouche, 2004).

a. lo que yo observo es que al mover C hace por decir un espejo de la otra recta pero la hace al lado de la recta

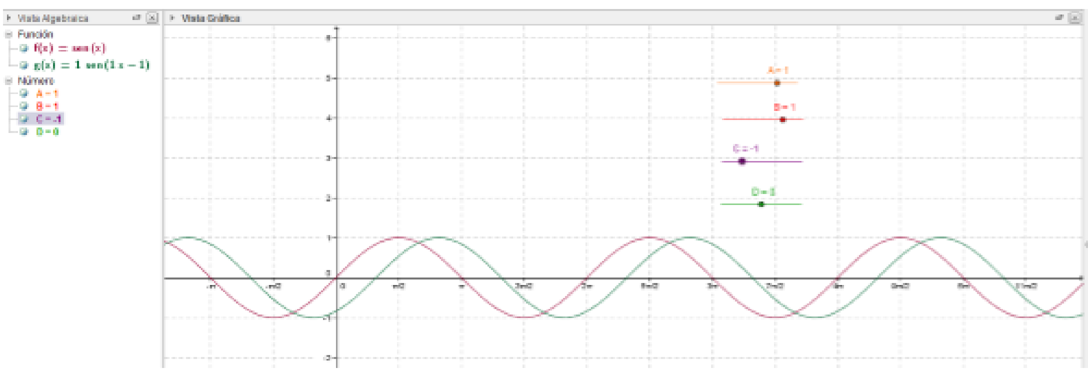


Figura 17. Respuesta María José, Tarea 2 Guía 3, mayo 29

En la figura 17 se muestra la respuesta de la estudiante a la pregunta relacionada con la traslación horizontal y desplazamiento de fase, en la cual se le pedía interactuar con el deslizador C. El texto "*hace por decir un espejo de la otra recta, pero la hace al lado de la recta*", fue escrito por la estudiante y permite evidenciar su conflicto de significado personal sobre la función Seno, en la cual se refiere a una recta y no a una curva. Otro conflicto de significado refiere a la traslación horizontal, porque lo describe como una 'reflexión' cuando lo asocia con la palabra espejo, el cual difiere del concepto matemático definido en la Tabla 5, que es el significado institucional esperado. Este conflicto de significado, no es calificado como una actividad “errónea”, ya que en este trabajo "resolver" tiene un carácter de "actividad" que refiere a hacer, realizar, confrontar, argumentar; y no a dar una respuesta considerada correcta. Para describir la actividad matemática, es necesario contemplar estos seis elementos: lenguajes, situaciones problema, conceptos, procedimientos-técnicas, proposiciones-propiedades y argumentos, los cuales se articulan formando configuraciones. Las configuraciones informan de las condiciones epistémicas para dicha actividad “configuración previa” o de los indicadores del producto o resultado de dicha actividad “configuración emergente” (Godino, Font, Wilhelmi, De Castro, 2009). La actividad matemática considera entonces lo previo y lo emergente, sin la condición que sea el considerado como correcto.

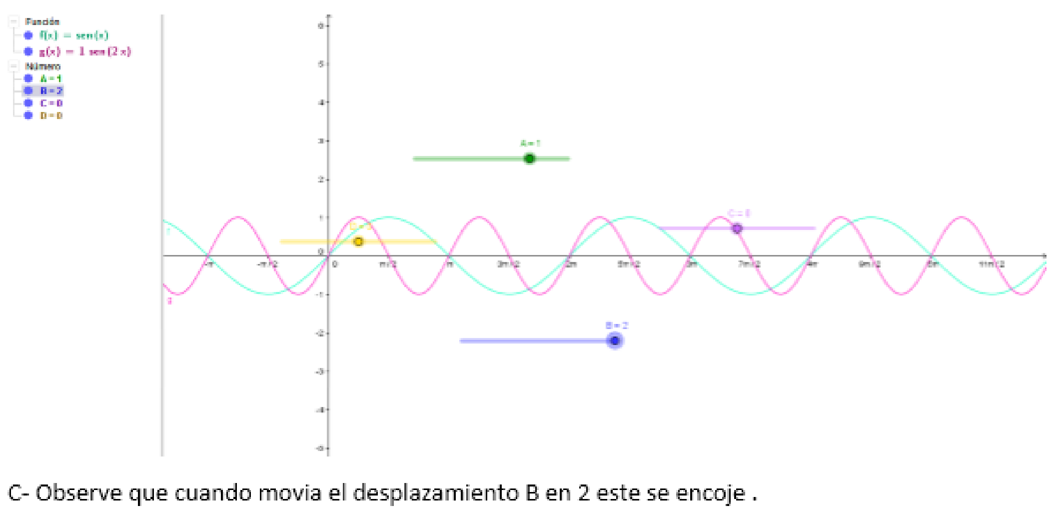


Figura 18. Respuesta Yenifer, Tarea 2 Guía 3, mayo 29

En la figura 18 se muestra la respuesta de la estudiante a la pregunta relacionada con la compresión horizontal y alargamiento, en la cual se le pedía interactuar con el deslizador B. La respuesta “*este se encoge*”, permite apreciar que el significado personal utiliza el objeto primario argumentos, para solucionar la tarea propuesta, pero queda corto para las propiedades que se podían observar en la interacción de la gráfica, como el periodo, amplitud, frecuencia, que ya habían sido explorados en los puntos anteriores. Esta solución de la tarea es una oportunidad del profesor para contrastar significados personales con institucionales, acompañar al estudiante en sus dudas, y así resaltar la importancia de desarrollar actividad matemática con orquestación e intervención del profesor. Trouche (2004) define la orquestación instrumental para describir la gestión que hace el profesor de los instrumentos individuales para el aprendizaje colectivo en el sentido que las génesis instrumentales necesitan ser monitoreadas por el profesor.

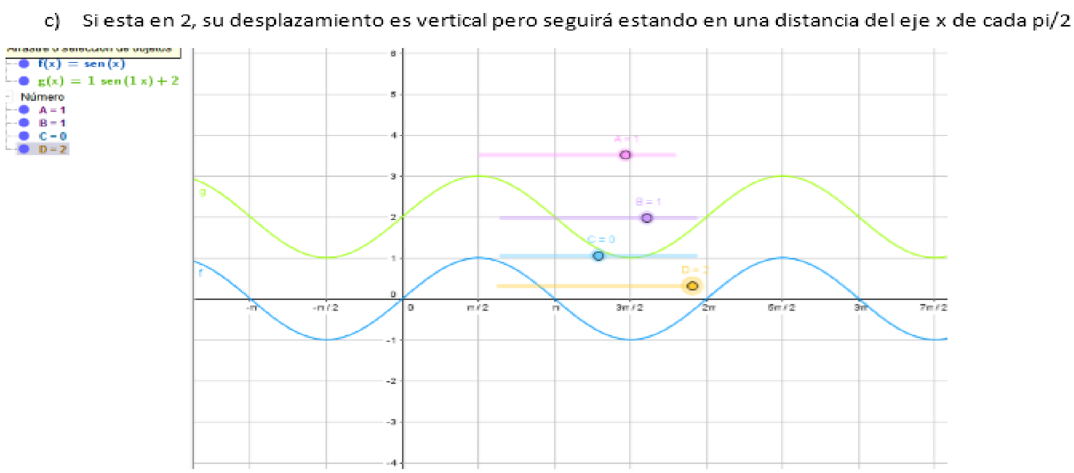
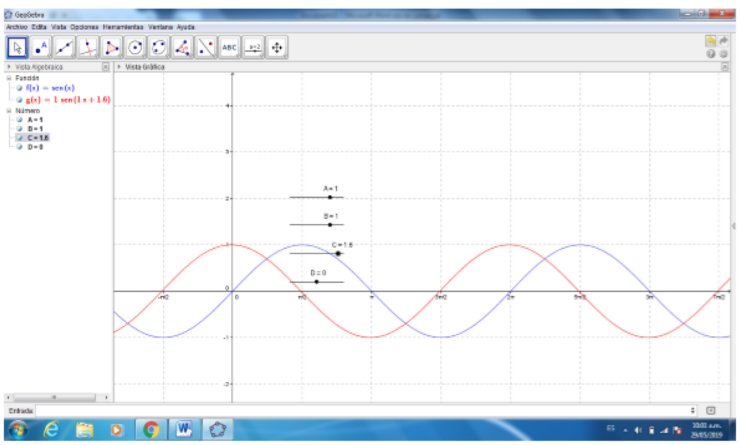


Figura 19. Respuesta David, Tarea 2 Guía 3, mayo 29

En la figura 19 se muestra la respuesta del estudiante a la pregunta relacionada con la traslación vertical en la cual se le pedía usar el deslizador D. El estudiante identifica la transformación relacionada con el concepto matemático "traslación vertical" definida en la Tabla 5, pero en el texto "*seguirá estando en una distancia del eje x de cada pi/2*" presenta un conflicto de significado con el eje "y" porque su argumento expresa la escala representada en el eje x. En esta respuesta se evidencia la actividad matemática, los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos que se caracterizan por ser relacionales, es decir, "los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas sino puestas en relación mediante las funciones semióticas, entendidas como una relación entre una expresión y un contenido" (Godino, Wilheimi, Font & Lurduy, 2009). Esa relación es la que interpreta el estudiante a partir de su conflicto de significado entre los ejes y la gráfica. "La comparación de la cadena de funciones semióticas previstas en el proceso correcto de resolución con la realmente llevada a cabo por el estudiante en cada solución errónea, permite identificar los conflictos semióticos, es decir, los significados que no concuerdan con los considerados correctos desde el punto de vista institucional” (Mayén, Díaz & Batanero, 2009, p.78)

En la tarea 3, diez estudiantes no alcanzaron a responder las preguntas, los demás encontraron algunas relaciones entre la gráfica de la función Seno y Coseno. Se muestran algunos de los resultados en la Figura 20 y 21.

9.

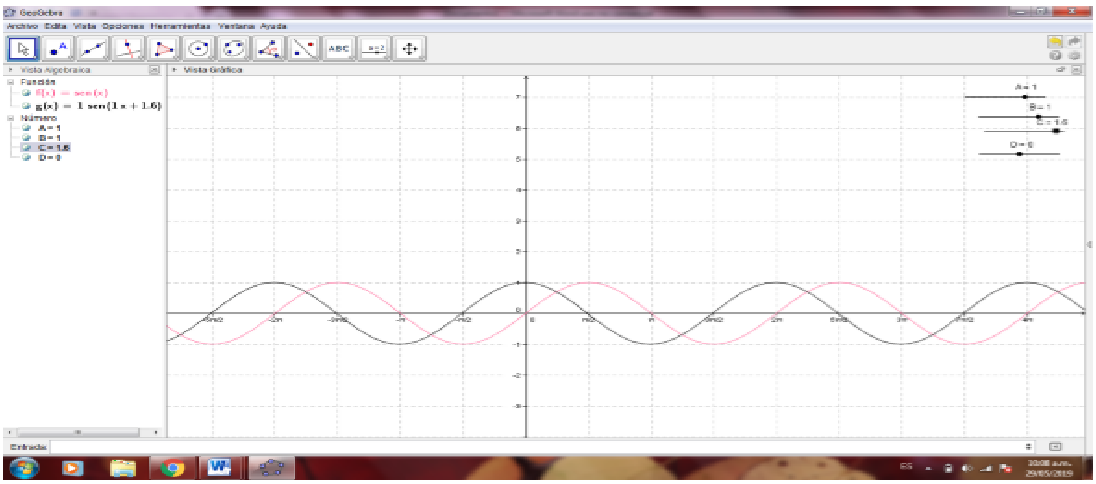


Poner A y B en 1, por las mismas razones mencionadas en la pregunta anterior. D en 0, también por las razones de la pregunta anterior.

Y poner C en aproximadamente 1.6, para que la gráfica se desplace aproximadamente π/2 hacia atrás ya que la función coseno tiene un desfase de π/2 con respecto a la función seno

Figura 20. Respuesta Juan José, Tarea 3 Guía 3, mayo 29

En la Figura 20 se evidencia la respuesta del estudiante a la pregunta relacionada con los valores de los deslizadores para que la gráfica de la función Seno quede representada en la función Coseno. El estudiante desarrolla la tarea y sus significados personales matemáticos concuerdan con los significados institucionales propuestos en la Tabla 5, esto se evidencia en el texto “poner C en aproximadamente 1.6 para que la gráfica se desplace aproximadamente π/2rad hacia atrás ya que la función Coseno tiene un desfase de π/2rad con respecto a la función Seno”. Además, el estudiante usa el significado institucional del objeto computacional “deslizador” (C) y lo relaciona con la transformación desplazamiento de fase, colocando el valor pedido en 1.6, que es el equivalente aproximadamente en valor numérico a π/2rad. En este proceso de solución se resalta una relación entre los objetos matemáticos y computacionales en un proceso interesante que llamamos actividad matemática, porque se pone en juego lo que el estudiante conoce con la interacción del software Geogebra que le permite dar cuenta de sus significados personales, que son los sistemas de prácticas que realiza una persona, con los compartidos en el seno de una institución, es decir, los significados institucionales (Godino, Batanero & Font, 2007).



10) Las similitudes son todas, exceptuando la del desfase, tienen el mismo rango y el mismo dominio

Figura 21. Respuesta Sergio, Tarea 3 Guía 3, mayo 29

En la figura 21 se resalta que el estudiante encuentra que entre la función Seno y Coseno hay muchas similitudes, y menciona algunos conceptos como el rango y el dominio, pero que su diferencia está en el desfase que tiene la gráfica de la función Coseno respecto a la función Seno. Se evidencia la relación entre los significados personales e institucionales definidos en la Tabla 5, en la cual el estudiante da cuenta de la comprensión de las gráficas de ambas funciones trigonométricas y esto lo hace por medio de la interfaz gráfica de Geogebra que le permite interactuar con ambas gráficas. La gran ventaja de los softwares virtuales son la posibilidad de cambiar y agregar datos y variables, manipulando así los elementos que intervendrán en la experiencia (Saraiva, 2015).

4.4 Guía 4: Identidades Trigonométricas

El objetivo de la Guía fue resolver identidades trigonométricas usando el software Geogebra. Se presenta la Tabla 7 que corresponde a los conceptos matemáticos de la Guía y la Tabla 10 que presenta los conceptos computacionales.

Tabla 7. GROS- Conceptos matemáticos Guía 4-

Tipos de Objetos	**Significados**	**Significados emergentes**
Identidades trigonométricas		
Conceptos (entidades Matemáticas para las cuales se puede formular una definición)		
Identidad	Una identidad matemática es un tipo de igualdad matemática, entre expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor de alguna variable de todas las que intervienen en la expresión	*Igualdad entre dos gráficas*
Identidad trigonométrica	Las identidades trigonométricas son ecuaciones que involucran las funciones trigonométricas que son verdaderas para cada valor de las variables involucradas	
Identidad trigonométrica fundamental	$sen^2\alpha+cos^2\alpha=1$, se le llama identidad trigonométrica fundamental debido a que, a partir de ella se deducen una gran cantidad de otras identidades trigonométricas	
Identidad recíproca	Es obtenida al efectuar el producto entre 2 razones recíprocas, ejemplo: Seno y cosecante	

Identidad cociente	Denominadas así porque cada una de ellas representa la división o cociente entre dos funciones trigonométricas	
Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)		
Expresión algebraica	Expresión Matemática que se compone de funciones trigonométricas	
Expresión gráfica	Representación de los miembros de la identidad	
Argumentos (enunciados usados para validar)		
Soluciones	Demostración de las identidades	• *Se resolvieron con ayuda de una página web y trabajo propio.* • *Se demostraron las identidades que eran verdaderas y tenían el mismo resultado.* • *Si porque tuvimos la necesidad de consultar en internet y Geogebra.* • *Si pudimos resolver todas las identidades. José: "Al principio tuve inconvenientes, pero una vez comprendido el primer ejercicio con identidades pitagóricas... los demás, los pude resolver eficazmente"* • *No porque hubo varias que se nos dificulto y el tiempo no nos alcanzó.* • *No el tiempo fue muy corto.* • *No se pudieron resolver algunos problemas.* • *No, se nos dificulto la conversión a Senos y Cosenos.* • *No, debido a que presentamos dificultades en los primeros ejercicios no alcanzamos a resolver 3 de los últimos ejercicios* • *No los pude resolver eso estaba muy difícil porque estaba muy complejo y casi no entendí este tema.*

		• *No logramos resolver todas las identidades trigonométricas porque por ejemplo en el caso de la viñeta B del primer trabajo, por ser de gran complejidad para nosotros tardamos demasiado* • *No logramos resolver todas las identidades por cuestión de tiempo y por la dificultad de resolver algunos puntos, presentamos dificultad al resolver por la complejidad del tema.*
	Identidades de mayor dificultad	• *En la 1b y la 2b porque no reformulamos bien el procedimiento.* • *En las que estaban elevadas a una potencia.* • *En la 2b por todas las operaciones que requerían.* • *En la 2a porque inicialmente no encontramos cómo resolverla, pero después la resolvimos con Geogebra.* • *Tuvimos dificultades en las últimas porque no entendíamos lo que nos planteaban.* • *En lo que más presentamos dificultad fue al convertir en unidades trigonométricas.* • *Tuve problemas en el punto 2.b, debido a que las expresiones de sen y cos no estaban elevados al cuadrado".* • *En todas las que hice porque eso estuvo muy complejo y no entendí entonces me fue mal en este tema.* • *En la que mayores dificultades presentamos fueron en la B de la primera y La segunda, porque al saber que había que invertir nos saltamos procedimientos que hicieron difícil encontrar la justificación de la identidad y nos perdimos.* • *Presentamos mayor dificultad en las identidades del segundo punto.*

	Estrategias utilizadas para resolver identidades con mayores niveles de dificultad	• *Realizar la identidad a lápiz y papel se nos complicó un poco y decidimos realizarla en Geogebra y nos queda que esta identidad si es una igualdad.* • *Nos valimos de Geogebra, para ver si las gráficas eran iguales, y también de la aplicación photomath para convertir a Cosenos y Senos.* • *Buscamos en internet y encontramos una Tabla que nos ayudó a convertir en unidades trigonométricas.* • *Utilice muchas estrategias como en internet en páginas que explicaran los temas y una herramienta de software matemático photomat.* • *Para las que se presentaron dificultades consultamos en páginas de internet y apuntes de la explicación del profesor Wilson* • *Preguntarle a la profe, la cual de forma indirecta con otros ejercicios prácticos resolvió mis dudas* • *Tuvimos que buscar en una página web* • *Compararla en Geogebra* • *Entramos a Geogebra y encontrar una solución.* • *Apuntes del cuaderno.*
	Interpretaciones de una identidad trigonométrica	• *Si, la igualdad de dos expresiones trigonométricas, genera una identidad.* • *Sólo puede utilizarse para comparar.* • *Ese es el significado.* • *Si porque llegaremos a un mismo resultado y esto lo comprobamos en Geogebra.* • *No, hay más expresiones similares como dos expresiones equivalentes.* • *Principalmente se ve como la igualdad de dos razones, pero*

		podemos interpretarlo de otras varias maneras • *Considero que sí* • *A mí me pareció que no había más interpretaciones.* • *Para nosotros una identidad solo se puede entender como la igualdad de dos expresiones* • *Las identidades tienen la interpretación de igualdad entre sí para resolverse con las funciones trigonométricas y llegar al resultado.*
Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo)		

En la Guía se presentó dos secciones de demostraciones de identidades trigonométricas, los primeros consistieron en la transformación de Seno y Coseno, es decir, utilizar identidades básicas. A partir de las soluciones dadas describimos los procedimientos utilizados, estos serán nombrados en paréntesis (Pn), donde "n" es el número de procedimientos realizados para referirnos a la Tabla 8 y 9. En las casillas de cada procedimiento aparece el símbolo (√) para referirnos a los estudiantes que realizaron bien el procedimiento, los espacios en blanco señalan que los estudiantes no lo realizaron o presentaron conflictos en la solución, y en donde aparecen números en cursiva indica que son procedimientos emergentes y estos están descritos después de cada identidad en letra cursiva. La parte que se refiere a los grupos de estudiantes, los cuales se nombran del 1 al 18, indica que, para el desarrollo de esta Guía, los estudiantes se organizaron por parejas para interactuar con su compañero acerca de la temática de identidades trigonométricas. A continuación, se presentan las identidades con sus respectivos procedimientos y las Tablas 8 y 9.

Identidades correspondientes a la primera parte de la Guía

a) $cotx.secx = cscx$, en esta identidad los procedimientos utilizados fueron: expresar en términos de Seno y Coseno (p1) y simplificar la expresión (p2)

b) $\frac{1+cot^2x}{cot^2x} = sec^2x$, los procedimientos utilizados fueron: separar denominador común (p1), simplificar y aplicar identidad recíproca (p2) y utilizar identidad fundamental (p3)

c) $sec^2x.tan^2x.csc^2x = sec^4x$, expresar en términos de Seno y Coseno (p1) simplificar la expresión (p2), utilizar identidad recíproca (p3) y multiplicar potencias de igual base (p4).

d) $\frac{tan^2\theta+1}{tan^2\theta} = csc^2x$, los procedimientos utilizados fueron: separar denominador común (p1), simplificar y aplicar identidad recíproca (p2) y utilizar de la identidad fundamental (p3)

e) $sec^2x(1 - sen^2x) = 1$, procedimientos: utilizar identidad recíproca y fundamental (p1) y simplificar (p3).

