



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA
FORTALECER EL PENSAMIENTO NUMÉRICO-
VARIACIONAL A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN
DE PROBLEMAS DESDE LAS HEURÍSTICAS DE
SCHOENFELD**

Autor(es)

Dina L. Valencia Salinas

Luyis Perea Agualimpia

Universidad de Antioquia

Facultad, Departamento (Escuela, etc.)

Ciudad, Colombia

Año



Estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento numérico-variacional a través de la
Resolución de Problemas desde las heurísticas de Schoenfeld

Dina L. Valencia Salinas

Luyis Perea Agualimpia

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Licenciatura en Matemáticas y Física

Asesores (a):

José Wilde Cisneros

Línea de Investigación:

Formación de maestros

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Apartadó, Colombia

2019.

Dedicatoria

A Dios gratitud infinita, a mi madre, por su apoyo y educación, a cada docente de la Facultad de Educación y a la Universidad de Antioquia, gracias por su formación.

-Dina L. Valencia Salinas

primer lugar agradecer a Dios que sin el nada se puede lograr, a mi madre y esposo que siempre me apoyaron y me dieron las fuerzas para continuar y llevar a cabo este proyecto.

A mi hijo Heronimo el cual llego en el momento preciso y fue mi motor e impulso para hacer todo mejor. Te amo.

María L. Perea Agualimpia

Tabla de contenido

Tabla de contenido	
<u>Resumen</u>	6
<u>Capítulo 1</u>	7
<u>Contextualización</u>	7
<u>Sobre el Proyecto Educativo Institucional</u>	7
<u>Orientación teleológica</u>	8
<u>Misión</u>	8
<u>Visión</u>	8
<u>Modelo pedagógico</u>	9
<u>Plan Integral de Área</u>	9
<u>Planteamiento del problema</u>	11
<u>Pruebas Icfes</u>	11
<u>Encuesta de caracterización</u>	13
<u>Prueba diagnóstica</u>	16
<u>Objetivos</u>	20
<u>Objetivo general</u>	20
<u>Objetivos específicos</u>	21
<u>Justificación</u>	21
<u>Algunos Antecedentes</u>	26
<u>Resolución de problemas en relación con el pensamiento NV</u>	26
<u>Resolución de problemas en relación con las heurísticas</u>	28
<u>Capítulo 2</u>	32
<u>Marco conceptual</u>	32
<u>Definición de problemas</u>	32
<u>Resolución de problemas</u>	34

<u>Heurísticas</u>	35
<u>Estrategias heurísticas de Polya</u>	35
<u>Estrategias heurísticas de Schoenfeld</u>	37
<u>Pensamiento Numérico</u>	39
<u>Pensamiento variacional</u>	40
<u>Capítulo 3</u>	42
<u>Metodología</u>	42
<u>Marco institucional</u>	42
<u>Investigación cualitativa</u>	43
<u>Población</u>	43
<u>Fases y Actividades</u>	43
<u>Fase N°1: preparatoria</u>	44
<u>Fase N°2: Trabajo de campo.</u>	44
<u>Fase N°3: Análisis de información.</u>	45
<u>Fase 1: Preparatoria</u>	45
<u>Actividad 2: Prueba diagnóstica: La prueba diagnóstica implementada contiene cinco problemas con contenidos como: sistemas de ecuaciones, expresiones algebraicas, potenciación, radicación, variación, operaciones entre expresiones. Los problemas fueron resueltos por los estudiantes de forma individual y grupal, esta prueba permitió conocer algunas dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas matemáticos de tipo NV.</u>	46
<u>Fase 2: Trabajo de campo.</u>	48
<u>Actividad 1: Observaciones de clase. El acceso al campo se desarrolló en dos momentos.</u>	48
<u>Fase 3: Proceso de análisis de instrumento.</u>	52
<u>Capítulo 4</u>	53
<u>Análisis de resultados</u>	53
<u>Problema 1: Ecuaciones</u>	54
<u>Discusión y caracterización de heurísticas</u>	58
<u>Discusión y caracterización de heurísticas</u>	60
<u>Discusión y caracterización de heurísticas</u>	62
<u>Problema 2: Sistema de ecuaciones.</u>	62
<u>Discusión y caracterización de heurísticas</u>	65
<u>Discusión y caracterización de heurísticas</u>	67
<u>Problema 3: Potenciación y radicación</u>	67
<u>Discusión y caracterización de heurísticas</u>	69

<u>Discusión y caracterización de heurísticas</u>	71
<u>Resumen de la caracterización de heurísticas</u>	72
<u>Resultados de los materiales didácticos</u>	74
<u>Resultados de las entrevistas</u>	75
<u>Resultados de la entrevista realizada al maestro cooperador</u>	81
<u>Resultados de la entrevista realizada a los estudiantes antes de la intervención en el aula</u>	81
<u>Resultados de la entrevista realizada a los estudiantes después de la intervención en el aula</u>	82
<u>Evaluación de la estrategia didáctica</u>	82
<u>Conclusiones</u>	84
<u>Reflexión sobre la práctica pedagógica</u>	85
<u>Referencias</u>	88
<u>Anexos</u>	94

Listado de tablas

<u>Tabla 1.</u>	11
<u>Tabla 2.</u>	11
<u>Tabla 3.</u>	12
<u>Tabla 4.</u>	12
<u>Tabla 5.</u>	13
<u>Tabla 6.</u>	14
<u>Tabla 7.</u>	14
<u>Tabla 8.</u>	15
<u>Tabla 9.</u>	53
<u>Tabla 10.</u>	56
<u>Tabla 11.</u>	59
<u>Tabla 12.</u>	61
<u>Tabla 13.</u>	64
<u>Tabla 14.</u>	66
<u>Tabla 15.</u>	69
<u>Tabla 16.</u>	71
<u>Tabla 17.</u>	72
<u>Tabla 18.</u>	79

Listado de figuras

Figura 1. Prueba diagnóstica planteamiento problema 1 a los estudiantes del grado 9° de la IERPG	16
Figura 2. Respuesta a la pregunta 1(b) por un grupo de estudiantes.	17
Figura 3. Prueba diagnóstica pregunta 2 grado 9° de IERPG	17
Figura 4. Respuesta a la pregunta 2(a) por un grupo de estudiantes.	18
Figura 5. Prueba diagnóstica pregunta 2(b) a estudiantes del grado 9° IERPG	18
Figura 6. Respuesta de la pregunta 2(b) por un grupo de estudiantes.	18
Figura 7. Respuesta de la pregunta 2(c) por un grupo de estudiantes.	19
Figura 8. Esquema del marco teórico	32
Figura 9. Fases de la investigación cualitativa. Elaboración propia	44
Figura 10. Caja de polinomios	49
Figura 11. Tableproblemanía	50
Figura 12. Bingo lenguaje	51
Figura 13. Tabla de ecuaciones	52
Figura 14. Pregunta 1	55
Figura 15. Replanteamiento de un grupo de estudiantes a la pregunta 1	55
Figura 16. Tabla realizada por los estudiantes para responder la pregunta 1	56
Figura 17. Respuesta de estudiante del grado 9° a la pregunta 1	59
Figura 18. Respuesta a la pregunta 1	61
Figura 19. Pregunta 2	63
Figura 20. Replanteamiento de un grupo de estudiantes a la pregunta	63
Figura 21. Planteamiento de ecuaciones de un grupo de estudiantes a la pregunta 2	63
Figura 22. Respuesta a la pregunta 2	64
Figura 23. Planteamiento de ecuaciones de un grupo de estudiantes a la pregunta 2	65
Figura 24. Respuesta a la pregunta 2	66
Figura 25. Pregunta 3	68
Figura 26. Planteamiento de la pregunta N°3	68
Figura 27. Respuesta a la pregunta 3	69
Figura 28. Diagrama arbolar realizado para dar respuesta a la pregunta 3	70
Figura 29. Entrevista realiza al maestro cooperador antes de la intervención en el aula	76
Figura 30. Entrevista realizada a los estudiantes del grado 9° antes del desarrollo de la estrategia didáctica	77
Figura 31. Entrevista realizada a los estudiantes del grado 9°	78

Resumen

Este proyecto de investigación se fundamenta en el marco de la práctica pedagógica de la Licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de Antioquia, se llevó a cabo con estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Rural Pavarandó Grande -IERPG- del municipio de Mutatá, con el objetivo de fortalecer el pensamiento Numérico-variacional -NV-, a través del diseño y ejecución de una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas desde las heurísticas de Schoenfeld.

La estrategia se propone con base en la importancia de la Resolución de Problemas -RP y las heurísticas, puesto que la RP posibilita la formulación de conceptos matemáticos y establece relaciones entre ellos, además, permite que los estudiantes adquieran habilidades las cuales viabilizan el fortalecimiento de diferentes pensamientos matemáticos. Por su parte, el uso de las heurísticas contribuye con el desarrollo de habilidades para resolver problemas, permiten a los estudiantes transformar el problema generando una nueva perspectiva de organización, favorecen la comprensión del enunciado y permiten construir estrategias a seguir para la solución del problema.

El trabajo de investigaciones ha mostrado que la construcción y utilización pertinente de una estrategia didáctica para abordar con eficacia un problema matemático, ha ayudado a

la mayoría de los estudiantes a enfocarse en las diversas categorías que tiene el enfoque de las heurísticas de Schoenfeld

Palabras clave: Resolución de problemas, Pensamiento numérico-variacional, Heurísticas, estrategia didáctica

Capítulo 1

Contextualización

En el marco de la Práctica Pedagógica de la Universidad de Antioquia, el Consejo de Facultad de Educación en el acuerdo N° 284 del 4 de septiembre del 2012 en torno al programa Licenciatura en Matemática y Física, propone: “La práctica pedagógica será un espacio para la producción de saber pedagógico mediante la reflexión, la investigación y la sistematización de las experiencias de práctica” (2012, p.3).

La práctica pedagógica permite interactuar socialmente con instituciones educativas, para aportar a la transformación de la realidad educativa de las regiones.

Con base en lo anterior, se llevó a cabo una intervención pedagógica durante los semestres 2018-1, 2018-2 y 2019-1, en la IERPG del municipio de Mutatá.

En el transcurso de la práctica realizamos un análisis sobre los siguientes aspectos: revisión del Proyecto Educativo Institucional (PEI), Plan Integral de Área (PIA), encuesta de tipo socioeconómico, observaciones al maestro cooperador, prueba diagnóstica, análisis de las pruebas saber Icfes 5° y 9°.

Sobre el Proyecto Educativo Institucional

El PEI es la carta de navegación de la Institución Educativa, en la cual se especifican entre otros aspectos los valores, principios y metas, objetivos pedagógicos, los recursos docentes y didácticos disponibles y necesarios, la estrategia pedagógica, el

reglamento para docentes y estudiantes y el sistema de gestión, entre otros factores concernientes a la institución.

El objetivo del PEI de la IERPG es propiciar el conocimiento de la realidad nacional, para consolidar los valores propios de la nacionalidad colombiana, del mismo modo, fortalecer la cultura del conocimiento y la convivencia, propiciando ambientes gratificantes de aprendizaje por medio del trabajo en equipo.

La naturaleza de la IERPG es oficial aprobada por resolución N° 227165 y de carácter mixto, de los estudiantes el 56% son mujeres y el 44% hombres; brinda educación formal en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria, media y media técnica, la edad de los estudiantes oscila entre los 5 y 18 años.

El personal administrativo está conformado por un rector, 25 docentes, un coordinador, una docente orientadora, una secretaria académica y una bibliotecaria. La Institución cuenta con dos docentes licenciados en el área de Matemática para básica secundaria.

Orientación teleológica

Misión

La Institución se misiona el desarrollo pleno del ser humano, impartiendo educación basada en valores éticos, religiosos, culturales y morales; que hagan posible el desarrollo integral, formándose a partir de un ser, un saber y un saber hacer, capaz de fortalecer sus capacidades físicas cognitivas y emocionales generando una mejor calidad de vida.

Visión

Para el año 2020 la IERPG será una Institución que brindará educación de calidad formando bachilleres con una concepción humanista, científica e investigativa, acorde a su

metodología y a los avances tecnológicos que se apliquen en la innovación y creación de alternativas de desarrollo buscando la solución de problemas; logrando así una mejor calidad de vida para ellos y su entorno.

Modelo pedagógico.

El modelo implementado por la IERPG es el Social-Desarrollista el cual consiste en formar niños y jóvenes autónomos y críticos de su papel activo en la sociedad, pensando en la accesibilidad a la etapa superior del desarrollo intelectual de una manera progresiva y secuencial, de acuerdo con las necesidades y condiciones de cada uno, con base en la reflexión y la creatividad, encaminadas hacia el cambio de las necesidades políticas, ideológicas, sociales y educativas.

El currículo con este modelo formula alternativas de solución para los problemas de la sociedad, a partir del análisis de la realidad social, la cultura, los valores, entre otros, para que a través del proceso educativo de la Institución Educativa se transforme la sociedad en un bien común.

Los aprendizajes se construyen con base en los problemas de la vida diaria, los valores y la consciencia social y política. En el cual, el docente debe crear un ambiente estimulante de experiencias que faciliten en el estudiante su acceso a las estructuras cognoscitivas de la etapa inmediatamente superior buscando el desarrollo de este.

Plan Integral de Área.

El PIA es el documento en el cual se especifican aspectos concernientes al plan de estudio de cada área, con una línea metodológica definida y una intencionalidad pedagógica.

Para el área de Matemática, la Institución Educativa incorpora un plan de área acorde a lo estipulado por el Ministerio de Educación, mediante competencias y componentes con base a Lineamientos Curriculares y los Derechos Básicos de Aprendizaje, de manera que posibilite la reflexión, análisis y el desarrollo de procesos que fortalezcan los diferentes pensamientos matemáticos.

De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas -MEN- (2006) para el grado 9°, propone para el pensamientos Numérico y Sistemas Numéricos que los estudiantes adquieran una comprensión sólida tanto de números, relaciones y operaciones que existen entre ellos, como de las diferentes maneras de representarlos.

Este pensamiento se adquiere gradualmente y va evolucionando a la medida en que los estudiantes tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos; procura que desarrollen el pensamiento numérico y que puedan dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos.

En referencia al pensamiento NV indica que los estudiantes caractericen la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Este pensamiento debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollar su capacidad de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y graficas apropiadas.

Así mismo, debe desarrollar en los estudiantes la capacidad de analizar el cambio en varios contextos y de utilizar modelos matemáticos para entender y representar relaciones cuantitativas.

Planteamiento del problema

El planteamiento del problema se sustenta desde varios elementos: Las pruebas saber Icfes, encuesta de caracterización de los estudiantes y la prueba diagnóstica.

Pruebas Icfes.

El análisis de la Prueba Saber Icfes de los años 2015, 2016 y 2017 en el grado 5° y 9° con respecto a nivel de competencias y componentes, se muestra en las tablas 1- 4:

Tabla 1.

Resumen resultados pruebas Icfes por competencias grado 5° IERPG, años 2015, 2016 y 2017.

Resultados por competencias grado 5°			
Competencia	Años		
	2015	2016	2017
Razonamiento	Débil	Débil	Fuerte
Comunicación	Fuerte	Fuerte	Débil
Resolución	Intermedio	Intermedio	Débil

En la tabla 1 se observa que los estudiantes tienen dificultades en las competencias de Razonamiento y RP.

Tabla 2.

Resumen resultados pruebas Icfes por componentes grado 5° IERPG, años 2015, 2016 y 2017.

Resultados por componentes grado 5°			
Componente	Años		
	2015	2016	2017

Numérico-Variacional	Intermedio	Débil	Débil
Geométrico-Métrico	Débil	Intermedio	Intermedio
Aleatorio	Fuerte	Débil	Débil

La tabla 2 muestra que los estudiantes continúan con dificultades, en particular en el componente NV.

Tabla 3.

Resumen resultados pruebas Icfes por competencias grado 9° IERPG, años 2015, 2016 y 2017.

Resultados por competencias grado 9°			
Competencia	2015	Años 2016	2017
Razonamiento	Fuerte	Débil	Fuerte
Comunicación	Débil	Intermedio	Intermedio
Resolución	Intermedio	Débil	Débil

En la tabla 3 se evidencia que los estudiantes presentan dificultades en las competencias de Comunicación, Razonamiento y RP.

Tabla 4.

Resultados pruebas Icfes grado 9° IERPG por componentes años 2015, 2016 y 2017.

Resultados por componentes grado 9°			
Componente	2015	Años 2016	2017
Numérico-Variacional	Débil	Intermedio	Débil
Geométrico-Métrico	Débil	Débil	Débil
Aleatorio	Fuerte	Fuerte	Fuerte

En la tabla 4 se observa que los estudiantes presentan dificultades en los componentes Numérico-variacional y Geométrico-métrico.

Lo anterior nos lleva a pensar la enseñanza del pensamiento NV de una manera diferente a la tradicional, es decir, que el estudiante no sea visto como un receptor de información y tenga un rol pasivo en el proceso de aprendizaje, debido a esto, es necesario hacer propuestas encaminadas a fortalecer el componente NV.

Una propuesta que pueda propiciar la enseñanza de una manera diferente a la tradicional como implementar una estrategia didáctica basada en las heurísticas de Schoenfeld, que posibiliten el fortalecimiento del pensamiento NV.

Encuesta de caracterización.

La encuesta de caracterización realizada al grado 9° tiene como objetivo conocer las particularidades, actividades y el contexto en el cual están inmersos los estudiantes. Además, el entorno académico el cual constituye un papel trascendental en la construcción del conocimiento.

Respecto al aspecto disciplinar se le plantearon las preguntas en torno a los siguientes elementos:

Tabla 5.

Pregunta de la encuesta realizada a los estudiantes del grado 9° de la IERPG.

¿SIENTES GUSTO POR LA		
MATEMÁTICA?	FRECUENCIA	%
Si	10	31,25
No	20	62,5
Más o menos	2	6,25
Total	32	100

Tabla 6.

Pregunta de la encuesta realizada a los estudiantes del grado 9° de la IERPG.

¿COMPRENDES LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS?	FRECUENCIA	%
SI	18	56,25
NO	12	37,5
Más o menos	1	3,125
No responde	1	3,125
Total	32	100

De las tablas 5 y 6, se infiere que la mayoría de los estudiantes sienten gusto por el área de matemática y de acuerdo con sus consideraciones en el momento de enfrentarse a un problema comprenden los enunciados.

Tabla 7.

Pregunta de la encuesta realizada a los estudiantes del grado 9° de la IERPG.

¿DETERMINAS EL PROCEDIMIENTO A SEGUIR	FRECUENCIA	%
--	------------	---

PARA RESOLVER UN PROBLEMA MATEMÁTICO?		
SI	5	15,625
NO	20	62,5
Más o menos	5	15,625
No responde	2	6,25
Total	32	100

Tabla 8.

Pregunta de la encuesta realizada a los estudiantes del grado 9° de la IERPG.

AL RESOLVER UN PROBLEMA,		
¿VERIFICAS EL RESULTADO?	FRECUENCIA	%
SI	3	9,375
NO	25	78,125
Más o menos	2	6,25
No responde	2	6,25
Total	32	100

De los resultados presentados en las tablas 7 y 8 se infiere que una gran parte de los estudiantes no identifican las operaciones ni los procedimientos que deben seguir para resolver problemas y de igual forma no verifican los resultados obtenidos, lo que según Polya (1965) conlleva a que el estudiante no consolide conocimientos ni desarrolle aptitudes para resolverlos.

Prueba diagnóstica.

Realizamos una prueba diagnóstica con el objetivo de identificar las fortalezas o debilidades que presentan los estudiantes del grado 9° en la IERPG cuando resuelven problemas matemáticos.

A continuación, se detallan los problemas planteados a los estudiantes en la competencia de razonamiento y pensamiento NV.

1. Hay un evento escolar en la Institución Educativa Rural Pavarandó Grande, entre los asistentes se encuentran algunos padres de familia, profesores y estudiantes.
 - A) En las primeras 3 horas del evento en total asisten 120 personas de las cuales la tercera parte de ellas son profesores, los padres que asisten son la mitad de la cantidad de profesores y los estudiantes son el triple de los padres.

¿Cuántos padres, profesores y estudiantes asistieron al evento en las primeras 3 horas?

Figura 1. Prueba diagnóstica planteamiento problema 1 a los estudiantes del grado 9° de la IERPG

En la figura 1 se hace el planteamiento del problema 1 con la finalidad de que los estudiantes identifiquen expresiones algebraicas implícitas que se requieren para dar solución al problema, igualmente se quiere que los estudiantes identifiquen patrones.

Varios de los estudiantes apuntan de la misma forma a la resolución de la pregunta así:

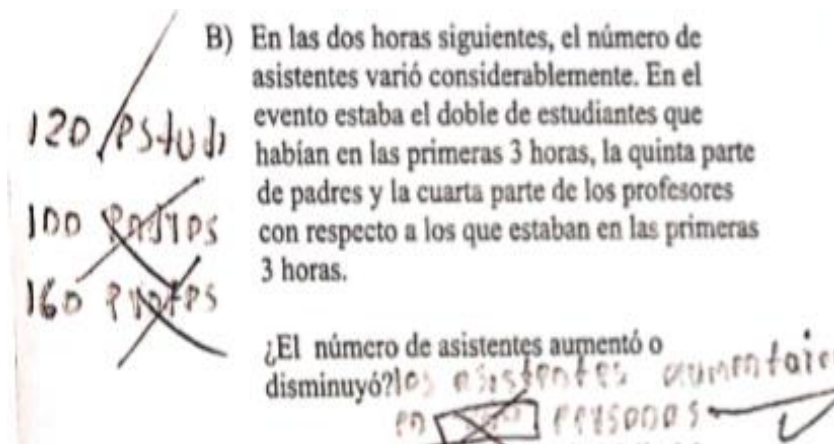


Figura 2. Respuesta a la pregunta 1(b) por un grupo de estudiantes.

