UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

USO DE GARANTÍAS EMPÍRICAS O TEÓRICAS POR ESTUDIANTES EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ARGUMENTACIÓN DIALÓGICA

Luis Fernando Avendaño Ramírez

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de Educación Avanzada

Medellín, Colombia

2020

Uso de garantías empíricas o teóricas por estudiantes en resolución de problemas mediante argumentación dialógica

Luis Fernando Avendaño Ramírez

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de:

Magíster en Educación

Orientador:
Dr. John Henry Durango Urrego

Línea investigativa:
Educación Matemática
Grupo de Investigación: Matemática, Educación y Sociedad

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Departamento de Educación Avanzada
Medellín, Colombia
2020

DEDICATORIA

A mi madre Bernarda, por su amor sin fronteras.
A mi tía Lucy, por brindar alegría aun en tiempos difíciles.
A mi hermano Andrés Felipe, por su apoyo incondicional.
A mi novia Vale, por darme ánimo aun cuando todo parecía perdido.
A mi gran amigo Jhonatan, por su motivación en tiempos oscuros.

AGRADECIMIENTOS

Al Doctor *John Henry Durango Urrego*, por sus sabios consejos, por su confianza y entrega, por sus aportes a los planteamientos de esta investigación. Fueron muchos días de lectura y discusión compartida sobre las ideas que se documentan aquí.

A los Doctores *Manuel Goizueta*, de la Universidad Católica de Valparaíso, en Chile, y a *Eliécer Aldana*, de la Universidad del Quindío, en Colombia, por dar el visto bueno a ideas del anteproyecto, sus comentarios ayudaron a sustentar planteamientos que se documentan en este texto.

A los profesores y compañeros del *Seminario Permanente del Doctorado en Educación Matemática* de la Facultad de Educación en la Universidad de Antioquia, por sus sugerencias que aportaron grandes ideas a la escritura de este texto.

A la coordinadora académica *Rubiela Mejía* de la Corporación CENDI (Medellín, Colombia), por su confianza, por brindar el espacio y tiempo para que la investigación llegara a feliz término.

A los estudiantes que participaron de esta investigación, su apoyo y colaboración fueron fundamentales.

A *Sapiencia:* Agencia de Educación Superior de Medellín, por los recursos económicos otorgados para culminar mi formación postgraduada.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

GLOSARIO

Algoritmo: Conjunto ordenado de operaciones sistemáticas que permite hacer un cálculo y hallar solución de un tipo de problemas.

Argumentación: Actividad colectiva, comunicativa, racional y razonable compuesta por argumentos (Durango, 2017) que se usa para resolver un problema.

Argumento: Razonamiento explícito que justifica o refuta la resolución de un problema.

Conocimiento: Capacidad humana para comprender por medio de la razón, la naturaleza, las cualidades y relaciones de las cosas.

Diálogo: Discusión que surge al tratar un problema con intención de llegar a un acuerdo y encontrar una solución (Planas y Edo, 2010).

Experiencia: Conocimiento de algo, o habilidad para ello, que se adquiere al haberlo realizado, vivido, sentido o sufrido una o más veces.

Garantía: Conocimientos, puntos de vista o saberes matemáticos (Nardi, Biza y Zachariades, 2011; Durango, 2017)

Garantía empírica: Puntos de vista, experiencias y saberes de los estudiantes. Estas garantías permiten dar fuerza a un argumento mediante afirmaciones razonables que parten de la experiencia. Ejemplo: los estudiantes para conocer la cantidad de letras que pueden escribir en un renglón toman sus cuadernos y llenar un renglón de letras para luego contarlas.

Garantía teórica: Conocimientos matemáticos relacionados con definiciones, propiedades, operaciones, algoritmos, axiomas o teoremas propuestos por la comunidad matemática. Estas garantías permiten dar fuerza a un argumento mediante afirmaciones racionales que parten del acervo cultural del estudiante. Ejemplo: los estudiantes utilizan la definición de volumen para explicar relación entre longitud y la cantidad de cabello.

Heurística: Conjunto de técnicas o métodos para resolver un problema. Por ejemplo: partir el problema en situaciones sencillas para analizar las variables y proponer luego una conclusión del problema.

Problema: Situación estimulante para el estudiante que no tiene respuesta eficaz e inmediata, como una situación prevista o espontánea que produce un cierto grado de incertidumbre y como una situación tendiente a la búsqueda de su solución (Woods et al., 1985; Perales, 1993).

Procedimiento: Consiste en seguir ciertos pasos predefinidos para desarrollar una labor de manera eficaz.

Proceso: Secuencia de factores −recursos, heurísticas, controles y sistemas de creencias− y etapas −comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y examen de la solución− que se deben seguir en el camino hacia la resolución de un problema.

Producto: Es resultado de un proceso y procedimiento, y se centra en relacionar de manera estructural datos y conclusión (respuesta) del problema.

Punto de vista: Postura, consideración u opinión que adopta un estudiante, sobre un hecho, objeto o persona.

Resolución: Proceso de resolver un problema que tiene como fin una meta que se relaciona con la solución

Solución: Resultado de la acción de resolver, siempre y cuando verifique condiciones supuestas en el problema.

RESUMEN

Esta investigación informa el uso de garantías empíricas o teóricas en la resolución de tres problemas que se plantean a estudiantes del CLEI VI (grado undécimo). El primer problema se relaciona con la durabilidad de un lapicero, el segundo con una barbería y el tercero con el ahorro e inversión. Estos problemas surgen de intereses comunicados por estudiantes en una entrevista semiestructurada, y el proceso de resolución de los mismos se desarrolla mediante preguntas orientadoras y anidadas que conllevan a argumentación dialógica. El marco conceptual utiliza teorías de Pólya (1945), Schoenfeld (1992) y la argumentación dialógica desde los planteamientos de Nardi, Biza y Zachariades (2011). El análisis de datos se realiza mediante un paradigma cualitativo bajo un enfoque hermenéutico, y considera componentes de un argumento según Toulmin (2007). Por último, las principales conclusiones son: las garantías empíricas y teóricas se usan en etapas de resolución de problemas (Pólya, 1945), y se encuentra una estrecha relación entre preguntas tanto orientadoras como anidadas propuestas por el profesor y tipo de garantías que utiliza el estudiante para justificar la solución del problema.

Palabras clave: Resolución de problemas, garantías empíricas, garantías teóricas, argumentación dialógica.

ABSTRACT

This research reports on the use of empirical or theoretical warrants to resolve three problems presented to students of CLEI VI (eleventh grade). The first one is related to the durability of a pen, the second problem relates to a barber shop and the third is related to savings and investment. These problems arise from interests communicated by students through an interview, and their solution is developed through guiding and nested questions, which lead the students to dialogic argumentation. Conceptual framework uses theories by Pólya (1945) and Schoenfeld (1992). Data analysis is carried out through a qualitative paradigm from a hermeneutical approach, considering components of an argument according to Toulmin (2007). Finally, the main conclusions are: empirical and theoretical warrants are used in problem-solving stages (Pólya, 1945) and, there is a close relationship between guiding and nested questions proposed by the teacher and type of warrants used by students to argue the problem solving.

Keywords: Problem solving, empirical warrant, theoretical warrant, dialogic argumentation.

1. INTRODUCCIÓN

Algunas investigaciones sugieren reorientar la Educación Matemática hacia su uso social, que supone profundizar en el pensamiento a través de resolución de problemas, no solo mediante el uso de algoritmos (Moscovivi y Hewstone, 1985; Schoenfeld, 2013). Por tanto, se requiere dejar de lado al estudiante como un sujeto vacío de saber, en el que el conocimiento esté orientado a interpretar la realidad cotidiana.

La perspectiva investigativa sobre resolución de problemas ha cobrado importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dado que permite a los estudiantes experimentar su utilidad (Cockcroft, 1985; NCTM, 2003). Conjuntamente se muestra una relevancia sustantiva a la resolución de problemas al afirmar que es una actividad intelectual importante del ser humano en su quehacer cotidiano que puede relacionarse con actividades matemáticas. Además, se muestra como la resolución de problemas es un campo amplio de conocimientos que posee diversas acepciones y concepciones.

La resolución de problemas en Educación Matemática se configura como una actividad de mayor relevancia que se plantea en la enseñanza y el aprendizaje, ya que los contenidos cobran sentido cuando los estudiantes comprenden y asocian procesos matemáticos con diversas situaciones que se presentan en la vida diaria (Mazzilli, Hernández y De La Hoz, 2016). Además, no solo se trata de enseñar a estudiantes a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas en situaciones de la vida real.

En algunos casos, la resolución de problemas en el aula se basa en el uso de algoritmos con escasas aplicaciones, quizás por el poco conocimiento de los profesores acerca de la resolución de problemas (Piñeiro, Pinto y Díaz-Levicoy, 2015). Por lo tanto, se requiere plantear problemas que sean contextualizados para estudiantes, que partan de sus intereses y necesidades ya que, según Postman y Weingartner (1969), a menos que el estudiante no perciba un problema como problema y a lo que se ha de aprender como algo que merece la pena ser aprendido, no llegará a ser activo, es decir, no participará de su aprendizaje.