Procedimientos emergentes

1. *Procedimientos utilizados: transformar a Seno y Coseno, sumar fracciones, simplificar, identidad fundamental e identidad recíproca.*
2. *Procedimiento: Identidad fundamental, identidad recíproca, ley de medios y extremos, simplificar e identidad recíproca.*
3. *Geogebra, graficas iguales.*
4. *Transformar a Seno y Coseno, identidad recíproca, resta de fracciones, identidad fundamental, identidad recíproca y simplificar.*
5. *Identidad recíproca, transformar a Seno y Coseno.*
6. *Separar el denominador común, suma de fracciones, simplificar, transformar a Seno y Coseno, resta de fracciones, simplificar, identidad fundamental e identidad recíproca.*

En la segunda sección, se planteó ejercicios de identidades trigonométricas que requerían de algunas operaciones matemáticas que implican conocimiento sobre factorización, multiplicación por la conjugada, ley de extremos y medios, entre otros. A continuación, se presentan las identidades de la segunda parte de la Guía con sus respectivos procedimientos.

a) $\frac{senx-sen^3x}{cos^2x} = senx$, procedimientos: factor común (p1), identidad fundamental (p2) y simplificar (p3).

b) $\frac{sen\theta}{1+cos\theta} = \frac{1-cos\theta}{sen\theta}$, procedimientos: multiplicar por la conjugada (p1), utilizar la identidad fundamental(p2) y simplificar (p3)

c) $\frac{1-sen^4x}{cos^2x} = 2 - cos^2x$, procedimientos: diferencia de cuadrados (p1), identidad fundamental (p2), simplificar (p3), identidad fundamental (p4), suma de términos semejantes (p5).

d) $1 - 2sen^2x = \frac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$, procedimientos: convertir a Senos y Cosenos (p1), suma y resta de fracciones de diferente denominador (p2), simplificar los denominadores (p3), identidad fundamental (p4), identidad fundamental (p5), suma de términos semejantes (p6).

Tabla 8. Identidades primera parte Guía 4

		$cotx.secx = cscx$		$\frac{1+cot^2x}{cot^2x} = sec^2x$			$sec^2x.tan^2x.csc^2x = sec^4x$				$\frac{tan^2\theta+1}{tan^2\theta} = csc^2x$			$sec^2x(1 - sen^2x) = 1$		
Procedimientos de cada identidad		P1	P2	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P1	P2	P3
Grupo de estudiantes	1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓ *1*			✓	✓	✓
	3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓ *1*			✓	✓	✓
	4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	5	✓	✓	*1*			✓	✓	✓	✓	*1*			✓	✓	✓
	6	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			
	7	✓	✓	*1*			✓	✓	✓	✓	*1*					
	8	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	9	✓	✓	*1*			✓	✓	✓	✓	*2*			✓	✓	✓
	10	✓	✓	*3*			✓	✓	✓	✓	*3*			✓	✓	✓
														3		
	11	✓	✓	✓ *2*			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	*4*		
	12	✓ 5		*1*			✓	✓	✓	✓	*1*					

	13	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			
	14	✓	✓		*1*		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			
	15	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			
	16	✓	✓		*1*		✓	✓	✓	✓		*1*				
	17	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			
	18	✓	✓				✓	✓	✓	✓		*6*		✓	✓	✓

Tabla 9. Identidades segunda parte Guía 4

		$\frac{senx - sen^3x}{cos^2x} = senx$			$\frac{sen\theta}{1+cos\theta} = \frac{1-cos\theta}{sen\theta}$			$\frac{1-sen^4x}{cos^2x} = 2 - cos^2x$					$1 - 2sen^2x = \frac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$					
Procedimientos de cada identidad		P1	P2	P3	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P4	P5	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Grupo de estudiantes	1	✓	✓	✓	✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	2				✓													
	3				✓				✓	✓	✓	✓						
	4				*3*													
	5								✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	6																	
	7								✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	8																	
	9				✓	✓	✓			*3*					*3*			

	10																	
	11				✓	✓	✓											
	12	✓	✓	✓														
	13																	
	14	✓	✓	✓														
	15	✓	✓	✓														
	16	✓	✓	✓	✓													
	17	✓		✓														
	18	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Tabla 10. GROS- Conceptos computacionales Guía 4-

Tipos de Objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**	**Significados emergentes**
Conceptos (referentes a herramientas computacionales para las cuales se puede formular una definición)		
Vista Gráfica	Refiere a diversos tipos de cuadrículas y ejes	
Barra de entrada	Permite introducir directamente expresiones (números, operaciones, coordenadas, ecuaciones) y comandos, así como redefinir los objetos ya existentes	
Propiedades de objetos	Redefinir valores Mostrar las coordenadas de un punto Ocultar las coordenadas de un punto	*Cambiar color para diferenciar las gráficas*
Barra de menú	Agrupa los comandos del sistema o software por categorías de acuerdo a su uso. El acceso a ella puede ser vía mouse o teclado	
Barra de herramientas	Organiza las correspondientes herramientas de trabajo de cada barra	

	Elige y mueve Punto Texto	
Vista algebraica	Ofrece registros diferentes de cada objeto matemático	

La Guía fue desarrollada por parejas, para promover la ‘actividad matemática’ mediante la interacción con el compañero, en el tema de identidades trigonométricas, el cual es uno de los temas más exigentes del grupo décimo, exigen buen manejo de operaciones con números reales, razones aritméticas, factorización, comprensión de procesos de generalización, procesos de abstracción, donde se requiere manejar conocimientos previos y estructuras lógicas que la mayoría de los estudiantes no poseen (Vásquez, 2015); además con base en la experiencia de los investigadores se han evidenciado dificultades con el tema, incluso en algunas instituciones no se propone trabajar en el plan de área, algunos prefieren no enseñarlo. El análisis de la Guía se enfocó en los objetos primarios, principalmente en procedimientos usados para realizar la tarea propuesta y los argumentos dados por algunos estudiantes a partir de la interacción con el concepto computacional “vista gráfica”.

La Guía presentó tres tareas principales, la primera era demostrar identidades trigonométricas utilizando transformaciones a Senos y Cosenos con las identidades básicas; la segunda tarea consistió en demostrar identidades que requerían más procedimientos como sumar o restar fracciones, multiplicar por la conjugada, entre otros; finalmente la última tarea se trataba de responder algunas preguntas relacionadas con las soluciones de las demostraciones. En todo el desarrollo de la Guía se dejó abierta la posibilidad de utilizar el software Geogebra para resolver las identidades, con procedimientos que son emergentes porque son diferentes a los algorítmicos, en ningún momento se les sugirió usarlo, fue alternativa de los estudiantes.

En la tarea 1 se les propuso 5 identidades, la cual fue desarrollada por los 18 grupos de estudiantes, de los cuales 8 no resolvieron la última, y uno de los grupos sólo resolvió la primera identidad. En la figura 22 y 23 se presentan algunas evidencias de las soluciones de los estudiantes:

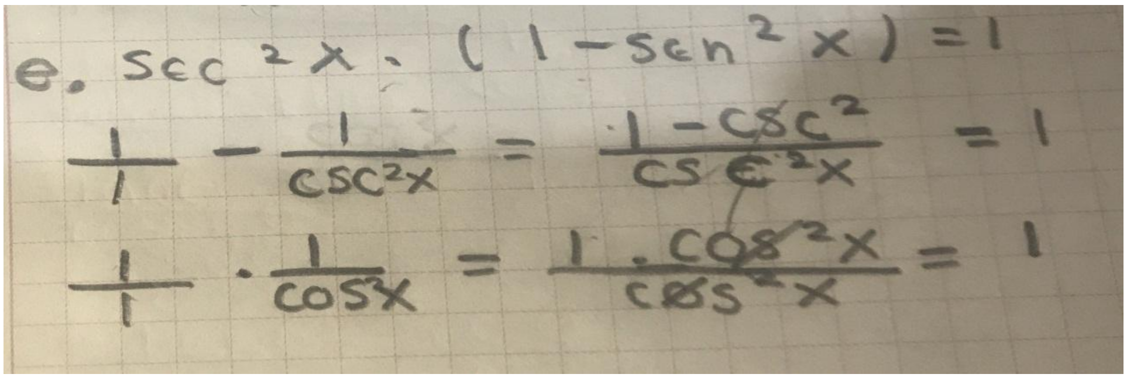


Figura 22. Respuesta Katerin y Katherine, Tarea 1 Guía 4, junio

En la figura 22 se observa la respuesta dada por las estudiantes (G12), donde aparece el procedimiento correspondiente a los objetos primarios, además se observa lenguaje algebraico, en el cual la estudiante da respuesta a la demostración de la identidad $sec^2x(1 - sen^2x) = 1$. En el procedimiento se evidencia que utilizan bien las identidades recíprocas y la resta de fracciones; pero se presentan conflictos de significado en el procedimiento de simplificación de fracciones, ya que simplificaron el término de una resta con el denominador y en la multiplicación de fracciones lo hacen como una resta de fracciones. Las estudiantes demuestran que la identidad era igual a 1, pero con algunos conflictos de procedimiento; esta es una posibilidad de retroalimentar con el estudiante, que así se llegue a la respuesta, no significa que la demostración está bien, o que todos los procedimientos están correctos. Esta posibilidad de analizar la actividad matemática en donde aparecen procedimientos que no siempre son los correctos, aportan a la clase de Matemáticas la forma en que los estudiantes proponen soluciones, razonan y discuten acerca de tareas matemáticas. "Las posibles dificultades en la resolución de la tarea, permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un complejo conjunto de prácticas matemáticas realizada por estudiantes al resolver una tarea propuesta. Práctica donde se puede identificar la configuración de objetos primarios" (Gordillo, Pino- Fan, 2015, p. 5).

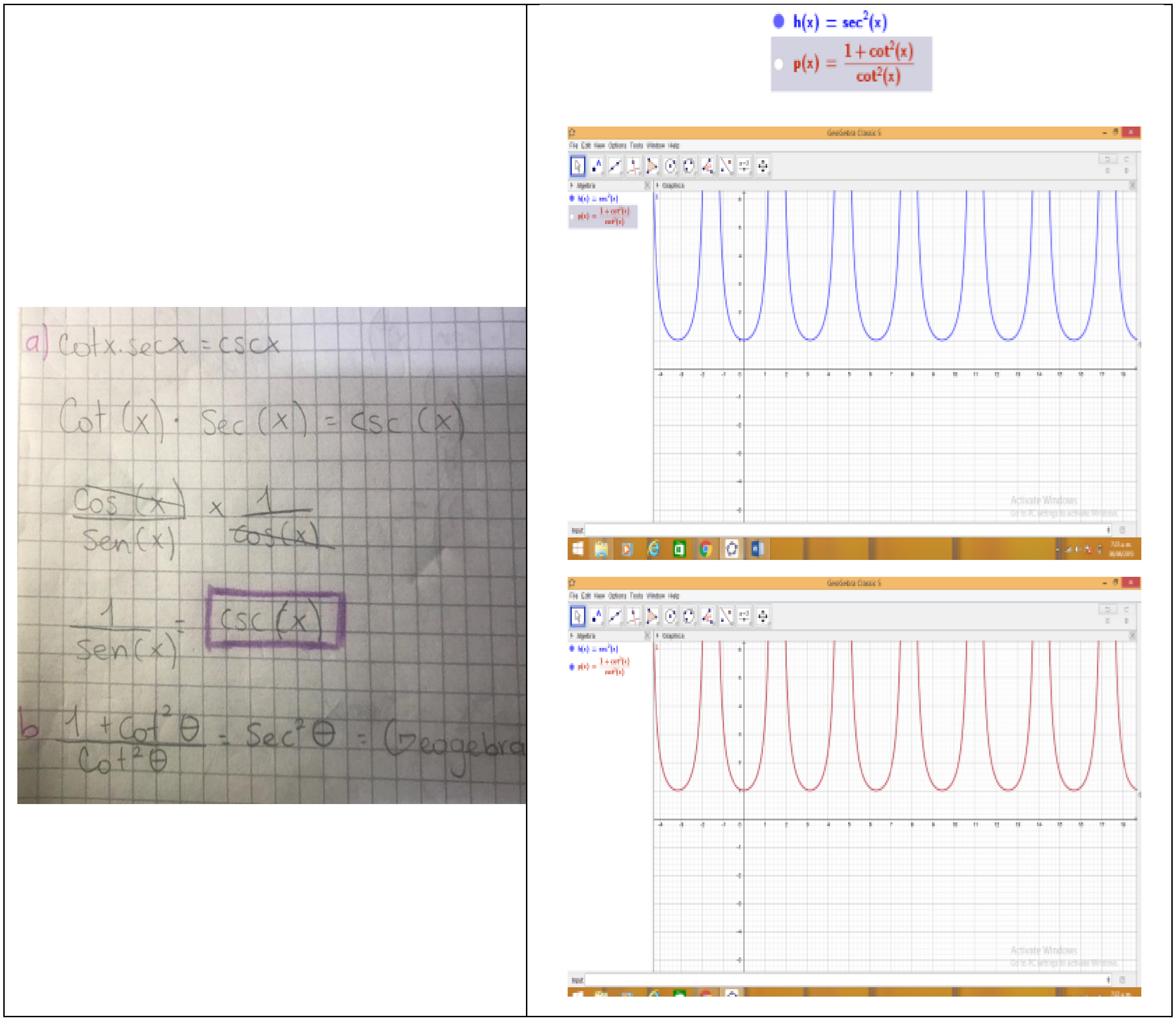


Figura 23. Respuesta Camila y Santiago, Tarea 1 Guía 4, junio 6

La respuesta de los estudiantes (G10) en la figura 23 evidencia que, en la demostración de las identidades, utilizan adecuadamente los procedimientos algebraicos para llegar a la solución pedida. Además, la figura muestra que una de las identidades fue resuelta con el software Geogebra, en donde el procedimiento utilizado por los estudiantes consistió en graficar uno de los miembros de la igualdad y luego el otro miembro, para después comparar las gráficas obtenidas y llegar a concluir que si son iguales es una identidad. Este concepto emergente de identidad referido en la Tabla 7, es el que algunos estudiantes aplicaron para resolver algunas identidades. También se resalta momentos de instrumentalización porque el estudiante tuvo a disponibilidad lápiz y papel y a la vez el software, en este caso el artefacto se convirtió en instrumento de la actividad matemática para resolver la tarea. (Godino, Font, Wilhelmi & De Castro, 2009), señalan que en la mayoría de los casos el uso de los artefactos (manipulativos, concretos o virtuales, programas de cálculo o graficación) requiere la comprensión estudiantil de configuraciones epistémicas (normas matemáticas) específicas de los tipos de problema abordables con los mismos. Esta aproximación requiere la comprensión de procesos de instrumentación que conviertan tales artefactos en instrumentos de la actividad matemática.

En la tarea 2 se les propuso demostrar 4 identidades, ésta fue desarrollada por 3 grupos de estudiantes de forma completa, es decir, demostraron todas las identidades por medio de procedimientos algebraicos o con ayuda del software, un grupo no demostró ninguna de las identidades planteadas y el resto de estudiantes demostraron algunas de ellas, resaltando que se presentaron varios conflictos de significado en los procedimientos. En un ambiente natural de clase se presentan estas situaciones: que resuelvan todo lo propuesto, que resuelvan sólo una parte y no resuelvan nada. La última posibilidad puede ser por factores como: no hay gusto por las Matemáticas, desmotivación por la actividad, no hay todavía apropiación del software y muchas falencias en procedimientos algebraicos, lo que posibilitó no encontrar otro camino para demostrar las identidades (Tabla 9). En la figura 24 y 25 se presentan algunas evidencias de las soluciones de los estudiantes.

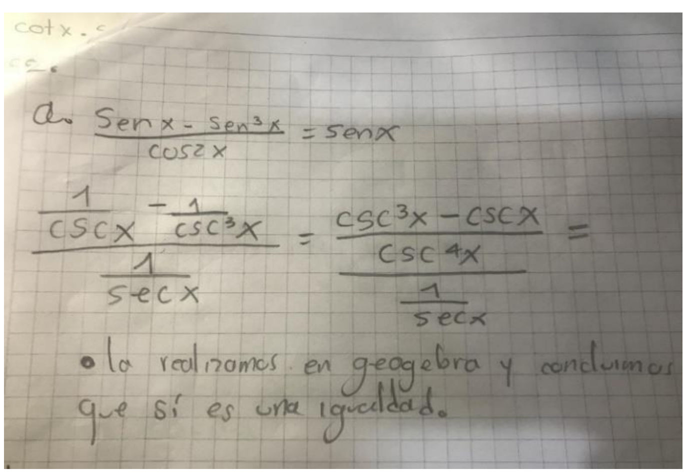


Figura 24. Respuesta Carolina y Sara, Tarea 2 Guía 4, junio 6

En la Figura 24 la respuesta dada por las estudiantes (G11) evidencia la necesidad de empezar con procesos algebraicos para llegar a la demostración de identidades trigonométricas, como lo realizan los estudiantes de manera tradicional; sin embargo al enfrentarse a dificultades con la demostración y no obtener solución alguna, recurrieron a la herramienta Geogebra, que han trabajado en Guías anteriores, y la aplican para demostrar la igualdad de las gráficas, que es el concepto emergente de identidad referido en la Tabla 7. Moreno y Waldegg, (2002) afirman que “un medio computacional permite generar una especie de realidad (virtual) matemática. Trabajar en un medio computacional permite comprender cómo los recursos de ese medio estructuran la exploración y cómo los recursos expresivos del medio favorecen la sistematización” (p.64)

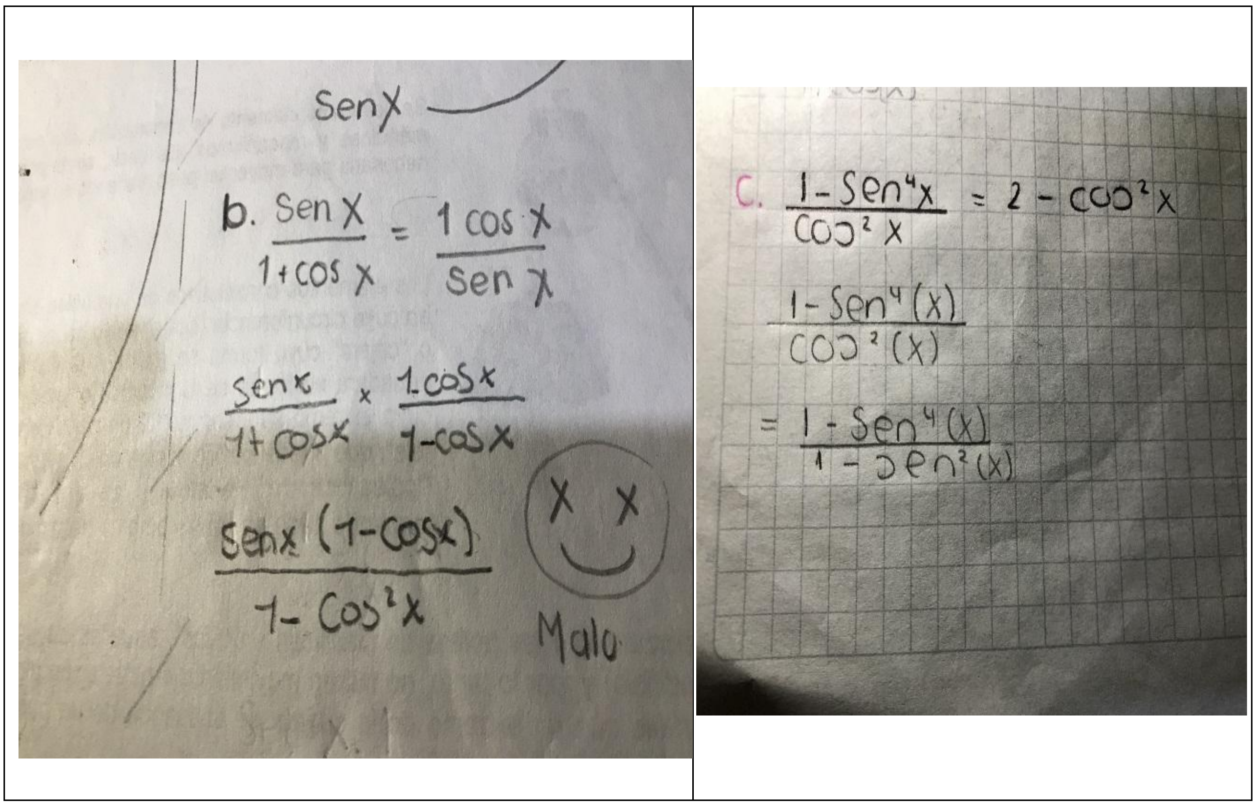


Figura 25. Respuesta grupo 16 y grupo 2, Tarea 2 Guía 4, junio 6

En la figura 25 se observa las respuestas de dos grupos de estudiantes, el grupo 16 conformado por Luisa y Yenifer y el grupo 2 conformado por Paula Y María José. Estas respuestas son evidencias de algunos de los conflictos de significado que se presentaron en el desarrollo de la tarea 2, en las cuales las estudiantes presentaron éstos en el objeto primario correspondiente a los procedimientos. En este caso la respuesta del grupo 16 que escribió la expresión "*malo*", muestra que no pudieron continuar con la demostración de la identidad, pero en la figura 23 se da cuenta que todos los procedimientos mostrados están bien hasta donde llegaron. Se puede mencionar además que varios grupos presentaron estos conflictos de significado e incluso no empezaron el procedimiento, en especial las identidades correspondientes a la tarea 2 como se muestra en la Tabla 9, en donde hay varios espacios en blanco. En esta situación resaltamos el papel del docente para guiar procesos de solución de las tareas, pues, además de ser el que diseña y planea las actividades, debe orientar de forma permanente inquietudes de los estudiantes, mostrar otras formas posibles de solucionar las actividades, como es el caso de esta tarea, la cual se podía resolver con el uso del software Geogebra de manera más rápida. Ante esto, se habla de orquestación instrumental como "la organización intencional y sistemática del uso de varios artefactos disponibles en un ambiente de aprendizaje, por parte del profesor en una situación de tarea matemática dada con el propósito de guiar las génesis instrumentales de los estudiantes" (Pérez, 2014, p.143).