De la figura 2 se interpreta que los estudiantes tienen dificultades en establecer una estrategia para dar solución a un problema, además, se les dificulta el uso de procedimientos concernientes al pensamiento NV para realizar el debido proceso de solución del problema.

2. La Institución Educativa Rural Pavarandó Grande del municipio de Chigorodó, realizó una competencia entre los estudiantes que practican patinaje. Realizaron 3 fases en las cuales los participantes debían llegar a la meta en el menor tiempo posible (el tiempo se da en segundos).

Figura 3. Prueba diagnóstica pregunta 2 grado 9° de IERPG

En la figura 3 se presenta a los estudiantes un segundo problema con el fin de que los estudiantes determinen el orden de los números racionales y de esta manera otorguen los puestos de acuerdo a los tiempos de llegada de los patinadores.

Primera fase
Complete la tabla:

PATINADOR	TIEMPO	PUESTO
Patinador 1	64,2	Patinador 3
Patinador 2	64,02	Patinador 5
Patinador 3	64,9	Patinador 1
Patinador 4	64,002	Patinador 2
Patinador 5	64,4	Patinador 4

La cosa la pose de mayor a menor

Figura 4. Respuesta a la pregunta 2(a) por un grupo de estudiantes.

De acuerdo con la figura 4 los estudiantes no logran identificar el orden de los números racionales, por tanto, se les dificulta relacionarlo con la diferencia de tiempo en la que llegan los patinadores a la meta.

Segunda fase

Complete la tabla teniendo en cuenta los siguientes datos:

Los tiempos para los patinadores en la segunda fase fueron los siguientes:

- ❖ El patinador 1 obtuvo 0.08 segundos menos que en la primera fase.
- ❖ El patinador 2 obtuvo 0.02 segundos más que en la primera fase.
- ❖ El patinador 3 obtuvo 0.01 segundos más que en la primera fase.
- ❖ A el patinador 4 le dan una bonificación de 0.03 segundos por juego limpio y su marca fue de 0.07 segundos menos que en la primera fase.
- ❖ El patinador 5 tiene penalización por 0.06 por indisciplina de jugadores y su tiempo fue de 0.03 segundos menos que en la primera fase.

Figura 5. Prueba diagnóstica pregunta 2(b) a estudiantes del grado 9° IERPG

PATINADOR	TIEMPO	PUESTO
Patinador 1		
Patinador 2		
Patinador 3		
Patinador 4		
Patinador 5		

Figura 6. Respuesta de la pregunta 2(b) por un grupo de estudiantes.

En la figura 5 se presenta a los estudiantes un problema con el fin de que establezcan la variación que tuvieron los patinadores en el tiempo de llegada en la segunda fase y en base a esto determinen el puesto de cada participante.

De las respuestas se interpreta que los estudiantes no son capaces de establecer un plan de solución al problema, no usan el razonamiento para realizar las operaciones pertinentes, además, no tienen un concepto claro de números racionales.

Tercera fase

Determina cuál fue la variación en segundos que tuvieron los patinadores teniendo en cuenta la segunda y primera fase.

PATINADOR	MARCA1	MARCA2	VARIACIÓN
Patinador 1			
Patinador 2			
Patinador 3			
Patinador 4			
Patinador 5			

Figura 7. Respuesta de la pregunta 2(c) por un grupo de estudiantes.

De la figura 7 se puede interpretar que los estudiantes no establecen relación con el razonamiento en cuanto a la generalización de los procesos hechos en las preguntas anteriores, no plantean una serie de pasos a seguir para obtener la solución del problema, no identifican los patrones en la variación de los tiempos entre uno y otro resultado.

Con base en las anteriores interpretaciones y procedimientos en las respuestas a la prueba diagnóstica realizada a los estudiantes, se evidencian las diferentes dificultades que tienen en cuanto a la RP, pensamiento NV y razonamiento.

La prueba diagnóstica y las pruebas Icfes presentan resultados similares en cuanto a debilidades en la competencia de Razonamiento y el pensamiento NV.

Los estudiantes no desarrollan problemas por medio de las heurísticas propuestas por Schoenfeld (análisis, exploración, ejecución y comprobación) pues se les dificulta

implementarlas, debido a que no comprenden los enunciados, no realizan diagramas, no desarrollan problemas con el uso de heurísticas ni realizan conjeturas e interpretaciones.

Además, tienen dificultades en el pensamiento NV ya que no han adquirido según el MEN (2006) una aprehensión sólida de los sistemas numéricos – los números reales-, relaciones y operaciones que existen entre ellos y las operaciones, del mismo modo, se les dificulta la comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollar habilidades resolutivas de problemas, quebrantando así el concepto que se le atribuye a el pensamiento NV en el PIA.

Por lo anteriormente expuesto, se considera pertinente la implementación de una estrategia didáctica basada en la RP en el contexto de las heurísticas propuestas por Schoenfeld (1985), que permita que los estudiantes puedan resolver los problemas que posibiliten el fortalecimiento del pensamiento NV.

En correspondencia con los planteamientos anteriores, se propone en este proyecto la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo fortalecer el pensamiento Numérico-variacional en los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Rural Pavarandó Grande, a través de la Resolución de Problemas utilizando las heurísticas de Schoenfeld?

Objetivos

Objetivo general

Fortalecer el pensamiento Numérico-variacional en los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Rural Pavarandó Grande, por medio de una estrategia didáctica basada en las heurísticas de Schoenfeld desde la Resolución de Problemas.

Objetivos específicos

1. Caracterizar las heurísticas usadas por los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Rural Pavarandó Grande para resolver problemas con base al pensamiento Numérico-variacional.
2. Diseñar e implementar una estrategia didáctica basada en las heurísticas de Schoenfeld para la Resolución de problemas relacionados con el pensamiento Numérico-variacional.
3. Evaluar la estrategia didáctica basada en las heurísticas de Schoenfeld para la enseñanza de la Resolución de Problemas relacionados con el pensamiento Numérico-variacional.

Justificación

Según Polya (1965):

Si un profesor dedica su tiempo a ejercitar a los estudiantes en operaciones rutinarias matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual. Pero, si por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus estudiantes planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello. (p.5).

Lo anterior propone que en la escuela en lugar de enseñar algoritmos y ejercicios repetitivos, se debe plantear problemas para resolver, puesto que, de esta manera se posibilita la comprensión de los pensamientos matemáticos y el desarrollo de las competencias, lo que permite a los estudiantes argumentar, analizar y realizar un proceso de reflexión constante.

Santos (2015) afirma que el proceso de RP involucra ciclos iterativos de discusión y colaboración en los que los estudiantes deben tener oportunidad de expresar, revisar, contrastar, interpretar y refinar sus ideas y heurísticas de solución.

Según el Boletín Oficial de Canarias -BOC- (como se citó en Santos y Camacho, 2004). En los últimos años la idea de que los estudiantes aprendan matemáticas a través de la RP se presenta como relevante en casi todas las propuestas curriculares.

Además afirma que las actividades de RP posibilitan la aplicación de conocimientos, conceptuales y de procesos, y el descubrimiento de otros nuevos. Experimentar, particularizar, conjeturar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar utilizar distintas partes de matemáticas, verificar la solución, etc., son una buena forma de convencer al alumnado de su capacidad para intentar la resolución de problemas.

Santos y Camacho (2004) afirman que la RP se le reconoce como el centro de la actividad matemática.

Para Ceballos et al. (2013) la RP debe ser un contenido central en las aulas de matemáticas debido a la posibilidad que da al estudiante de desarrollar la capacidad de análisis, comprensión y razonamiento en los estudiantes.

Según el BOE (como se citó en Santos y Camacho, 2004) la RP constituye uno de los ejes principales de la actividad matemática y debe ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa. En esta se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer, reflexionar, planificar el proceso de resolución, establecer estrategias y procedimientos y revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados.

En este sentido, se ve el interés por los autores de articular en las aulas de matemáticas nuevas actividades que permitan reestructurar las clases de matemáticas,

orientándolas a implementar la RP de forma que posibiliten el interés, la motivación y el pensamiento crítico en los estudiantes y además, promueva el aprendizaje del pensamiento NV.

Según el MEN (1998) el uso de la RP en las clases de matemáticas permite que los estudiantes se formen matemáticamente competentes, es decir, que el estudiante sea capaz de formular, plantear y resolver problemas a partir de una serie de situaciones de la vida real, es decir, si se incorpora en el aula la RP es importante para el estudiante porque se articulan actividades diferentes a las habituales, para propiciar una enseñanza orientada a que los estudiantes formulen, argumenten, justifiquen y analicen procedimientos y problemas planteados.

Según Sausen y Guérios (2010) una de las metas de la enseñanza de la matemática es estimular a los estudiantes a pensar, a desarrollar el razonamiento, de modo eficaz e inteligente, y de esta manera posibilitar que puedan resolver problemas diversos en el contexto escolar y extraescolar.

Santos (2007) afirma que la RP es una actividad central la cual posibilita el desarrollo del pensamiento matemático, al igual que el razonamiento lógico y además, potencia el desarrollo de habilidades y destrezas de manera general.

La RP según el National Council of Teachers of Mathematics (citado por Díaz, J., y Díaz, R., 2016) promueve que el estudiante refleje su pensamiento de modo que pueda aplicar y adaptar estrategias heurísticas que se puedan transferir a otros problemas y en otros contextos, desarrollando la perseverancia y curiosidad por la actividad resultora, es decir, que el estudiante desarrolla el pensamiento matemático al usar las heurísticas.

Las heurísticas se relacionan estrechamente a la RP, debido a que son una alternativa y una herramienta importante en el momento de solucionar problemas, pues de

acuerdo con Schoenfeld (2012) por medio de la RP mediante las heurísticas los estudiantes deben construir sus propias estructuras de conocimiento y el profesor solamente debe cumplir un rol de orientador, implementando acciones que causen motivación en los estudiantes para interesarse en resolver un problema.

Desde el MEN (1998) se reconoce que las heurísticas permiten que las actividades matemáticas cobren sentido, debido a que los problemas son propuestos desde el contexto y el quehacer diario de los estudiantes y promover así un aprendizaje en ellos.

Según Icfes (2003) en los usos de las heurísticas intervienen aspectos como los recursos matemáticos, la autorregulación o monitoreo, el control de proceso de solución y las ideas y creencias a cerca de la matemática.

En este sentido, resolver un problema requiere poner en acción el pensamiento construido alrededor de los conceptos matemáticos y construir una o varias soluciones, en las que son válidas diferentes estrategias o planes de acción, de esta manera, se puede posibilitar el fortalecimiento del pensamiento NV y el desarrollo de competencias.

Godino, Botanero, & Font (2003) haciendo referencia a las heurísticas establecen que la utilización de recursos didácticos no solo hace referencia al material tangible, sino también a aquellas tareas que se proponen en la clase de matemáticas, igualmente hacen parte de estos recursos, ya que, al resolver estas tareas, el estudiante dota de significado a los conceptos matemáticos.

El MEN (1998) plantea que es importante que no se considere la RP después de que haya un aprendizaje, pues se pueden usar como mediador en el aula para posibilitar el aprendizaje de matemáticas específicamente del pensamiento NV en los estudiantes; de manera que, desde las heurísticas de Schoenfeld se conlleve al fortalecimiento de los objetos algebraicos aprehendidos, logrando así, un mejor desempeño en los estudiantes en

las diferentes pruebas realizadas a la IERPG incluyendo en estas las pruebas Icfes en relación al pensamiento numérico-variacional.

Según el MEN (1998, P.43) el pensamiento NV hace referencia a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, en ese sentido Bocanegra (2017) afirma que hay una necesidad de diseñar problemas que permitan al estudiante comprender la multiplicidad de significados y sentidos que tienen los números y su aplicación efectiva en la matemática y la vida cotidiana.

De acuerdo con el MEN (1998) el pensamiento NV juega un papel importante en el uso de procesos matemáticos, este pensamiento se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en diferentes contextos.

El MEN en torno al pensamiento NV propone: “El desarrollo del pensamiento NV exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, problemas y teorías de diversos contextos los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos” (2016, p.60).

Cortés y Galindo (2007) destacan que las estrategias heurísticas favorecen el fortalecimiento de los pensamientos matemáticos entre estos el pensamiento NV despertando así el interés en los estudiantes por las matemáticas.

Quitian (2018) afirma que es de gran importancia posibilitar el desarrollo del pensamiento NV en los estudiantes, ya que, permite que se puedan reconocer cantidades, usar códigos universales, tener sentido de la estimación y así mismo desarrollar el sentido común.

Por lo anterior, este proyecto de investigación plantea que, al usar las heurísticas de Schoenfeld en la RP, los estudiantes del grado 9° de la IERPG podrán adquirir habilidades

matemáticas y fortalecer el pensamiento NV, puesto que, las heurísticas generan procesos que promueven el fortalecimiento de los pensamientos y favorecen a la solución de problemas matemáticos.

Algunos Antecedentes

Mediante el rastreo bibliográfico encontramos diversas investigaciones de las heurísticas en relación con la RP.

Las investigaciones se analizaron respecto a: RP en relación con el pensamiento NV y RP mediante las heurísticas.

Resolución de problemas en relación con el pensamiento NV.

Las investigaciones encontradas dan cuenta de diferentes propuestas con fin de fortalecer o mejorar el razonamiento algebraico la importancia que adquiere con los aportes que da a la enseñanza de la matemática.

Córdoba (2016); Cartagena, et al (2016); Zamora (2016) presentan propuestas pedagógicas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la cual por medio de problemas (espacios pedagógicos los cuales posibilitan la conceptualización y el uso de símbolos y algoritmos para plantear y resolver problemas matemáticos) pretenden fortalecer el pensamiento numérico variacional.

Los anteriores autores realizan propuestas en busca del aprendizaje de la RP asociadas al pensamiento NV, en las cuales mediante la ejecución de diferentes tareas y actividades realizadas por los estudiantes se logró evidenciar transformaciones en la práctica matemática, pues se posibilitó que los estudiantes lograran identificar patrones y regularidades a través de procesos de generalización, utilizando expresiones algebraicas.

También, buscaban desarrollar habilidades en dominio, comprensión y solución de problemas dentro de un entorno escolar, como nueva práctica metodológica en procesos educativos.

Quitíán (2018) y Gómez (2015) implementan estrategias didácticas en las que se abordan problemas que se relacionan con el cambio y la variación, con el objetivo de fortalecer el componente NV a través de la resolución y formulación de problemas, utilizando el proceso de enseñanza relacionados al reconocimiento de qué es lo que cambia, cómo cambia y cuánto cambia. Concluyen que estrategias didácticas desde la RP permiten a los estudiantes establecer reglas y procedimientos para la exploración y búsqueda de la solución a los problemas planteados por el docente y de igual forma posibilitan el aprendizaje del pensamiento NV.

Jaramillo y Perlaza (2014) formalizan una propuesta pedagógica en el aula para los estudiantes del grado 8° del centro educativo Politécnico la Milagrosa, basada en el reconocimiento de los procesos de variación subyacentes en las sucesiones y el pensamiento variacional, el cual es visto en esta propuesta como una manera dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas.

Esta estrategia es basada en la lúdica, el uso de la observación, el registro de datos y análisis de las regularidades para descubrir patrones.

La propuesta tenía como objetivo central que los estudiantes utilizaran los preconceptos y sin las definiciones predeterminadas pudieran hacer un acercamiento al concepto de sucesión y patrón por medio de la RP.

Orozco (2018) realiza una propuesta con el objetivo de analizar las dificultades que presentaban los estudiantes cuando resolvían problemas matemáticos en el pensamiento NV, mediante los procedimientos implementados encontró que los estudiantes realizan

operaciones básicas sin cometer errores y aun así no tienen en cuenta el contexto en el cual está enmarcado el problema, por esto presentan problemas en la RP relacionados con el pensamiento NV.

La metodología utilizada en este proyecto, permitió identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como es el uso y reconocimiento de objetos y los significados matemáticos atribuidos a términos, símbolos y expresiones en la resolución de problemas matemáticos o de una tarea.

Paladinez (2018) ejecuta una propuesta pedagógica en la cual se propone contribuir en el fortalecimiento de los procesos relacionados con la generalización, uso de las representaciones y el uso de la letra, asociados al pensamiento variacional a partir del diseño y aplicación de actividades de aprendizaje basada en problemas.

Las actividades problémicas en esta propuesta son divididas en tres fases, las actividades de iniciación, actividades de afianzamiento y las actividades de profundización.

Después de implementar esta estrategia pedagógica, se fortaleció las habilidades en el proceso de generalización, la necesidad del uso de las representaciones para poder comunicar y plasmar lo visualizado y además de darle sentido al uso de la letra para representar cantidades indeterminadas o desconocidas en la solución de problemas de variación y cambio.

Resolución de problemas en relación con las heurísticas.

Agudelo, et al. (2008); Dionicio, (2017); Pérez, et al. (2011); Boscán, et al. (2012); Barrantes, et al. (2016) presentan la heurística como un proceso analítico y reflexivo que permite mejorar la capacidad resolutoria de los problemas matemáticos por medio de una estrategia creativa, una alternativa para abordar los problemas y promover el descubrimiento.

Estas propuestas pedagógicas de intervención, desde el contexto cotidiano de aprendizaje de las matemáticas posibilitan el desarrollo de las habilidades de pensamiento, en estas propuestas pedagógicas el docente buscaba conducir al estudiante al descubrimiento de hipótesis y reglas de forma independiente, a través de impulsos que movilizaban su actividad mental. Plantean un estudio descriptivo de los fundamentos teóricos de la RP matemáticos y estrategias para su enseñanza basada en el método heurístico de Polya (1965).

Las heurísticas son consideradas en estas investigaciones como herramienta creativa en la RP, debido a que estimula la experimentación, promueve el descubrimiento y la búsqueda de soluciones alternativas a problemas, potencia los rasgos creativos y está fundamentada en el proceso creativo.

Las investigaciones tuvieron como objetivo común, fundamentar desde el punto de vista didáctico la RP utilizando los procedimientos heurísticos, desde una perspectiva desarrolladora, en busca de potenciar habilidades en los estudiantes y construir conocimiento matemático.

Encontraron que las dificultades que presentan los estudiantes consisten en la poca comprensión de los enunciados pues no entendían el problema, ni el significado de los términos empleados en el enunciado y esto les impedía identificar las incógnitas y los datos.

Los estudiantes no trazaban un plan para resolver los problemas, pero después de las intervenciones los estudiantes eran capaces de concebir un plan y ejecutarlo, no solo obtenían la respuesta sino que también la verificaban y comprendían los problemas.

Díaz, J. et al. (2018); García, J (2010) proponen estrategias que ayuden a utilizar los métodos de RP y los recursos de las heurísticas en el aula, con el fin de estimular el

desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. Los resultados obtenidos a partir de la aplicación de estas estrategias en torno a la RP establecen que la habilidad de un estudiante para resolver problemas es posible fortalecer.

Mendoza; L. (2014) implementa una secuencia didáctica basada en las heurísticas como estrategia de enseñanza en la RP, con el objetivo de determinar como la aplicación de las estrategias heurísticas mejora la capacidad de RP de los estudiantes, concluye en que la aplicación de las estrategias heurísticas influye significativamente y mejora el lenguaje simbólico y matemático en los estudiantes.

Ruiz (2017) ejecutó un proyecto el cual tenía como objetivo determinar la relación existente entre estrategias heurísticas y RP, se utilizó como instrumento un cuestionario con 31 ítems, el cual fue validado y aplicado.

Los resultados arrojaron que las estrategias heurísticas permiten atender los requerimientos de los estudiantes a la hora de resolver problemas y además, existe una relación significativa entre RP y heurísticas.

Domínguez y Espinosa (2019) realizaron un trabajo de investigación con el objetivo de potenciar la RP desarrollando habilidades de pensamiento a través de la implementación del método heurístico, en el cual se determina la incidencia del método heurístico y las habilidades de pensamiento sobre la RP.

Se realizaron intervenciones de aula basadas en el método heurístico, permitiendo así potenciar la RP.

Mendoza (2014) lleva a cabo una investigación de naturaleza experimental, con grupo control y experimental con la aplicación de un pretest y postest con el único propósito de determinar como la aplicación de las estrategias heurísticas mejora la capacidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes.

La investigación demuestra que la aplicación de estrategias heurísticas influye significativamente y mejora la capacidad de resolución de problemas matemáticos, para esto se tomaron dos grupos; grupo control (n=34) y grupo experimental (n=36), aplicando un estímulo como es la implementación de las estrategias heurísticas y luego evaluando la capacidad de resolución de problemas matemáticos a través de un instrumento.

Teniendo en cuenta las anteriores investigaciones respecto a la RP, pensamiento NV y heurísticas, se ve la importancia de continuar indagando respecto a estos tópicos y se hace necesario proponer proyectos que ayuden a generar o posibilitar el fortalecimiento del pensamiento NV, haciendo uso de la RP y las heurísticas.

En este proyecto se presenta una estrategia didáctica que permite plantear una alternativa para lograr fortalecer los procesos que realizan los estudiantes en cuanto al pensamiento NV mediante la RP desde las heurísticas de Schoenfeld, por lo cual este proyecto es diferente de los planteados en los antecedentes puesto que se basa en las heurísticas de Schoenfeld mediante la implementación de una estrategia didáctica basada en la RP.