La resolución de problemas se encuentra además entre los fines de la enseñanza de las matemáticas como medio esencial para lograr aprendizajes de manera activa por ofrecer oportunidades para plantear, explorar y resolver problemas. Conjuntamente se encuentra, por un lado, la comunicación, que se relaciona con el diálogo y la discusión de ideas donde se desarrolla el razonamiento mediante la argumentación dialógica y, por otro lado, la representación, que está basada en recursos verbales, simbólicos y gráficos, donde los objetos matemáticos que no se pueden percibir son los que se interpretan con el lenguaje matemático que es representacional y se convierte en instrumental, cuando estas se refieren a palabras, símbolos o gráficas (Cruz, 2017).

Para el desarrollo de la investigación se proponen tres enunciados de problemas que surgen de intereses que manifestaron los estudiantes en una entrevista semiestructurada. Las situaciones de resolución de problemas se construyen de acuerdo con respuestas comunicadas por los estudiantes donde, a partir de sus intereses, el investigador propone una situación, por un lado, con un cierto grado de incertidumbre y por otro lado, tendiente a la búsqueda de su solución. De acuerdo con estos planteamientos se considera un problema sobre un lapicero, un problema sobre el corte de cabello en una barbería y un problema sobre ahorro e inversión. Luego se interpreta el proceso y producto de resolución que se lleva a cabo.

Por lo tanto, desde el punto de vista metodológico se pretende que los estudiantes comuniquen argumentos que conlleven a la resolución del problema que se les propone. Con este fin, se plantean algunas preguntas orientadoras, y surgen preguntas anidadas que soportan al proceso argumentativo.

El objetivo general investigativo es analizar cómo estudiantes usan garantías empíricas o teóricas en resolución de problemas mediante argumentación dialógica, y los objetivos específicos son: (1) identificar garantías empíricas o teóricas en argumentos dialógicos que comunican estudiantes en resolución de problemas, y (2) relacionar garantías empíricas o teóricas comunicadas por estudiantes con resolución de problemas mediante argumentación dialógica.

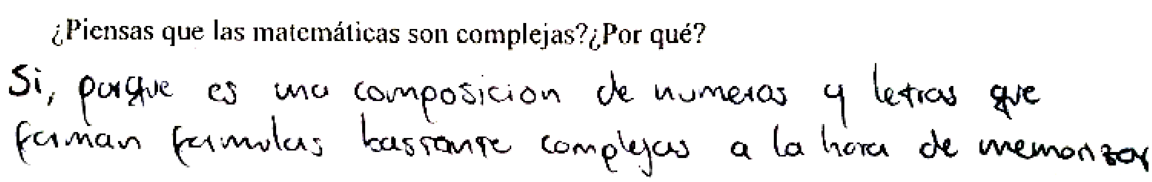
La documentación investigativa se divide en siete capítulos que se describen a continuación. El **primer capítulo** hace referencia a la introducción, que incluye el planteamiento del problema, la pregunta y los objetivos. El **segundo capítulo** presenta la revisión de literatura sobre resolución de problemas en Educación Matemática con el fin de tener un punto de partida para la construcción del marco conceptual. El **tercer capítulo** presenta el marco conceptual que se basa en la revisión de literatura que destaca planteamientos de Schoenfeld (1992) sobre factores que influyen en estudiantes cuando enfrentan la resolución de problemas, y Pólya (1945) para hacer énfasis en estrategias heurísticas para la resolución de un problema; la argumentación dialógica desde los planteamientos de Nardi, Biza y Zachariades (2011); el capítulo termina con algunas estrategias comunicativas utilizadas en la resolución de problemas que se encontraron en la revisión de literatura. El **cuarto capítulo** refiere la metodología de tipo cualitativa mediante un enfoque hermenéutico que utiliza componentes de un argumento (Toulmin, 2007) para el análisis de datos y, de esta manera, llegar a conclusiones sobre el uso de garantías empíricas y teóricas en resolución de problemas mediante argumentación dialógica. El **quinto capítulo** presenta el análisis e interpretación de datos mediante dos categorías emergentes que se relacionan con los objetivos específicos: la primera categoría es la identificación de garantías empíricas y teóricas en argumentos dialógicos que comunican los participantes en la resolución de problemas; la segunda es la relación entre garantías empíricas o teóricas comunicadas por estudiantes con resolución de problemas mediante argumentación dialógica. El **sexto capítulo** se relaciona con la discusión de los datos. Por último, el **séptimo capítulo** presenta conclusiones y recomendaciones.

1.1. Planteamiento del problema

En primer lugar, la investigación se plantea mediante un punto de vista teórico que propone el investigador sobre sus reflexiones de carácter educativo que proceden tanto del Ministerio de Educación Nacional (MEN) como de reformas curriculares acerca de la Educación Matemática, de manera específica, sobre la resolución de problemas. En segundo lugar, se plantea mediante un punto de vista práctico, a partir de observaciones que realiza el profesor-investigador cuando interactúa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el grado undécimo de bachillerato.

Desde el punto de vista teórico, en el contexto nacional colombiano, la enseñanza escolar de las matemáticas se fundamenta en políticas que se proponen con apoyo de la comunidad académica e investigativa del país, por ejemplo, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998). En estos Lineamientos, la enseñanza tiene una orientación hacia la conceptualización de las matemáticas y el desarrollo de competencias para resolver problemas. Sin embargo, se puede afirmar que los Lineamientos brindan al profesor escasas herramientas teóricas y prácticas para establecer relaciones entre resolución de problemas y uso de garantías empíricas y teóricas. En este sentido, las garantías empíricas son entendidas como puntos de vista y saberes que los estudiantes construyen en sus experiencias vividas, y las garantías teóricas son entendidas como conocimientos relacionados con definiciones, propiedades, operaciones, algoritmos, axiomas y teoremas matemáticos.

Desde el punto de vista práctico, en el contexto del aula de clase, el profesor-investigador observa que para algunos estudiantes las matemáticas son difíciles, no aplicables a la vida real y a sus oficios debido a que el conocimiento no se construye de manera social, es decir, el profesor solo 'comunica unidireccionalmente' sus conocimientos, sin considerar la interacción social, de manera particular, el diálogo. Además, es común que el profesor no considere garantías empíricas de sus estudiantes para dicha construcción; en su lugar prevalece el uso de conocimientos matemáticos ya construidos (Figura 1) que no se encuentran acordes con intereses y necesidades de estudiantes. Esta circunstancia va en contravía de ideas como las que Carpenter (1989) señala cuando afirma que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante resolución de problemas es importante para alentar a estudiantes a refinar y construir tanto saberes, como conocimientos durante un período de tiempo, ya que se descartan algunas ideas y se permite tomar conciencia de otras.


¿Piensas que las matemáticas son complejas?¿Por qué?

Si, porque es una composicion de numeros y letras que forman formulas bastante complejas a la hora de memorizar

Figura 1. Opinión de estudiante sobre matemáticas y su complejidad
Fuente: Respuesta de un estudiante a una pregunta de entrevista

Asimismo, el escaso uso que se percibe en la práctica docente del profesor-investigador entre garantías empíricas y teóricas ocasiona que algunos estudiantes consideren las matemáticas como una asignatura que no permite una relación entre teoría y práctica, es decir, que exista una gran distancia entre construcción de conocimientos y su puesta en práctica (Allen, 2009; Elliot, 2010; Álvarez, 2015). Además, algunos estudiantes comunican que no encuentran un carácter práctico de las matemáticas en el aula de clase debido a que, al resolver un problema, utilizan solo operaciones mecánicas con datos que aporta el enunciado, sin comprenderlas y sin identificar conceptos o procesos que pueden acontecer (Figura 2). Es decir, al resolver un problema, los estudiantes se centran en presentar un producto, compuesto por operaciones matemáticas, y abandona el proceso que involucra (Ozturk y Guven, 2016). En consecuencia se puede afirmar, en primer lugar, que algunas veces las soluciones no sean válidas para condiciones iniciales del problema y; en segundo lugar, que en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas existe una carencia de estrategias cognitivas, como por ejemplo, el uso de métodos heurísticos y de pensamiento crítico (Palarea, Hernández y Socas, 2001).

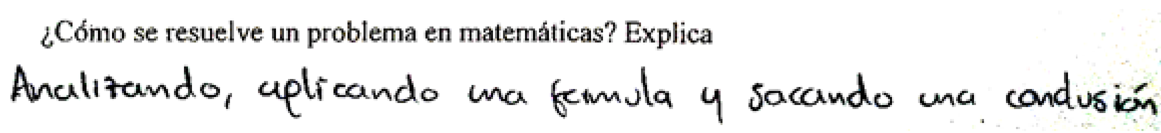

¿Cómo se resuelve un problema en matemáticas? Explica
Analizando, aplicando una formula y sacando una conclusión

Figura 2. Opinión de estudiante sobre resolver un problema con matemáticas
Fuente: Respuesta de un estudiante a una pregunta de entrevista

Se evidencia también que algunos estudiantes resuelven problemas de forma mecánica al utilizar garantías teóricas tales como definiciones, propiedades, operaciones, algoritmos, axiomas y teoremas. Al respecto Terán y Pachano (2005) afirman que en clases de matemática el profesor inicia a partir de la definición de algunos conceptos carentes de significados para estudiantes, ya que por lo general se alejan de sus vivencias. En otras palabras, el profesor abandona el uso de garantías empíricas que ayuden a presentar soluciones del problema no solo racionales[1], sino razonables[2] también. Incluso, es menester afirmar que, en algunos casos, a los estudiantes se les dificulta usar garantías teóricas que aprenden en clases de matemáticas al resolver un problema de la vida cotidiana.