En la tarea 3, se realizaron 4 preguntas referentes a la solución de las demostraciones de las identidades y otras estrategias de resolución, los cuales se encuentran en Tabla 7 como objeto primario argumentos. Lo más relevante de estos argumentos refiere al uso del software Geogebra, que fue utilizado por 4 grupos de estudiantes; Los cuales dieron una forma alternativa de demostrar una identidad mediante la igualdad de dos gráficas, esto evidencia que para algunos estudiantes el software ha sido incorporado en la forma que resuelven tareas matemáticas, ya que en la guía no se daba la instrucción de utilizar el software, se recordaba que se contaba con lápiz, papel y con el ordenador. "Geogebra crea un laboratorio dentro de la computadora, donde posibilita, con una única construcción, efectúa un número arbitrario de pruebas, lo que será prácticamente imposible con la regla y el compás" (Posada, Matilla & Rosales, 2017, p. 405).

a) ¿Se resolvieron todas las identidades trigonométricas? Justifica tu respuesta
b) ¿En cuáles se presentaron mayores dificultades? ¿por qué?
c) ¿Qué estrategias implementaste para las que presentaron más dificultades?
d) ¿Una identidad se puede entender solamente como la igualdad entre dos expresiones? ¿puede tener otra interpretación?

a. No los pude resolver eso estaba muy difícil porque estaba muy complejo y casi no entendí este tema.

b. En todas las que hice porque eso estuvo muy complejo y no entendí entonces me fue mal en este tema.

c. Utilice muchas estrategias como en internet en páginas que explicaran los temas y una herramienta de software matemático photomat.

d. A mí me pareció que no habían mas interpretaciones.

Figura 26. Respuesta Cristian, Tarea 3 Guía 4, junio 6

En la figura 26 está la respuesta del estudiante G13, se observa los conflictos de significados que presentaron algunos estudiantes con las demostraciones de identidades trigonométricas, el cual es un tema que presenta dificultades en su enseñanza, una de estas dificultades es la forma de enseñar las identidades, que en su forma tradicional hace que los estudiantes tengan muchos conflictos de significado y de procedimientos. Además, en la respuesta "d", cuando el estudiante escribe "*A mí me pareció que no había más interpretaciones",* muestra que al igual que otros grupos no encontraron otro argumento para demostrar las identidades, sólo se enfocan en el procedimiento algorítmico.

En esta guía se presentó más conflictos de significado que las anteriores, también se da cuenta de procesos de actividad matemática y necesidad de configurar la orquestación instrumental, pues todo lo que resuelven los estudiantes son posibilidades en el EOS, porque las estrategias, procedimientos, argumentos, entre otros; son procesos que dan cuenta de la actividad matemática que desarrollan los estudiantes en el ambiente natural de clase, donde están presentes conflictos en significados y procedimientos.

4.5 Guía 5: Movimiento Armónico Amortiguado

El objetivo de la Guía fue el estudio del movimiento armónico amortiguado usando las funciones trigonométricas y el software Geogebra. Se presentan la Tabla 11 que corresponde a los conceptos matemáticos de la Guía y la Tabla 12 que presenta los conceptos computacionales.

Tabla 11. GROS- Conceptos matemáticos Guía 5-

Tipos de Objetos	**Significados**	**Significados emergentes**
Movimiento Armónico Amortiguado		
Conceptos (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)		
Movimiento armónico amortiguado	Es un sistema oscilante en el que los efectos de la fricción se manifiestan en una disminución de la amplitud de las oscilaciones y de la energía total del sistema a lo largo del tiempo	
Frecuencia angular	Representa la rapidez de cambio de una cantidad angular (no necesariamente relacionada con un movimiento rotacional) que siempre se mide en radianes por segundo	
Amortiguador	Es un dispositivo que absorbe energía, utilizado normalmente para disminuir las oscilaciones no deseadas de un movimiento periódico o para absorber energía proveniente de golpes o impactos	
Oscilaciones	Se denomina oscilación a una variación, perturbación o	

	fluctuación en el tiempo de un medio o sistema	
Ángulo de fase	Estado de vibración de un punto de la onda	
Velocidad	Es el desplazamiento efectuado por la onda por unidad de tiempo, se puede entender como la rapidez con la que se propaga la onda	
Elongación	Es la separación instantánea de cada punto del medio respecto a su posición de equilibrio	
Puntos de corte	Cero de una función	• *Significa que toca al eje x* • *Los puntos de corte de una función cada vez disminuyen con los puntos de intersección de la gráfica* • *Las líneas pasan por el eje x, se ejerce un punto de corte en el que puede estar en diagonal o en línea recta* • *Son las líneas o movimientos en los que el resultado atraviesa el eje x* • *Es como el tiempo que la función trata de llegar a un punto fijo donde su regulación sea constante* • *Va cortando a la gráfica cada que pasa por el eje x* • *Cada que pasa por el punto de corte va disminuyendo la onda* • *Cada punto está separado por la misma distancia* • *Cuando una línea pasa por eje x ejerce una intersección en la gráfica de la función* • *En esta función se da cada 0.21 o 0.22 aproximadamente* • *Son los saltos del amortiguador* • *La fuerza a la que se somete los amortiguadores* • *Muestra los mismos valores en el periodo y en esos puntos la onda tiene una amplitud mínima*

		• *Cada 0.42 puntos se repite la onda* • *Los puntos de corte en x, graficada en la función nos indican que el vehículo pasa por un estado original, así sea por una transición, para finalmente quedar constante y quedar en su estado natural. (0.2, 0); (0.6, 0)* • *Los cortes en el eje x muestran como disminuye la oscilación del vehículo* • *Significa el tiempo, de cada oscilación*
Amplitud máxima	Es el valor de elongación máxima	• *Es infinita* • *Una conmoción de ondas en el espacio de Geogebra* • *Significa lo máximo que suben las líneas de la gráfica* • *Sube hasta 1.5 y baja hasta -1, el significado corresponde a la altura de la onda* • *Se podría llamar como zona de impacto porque es la más amplia* • *Es 1.63* • *Es una medida de variación máxima del desplazamiento* • *Es el movimiento de salto que realiza la máxima de desplazamiento u oscilación del vehículo. Significa la fuerza ejercida en el amortiguador* • *Al menor tiempo la amplitud es mayor y a mayor tiempo la amplitud es menor* • *La amplitud máxima es infinita ya que al intentar alejar la gráfica para ver la amplitud esta no llegaba hasta un punto exacto, sino que seguía subiendo, lo que nos dice que la amplitud máxima es infinita* • *(1.63; -1.05)* • *Por lo que entiendo de amplitud máxima, es lo que se amplía una gráfica en un movimiento oscilante, ondulado o señal electromagnética* • *La amplitud de mi función es 1.62 (y), tomándola claramente del pico más alto, él significado es que es el punto más*

		sensible y afectado del fenómeno en este caso de amortiguación • *La amplitud máxima es infinita en el eje y negativo, porque cuando llega al lado positivo su amplitud reduce* • *La amplitud máxima es más infinito, el significado que tiene esta amplitud es la manifestación en una disminución de la amplitud de las oscilaciones y de la energía total del sistema a lo largo del tiempo* • *La amplitud máxima es infinita, pues viene de un movimiento oscilatorio, pero pasa a una posición de equilibrio aproximadamente a los 3 segundos* • *La amplitud máxima es que tan alto puede llegar la onda y su significado es que vale 0 a infinito*
Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)		
Expresión algebraica	Expresión matemática que describe el movimiento armónico amortiguado	
Expresión gráfica	Representación de la expresión del movimiento armónico amortiguado	
Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo)		
Calcular la frecuencia angular y obtener la ecuación que describe el movimiento armónico amortiguado		
Argumentos (enunciados usados para validar)		
Soluciones	Relación con algunas de las funciones trigonométricas trabajadas	• *Tiene relación con el Seno y el Coseno, dependiendo en del número donde se encuentre el deslizador. Con el Seno* φ=1.5 γ=0 *y Coseno* φ=0 γ=0 • *La diferencia es que esta onda va disminuyendo cada vez más su amplitud y frecuencia con el paso del tiempo lo*

		que las funciones Seno y Coseno es constante • *Si se observa bien es una función Seno que va disminuyendo la amplitud* • *Se parece a la función Seno porque las ondas son un poco similares* • *Se necesita una función trigonométrica, la cual permite conocer el movimiento de la amortiguación* • *Función Seno, amplitudes, longitudes* • *Es Seno porque incluso en la fórmula se utilizó la función Seno y tiene más parecido a ella* • *La relación que tienen ambas es que en las dos se trabaja con Seno, es decir nos forman una onda Sinusoidal* • *Similitud con Seno (está dentro de la ecuación) ya que son impares e infinitas* • *Tiene la misma forma de una función Seno y su frecuencia disminuye en el eje x positivo* • *Si tiene relación con la función trigonométrica Seno, con longitud y amplitud* • *La longitud y la amplitud son las ondas y la función trigonométrica Seno comienza hacia arriba* • *Estamos aplicando las funciones trigonométricas para crear ondas* • *Las ondas muestran cada tanto tiempo se disminuye el movimiento, así como el periodo y la frecuencia en Seno y Coseno*
	Descripción del comportamiento del amortiguador	• *Comienza con una amplitud constante y luego llega a un tiempo que va disminuyendo la amplitud de sus oscilaciones* • *Como un movimiento acelerado que luego va disminuyendo su velocidad y comprimiéndose* • *Como un movimiento en el que sube y baja hasta el punto de que queda sin movimiento* • *Esto lo podemos asociar a una cierta presión a la cual al dejarla de hacer*

		empieza una frecuencia la cual después de cierto tiempo tendrá un reposo constante • *Realmente nunca deja de oscilar, se puede observar que se acerca mucho al cero, pero nunca pasa por él* • *Haciendo un poco de zoom se llega a la conclusión que oscila infinitamente* • *Desde los valores de -2 hasta -1 el amortiguador estaba funcionando a lo máximo y a partir del 0.9 hasta 4 fue disminuyendo su funcionamiento* • *El amortiguador empieza con mucha potencia teniendo una amplitud elevada, luego empieza a disminuir rápidamente hasta el punto en que (2.2, 0) la amplitud es mínima y ya en (4,0) el movimiento se detiene casi por completo* • *Que su comportamiento puede ser de la forma de comprimir y descomprimir por la presión de un automóvil en causa el también merma la potencia de descomprimirse y se detiene en delimitado valor* • *Al hacer presión se va a haciendo el amortiguador y tiene una velocidad constante y también puede estar en un estado por decirlo así de reposo* • *El amortiguador se comporta de forma brusca debido a que el principio el nivel es alto después va disminuyendo* • *Fue como decayendo dependiendo del salto que dio este* • *El trabajo del amortiguador es recibir un impacto y a razón de esto va disminuyendo la fuerza de este impacto, lo que a funciones prácticas hace un golpe suave para que no se note un impacto brusco* • *El amortiguador tiene una amplitud de 2m y comienza a reducir a medida que el tiempo aumenta dejando de oscilar y manteniendo la estabilidad del vehículo* • *El comportamiento del amortiguador es reaccionar cada que hay un golpe por un momento y luego este deja de oscilar*

		• *Es un movimiento sub amortiguado Así que la amplitud de la onda va disminuyendo paulatinamente* • *Yo describiría el comportamiento del amortiguador según las gráficas, cuando los amortiguadores se retraen estos se hacen más pequeños y cuando dejan de hacer una fuerza hacia abajo este se vuelve más grande, como en las gráficas que trabajamos* • *Se podría describir de una forma tal que después de cierta alteración del amortiguador del vehículo en cuestión, de forma rápida (relativamente) va perdiendo potencia, fuerza, hasta quedar en punto muerto* • *Cuando se encuentra en el lado negativo es muy alta su oscilación y cuando empieza a llegar al lado positivo disminuye* • *Por la gráfica entiendo que el movimiento del amortiguador del carro comienza con una amplitud amplia y comienza a disminuir y a dejar de oscilar hasta valores infinitos* • *tiene un comportamiento subamortiguado, lo que significa que el amortiguador casi no tiene fricción*
	Descripción de la influencia del parámetro de amortiguamiento	• *Esa variable representa la fricción del amortiguador, y f(x) el movimiento generado en este tiene sentido que, al ejercer un movimiento, inicia un gran movimiento que solo puede ser detenido por una fuerza según lo describe Newton en su primera ley* • *El amortiguamiento cambia e incrementa* • *El carro al iniciar un desplazamiento, al inicio por el cambio de velocidad vamos a observar un pequeño jalón lo cual hace que los amortiguadores reboten y luego se estabilizan* • *Es bastante constante y sus periodos de oscilación incrementan*

		• *Es como cuando un vehículo pasa por un resalto o por un bache que hay, se hace le efecto de amortiguación, pero casi de inmediato vuelve a estar en reposo* • *Como cuando un carro pasa por una roca y sube y baja y va reduciendo esos movimientos hasta que queda quieto* • *Lo interpreto como que el amortiguador funciona siempre sin ningún límite* • *En un vehículo sería la fricción que tiene los amortiguadores, si la fricción es mínima la onda se amplía y se prolonga por más tiempo, si la fricción es alta la onda se reducirá y el movimiento parará más rápido* • *Se explicaría como un medio de que el amortiguador tiene menor potencia en una continua disminución o puede causar una falla* • *Que los amortiguadores se comprimieron y se devolvieron* • *Cada vez que el carro se mueve por un terreno que no es plano esto se activa* • *Los amortiguadores saltan aún más* • *Esto define la fricción de los amortiguadores en los vehículos, entre más fricción haya, más rápido va a dejar de rebotar* • *Se la fricción que tiene el amortiguador del vehículo es buena, el movimiento va a hacer más leve teniendo estabilidad más fácil* • *Esto en los amortiguadores de un vehículo se puede explicar cómo ir en un terreno rocoso o con huecos y cada que entre en uno el amortiguador reacciona, como vemos en la segunda imagen la oscilación fue muy corta lo que quiere decir que el carro volvió a su estado de equilibrio, si lo vemos al contrario en la primera imagen vemos que oscila mucho lo que quiere decir que está siempre en un terreno rocoso y*

		al avanzar en el, sigue en constante oscilación el amortiguador • *El automóvil está en un terreno plano o estable. No hay amortiguación* • *Lo que más o menos puedo explicar es que en el amortiguador de un carro si este no está en movimiento no va a tener ninguna oscilación, y si esta resta en movimiento los amortiguadores van a estar en constante oscilación* • *Los amortiguadores tienen menos frecuencia por lo que disminuye* • *En un vehículo ocurre algo similar ya que este al llevar una velocidad determinada en un tramo de tiempo esté constantemente va a ir disminuyendo hasta ir frenando y posteriormente detenerse* • *Se está amortiguando mucho y el amortiguador del carro dejaría de funcionar* • *Que el movimiento es periódico* • *Cambia el tiempo en el que el auto vuelve al reposo, después de pasar por un bache, por ejemplo* • *En una parte de las ondas vemos cómo puede amortiguar y en el otro ya vuelve a su posición inicial*
	Descripción de la frecuencia angular	• *A medida del tiempo es bueno ya que la amplitud va disminuyendo* • *Como la fuerza aplicada en el amortiguador mientras más alto sea w más fuerza se le aplica y por lo tanto la onda va a ser más fuerte y más constante, en cambio si se le aplica menos fuerza el amortiguador va a rebotar menos y con menos constancia* • *Al parecer el amortiguador del vehículo dependiendo saltaría más o menos dependiendo de cómo va* • *A menor número de w menos se comprimen los amortiguadores y no se alcanzan a devolver*

		• *Entre más fuerza se le aplique al amortiguador del auto más oscilamientos tendrá* • *Si fuese un vehículo hace un solo salto de amortiguación y pararía, esta amortiguación seria brusca* • *Cuando un vehículo pasa por un bache que su amortiguador empieza a oscilar y cuando continua en un terreno plano va disminuyendo su oscilación* • *Lo podemos explicar en un movimiento muy leve en el frenado de un auto, el cual está en un movimiento rectilíneo* • *Cuando en el vehículo ya se termina de amortiguar* • *La frecuencia de oscilamiento se hace mayor por lo que habrá un mayor número de idas y vueltas en el amortiguamiento* • *se puede explicar cuando el auto está en un estado de equilibrio normal y el camino por el cual transita está totalmente plano y sin huecos* • *Pasa por un desnivel y tiene que amortiguar* • *Que si es mayor el número de w menos frecuente serán las ondas* • *En el caso de mover el deslizador de w, se puede ver como la onda se puede extender y también quedarse en un movimiento constante por valores de 0* • *Que el amortiguador está en muy constante trabajo* • *A mayor valor tiene más amortiguación* • *La amplitud disminuye con el tiempo* • *Sería la velocidad del auto, mientras más despacio pase, menos oscilación tendrá* • *A medida que aumenta el valor de w aumenta, el periodo de tiempo entre una onda y otra es menor y casi no hay desplazamiento* • *Que no amortiguaría nada ya que todo está en la misma posición*

	Valores en que se presentan los tres casos de amortiguamiento	*Amortiguamiento crítico:* • *W=2, xm=2,* γ=2, φ=0 • *W=2, xm=2,* γ=2, φ=2 • *W=1, xm=1,* γ=2, φ=0 • *W=15, xm=2,* γ=2, φ=0 • *W=0, xm=2,* γ=2, φ=1.1 • *W=0, xm=2,* γ=2, φ=2 • *W=1.2, xm=1.5,* γ=2, φ=1.7 • *W=0, xm=2,* γ=1.9, φ=2 *Amortiguamiento sobreamortiguado:* • *W=2, xm=2,* γ=0.7, φ=0 • *W=0, xm=2,* γ=2, φ=2 • *W=0, xm=1,* γ=2, φ=2 • *W=2, xm=2,* γ=2, φ=0 • *W=1.6, xm=1,* γ=2, φ=1.1 • *W=1, xm=2,* γ=2, φ=0 • *W=0, xm=2,* γ=2, φ=1.1 • *W=0, xm=2,* γ=0.6, φ=2 • *W=1.2, xm=2,* γ=2, φ=0.9 • *W=0, xm=2,* γ=0.7, φ=1.0 *Amortiguamiento subamortiguado:* • *W=0.6, xm=2,* γ=2, φ=0 • *W=2, xm=0.6,* γ=0, φ=2 • *W=15, xm=2,* γ=2, φ=0 • *W=1.6, xm=2,* γ=2, φ=0.5 • *W=10, xm=2,* γ=1.8, φ=0 • *W=8.3, xm=2,* γ=2, φ=1.1 • *W=4.8, xm=2,* γ=0.9, φ=0 • *W=8.1, xm=2,* γ=2, φ=0 • *W=2, xm=2,* γ=2, φ=0 *W=4.2, xm=2,* γ=0.7, φ=2

Tabla 12. GROS-Conceptos computacionales Guía 5-

Tipos de Objetos	**Significados**	**Significados emergentes**
Conceptos (referentes a herramientas computacionales para las cuales se puede formular una definición)		

Vista gráfica	Refiere a diversos tipos de cuadrículas y ejes.	
Barra de entrada	Permite introducir directamente expresiones (números, operaciones, coordenadas, ecuaciones) y comandos, así como redefinir los objetos ya existentes	
Propiedades de los objetos	Redefinir valores Mostrar las coordenadas de un punto Ocultar las coordenadas de un punto	*Cambiar color para diferenciar las gráficas*
Barra de menú	Agrupa los comandos del sistema o software por categorías de acuerdo a su uso. El acceso a ella puede ser vía mouse o teclado	
Barra de herramientas	Organiza las correspondientes herramientas de trabajo de cada barra Elige y mueve Punto Texto	
Vista algebraica	Ofrece registros diferentes de cada objeto matemático	
Comandos	Instrucción que permite, al programa, realizar una acción predeterminada	
Procedimientos (operaciones y técnicas)		
Deslizador	Es una representación gráfica de un número libre o ángulo libre	
Alejar o Aproximar	Instrucción que permite, acercar la imagen o alejarla (zoom).	*Instrucción que permite sólo alejar*

El desarrollo de esta Guía fue grabado en video e incluyó tres tareas principales: la primera tarea consistió en un problema de un automóvil con un sistema de amortiguadores, en el cual a partir de unos datos, se pedía hallar la ecuación que describe el movimiento y graficarla en Geogebra, después se realizaron preguntas relacionadas con la gráfica del movimiento; la segunda tarea consistió en graficar la ecuación del movimiento armónico amortiguado basado en deslizadores, asociando las transformaciones de la gráfica con los efectos que sufriría el amortiguador de un carro, los estudiantes interactuaron con el software y respondían preguntas de lo observado, las preguntas fueron relacionados con el parámetro del amortiguamiento y con la frecuencia angular; la tercera tarea estaba relacionada con la identificación de los tres tipos de amortiguamiento en la gráfica del movimiento, el subamortiguado, el sobreamortiguado y el crítico.

La tarea 1 fue resuelta por los 35 estudiantes, se analizaron los objetos primarios relacionados con los procedimientos, argumentos y lenguajes tanto algebraicos y gráficos. Se presenta la Figura 27 y 28 con evidencias de las actividades desarrolladas por los estudiantes.