Capítulo 2

Marco conceptual

El planteamiento teórico-disciplinar, se realiza a partir de los siguientes tópicos:

Resolución de problemas; las heurísticas Schoenfeld y el pensamiento numérico variacional

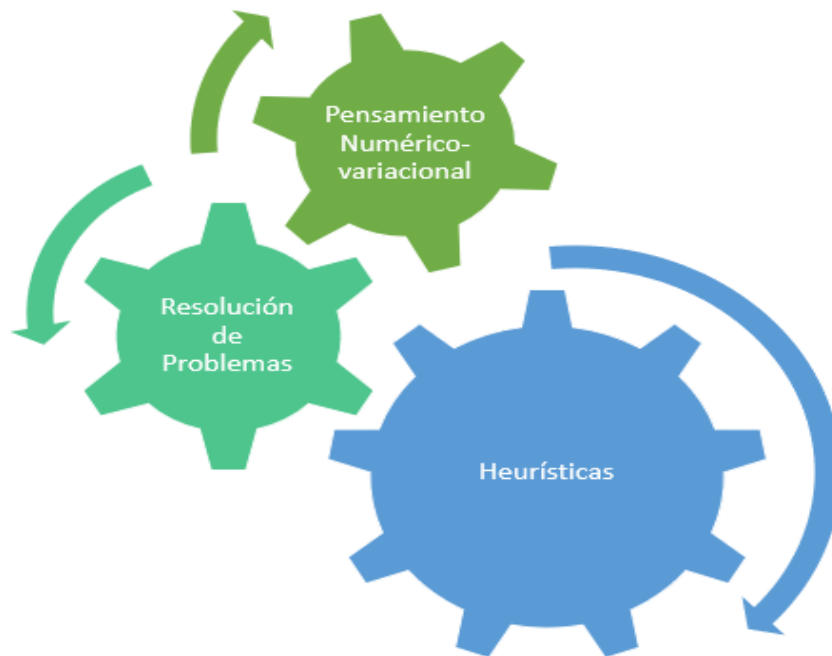


Figura 8. Esquema del marco teórico

Definición de problemas

Según Simon et al. (1970) Definen problema como una situación en la que un individuo desea hacer algo, pero desconoce el curso de la acción necesaria para lograr lo que quiere, por lo tanto, quien trata de resolver un problema no presenta el conocimiento o

los recursos necesarios para hacerlo, pues, de acuerdo con Poggioli (2009) es necesario el uso de estrategias que permitan dar solución a los problemas.

Polya (1962) define problema como una situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido.

Parra (citado por Boscán, M., y Klever, K., 2012) indica que “un problema plantea una situación que debe ser moldeada para encontrar la respuesta a una pregunta que deriva de la misma situación” (p. 23), ya que el problema dispone de elementos que permiten la comprensión de lo que se plantea, sin embargo, no describe ni desarrolla un procedimiento de respuestas que permitan dar solución rápidamente al problema.

Mayer (2002) define el término problema a través de cuatro componentes: las metas, los datos, las restricciones y los métodos u operaciones.

- Las metas constituyen lo que se desea lograr en una situación determinada.
- Los datos consisten en la información numérica o verbal disponible con que se cuenta para el análisis de la situación problema.
- Las restricciones son factores que limitan la vía para para llegar a una solución.
- Los métodos u operaciones son los procedimientos que deben aplicarse para resolver el problema.

Según Schrock (citado por Ceballos y Blanco, 2008) hay tres criterios que un problema debe cumplir:

- El alumno debe aceptar que estará implicado en el problema.
- El problema debe tener cierto grado de obstrucción y no poseer un método

para solucionar de inmediato el problema.

- Se debe explorar activamente el problema en busca de una solución.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios. Por tanto, un problema es una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos y buscar relaciones nuevas entre ellos.

En este proyecto se toma como definición de problema el concepto según Simon, H y Newell, A (1970).

Resolución de problemas

El MEN (2006) establece la RP como un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas, que podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, debido a que los problemas proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido.

Santos (2007) reporta que varias propuestas curriculares explícitamente identifican a la resolución de problemas como una actividad central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Lesh & Zawojewski (Citados por Murcia, S., y Valdivieso, M., 2013) consideran la RP como “El proceso de interpretar un problema matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas” (p. 782).

Poggioli (2009) afirma que “la resolución de problemas, consiste en un conjunto de actividades mentales y conductuales, a la vez que implica también factores de naturaleza cognoscitiva, afectiva y motivacional” (p. 11).

El MEN (2006) establece que la RP requiere de flexibilidad y apertura a nuevas alternativas no necesariamente conocidas, que posibiliten un aprendizaje permanente mediante la búsqueda de un procedimiento adecuado; es decir, el establecimiento de una metodología para la acción y el desarrollo de unas habilidades y actitudes que permitan enfrentar de forma crítica y organizada la realidad para encontrar soluciones con sentido.

En este proyecto se acoge a la definición expuesta por el MEN acerca de la RP.

Heurísticas

Polya (1945) plantea ciertas etapas en la resolución de problemas matemáticos, las cuales se pueden considerar como la descripción de la forma de actuar de un resolutor.

Tversky y Kahneman (como se citó en Arce, et al. 2003) afirman que el término heurístico se refiere a una estrategia, basada en una evaluación natural para realizar estimaciones o predicciones, centradas en las posibilidades más relevantes para la resolución del problema.

Estrategias heurísticas de Polya

Polya (1945) expone el uso de estrategias para la resolución de problemas matemáticos, concibiéndolo como un dialogo a partir de preguntas como ¿Por dónde debo empezar? ¿Qué puedo hacer? ¿Qué gano haciendo esto? y propone cuatro fases: Comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.

Comprender el problema: Según Polya (1945) las preguntas anteriormente mencionadas le permite al estudiante comprender la información suministrada, comenzando por el enunciado del problema, tratando de visualizar el problema como un todo, sin ocuparse de los detalles por el momento, además, la atención dedicada al problema puede estimular su memoria y prepararla para recoger los puntos importantes.

Concebir un plan: Polya (1945) propone:

- Empezar nuevamente por el enunciado. Empezar cuando dicho enunciado resulte tan claro y lo tenga tan bien grabado en su mente, que pueda perderlo de vista sin temor de perderlo por completo.

- Aislar las principales partes del problema. La incógnita, los datos y las condiciones que son las principales partes de un problema por resolver.

- Preparar y aclarar detalles que probablemente estarán en juego más tarde.

Ejecutar el plan: Polya (1945) indica:

- Comenzar por considerar las partes principales del problema, por lo tanto, se debe empezar cuando dichas partes estén, claramente dispuestas y concebidas, gracias al trabajo realizado previamente, y cuando se considera que la memoria responde. Es recomendable comenzar cuando se pueda suplir los detalles menores que pueden necesitarse, asegurándose de tener la plena comprensión del problema.

- Considerar el problema desde varios puntos de vista, buscando puntos de contacto con los conocimientos previamente adquiridos. Si el problema es complejo, se pueden distinguir “grandes” pasos y “pequeños” pasos, comprobando primero los grandes pasos y después considerar los menores.

- Una presentación de la solución en la cual la exactitud y corrección de cada paso no ofrece ningún error.

Visión retrospectiva:

- Redactar la solución, completa y correcta con todos los detalles.

- Considerar la solución desde varios puntos de vista y buscar los puntos de contacto con sus conocimientos previamente adquiridos, considerando los detalles de la solución y hacerlos sencillos, tratar de mejorar la solución de tal modo que se adivine por sí misma en forma natural, en el cuadro de los conocimientos previos. Se debe examinar

atentamente el método que le ha dado solución, tratando de captar la razón de ser y tratar de aplicarlo a otros problemas.

- Se puede encontrar una solución mejor y diferente, descubrir nuevos hechos interesantes, adquiriendo así una serie de conocimientos correctamente ordenados, con la posibilidad de ser usados en cualquier momento, a la vez que se desarrolla una aptitud en la resolución de problemas.

Estrategias heurísticas de Schoenfeld

Schoenfeld (como se citó en Barrantes, 2006) plantea... saber cómo usarlas, y tener la habilidad para hacerlo, por lo cual desarrolla una estrategia directiva de cinco fases, las cuales se desarrollan de acuerdo a las necesidades de quien resuelve problemas, a través de métodos heurísticos.

Métodos heurísticos

Schoenfeld (1985) afirma que cada tipo de problema necesita de heurísticas particulares, por lo cual establece cinco fases.

Análisis: Esta fase pretende comprender el problema y adquirir conciencia de él examinando los datos, los factores desconocidos, simplifica el problema reformulándolo sin perder la finalidad. Algunos heurísticos relevantes para esta primera fase son:

- Trazar diagramas si es necesario.
- Examinar los casos especiales y para ello:
 - a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema.
 - b) Examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades.
 - c) Asignar a los parámetros valores y buscar una pauta inductiva.
- Simplificar el problema sacando partido de posibles simetrías, o mediante razonamientos sin pérdida de generalidad (incluidos los cambios de escala).

Diseño: Consiste en mantener una visión general del proceso de solución de problemas, desarrollando un amplio plan sobre el modo en que se va a proceder y asegurarse de que los cálculos detallados no se efectúan de modo prematuro. En esta fase se aplican pocas matemáticas, sin embargo, quien soluciona el problema recurre siempre a ellas para controlar el proceso. La fase de diseño constituye un “monitor a nivel superior” periódico para todo el proceso. No se sugieren heurísticos específicos.

Exploración: La exploración se elige cuando el problema presenta dificultades y no se dispone de un plan claro que pueda producir directamente una solución. Quien soluciona el problema puede recurrir a la fase de diseño para considerar qué es lo que debe hacer a continuación, o incluso puede volver a la fase de análisis para pensar sobre un problema afín recién formulado o sobre el viejo problema. La exploración nos plantea tres pasos heurísticos de creciente concreción:

- Examinar problemas esencialmente equivalentes. Con varios métodos:
 - a) Por sustitución de las condiciones por otras equivalentes.
 - b) Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.
 - c) Introduciendo elementos auxiliares.
 - d) Replanteando el problema mediante el cambio de perspectiva o notación, considerando el razonamiento por contradicción y suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.
- Examinar problemas ligeramente modificados. También con varios métodos:
 - a) Eligiendo sub objetivos (por satisfacción parcial de las condiciones).
 - b) Relajando una condición y tratando de volverla a imponer.
 - c) Descomponiendo el problema en casos y estudiando caso por caso.
- Examinar problemas ampliamente modificados. Para ello podemos:

- a) Construir problemas análogos con menos variables.
- b) Mantener fijas todas las variables menos una, para determinar qué efectos tiene esa variable.
- c) Tratar de sacar partido de problemas afines que tengan parecida forma, datos o conclusiones

Realización: Refleja la decisión de que se dispone de un plan que debería conducir a una solución en caso de llevarse a cabo. El resultado de la realización es una solución provisional del problema. No se sugieren heurísticos para la realización.

Verificación: El objetivo de esta fase consiste en controlar la solución. Heurísticos como los citados a continuación son propios de esta fase:

- ¿Verifica la solución obtenida los siguientes criterios específicos?
- ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
- ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
- ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
- ¿Verifica los criterios generales siguientes?
- ¿Es posible obtener la solución por otro método?
- ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
- ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
- ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Pensamiento Numérico

Este pensamiento se centra en las representaciones y significados de los números, su uso en diferentes contextos, la forma como el estudiante percibe este conocimiento a lo largo de su época escolar.

El MEN (1998), establece algunos de los aspectos fundamentales del pensamiento numérico “constituido por el uso significativo de los números y el sentido numérico decimal, [...] para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas” (p. 17).

Para McIntosh (citado por El MEN, 1998) el pensamiento numérico hace referencia a la comprensión general que se tiene sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad de usar este tipo de comprensiones para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para el manejo de números y operaciones.

Por lo tanto, la invención y aplicación de algoritmos revela aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición y la recomposición, y la comprensión de propiedades numéricas, permitiendo así la reflexión sobre las respuestas.

Pensamiento variacional

El desarrollo del pensamiento variacional se ubica en el dominio del campo conceptual, incluyendo procedimientos inter estructurados y vinculados permitiendo analizar y organizar matemáticamente problemas (MEN, 1998).

(MEN, 2006, p.66) indica que:

El pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos.

De acuerdo al MEN (2006) el pensamiento variacional involucra conceptos en relación a el “*reconocimiento, percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación*”

en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos”.

Reconociendo el pensamiento variacional como “*una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas [...]* Vasco (2003), en el cual el proceso mental que realiza el estudiante tiene que ver con el *momento de captación de lo que cambia y lo que permanece constante*; desarrollado desde los diferentes pensamientos: el pensamiento numérico (donde se fija la atención en la manera como varían los números figurados pitagóricos) , espacial (se acentúan los movimientos las transformaciones y los cambios, no a las figuras estáticas sino a sus nombres y propiedades y se fija la atención en las variaciones implícitas de ese pensamiento temporal), geométrico (tomado dinámicamente, es atender a la variación del área, es decir; la variación de los lados y ángulos correspondientes), métrico (haciendo referencia a la diferenciación entre magnitudes, cantidades de las magnitudes, medición inicial no numérica (visual) de esas cantidades, ordenación de las mismas y medición numérica) y las proporciones (no definiéndola como la proporción vista desde la igualdad entre dos razones, en el cual, este se refiere a la representación de la proporción, en cambio la proporción que se establece es la covariación entre las magnitudes que se consideran proporcionales, es decir, la covariación positiva (proporción directa) y la covariación inversa (proporcionalidad inversa), que pueden aumentar o disminuir).

Capítulo 3

Metodología

Para alcanzar los objetivos y dar respuesta a la pregunta de investigación, en relación con el enfoque investigativo y el marco teórico, se propone definir diferentes fases, herramientas y actividades en coherencia con la propuesta planteada y la investigación cualitativa por su cercanía a la contribución de la comprensión de los fenómenos que ocurren en el aula, y la forma de aproximarse conceptualmente a la realidad humana y social.

Marco institucional

Este proyecto de investigación se desarrolló en la I.E.R.P.G del municipio de Mutatá, en la que se concibe el aprendizaje de las Matemáticas fundamental para el desarrollo de esquemas y estructuras mentales en pro de cualificar los procesos de comprensión para un uso efectivo del conocimiento.

En su diseño curricular la institución en el plan de incorpora los siguientes pensamientos matemáticos como base de la formación y la acción pedagógica, pensamiento numérico y sistema numérico, pensamiento espacial y sistema geométrico, pensamiento métrico y sistema de medidas, pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

El pensamiento NV aporta elementos prioritarios y de juicio para reconocer y comprender de manera adecuada las propiedades como la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, los cuales son, fundamentos de juicio que poseen su cimiento en experiencias numéricas y algebraicas, permitiendo el paso de situaciones concretas e intuitivas a situaciones formales.

De esta forma se propone formar un estudiante con habilidades y destrezas en la resolución de problemas, con un buen nivel en las elaboraciones conceptuales y procedimentales.

Investigación cualitativa

Se desarrollará una investigación de tipo cualitativa, de corte descriptivo e interpretativo, debido a la importancia del contexto en el cual ocurren los acontecimientos. Según (Sampieri, Fernández y Baptista, 2006) “la investigación cualitativa utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación”. (p. 49)

En este sentido la investigación cualitativa permite describir, analizar e interpretar las heurísticas que utilizan los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos.

Población

La investigación se realiza con estudiantes del grado 9° de la I.E.R.P.G El curso está conformado por 36 estudiantes y sus edades oscilan entre los 14 y 17 años y predomina el género masculino, la mayoría de los estudiantes son de estrato económico 1.

Fases y Actividades

Para obtener datos que permitan indagar, explorar, describir y analizar las heurísticas en relación al componente NV, se diseña una estrategia didáctica basada en resolución de problemas el cual le permita a los estudiantes desarrollar habilidades y destrezas matemáticas que contribuyan a mejorar el nivel en los procesos resolutivos que realizan los estudiantes en el aula de clase.

Para el proceso de la investigación cualitativa Gonzales (2007) plantea cuatro fases: Preparatoria, trabajo de campo, análisis de información e informativas, el cual se abordan en este proyecto de investigación.

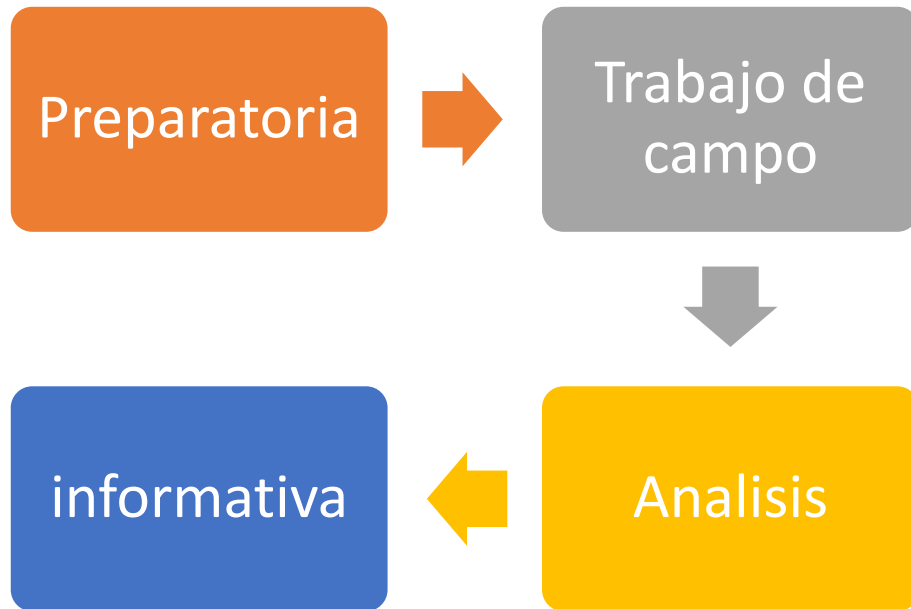


Figura 9. Fases de la investigación cualitativa. Elaboración propia

Fase N°1: preparatoria. Se considera como etapa de la reflexión y el diseño de la investigación, se reflexiona principalmente el marco teórico-conceptual desde donde parte la investigación. Son determinantes formación investigadora, sus conocimientos, experiencias e ideologías.

Fase N°2: Trabajo de campo. En esta fase se recoge la información necesaria para organizarla y archivarla. El conocimiento de bases teóricas y metodológicas favorece el proceso. De igual manera, la paciencia, la flexibilidad y la capacidad de adaptación en el acceso al campo de trabajo y la productiva recogida de información enfrenta a las estudiantes en formación con los crecimientos y el medio.

Fase N°3: Análisis de información. Esta fase se lleva a cabo durante la recogida de información y posteriormente se realiza:

- La reducción de datos.
- La disposición y transformación de los mismos.
- La obtención de resultados y verificación de conclusiones.

A continuación, se procede a comentar lo que se hizo en cada una de las fases.

Fase 1: Preparatoria.

Actividad 1: Reflexión teórica y práctica: En esta fase se desarrolla un proceso de reflexión que inició el día 7 de marzo de 2018 con la revisión a diferentes instrumentos como: el PEI, PIA y un análisis a los resultados de las prueba icfes (2015, 2016 y 2017) lo que nos permitió advertir las debilidades que presentan los estudiantes en referencia a la resolución de problemas y el componente NV.

Continuamos con las observaciones de clase desde el 7 de marzo hasta el 6 de junio del 2018 al maestro cooperador y finalizamos con la implementación de la estrategia didáctica a partir del 24 de julio hasta el 23 de noviembre del 2018. En esta fase se desarrolla un proceso de reflexión en el cual se determinó el tópico a trabajar en el proyecto de investigación.

En este proceso, pensamos en escoger un tema el cual permitiera mejorar una dificultad que tuvieran los estudiantes para adquirir un aprendizaje del área de Matemática.

Actividad 2: Prueba diagnóstica: La prueba diagnóstica implementada contiene cinco problemas con contenidos como: sistemas de ecuaciones, expresiones algebraicas, potenciación, radicación, variación, operaciones entre expresiones. Los problemas fueron resueltos por los estudiantes de forma individual y grupal, esta prueba permitió conocer algunas dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas matemáticos de tipo NV.

Realizamos una entrevista semiestructurada cuyo objetivo es evidenciar cómo los estudiantes abordaron las preguntas, escriben las expresiones, realizan los procesos y como conciben las matemáticas en el diario vivir.

Por lo anterior, como futuras docentes, formulamos una propuesta que contribuya a formar docentes críticos, que cree en ellos una necesidad de pensarse la educación y la enseñanza de la matemática, que más allá de saber el qué se va a enseñar, se presente una práctica pedagógica la cual haga repensar el para qué y cómo enseño.

Actividad 3: Recolección de la información. Para recolectar información llevamos a cabo algunas actividades, como lo fue el rastreo bibliográfico de los referentes teóricos sobre la resolución de problemas desde las heurísticas de Schoenfeld en la enseñanza y el aprendizaje del componente NV, esto nos permitió reconocer las investigaciones preliminares en este campo.

Actividad 4: Revisión de documentos: Fue orientada a la exploración de información teórica (Resolución de problemas, componente NV y las heurísticas de Schoenfeld) y documentos propios de la institución (PEI, PIA).

En un primer momento, la información teórica, la reunimos a partir de la base de datos como: Dialnet, Springer y Scielo, además utilizamos algunos documentos encontrados a partir de la búsqueda de información en Google Académico.

En un segundo momento, los documentos encontrados fueron clasificados de la siguiente manera: Heurísticas de Polya y Schoenfeld, resolución de problemas e investigaciones encaminadas a fortalecer el componente NV y la importancia de dicho componente en la matemática, así mismo fueron revisadas investigaciones referentes a la metodología cualitativa la cual se va a utilizar en este proyecto de investigación.

Una vez realizada la clasificación de los documentos, se inició la lectura para extraer las ideas que para las maestras en formación fueron tomados como claves para la construcción de la justificación, marco teórico y antecedentes.

Actividad 5: Observación y registro de la clase: Se establecen acuerdos con el maestro cooperador de la forma en cómo se realizará el proceso de registro de la clase, al igual que las intervenciones en el aula y se da inicio a la observación.

Los datos recopilados en las observaciones de clase se organizaron de la siguiente manera: Se crea un archivo en Word en el que se transcriben cada una de las observaciones. De las transcripciones se extrajeron fragmentos para categorizarlos de acuerdo a las estrategias didácticas usadas por el docente y las empleadas por los estudiantes en el momento de resolver problemas.