[1] Racional porque permite usar conocimientos teóricos de las matemáticas para apoyar ciertos argumentos.
[2] Razonable porque los argumentos se pueden apoyar en garantías empíricas que se construyen a partir de experiencias de estudiantes.

Asimismo, el profesor no orienta, en algunos casos, a sus estudiantes mediante preguntas para que usen garantías teóricas durante la construcción de conocimientos. En este sentido, Echenique (2006) afirma que la mayor parte de problemas que se proponen en clase de matemáticas tienen como finalidad aplicar contenidos o algoritmos que se estudian y no se brinda, por parte del profesor, la oportunidad a los estudiantes para obtener conocimiento de posibles procesos que se requieren para resolverlo, encontrar una solución y desarrollar sus capacidades, de manera que en interacción con sus conocimientos, con sus saberes, con sus compañeros y con el profesor, aprendan y organicen su conocimiento como parte de su construcción personal, es decir, que mediante argumentos que se construyen entre estudiantes y profesor se pueda permitir el uso no solo de garantías teóricas sino también de garantías empíricas.

De acuerdo con los puntos de vista teórico y práctico que se han expuesto anteriormente se plantea como pregunta investigativa: *¿Cómo estudiantes usan garantías empíricas o teóricas en resolución de problemas mediante argumentación dialógica?*

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Analizar cómo estudiantes usan garantías empíricas o teóricas en resolución de problemas mediante argumentación dialógica.

1.2.2. Objetivos específicos

Objetivo uno: Identificar garantías empíricas o teóricas en argumentos dialógicos que comunican estudiantes en resolución de problemas.

Objetivo dos: Relacionar garantías empíricas o teóricas comunicadas por estudiantes con resolución de problemas mediante argumentación dialógica.

1.3. Objeto investigativo

El objeto investigativo es el uso de garantías empíricas o teóricas en resolución de problemas mediante argumentación dialógica.

2. REVISIÓN DE LITERATURA SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Durante los últimos cuatro años, la perspectiva investigativa tanto a nivel internacional como nacional en Colombia sobre resolución de problemas ha cobrado importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, por una parte, algunos informes internacionales como los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003) y Cockcroft (1985), y otros nacionales como los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), conceden y muestran una relevancia sustantiva a la resolución de problemas al afirmar que es una actividad intelectual importante del ser humano en su quehacer cotidiano que puede relacionarse con actividades matemáticas.

Por otra parte, en algunas investigaciones en Educación Matemática, como las de Moscovivi y Hewstone (1985) y Schoenfeld (2013) sugieren reorientar la educación hacia el uso social de las matemáticas, que supone profundizar en el pensamiento a través de la resolución de problemas que es un campo amplio de conocimientos que posee diversas acepciones y concepciones, donde el conocimiento esté orientado a interpretar y pensar la realidad cotidiana.

Asimismo, se encuentra que se han realizado avances investigativos significativos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante la resolución de problemas, pero se podría afirmar que existen aún escasos estudios que contribuyan a la resolución de problemas a través de la argumentación dialógica, debido a que como lo afirma Echenique (2006), durante años la mayor parte de problemas que se proponen en clase de matemáticas se basan en aplicar contenidos o algoritmos y obtener una solución del problema sin tener la posibilidad de interactuar con sus conocimientos, con sus saberes, con sus compañeros y con el profesor, y de esta manera aprender y organizar el conocimiento como parte de una construcción social.

2.1. Propósito

Con el fin de encontrar relaciones entre la resolución de problemas y la argumentación dialógica se planteó llevar a cabo una revisión sobre estudios afines con resolución de problemas que brinden elementos conceptuales que permitan la relación con la argumentación dialógica. Para ello, como objetivo de la revisión se estableció informar un posible marco conceptual emergente para estudiar la resolución de problemas a través de argumentación dialógica.

2.2. Método

Para la revisión de literatura se diseñaron tres fases conforme a Kitchenham (2004). La primera fase considera la identificación de la investigación, en este sentido, el objetivo de una revisión es encontrar estudios primarios relacionados con la pregunta investigativa utilizando una estrategia de búsqueda imparcial. La segunda fase es la selección de estudios; con este fin, se usan criterios de inclusión y de exclusión de la información que beneficien la investigación. La tercera fase se relaciona con la síntesis de datos, esto implica recopilar y resumir resultados de los estudios seleccionados de manera descriptiva.

2.2.1. Búsqueda de literatura

Para la revisión se utilizaron bases de datos del orden nacional e internacional que almacenan tesis doctorales, artículos de revista y capítulos de libros sobre resolución de problemas en Educación Matemática. Además, se consideró el uso de palabras-clave en fuentes de búsqueda de bases de datos por títulos, de manera específica, se usaron dos palabras-clave: "resolución de problemas" y "solving problem"; y se restringió la búsqueda entre los años 2015 y 2018. Al utilizar conjuntamente las palabras-clave "resolución de problemas y argumentación", y "solving problem and argumentation" las bases de datos utilizadas no arrojaron resultados.

A nivel nacional, se busca en Funes (*Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática, Universidad de los Andes,* Santa Fé de Bogotá). A nivel internacional, entre bases de datos consultadas se encuentran *Teseo, Doaj, Eric, Scielo y Springer*. La base de datos *Teseo* almacena tesis doctorales donde se utilizó la palabra-clave “resolución de problemas”; en la base de datos *Doa*j se utilizó la palabra-clave “resolución de problemas” para la búsqueda; la *Revista Enseñanza de las Ciencias* almacena artículos relacionados con didáctica de las matemáticas; y las bases de datos *Eric, Scielo y Springer*, las cuales almacenan artículos de revista en inglés, además, *Eric* fue el motor de búsqueda que arrojó mayor cantidad de documentos.

Como herramienta para el control de documentos encontrados se diseñó un archivo en Excel cuyo encabezado de tabla contenía: título, autor, año de publicación, tipo de documento, si era de fácil acceso o descarga, y por último las palabras-clave que se consideraban a partir del título y que podría aportar a los intereses investigativos (Tabla 1). Este archivo se diseñó en google drive para facilitar la revisión permanente del orientador de la investigación, segundo autor.

Tabla 1. Búsqueda de literatura.

Título	Autor	Año	Tipo	Descarga	Palabras-clave
Enseñanza basada en resolución de problemas: distancia entre conocimiento teórico y saber común	José Juan Muñoz León/ Núria Gorgorió	2015	Tesis Doctoral	Sí	Garantías

Fuente: Elaboración del autor a partir de la investigación propuesta por Muñoz y Gorgorió (2015)

2.2.2. Clasificación y organización de literatura

Se analizan aquellos estudios sobre resolución de problemas referentes a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas. Con este fin se adopta como criterio de exclusión los estudios que incluyeran categorías relacionadas con uso de tecnología para llevar a cabo el proceso de resolución de problemas; además de los estudios sobre formación inicial y continuada de profesores, ya que se alejan de los intereses investigativos.

Durante la búsqueda inicial de literatura se encontraron ciento seis documentos. Fueron descartados treinta documentos que contenían elementos teóricos o metodológicos relacionados con criterios de exclusión y luego se seleccionaron y clasificaron un total de setenta y seis documentos, de los cuales se registraron resúmenes y se registraron palabras importantes en el archivo. Además de la lectura de resúmenes se generaron algunas preguntas orientadoras para la documentación de la revisión de estudios y comentarios a la lectura del documento. (Ver Tabla 2).

Tabla 2. Clasificación y organización de literatura.

Título	Autor	Año	Tipo	Resumen/ Abstract	Palabras clave, preguntas orientadoras y comentarios
Enseñanza basada en resolución de problemas: distancia entre conocimiento teórico y saber común	José Juan Muñoz León/ Núria Gorgorió	2015	Tesis doctoral	En esta tesis se aborda el tema del pensamiento del profesorado acerca de la resolución de problemas entendida como estrategia didáctica. Se parte del supuesto de que el conocimiento del dominio teórico se transforma al trasladarse a la realidad, perdiendo o ganando propiedades, y que este nuevo conocimiento, llamado saber común, es el que condiciona el comportamiento de los estudiantes. El resultado de esta transformación es el objeto de estudio de esta investigación. Retomando la teoría de las Representaciones Sociales de Moscovici (1979) y la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa de Cantoral (2013), se acepta que el saber común es una forma de conocimiento que está presente cuando el estudiante se relaciona con un objeto o idea representando una manera de interpretar o pensar la realidad cotidiana. […]	Garantías empíricas (saber común) ¿Qué autores utilizan para definir un problema? Revisar en las referencias: ¿qué autores se utilizan para hablar de saber común?