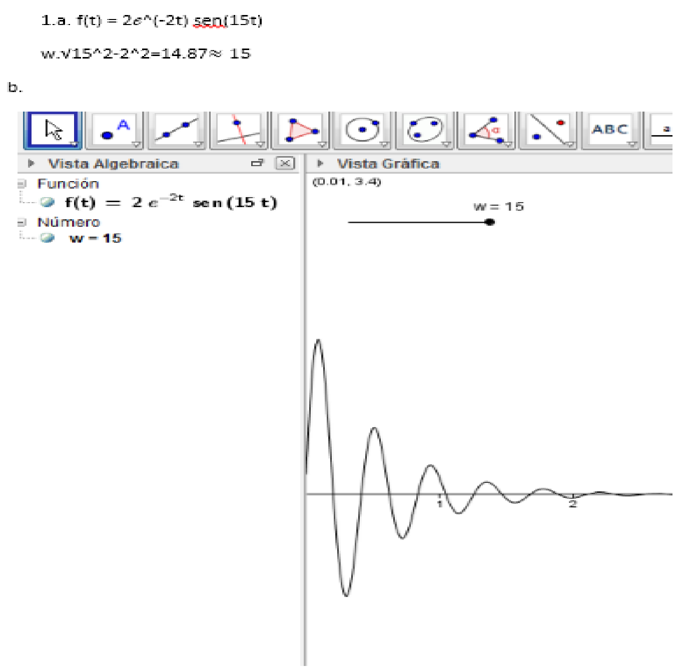


Figura 27. Respuesta Juan José, Tarea 1 Guía 5, julio 18

La figura 27 muestra la respuesta que Juan José dio a la tarea, en la cual se le pedía obtener la ecuación del movimiento armónico amortiguado a partir de un problema de un carro con unos datos iniciales. Los objetos primarios referidos en la Tabla 11 se observan en el procedimiento realizado para encontrar la frecuencia angular, además el lenguaje algebraico al reemplazar los datos para obtener la ecuación que describe el movimiento y en la vista gráfica del programa se observa el lenguaje gráfico que describe la ecuación. Se puede hablar de actividad matemática en el desarrollo de la tarea, donde se evidencia la relación de conceptos matemáticos y computacionales, pues a partir de la ecuación hallada se presenta la gráfica de la ecuación, donde el estudiante utilizó varios objetos primarios para dar solución a lo planteado. Cada uno de estos procedimientos utilizados para resolver el problema moviliza objetos matemáticos diferentes; esto genera consecuencias importantes si el objetivo es analizar la actividad matemática implicada en una respuesta dada, en un procedimiento determinado (Godino, Giacomone, Wilhelmi & Blanco, 2018)

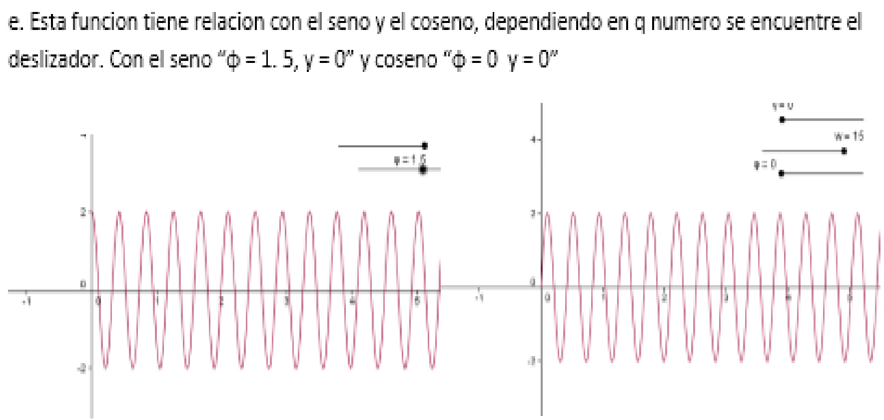


Figura 28. Respuesta Valentina, Tarea 1 Guía 5, julio 18

La figura 28 refiere a la respuesta de la estudiante a la pregunta relacionada con la gráfica de la ecuación que describe un movimiento armónico amortiguado y la relación que se puede encontrar con las funciones trigonométricas trabajadas en anteriores Guías. La estudiante da cuenta de un reconocimiento de la gráfica de la función Seno y Coseno con el uso de Geogebra, cambiando valores a los deslizadores. No se le pidió a la estudiante utilizar los deslizadores sino hasta la tarea 2, pero ella los utilizó para dar respuesta a la pregunta planteada; la estudiante superó lo que el investigador pedía en esta parte de la tarea. Esta respuesta permite evidenciar que la estudiante en su proceso utiliza conceptos matemáticos y los sabe relacionar con conceptos computacionales que fueron trabajados en otras Guías. Esta mezcla de lo matemático y lo computacional es lo que llamamos actividad matemática, donde la estudiante justifica la relación de la gráfica de la función Seno y Coseno, a partir de unos valores específicos de los deslizadores, por tanto, "para que el estudiante realice una verdadera actividad matemática es necesario pedirle justificación del procedimiento basado en el uso del software, ya que de ese modo debe explicitar los conocimientos matemáticos implicados en la resolución" (Godino, Giacomone, Wilhelmi & Blanco, 2018, p. 1118).

La tarea 2, constaba de una parte gráfica con deslizadores y dos preguntas relacionadas con el parámetro de amortiguamiento y frecuencia angular, esta tarea fue desarrollada por 24 estudiantes, 4 estudiantes resolvieron hasta la pregunta de parámetro de amortiguamiento y 7 no desarrollaron la tarea, estos últimos estudiantes tuvieron algunas dificultades como: conectividad, equipos con virus donde se perdió la información, tiempo, porque la guía implicó una sesión más de clase. Además, se presentaron situaciones de un ambiente natural de clase como desmotivación por las dificultades presentadas. Ante esta situación, los investigadores recomendaron a los estudiantes trabajar con otros compañeros de clase, de manera que pudieran seguir trabajando la Guía así fuera de forma grupal, buscando solucionar lo presentado en la clase y que los estudiantes lograrán comprender el resto de las actividades planteadas.

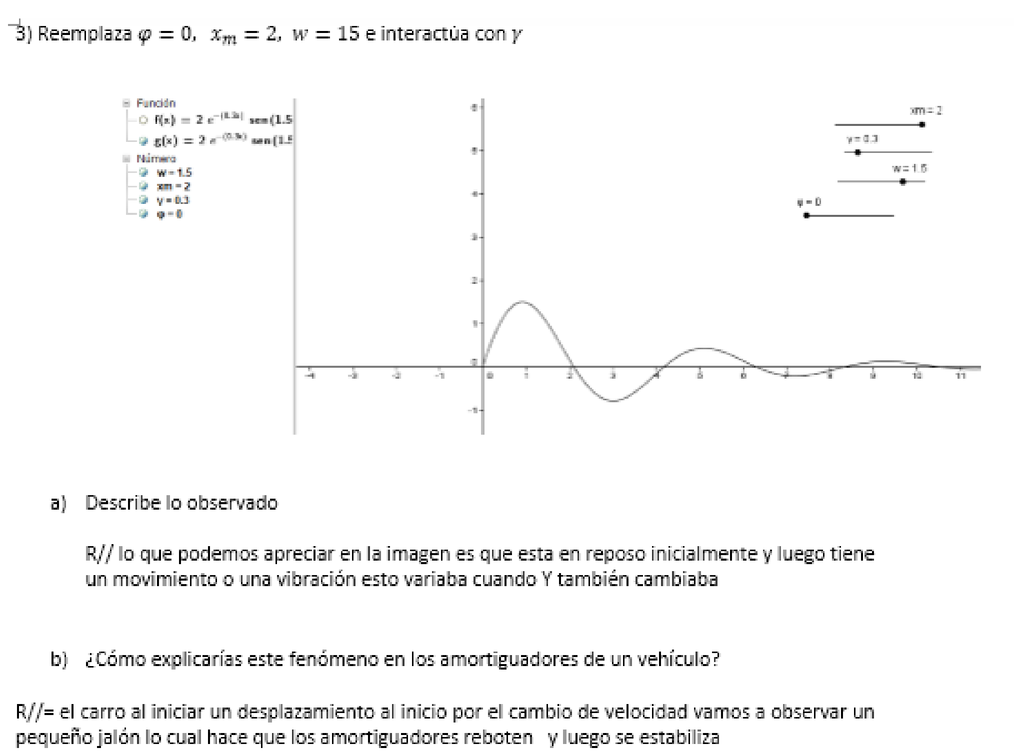
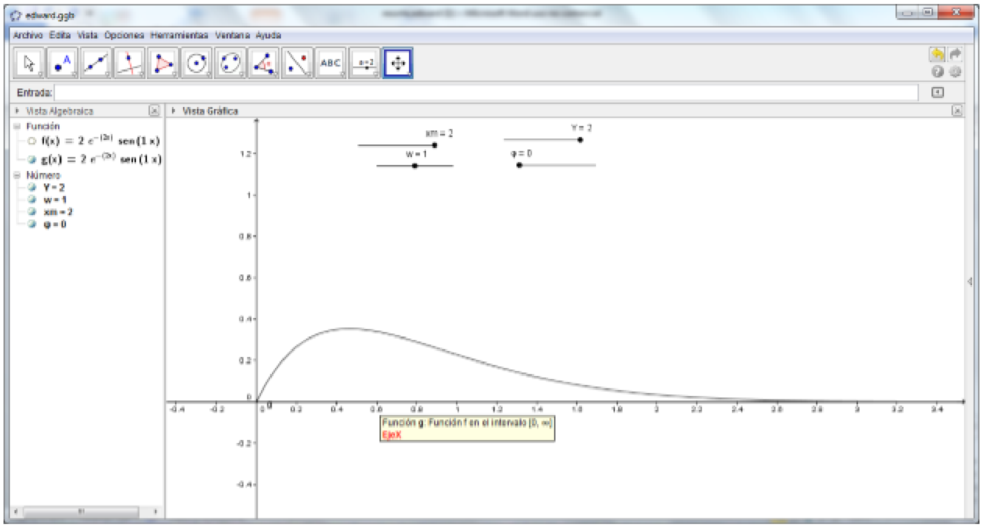


Figura 29. Respuesta Carlos G, Tarea 2 Guía 5, julio 18

La figura 29 muestra la respuesta del estudiante a las preguntas relacionadas con el parámetro de amortiguamiento y la explicación posible al fenómeno presentado. El argumento referido en la Tabla 11 como un concepto emergente, donde la solución a la explicación del fenómeno tiene un significado personal que se acerca al significado institucional esperado en la respuesta del estudiante. El conflicto de significado aparece cuando el estudiante dice "*el carro al iniciar un desplazamiento al inicio por el cambio de velocidad vamos a observar un pequeño jalón*" como se observa en la figura 29. El estudiante asocia la compresión o alargamiento del amortiguador, lo que llamamos "amortiguación", con el cambio de velocidad, siendo la explicación de lo sucedido por la disparidad del terreno donde se mueva el automóvil. Esta es una oportunidad para que el docente pueda discutir la solución de la tarea esperada con el argumento dado por el estudiante y le pueda mostrar que la velocidad es una característica del movimiento referido a la trayectoria horizontal y la "amortiguación" refiere al movimiento de los amortiguadores de manera vertical. En el contexto de una clase, los conocimientos de cada alumno en un momento dado son muy variados. También es posible que el estudiante lo analice de otra manera, Por ejemplo, si el carro arranca o frena con un valor de aceleración alto, la respuesta lógica será que el carro se clave (adelante o atrás, según sea el caso) y ese movimiento vertical de los amortiguadores si se vea afectado por el movimiento y las fuerzas en sentido horizontal. Ante determinado objeto matemático se considera el significado personal para diferenciarlo del significado institucional. A partir de esta distinción se puede describir, metafóricamente, el aprendizaje como el acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales en una clase. Esta diferenciación es fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Godino, Batanero, Font, 2009).



d)Se hace un poco de alejamiento para ver la grafica mejor.y se observa de que no hay oscilacion sino que simplemente se detine

Figura 30. Respuesta Edward, Tarea 2 Guía 5, julio 18

En la figura 30, se presenta la respuesta del estudiante a la pregunta referida a la frecuencia angular, por lo cual él utiliza el comando Zoom para "*ver la gráfica mejor*" como lo expresa el estudiante. Se aprecia que, entre las dos opciones de Zoom, ampliar o disminuir, el estudiante toma la opción apropiada al caso. En esta situación se aprecia la interacción entre los conceptos matemáticos y computacionales. El comando Zoom referido en la Tabla 12 como un concepto computacional emergente fue utilizado por el estudiante para la necesidad de dar solución a la tarea visualizándola mejor. Esto da cuenta de un momento de instrumentalización porque se da un enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto, es decir, es el resultado de la atribución de una función del artefacto por parte del sujeto (Rabardel, 2011 citado por García, 2017).

La tarea 3, consistió en identificar los tres tipos de amortiguamiento a partir de las gráficas obtenidas en las tareas anteriores. Esta tarea no la resolvieron 17 estudiantes, por dificultades similares planteadas en la tarea 2. Algunas de las soluciones presentadas están en la Tabla 11 referidas como argumentos emergentes. Se presenta la figura 31 como evidencia de la tarea.

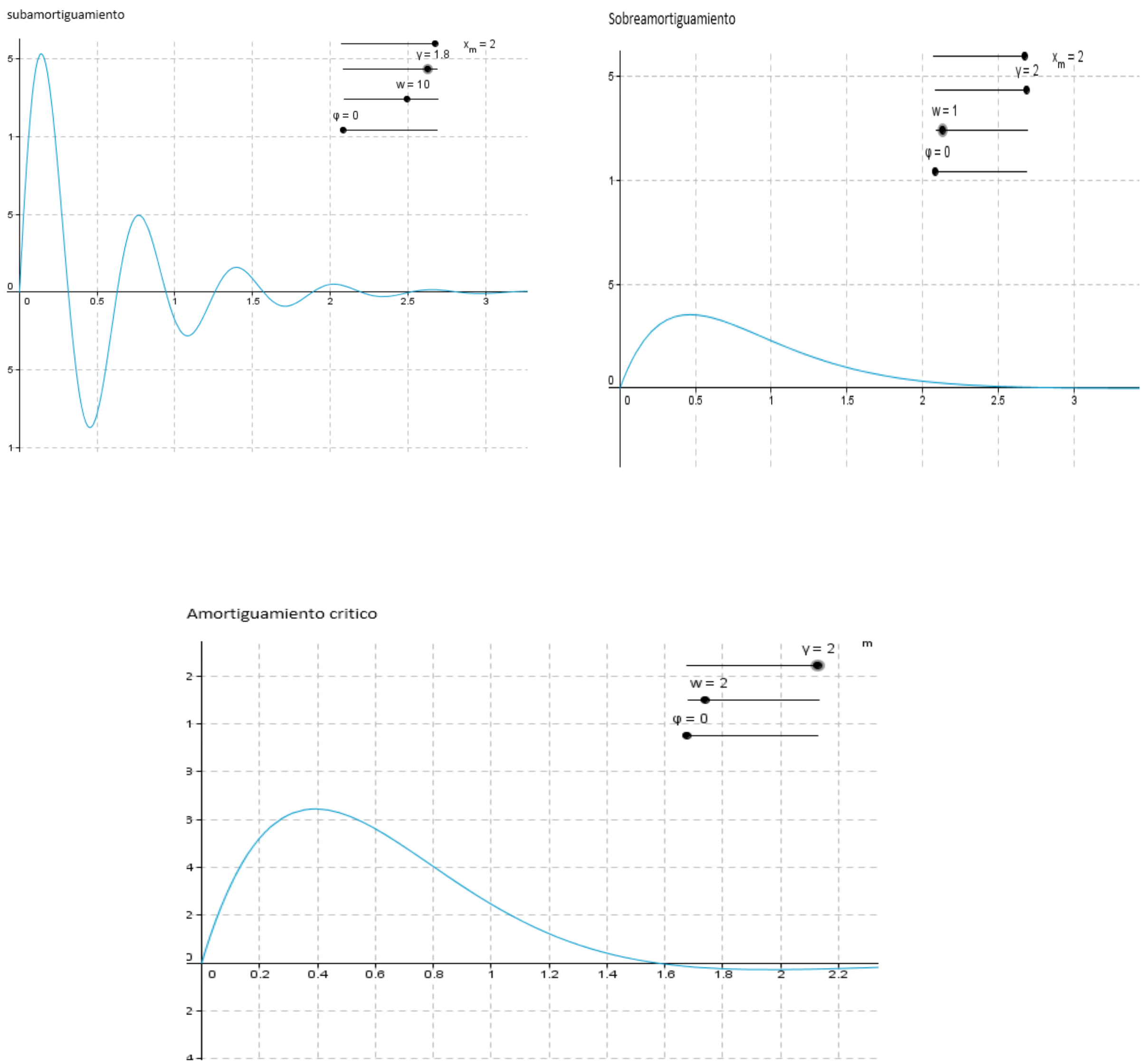


Figura 31. Respuesta Juan José, Tarea 3 Guía 5, julio 18

En la Figura 31, se evidencia la respuesta del estudiante a la última tarea planteada, en donde se aprecia que utiliza adecuadamente los objetos computacionales "deslizadores" referidos en la Tabla 12, para dar cuenta de los tres casos de amortiguamiento posibles en el movimiento de los amortiguadores de un vehículo. Además, se observa que los significados personales corresponden a los significados institucionales referidos a los conceptos matemáticos abordados en la tarea, como fue el sobreamortiguado, el subamortiguado y el crítico. Se puede hablar de "aprendizaje progresivo" referido anteriormente por la articulación entre los significados personales e institucionales que tiene el estudiante en lo matemático y lo computacional.

Foto 1

Foto 2

Foto 3

Figura 32. Fotos desarrollo Guía 5, José Fernando Pacheco, julio 18

Finalmente, en la figura 32 se quiere resaltar la actividad matemática "in situ" en el ambiente natural de clase, es decir, en el lugar, en el sitio que suele utilizarse para observar un fenómeno dado, por el enfoque de la investigación que es fenomenológico- hermenéutico, en la cual se buscó interpretar el fenómeno.

En la Figura 32, se observa la actividad matemática cuando los estudiantes están resolviendo la tarea de la Guía 5. En la foto 1 se aprecia momentos de interacción con el compañero, necesidad de discutir, de comparar, preguntar dudas y de socializar. Se resalta que estas formas de entender la actividad matemática fueron las planteadas en la investigación, y refiere a toda acción que los estudiantes desarrollan para resolver problemas, comunicar las soluciones, interactuar con los compañeros cuando se enfrentan a objetos matemáticos y a la actitud de los estudiantes, la forma en que trabajan en el computador mediante el software Geogebra, cuando interactúan con la herramienta computacional. En la foto 2 cada estudiante está concentrado en su portátil realizando la tarea, se evidencia que analiza y que piensa de forma individual con su ordenador y en la foto 3 podría parecer como si el estudiante y el ordenador se combinaran en uno sólo tratando de llegar a la solución de las actividades. "En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos en la actividad matemática), los cuales son representados en forma textual, oral, gráfica e incluso gestual" (Godino, Font, Contreras & Wilhelmi, p. 121). Siendo algunas de ellas las analizadas en las fotos como por ejemplo la oral y la gestual.

4.6 Análisis entrevista a seis estudiantes de grupo décimo

El objetivo de la entrevista fue conocer algunas apreciaciones, emociones, sentimientos, aprendizajes, dificultades que se presentaron a la hora de participar en la investigación. La entrevista fue aplicada a seis estudiantes con diferentes características evidenciadas por los investigadores, algunos de ellos mostraron apropiación e interés en todas las guías, otros no culminaron algunas tareas, unos pocos terminaron las guías o las dejaron incompletas. A partir de estas características, la entrevista se agrupó en tres categorías principales: preguntas enfocadas a la temática funciones trigonométricas, otras a la utilización de las TIC y el software Geogebra y las relacionadas con la metodología de la investigación, especialmente en el desarrollo de las guías de forma individual o grupal y con apoyo del profesor.

La entrevista como se mencionó, se aplicó a seis estudiantes, a tres de ellos se les pidió responder de forma escrita y a los otros tres se les grabó en audio.

A continuación, se presenta la Tabla 13, con aspectos importantes que los estudiantes manifestaron en sus respuestas.

Tabla 13. Resultados entrevista

	Funciones trigonométricas	**TIC, software Geogebra**	**Metodología de la investigación**
Preguntas de la entrevista	¿Las temáticas desarrolladas en las guías corresponden a lo trabajado en el área de Matemáticas?	Intenta identificar alguna característica que resaltarías -a favor o en contra- sobre el uso del software y sobre la metodología usada. ¿El uso de las TIC, contribuye a que la clase de Matemáticas se entienda mejor? Justifica la respuesta. ¿Cómo fue la experiencia de utilizar el software Geogebra? ¿El uso del software dificulta más las tareas matemáticas o las simplifica?	¿La forma en que estaban presentadas las guías, fueron entendibles para poder abordarlas? justifica la respuesta ¿Consideras que el trabajo con las guías que se desarrolló de manera individual, fue la más apropiada? ¿Propondrías otra forma de hacerlo? ¿La manera en que fueron propuestas las Guías, hace necesario el acompañamiento del profesor? justifica En este proceso de investigación, ¿cómo fue la experiencia de utilizar guías de trabajo para abordar contenidos matemáticos?