Fase 2: Trabajo de campo.

Actividad 1: Observaciones de clase. El acceso al campo se desarrolló en dos momentos.

En un primer momento se da inicio a las observaciones las cuales permiten reconocer algunas prácticas y comportamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas, ello permitió evidenciar las dificultades que presentan para obtener un resultado.

De este modo, se empieza a clasificar las estrategias que utilizan los estudiantes en el momento de resolver problemas y se da respuesta al objetivo “caracterizar las heurísticas usadas por los estudiantes para resolver problemas con base al pensamiento NV”.

En un segundo momento, se inicia la intervención en el aula, desarrollando las diferentes actividades que proponía la estrategia didáctica basada en la resolución de problemas en torno al componente NV.

Esta fase permitió dar respuesta a la pregunta de intervención ¿Cómo lograr aprendizaje del pensamiento NV en los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Rural Pavarandó Grande a través de la resolución de problema desde las heurísticas de Schoenfeld?, y corroborar el objetivo planteado anteriormente.

Actividad 2: Diseño. Estamos interesadas en evidenciar la forma en que los estudiantes utilizan las heurísticas cuando abordan problemas sobre sistemas de ecuaciones, expresiones algebraicas, operaciones con expresiones algebraicas, potenciación y radicación entre otras temáticas que contribuyen al fortalecimiento del componente numérico y el variacional.

En esta etapa diseñamos e implementamos una actividad con material que involucra los conocimientos que deben tener los estudiantes para un manejo de la matemática. El material es una estrategia didáctica en cuanto es una de las fuentes que conlleva al

desarrollo del conocimiento matemático, además, guía al estudiante hacia el uso de las heurísticas.

Es importante anotar que como estrategia didáctica también hacen parte las entrevistas, encuestas y prueba diagnóstica realizadas a los estudiantes.

En esta fase se cumple el objetivo de “diseñar e implementar una estrategia didáctica basada en las heurísticas de Schoenfeld para la resolución de problemas relacionados con el pensamiento NV”

Actividad 3: Descripción del material. En esta fase se explora y describe lo que hacen los estudiantes con el material y cómo este permite interpretar, indagar, explorar, describir, analizar y fortalecer el pensamiento NV.

A continuación, se hace una descripción de los materiales, al igual que se presenta una ilustración del diseño de cada uno de estos.

- La caja de polinomio permite representar polinomios, realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios al igual que factorizar los polinomios, todas estas operaciones son realizadas en el plano cartesiano, el cual se pueden representar polinomios con coeficiente enteros negativos.

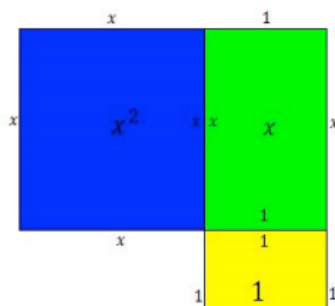


Figura 10. Caja de polinomios

- Tableproblemanía funciona al tirar el dado los estudiantes recorren las casillas que contienen preguntas sobre resolución de problemas al igual que algunos comodines que ayudan a avanzar sobre las asillas.

Esta herramienta permite que los estudiantes resuelvan problemas de tipo NV y al mismo tiempo comparen y verifiquen resultados a través de la realización de procedimientos algoritmos, establezcan relaciones entre operaciones y ecuaciones, formulen hipótesis, entre otras procesos que realizan los estudiantes en el momento resuelven los problemas por medio de las heurísticas de Schoenfeld.



Figura 11. Tableproblemanía

- La actividad bingo lenguaje es una herramienta que no funciona con las reglas tradicionales del bingo. Se leen cada una de las expresiones en lenguaje matemático contenidas en fichas y los estudiantes en otras fichas en blanco escriben la expresión mencionada en lenguaje algebraico. Esta actividad permite a los estudiantes manipular cantidades desconocidas mediante la traducción de

números y símbolos para formular ecuaciones y así generalizar propiedades y operaciones algebraicas.

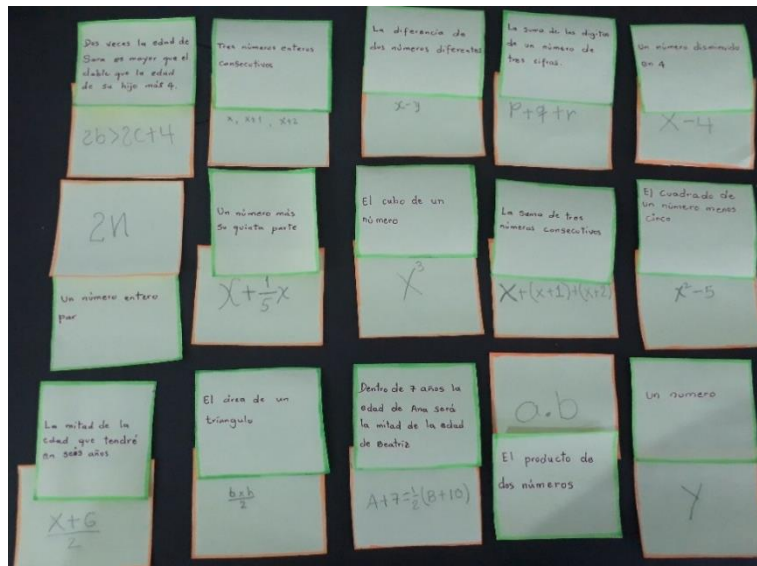


Figura 12. Bingo lenguaje

- Las tablas de ecuaciones consisten en una rejilla con 19 casillas con objetos que representan diferentes cifras que son el resultado de la suma de cada fila y columna, se debe encontrar el valor de cada objeto (variable), esta actividad le posibilita a los estudiantes plantear ecuaciones mediante el uso de las diferentes variables y de esta forma potenciar el pensamiento matemático y la resolución de problemas.

				61
				70
				65
38	69	40	49	

Figura 13. Tabla de ecuaciones

Fase 3: Proceso de análisis de instrumento.

Actividad 1: Entrevista. Realizamos una entrevista al maestro cooperador, antes de la intervención en el aula (febrero 2018), esta permitió darnos cuenta que el docente no emplea materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas, no hace uso de heurísticas en los procesos de resolución de problemas, entre otros aspectos importantes los cuales no impactan de manera positiva en los estudiantes en relación a la adquisición de destrezas matemáticas.

Capítulo 4

Análisis de resultados

De los problemas planteados en la estrategia didáctica, seleccionamos tres para el análisis de este proyecto de investigación, de igual forma realizamos una evaluación de la estrategia didáctica.

Para el análisis de las soluciones obtenidas de los problemas planteados se utilizan cinco categorías: análisis, exploración, ejecución, diseño y comprobación de las soluciones obtenidas, cabe resaltar que estas categorías son tomadas de las fases que propone Shoenfeld (1985), la cual están planteadas en la siguiente tabla.

Tabla 9.

Estrategias heurísticas

Fases	<u>Pautas y/o interrogantes</u>
Análisis	<p>Trazar un diagrama si es posible</p> <p>Examinar casos particulares, para ello:</p> <ul style="list-style-type: none">• Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema• Examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades• Asignar a los parámetros valores y buscar una pauta inductiva <p>Probar a simplificar el problema</p>
Exploración	<p>Examinar problemas esencialmente equivalentes: Sustituyendo condiciones por otras equivalentes, reconociendo los elementos del problema</p>

Examinar problemas ligeramente modificados: Establecer objetivos, descomponer el problema en casos y analizar caso por caso

Examinar problemas ampliamente modificados: Construir problemas semejantes con menos variables, tratar de sacar partido de problemas a fines respecto a la forma, los datos o las conclusiones

Diseño	Examinar que la solución sea lógica Encontrar un plan o alternativa de solución diferente
Ejecución	Examinar que cada uno de los pasos sea correcto Examinar si lo que se obtuvo es la solución
Comprobación de la solución obtenida	¿Utiliza todos los datos pertinentes? ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables? ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala? ¿Es posible obtener la misma solución por otro método? ¿Puede quedar concretada en casos particulares? ¿Es posible reducirla a resultados conocidos? ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Problema 1: Ecuaciones

Fecha: 25 de septiembre de 2018

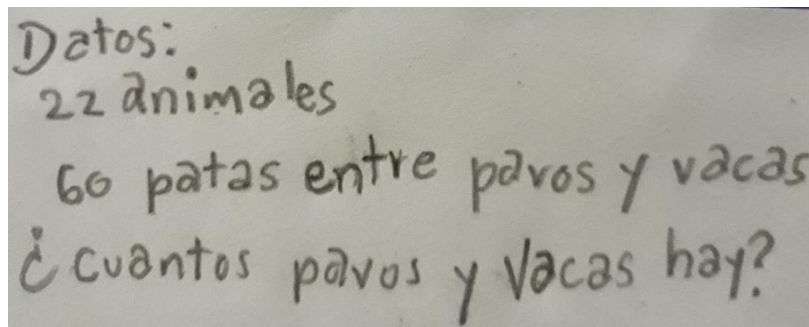
Objetivo: Plantea y resuelve ecuaciones haciendo uso de diferentes métodos

Materiales: Guía de la actividad, tabla de ecuaciones y bingo lenguaje

En una clase de ciencias naturales el tema era sobre cuántos animales domésticos había en la vereda. Camila una estudiante de la clase expresó lo siguiente: en la finca de mi papá hay pavos y vacas, entre los dos hay 22 animales y a su vez afirmó que el total de patas es 60 ¿Cuántos pavos y vacas hay en la finca del papá de Camila?

Figura 14. Pregunta 1

En la figura 15, los estudiantes escriben los datos que plantea el problema 1



Datos:
22 animales
60 patas entre pavos y vacas
¿Cuántos pavos y vacas hay?

Figura 15. Replanteamiento de los estudiantes a la pregunta 1

En la figura 16, los estudiantes resuelven el problema 1 haciendo uso de algunas heurísticas.

H	Pavos	Patas	Vacas	Patas	Total patas
22)	44	0	0	44
21)	42	1	4	46
20)	40	2	8	48
19)	38	3	12	50
18)	36	4	16	52
17)	34	5	20	54
16)	32	6	24	56
15)	30	7	28	58
14)	28	8	32	60

En la finca del papa de Camila hay 14 pavos y 8 vacas

Figura 16. Tabla realizada por los estudiantes para responder la pregunta 1

En la tabla 10, se muestra el análisis que se le hace a las respuestas que obtienen los estudiantes de la pregunta 1.

Tabla 10.

Estrategias heurísticas

Análisis	Exploración	Diseño	Ejecución	Comprobación
Con la ayuda de una tabla los estudiantes logran visualizar el patrón que determina la cantidad de vacas y pavos.	Se observa una organización de los datos teniendo en cuenta cada una de las variables. No hacen uso de un algoritmo o ecuación matemática conocido en donde utilicen menos variables.	Proporcionan varias alternativas de solución posible, probando cada una hasta llegar a la respuesta correcta.	Los estudiantes replantean el problema por medio de una tabla en donde no se observan ecuaciones, pero realizan operaciones implícitamente y obtienen la respuesta correcta a través de un	Se evidencia comprensión del enunciado puesto a que utilizan datos pertinentes y razonables.

razonamiento

lógico y deductivo.

Discusión y caracterización de heurísticas

Lo realizado por los estudiantes evidencia que utilizan el ensayo y el error como una aproximación y exploración a la respuesta del problema. Al asumir valores tentativos se

logra encontrar una relación entre los datos y el resultado, lo que indica que este método es también apropiado en la resolución de problemas.

En el proceso de resolución del problema los estudiantes utilizan varias heurísticas como: Trazar un diagrama, escribir y utilizar los datos y descomposición del problema en

casos. Los resultados satisfacen los objetivos planteados, puesto que es evidente el uso de algunas heurísticas en la solución de problemas.

La estrategia didáctica permite que los estudiantes asuman diferentes valores de acuerdo a las condiciones del problema, como también les ayuda a realizar estrategias las cuales permiten obtener la solución.

Los estudiantes obtienen respuestas no a través de la implementación de operaciones concretas, sino mediante la escritura de expresiones numéricas que reflejan tales operaciones.

Lo anterior indica que el uso de diagramas pueden hacer claro un cierto aspecto del problema y contribuyen una manera de relacionar el conocimiento matemático de los estudiantes con el problema propuesto.

En la figura 12, los estudiantes resuelven de manera diferente el problema 1, es decir, hacen uso de otra estrategia para dar respuesta al problema.

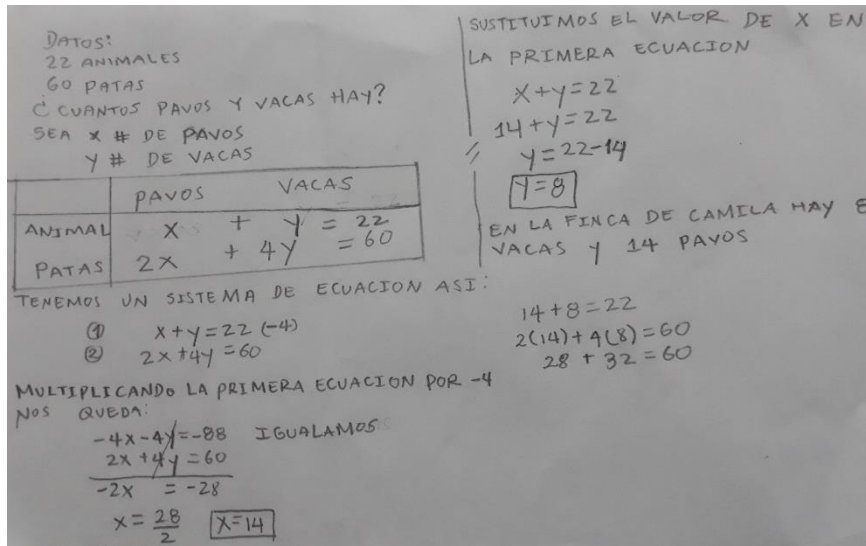


Figura 17. Respuesta de los estudiantes del grado 9° a la pregunta 1

En la tabla 11, se muestra el análisis que se hace a la respuesta dada por los estudiantes a la pregunta 1, correspondiente a la figura 12.

Tabla 11.

Estrategias heurísticas

Análisis	Exploración	Diseño	Ejecución	Comprobación
En la figura 10 se observa que los estudiantes examinan y organizan cada una de las variables haciendo uso de un diagrama.	El problema es descompuesto en casos particulares. Sustituye unas condiciones por otras y reconoce las condiciones del problema.	Utilizan una alternativa de solución conocida, en donde paso a paso y con el uso de operaciones y procedimientos	Plantea ecuaciones y sistemas de ecuaciones que al resolverla permite obtener una respuesta correcta dando solución al problema.	El problema es resuelto de manera correcta. Además los estudiantes realizan una verificación sustituyendo con los datos de las

resuelve el	variables
problema.	obtenidas.

Discusión y caracterización de heurísticas

Se observa como los estudiantes emplean ecuaciones, construyen una representación mental y luego elaboran una especie de modelos mentales como marco explicativo de dicho conocimiento.

Lo anterior quiere decir que el problema planteado es una estrategia que lleva a relacionar los conocimientos en uso y los nuevos conocimientos con los que el problema es resuelto.

Así, durante el proceso de resolución del problema los estudiantes potencializaron el uso de estrategias heurísticas y al mismo tiempo fortalecen el pensamiento NV, logro realizado a través de la interacción entre ellos, el intercambio de ideas y la puesta en escena de los conocimientos adquiridos.

La estrategia didáctica, lleva a los estudiantes a plantear como estrategia heurística un sistema de ecuaciones donde x representa la cantidad de pavos mientras y representa la cantidad de vacas.

Los estudiantes realizan un análisis previo del problema y utilizan la heurística de *desarrollar un plan*; logrando así, identificar todos los datos que aporta el problema para luego hacer uso de los recursos matemáticos que disponen y de esta manera poder plantear las igualdades. De igual forma, plantean un sistema de ecuaciones de primer grado, donde aplican el método de sustitución a través del cual obtienen una respuesta coherente conforme a la pregunta planteada por el problema.

La figura 18, muestra otra respuesta diferente al problema 1.

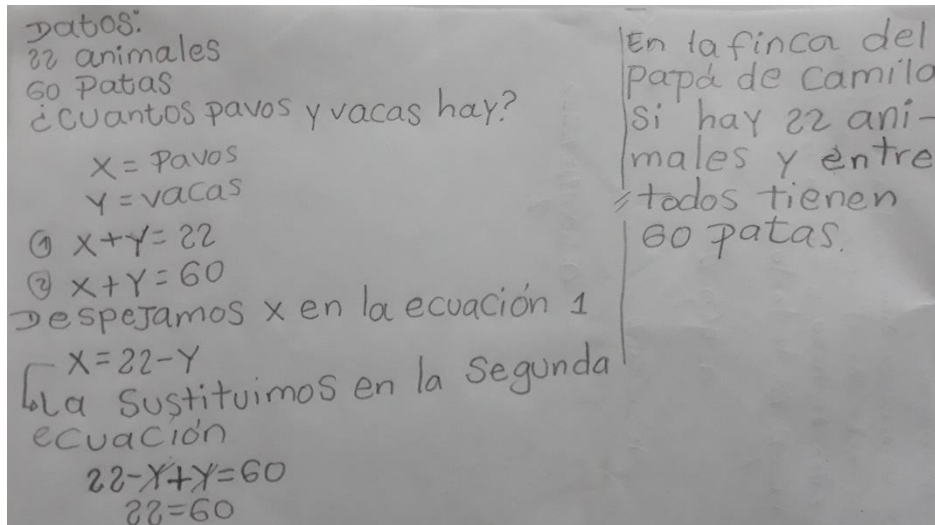


Figura 18. Respuesta de los estudiantes a la pregunta 1

En la tabla 12 se realizan los análisis pertinentes de acuerdo a la respuesta dada por los estudiantes al problema 1 referente a la figura 18

Tabla 12.

Estrategias heurísticas

Análisis	Exploración	Diseño	Ejecución	Comprobación
De acuerdo a la figura 18, los estudiantes plantean bien los datos pero simplifica demasiado el problema lo que conlleva a	Utilizan menos variables pero se evidencia que los estudiantes no escriben los algoritmos correctos que los conlleven a una solución para	Traducen el lenguaje formal al lenguaje algebraico, pero se evidencia que no logran comprender el problema en su totalidad, por lo	Hacen uso de algoritmos y ecuaciones que desde el primer momento son mal planteadas lo que los conlleva a obtener un	Emplean un método conocido pero de acuerdo a la solución se evidencia poca comprensión del enunciado, además no

plantear mal el sistema de ecuación.	alcanzar la respuesta.	que la representación de las ecuaciones no es la apropiada.	resultado incorrecto.	comprueban el resultado obtenido el cual les permita garantizar que esta correcta la solución.
--------------------------------------	------------------------	---	-----------------------	--

Discusión y caracterización de heurísticas

Los estudiantes no relacionan de manera correcta las variables con las ecuaciones planteadas, es decir, no logran comprender que existe una contradicción entre las dos ecuaciones puesto que estas deben ser diferentes más sin embargo, las plantean todas dos de la misma forma. Lo anterior indica que no tienen claridad en el concepto de igualdad matemática, es por ello que al plantear el problema no permite que ellos comprendan con facilidad lo que se debe hacer.

Aunque los estudiantes utilizan el planteamiento de ecuaciones para dar solución al problema, no verifican en el enunciado del problema las condiciones para la obtención de un resultado, se evidencia que los recursos matemáticos que disponían eran necesarios para dar solución al problema, sin embargo, no los utilizan.

En muchas ocasiones, el proceso de resolución de un problema implica exploración del contexto, es decir, ir más allá de lo que plantea el enunciado, buscar otras alternativas o interpretar y clarificar lo que se explicita.

Problema 2: Sistema de ecuaciones.

Objetivo: Resolver problemas haciendo uso de los sistemas de ecuación y sus métodos

Materiales: Guía de la actividad y tabla de ecuaciones

Un operario nos pide calcular las medidas de un campo de futbol y para ello proporciona los siguientes datos: La relación entre lo ancho y lo largo menos 20 metros es igual a un medio. A sí mismo la suma del ancho y largo de la cancha es de 170 metros. ¿Cuáles son las medidas del campo de futbol?

Figura 19. Pregunta 2

La figura 20, muestra que los estudiantes plantean el problema 2.

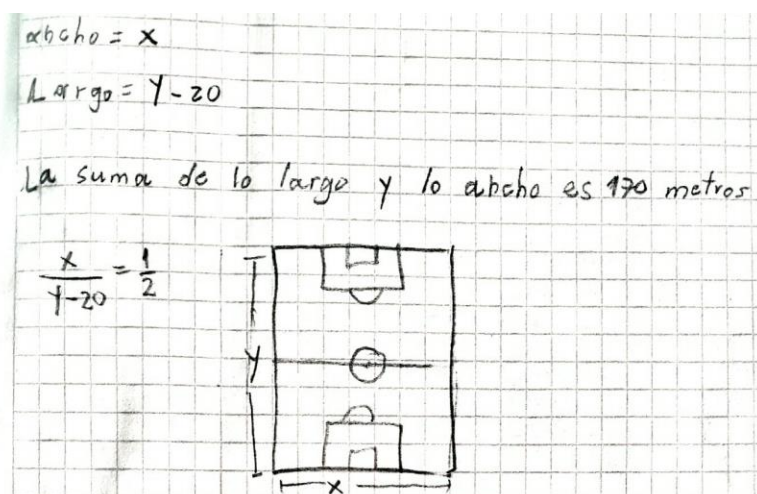


Figura 20. Replanteamiento de los estudiantes a la pregunta

En la figura 21 realizan operaciones pertinentes para llegar a una solución.

$$x = 170 - y$$
$$\frac{x}{y-20} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{170-y}{y-20} = \frac{1}{2}$$

Figura 21. Planteamiento de ecuaciones de los estudiantes a la pregunta 2

La figura 22 da evidencia del uso de las operaciones y algunas heurísticas que utilizan los estudiantes para resolver lo planteado anteriormente.