Fuente: Elaboración del autor a partir de la investigación propuesta por Muñoz y Gorgorió (2015)

2.3. Presentación de revisión de literatura

El análisis de documentos se hizo mediante dos categorías construidas de forma emergente que estuvieran en consonancia con la pregunta y el objetivo. Las categorías se escogieron para agrupar ideas de los estudios consultados. Aunque en un inicio se consideran cuatro categorías construidas a priori, fue necesaria su reformulación, en vista de que cuando se trata el aprendizaje en y para la resolución de problemas (estudiantes), se evidencia también la mención a la enseñanza mediante la resolución de problemas (profesor); no es posible desligar la enseñanza del aprendizaje dentro de la resolución de problemas. Además, los elementos teóricos en la resolución de problemas están relacionados con asuntos prácticos y metodológicos en el aula para la resolución de problemas. Por este motivo, se documentan dos categorías: la primera categoría trata la enseñanza y el aprendizaje en y para resolución de problemas y la segunda categoría trata elementos teóricos y metodológicos en el aula para resolver problemas.

En total se seleccionan setenta y seis documentos que se leyeron de manera minuciosa para categorizar e identificar elementos teóricos y prácticos que aportaron para la presente investigación. De la totalidad de estudios seleccionados se documentan y se presenta la revisión de veintinueve que son pertinentes y se relacionan directamente con los objetivos de la investigación, aportando elementos teóricos y metodológicos en la enseñanza y el aprendizaje en y para la resolución de problemas; los demás no aportan elementos novedosos a los planteamientos de la investigación.

2.4. Hallazgos

2.4.1. Enseñanza y aprendizaje en y para resolución de problemas

Bajo esta categoría se revisaron los siguientes estudios: Arikan y Ünal (2015), Cáliz, Sepúlveda y Rico (2015), Chávez y Montes (2015), Piñeiro, Pinto y Díaz-Levicoy (2015), Trujillo y Zúñiga (2015), Abdillah, Nusantara, Subanj, Susanto y Abadyo (2016), Aljaberi y Gheith (2016), Bostic, Pape y Jacobbe (2016), Craig (2016), Domínguez y Iglesias (2017), McDonald (2017), Arnal-Bailera y Gasca (2018), Polotskaia y Savard (2018) y Tumbaco, Pavón y Acosta (2018).

Arikan y Ünal (2015) examinan habilidades para la resolución de problemas en estudiantes cuando plantean un problema. En esta investigación, plantear un problema implica la generación de uno nuevo o su reformulación mediante situaciones o problemas dados, asimismo, el planteamiento del mismo puede ser utilizado para medir creatividad, originalidad, fluidez y flexibilidad. Por lo tanto, los estudiantes deben contar con la oportunidad de crear problemas sobre temas que están estudiando y que les serán de gran valor para atribuir significados a diversas temáticas. Arikan y Ünal (2015) encuentran una fuerte relación entre habilidades para resolver problemas y capacidades que se desarrollan cuando se plantean problemas. Además, en esta investigación se evidencia que los estudiantes resuelven un problema de múltiples maneras, y concluyen que a los estudiantes se les debe brindar oportunidad para resolverlos en formas alternativas produciendo sus propios problemas.

Cáliz, Sepúlveda y Rico (2015) diseñan experiencias que posibilitan el desarrollo de la habilidad explicativa en estudiantes. Se caracterizan las competencias comunicativas en matemáticas a partir de algunas habilidades como interpretar, explicar, justificar y argumentar y se espera que estas habilidades contribuyan al desarrollo de competencias comunicativas y a los procesos de resolución de problemas. Además, concluyen que la interpretación y explicación son habilidades independientes que se complementan entre sí, ya que en ocasiones los estudiantes expresan razonamientos erróneos sin que esto impida una explicación. Esta acción permite al estudiante que está explicando recibir de sus compañeros ideas que lo conduzcan a corregir aquella mala interpretación.

Cáliz, Sepúlveda y Rico (2015) afirman que provocar discusiones alrededor del planteamiento de un enunciado proporciona explicaciones que conllevan a la búsqueda de información y estrategias cognitivas o heurísticas, que permiten la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos para facilitar la comprensión de situaciones en resolución de problemas.

Chávez y Montes (2015) proponen una categorización de problemas: bien y poco estructurados. Con este fin, estos autores relacionan la estructura de problemas con procesos que se llevan a cabo cuando se resuelven. Además, se busca analizar si la interacción entre pares favorece la solución de un problema, en este sentido, ellos reconocen la resolución de problemas poco estructurados desde la metacognición, que se entiende como la forma en la que estudiantes aprenden y comprenden sobre su entorno a través de la verbalización. Para estos investigadores, la elaboración de justificaciones durante el proceso de resolución fue escaso, asimismo, establecen fases que se deben llevar a cabo para resolver un problema: la representación del problema, la generación de soluciones, la elaboración de justificaciones, el monitoreo y la evaluación. Estas fases conllevan a que el estudiante argumente y explicite ideas que propone como soluciones.

Piñeiro, Pinto y Díaz-Levicoy (2015) proponen la resolución de problemas como alternativa de mejora en la Educación Matemática ya que consideran que su enseñanza escolar solo se basa en algoritmos con escasas aplicaciones, además afirman que se debe al escaso conocimiento de profesores acerca de la resolución de problemas. Piñeiro, Pinto y Díaz-Levicoy (2015) buscan comprender la resolución de problemas como campo disciplinar fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estos investigadores tratan distintas definiciones de problemas y resolución de problemas, entre las que se destacan la definición de Perales (1993), quien define problema como situaciones de incertidumbre que producen el efecto de la búsqueda de una solución y a la resolución como el proceso mediante el cual se realiza. Ellos concluyen que la resolución de problemas es una actividad que permite dar significado a las matemáticas.

Trujillo y Zúñiga (2015) proponen su estudio en dos momentos. En el primero se analizan diferentes invenciones de problemas haciendo énfasis en problemas como herramienta de evaluación o como medio para mejorar capacidades y actitudes, debido a que si los estudiantes tienen la oportunidad de explorar sus propios problemas, entonces éstos tomarán más responsabilidad en su propio aprendizaje. En el segundo, se hace una breve introducción del concepto de problema y se propone a los estudiantes una actividad basada en una guía en la que deben inventar problemas alrededor de dos situaciones didácticas, en la primera actividad se propone una imagen donde aparecen figuras de la vida diaria y deben crear un problema matemático que les parezca difícil de resolver y, en la segunda actividad se sugiere un enunciado verbal, en el que aparecen datos numéricos de forma explícita relacionados con la distancia, tiempo, velocidad, capacidad, peso y fuerza y al igual que en la primera actividad se busca crear un problema matemático que les parezca difícil de resolver.

Abdillah, Nusantara, Subanj, Susanto y Abadyo (2016) tratan la toma de decisiones de estudiantes para resolver un problema de descuento. Para estos investigadores, los estudiantes toman decisiones mediante el uso de estrategias y habilidades cognitivas que se desarrollan de forma intuitiva, analítica o interactiva sobre un tema específico; en este caso, sobre descuentos. Los resultados investigativos concluyen que la toma de decisiones de los estudiantes para resolver un problema de descuento comienza con la intuición, mientras que la interacción y la forma analítica son elementos que se repiten hasta que los estudiantes obtienen la solución.

Aljaberi y Gheith (2016) analizan la capacidad del profesor para resolver problemas matemáticos y problemas diarios. Es importante resaltar que se basan en etapas para resolver un problema propuestas por Pólya (1945). La primera etapa consiste en comprender el problema, en este se determinan datos e información y su adecuación. La segunda etapa consiste en diseñar un plan, es decir, quien se enfrenta a un problema intenta vincular datos e información con un resultado deseado. La tercera etapa consiste en llevar a cabo el plan, es decir, quien se enfrenta a un problema lleva a cabo un plan para resolverlo y verifica una serie de pasos necesarios para llegar a su solución. La cuarta etapa consiste en mirar hacia atrás, esto se hace con el fin de examinar la solución y verificar si sus resultados son válidos en el contexto en el que se desarrolla. Como instrumentos para recoger información, los investigadores diseñaron una escala que consta de doce preguntas de opción múltiple con diversas temáticas, como números y sus operaciones y, álgebra y patrones. La escala fue diseñada con preguntas que miden habilidades de estudiantes para resolver problemas, identificar datos y requerimientos del problema, establecer hipótesis, identificar la estrategia de resolución para luego emplearla y encontrar una solución y, por último, verificar la respuesta. Entre los principales resultados se puede afirmar que, en relación con habilidades de estudiantes para resolver problemas matemáticos y problemas diarios, estos no están correlacionados, por tanto, existe una brecha entre el uso de habilidades para la solución de problemas diarios y uso de habilidades para resolver problemas matemáticos. En otras palabras, las habilidades para la resolución de problemas están completamente separadas de la realidad y vida diaria de los estudiantes. Los investigadores recomiendan desarrollar y formar en habilidades para la solución problemas y enriquecer cursos de matemáticas enseñados a los profesores con problemas de la vida real.