Respuestas Jerónimo, Entrevista 18 de agosto de 2019	“Las guías se trabajan en el área de Matemáticas”.	“Sobre el uso del software es que se puede hacer el trabajo mucho más rápido”. “La tecnología está a favor de los estudiantes”. “La experiencia de utilizar el software fue muy buena ya que se simplificaban las Tareas y es mucho más fácil de utilizar”.	“Propondría trabajar en grupos, puesto que si uno no entendía algo el otro le explicaría mientras desarrollaban el taller”. “El acompañamiento del profesor es necesario porque si alguien no entendería algo, él lo explicaría”. “No me gustó tanto la metodología porque no hubo acompañamiento del docente”.
Respuestas Edward, Entrevista 18 de agosto de 2019	“Sí, porque estábamos viendo funciones y se nos hacía muy fácil de entender”	“Estoy a favor del software ya que simplemente introduciendo una función ese programa te muestra la gráfica. Es sencillo de utilizar, es bastante intuitivo”. “Las TIC tiene programas que ayudan al entendimiento de las Matemáticas”. “Una dificultad es que algunos compañeros no lo sabían utilizar bien y no sabían cómo introducir una función”.	“Propondría a trabajar con unas dos o tres personas ya que en algunos puntos no se sabía cómo continuar y un compañero le explicaba a uno”. “No es necesario el acompañamiento del profesor ya que las guías estaban lo suficientemente explicadas”.
Respuestas Jacobo, Entrevista 18 de agosto de 2019	“Estábamos viendo funciones trigonométricas y como graficarlas”	“Por el hecho de que a veces fallaba el internet fue un poco tedioso en unas Guías”. “Si porque con las TIC uno puede estudiar por su cuenta	“Me parece que estuvieron bien desarrolladas porque si fueran en grupo muchos no harían nada no entenderían y no sería nada productivo”.

		con datos reales y sin miedo a que sea mentira”. “Me parece que Geogebra facilita todo porque es más entendible y fácil de visualizar”. “Dificultad del software es que los puntos y comas no se sabían cuál poner”.	“El acompañamiento del profesor es necesario sólo al inicio para algunos que no se acuerdan mucho de los temas”. “Como hace más fácil el trabajo me parece que hace más entendible hasta para los que nunca entienden Matemáticas”. “Interesante el trabajo con guías ya que casi nunca nos ponen a trabajar así y menos solos”.
Respuestas Juan José, Entrevista 18 de agosto de 2019	“Si pues la mayoría ya lo habíamos visto, lo que es la graficación y lo que es lo básico de las Funciones trigonométricas”.	“El uso del software a favor para la graficación es muy fácil, ya que sólo es poner la fórmula y esta aparece en la pantalla”. “La tecnología nos facilita muchas cosas, por ejemplo, gráficas que se demoraría mucho tiempo haciendo en un cuaderno”. “El uso de Geogebra fue fácil, para poderlo entender bien hay que explorarlo”. “Alguna desventaja es que si no busca bien que son las cosas no va a encontrar fácilmente cómo realizar sus tareas porque algunas funciones están muy escondidas”.	“En varios casos es apropiada ya que a usted mismo lo pone a que usted aprenda por sí mismo aprenda, busque ayuda, busque como hacer las cosas. En muchos casos he visto que es mejor hacerlo en parejas ya que las dos personas se entienden mejor y son más fácil de buscar lo que necesita”. “El acompañamiento del profesor es necesario en parte si y en parte no, ya que muchas veces y muchos estudiantes no logran entender lo que hay que hacer, por lo cual tienen que buscar al profesor para aclarar sus dudas y es muy común”. “Fue muy buena la experiencia de trabajar con guías, le explicaba de manera detallada que era

			tal tema que se iba a trabajar y también le pedía que por su cuenta investigara algunas cosas que no entendía”.
Respuestas José, Entrevista 18 de agosto de 2019	“Sí, al estar en el grupo décimo nos empezamos a introducir a la trigonometría de manera superficial y el estar en la investigación nos permite profundizar”.	“El software tiene bastantes características, atributos buenos porque se puede descargar en cualquier versión de cualquier sistema operativo, podemos ver en tiempo real cómo se comportan las gráficas de las funciones si alteramos ciertos parámetros, es muy interesante y otro aporte es el compromiso con el medio ambiente, es decir, no estar gastando hojas”. “Es un software que, como un par de tutoriales en YouTube, puedes aprender los conceptos básicos y ahí desligarte y ser autónomo del aprendizaje”. “Las TIC son una herramienta necesaria, muy buenas que no nos podemos quedar rezagados con ella con respecto del mundo, debemos saberlas aprovechar y para eso fueron diseñadas para darles un buen uso”.	“Es difícil porque en un área como las Matemáticas trabajar de manera individual le permite a uno como de cierta manera concentrarse más y esforzarse más por entender lo que está estudiando, pero por ejemplo en lo personal yo tenía algunas falencias de años pasados en conocimientos y me tocaba acudir a otros compañeros, entonces no sé hasta qué caso sea factible trabajar en grupo”. “El profesor creo que nunca va estar demás, siempre uno va a tener ciertas cosas que de pronto el internet no le va a poder transmitir de la mejor manera, y de pronto un profesor de forma presencial va a llenar esos vacíos que usted va a llegar a tener”. “Las guías fue chévere, porque fue una alternativa de estudio, nos podría muchas más posibilidades de acercarse a muchas más

			personas, pero yo en lo personal si prefiero la forma tradicional que utilizamos en el colegio, donde el profesor dicta la clase, pone unos ejercicios y después lo evalúa”. “Clases creativas con software donde los estudiantes tengan un rol más activo”.
Respuestas Carlos, Entrevista 18 de agosto de 2019	“Si en su mayoría, ya habían empezado a abordar lo que es la trigonometría que es en lo que se enfocó casi todo el trabajo”.	“Geogebra es un software muy bueno porque nos permite ver en tiempo real lo que estamos graficando, las Matemáticas las pasamos del cálculo a algo más práctico, las gráficas tienen medidas exactas. Simplifica los cálculos”. “Dificultades de Geogebra falta de entendimiento, aunque el software tiene una apariencia muy simple y está muy optimizado, porque al principio no sabían cómo manejarlo bien, pero con el tiempo nos fuimos adaptando a él”. “Las TIC hace las Matemáticas mucho más práctica”.	“Personalmente sí, creo que cuando uno va a trabajar las Matemáticas cuando está solo logra mayor nivel de concentración, uno está con un compañero uno tiende a cargar o que se cargue a uno cuando uno no entiende”. “Hace falta el acompañamiento del profesor porque uno no termina con la claridad por la ausencia de ejemplos por “x” o “y” razón, cuando está el profesor ahí creo que uno puede lograr solucionar las dudas porque tiene ejemplos más cotidianos o encuentra más blanda de explicarnos”. “Muy bueno el trabajo con las guías, en muchos casos cuando no entendía mis compañeros me explicaban”.

			"Hace que el aprendizaje de esta manera sea mucho más rápido y sea más fácil de aplicarlo".

Se puede apreciar en la Tabla 13, que en relación a la temática trabajada que fueron las funciones trigonométricas, los estudiantes afirman que, si corresponde a lo que ellos han trabajado durante el año escolar, pues además es como está planteado en el currículo de la institución. Con respecto al uso del software y de las TIC se puede evidenciar en las respuestas de los estudiantes, que le ven muchas ventajas y fortalezas a trabajar con estas herramientas en el aula de clase, resaltando la parte práctica que puede tener las Matemáticas y la rapidez para graficar y adquirir el aprendizaje. Además, el software Geogebra que fue el utilizado en la investigación les parece fácil de usar y entender para realizar las gráficas de las funciones trigonométricas y se reconoce que "dado el inmenso potencial pedagógico y facilidad de adquisición de GeoGebra, es imposible no considerar las posibilidades de ampliar lo ofrecido por este software en contenido matemático, donde los alumnos presentan dificultades de aprendizaje sensibles, como la trigonometría" (Saraiva, 2015, P. 145)

Finalmente, en la parte de preguntas relacionadas con el trabajo de las guías y la metodología de trabajo individual o grupal y la importancia del acompañamiento del profesor, se pueden resaltar varios aspectos (Tabla 13): fue muy interesante para los estudiantes trabajar con ayuda de guías y que estén de manera clara los pasos a seguir, resaltan el poco trabajo que se hace en la institución con guías y que es interesante; en muchas respuestas los estudiantes resaltan ventajas de trabajar de manera individual, pero también les gusta trabajar en grupo, para las dudas y lo que no logran entender. Con respecto a la necesidad del profesor se evidencia que en las respuestas cinco de los seis estudiantes reconocen la importancia que tiene un profesor en el desarrollo de las guías, ya que les resuelve dudas, ejemplifica cuando no se entiende y sobre todo guía y orienta la clase, porque a pesar de que las guías estén bien elaboradas se necesita el papel tan importante que tiene el profesor en el desarrollo de cualquier tipo de actividad en el área de Matemáticas. En las repuestas que dieron los estudiantes se aprecia nuevamente el proceso de orquestación instrumental en donde se resalta las tareas organizadas por parte del profesor, pues es definida como “la organización intencional y sistemática del uso de varios artefactos disponibles en un ambiente de aprendizaje, por parte del profesor en una situación de tarea matemática dada con el propósito de guiar las génesis instrumentales de los estudiantes” (Pérez, 2014, p.143).

5. CONCLUSIONES

La pregunta de esta investigación fue ¿Cómo es la actividad matemática de los estudiantes del grado 10-4 de la I.E. Urbana del Peñol, cuando se usa el software Geogebra para estudiar funciones trigonométricas? Para dar cuenta de esta pregunta se realizó el análisis en un ambiente natural de clase, con todos los estudiantes del curso, desarrollando las tareas matemáticas por sesiones de clase, que variaron entre dos a cuatro horas, dependiendo de la comprensión de la tarea por parte de los estudiantes.

La actividad matemática se rastreó bajo la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico de la cognición y de la instrucción matemática y las tareas realizadas por los estudiantes se analizaron por medio de las guías de reconocimiento de objetos y significados tanto matemáticos como computacionales. El uso de la tecnología por medio del software Geogebra para realizar estas tareas permitió analizar momentos de instrumentación, instrumentalización y orquestación instrumental, en el proceso de génesis instrumental en el cual el estudiante convierte el artefacto propuesto por el profesor en instrumento de la actividad matemática.

En el planteamiento del problema se consideró la desmotivación y la apatía que los estudiantes muestran por el área de Matemáticas debido a que muchas veces el profesor está en la posición del discurso, sin posibilidad de participación de los estudiantes. En el proyecto de investigación se evidenció que el uso de la herramienta computacional Geogebra permite que los estudiantes discutan con sus compañeros sobre las comprensiones que tienen sobre los objetos matemáticos, estas actuaciones les da participación en la clase de forma más activa, también interacción con sus compañeros, complemento de ideas, donde las construcciones individuales son valiosas para la construcción del conocimiento. En cada sesión con las guías se observó interés por desarrollarlas, el estudiante que lograba avanzar más rápido era un apoyo para los demás y les ayudaba a resolver dudas, cuando entendían lo que se debía hacer y utilizaban bien las herramientas del software para resolver la tarea, se notaba satisfacción de lograrlo y ser importantes para la clase porque podían ayudar a otros compañeros.

La metodología propuesta en la investigación de trabajar con Guías para abordar objetos matemáticos, permite que no todo el trabajo está a cargo del profesor, su papel se centra en identificar ciertos conflictos de significado de interés sobre las temáticas que se están trabajando, para referirse a ellos posteriormente y generar discusiones en clase, como fue el caso de la sección 4.1 correspondiente a la Guía 1 con la respuesta del estudiante Kevin en donde se identificaron varios conflictos de significado y la respuesta de la estudiante María Camila de la misma sección, cuyos significados personales concordaban con los institucionales. En ambos casos se presentó actividad matemática estudiantil diversa, con posibilidad para el profesor de poner en discusión con el estudiante sus conflictos de significado, pues en el EOS no se consideran respuestas como erróneas. Este enfoque es básicamente de significados, cómo surgen esos significados, cómo cambian y cuáles son los significados alrededor en unas actividades muy centrales.

El uso del software Geogebra acompañado de un cambio de actitud y epistémico del profesor en relación con la enseñanza de las Matemáticas, promueve la discusión de ideas matemáticas y la generación de conceptos o procedimientos emergentes que se pueden entender como correctos o incorrectos, pero eso no le inquieta al profesor, sino la discusión y la actividad matemática que se genera en el salón de clase.

Los objetivos planteados para dar respuesta a la pregunta de investigación se lograron en la medida que los estudiantes desarrollaron las Guías. Uno de ellos fue estudiar la actividad matemática de los estudiantes con base en categorías planteadas por el EOS, cuando usan un software para resolver tareas relacionadas con las funciones trigonométricas. La actividad matemática de los estudiantes emerge en el momento de utilizar los diferentes tipos de objetos primarios y como están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, formando configuraciones, esto se manifestó cuando algunos estudiantes utilizaron varios objetos primarios para dar solución a lo planteado. Cada uno de estos procedimientos utilizados en la tarea matemática moviliza objetos matemáticos diferentes; los que más se presentaron fue argumentos, procedimientos y lenguajes, utilizando conocimientos previos, otros que aparecieron en las discusiones y los emergentes que en ocasiones fueron los esperados.

El otro objetivo planteado fue describir la actividad matemática estudiantil cuando se usa el software para estudiar funciones trigonométricas, esta descripción se enfoca en la manera que fue asumido el concepto de actividad matemática, refiriéndose a toda acción que los estudiantes desarrollan para resolver problemas, comunicar las soluciones, interactuar con los compañeros cuando se enfrentan a objetos matemáticos. Cada una de las Guías fueron elaboradas de manera intencionada, para que el estudiante explorará los diferentes objetos primarios y estudiarán algunos elementos de la Trigonometría, especialmente las funciones trigonométricas, allí se puso en juego los conceptos, procedimientos, argumentos y soluciones de las tareas. En el trabajo de las Guías se observó que los estudiantes interactuaron con sus compañeros para discutir acerca de sus soluciones, argumentaron sobre sus respuestas, compartieron explicaciones de la utilización de algunas herramientas del software, es decir, del trabajo individual se pasó en muchas ocasiones a un trabajo en equipo, donde se resaltaron algunos estudiantes que manejaban bien el software y apoyaban a sus compañeros.

Otro aspecto de este objetivo refiere a procesos de instrumentación e instrumentalización, que también dan cuenta de la actividad matemática, en ese proceso complejo de mezclar objetos matemáticos con objetos computacionales. En el desarrollo de la investigación se evidenciaron varios momentos de instrumentación e instrumentalización, estas dos dimensiones son producto de la relación que se establece entre artefacto y usuario.

La dimensión instrumentalización está enfocada en la forma como el estudiante utiliza el artefacto para convertirlo en instrumento, es el conocimiento de éste el que guía la manera como la herramienta es usada. Los estudiantes tuvieron oportunidad de usar el software, debido a que algunos no lo conocían, esto se desarrolló con la Guía 1, a partir de allí los estudiantes en la interacción con Geogebra se enfrentaron a situaciones de ensayo y error, como usar varias veces unas fórmula, realizar varias gráficas, lo cual es posible en la medida que se explora el software, se logra dar solución a la tarea y adquirir ciertos conocimientos del mismo, además por medio de las TIC, se puede buscar tutoriales en internet y afianzar o complementar lo ya adquirido.

La dimensión Instrumentación refiere a los procesos de génesis instrumental enfocada al sujeto, a las adaptaciones que puede tener de las cualidades o restricciones del software. Esta dimensión se evidenció cuando los estudiantes resaltaron potencialidades del software para graficar, cambiar color a las gráficas para identificarlas, utilizar el zoom de acercamiento o alejamiento para encontrar puntos de corte, cambiar parámetros en una ecuación que permite hacer transformaciones a las gráficas e identificar propiedades que a lápiz y papel sería más difícil. En otros casos se identificaron algunas limitaciones, una de ellas es que tiene demasiadas herramientas por lo que requiere mayor conocimiento de los estudiantes para manejarlo, por tanto, si no se utiliza bien el estudiante puede terminar con las gráficas que no son las pedidas, interactuar y dar argumentos que no corresponden a los esperados, porque el software se enfoca en la parte gráfica no en procedimientos.

La planeación de las actividades, diseño de las Guías, escogencia del software, organización de la clase debe ser orientada por el profesor, quien planifica y coordina, para que los logros que se propongan en la clase sean alcanzados. En esta investigación los estudiantes necesitaron al investigador en su rol de profesor, pues fue necesario en muchas ocasiones resolver dudas, orientarlos en las soluciones de las Guías, motivar el desarrollo de las mismas, estar pendiente organizando el ambiente de clase, todos estos momentos configuraron la Orquestación Instrumental como la gestión que hace el profesor de los instrumentos individuales en los procesos de aprendizaje colectivo, que necesitan ser monitoreadas a través de la orquestación de situaciones matemáticas.

El último objetivo planteado fue diseñar y validar guías de estudio, en total se elaboraron cinco Guías, que como ya se mencionó fueron intencionadas para dar cuenta de la pregunta de investigación. Esto se evidenció en los momentos que los estudiantes lograron solucionar las tareas matemáticas propuestas en las Guías; la forma en que están propuestas fue entendible, la estructura presentada y el lenguaje utilizado fue cercano al estudiante, cada una de ellas con un objetivo claro, contaba con gráficas, ejemplos y preguntas que le permitían encaminarse al desarrollo de las Tareas. Esta apreciación se identificó en la encuesta, con las respuestas de los estudiantes, donde todos concordaron que fueron entendibles y resaltan las ventajas de utilizarlas en las clases de Matemáticas.

La Guía que presentó mayor dificultad fue la de identidades trigonométricas, porque en la investigación se dejó abierta la posibilidad de utilizar las estrategias propias de resolución, donde se esperaba que hubiese sido con el software Geogebra para obtener una nueva interpretación de la identidad como igualdad de gráficas. Se obtuvo como resultado que la mayoría de los estudiantes se enfocan en el método tradicional de lápiz y papel con procedimientos algorítmicos.

La Guía donde se presentó mayor actividad matemática, fue la de transformaciones de la función seno, porque los estudiantes utilizaron la mayoría de los objetos primarios y en las Tablas GROS se registraron diversas formas de entender estas transformaciones por medio de los significados personales, que concordaban en muchos casos con los institucionales. También se dieron muchos momentos de interacción entre los estudiantes, se presentaron discusiones interesantes cuando un estudiante le preguntaba a otro por lo observado y cada uno proponía sus argumentos.

La Guía de reconocimiento de objetos y significados tanto matemáticos como computacionales permitió categorizar los diferentes tipos de objetos primarios que se esperaba los estudiantes utilizarán en la solución de las tareas propuestas en las Guías y consignar todos los significados personales y emergentes de los estudiantes, especialmente en los objetos computacionales, que no fueron pedidos y que dieron cuenta de la apropiación de las herramientas del software. Todos estos significados personales o emergentes dan un panorama de cómo coinciden con los significados institucionales y que dieron relevancia en la investigación como lo fue el conflicto de significados.

CONSIDERACIONES FINALES

Esta investigación se hizo en relación a la actividad matemática bajo el EOS usando el software Geogebra, bien podría pensarse en una nueva investigación bajo los mismos parámetros, pero usando otros programas y otras temáticas, se deja abierta la posibilidad de seguir indagando acerca de investigaciones que relacionen el EOS con la tecnología.

En la investigación no se pretendía mejorar el aprendizaje de los estudiantes acerca de las funciones trigonométricas, porque sería una etapa posterior de un proceso de más larga duración, se quería básicamente es dar cuenta de los objetos matemáticos y su relación con los objetos computacionales en un constructo que podríamos llamar actividad matemática, en donde los objetos matemáticos aparecen combinados con objetos computacionales en una mezcla que es muy compleja y que fue motivo de indagación. Se podría realizar una propuesta posterior para analizar si se puede mejorar o contribuir al aprendizaje.

Otro aspecto que se podría analizar en próximas investigaciones es indagar sobre el uso dado al software Geogebra posterior a la investigación, puede ser en grado undécimo con un seguimiento en temáticas que sea posible utilizarlo, para saber si el software fue significativo para ellos y lo saben utilizar en otras tareas matemáticas.

Dada las dificultades presentadas en la Guía de identidades trigonométricas, se recomienda dar la instrucción del uso del software, es decir, que sea más direccionada para que se utilice en la solución de la tarea.

Se resalta la posibilidad de desarrollar esta propuesta por parte del profesor que no tenga a la vez el rol de investigador, por todas las restricciones que se presentaron en esta investigación, tratando de no intervenir en aspectos que se pretendían fueran resueltos por el estudiante. Sería interesante saber que ocurre con el acompañamiento permanente y las discusiones que se pueden generar con el profesor que pueda entrar a intervenir los conflictos de significado.

En el tema de funciones trigonométricas, se pudo abarcar un aspecto relacionado con las gráficas de las funciones trigonométricas. Por el corto tiempo del proceso de investigación no fue posible ampliarlo para toda la trigonometría que se propone en el currículo para el grado décimo. Se deja la inquietud de abordar en otras investigaciones más aspectos de la trigonometría.

De esta propuesta de investigación, se presentó una ponencia en el XX encuentro departamental y I encuentro internacional de Matemática Educativa realizado en la ciudad de Medellín en septiembre de 2019.