$X + Y = 170 \text{ m}$
 $X - Y = 20$
 $70 + 100 = 170 \text{ m}$
 $60 + 110 = 170 \text{ m}$
 $50 + 120 = 170 \text{ m}$
 $40 + 130 = 170 \text{ m}$
 $30 + 140 = 170 \text{ m}$
 $20 + 150 = 170 \text{ m}$
 $10 + 160 = 170 \text{ m}$

$\frac{90}{100-20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{90}{80} = \frac{1}{2}$
 $\frac{60}{110-20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{60}{90} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{10}{15} = \frac{1}{2}$
 $\frac{50}{120-20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Como la igualdad es correcta
 entonces: $X = 50$ y $Y = 120$
 las medidas del campo de futbol
 son 50m de ancho por 120m de
 largo

Figura 22. Respuesta a la pregunta 2

En la tabla 13 se presentan los análisis respectivos a la respuesta dada por los estudiantes del problema 2. Referente a la figura 22.

Tabla 13.

Estrategias heurísticas

Análisis	Exploración	Diseño	Ejecución	Comprobación
De la figura 22 se observa que los estudiantes examinan los casos particulares del problema, lo que permite trazar un plan. Se evidencia la	Los estudiantes sustituyen condiciones por otras equivalentes, reconociendo los elementos del problema. Hacen uso de diagramas	Crean alternativas de solución diferentes a las aprendidas en clase, es decir, hacen uso de estrategias propias en la solución del	Por medio de operaciones sencillas como: adición, sustracción, división y simplificación de fracciones alcanza	Identifican que el cambio de escala es adecuado, debido que permite la solución del problema.

comprensión del problema.	en la resolución lo que evidencia la aplicación de un razonamiento matemático.	problema, en otras palabras utilizan originalidad y creatividad en la solución.	la respuesta correcta.
---------------------------	--	---	------------------------

Discusión y caracterización de heurísticas

Los resultados son satisfactorios de acuerdo con el objetivo planteado. Los estudiantes utilizan el significado de los números y sus operaciones, además comprenden el significado de una igualdad. Se evidencia creatividad en la estrategia realizada por parte de los estudiantes, pues a través de un razonamiento lógico comprueban y obtienen la solución correcta.

Los estudiantes plantean como estrategia heurística *encontrar un plan o alternativa de solución diferente* por medio del cual obtienen una respuesta correcta a lo planteado por el problema, lo anterior indica que hicieron un análisis al enunciado del problema y pudieron comprender lo que este proponía.

La figura 23 muestra las operaciones pertinentes realizadas por los estudiantes para llegar a una solución.

$$\frac{x}{y-20} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{170-y}{4-20} = \frac{1}{2}$$

Figura 23. Planteamiento de ecuaciones de los estudiantes a la pregunta 2

En la figura 24 se observa las estrategias heurísticas utilizadas por los estudiantes para resolver el problema.

metodo de igualación

$$2(170 - y) = 1(y - 20)$$

$$340 - 2y = y - 20$$

$$340 + 20 = y + 2y$$

$$360 = 3y$$

$$y = \frac{360}{3}$$

$$y = 120$$

$$x + y = 170 \text{ m} \Rightarrow \begin{aligned} x + 120 &= 170 \\ x &= 170 - 120 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Las medidas del campo de futbol son 120 m de largo por 50 m de ancho.

Figura 24. Respuesta a la pregunta 2

La tabla 14 muestra los análisis referentes a las respuestas dadas por los estudiantes en la resolución del problema anterior.

Tabla 14.

Estrategias heurísticas

Análisis	Exploración	Diseño	Ejecución	Comprobación
Los estudiantes no trazan un diagrama o dibujo como ayuda a una mejor comprensión del problema.	Se evidencia que construyen un problema semejante debido a que utiliza pocas variables.	Traducen el lenguaje formal que plantea el problema en un lenguaje algebraico que les permite comprender mejor el problema, lo que se evidencia en el desarrollo de la solución y en la respuesta obtenida.	En la resolución del problema los estudiantes a partir de la selección de unas ecuaciones plantean el método de igualación con el que llegan a la solución de problema y obtienen la respuesta correcta.	Obtienen el valor de unas de las variables del problema y la sustituyen en una de las ecuaciones para así conocer el valor de la otra variable, llegando de esta manera a la solución del problema.

Discusión y caracterización de heurísticas

Los estudiantes plantean las ecuaciones y utilizan como estrategia uno de los métodos de solución enseñados, finalmente lograron el objetivo propuesto que era resolver problemas haciendo uso de los sistemas de ecuación y sus métodos.

Es notorio como los estudiantes han llegado a comprender el significado y la importancia del uso de las de las letras y el cambio de registros convencionales con respecto a la aritmética. Los estudiantes han logrado fortalecer el pensamiento NV, ello debido a la capacidad mostrada para juzgar la equivalencia entre expresiones algebraicas y numéricas, realizando cálculos con las operaciones implicadas como conocimiento de la estructura aritmética.

Lo anterior reafirma que la implementación de estrategias heurísticas en la resolución de problemas en el aula de clases desarrolla habilidades y destrezas en los estudiantes y permite consolidar el pensamiento NV en la medida que le dan solución a los problemas.

Problema 3: Potenciación y radicación

Objetivo: Resolver problemas matemáticos a través de la potenciación.

Materiales: Guía de la actividad.

El día lunes, Carlos envía por whatsapp una reflexión a 3 de sus amigos. Al día siguiente de recibir la reflexión, cada uno de los receptores deben enviar el mensaje a 3 amigos distintos del que se la envió. ¿Al final del quinto día, cuántos mensajes de la reflexión se han enviado? ¿Cuántos mensajes en total fueron enviados?

Figura 25. Pregunta 3

En la figura 26 se observa el planteamiento que hacen los estudiantes al problema 3.

datos	
lunes	→ 3 mensajes
⋮	
viernes	→ ? mensajes

Figura 26. Planteamiento de la pregunta N°3

A continuación se presenta la respuesta dada por los estudiantes al problema 3, evidenciando el uso de heurísticas.

días	potencias	
1	3^1	3
2	3^2	9
3	3^3	27
4	3^4	81
5	3^5	243
		363

El total de los mensajes enviados es 363
 El primer día se enviaron 3 mensajes, el segundo día 9 mensajes, hasta llegar al quinto día con 243 mensajes.

Figura 27. Respuesta a la pregunta 3

La tabla 15 muestra los análisis hechos a la respuesta dada por los estudiantes al problema anterior.

Tabla 15.

Estrategias heurísticas

Análisis	Exploración	Diseño	Ejecución	Comprobación
Inicialmente escriben los datos del problema, luego clasifican los datos en una tabla que les ayuda a tener una mejor comprensión del problema planteado.	Utilizan dos estrategias equivalentes donde se evidencia la descomposición del problema por casos para analizarlos y sacar una conclusión.	Se evidencia que la solución del problema los estudiantes utilizan diferentes estrategias como: tablas, operaciones y análisis para obtener la respuesta que al final es correcta.	En la resolución del problema utilizan implícitamente multiplicación y adición que les ayuda a llegar a la respuesta correcta.	Reducen el problema a resultados ya conocidos, es decir, emplean estrategias ya utilizadas anteriormente.

Discusión y caracterización de heurísticas

Los estudiantes han comprendido el significado de los números y emplean operaciones como adición y multiplicación en el proceso de solución del problema. De igual manera comprendieron el enunciado puesto que especifican con palabras lo que plantea el enunciado del problema.

La importancia del pensamiento numérico radica en que uno de los objetivos es focalizar la atención en las propiedades de las estructuras matemáticas de los números enteros y cómo transformarlas en las operaciones requeridas en la solución de problemas.

Lo anterior contribuye a la adquisición de habilidades en los estudiantes, de forma tal que logran desarrollar simultáneamente el pensamiento variacional. En esta medida, se logra fortalecer el pensamiento NV cuando los estudiantes hacen uso de las heurísticas, tales como: Examinar problemas esencialmente equivalentes, sustituyendo condiciones por otras reconociendo los elementos del problema, trazar un plan, escribir los datos, comprender el enunciado del problema entre otras.

En la figura 28 se muestra las estrategias utilizadas por los estudiantes para dar solución al problema planteado.

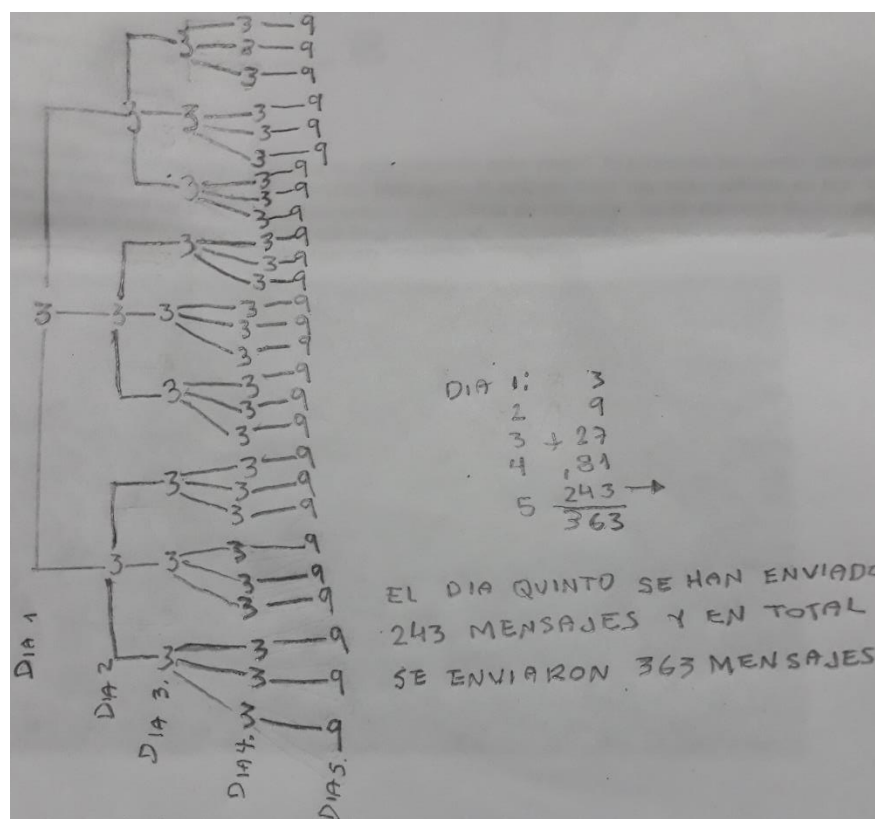


Figura 28. Diagrama arbolar realizado por los estudiantes para dar respuesta a la pregunta 3
 A continuación, se presenta los análisis realizados a las respuestas dadas por los estudiantes al problema anterior.

Tabla 16.*Estrategias heurísticas*

Análisis	Exploración	Diseño	Ejecución	Comprobación
No simplifican el problema lo que ocasiona el uso de muchos algoritmos.	Comprenden el enunciado del problema debido a que examinan el problema haciendo uso de una relación aunque algo extensa pero con un resultado correcto. Se evidencia que no utilizan ninguna clase de ecuación para llegar a la solución.	Escriben los datos del problema y los utilizan en su proceso de análisis. No hacen uso de tablas para una mejor organización de los datos, pero si utilizan un diagrama que les ayuda a resolver el problema.	Los estudiantes establecen una relación entre el día, la cantidad de amigo y el total de mensaje enviados cada día.	Identifican que hay una simetría por lo que reflexionan y se dan cuenta que la sumatoria de todos los datos es la solución correcta del problema.

Discusión y caracterización de heurísticas

Por los resultados obtenidos, se puede deducir que en el caso de la potenciación la mayoría de los estudiantes hicieron uso de otras estrategias como representar el problema de forma real, lo que resulta pertinente en la resolución de problemas matemáticos.

Lo anterior implica no solo la capacidad de análisis de los estudiantes basada en la información que aparece en el enunciado, sino también que se involucran heurísticas que han sido utilizadas en la solución de otros problemas.

Los estudiantes hacen uso de un diagrama en donde relacionan los días, la cantidad de amigos y el total de mensajes enviados, así mismo, implícitamente constatan que la multiplicación es el resultado de sumar un mismo valor la cantidad de veces que indica otro valor.

El problema anterior es una estrategia didáctica que permite que los estudiantes desarrollen la imaginación y creatividad, en la medida que construyen sus propios procesos en el momento de resolver problemas.

Resumen de la caracterización de heurísticas

De acuerdo a las discusiones, a los análisis de resultados de los problemas realizamos la categorización de las heurísticas utilizadas por los estudiantes según la conceptualización de Schoenfeld (1985). En la tabla se observa las heurísticas que más utilizaban los estudiantes.

Tabla 17.

Caracterización de las heurísticas.

Categoría	Nunca	A Veces	Casi Siempre	Siempre
Trazar un diagrama				X
Comprender el problema			X	
Simplificar el problema		X		
Emplear un plan			X	
Replantear el problema			X	

Introducir elementos auxiliares	X	
Construir el problema con menos variables		X
Encuentra solución al problema		X
Verifica la solución	X	
Obtener solución por otros métodos	X	

Algunas de las heurísticas presentan un mejor rol para los estudiantes, las cuales se observaron en las respuestas dadas a las preguntas o en la resolución de los problemas planteados.

Para algunos estudiantes las heurísticas de trazar un diagrama no fueron relevantes, mientras para otros era muy importante tener una relación de correspondencia desde la comprensión del problema hasta la solución.

A mayor cantidad de utilización de las heurísticas, los estudiantes justificaron mejor sus respuestas y por ello se evidencia en los análisis anteriores las diferencias entre los grupos de estudiantes.

Los grupos que utilizaron mayor cantidad de heurísticas, respondieron de mejor manera a las expectativas frente a la resolución de problemas y lograron con mayor claridad fortalecer el componente NV.

Resultados de los materiales didácticos

Durante la implementación de la estrategia didáctica se utilizaron algunos materiales (juegos) que contribuyeron al desarrollo de las temáticas y a la comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes, puesto que el uso de estos materiales despierta el interés, la motivación y promueve la búsqueda de estrategias, el desarrollo de habilidades y potencia el razonamiento lógico matemático.

La matemática es abstracta y por ello es importante hacer uso de herramientas las cuales se puedan tocar, manipular y ver, posibilitando de esta manera una asimilación de los conceptos matemáticos.

En los problemas matemático propuesto referente a ecuaciones, sistemas de ecuaciones, potenciación y radicación respectivamente, con el uso del material bingo lenguaje los estudiantes manipularon cantidades desconocidas mediante la traducción de números y símbolos para formular ecuaciones y así generalizar propiedades y operaciones algebraicas, lo anterior fue útil para la resolución de los problemas planteados.

Durante la resolución de cada uno de los problemas antes mencionados, el material tableproblemática fue una estrategia que inicialmente fortaleció el proceso resolutivo en los estudiantes, pues gracias a su uso, desarrollaron habilidades y estrategias útiles para resolver problemas matemáticos, de igual manera los estudiantes aplicaron heurísticas de comparación y verificación de resultados a través de la realización de procedimientos algorítmicos, formulación de hipótesis, entre otros procesos. Lo anterior ratifica que la implementación de la estrategia didáctica contribuyó al fortalecimiento del pensamiento variacional a través de la resolución de problemas de este tipo.

Resultados de las entrevistas

Las entrevistas y observaciones de clases fueron transcritas a Word, posteriormente se clasificaron por categorías y se interpretaron y analizaron de acuerdo a los componentes de los anexos 8 relacionado con la observación de clase y el anexo n° 9.

En la figura 29 se muestran las preguntas y respuesta de la entrevista realizada al docente cooperador antes de la intervención en el aula.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Entrevista a el profesor cooperador

1. ¿ Tiene en cuenta usted el conocimiento que el estudiante trae al aula? ¿porque?
R// No. Porque si me dedico a ver quienes saben o no saben algunos conceptos pierdo tiempo en ello, y esos vacíos teóricos no son problema mío, más bien de los profesores anteriores que los pasan a otro grado siendo conscientes de que el estudiante no alcanzo los logros necesarios .
2. ¿Cuándo plantea una situación problema tiene en cuenta el nivel de complejidad para sus estudiantes? ¿porque?
R//NO. Tengo en cuenta que sea un grado de complejidad para un estudiante de grado noveno en general.
3. ¿Hace uso usted de material didáctico de apoyo en el aula de clases ? ¿porque?
R// No. Porque las matemáticas son exactas y rigurosas y no son para jugar con ellas por medio de actividades didácticas.
4. ¿Tiene usted un conocimiento didáctico del contenido o un conocimiento del contenido al enseñar?
R// Un conocimiento del contenido.
5. ¿Hace uso de las heurística en la resolución de problemas en su proceso de enseñanza?
R// No

Figura 29. Entrevista realiza al maestro cooperador antes de la intervención en el aula

Igualmente, se aplicaron entrevistas a los estudiantes del grado 9° antes (febrero 2018), la cual permitió conocer algunos de los preconceptos y predisposiciones con las que los estudiantes ingresan al aula de Matemática.

La figura 30 presenta una entrevista realizada a los estudiantes del grado 9° antes de desarrollar la estrategia didáctica.

Entrevista a estudiantes del grado noveno

Grado: noveno

Asignatura: matemática

1. ¿Le gustan las matemáticas ?

R// Si

2. ¿Le gusta que le planteen situaciones problemas en los temas que se le van a enseñar?¿porque?

R// No, porque los problemas me parecen muy duros de resolver y yo no soy capaz de contestar las preguntas.

3. ¿Comprende los enunciados de las situaciones problemas?

R// No

4. ¿Usa las heurísticas para resolver situaciones problemas ?

R// No

5. ¿Razona y argumenta las respuestas a las situaciones problemas planteadas? ¿porque?

R// No. Porque no las entiendo

6. ¿Tiene el conocimiento teórico necesario para la resolución de problemas matemáticos ?

R// No

Figura 30. Entrevista realizada a los estudiantes del grado 9° antes del desarrollo de la estrategia didáctica

Las siguientes entrevistas (noviembre 2018) después de la intervención en el aula, permitieron conocer los aportes, comentarios y expectativas de los estudiantes ante la estrategia didáctica implementada.

La figura 31 presenta los comentarios de los estudiantes ante la implementación de la estrategia didáctica.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Entrevista a estudiantes del grado noveno

Grado: noveno

Asignatura: matemática

1. ¿Le gustan las matemáticas ?

R// Si

2. ¿Le gusta que le planteen situaciones problemas en los temas que se le van a enseñar?¿porque?

R// Si, porque por medio de problemas el tema es mas interesante debido a que yo estoy pensando y buscando una respuesta y el profesor no esta hablando y haciendo ejercicios que me da pereza.

3. ¿Comprende los enunciados de las situaciones problemas?

R// Si

4. ¿Usa las heurísticas para resolver situaciones problemas ?

R// si, para resolver problemas es bueno tener en cuenta las heurísticas

5. ¿Razona y argumenta las respuestas a las situaciones problemas planteadas?

¿porque?

R// si, porque debo de explicar cómo y porque llegue a esa solución

6. ¿Tiene el conocimiento teórico necesario para la resolución de problemas matemáticos ?

R// Si

Figura 281. Entrevista realizada a los estudiantes del grado 9°

La Tabla 18 presentan los comentarios de los estudiantes ante la implementación de la estrategia didáctica.

Durante el desarrollo de la estrategia didáctica los estudiantes aprendieron a utilizar estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos, y al mismo tiempo se dieron cuenta que están aportan herramientas necesarias que permiten comprender el problema, analizarlo, razonar, argumentar, trazar un plan, entre otras.

Tabla 18.

Entrevista a estudiantes grado 9°

Categorías	Observaciones
¿Utilizas heurísticas durante el proceso de resolución de problemas? ¿Cuáles?	Si las utilizo Las que más utilizo son: Hacer una tabla o dibujo para comprender mejor lo que dice el problema, escribir los datos, resolver el problema paso a paso, utilizar las variables, si no puedo resolver el problema mediante operaciones hago otra estrategia que me sirva y también verifico el problema.
¿Por qué son importantes los materiales didácticos en las clases de matemática?	Los materiales son importantes porque nos ayudan a comprender el tema que se está trabajando de forma más fácil.
Es claro el objetivo en cada una de las clases?	Al comienzo de la clase las profesoras nos dicen el objetivo de la clase para que sepamos un poco de lo que se va a aprender.
¿Comprendes los enunciados de los problemas? ¿Porque es importante comprenderlos?	Si. Es importante comprenderlos porque si no, no puedo solucionar el problema y no sabría que me están preguntando y que debo hacer.
¿Verificas las respuestas de los problemas y los relacionas con el enunciado?	Si.
¿Durante las clases de matemáticas son	En cada una de las clases las profesoras

tenidos en cuenta tus conocimientos?	nos hacen preguntas sobre el tema y nosotros damos nuestro aporte de lo que entendemos.
¿Por qué es importante la implementación de una estrategia didáctica en la enseñanza de la matemática?	Es importante porque por medio de las estrategias didácticas las matemáticas se hacen más entendibles, al igual que los problemas.
¿Por qué es importante el uso de heurísticas en la resolución de problemas matemáticos?	Es importante porque nos ayudan en la resolución de problemas que sin ellas se nos hace difícil resolverlos.

La tabla 18 muestra las categorías de las preguntas y sus respectivas respuestas que presentan los estudiantes una vez implementada la estrategia didáctica, los estudiantes expresan que las matemáticas son importantes porque en el diario vivir se presentan diferentes problemas matemáticos que sin la ayuda de conocimientos y estrategias necesarias sería difícil resolverlos.