Bostic, Pape y Jacobbe (2016) realizaron un experimento de enseñanza que buscaba fomentar el rendimiento de estudiantes de sexto grado. Este experimento de enseñanza proporcionó a los estudiantes un compromiso continuo en un enfoque instructivo basado en la resolución de problemas durante una unidad de matemáticas. Con este fin, los autores relacionan tres enfoques distintos para la instrucción de resolución de problemas que se relacionan con la enseñanza *sobre*, *para* y a *través de* la resolución de problemas. La enseñanza sobre la resolución de problemas implica generalmente instruir de forma heurística; la enseñanza para resolver problemas se enfoca en facilitar a los estudiantes procedimientos matemáticos con la intención de que se apliquen para resolver problemas; y la enseñanza a través de la resolución de problemas implica enseñar conceptos matemáticos a través de contextos. Estos aspectos proporcionan oportunidades para que los estudiantes desarrollen el pensamiento durante la resolución de un problema y tiene lugar en un entorno investigativo de aprendizaje.

Bostic, Pape y Jacobbe (2016) enfatizan en la enseñanza a través de la resolución de problemas, en este sentido, la instrucción alienta a los estudiantes a aprender matemáticas sin eliminar contextos como los que se encuentran en configuraciones realistas. Los estudiantes deben dar sentido a la situación del problema, a conceptos matemáticos subyacentes y a procedimientos para resolver los problemas. Los estudiantes que participan en la enseñanza tienen la oportunidad de desarrollar habilidades para resolver problemas con fluidez, las cuales pueden ayudar a que ellos construyan conexiones entre conceptos y procedimientos.

Craig (2016) plantea que escribir párrafos explicativos sobre un problema matemático ayuda a su comprensión. De forma concreta, en la investigación se solicitó a los estudiantes redactar párrafos explicativos sobre estrategias de resolución de problemas específicos, lo cual influye positivamente en la resolución. Gran parte del trabajo teórico llevado a cabo en la resolución de problemas matemáticos se basa en estrategias heurísticas (Pólya, 1945). Los resultados de Craig (2016) sugieren que el escrito aumentó la comprensión matemática del problema, que es reconocida como la primera etapa de las cuatro propuestas por Pólya (1945) para la resolución de problemas. Algunos estudiantes argumentan que el escrito proporciona una perturbación que causa desequilibrio cognitivo y que requiere del proceso reflexivo, además informan sobre cómo el escrito “los forzó” a una mayor comprensión de las matemáticas para favorecer procesos.

Domínguez e Iglesias (2017) proponen que la resolución de problemas matemáticos implica la consecución de dos actividades básicas: comprensión del texto que el problema nos plantea (competencia lectora) y ejecución de las operaciones implicadas (competencia matemática). Aquí se entiende por competencia lectora al conjunto de habilidades, conocimientos, actitudes y estrategias diversas, tanto cognitivas, como lingüísticas y pragmáticas, que adquieren solamente sentido en el uso y en la aplicación de diferentes situaciones y con distintos fines, se trata de hacer algo con lo que se lee. La competencia matemática se entiende como la habilidad para utilizar y relacionar números, operaciones básicas, símbolos y formas de expresión y razonamiento, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. Se concluye que las capacidades lingüísticas, entendidas en relación con las exigencias de proponer un modelo mental para comprender un texto son fundamentales en el proceso de resolución de problemas.

McDonald (2017) propone que los estudiantes deben enfrentarse a desafíos para mejorar sus habilidades cognitivas como el pensamiento crítico, además plantea un método para mejorar el pensamiento crítico a través de un juego de resolución de problemas llamado "The Coffee Shop". El juego consistía en que cada equipo de estudiantes que participaba contaba con un dispositivo de tableta electrónica con acceso a Internet que proporcionaba la plataforma necesaria para jugar. El juego brindaba una hoja de cálculo en Excel configurada con una serie de productos de cafetería como azúcar, leche, café, té, así como consumibles como servilletas, vasos de plástico, popotes. También mostraba la cantidad disponible representada por un número, la descripción del elemento, la unidad de medida del artículo, precio y plazo de entrega. Se proporcionaba a los estudiantes descuentos en el precio y, para que ingresara sus cantidades compradas, a cada grupo se le asignó un presupuesto de 1 000 000 VND −Vietnam Dong− para reabastecer la tienda de la mejor manera.

Según McDonald (2017), el juego "The Coffee Shop" puede ayudar a comprender la importancia de la resolución de problemas en el contexto de un entorno empresarial y añadir variación en métodos utilizados para enfrentar un problema. Esto se debe a que la resolución de problemas es un componente clave para el pensamiento crítico, y el juego es un método para su mejora a través de una enseñanza interactiva. Los resultados muestran que la práctica de escenarios de resolución de problemas mejora la habilidad del pensamiento crítico y se pueden usar juegos como método de solución de problemas para contribuir al aprendizaje.

Arnal-Bailera y Gasca (2018) muestran una secuencia de actividades basadas en el ajedrez y su capacidad para desarrollar la argumentación y la resolución de problemas. Se considera el juego del ajedrez como un recurso didáctico en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas porque se centra en la resolución de problemas y el razonamiento lógico, teniendo en cuenta que son diversas las técnicas de resolución de problemas para las actividades basadas en el ajedrez: ensayo y error, dibujar un diagrama, reducir el problema a uno más simple, separar el problema en partes o razonar hacia atrás, entre otras (Pólya, 1945). Además, en el estudio se define argumentación como una actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones para elegir entre diferentes opciones o explicaciones y razonar criterios que permiten evaluar como adecuada la opción elegida. Arnal-Bailera y Gasca (2018) concluyen que en la resolución de problemas interesa la práctica argumentativa ya que es necesario que los estudiantes razonen y expliquen por qué han realizado ciertas acciones.

Polotskaia y Savard (2018) buscan comprender dificultades de estudiantes en la resolución de problemas de aritmética cuando se enfrentan a un problema combinado, es decir, que incluya dos problemas básicos. En este sentido, los autores sugieren que la comprensión del problema se basa en el conocimiento de palabras-clave y operaciones asociadas. Para los investigadores, la mayor dificultad existe cuando se trata de un problema de palabra, entendido como datos conectados por un enlace semántico en una historia para ser transformados en números conectados por una operación. Por lo tanto, los problemas más difíciles para los estudiantes son aquellos que se expresan en un lenguaje incoherente (desconectado) que requiere de una inversión de su estructura semántica; es decir, problemas que contengan la palabra más y, sin embargo, no lleven a cabo una operación de suma. En conclusión, se requiere de habilidad conceptual y control de significados de objetos y de procesos matemáticos para la comprensión de operaciones algebraicas. Además, dadas las dificultades de los estudiantes, se debe favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico en la escuela primaria y se debe buscar conectar actividades algebraicas y aritméticas.

Tumbaco, Pavón y Acosta (2018) informan sobre la influencia que ejercen las actividades lúdicas en la inteligencia creativa de los estudiantes. Desde estos planteamientos, la actividad lúdica fomenta desarrollo psicosocial, conformación de personalidad, evidencia valores, puede orientarse a la adquisición de saberes, encerrando una amplia gama de actividades donde interactúan placer, gozo, creatividad y conocimiento. Además, el planteamiento y la resolución de problemas son partes importantes de la formación integral de los estudiantes, pues alientan el desarrollo de estructuras de inteligencia creativa, flexible y desarrolladora. Tumbaco, Pavón y Acosta (2018) concluyen que la teoría de Pólya (1945) permite medir cualitativamente cada etapa por la que el estudiante debe pasar para la resolución de problemas prácticos. Además, se destaca que los estudiantes motivados por medio de actividades lúdicas presentan mejor delineamiento imaginario del problema matemático que se propone.

2.4.2. Elementos teóricos y metodológicos en el aula para resolver problemas.

Bajo esta categoría se revisaron los siguientes estudios: Bahar y Maker (2015), Muñoz y Gorgorió (2015), Patiño y Pulido (2015), Vargas (2015), Zabala (2015), Mazzilli, Hernández y De La Hoz (2016), Ozturk y Guven (2016), Cruz (2017), Garrido y Burgos (2017), Villarreal, Muñoz, Pérez, Corredor, Martines y Porto (2017), Díaz y Díaz (2018) y Falcón, Medina y Plaza (2018).

Bahar y Maker (2015) investigan cómo algunos problemas con diferentes estructuras de tipo abiertos o cerrados pueden requerir diferentes habilidades cognitivas para alcanzar soluciones exitosas y cómo, algunas habilidades cognitivas que incluyen inteligencia, creatividad, memoria, conocimiento, capacidad de lectura, habilidad verbal, capacidad espacial y capacidad cuantitativa contribuyen y predicen el rendimiento en la resolución de un problema matemático. En esta investigación se utilizan pruebas estandarizadas para evaluar diferentes habilidades cognitivas, por ejemplo, la Prueba de Habilidad Cognitiva en Desarrollo se usó para medir habilidades verbales, espaciales y cuantitativas de los estudiantes. Esta prueba fue diseñada como una medida de características de aprendizaje y de habilidades que contribuyen al rendimiento de los estudiantes (Wick, Beggs y Mouw, 1989). Los autores concluyen que la resolución de problemas está asociada con tres conjuntos de procesos de pensamiento: comprensión, búsqueda, e implementación de soluciones. Además, la influencia de habilidades cognitivas en estos procesos de pensamiento puede variar dependiendo del tipo de problema.