Finalmente, se envió un artículo a la revista virtual de la Universidad Católica del Norte titulado "*actividad matemática y tecnología: relación entre objetos matemáticos y computacionales*". En este momento se encuentra en proceso de revisión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. E. (diciembre, 2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*. 3(17). México: Grupo Santillana. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/405/40517307.pdf

Artigue, M. (diciembre, 2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*. 16 (3). Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/405/40516302.pdf

Bazán, J. & Aparicio, A. (abril, 2006). Las actitudes hacia la Matemática-Estadística dentro de un modelo de aprendizaje. *Educación*. 28(15). Recuperado de: http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/educacion/article/view/2041

Briceño, E. & Cordero, F. (2008). Uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1217-1225). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/5128/

Cardozo, E. & Cerecedo, M. (noviembre, 2008). El desarrollo de las competencias Matemáticas en la primera infancia. *Revista Iberoamericana de educación*. 47(5). Recuperado de: https://rieoei.org/RIE/article/view/2270

Ciberespacio profesional (2011). Tecnología de la Información y de la Comunicación (TIC). Recuperado de: https://fuerzaprofesional.wordpress.com/tecnologia-de-la-informacion-y-de-la-comunicacion-tic/

Fiallo, J. & Algarín, D. (octubre, 2013). Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. *Revista científica.* (pp.56-60). Bogotá. Recuperado de: http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/5485/7020

Fiallo, J. & Gutiérrez, A. (2009). Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. En Grupo Anaya (Ed). Geometría dinámica. (pp.147-171). España. Recuperado de: http://matematicas.uis.edu.co/jfiallo/sites/default/files/06_lemniscata.pdf

Figueroa, S. & Aznar, M. (2007). Significados personales sobre la vinculación entre una variable estadística y su variable binomial asociada en el contexto de un problema. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Flores, F. (2008). Historia de la trigonometría. En íttakus (ed). Historia y didáctica de la trigonometría. Recuperado de: https://books.google.com.co/books?id=CZwFxTo-A8UC&pg=PA18&lpg=PA18&dq=Historia+y+did%C3%A1ctica+de+la+trigonometr%C3%ADa&source=bl&ots=xXoujN5Mr-&sig=ACfU3U3BDS3fJZQiQ7z_YcDPXrOfD_ReOg&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwiM--zQ1YnmAhUr1VkKHYPGA7cQ6AEwE3oECA4QAQ#v=onepage&q=Historia%20y%20did%C3%A1ctica%20de%20la%20trigonometr%C3%ADa&f=false

Font, V. & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*. 8 (1). Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/33251896.pdf

García, D. & Flores, J. (2017). Un estudio de la instrumentación de la noción de simetría axial por medio del uso del Geogebra. Revista do instituto GeoGebra de Sao Paulo. 6(1). Recuperado de:

https://www.researchgate.net/publication/317433808_UN_ESTUDIO_DE_LA_INSTRUMENTACION_DE_LA_NOCION_DE_SIMETRIA_AXIAL_POR_MEDIO_DEL_USO_DEL_GEOGEBRA

Giacomone, B., Godino,J., Wilhelmi, M. & Blanco, T. (enero, 2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de Matemáticas. *Revista Complutense de Educación.* 29(4). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/11338/

Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado personal e instruccional de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 3(14). Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J., Batanero, C & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *The International Journal on Mathematics Education.* 2(39).Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. & Font, V. (2007). Algunos desarrollos de las funciones de la teoría de las funciones semióticas. *Investigación en didáctica de la Matemática*. (pp. 105-122). Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo2_enfoque%20ontosemi%F3tico%20cognici%F3n.pdf

Godino, J., Font,V., Contreras, A. & Wilhelmi, M. (marzo, 2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista latinoamericana de investigación en educación matemática.* 1(9). Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000100006

Godino, J., Font, V. & Wilhelmi, M. (junio, 2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*. (38). (pp.25-48). Recuperado de: http://revistaseug.ugr.es/index.php/publicaciones/article/view/2245/2367

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. & De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*. 1(27). Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/132207

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. & Lurduy, O. (julio, 2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. *Semiotic Approaches to Mathematics Education*. (pp. 1-22) Recuperado de:

http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/dmdc/Godino_Font_Wilhelmi_Lurduy_R.pdf

Goméz, I. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las ciencias*. 28 (2). (pp. 227-244). Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/199615

Gonzalez, M., Matilla, J. & Rosales, F. (octubre, 2017). Potencialidades del software Geogebra en la enseñanza de la matemática: estudio de caso de su aplicación en la trigonometría. *Roca. Revista científico-Educaciones de la provincia de Granma*. 13 (4). (pp. 401-415). Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6759725

Gordillo, W. & Pino-Fan, L. (2015). Un ejemplo de análisis ontosemiótico para una tarea sobre la antiderivada. Jornadas Nacionales de Educación Matemática. 19. (pp. 170-175). Recuperado de: http://villarrica.uc.cl/files/matematica/RI01RI19/RI%2005.pdf

Granja, S. (2017). Colombia mejora en acceso a educación superior, pero falta calidad. Casa Editorial el tiempo. Recuperado de: https://www.eltiempo.com/vida/educacion/acceso-y-calidad-de-educacion-superior-en-colombia-segun-el-banco-mundial-95456

Hernández, S. R., Fernández, C. C., & Baptista, L. P. (2010). El Proceso de la investigación cualitativa. En Chacón (Ed.). Metodología de la investigación. Recuperado de: https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

ICFES. (2017). Informe nacional. Resultados nacionales 2009, 2012,2016, saber 3°,5° y 9°. Bogotá. Recuperado de: file:///C:/Users/Equipo%203/Downloads/Informe%20resultados%20nacionales-saber-359-2009-2012-2016.pdf

Laborde, C. (enero, 2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of computers for Mathematical Learning*, 6, (pp. 283-317). Recuperado de: http://zeus.nyf.hu/~kovacsz/Laborde.pdf

Leonard, W., Gerace, W. & Dufresne, R. (noviembre, 2002). Resolución de problemas basada en el análisis. Hacer del análisis y del razonamiento el foco de la enseñanza de la física. *Enseñanza de las ciencias.* 20 (3). Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/21828/21661

Leontiev, A. (1978). Activity, Consciousness, and Personality. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. Recuperado de: https://www.marxist.org/archive/leontev/works/activity-consciousness.pdf

Mayén, S., Díaz, C., Batanero, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. Statistics Education Research Journal. 8(2). (pp. 74-93). Recuperado de: https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ8(2)_Mayen.pdf

MEN. (1998). Serie Lineamientos curriculares Matemáticas, (p.103). Bogotá.

MEN. (2006). Estándares básicos de Competencias Matemáticas. *Estándares Básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* (pp.46-95). Bogotá.

MEN. (2016). Derechos básicos de Aprendizaje Matemáticas- grupo 10. (p.76). Bogotá.

Moreno, L & Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva en el currículo de Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed). Memorias del seminario nacional de formación de profesores en el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas. (pp. 40-66). Colombia: Enlace editores ltda.

Pérez, C. (junio, 2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional Formación de profesores.* 2(53). Recuperado de: http://www.perspectivaeducacional.cl/index.php/peducacional/article/view/200

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Gimenéz, L. Santos, & J. P. Ponte, La actividad matemática en el aula. (pp. 25 - 34). Barcelona: Graó

Quiroz, S. (2010). Deserción escolar en Colombia: la muerte de nuestra sociedad. Universidad Pontificia Javeriana. Recuperado de:

http://intergumentacion.blogspot.com/2010/11/desercion-escolar-en-colombia-la-muerte.html

Rabardel, P. (1995). Les Hommes et les tecnologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Collins. (p.239). Recuperado de: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document

Ruiz, S. (octubre, 2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación.* 47 (3). Recuperado de: https://rieoei.org/RIE/article/view/2348

Ruiz, A., Alfaro, C. & Gamboa, R. (2003). Aprendizaje de las Matemáticas: conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas. *Uniciencia.* 20 (2). Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5381202

Saraiva, A. (2015). O uso do Geogebra no ensino de trigonometria: uma experiência com alunos do ensino médio. *Ciencia e Natura*. 37 (3). Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/4675/467547643014.pdf

Sánchez, S. (1998). Fundamentos para la investigación educativa. Santafé de Bogotá: Cooperativa editorial magisterio.

Trouche, L. (septiembre, 2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students comand process through instrumental orchestrations. *International Journal of computers for Mathematical Learning*. 9(2). Recuperado de: https://pdfs.semanticscholar.org/00e8/84959ac4e12db983a27f7a0638f7168af10a.pdf

Vásquez, E. (2015). Enseñanza-aprendizaje de las identidades trigonométricas en grupo décimo a través del trabajo con números complejos. (Disertación de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Vigotsky, L. S. (1978). Pensamiento y lenguaje. Obras escogidas tomo II. Recuperado de: http://www.taringa.net/perfil/vigotsky

ANEXOS
ANEXO 1: GUÍA 1

¡Bienvenido al mundo de Geogebra!

Geogebra es una potente herramienta de matemáticas que reúne dinámicamente álgebra, geometría, análisis y hojas de cálculo, la cual pone a tu disposición un gran número de herramientas para que puedas aprender, usar, aplicar y disfrutar las matemáticas.

Guía 1: reconocimiento de software

(Está disponible la carpeta de Google drive Matemáticas 10-4 o en el correo electrónico**)**

Objetivo: Explorar la interfaz gráfica de Geogebra y los comandos básicos para conocer el entorno y las posibilidades para estudiar las funciones trigonométricas.

Antes de iniciar nuestro desafío en el mundo de Geogebra, te invitamos a que veas el video en el siguiente enlace, https://www.youtube.com/watch?v=FZfj6L7jNQo, donde podrás recordar, la interfaz gráfica de Geogebra, su vista algebraica, la barra de entrada y la barra de herramientas.

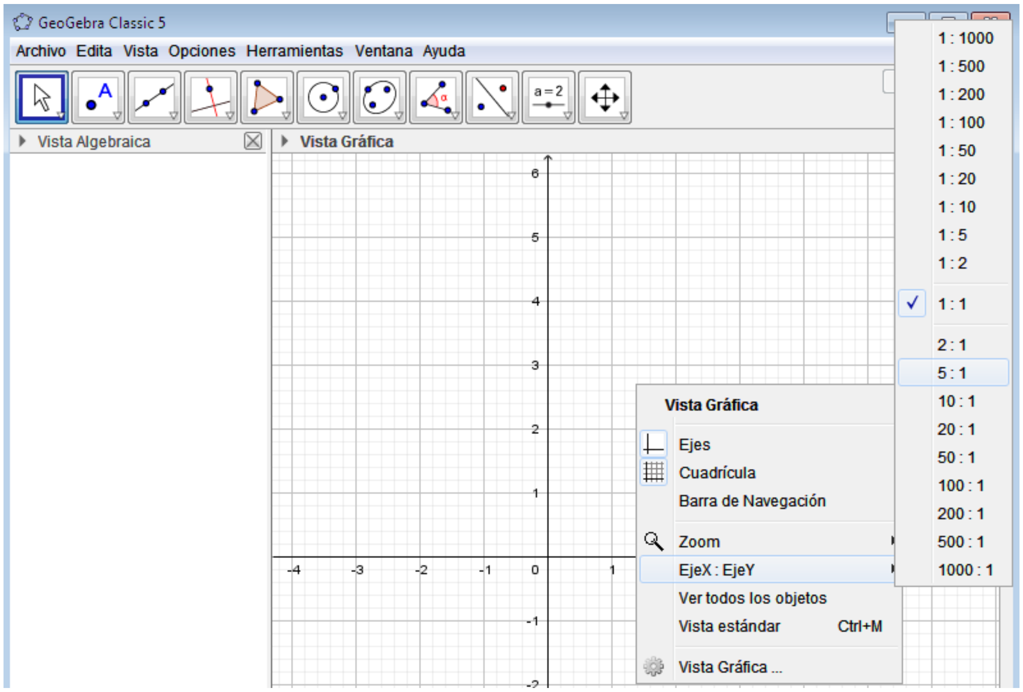
Después de visitar el enlace, realiza la siguiente actividad:

Con captura de pantalla (ImprPant), toma el pantallazo de la interfaz gráfica de Geogebra y pégalo en Paint, luego señala los elementos explicados en el video (por ejemplo, barra de menús, barra de botones, barra de herramientas gráfica, entre otros). Luego guarda tu trabajo como imagen y súbelo a la carpeta *Guía Interfaz de Geogebra*, que se encuentra en Google Drive).

Ahora sí estás preparado para asumir este reto, y te invitamos a realizar la siguiente actividad.

1. **En Geogebra seguir los siguientes pasos:**

   a) En la barra de entrada graficar la función cuya ley de asignación es y=3x
   b) Haciendo click derecho sobre la función, elige *vista gráfica*, cambia grosor y color a la gráfica obtenida en el punto anterior.
   c) Cambiar la escala de los ejes en X y en Y, dando click derecho sobre los ejes, elige la opción *Eje X:Eje Y*, después escoge la opción *5:1*

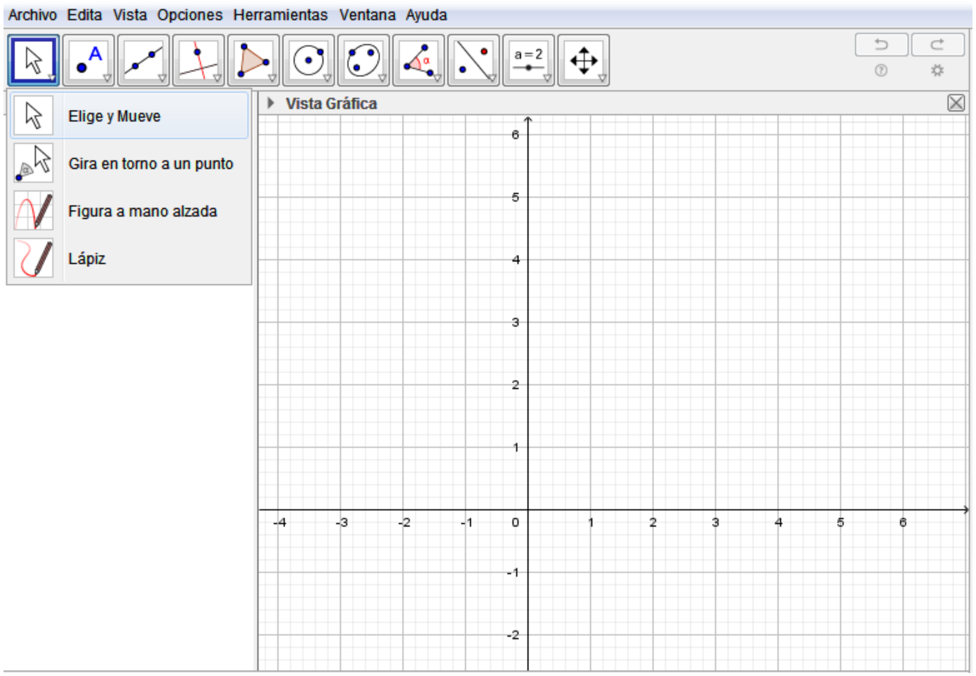


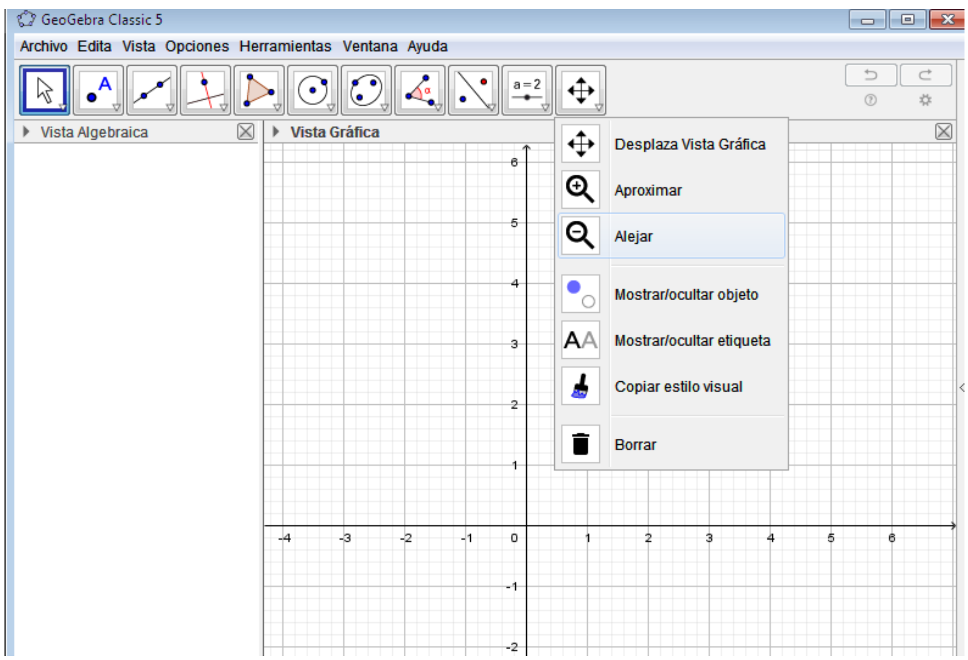
d) Nombra dos puntos que pertenezcan a la gráfica, primero con la opción *punto* que se encuentra en la barra de herramientas gráficas y luego con la opción *vista gráfica*, seleccionar nombre y valor.

e) Agregar en la barra de entrada la función cuya ley de asignación es $y=x^2$, para ello utiliza la tabla de símbolos para escribir el exponente 2.

f) Selecciona los puntos en que las dos gráficas se interceptan, utiliza el comando *intersección* que se encuentra en la barra de herramientas gráficas. Recuerda utilizar la opción *vista gráfica* para que aparezca el nombre y valor de los puntos.

Nota: Si no logra observar en la pantalla los dos puntos, utiliza la opción *mueve* (barra de herramientas gráficas) para desplazar los ejes hacia abajo, o también se puede utilizar la opción *alejar*, hasta que sea posible ver en la pantalla los dos puntos.





Guarda pantallazos de cada una de las actividades realizadas, y envíalas a la carpeta *Guía de reconocimiento del software.*

2. En una nueva ventana, desarrolla los siguientes procedimientos:

a) Con la opción *circunferencia* (centro punto) que se encuentra en la barra de herramientas gráficas, inserta una circunferencia del tamaño deseado.

b) Con la opción *segmento* une los dos puntos y encuentra el valor del radio, utiliza las opciones de la vista gráfica.
c) Con la opción *perpendicular* trazar la recta tangente que pase por el punto de la circunferencia.
d) Ubica otro punto en la circunferencia en la opción *punto*.
e) Une el *segmento* formado entre el punto y el centro
f) Encuentra el ángulo formado por estos dos radios dando click en la opción *ángulo*.

Guarda pantallazos de cada una de las actividades realizadas, y envíalas a la carpeta Guía 1: reconocimiento del software.

ANEXO 2: GUÍA 2

¡Explorando las gráficas de las funciones trigonométricas!

Las gráficas de las funciones trigonométricas poseen propiedades matemáticas muy interesantes como máximo, mínimo, asíntotas verticales, alcance y período entre otras.

Guía 2: Gráfica de las funciones trigonométricas

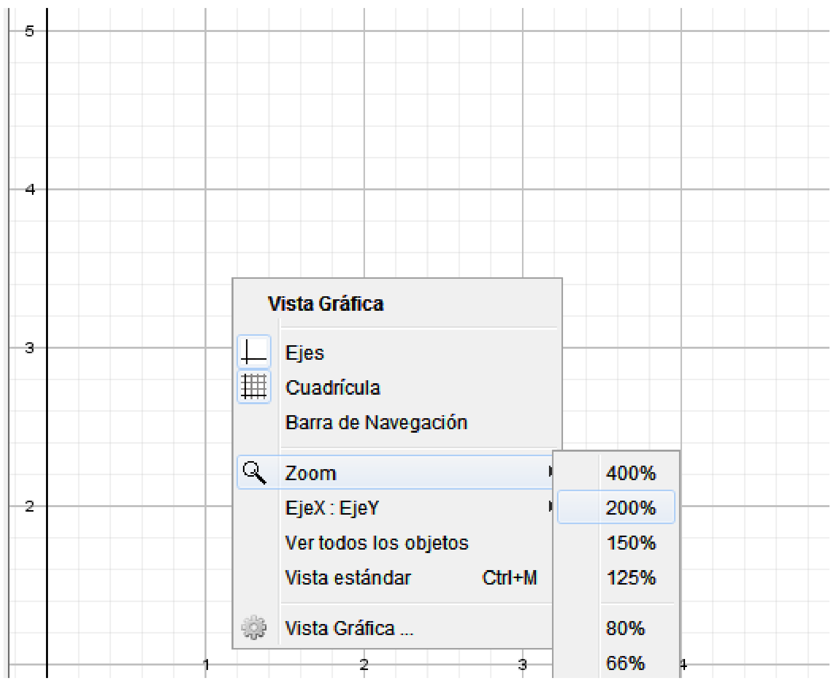
(Está disponible la carpeta de Google drive Matemáticas 10-4 o el correo electrónico)

Objetivo: Graficar las funciones seno, coseno y tangente, a partir del círculo unitario, usando algunas herramientas del programa Geogebra.