Las preguntas de las entrevistas surgen de los interrogantes propios de la investigación en relación con el planteamiento del problema, con el fin de comprender los resultados de las Estrategias didácticas tradicionales en torno al componente NV y la Resolución de problemas; las expectativas de los estudiantes en el marco del proceso de enseñanza.

Para cada uno de los participantes, tanto maestro como estudiantes se grabó el audio de la entrevista.

Después de realizada las entrevistas antes y durante la intervención en el aula se tiene los siguientes resultados:

Resultados de la entrevista realizada al maestro cooperador

El docente al cual se le aplicó la entrevista emplea diversas actividades en el aula pero pocas veces plantea problema que permita que los estudiantes hagan un análisis y argumentación en relación a lo que se les plantea.

La entrevista realizada al docente cooperador evidencia que pocas veces hace una exploración al inicio de las clases para conocer los conocimientos previos de los estudiantes, los materiales didácticos que utiliza el docente son fotocopias, libros de textos, juegos de reglas, tablero y marcadores. No hace uso de estrategias heurísticas como método de enseñanza en las clases de matemática.

Resultados de la entrevista realizada a los estudiantes antes de la intervención en el aula

Se relacionan algunos aspectos relevantes de la entrevista realizada a los estudiantes antes de implementar la estrategia didáctica.

Se evidencia que los estudiantes manifiestan agrado por las matemáticas, pero no les gusta resolver problemas matemáticos por que no los comprende y les parece difícil, de allí el desinterés por aprender matemática.

En cuanto al uso de heurísticas manifestaron que nunca habían escuchado esa palabra y no sabían que era o que significaba, pues en las clases lo que más se realizan son talleres a base de ejercicios de los contenidos trabajados pero no les enseñan la utilidad y aplicabilidad de los conceptos vistos en la vida cotidiana.

La poca comprensión de la que hacen referencia los estudiantes se evidencia en los problemas propuestos en la prueba diagnóstica en donde las respuestas dadas por los

estudiantes no eran coherente con lo que el problema planteaba. Lo anterior por falta de utilización de estrategias heurísticas en el momento de resolver problemas matemáticos.

Resultados de la entrevista realizada a los estudiantes después de la intervención en el aula

Se da cuenta del cambio de perspectiva de los estudiantes hacia la matemática, con la implementación de la estrategia didáctica los estudiantes conocen y emplean estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos, tomando conciencia de la importancia que tiene la resolución de problemas en el desarrollo del conocimiento y en la vida cotidiana.

Lo anterior contribuyó a que los estudiantes dejaran de lado la apatía hacia la matemática y en especial a la resolución de problemas y por otro lado subieran el nivel de desempeño en esta área.

Evaluación de la estrategia didáctica

Después de la intervención y el análisis de los cambios, dificultades, evolución y resultados de los diferentes procesos académicos, disciplinares, metodológicos y didácticos que se desarrollaron durante esta investigación se realiza la evaluación concerniente a los problemas matemáticos, recursos didácticos y otras estrategias que los estudiantes han reconstruido y dado sentido.

La evaluación de la estrategia didáctica se convierte en un instrumento importante debido a que indica las dificultades y fortalezas de nuestro proyecto de investigación y del mismo modo contribuye a reflexionar sobre los avances y cambios de los estudiantes y la práctica docente.

- Los problemas planteados estaban relacionados con el contexto de los estudiantes, el cual permitió que le dieran mayor significado a lo realizado. Los problemas consistían en situaciones de numeración, propiedades de los números, equivalencia, variación y cambio.
- Se evidenció en los estudiantes la adquisición de habilidades y destrezas en la resolución de problemas a través del uso de las heurísticas, debido que la mayoría de los estudiantes comprenden e interpretan mejor los problemas, por lo que se puede inferir que se logró que los estudiantes caracterizarán que heurísticas utilizaban en el momento de resolver problemas.
- El uso de materiales didácticos en la realización de las diferentes actividades se articuló con el propósito de enseñanza. Los materiales contribuyeron a la comprensión de conceptos que de forma abstracta se hace difícil su comprensión y también fueron útil en la resolución de algunos problemas matemáticos.
- Durante la implementación de los materiales los estudiantes manifestaron querer seguir usando estos durante el resto del año lectivo, debido que anteriormente eran poco los materiales que utilizaban en las clase de matemáticas y por ello muchos conceptos que ahora comprenden con facilidad, eran de gran complejidad para ellos.
- Las entrevistas realizadas a los estudiantes fueron de gran utilidad en el momento de conocer concepciones y gustos de los estudiantes hacia las matemáticas.

Puede decirse que la estrategia didáctica contribuyó de forma positiva al logro de los objetivos propuestos, debido que los estudiantes hacen uso de heurísticas en los problemas que resuelven en el aula, ya no son apáticos hacia las matemáticas, y lo más importante

reconocen que las matemáticas se utilizan en muchas de las actividades que realizan en el diario vivir, puesto que le encuentran sentido a las mismas.

Conclusiones

La investigación tenía como propósito fortalecer el componente NV por medio de una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas desde las heurísticas de Schoenfeld, en este sentido, entre los logros de este trabajo de grado están, el haber verificado que la utilización de las estrategias heurística en la resolución de problemas se acierta cuando, ayudan a los estudiantes a cambiar sus estructuras de un problema o su forma de abordarlo. También ayuda a los estudiantes a explorar el problema y entenderlo más a fondo.

Análogamente las estrategias heurísticas facilitan la exploración por parte de los estudiantes, aunque no garantizan que éstos alcancen las soluciones finales. No puede decirse que el solo uso de las estrategias por un estudiante sea un fracaso porque apenas puede mostrarle la Solución en sí.

El trabajo de investigación ha mostrado que la construcción y utilización pertinente de una estrategia didáctica para abordar con eficacia un problema matemático, ha ayudado a la mayoría de los estudiantes a enfocarse en las diversas categorías que tienen las heurísticas de Schoenfeld. Dicha estrategia remite de igual manera a visualizar problemas como una actividad matemática en la cual relaciona las estructuras básicas de la adición y la multiplicación con el pensamiento numérico y el variacional, donde se condensan el análisis, la generalización, la abstracción y la comparación.

La implementación de este proyecto con el uso del material didáctico contribuyó al aprendizaje de los estudiantes puesto que, posibilitó una mejor comprensión de los conceptos, además viabilizó conocer las dificultades y fortalezas que tienen los estudiantes en el momento de resolver problemas, en nuestro caso de tipo NV.

Después de terminado el análisis y las conclusiones a las que hemos llegado presentamos algunas recomendaciones a la institución y a quienes deseen implementar la estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento NV a través de la resolución de problemas desde las heurísticas de Schoenfeld.

- Continuar con el proyecto desde el área de matemáticas
- Buscar y aplicar nuevas estrategias metodológicas para fortalecer el proceso resolutivo de los estudiantes.
- Incentivar al estudiante mediante actividades, que le permitan interpretar, analizar y reflexionar problemas del contexto y darle solución a los mismos.
- Proponer por parte de los estudiantes, actividades dentro del aula de clase en las cuales involucre herramientas para trabajar conceptos matemáticos y así dejar de lado el aprendizaje tradicional.

Se deja preguntas abiertas sobre este tópico para que otros trabajos puedan ser relevantes en las instituciones educativas:

¿Cómo el uso de las heurísticas de Schoenfeld pueden potenciar el razonamiento algebraico en estudiantes del grado noveno cuando resuelven problemas matemáticos?

¿De qué forma el uso de las heurísticas de Schoenfeld en estudiantes de grado noveno hace que emerjan habilidades y destrezas en la solución de problemas matemáticos?

Reflexión sobre la práctica pedagógica

Como maestras en formación resaltamos la importancia que tiene el haber realizado la práctica pedagógica, puesto que, fue una experiencia enriquecedora la cual aportó muchos conocimientos y aprendizajes significativos a nuestra formación docente.

Por medio de esta investigación se logró en nosotras un espíritu investigativo y la posición de pensarnos el proceso de enseñanza de una manera diferente, buscando estrategias pedagógicas que permitan al estudiante apropiarse a los conocimientos matemáticos.

De igual manera, en la actualidad podemos notar cambios en la sociedad los cuales demandan que se repiense las estrategias y metodologías de enseñanza diferentes a las tradicionales en las cuales y así el estudiante pueda alcanzar una obtención de objetos matemáticos de una manera fortalecida, logrados por medio de secuencias didácticas basadas en la resolución de problemas.

Reflexionar sobre la práctica nos permitió tomar una nueva visión frente a esta, puesto que, nos permitió reconocer nuestro futuro ejercicio docente como un ejercicio consciente, preparado y articulado a estrategias metodológicas pensadas para los estudiantes.

También, nos permitió crecer como estudiantes, docentes e investigadoras dado que amplió nuestra mirada a nivel teórico y práctico.

De igual manera, nos ayudó a ser conscientes de que la educación necesita de una constante transformación porque el mundo está constante cambio por tanto el conocimiento evoluciona y es tarea de nosotras como maestras repensar nuestra labor docente y reestructurar nuestras prácticas, analizar y comprender las necesidades de los estudiantes y así replantear estrategias metodológicas que posibiliten la construcción del conocimiento.

Desde la ética

Se dará cumplimiento a los principios de respeto y responsabilidad que rezan en la constitución política de Colombia de 1991 como reza el artículo 15, “Todas las personas tienen derecho a su intimidad personal y familiar y a su buen nombre, y el Estado debe respetarlos y hacerlos respetar. (...)” (p. 12).

En todo momento, se busca dar respeto a la privacidad de la información obtenida de los participantes, lo cual contempla respuestas a preguntas realizadas en entrevistas, es por ello que se establece el compromiso a mantener la privacidad de dicha información.

Con el fin de evitar implicaciones y perjuicios, los participantes de la presente investigación, se firma un permiso consentido con el rector de la institución, para participación voluntaria de los estudiantes. De igual manera se evitará en toda medida emitir juicios de valor, sobre las posturas o sobre los datos obtenidos de los participantes de manera individual, se velará por la comunicación entre los investigadores y los participantes etapa de la investigación.

Referencias

Agudelo, G., Bedoya, V., y Restrepo, A. (2008). Metodo heurístico en la Resolución de problemas matemáticos. Obtenido de

<http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/990/3722107A282.pdf;jsessionid=3DCD50E5B83C2CEB672ACD0E7DC38588?sequence=1>

Arce, R., Novo, M., y Fariña, F. (2003). Evaluación de menores en proceso de tratamiento por comportamiento antisocial. Avances en torno al comportamiento antisocial, evaluación y tratamiento., 128-149.

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. Obtenido de

file:///C:/Users/DINA/AppData/Local/Packages/Microsoft.MicrosoftEdge_8wekyb3d8bbwe/TempState/Downloads/6971-Texto%20del%20art%C3%a1culo-9555-1-10-20130124.pdf

Barrantes, L. C. (2016). La heurística como estrategia de enseñanza creativa en la resolución de problemas matemáticos relacionado con el pensamiento numérico.

Obtenido de

https://ciencia.lasalle.edu.co/cgi/viewcontent.cgi?article=1504&context=maest_docencia

Bocanegra, E. (2017). Desarrollo del pensamiento numérico-variacional en el aprendizaje de porcentajes. Obtenido de

<http://funes.uniandes.edu.co/10569/1/Bocanegra2017Esmeralda.pdf>

- Boscán, M., Klever, K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*, vol 10., 7-19.
- Camacho, M., y Santos, L. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. Obtenido de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/58/Articulo03.pdf>
- Cartagena, L., & Sossa, G. (2016). Resolución de problemas asociados al Razonamiento Algebraico. Obtenido de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/6501/1/CartagenaLeidy_2016_ProblemasAsociadosAlgebraico.pdf
- Ceballos, J. y Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, (38); 63-68.
- Córdoba, O. (2016). Propuesta pedagógica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/11441/1/Córdoba2016Propuesta.pdf>
- Cortés, M., y Galindo, N. (2007). El modelo de Polya centrado en resolución de problemas. Obtenido de <http://repository.lasalle.edu.co/bitstream/handle/10185/1552/TM85.07%20C818m.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Díaz, J., y Díaz, R. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Bolema*, vol 32, 57-74. Obtenido de <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v32n60/0103-636X-bolema-32-60-0057.pdf>

- Dionicio, E. (2017). Estrategias heurísticas bajo el enfoque sociocultural para mejorar la resolución de problemas. Obtenido de http://repositorio.uladech.edu.pe/bitstream/handle/123456789/4924/ESTRATEGIA_S_EDENITH_CENIA_DIONICIO_ISIDRO.pdf?sequence=1
- Dominguez, L., y Espinoza, B. (2019). Potenciar la resolución de problemas matemáticos desarrollando habilidades de pensamiento desde una mirada heurística. Obtenido de <http://repositorio.cuc.edu.co/bitstream/handle/11323/4929/POTENCIAR%20LA%20RESOLUCIÓN%20DE%20PROBLEMAS%20MATEMÁTICOS%20DESARROLLANDO%20HABILIDADES%20DE%20PENSAMIENTO%20DESDE%20UNA%20MIRADA%20HEURÍSTICA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- García, J. (2010). Aplicación de la estrategia de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática en la USTA. Revista de investigaciones, Vol 14, 129-148.
- Godino, J., Batanero, C., y Font, V . (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Gómez, O. (2015). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. Repositorio Universidad Francisco José de Caldas; Bogotá Colombia. Obtenido de <http://hdl.handle.net/11349/2363>
- Gonzales, F. (2007). Investigación cualitativa y subjetividad. Obtenido de http://www.memoriavirtualguatemala.org/sites/default/files/mvg/INVESTIGACIÓN_CUALITATIVA.pdf
- Jaramillo, G., y Perlaza, S. (2014). Pensamiento variacional en la resolución de problemas algebraicos en los estudiantes del grado 8° del centro educativo Politecnico la Milagrosa, municipio Puerto Tejada (CAUCA). Obtenido de

<http://repositorio.ucm.edu.co:8080/jspui/bitstream/handle/10839/846/Gloria%20Edith%20Jaramillo.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Mayer, R. E (2002). Psicología de la educación. El aprendizaje en las áreas de conocimiento, Madrid: Prentice hall.

Mendoza, L. (2014). Estrategias heurísticas para incrementar la capacidad de resolución de problemas en alumnos de educación secundaria. Obtenido de file:///C:/Users/DINA/AppData/Local/Packages/Microsoft.MicrosoftEdge_8wekyb3d8bbwe/TempState/Downloads/1016-2701-1-PB.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares para matemáticas. Serie lineamientos curriculares. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_.

Murcia, S., y Valdivieso, M. (2013). Aspectos a considerar en la Resolución de un problema. Obtenido de http://www.uptc.edu.co/export/sites/default/eventos/2013/cf/eime/doc/Aspectos_a_considerar_en_la_resolucion_problema_sandra_margoth.pdf

Orozco, D. (2018). Dificultades en la resolución de problemas en los pensamientos numérico y variacional: Una mirada desde el enfoque ontosemiótico. Obtenido de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/3272/1/JC01146_davidorozcoflores.pdf

- Paladinez, D. (2018). Desarrollo del pensamiento numérico variacional en estudiantes de primaria, a través de actividades de aprendizajes basada en problemas. Obtenido de <http://bdigital.unal.edu.co/68320/1/10294981.2018.pdf>
- Pérez, Y., y Ramirez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. Revista de Investigación, vol 35., 169-194.
- Poggioli, L. (2009). Estrategias de resolución de problemas. Obtenido de http://bibliofep.fundacionempresaspolarg.org/media/1280192/serie_ensenando_cap_5.pdf
- Polya, G., y Zugazagoitia, J. . (1965). Cómo plantear y resolver problemas . México: Trillas.
- Quitíán, M. (2018). Fortalecimiento del componente numérico-variacional a través de la resolución de problemas en grado tercero. Tesis de maestría, Universidad de Externado; Colombia.
- Ruiz, F. (2017). Las estrategias heurísticas y la resolución de problemas de los estudiantes de tercer año de secundaria de la I.E Santa Rosa. Obtenido de http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/5622/Ruiz_OF.PDF?sequence=1&isAllowed=y
- Sampieri, R., Fernández, C., Baptista, L. . (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo, cualitativo, sus similitudes y diferencias. . Metodología de la Investigación.
- Santos, M. (2007). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. Obtenido de <https://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf>

- Santos, L. (2015). La resolución de problemas matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/9443/1/Resolucion2016Santos.pdf>
- Sausen, S., y Guérios, E. (2010). Licenciatura em matemática: resolução de problemas na disciplina de metodologia do ensino com utilização das TICs. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10.
- Simón, H. N. (1970). Human problem solving: The state of the theory in 1970. Obtenido de <https://pdfs.semanticscholar.org/18ce/82b07ac84aaf30b502c93076cec2accbfcaa.pdf>
- Schoenfeld, A. (1985, a). *Mathematical Problem Solving*. . Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (2012, b). Problematizing the didactic triangle. ZDP, the international journal of mathematics education.
- Vasco, C. (2003) El pensamiento variacional y la modelación matemática. Obtenido de http://pibid.mat.ufrgs.br/20092010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf
- Zamora, J. (2016). *Propuesta de método de Resolución de problemas matemáticos en educación primaria*. Obtenido de http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/169269/TFG_2017_ZamoraFerrer_Julia.pdf?sequence=1

Anexos
Guía # 1

Institución Educativa Rural Pavarandó Grande

Área: Matemáticas

Grado: 9°

Docentes: María Luyis Perea Agualimpia y Dina Luz Valencia Salinas

Tema: Fracciones algebraicas

Tiempo: 4 secciones de 2 horas cada una (6 horas)

Materiales: Fotocopias, cartulina, bingo lenguaje, cuaderno de apuntes.

Objetivo: emplear los procedimientos adecuados para dar solución a problemas relacionados con fracciones algebraicas.

Estándar: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada

DBA: Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación.

Evidencia de aprendizaje: Interpreta expresiones numéricas, algebraicas o gráficas y toma decisiones con base en su interpretación.

Descripción del plan de clase

En este plan se abordarán conceptos como: Fracciones, Fracciones algebraicas, propiedad distributiva(simplificación de fracciones), reducción de fracciones, representación, operaciones con fracciones, aplicabilidad en la solución de problemas concernientes al pensamiento numérico y sistemas numéricos y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, mediante actividades teóricas y con materiales manipulativos.

INDICADORES DE DESEMPEÑO:

- Identifica las propiedades de los números racionales
- Utiliza los números reales en diferentes contextos
- Simplifica expresiones racionales
- Reconoce fracciones algebraicas
- Efectúa las distintas operaciones de fracciones algebraicas
- Representa operaciones con expresiones racionales

EJE CONCEPTUAL:

FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Una fracción algebraica es una expresión fraccionaria en la que numerador y denominador son polinomios.

Son fracciones algebraicas:

$$\frac{x-3}{x^2}, \quad \frac{1}{x+2}, \quad \frac{x^3-2x^2+x-1}{3x^2+2}$$

Operaciones con fracciones algebraicas:

Simplificación de fracciones algebraicas

En la simplificación de fracciones algebraicas se simplifican igual que las fracciones ordinarias: dividiendo el numerador y el denominador por factores comunes. Entonces, la clave está en aplicar la propiedad distributiva.

Por ejemplo, simplificar:

$$\frac{(4x)(x-2)^2}{(8x^2)(x-2)} = \frac{4x(x-2)(x-2)}{(8x^2)(x-2)} = \frac{(x-2)}{2x}$$

Suma y resta de fracciones algebraicas con igual denominador

Veamos el siguiente ejemplo de suma y resta:

$$\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{(2x-1) - (x-1) + x}{x+1} =$$

Ahora, aplicamos la propiedad de opuestos aditivo teniendo cuidado de (cambiar el signo interior cuando delante del paréntesis hay un signo menos (-)), y nos queda:

$$\frac{2x-1-x+1+x}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$$

Suma y resta de fracciones algebraicas Heterogéneas

Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{2}{5ab} - \frac{1}{a^2} - \frac{4}{15b^2} =$$

Tal como lo hacíamos al sumar o restar fracciones heterogéneas, utilizando el mínimo común múltiplo (m.c.m.) éstas fracciones se transforman en fracciones equivalentes homogéneas.

5ab	a ²	15b ²	+	a	Resultado
5b	a	15b ²	:		

Producto (multiplicación) de fracciones algebraicas

Para multiplicar fracciones algebraicas procederemos igual como lo hacemos con fracciones, multiplicando los numeradores y los denominadores, aunque antes de multiplicar debemos simplificar, si se puede.

Veamos qué significa esto:

Sea $\frac{a}{b}$ una fracción algebraica cualquiera que está multiplicada por otra $\frac{c}{d}$, entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Cociente o división de fracciones algebraicas:

Para dividir fracciones algebraicas procederemos igual como lo hacemos con fracciones, haciendo el producto cruzado de numeradores y denominadores, aunque antes de multiplicar debemos simplificar, si se puede.

Veamos, ahora qué significa esto:

Sea $\frac{a}{b}$ una fracción algebraica cualquiera que está dividida por otra $\frac{c}{d}$ entonces:

Problemas que involucran fracciones algebraicas

Un campo de fútbol tiene medidas desconocidas. Un operario de mantenimiento nos cuenta que la relación entre lo ancho y lo largo menos 20 metros es igual a un medio. Asimismo, la suma de lo largo y lo ancho es de 170 metros. ¿Cuáles son las medidas del campo de fútbol?