Para Muñoz y Gorgorió (2015) la resolución de problemas se entiende como una estrategia didáctica en la que el conocimiento teórico se transforma mediante práctica e interacción. Por tanto, el conocimiento teórico pasa a ser conocimiento en uso, el cual se transforma cuando se usa en la realidad, mediante referencia a imágenes, concepciones, creencias y opiniones derivadas de un proceso de socialización. Precisamente este conocimiento final y práctico es llamado conocimiento común o saber común.

El saber común surge cuando los estudiantes reproducen un contenido de la ciencia para obtener otro que les sea de utilidad, donde lo que se denomina sentido común puede ser entendido como cuerpo de conocimientos construido por estudiantes que conforman un grupo, basado en tradición y en consenso; en la suma de imágenes mentales y en lazos de origen científico consumidos y transformados para servir en la vida cotidiana.

Patiño y Pulido (2015) muestran cómo los estudiantes pasan por las cuatro etapas propuestas por Pólya (1945) para resolver un problema en un contexto de la vida cotidiana, donde se entiende la resolución de problemas como una estrategia de aula en la que se respeta la autonomía del estudiante, quien aprende sobre los contenidos y la propia experiencia. Para orientar el proceso de resolución de los estudiantes se formulan distintas preguntas, buscando desarrollar las cuatro etapas propuestas por Pólya (1945) para resolver el problema. De esta manera, en la fase de *comprensión del problema* los estudiantes se centran en el análisis del contexto de la situación. Para *concebir el plan* proponen posibles pasos a seguir para llevar a cabo las acciones que indicaron en la fase anterior; este proceso los lleva a plantearse inquietudes frente a qué procedimientos matemáticos son necesarios para dar solución al problema. En la *ejecución del plan* los estudiantes tienen claro qué se debe hallar del problema. Por último, en cuanto a la *visión retrospectiva*, se realiza una socialización de las estrategias usadas por los estudiantes analizando, comparando y revisando los procedimientos matemáticos desarrollados, y se hace una ejercitación con la que se busca fortalecer los conceptos construidos durante la solución de la situación, aplicándolos en otras situaciones y problemas nuevos. Los estudiantes participan activamente en la construcción de su conocimiento, el aprendizaje se centra en el estudiante y no en el profesor o el saber matemático, se estimula el trabajo colaborativo puesto que se trabaja en pequeños grupos facilitando la interacción social.

Vargas (2015) propone la resolución de problemas con ideas del pensamiento crítico. Se analizan dos métodos de resolución de problemas. El primero basado en las cuatro etapas propuestas por Pólya (1945), donde se concluye que siempre que se resuelve un problema se debe pensar y tomar decisiones sobre los datos, el camino de resolución, y sobre el proceso para conseguir la solución, haciendo juicios críticos acerca de lo que conviene. El segundo método APRENC-Mates que tiene su origen en ideas sobre pensamiento crítico y se desglosa en Análisis del enunciado del problema (A), ¿Por qué estos datos? (P), Ruta de Resolución (R), Entorno del Problema (E), Nitidez del proceso (N) y Comprobar proceso y resultado (C). Se destacan las competencias heurísticas que se pueden desarrollar a través de este método y el énfasis que pone el pensamiento crítico en dar a otros una explicación clara y precisa de la solución de un problema, ya sea compañeros de clase o por parte del profesor hacia sus estudiantes.

Zabala (2015) plantea reconocer a la matemática como una construcción social que pretende responder a cuestiones que emergen de la interacción entre estudiantes, esto implica que su enseñanza permita a los estudiantes construir conocimientos a partir de situaciones problema en las que pongan en juego una visión creativa, critica, constructiva, argumentativa y comunicativa. Además, se propone que no es suficiente resolver diversos problemas o conocer diversas estrategias heurísticas, sino que se debe tener control en el sentido de saber si una determinada herramienta funciona y de esta manera continuar utilizándola o cambiarla. Asimismo se buscan actividades que involucren contextos cotidianos de los estudiantes que posibiliten establecer heurísticas propias que permitan controlar métodos para afrontar las situaciones problema.

Para Mazzilli, Hernández y De La Hoz (2016), los contenidos matemáticos cobran sentido cuando los estudiantes comprenden y asocian procesos a diversas situaciones que se presenten en la vida diaria. Más que enseñar a estudiantes a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas en un amplio rango de situaciones. Desde este enfoque, la resolución de problemas se configura como una actividad de mayor relevancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Mazzilli, Hernández y De La Hoz (2016) concluyen que los estudiantes poseen una visión errónea de la resolución de problemas ya que la asemejan con resolver ejercicios, dejando de lado que resolver problemas implica una actividad mental de mayor exigencia. En este sentido, estos investigadores realizan una diferencia entre ejercicio y problema. Los ejercicios son el medio de repetición constante de una actividad, orientada con la finalidad de que el estudiante asimile conocimientos y habilidades, así como su perfeccionamiento. Los problemas tienen como objetivo la aplicación de conocimientos, habilidades y hábitos para encontrar una solución.

Ozturk y Guven (2016) tratan una clasificación de factores que afectan el proceso de resolución de problemas desde diversos autores, por ejemplo, Charles y Lester (1982) categorizaron los factores en cognitivo, afectivo, y experiencia. En este sentido, Schoenfeld (1992) esboza un marco de cuatro factores diferentes que afectan a estudiantes en procesos de solución: recursos, heurística, control y sistemas de creencias. Ozturk y Guven (2016) enfatizan en creencias que pueden ser definidas como una visión matemática del mundo y que reflejan decisiones, preferencias y comportamientos que los estudiantes harán a lo largo de sus vidas, este es un factor principal que afecta el proceso de resolución de problemas. Ozturk y Guven (2016) concluyen que los estudiantes creían que fórmulas, algoritmos, reglas e incluso soluciones debían conocerse para evitar el proceso de resolución de problemas, por tanto, prevalece la creencia de que la memorización es el único método de resolución de problemas.

Cruz (2017) determina procedimientos mecánicos memorísticos en la resolución de problemas matemáticos y su incidencia en el desarrollo de habilidades cognitivas con un enfoque reduccionista. A través de la resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana, el aprendizaje adquiere un carácter práctico y funcional, ya que el correcto conocimiento de conceptos es base para un adecuado desarrollo de procesos. En este trabajo se utilizó el método heurístico relacionado con la observación de la realidad y la manifestación de una necesidad cuya solución lleve al conocimiento, y que permita que se propongan preguntas que orientan posibles soluciones.

Cruz (2017) trata algunos fines de la enseñanza de las matemáticas que se mencionan a continuación. La resolución de problemas, la cual se convierte en el medio esencial para lograr aprendizajes de manera activa, además ofrece oportunidades para plantear, explorar y resolver problemas con un esfuerzo significativo. La representación, que está basada en recursos verbales, simbólicos y gráficos, donde los objetos matemáticos que no se pueden percibir son los que se interpretan con el lenguaje matemático que es representacional y se convierte en instrumental cuando se refiere a palabras, símbolos o gráficas. La comunicación se relaciona con el diálogo y la discusión de ideas de reflexión para la búsqueda de planteamientos en donde se desarrolle el razonamiento y el perfeccionamiento. La justificación se refiere a argumentaciones inductivas y deductivas que con el razonamiento y la demostración se convierten en la herramienta especial para el conocimiento matemático. Se concluye que con la exploración de fenómenos, la formulación de conjeturas y la justificación de resultados es posible apreciar el sentido y valor de las matemáticas.

Garrido y Burgos (2017) establecen la correlación que existe entre el tipo de argumentación lógica, de manera específica, los argumentos que los estudiantes ofrecen al resolver problemas sobre conservación de la cantidad, y las estrategias de solución utilizadas al resolver problemas verbales de estructura aditiva. Los argumentos corresponden a respuestas ofrecidas de forma verbal por estudiantes frente a la tarea propuesta de conservación de la cantidad numérica y las estrategias, las cuales corresponden a todos aquellos métodos de solución utilizados por los estudiantes al resolver problemas verbales de estructura aditiva. Los autores concluyen que existe una correlación estadística entre argumentos y estrategias llevadas a cabo; mientras más evolucionados son los argumentos evidenciados en una etapa o nivel mayor de conservación, más económicos y con un nivel de abstracción mayor son las estrategias al resolver problemas.