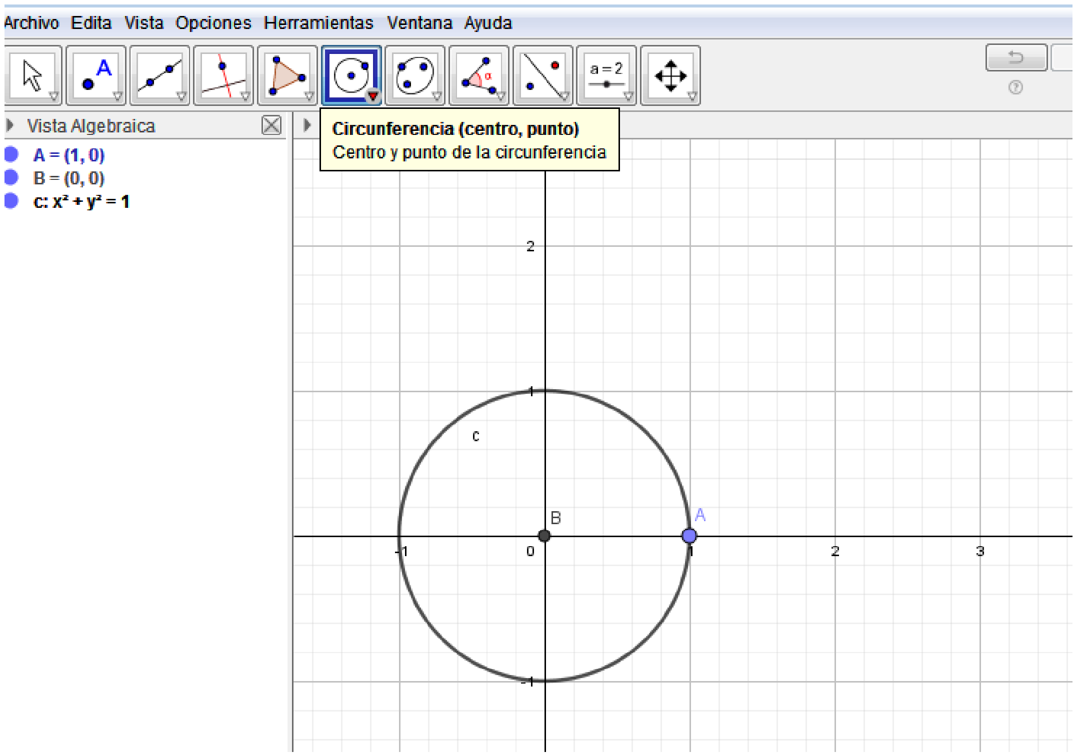
1. Ver video sobre los pasos para graficar las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente a partir del círculo unitario en:
https://www.youtube.com/watch?v=-M51doO_8zU

Pasos vistos en el video:

a) Coloca la pantalla en zoom 200%, dando click derecho sobre la vista gráfica y elige la opción *zoom*.

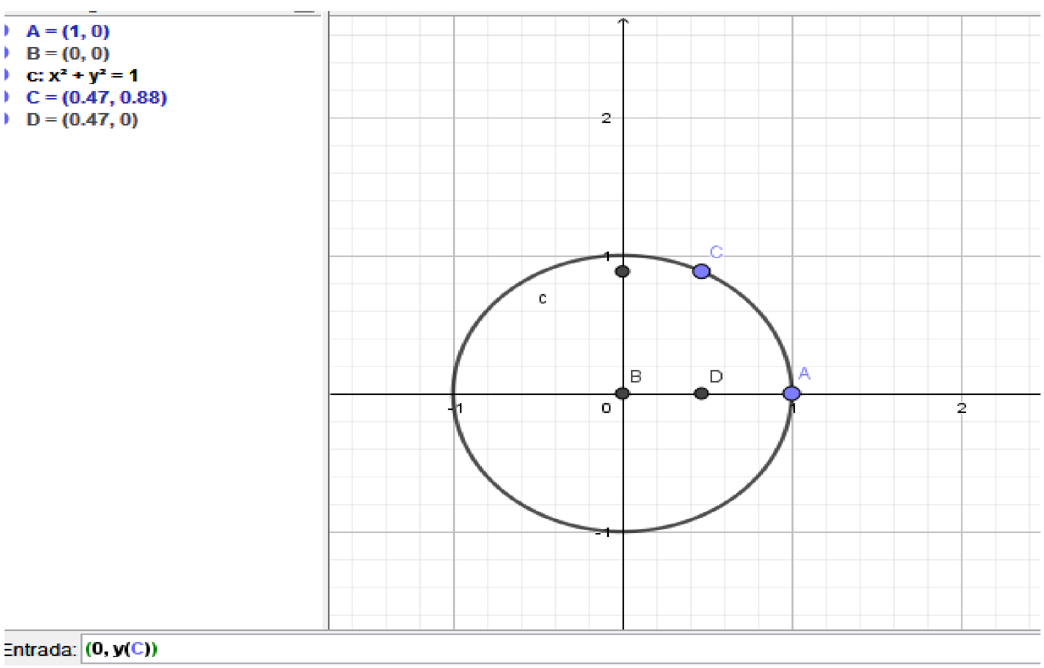


b) Centra el plano cartesiano con la opción *elige y mueve.*
c) Se ubica un *punto* en las coordenadas (1,0)
d) Se dibuja la *circunferencia* con centro (0,0) y que pase por el punto (1,0)



e) Ubicar un punto sobre la circunferencia

f) *Proyección* del punto anterior sobre los ejes, colocando en la barra de entrada (x(C), 0) y luego (0, y(C)), que son las proyecciones de X y Y

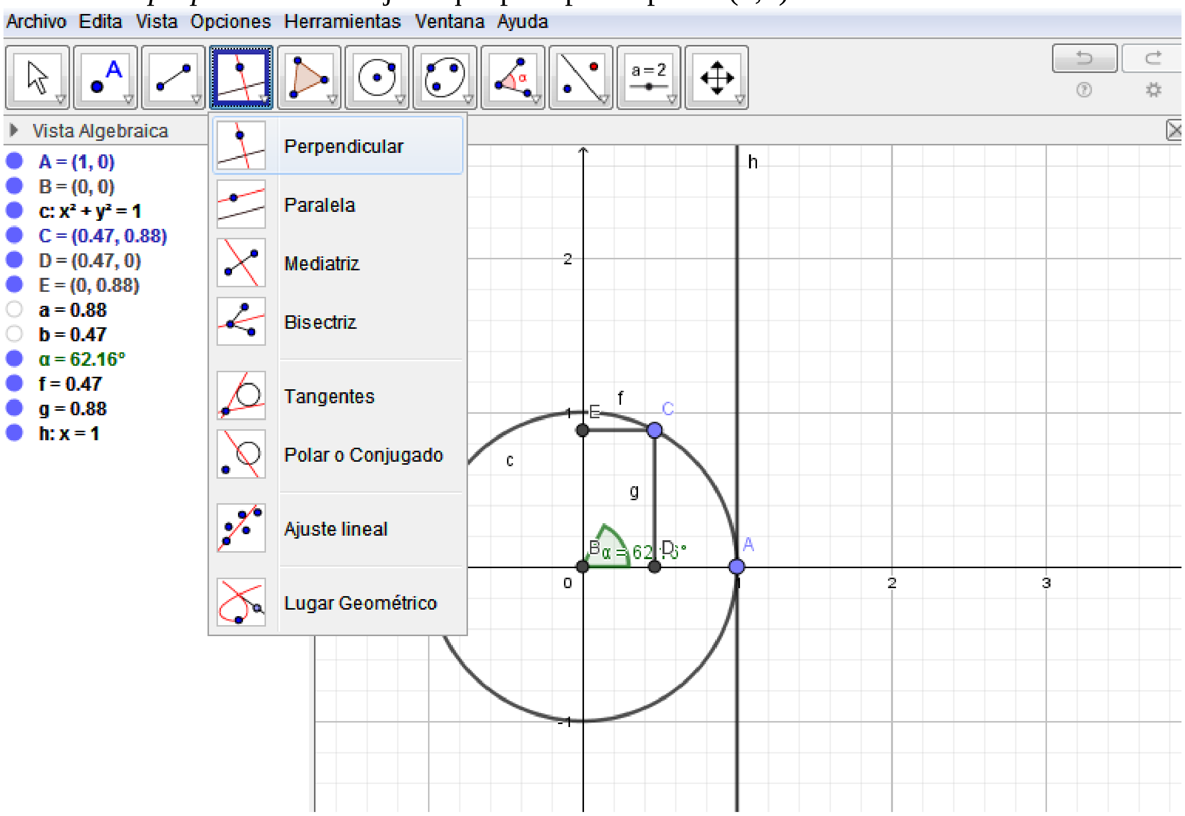


g) Calcular el valor de los puntos de las proyecciones, colocando en barra de entrada +y(C) y se obtiene el valor de a en la vista algebraica, luego +x(C) y se obtiene el valor de b

h) Trazar un *ángulo* que pase por el punto (1,0), por el centro (0,0) y por el punto de la circunferencia

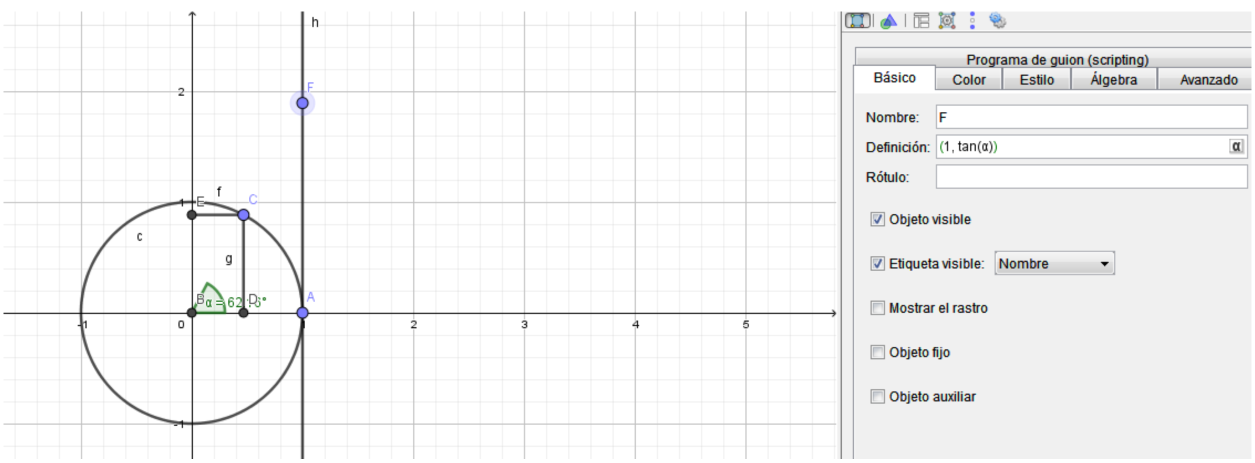
i) Trazar *segmentos* entre el valor de los puntos de las proyecciones y el punto sobre la circunferencia.

j) Trazar una *perpendicular* al eje X que pase por el punto (1,0)



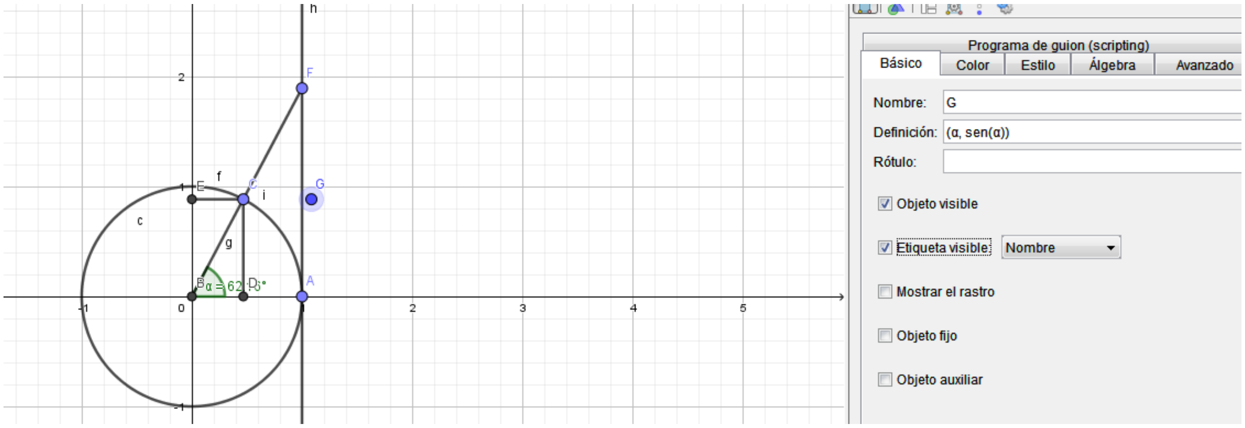
k) Ubicar un punto sobre esa perpendicular.

l) Redefinir el punto anterior como (1, tan(α)), dando click sobre el punto y luego en propiedades, en la opción *definición* cambiamos esa información por (1, tan(α)).

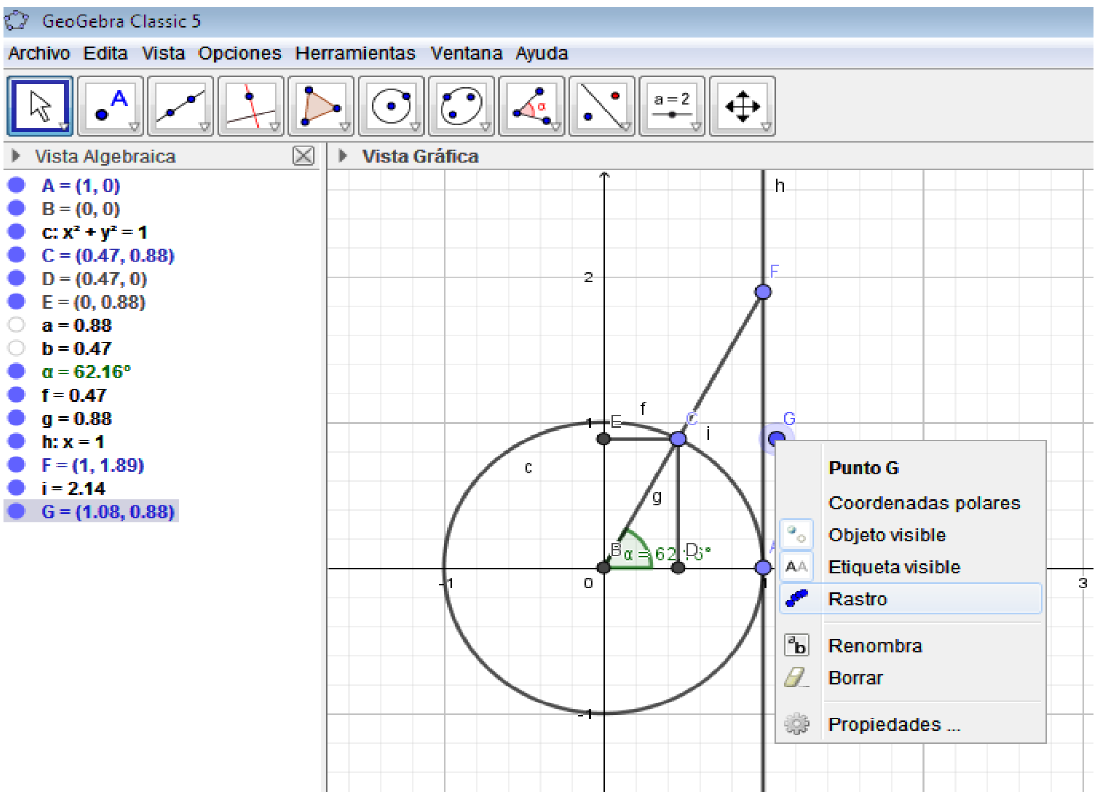


m) Trazar *segmento* desde el centro hasta el punto anterior.

n) Ubicar un *punto exterior* a la circunferencia y redefinirlo como (α, sen(α)), esta vez en la opción *valor*, así como se hizo en el punto I, y se desactiva la etiqueta visible.

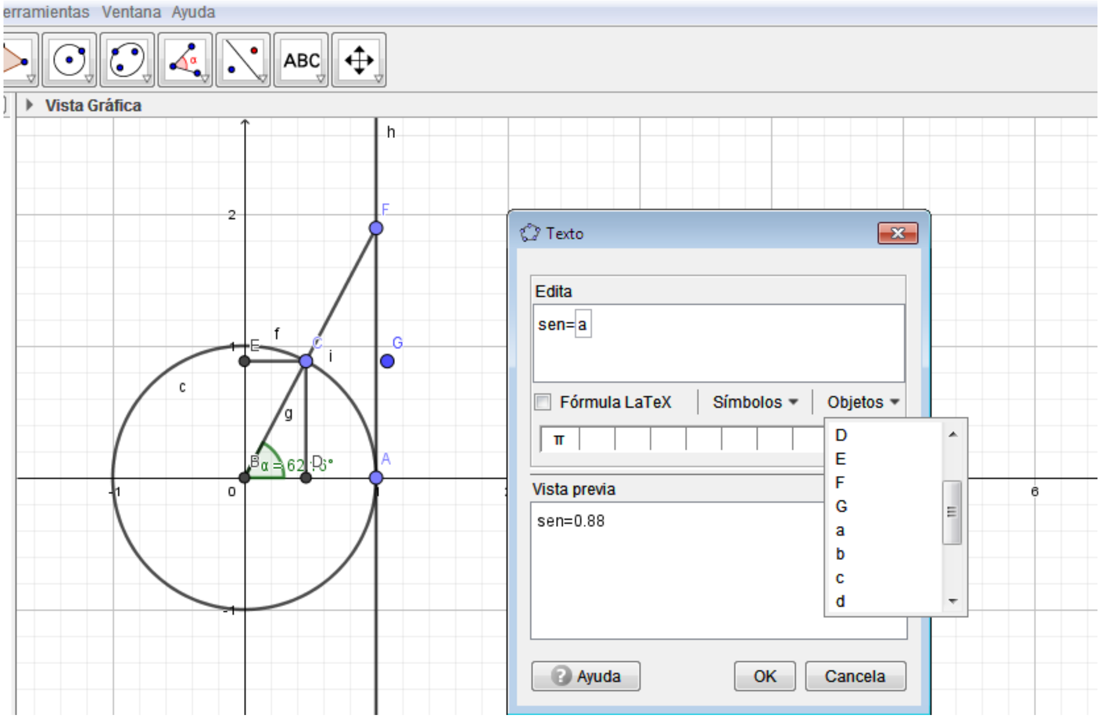


o) click derecho en el punto anterior (exterior a la circunferencia) y selecciona la opción *rastro*

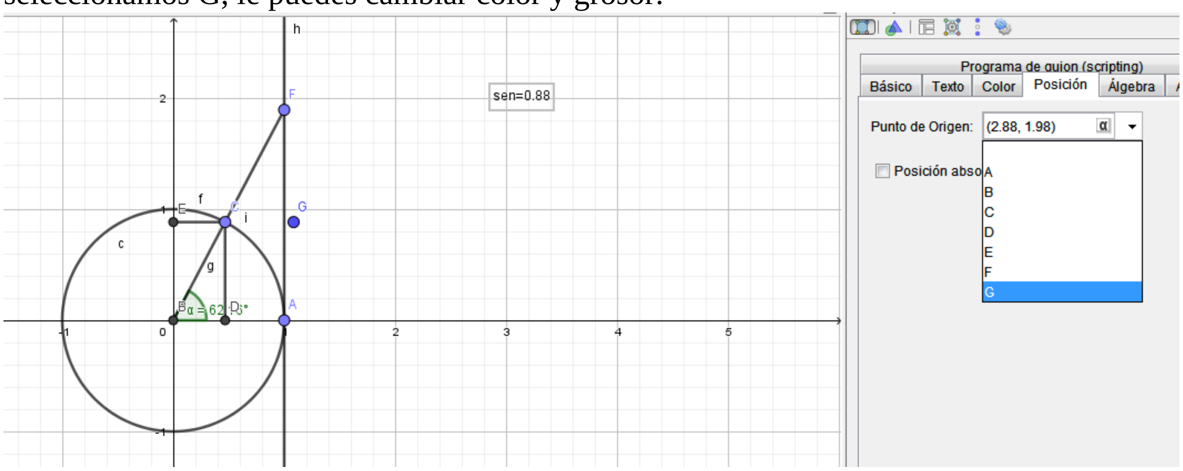


p) Se agregan valores a los puntos ubicando en la barra de entrada tan (α)

q) Luego se agrega el texto sen=a, seleccionando el objeto a

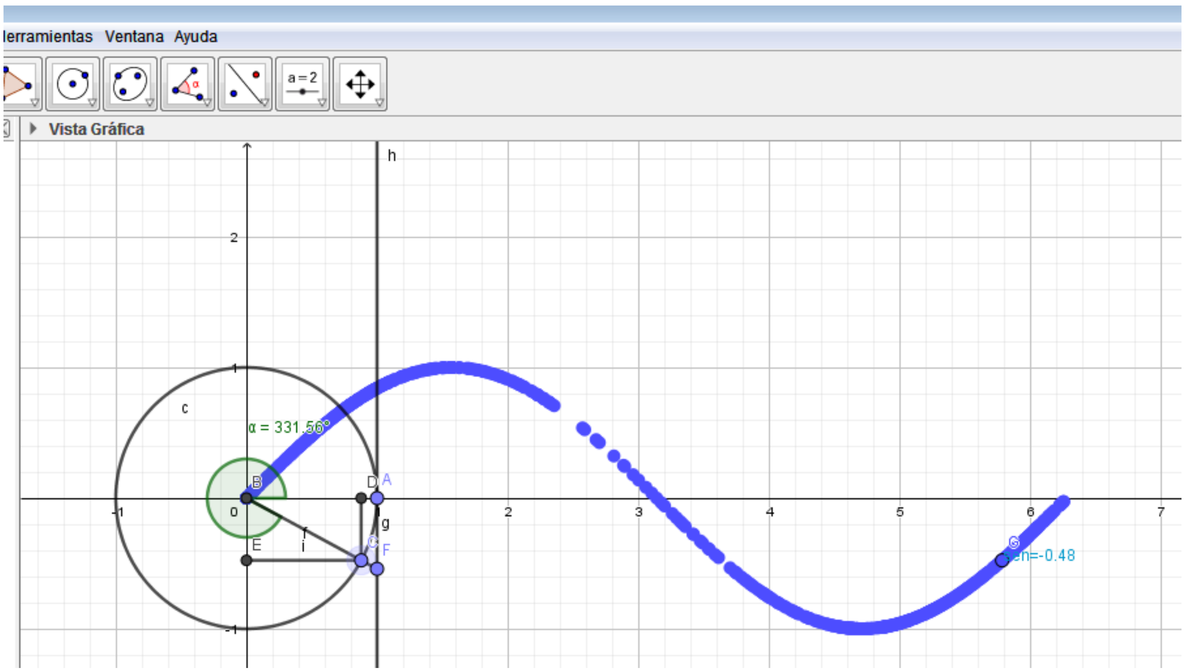


r) Sobre este texto hacer click derecho en *propiedades posición* y *punto* de origen seleccionamos G, le puedes cambiar color y grosor.



s) Cambia el valor de la escala del eje x, dando click derecho, en vista gráfica seleccionar Eje x, en la opción distancia seleccionar π/2.

t) Mover el punto C sobre la circunferencia unitaria, de esta manera quedaría dibujada la función seno.



u) Para las demás funciones se siguen los mismos pasos, excepto el literal **n** se debe redefinir según la función que se va a graficar, si es coseno (α, cos(α)), en el literal **q** el objeto que se selecciona es el b, en el literal **r** se selecciona H y finalmente se hace el mismo proceso del literal **s.**

v) Para las demás funciones se siguen los mismos pasos, excepto el literal **n** se debe redefinir según la función que se va a graficar, si es tangente (α, tan(α)), en el literal **q** el objeto que se selecciona es el c, en el literal **r** se selecciona I y finalmente se hace el mismo proceso del literal **s.**

2. En el programa Geogebra, desarrollar las siguientes actividades, siguiendo los pasos para graficar las funciones:

a) Graficar la función coseno

b) Graficar la función tangente

3. Responde las siguientes preguntas, después de graficar las gráficas correspondientes a las tres funciones trigonométricas

- **a)** ¿Cuál es el dominio y rango de la función seno?
- **b)** Puntos máximos y mínimos de la función coseno.
- **c)** ¿En cuáles características se diferencia la función seno de la función coseno?
- **d)** ¿Cuáles son algunos ceros de la función tangente?
- **e)** ¿En qué valores las gráficas- de la función seno, coseno, tangente- tienen asíntotas verticales?