Identificamos la incógnita "ancho del campo" con la variable **X**, y la incógnita "largo del campo" con la variable **y**. Así pues, según el enunciado, tendríamos las ecuaciones siguientes:

$$\frac{x}{y - 20} = \frac{1}{2}$$

$$x + y = 170 \text{ Entonces } x = 170 - y$$

Luego se sustituye en la primera igualdad y se desarrolla:

$$\frac{170 - y}{y - 20} = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$2(170 - y) = 1(y - 20) \text{ Entonces}$$

$$340 - 2y = y - 20 \text{ Luego}$$

$$340 + 20 = y + 2y$$

$$y = \frac{360}{3} = 120$$

Por lo tanto

$$x = 170 - 120 = 50$$

Las medidas del campo de futbol serán 120 metros de largo por 50 metros de ancho.

INICIO O EXPLORACIÓN DE SABERES.

Por parejas, se entrega a los estudiantes una ficha que indica:

Actividad 1: Expresa de forma algebraica los siguientes enunciados.

- La suma de dos números consecutivos.
- La suma de un número par más un número impar
- El triple de un número más el cuádruplo de otro número
- La suma de tres números enteros consecutivos
- El área de un cuadrado
- Doble de un número menos el triple de otro

Se procura que las parejas discutan y compartan con los demás compañeros las expresiones obtenidas

Se hacen las siguientes preguntas:

- a) ¿Cómo se denominan o llaman a las expresiones algebraicas obtenidas?
- b) ¿Cuáles son las características de un monomio?
- c) ¿Cómo diferenciar un monomio de un polinomio?

FASE DE DESARROLLO

Actividad # 2

En grupos de 3 estudiantes se hace entrega de unas fichas y con la explicación del docente se le pide que sumen y resten polinomios y fracciones algebraicas.

Esta actividad está basada en la caja de polinomios.

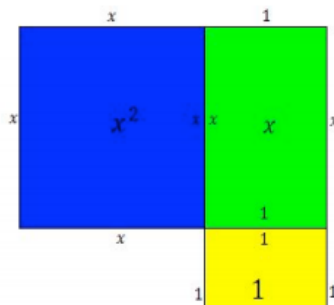


Ilustración 1

Para la representación de coeficientes negativos se utiliza el plano cartesiano, en donde en el primer y tercer cuadrante se ubican las fichas con coeficientes positivos y en el segundo y cuarto cuadrante fichas con coeficientes negativos como se muestra en la ilustración 2.

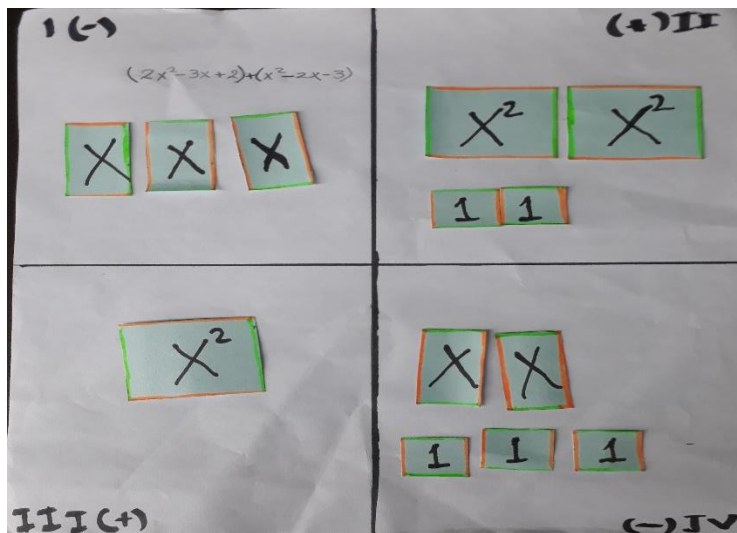


Ilustración 2, adición de polinomios en el plano cartesiano

Actividad # 3

Fracciones algebraicas equivalentes.

De acuerdo al ejemplo: $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ son equivalentes porque $2(2) = 4(1)$

Resuelve para comprobar si son o no equivalentes y encierra en un círculo las fracciones algebraicas que sean equivalentes.

- a) $\frac{m-1}{m^2-m}$ y $\frac{1}{m}$ b) $\frac{5y-8}{3y-2}$ y $\frac{4y}{y}$ c) $\frac{2x+3}{x^2+3}$ y $\frac{2x}{x^2}$ d) $\frac{3x+2}{x^3+1}$ y $\frac{3+4x}{x^3+2}$

Actividad # 4

Esta actividad permite que los estudiantes repasen las fracciones algebraicas, que son de gran importancia para el desarrollo de otras temáticas como derivadas.

Reglas del juego

1. El juego está diseñado para tres jugadores.
2. Se debe contar con tres fichas de parques y un dado.
3. El estudiante que inicie lanza el dado, cae en una fracción algebraica con su respectiva operación, la debe resolver y obtener el resultado, los otros dos compañeros deben validar la respuesta obtenida.
4. Si cae en la casilla de "Regresar" debe devolverse la cantidad de posiciones que indique.
5. Si cae en la casilla que indica "Adelanta" podrá adelantar las posiciones que se indique.
6. La idea es llegar al final, cuando termine algún miembro del grupo este será el ganador.
7. Llaman al docente quien observa que efectivamente se realizaron las operaciones y se llegó al final del juego, después facilita al grupo las respuestas para que verifiquen que el jugador que termino es realmente el ganador.

Ilustración 3, tomado de fracciones algebraicas, materiales y recursos; compartir palabra maestra. <https://compartirpalabramaestra.org/matematicas/fracciones-algebraicas-materiales-y-recursos>





INICIO	$\frac{x+2}{4} + \frac{3x}{8}$	$\frac{3y+2}{2y} * \frac{3y+3}{5y}$	$\frac{3z-2}{3} \div 4z$	$\frac{x^2+4x+4}{x^2-2}$	Regresa 3 
					$\frac{x+2}{x^3-1} - \frac{1}{x-1}$
$\frac{2}{5ab} - \frac{1}{a^3}$	Regresa 5 	$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$	Adelanta 3 	$\frac{12x^2-x-6}{4x-3}$	$x + \frac{x}{x-1}$
$\frac{2abc}{8a^3b^2} * \frac{a}{b}$					
Adelanta 2 	$\frac{2xy}{8x^2y^2z}$	FINAL			

Ilustración 4, tomado de fracciones algebraicas, materiales y recursos; compartir palabra maestra. <https://compartirpalabramaestra.org/matematicas/fracciones-algebraicas-materiales-y-recursos>

REFERENCIAS

-Problemas de aplicación de polinomios y fracciones algebraicas.

<https://www.sangakoo.com/es/temas/problemas-de-aplicacion-de-polinomios-y-fracciones-algebraicas>

-Fracciones algebraicas, materiales y recursos; compartir palabra maestra.

<https://compartirpalabramaestra.org/matematicas/fracciones-algebraicas-materiales-y-recursos>

-Profesor en línea

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Algebra_Fracciones.html

-La caja de polinomios

<file:///C:/Users/uchida-1/Downloads/Caja%20polinomios.pdf>

GUÍA # 2

Institución: I.E.R. Pavarandó Grande

Tema: Sistemas de ecuaciones

Docentes: María Luyis Perea Agualimpia y Dina Luz Valencia

Grado: Noveno

Tiempo: 4 secciones de dos horas cada una

Materiales: Fotocopias con diversas actividades, tabla de ecuaciones, bingo lenguaje, fichas, carteleras, cuaderno de apuntes.

Justificación: este plan de clases es elaborado con la finalidad de proporcionar a los estudiantes elementos básicos relacionados con los sistemas de ecuaciones.-

Objetivo: Plantear y resolver ecuaciones utilizando los diferentes métodos y estrategias.

Estándar: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

DBA: Plantea sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y los resuelve utilizando diferentes estrategias.

DESCRIPCIÓN DEL PLAN DE CLASE

A lo largo del plan de clase se abordan conceptos como: resolución de ecuaciones, su representación, significación, aplicabilidad en la solución de problemas, enmarcados en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, mediante actividades teóricas y materiales manipulativos

INDICADORES DE DESEMPEÑO

- Resuelve problemas de aplicación utilizando diferentes métodos de ecuaciones.
- Identifica diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- Plantea y soluciona problemas de aplicación de los sistemas 2x2
- Muestra agrado y trabaja con responsabilidad las actividades propuestas.
- Resuelve sistemas de ecuación mediante los métodos de eliminación, reducción, igualación y determinante.

EJE CONCEPTUAL:

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que poseen incógnitas. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se abarca el conjunto de todas ellas con una llave. Un sistema de dos ecuaciones lineales con incógnitas x y y , también llamado ecuaciones simultáneas de dos por dos es de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array} \right\}$$

Donde a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} son coeficientes reales y b_1 , b_2 son términos independientes. En cada una de las ecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero.

Existen infinitas soluciones que satisfacen a ambas ecuaciones, este sistema es compatible indeterminado, al menos una de sus ecuaciones se puede hallar como combinación lineal del resto, es decir, es linealmente dependiente. (Las ecuaciones son equivalentes).

-No existe ningún punto $(x;y)$ que satisfice a ambas ecuaciones. En este caso el sistema es incompatible. (Las ecuaciones se corresponden gráficamente con dos rectas, ambas con

la misma pendiente, al ser paralelas, no se cortan en ningún punto, es decir, no existe ningún valor que satisfaga a la vez ambas ecuaciones)

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Un par de números reales (x, y) que satisfaga el sistema de ecuaciones, se le llama una solución simultánea de las ecuaciones dadas. En otras palabras, la solución de un sistema de ecuaciones es la intersección de las soluciones de las dos ecuaciones.

Para resolver un sistema de ecuaciones de 2×2 hay dos métodos. Métodos analíticos y el método gráfico.

MÉTODO DE IGUALACIÓN

El método de igualación consiste en realizar los siguientes pasos:

- ❖ Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- ❖ Se igualan las expresiones despejadas y se obtiene una ecuación lineal para la otra incógnita.
- ❖ Se resuelve la ecuación lineal.
- ❖ Se sustituye este valor en cualquiera de las dos expresiones despejadas a fin de obtener el valor de la otra.
- ❖ Se realiza la comprobación.

Ejemplo.

Aplicando el método de igualación, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ 3x + 5y = 14 \end{cases}$$

Solución.

- ❖ Despejamos X , de la primera y la segunda ecuación.

$$X = \frac{10+2y}{4} = \frac{5+y}{2}$$

$$X = \frac{14-5y}{3}$$

- ❖ Igualamos las dos expresiones

$$\frac{5+y}{2} = \frac{14-5y}{3}$$

- ❖ Resolvemos la ecuación.

$$3(5 + y) = 2(14 - 5y)$$

$$15 + 3y = 28 - 10y$$

$$3y + 10y = 28 - 15$$

$$13y = 13, \quad y = \frac{13}{13} = 1$$

- ❖ Se sustituye el valor de y en una de las dos ecuaciones despejadas, para obtener el valor de la otra incógnita.

$$X = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución X=3 y Y=1

Comprobación

$$\begin{cases} 4(3) - 2(1) = 10 \\ 3(3) + 5(1) = 14 \end{cases}$$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El método de sustitución consiste en efectuar los siguientes pasos:

- ❖ Despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones.
- ❖ Sustituir la expresión despejada en la otra ecuación.
- ❖ Se resuelve la ecuación lineal, generalmente fraccionaria.
- ❖ Se sustituye este valor en la expresión despeja a fin de obtener el valor de la otra.

Ejemplo.

Mediante el método de sustitución, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = -7 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$$

1- Despejamos y en la primera $y = -7 - 2x$

2- Sustituimos en la segunda $4x - 2(-7 - 2x) = -10$

3- Despejamos X

$$4x + 14 + 4x = -10, \quad 8x + 14 = -10$$

$$x = \frac{-10 - 14}{8} = \frac{-24}{8}; \quad x = -3$$

4- Sustituimos el valor de x en la primera ecuación para hallar a y.

$$2(-3) + y = -7$$

$$-6 + y = -7, \quad y = -7 + 6 = -1$$

Solución X = -3 y Y = -1

MÉTODO DE REDUCCIÓN

En este método se multiplica una o las dos ecuaciones por una constante para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas pero con distinto signo. Al sumar las ecuaciones nos queda una ecuación con una sola incógnita.

Ejemplo:

Aplicando el método de reducción, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = -4 \\ 3x - 4y = 27 \end{cases}$$

1- Multiplicamos la primera ecuación por -3

$$-3(x + 3y = -4), -3x -9y = 12$$

2- Sumamos la ecuación resultante con la segunda ecuación

$$\begin{cases} 3x - 9y = 12 \\ 3x - 4y = 27 \end{cases}$$

$$0x - 13y = 39$$

3- Despejamos a y

$$-13y = 39, y = \frac{39}{-13} = -3$$

4- Sustituimos el valor de y en la primera ecuación

$$X + 3(-3) = -4, \quad x + 9 = -4$$

$$X = -4 + 9, \quad X = 5$$

Solución $X = 5$ y $Y = -3$

MÉTODO DE DETERMINANTES

El determinante del Sistema D es el determinante del arreglo formado por los coeficientes de las incógnitas.

- ✓ El determinante de la incógnita Dx es el que se obtiene sustituyendo en el arreglo del sistema la columna de los coeficientes de la incógnita x por la columna de los términos independientes.
- ✓ El determinante de la incógnita Dy es el que se obtiene sustituyendo en el arreglo del sistema la columna de los coeficientes de la incógnita y por la columna de los términos independientes.

La *Regla de Cramer* establece que dado un sistema de ecuaciones lineales cuyos términos independientes no son cero, el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la incógnita por el determinante del sistema.

Ejemplo:

Por medio del método de determinante resolver el siguiente sistema.-

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -4x + 5y = -14 \end{cases}$$

Solución:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -14 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{12(5) - (-14)(-3)}{2(5) - (-4)(-3)} = \frac{60 - 42}{10 - 12} = \frac{18}{-2} = -9$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ -4 & -14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{12(-14) - (-14)(12)}{2(5) - (-4)(-3)} = \frac{-28 + 48}{10 - 12} = \frac{20}{-2} = -10$$

Por lo anterior $X = -9$ y $Y = -10$

INICIO O EXPLORACIÓN DE SABERES.

Actividad # 1

Escribe con tus propias palabras el significado de los siguientes términos:

- Ecuación
- Incógnita
- Variable
- Igualar
- Sustituir
- Eliminar
- Reducir

Cada estudiante debe compartir lo escrito con sus compañeros y profesoras en formación, luego se construirá un nuevo conocimiento referente a dichos términos.

Actividad # 2

Encuentra el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $2x + 5 = x - 15$

b) $(x - 10)/3 = 2 - x$

c) $2x + 3 = 6$

d) $3x + 5 = 20$

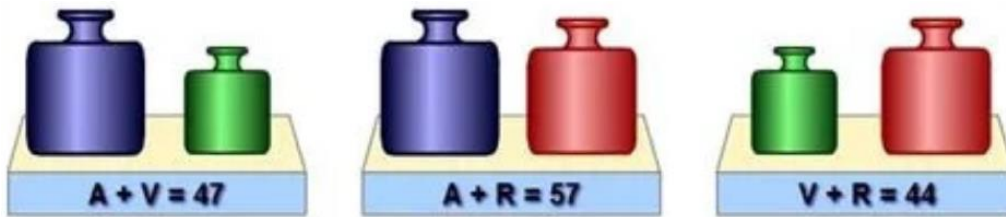
e) $14 + x \cdot 12 = 30 + 6$

f) $3x + 4 = 2x + 8 - 6 - x$

Actividad # 3

En grupos de 3 estudiantes resuelven la siguiente actividad, de cada grupo saldrá un monitor a explicar las estrategias utilizadas para resolver la situación.

Observa la siguiente imagen ¿Cuál es el valor de las pesas azul, verde y roja?



Actividad # 4

En parejas los estudiantes resuelven la siguiente situación problema:

En una clase de ciencias naturales el tema era sobre cuántos animales domésticos había en la vereda. Camila una estudiante de la clase expresó lo siguiente: en la finca de mi papá hay pavos y vacas, entre los dos hay 22 animales y a su vez afirmó que el total de patas es 60
 ¿Cuántos pavos y vacas hay en la finca del papá de Camila?

Solución.

X es el número de puercos

Y es el número de gallinas

Cada puerco tiene cuatro patas y cada gallina dos, el sistema está dado por:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 2y = 240 \end{cases}$$

Resolviendo por eliminación, se multiplica la primera ecuación por - 4 y se suma a la segunda

FASE DE DESARROLLO

Actividad # 5

Con el uso de la tabla de ecuaciones, se plantea un sistema de ecuaciones y encuentra el valor de la estrella, el regalo y el tomate.

				61
				70
				65
38	69	40	49	

Actividad # 6

En grupos de 3, plantea un sistema de ecuaciones y con la ayuda del profesor resuelve el acertijo.

Pedro ha olvidado la clave de su caja fuerte, en una libreta él había escrito unas notas para recordarla. La clave tenía 5 cifras y en la nota él las llamo x, y, z, m y p'

X	y	z	m	P
---	---	---	---	---

- La primera cifra y la segunda sumaban 17
- La segunda y la tercera sumaban 15
- La tercera y la cuarta sumaban también 15
- La primera y la última sumaban 8

NOTA: El docente despejará dudas para la resolución de dicho acertijo.

EVALUACIÓN:

Actividad # 7

En grupos de tres, después de haberse enumerado por grupo, de una bolsa sacaran un papel que contiene un problema el cual deberán resolver planteando un sistema de ecuaciones y mediante uno de los métodos vistos.

De cada grupo saldrá un monitor el cual expresara el problema que le correspondió a su grupo y como fue solucionado.

- 1- La diferencia de dos números es 14, y la cuarta parte de su suma es 13. Hallar los números.

- 2- En el aula de Fabio hay un total de 27 estudiantes, el número de chicas es el doble que de chicos ¿Cuántos chicos y chicas hay en el salón de Fabio?
- 3- La suma entre dos números es 90 y la resta, 16 ¿Cuáles son los números?
- 4- Tomas tiene 7 vehículos en su garaje: motos (2 ruedas) y motocarros (3 ruedas) ¿Cuántas motos y motocarros tiene Tomas si suman 17 ruedas en total?
- 5- Pablo y Alicia llevan entre los dos 160 dólares. Si Alicia le da 10 dólares a Pablo, ambos tendrán la misma cantidad ¿Cuánto dinero lleva cada uno?
- 6- Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas ¿Cuántos cerdos y pavos hay?
- 7- Dos números suma 25 y el doble de uno ellos es 14 ¿Qué números son?
- 8- Carmen es costurera y quiera aprovechar una oferta de botones. El paquete de botones blancos cuesta 15 dólares y el de botones negros 10 dólares. Si con 180 dólares compró en total 14 paquetes ¿Cuánto gasto en botones blancos?
- 9- Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

REFERENCIAS

- Ortega, J (2010). Método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales
- Rey, M; Hernández y Porcinito, S (2008).- Sistemas de ecuaciones lineales: secuencia didáctica para su enseñanza.-
- Alba, T (2017). Utilización de los juegos como herramienta didáctica para potenciar el proceso de la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

GUÍA # 3

Institución: I.E.R. Pavarandó Grande

Tema: Combinaciones y permutaciones

Docentes: María Luyis Perea Agualimpia y Dina Luz Valencia

Grado: Noveno

Tiempo: 4 secciones de dos horas cada una

Materiales: Fotocopias con diversas actividades, bingo lenguaje, fichas, carteleras, cuaderno de apuntes.

Justificación: este plan de clases es elaborado con la finalidad de proporcionar a los estudiantes elementos básicos relacionados con las combinaciones y permutaciones.

Objetivo: Resolver problemas matemáticos a través de combinaciones y permutaciones.

Estándar: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

DBA: Plantea sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y los resuelve utilizando diferentes estrategias.

DESCRIPCIÓN DEL PLAN DE CLASE

A lo largo del plan de clase se abordan conceptos como: resolución de ecuaciones, su representación, significación, aplicabilidad en la solución de problemas, enmarcados en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, mediante actividades teóricas y materiales manipulativos

EJE CONCEPTUAL:

Permutaciones y combinaciones

Cuando se da una situación en la que cada uno de varios elementos puede tomar valores distintos, o diferentes tareas se pueden hacer de forma distinta, y todos ellos son independientes entre sí, la forma de calcular el número total de posibilidades es multiplicar el número de valores que puede tomar cada elemento, o el número total de formas en las que se puede realizar cada tarea.

Formas de ordenar permutaciones

Se llaman permutaciones de un conjunto, o permutaciones de los elementos de un conjunto, a las posibles formas de ordenar dichos elementos, y si el conjunto tiene n elementos distintos, el número de permutaciones de estos n elementos es igual a $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

Factorial y sus propiedades: El factorial de n , escrito $n!$, es el producto de los enteros entre 1 y n ; así, el factorial de 6 es $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. Definimos $0! = 1$, principalmente porque como ya hemos visto el factorial de n es igual al número de formas de ordenar n elementos distintos. Si tenemos 0 elementos, hay exactamente una forma de ordenarlos, ¡no tomar ninguno!

Formas de Repartir combinaciones: si hay un conjunto de n elementos distintos, y quiero calcular todos los posibles subconjuntos de dicho conjunto que tengan m elementos, sin importar el orden de dichos m elementos, diré que hay $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ formas de tomar m elementos de entre n elementos distintos

INICIO O EXPLORACIÓN DE SABERES

Actividad # 1

Si tienes 5 pantalones de los siguientes colores: negro, azul, blanco, rosado y café. Al igual que 5 camisas: fucsia, amarilla, veis, roja y verde ¿Cuántas combinaciones puedes realizar con las prendas anteriores?

Representa el problema anterior mediante un gráfico o dibujo.

Actividad # 2

En pareja darán respuesta a las siguientes situaciones.