Villarreal, Muñoz, Pérez, Corredor, Martines y Porto (2017) desarrollan actividades investigativas a partir de la resolución de problemas, mediante una propuesta didáctica en la que se usa como problema un proyecto de investigación sobre el estado nutricional de estudiantes de grado sexto de una institución educativa, a partir de indicadores tales como índice de masa corporal y talla para la edad. La investigación se llevó a cabo en una institución con un modelo pedagógico desarrollista donde se busca aprender haciendo. Las diversas actividades planteadas buscan desarrollar una serie de problemas cotidianos que permiten un acercamiento a la aplicación de la matemática a casos reales, entre ellos se resalta la medición de masa con una balanza digital, que favorece habilidades investigativas como observar, recoger y organizar información.

Villarreal, Muñoz, Pérez, Corredor, Martines y Porto (2017) concluyen que el aprendizaje basado en problemas es una propuesta didáctica que se fundamenta en que los estudiantes se enfrenten a la solución de problemas, y se privilegie tanto competencias operacionales como contenidos de aprendizaje. Además, se busca que el estudiante sea protagonista autónomo pero cooperativo del proceso de aprendizaje, donde su tarea sea diseñar soluciones para un problema a partir de fuentes de información.

Díaz y Díaz (2018) analizan potencialidades de los métodos de resolución de problemas para estimular el desarrollo del pensamiento matemático y proponen ideas para su implementación en el aula. Se presentan tres caracterizaciones acerca del pensamiento crítico. La primera, de acuerdo con Fernández (2003), menciona que es propia del pensamiento matemático la exploración de pluralidad de alternativas con coherencia lógica, la búsqueda de relaciones y el empleo de acciones mentales adecuadas para cada situación. La segunda es propuesta por Rodríguez (2003), que lo considera como una capacidad que permite interpretar información en la vida diaria, tomar decisiones en función de esa interpretación, el uso de las herramientas matemáticas incluyendo la modelación, un pensamiento analítico, crítico y flexible, tanto al razonar como al valorar razonamientos de otros. La tercera caracterización de Onuchic y Allevato (2004) relaciona el pensamiento matemático con el establecimiento de relaciones entre conocimientos, saber comunicar estas relaciones, desarrollar razonamientos, la capacidad de resolver problemas y de proponer otros. Así, hacen referencia a aspectos como: el razonamiento, la búsqueda de relaciones, el empleo del formalismo matemático, la resolución e identificación de problemas. De la investigación se concluye que el estudiante no debe ser concebido como un sujeto que sigue un conjunto de pasos para resolver problemas, sino como el sujeto activo que moviliza y desarrolla su pensamiento matemático en la búsqueda de vías de solución a los problemas.

Falcón, Medina y Plaza (2018) analizan como una dificultad en resolución de problemas la comprensión del enunciado de un problema que se presenta a los estudiantes, por no tener quizás conocimiento del vocabulario, por falta de familiaridad con la situación planteada, poca relación entre datos y pregunta. Si aparecen datos o números les generan confusión al intentar averiguar dónde ubicarlos, se encuentran también problemas de verbalización lexicales y gramaticales. Lo anterior conlleva a resultados que no siempre están de acuerdo con los conocimientos que el estudiante posee y que no siempre contribuyen a dar respuesta al problema.

Falcón, Medina y Plaza (2018) proponen un guion para analizar la comprensión, que se menciona en los siguientes términos: • Lee el enunciado despacio y asimila la idea general. • Vuelve a leerlo y si hay alguna palabra que no entiendes busca su significado o pregúntala. • Ya sabes cuál es el objetivo del problema. Escríbelo. Si no lo sabes, vuelve a leerlo, detente en la pregunta que te hacen, e intenta identificarlo. • Has encontrado los datos. Escríbelos. Fíjate con atención si hay algún dato que necesites pero que no aparezca de forma directa. Busca la forma de averiguarlo. • Trata de encontrar la relación entre datos suministrados y cuestión planteada. • Organiza la información que tienes, realiza una tabla si crees que te ayuda a verlo mejor, intenta hacer un esquema o un dibujo de la situación que representa el problema. • Intenta imaginarte la situación. Se concluye que un enunciado que no esté acorde a la capacidad de comprensión de los estudiantes generará problemas al resolverlo.

2.5. Conclusiones de la revisión

A partir de esta revisión de literatura sobre resolución de problemas se establecen seis conclusiones preponderantes para la investigación.

Primero, no hay suficientes trabajos que relacionen la resolución de problemas y la argumentación, por lo cual se hace necesario profundizar en este tipo de investigaciones, de manera que permita construir ideas sobre este campo. Algunas investigaciones que plantean esta relación son Arnal-Bailera y Gasca (2018), Craig (2016), Garrido y Burgos (2017). Sin embargo, puede afirmarse que no se trata de manera directa la resolución de problemas y la argumentación, sino que se plantean algunas formas comunicativas que se utilizan en la resolución de problemas.

Segundo, entre los estudios referentes a la resolución de problemas se brindan elementos teóricos y prácticos relacionados con la presente investigación, por ejemplo, se hace necesario tratar procesos heurísticos para promover habilidades cognitivas (inteligencia, creatividad, memoria, conocimiento y capacidad de lectura) y habilidades investigativas (observar, recoger y organizar información) en el estudiante. Además, se encuentra un vacío respecto a la función del profesor en el proceso de resolución de problemas, ya que prevalece la de orientar mediante preguntas. Algunas de estas investigaciones son Arikan y Ünal (2015), Cáliz, Sepúlveda y Rico, (2015), McDonald (2017), Bahar y Maker (2015) y Zabala (2015).

Tercero, la resolución de problemas es una actividad que permite dar significado a las matemáticas. En este sentido, autores como Arikan y Ünal (2015) y Bostic, Pape y Jacobbe (2016) resaltan el papel de la resolución de problemas y la forma en que los estudiantes tratan problemas desde diferentes puntos de vista, que permite evidenciar relaciones de las matemáticas con otros aspectos de la vida. Asimismo, la resolución de problemas genera conexiones entre ideas y distintos objetos, de esta forma se puede llevar al estudiante a una comprensión que permita relacionar las matemáticas con otras disciplinas o áreas de su propio interés (Chávez y Montes, 2015; Aljaberi y Gheith, 2016); Domínguez e Iglesias, 2017).

Cuarto, se hallaron diferentes modelos para resolver problemas matemáticos. Autores como Mazzilli, Hernández y De La Hoz (2016), Cruz (2017), Muñoz y Gorgorió (2015) y Bostic, Pape y Jacobbe (2016) convergen en la importancia de enseñar a estudiantes procedimientos para desarrollar la competencia matemática sobre resolución de problemas, mejorando su desempeño académico y comprensión de contenidos.

Quinto, la revisión de literatura muestra que para la toma de datos se utilizan problemas artificiales que poco se relacionan con intereses de los estudiantes. Solo dos investigaciones proponen problemas en contexto: McDonald (2017) con un problema de The Coffee Shop, que muestra una serie de productos de cafetería y los estudiantes deben reabastecer una tienda de la mejor manera; y Arnal-Bailera y Gasca (2018) que proponen un problema con un juego de ajedrez.

Por último, se evidencia que utilizan como principales referentes teóricos a Pólya (1945) en relación con las etapas heurísticas para la resolución de problemas y a Schoenfeld (1992) en relación con factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas. Estos dos trabajos se asumen como rectores para el estudio de la resolución de problemas. De aquí, que sean trabajos que aportan elementos teóricos a la presente investigación.

3. MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se presentan tres apartados: resolución de problemas, argumentación dialógica y algunas formas comunicativas para resolver problemas.

3.1. Resolución de problemas

3.1.1. Problema y resolución de problemas

En algunas investigaciones en Educación Matemática se plantean definiciones diversas sobre ‘problema’ de acuerdo con su intencionalidad. Por ejemplo, Woods, Crowe, Hoffman y Wright (1985) definen problema como una situación estimulante para un estudiante que no tiene una respuesta inmediata; en este sentido, el problema surge cuando el estudiante no puede dar respuesta de manera inmediata y eficaz. De manera complementaria, Perales (1993) lo define como cualquier situación prevista o espontánea que produce, por un lado, un cierto grado de incertidumbre y, por el otro, una conducta hacia la búsqueda de su solución mediante un proceso que proporcione sentido y significado a conocimientos matemáticos y a experiencias personales de estudiantes.

El proceso que se establece entre la definición de un problema y su solución supone una serie de preguntas y respuestas entre profesor y estudiantes, que se estudian para proponer la solución. De allí que la resolución de un problema supone aprendizaje de nuevos conceptos, reglas y estructuras por parte de quien lo enfrenta, y genera una construcción autónoma de nuevos conocimientos para toma de decisiones (Pólya, 1945).