Guarda pantallazos de cada una de las actividades realizadas, y envíalas a la carpeta Guía 2: gráfica de las funciones trigonométricas.

ANEXO 3: GUÍA 3

¡Exploremos la función seno!

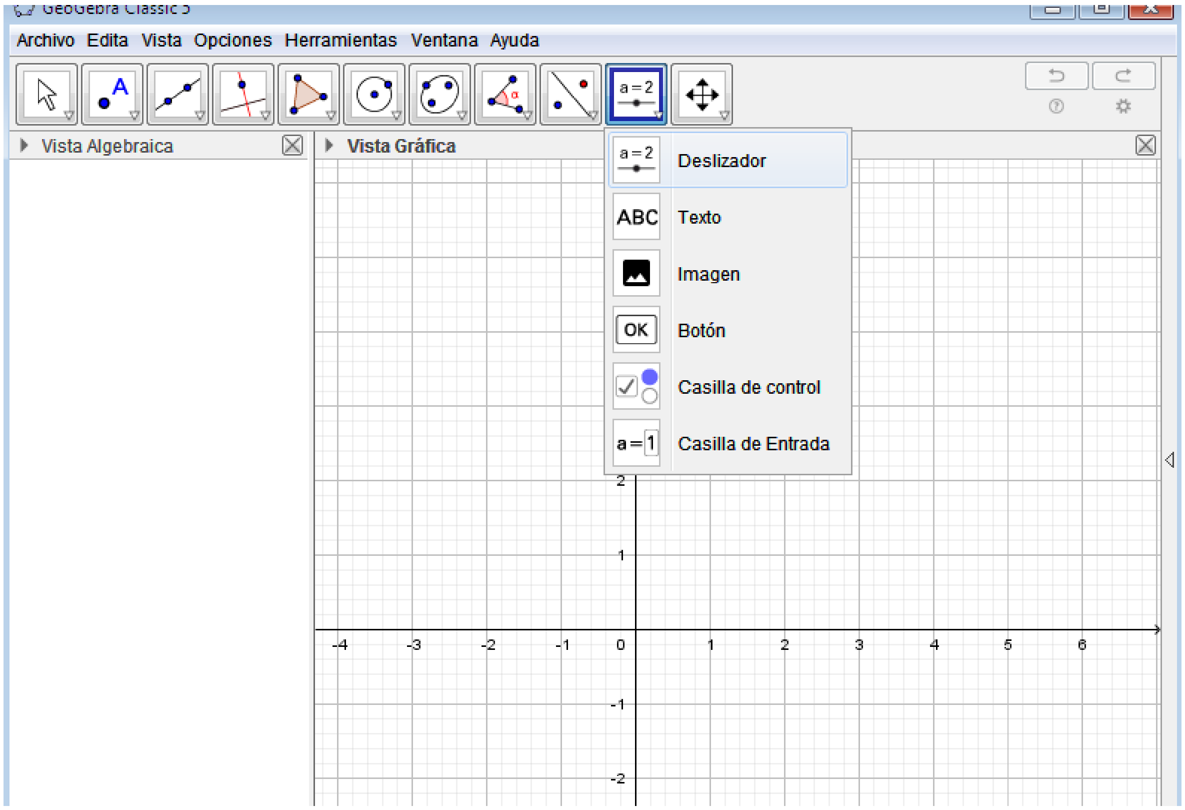
La función seno es una función periódica *que es muy importante para comprender y aprovechar muchos fenómenos en la ciencia y la tecnología. Su uso está destacado en fenómenos como: la corriente eléctrica, el estetoscopio, movimientos amortiguados.*

Guía 3: Análisis de la gráfica función seno

(Está disponible en la carpeta de Google drive Matemáticas de 10-4 o en el correo electrónico)

Objetivo: Explorar las transformaciones de la función seno donde se aprecie el efecto gráfico de cambiar: el parámetro de la amplitud, del periodo, desplazamiento de fase, entre otros, con el uso del software Geogebra.

1. Agregar 4 *deslizadores* y asignarle el nombre a cada uno con las letras mayúsculas A; B; C; D y sus valores mínimos y máximos deben estar en el rango de -2 a 2.



2. Gráfica en la misma ventana de Geogebra:
   a) Y=sen(x)
   b) Y=Asen(Bx+C)+D

3. Cambia la escala del eje x, por valores de distancia $\pi/2$.

Nota: Usualmente a los valores de A, B, C y D se le llaman parámetros, es decir valores que cambian según el usuario decide.

4. Coloca C en 0, D en 0, B en 1, e interactúa con el deslizador A
   a) ¿Qué se observa? Justifica tu respuesta
   b) ¿Qué pasa si el valor de A es cero? Justifica tu respuesta
   c) ¿Qué pasa si el valor de A es dos? Justifica tu respuesta
   d) ¿Qué pasa si el valor de A es menos dos? Justifica tu respuesta

5. Coloca A en 1, D en 0, B en 1, e interactúa con el deslizador C
   a) ¿Qué se observa? Justifica tu respuesta
   b) ¿Qué pasa si el valor de C es cero? Justifica tu respuesta
   c) ¿Qué pasa si el valor de C es dos? Justifica tu respuesta
   d) ¿Qué pasa si el valor de C es menos dos? Justifica tu respuesta

6. Coloca A en 1, C en 0, D en 0, e interactúa con el deslizador B
   a) ¿Qué se observa? Justifica tu respuesta
   b) ¿Qué pasa si el valor de B es cero? Justifica tu respuesta
   c) ¿Qué pasa si el valor de B es dos? Justifica tu respuesta
   d) ¿Qué pasa si el valor de B es menos dos? Justifica tu respuesta

7. Coloca A en 1, C en 0, B en 1, e interactúa con el deslizador D
   a) ¿Qué se observa? Justifica tu respuesta
   b) ¿Qué pasa si el valor de D es cero? Justifica tu respuesta
   c) ¿Qué pasa si el valor de D es dos? Justifica tu respuesta
   d) ¿Qué pasa si el valor de D es menos dos? Justifica tu respuesta

8. ¿Cómo moverías los deslizadores para que las dos gráficas de la función seno coincidan en todos sus puntos? Justifica tu respuesta

9. ¿Cómo moverías los deslizadores para poder obtener la gráfica de la función coseno? justifica tu respuesta

10. ¿Qué relación encuentras entre las dos gráficas, la del seno y la obtenida en el punto 9?

Guarda pantallazos de cada una de las actividades realizadas, y envíalas a la carpeta Guía 3: análisis de la función seno.

ANEXO 4: GUÍA 4

¡Interactuando con identidades trigonométricas!

Las identidades trigonométricas son ecuaciones que involucran las funciones trigonométricas *que son verdaderas para cada valor de las variables involucradas.*

Guía 4: Identidades trigonométricas

(Está disponible en la carpeta de Google drive Matemáticas de 10-4 y se entregará de forma impresa.)

Objetivo: Resolver identidades trigonométricas apoyados del software Geogebra.

Para resolver identidades trigonométricas existen algunos pasos importantes que sirven como guía o ayuda para que el proceso sea más eficiente. Uno de ellos es la transformación de uno de los lados de la igualdad en términos sólo de senos y cosenos y con procesos matemáticos llegar a que el otro lado de la igualdad sea equivalente.

1. Basándose en ello, resolver las siguientes identidades trigonométricas

a) $cotx.secx = cscx$

b) $\frac{1+cot^2\theta}{cot^2\theta} = sec^2\theta$

c) $sec^2x.tan^2x.csc^2x = sec^4x$

d) $\frac{tan^2\theta+1}{tan^2\theta} = csc^2\theta$

e) $sec^2x.(1-sen^2x) = 1$

Nota: recuerda que tienes el software Geogebra y también papel y lápiz.

Otras identidades trigonométricas con ciertos grupos de dificultad, requieren de algunas operaciones matemáticas que implican conocimiento en temas como factorización, multiplicación por la conjugada, ley de extremos y medios, entre otros.

2. Ahora te invitamos a resolver las siguientes identidades.

a) $\frac{senx-sen^3x}{cos^2x} = senx$

b) $\frac{sen\theta}{1+cos\theta} = \frac{1-cos\theta}{sen\theta}$

c) $\frac{1-sen^4x}{cos^2x} = 2-cos^2x$

d) $1 - 2sen^2x = \frac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$

Nota: recuerda que tienes el software Geogebra y también papel y lápiz.

3. Después de resolver las identidades trigonométricas planteadas, responde:

a) ¿Se resolvieron todas las identidades trigonométricas? Justifica tu respuesta

b) ¿En cuáles se presentaron mayores dificultades? ¿por qué?

c) ¿Qué estrategias implementaste para las que presentaron más dificultades?

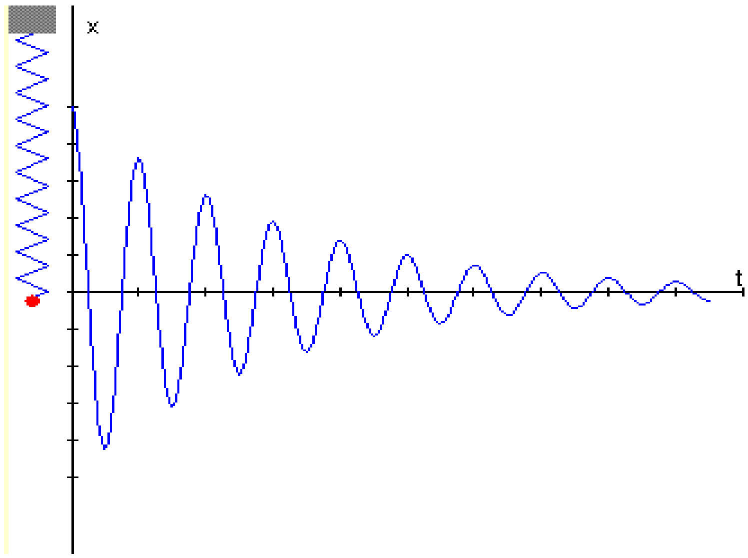
d) ¿Una identidad se puede entender solamente como la igualdad entre dos expresiones? ¿puede tener otra interpretación?

Guarda pantallazos de cada una de las actividades realizadas, y envíalas a la carpeta Guía 4: identidades trigonométricas, si tuviste la necesidad de utilizar el software.

ANEXO 5: GUÍA 5

¡Analizando el Movimiento Armónico Amortiguado!

El Movimiento Armónico Amortiguado es un sistema oscilante en el que los efectos de la fricción se manifiestan en una disminución de la amplitud de las oscilaciones y de la energía total del sistema a lo largo del tiempo.



Guía 5: Movimiento Armónico Amortiguado

(Está disponible en la carpeta de Google drive Matemáticas de 10-4 o en el correo electrónico)

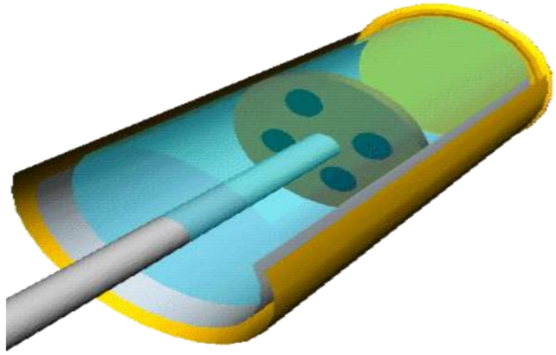
Objetivo: estudiar el Movimiento Armónico Amortiguado usando las funciones trigonométricas y el software Geogebra

Oscilaciones y amortiguadores

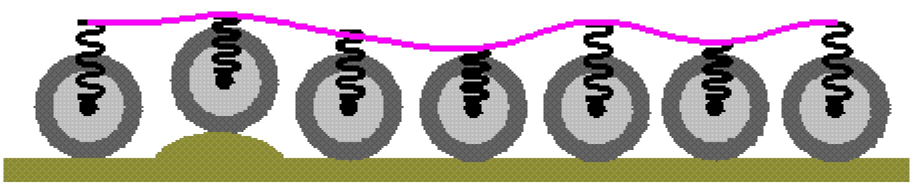
La característica esencial de las oscilaciones amortiguadas es que la amplitud de la oscilación disminuye exponencialmente con el tiempo.

Un amortiguador es un dispositivo como el que puede encontrarse en la suspensión de un automóvil o en una puerta con cierre automático.

Un amortiguador consta de un resorte mecánico, pero también, en el interior de éste, de un cilindro con un pistón



Si un coche no tuviera suspensión (es decir, si el chasis estuviera unido rígidamente al eje de las ruedas), cada hueco o irregularidad en el suelo se notaría como un golpe en el interior del vehículo lo cual, además de incómodo, pone en peligro la integridad de los pasajeros y / o carga. Por otro lado, si la suspensión consistiera simplemente en un resorte casi sin rozamiento, cada hueco produciría oscilaciones en el coche, incluso mucho después de haber superado el hueco.



Por ello, se introduce el amortiguador. El objetivo es que el coche oscile al pasar por el hueco, pero lo menos posible, de forma que retorne a la posición de equilibrio en el menor tiempo posible.

Clases de amortiguamiento

En el movimiento amortiguado se presentan algunos casos, de acuerdo con unos parámetros, estos casos son:

- Caso sobreamortiguado (rozamiento intenso)
- Caso subamortiguado (rozamiento débil)
- Caso amortiguamiento crítico.

La ecuación que describe el movimiento amortiguado está dada por:

$$f(t) = x_m e^{-\gamma t} sen(wt + \varphi)$$

$$w = \sqrt{{w_0}^2 - \gamma^2}$$

$$x_m == amplitud\ de\ movimiento,$$

$$w_{0=}frecuencia\ angular\ sin\ \sin roce\ , es\ la\ frecuencia\ propia\ del\ oscilador,$$

$$w = la\ frecuencia\ angular$$

$$\varphi = es\ el\ \text{á}ngulo\ de\ fase$$

$$\gamma = par\text{á}metro\ de\ amortiguamiento, fricci\text{ó}n\ viscosa$$

Actividades

1. Un automóvil que tiene su sistema de amortiguadores, en uno de ellos se tiene una frecuencia angular natural de w_0 = 15 rad/s y cuyo parámetro de amortiguamiento es γ = 2 s^{-1}, se encuentra inicialmente en reposo en la posición de equilibrio, por tanto, el ángulo de fase es 0. En el instante t = 0 recibe un impulso que lo pone en movimiento con una velocidad inicial v_0 = 60 cm/s y amplitud inicial es 2 m.

a) Escribe la ecuación que describe el movimiento del amortiguador del vehículo.
b) Realiza la gráfica con el software Geogebra de la ecuación hallada en el punto anterior.
c) ¿Qué significan los puntos de corte con el eje x? Escribe algunos de los hallados
d) ¿Cuál es la amplitud máxima? ¿Qué significado tiene esta amplitud?
e) ¿Qué relación tiene con algunas de las funciones trigonométricas trabajadas? Describe esta relación.
f) Aproximadamente, ¿En qué valor el amortiguador del carro, deja de oscilar?
g) Según la gráfica, ¿Cómo describirías el comportamiento del amortiguador?

2. Utiliza deslizadores para

$x_m(con\ valores\ de\ 0\ a\ 2), \gamma(con\ valores\ de\ 0\ a\ 2),$
$w(con\ valores\ de\ 0\ a\ 15), \varphi(con\ valores\ de\ 0\ a\ 2)$

Grafica la ecuación que describe el movimiento amortiguado, usando la X, en vez de la variable t, como variable independiente.

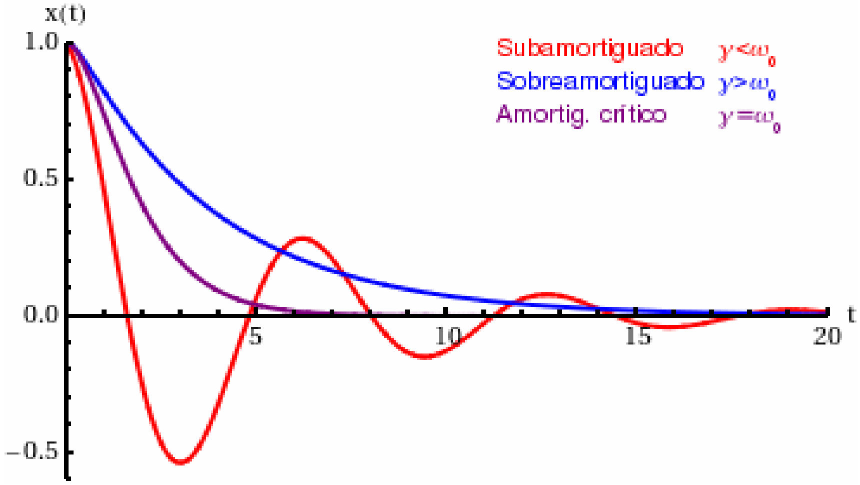
$$f(x) = x_m e^{-\gamma x} sen(wx + \varphi)$$

Redefine el dominio de la función de 0 hasta infinito.

3. Reemplaza $\varphi = 0,\ \ x_m = 2,\ w = 15$ e interactúa con γ
a) Describe lo observado
b) ¿Cómo explicarías este fenómeno en los amortiguadores de un vehículo?
c) ¿Qué pasa si $\gamma = 0$?

4. Reemplaza $\varphi = 0,\ \ x_m = 2, \gamma = 2$ e interactúa con w
a) Describe lo observado
b) ¿Cómo explicarías este fenómeno en los amortiguadores de un vehículo?
c) ¿Qué pasa si $w = 0$?
d) ¿Qué pasa si $w = 1$?
e) ¿Qué pasa si $w = 2$?

5. Observa las gráficas de los tres casos del movimiento amortiguado



a) Para los numerales 3 y 4, determina a ¿cuál de los tres casos de amortiguamiento corresponde?

b) ¿Qué valores debía tener cada deslizador para obtener las gráficas de los tres casos de amortiguamiento?

Guarda pantallazos de cada una de las actividades realizadas, y envíalas a la carpeta Guía 5: Movimiento Armónico Amortiguado.

ANEXO 6: ENTREVISTA

Entrevista a estudiantes grupo décimo

Nombre: ____

Edad: ____ **Grupo: _____** **Tiempo en el colegio: ____**

Para culminar con este proceso de investigación, es muy importante para nuestro trabajo conocer algunas apreciaciones, emociones, sentimientos, aprendizajes, dificultades que se te presentaron a la hora de participar en dicho proceso, por eso te invitamos de una manera muy cordial a que respondas a cada una de las preguntas propuestas:

1. ¿Las temáticas desarrolladas en las guías corresponden a lo trabajado en el área de Matemáticas? Justifica.

2. ¿La forma en que estaban presentadas las guías, fueron entendibles para poder abordarlas? Justifica la respuesta

3. ¿Consideras que el trabajo de las guías que se desarrolló de manera individual, fue la más apropiada? ¿Propondrías otra forma de hacerlo?

4. ¿La manera en que fueron propuestas las guías, hace necesario el acompañamiento del profesor? Justifica.

5. En este proceso de investigación, ¿cómo fue la experiencia de utilizar guías de trabajo para abordar contenidos matemáticos?

____
____
____
____
____

6. Intenta identificar alguna característica que resaltarías- a favor o en contra- sobre el uso del software y sobre la metodología usada.

____
____
____
____
____

7. ¿El uso de las TICS, contribuye a que la clase de Matemáticas se entienda mejor? Justifica la respuesta

____
____
____
____
____

8. ¿Cómo fue la experiencia de utilizar el software Geogebra? ¿El uso del software dificulta más las tareas de matemáticas o las simplifica? ¿Nombre alguna ventaja en el uso del software o alguna desventaja? ¿Qué agregaría a las actividades para motivar más a algunos de tus colegas o a ti mismo?

____
____
____
____
____

9. ¿Cuáles fueron algunas dificultades, propias o de tus compañeros, que identificaste cuando se usa software en la clase de matemáticas?

____
____
____
____
____

10. ¿Qué aspectos a favor o en contra consideras que aporta este trabajo de enseñanza de las matemáticas con la ayuda del software?

____
____