- Cuántos números se pueden formar utilizando las siguientes cifras 1-2-3-4.
- Cuántos números de pueden formar utilizando las siguientes cifras 0-3-4-7-5

Actividad # 3

Resuelve los siguientes problemas:

1) Tenemos 5 rectas en el plano, de forma que no hay tres de ellas que coincidan en un punto. Si ninguna de las rectas es paralela a ninguna otra, ¿cuántos puntos de intersección entre dos rectas hay? ¿Cuántos puntos de intersección hay si exactamente 3 de ellas son paralelas y las otras 2 no lo son, ni entre sí ni con las primeras? ¿Cuáles son todos los posibles valores que puede tomar el número de puntos de intersección?

-Representa el problema anterior de forma gráfica.

2) Calcula la suma de todos los números de 9 cifras en los que aparece exactamente una vez cada una de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3) Si la bandera de Colombia tuviera los siguientes colores: amarillo, azul, rojo, blanco, verde y naranja, ¿cuántas banderas diferentes se podrían armar?

Referencias

-Permutaciones y combinaciones

http://www.unavarra.es/digitalAssets/124/124059_100000Permutaciones-y-combinaciones.pdf

Descripción de los materiales.

Según Soto, F., Mosquera, S. y Gómez, C. (2005) La caja de polinomios ilustra la relación entre el desarrollo histórico de los conceptos y la lúdica como una actividad que posibilita el paso de lo tangible a lo simbólico y a lo abstracto en el conocimiento algebraico (p. 15) La caja de polinomio está compuesta por tres fichas diferentes que se relacionan por las dimensiones del rectángulo que coincide con las dimensiones de las otras dos como se muestra en la ilustración 1.

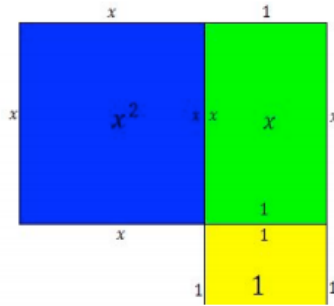


Ilustración 5

Para la representación de coeficientes negativos se utiliza el plano cartesiano, en donde en el primer y tercer cuadrante se ubican las fichas con coeficientes positivos y en el segundo y cuarto cuadrante fichas con coeficientes negativos como se muestra en la ilustración 2.

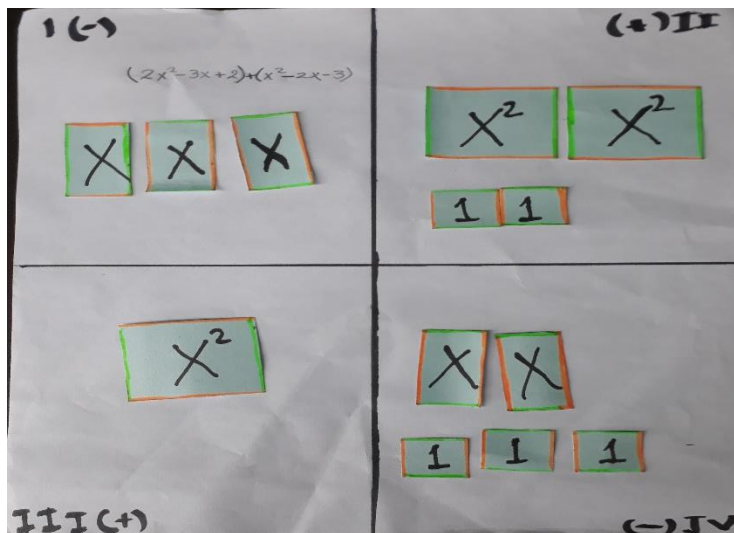


Ilustración 6, adición de polinomios en el plano cartesiano

Otro de los materiales usados es tableproblemania que consiste en un tablero compuesto por 2 fichas, un dado y una cartulina dividida en 80 casillas con los números del 1 al 70 y 10 figuras geométricas, las cuales comprenden problemas matemáticos y comodines.

Tableproblemania funciona al tirar el dado los participantes recorren las casillas que contienen preguntas sobre resolución de problemas al igual que unos comodines. Gana el

primero en llegar a la meta. En la resolución de los problemas planteados los estudiantes hicieron uso de las heurísticas de Schoenfeld.



Ilustración 7, resolución de problemas: tableproblemanía

A continuación se presentan los problemas planteados en tableproblemanía.

- 1- En el aula de Fabio hay un total de 27 estudiantes, el número de chicas es el doble que de chicos ¿Cuántos chicos y chicas hay en el salón de Fabio?
- 2- La suma entre dos números es 90 y la resta, 16 ¿Cuáles son los números?
- 3- Carlos le dice a Juan: “el dinero que yo tengo es el doble que tú tienes”, y Juan le responde “si me das 6 euros los dos tendremos la misma cantidad” ¿Cuánto dinero tiene cada uno al principio?
- 4- Un campo de fútbol tiene medidas desconocidas. Un operario de mantenimiento nos cuenta que la relación entre lo ancho y lo largo menos 20 metros es igual a un medio. Asimismo, la suma de lo largo y lo ancho es de 170 metros. ¿Cuáles son las medidas del campo de fútbol?

- 5- Manuel ha ido a recoger los huevos de sus gallinas ponedoras. De las blancas ha recogido 9 docenas, como de costumbre, y de las marrones solo ha recogido $\frac{5}{6}$ de docena. ¿Cuántas docenas de huevos ha recogido Manuel?
- 6- “Al ir a San Dimas encontré a un señor con siete Divas. Cada Diva con siete sacos; cada saco con siete gatos; cada gato con siete mininos. Mininos, gatos, sacos y divas ¿Cuántos iban a San Dimas?”
- 7- Sara le dice a Carlos entre los dos tenemos \$ 6000 y Carlos le responde si pero yo tengo el doble que tu ¿Cuánto dinero tiene Carlos?
- 8- El perímetro de un rectángulo cuyos lados mayores miden el doble de los lados menores, los cuales miden cada uno 3b.
- 9- Mario desea vender un vehículo, una moto y una bicicleta por \$12.600.000. El coche vale 3 veces más que la moto y la moto 5 veces más que la bicicleta. ¿Cuánto vale cada vehículo?
- 10- La suma de las edades de 3 jóvenes es de 45 años. El mayor tiene 5 años más que el mediano y éste 2 años más que el menor. ¿Cuál es la edad de cada uno?
- 11- Se desea distribuir una suma de \$40000 entre 3 personas de modo que la primera reciba \$600 más que la segunda y ésta \$200 más que la tercera. ¿Cuánto tocará a cada una?
- 12- Si una camisa tiene un costo de \$25.000 y se pagan \$200.000 por la compra. ¿Cuál será la cantidad de camisetas pagadas?
- 13- Si la suma de dos números es 10 y la diferencia entre el doble del mayor y el menor es 8 ¿cuáles son los números?
- 14- Si la entrada a cine de 13 adultos y 4 niños cuestan \$148600, y la de 6 de adulto y 12 niños cuestan \$148.800, halla el precio de la entrada de un niño y la de un de adulto.
- 15- El perímetro de un terreno rectangular es de 30 m. El largo del terreno excede al ancho en 3 m. Calcula las dimensiones del terreno
- 16- Las edades de Brenda y Julia suman 51 años. Si al triple de la edad de Julia le restamos la edad de Brenda nos da 95 años. ¿Cuáles la edad de cada una?
- 17- Un niño se come 3 porciones y otro 2 de una tableta de chocolate dividida en 8 porciones iguales. ¿Qué parte de la pastilla se han comido entre los dos? ¿Qué parte de la pastilla les ha sobrado?

18- Se vende una botella de vino por \$ 35.800. El vino vale \$ 27.000 más que la botella.
 ¿Cuánto vale el vino y cuánto la botella?

Las tablas de ecuaciones consisten en una tabla con 19 casillas con unos objetos que representan diferentes cifras que son el resultado de la suma de cada fila. Dicho material permite hacer conjeturas y comprobarlas, como también establecer ecuaciones entre objetos y así encontrar el valor de cada uno, entre las actividades trabajadas con este material tenemos: sistemas de ecuaciones, ecuaciones lineales, polinomios y expresiones algebraicas.













				58
				93
				79
47	68	61	54	

Ilustración 8 Actividad de estructuración: ecuaciones

Bingo lenguaje es una herramienta que no funciona con las reglas tradicionales del bingo. En este las docentes en formación leen cada una de las expresiones matemáticas contenidas en las fichas y los estudiantes en parejas en otras fichas en blanco escriben la expresión mencionada en lenguaje algebraico, la pareja que primero escriba dichas expresión en la ficha debe mencionar la palabra bingo. Al verificar las expresiones escritas por parte de los estudiantes se puede decir que reconocen las expresiones y las relacionan con el lenguaje algebraico.

A continuación se presenta la ilustración 5 y la ilustración 6 referentes a la actividad bingo lenguaje.

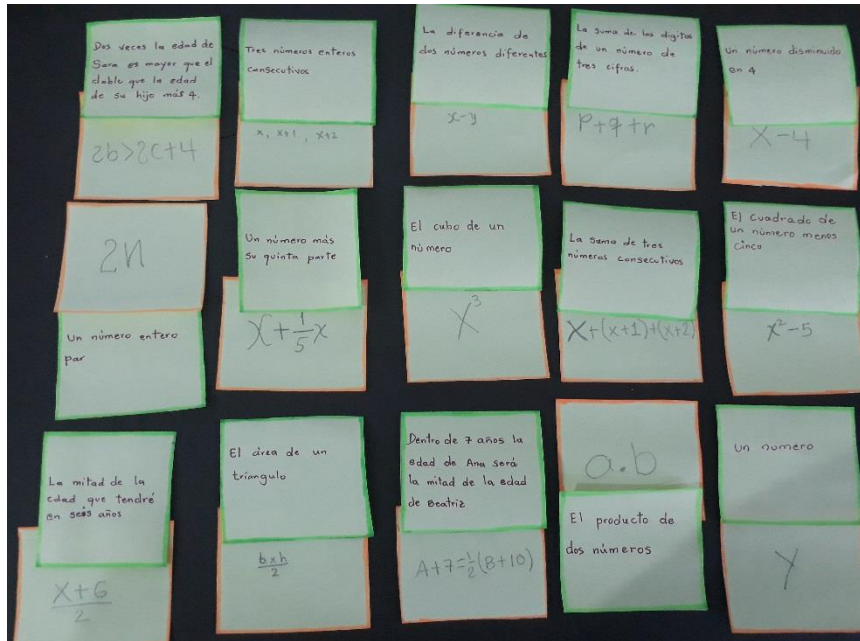


Ilustración 9, fichas con respuestas de los estudiantes

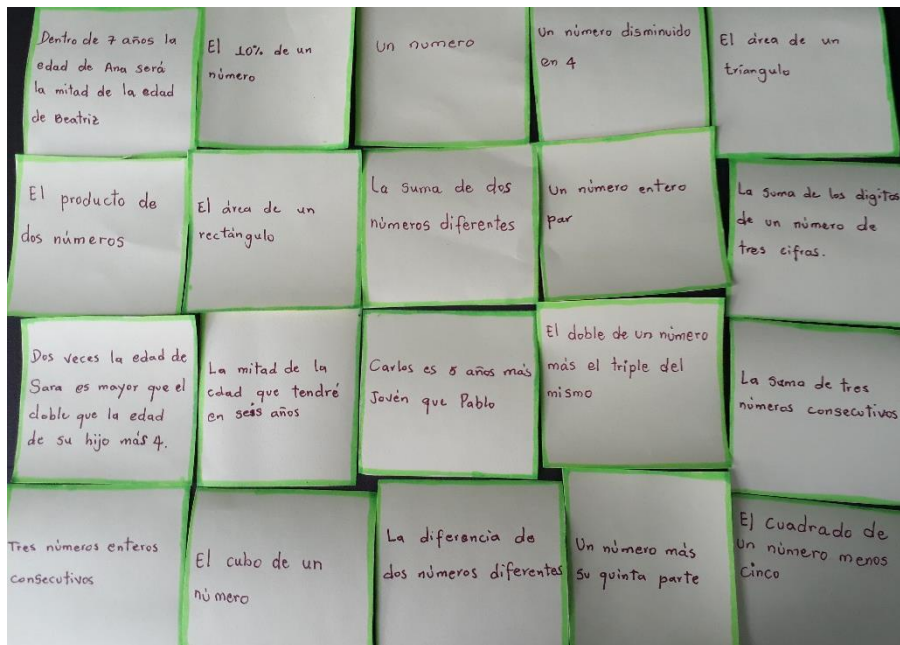


Ilustración 10, bingo lenguaje

Es importante el uso de materiales puesto que facilitan la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas además de transformar la enseñanza tradicional en una enseñanza activa en la que se relacionan los materiales con la realidad que es donde surgen los problemas planteados.



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

Ser Maestro
Nuestra esencia

Carta de autorización a la práctica pedagógica investigativa

Asunto: Solicitud de autorización

Señor
Orlando Mosquera Caicedo
Rector de la Institución Educativa Rural Pavarandó Grande
Municipio- Mutatá

Cordial saludo,

Maria Luyis Perea y Dina Luz Valencia, estudiantes de licenciatura en matemática y física de la universidad de Antioquia, solicitamos permiso para llevar a cabo la práctica pedagógica durante los semestres 2018-1, 2018-2 y 2019-1. El objetivo principal de esta práctica es analizar los procesos académicos y formativos de los estudiantes del grado noveno. Las experiencias realizadas durante la práctica pedagógica serán objeto de un proceso de reflexión, investigación y sistematización.

Por tal motivo, solicito de manera respetuosa su consentimiento para aplicar instrumentos que permitan recolectar datos acerca del proceso formativo de los estudiantes y el docente que imparte clase en el área de matemáticas. La información recolectada será tratada de manera confidencial y con fines educativos.

La presente se firma en Pavarandó a los 14 días del mes de febrero de 20018

Autorizo:

Orlando Mosquera Caicedo
Rector I.E.R. Pavarandó Grande

• Universidad de Antioquia / Calle 67 #53 - 108, Bloque 9, oficina 111 / Informes: 219 5700
• Recepción de correspondencia: calle 70 No. 52 - 21 / <http://educacion.udea.edu.co> / Medellín – Colombia



Nombre y apellido estudiantes	Nombre y apellido acudientes	Documento de identificación	Firma
Acevedo Espitia Jaider	Fanny Zapata	39400030	Fanny
Acosta Ramos Yina Milena	Cerdy Ramos H	103909829	Cerdy RH
Acosta Ramos Shirlys Yohana	Milena Ramos H.	39423903	Milena
Arias Cubides Yosmirley	Wion Aguirre	21204566	Wion
Arrieta Mestra Cristian Andrés	MORFILIA PEREZ	43775837	MORFILIA
Caicedo Sepulveda Edith	Galma Rosa Sepulveda	21693072	Galma Rosa
Corcho Tabares Juan Diego	Elizabeth Tabares	39421792	Elizabeth
Córdoba Hinestroza Andrés	Maria Cordoba	54257054	Maria C.
Cortes Arias Santiago	Martina Franco	30079699	Martina
Flores Padilla Juan Pablo	Marta Acebedo	30079699	Marta
García Villadiego Cristian C.	Yadira Padilla	30079699	Yadira
Gil Vidales Gisela	Juan Garcia	8169498	Juan
Hernández Reyes Carlos Andrés	Marta Reyes	103900355	Marta Reyes
Hernández Guisao Laura	Rigoberto Hernandez	71946955	Rigoberto
López Usuga Estefania	Aria usuga	43602915	Aria U.
López Algarin Enoc	Orza Algarin	39313389	Orza
López Rodríguez Angie Vanessa	Luz Rodriguez	39422745	Luz R.
Manchego Ladeus Tatiana	Noralba Manchego	100150320	Noralba M
Martínez de la rosa Daniel	Maria Acosta	32355620	Maria A.
Mayo López Erika V.	ERITH Lopez	102995980	ERITH
Mejía Castañeda Vanessa	Orde la rosa	43775696	Orde la rosa
Mejía Castañeda Camila	Orde la rosa	43775696	Orde la rosa
Molina Vanegas Yan Carlos	Jucy Esther Vanegas	39496926	Jucy V
Montiel Luna Tibysai	Oifa Agudelo	104549238	Oifa A.
Moreno Rios Laura	Liliana Rios Hugin	43748353	Liliana Rios
Muñoz Gil Ismaria	Liestia Gil Noreña	43189430	Liestia
Oviedo Escobar Yurleidis	Aderlis Escobar	43144504	Aderlis
Ramos Rios Manuel	Orlando Sanchez	8172202	Orlando
Rivera Mendoza Erika	Pedro Sanchez	8439177	Pedro
Santos Manchego Neider	Noralba Manchego	100150325	Noralba
Sepulveda Alcaraz Liceth	Rosa Betancur	43775692	Rosa
Sánchez Causil Luis	Doraini Usuga	21693219	Doraini
Suescun Usuga Leydi Yohana	LUZ ENITH USUGA	43203496	LUZ ENITH
Suescun Usuga Daniela	LUZ ENITH USUGA	43203496	LUZ ENITH
Suescun Usuga Victor	LUZ ENITH USUGA	43203496	LUZ ENITH

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Entrevista a el profesor cooperador

1. ¿ Tiene en cuenta usted el conocimiento que el estudiante trae al aula? ¿porque?

R// No. Porque si me dedico a ver quienes saben o no saben algunos conceptos pierdo tiempo en ello, y esos vacíos teóricos no son problema mío, más bien de los profesores anteriores que los pasan a otro grado siendo conscientes de que el estudiante no alcanzo los logros necesarios .

2. ¿Cuándo plantea una situación problema tiene en cuenta el nivel de complejidad para sus estudiantes? ¿porque?

R//NO. Tengo en cuenta que sea un grado de complejidad para un estudiante de grado noveno en general.

3. ¿Hace uso usted de material didáctico de apoyo en el aula de clases ? ¿porque?

R// No. Porque las matemáticas son exactas y rigurosas y no son para jugar con ellas por medio de actividades didácticas.

4. ¿Tiene usted un conocimiento didáctico del contenido o un conocimiento del contenido al enseñar?

R// Un conocimiento del contenido.

5. ¿Hace uso de las heurística en la resolución de problemas en su proceso de enseñanza?

R// No

Entrevista a estudiantes del grado noveno

Grado: noveno

Asignatura: matemática

1. ¿Le gustan las matemáticas ?

R// Si

2. ¿Le gusta que le planteen situaciones problemas en los temas que se le van a enseñar?¿porque?

R// No, porque los problemas me parecen muy duros de resolver y yo no soy capaz de contestar las preguntas.

3. ¿Comprende los enunciados de las situaciones problemas?

R// No

4. ¿Usa las heurísticas para resolver situaciones problemas ?

R// No

5. ¿Razona y argumenta las respuestas a las situaciones problemas planteadas? ¿porque?

R// No. Porque no las entiendo

6. ¿Tiene el conocimiento teórico necesario para la resolución de problemas matemáticos ?

R// No

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Entrevista a estudiantes del grado noveno

Grado: noveno

Asignatura: matemática

1. ¿Le gustan las matemáticas ?

R// Si

2. ¿Le gusta que le planteen situaciones problemas en los temas que se le van a enseñar?¿porque?

R// Si, porque por medio de problemas el tema es mas interesante debido a que yo estoy pensando y buscando una respuesta y el profesor no esta hablando y haciendo ejercicios que me da pereza.

3. ¿Comprende los enunciados de las situaciones problemas?

R// Si

4. ¿Usa las heurísticas para resolver situaciones problemas ?

R// si, para resolver problemas es bueno tener en cuenta las heurísticas

5. ¿Razona y argumenta las respuestas a las situaciones problemas planteadas? ¿porque?

R// si, porque debo de explicar cómo y porque llegue a esa solución

6. ¿Tiene el conocimiento teórico necesario para la resolución de problemas matemáticos ?

R// Si

Tabla 6

Observaciones de clase

categorías	Características
------------	-----------------

Conocimientos teóricos	El profesor maneja un conocimiento didáctico del contenido
Aspectos en torno a la situación problema planteada	El profesor no tiene en cuenta un grado de complejidad de sus estudiantes sino que da por sentado que según el grado ya se deben tener ciertos conocimientos
Material	El profesor no usa material didáctico de apoyo en el aula de clase
Pre-conocimientos de los estudiantes	El profesor tiene muy poco en cuenta el conocimiento que el estudiante tiene respecto al contenido que se va a enseñar

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Entrevista a estudiante del grado noveno

Asignatura: Matemática

Categorías	Observaciones
¿Utilizas heurísticas durante el proceso de resolución de problemas? ¿Cuáles?	Si las utilizo Las que más utilizo son: Hacer una tabla o dibujo para comprender mejor lo que dice el problema, escribir los datos, resolver el problema paso a paso, utilizar las variables, si no puedo resolver el problema mediante operaciones hago otra estrategia que me sirva y también verifico el problema.
¿Por qué son importantes los materiales	Los materiales son importantes porque nos

didáticos en las clases de matemática?	ayudan a comprender el tema que se está trabajando de forma más fácil.
Es claro el objetivo en cada una de las clases?	Al comienzo de la clase las profesoras nos dicen el objetivo de la clase para que sepamos un poco de lo que se va a aprender.
¿Comprendes los enunciados de los problemas? ¿Porque es importante comprenderlos?	Si. Es importante comprenderlos porque si no, no puedo solucionar el problema y no sabría que me están preguntando y que debo hacer.
¿Verificas las respuestas de los problemas y los relacionas con el enunciado?	Si.
¿Durante las clases de matemáticas son tenidos en cuenta tus conocimientos?	En cada una de las clases las profesoras nos hacen preguntas sobre el tema y nosotros damos nuestro aporte de lo que entendemos.
¿Por qué es importante la implementación de una estrategia didáctica en la enseñanza de la matemática?	Es importante porque por medio de las estrategias didácticas las matemáticas se hacen más entendibles, al igual que los problemas.
¿Por qué es importante el uso de heurísticas en la resolución de problemas matemáticos?	Es importante porque nos ayudan en la resolución de problemas que sin ellas se nos hace difícil resolverlos.