Por un lado, la ‘resolución de problemas’ puede entenderse teóricamente como proceso que permite que una situación incierta sea clarificada e implica, en mayor o menor medida, tanto aplicación de conocimientos y procedimientos por parte del solucionador (Gagné, 1965; Ashmore, Frazer y Casey, 1979), como también reorganización de información almacenada en la estructura cognitiva (Novak, 1977); es decir, un aprendizaje. Por otro lado, la ‘resolución de problemas’ puede entenderse teóricamente como proceso que permite que quien aprende combine elementos adquiridos del procedimiento, de las reglas, de las técnicas y de los conceptos para dar soluciones (Nortes, 1987). Además, constituye un proceso en el que se utiliza conocimiento de una determinada disciplina, así como recursos para salvar la brecha existente entre el problema y su solución (Frazer, 1982). Asimismo, puede definirse teóricamente según los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006) como:

> Un 'proceso'[3] presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos. Estos problemas pueden surgir del mundo cotidiano cercano o lejano, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad. (p. 7)

En esta investigación se entenderá 'problema' como una situación estimulante para el estudiante que no tiene respuesta eficaz e inmediata, como una situación prevista o espontánea que produce un cierto grado de incertidumbre y como una situación tendiente a la búsqueda de su solución (Woods et al., 1985; Perales, 1993). Además, se entenderá 'resolución de problemas' como proceso y producto de una situación incierta que es clarificada y que implica la aplicación de procedimientos, reglas, técnicas, puntos de vista, experiencias, saberes, conceptos y conocimientos adquiridos de forma previa por parte del estudiante (Meyer, 1977; Gagné, 1965; Ashmore et al., 1979; Nortes, 1987).

3.1.2. Resolución de problemas: proceso y producto

3.1.2.1. Resolución de problemas: proceso

En esta investigación, la resolución de problemas se entiende como proceso en el que una situación incierta es clarificada (Gagné, 1965; Ashmore et al., 1979), y se convierte en medio esencial para lograr aprendizajes de manera activa y para ofrecer oportunidades que permitan plantear y explorar conocimientos y saberes (Cruz, 2017). En virtud de ello, algunos investigadores proponen describir el proceso de resolución de problemas tanto por etapas como por factores (Ericsson y Simón, 1980; Codina, Cañadas y Castro, 2015; Ozturk y Guven, 2016).

---

[3] Énfasis nuestro.

El proceso de resolución de problemas implica que el solucionador deba superar varias etapas. Con el fin de entender este proceso, algunos investigadores informan diferentes etapas, algunas empleadas por Codina et al. (2015), las cuales se retoman del trabajo seminal de Pólya (1945) que destacan tanto la importancia de la heurística como del razonamiento matemático. De manera ilustrativa, el modelo teórico de Pólya propone cuatro etapas por las que un solucionador de problemas debe transitar de manera sucesiva: (a) comprensión del problema, (b) concepción de un plan, (c) ejecución del plan, y (d) examen de la solución.

Otros investigadores, tales como Ozturk y Guven (2016) informan sobre una clasificación de tres factores propuesto por Charles y Lester (1982): (a) cognitivos: razonamiento, lectura, habilidades matemáticas usadas en los procedimientos y metacognición; (b) afectivos: autoconfianza, estrés, ansiedad, motivación e interés; y (c) experienciales: edad del estudiante, conocimiento previo, estrategias y familiaridad con el contenido del problema. Además, Schoenfeld (1992) esboza cuatro factores que inciden en los estudiantes durante el proceso: (a) recursos: conocimiento formal e informal sobre hechos y rutinas, (b) heurísticas: estrategias y técnicas para tratar un problema, (c) controles: métodos por los cuales los estudiantes controlan su propio problema y observan resultados parciales para decidir sobre la resolución de problemas adicionales, así como determinar cómo y cuándo utilizar recursos disponibles y (d) sistemas de creencias: visiones del mundo matemático de estudiantes, así como perspectivas hacia sí mismos, su entorno y el tema en cuestión.

Además, la resolución de problemas como proceso se relaciona con procedimientos que se basan en un conjunto de acciones u operaciones que tienen que realizarse, para obtener un resultado bajo ciertas circunstancias. Los procedimientos se realizan bajo instrucción de ciertos algoritmos que conllevan a la solución de una situación para favorecer confianza, desarrollo memorístico y no memorístico de pasos y operaciones. De acuerdo con esta idea, Kress (2017) señala que un reto que enfrentan los profesores es desarrollar métodos que apoyen el crecimiento continuo de solucionadores de problemas de manera que, en algún momento, se pueda abandonar la instrucción de procedimientos memorísticos.

Bostic, Pape y Jacobbe (2016) indican tres enfoques distintos para la instrucción en resolución de problemas que se relacionan con la enseñanza *sobre*, *para* y a *través de* la resolución de problemas. En primer lugar, la enseñanza *sobre* resolución de problemas implica instruir mediante estrategias, reglas y algoritmos una determinada actividad; en segundo lugar, la enseñanza *para* resolver problemas se enfoca en facilitar a estudiantes procedimientos matemáticos con intención de que se apliquen para la resolución, y en tercer lugar, la enseñanza *a través de* resolución de problemas implica enseñar conceptos en un entorno investigativo de aprendizaje para que los estudiantes desarrollen el pensamiento matemático durante la resolución. En este sentido, los estudiantes deben dar sentido al problema que se propone, a conceptos matemáticos subyacentes y a procedimientos para su resolución. Además, quienes participan en la enseñanza *a través de* resolución de problemas tienen oportunidad para desarrollar habilidades para hacerlo con fluidez, que pueden ayudar a construir conexiones entre conceptos y procedimientos.

3.1.2.2. Resolución de problemas: producto

La resolución de problemas como producto tiene que ver con el resultado de un proceso y procedimiento y se centra en relacionar de manera estructural datos y conclusión – respuesta– del problema.

Gascón (1994) considera que la función que se le asigna a la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas depende del modelo epistemológico que oriente su análisis, de la noción de problemas y de la forma de enseñar y aprender matemáticas. Desde estos planteamientos, se describe la resolución de problemas desde un paradigma teoricista, el cual se centra en conocimientos acabados y sustentados en teorías, y solo se considera de la resolución de problemas el fruto final de esta actividad. En este paradigma se ignoran tareas dirigidas a elaborar estrategias de resolución de problemas y, por tanto, los problemas tienden a ser trivializados y descompuestos en ejercicios rutinarios.

Una manera de relacionar estructuralmente datos y conclusión –respuesta– del problema es mediante algoritmos. En este sentido, Robayo y González (2012) analizan algoritmos como herramienta para búsqueda de nuevos datos para la resolución de problemas, y utilizan cuatro etapas: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida (Pólya, 1945). Además proponen que si durante las dos últimas etapas es posible perfeccionar, sistematizar y eximir de ambigüedades un conjunto finito de pasos que den solución al problema, se dice que este admite al menos un algoritmo de solución. De ser así, existe correspondencia entre partes del problema –datos, condiciones e incógnita– y componentes del algoritmo –datos iniciales, pasos y datos finales.

Si existe un algoritmo de solución de un determinado problema, que puede ser usado durante la resolución de otro, ya sea para encontrar más información de datos o para encontrar nuevas relaciones entre ellos, entonces se dirá que se ha usado un algoritmo en la resolución del problema (Robayo y González, 2012).

3.2. Argumentación dialógica

En esta investigación, el diálogo se entiende como una discusión que surge al tratar un problema con la intención de llegar a un acuerdo y encontrar una solución (Planas y Edo, 2010). En este sentido, mediante la forma en que el profesor genera preguntas orienta metodológicamente la construcción social de conocimiento (Leitão, Chiaro y Ortiz, 2016). Por tanto, con esta investigación se pretende estudiar un objeto investigativo a partir de una perspectiva dialógica, colectiva, comunicativa, racional y razonable que permita poner el acento en problemas cuya resolución requiera comunicar y argumentar ideas y puntos de vista. Es decir, solucionar problemas implica considerar aquellas situaciones que demandan reflexión, búsqueda e investigación, donde para responder hay que argumentar soluciones y definir una estrategia de resolución que no conduce precisamente a una respuesta rápida e inmediata (Gaulin, 2001).

Asimismo, la argumentación dialógica se define como una actividad colectiva, comunicativa, racional y razonable compuesta por argumentos (Durango, 2017). En este sentido: (a) la argumentación es una actividad colectiva en la cual se construye un argumento en conjunto entre profesor y estudiantes (Krummheuer, 2015). Es decir, en la argumentación cualquier participante aporta datos, conclusiones, cualificadores modales, garantías, soportes o refutadores para apoyar la idea que se desarrolla. El argumento se construye conjuntamente mediante las preguntas orientadoras y anidadas propuestas por el profesor y los estudiantes; (b) la argumentación es una actividad comunicativa que ayuda a resolver problemas basado en argumentos (Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina y Bruder, 2016); (c) la argumentación es una actividad racional porque permite usar conocimientos teóricos de las matemáticas para apoyar ciertos afirmaciones, y (d) la argumentación es una actividad razonable porque las afirmaciones no solo se apoyan en garantías teóricas sino que se pueden apoyar también en garantías empíricas que se construyen a partir de experiencias de los interlocutores: estudiantes y profesor.

Un argumento dialógico se conforma de preguntas orientadoras, anidadas[4] y sus respectivas respuestas, en las cuales se utilizan datos, conclusiones, garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores (Toulmin, 2007; Durango, 2017). Esta estructura permite al investigador identificar 'partes' de argumentos en diálogos, además, permite diferenciar garantías de otros componentes. A continuación, se define cada componente de estructura de un argumento.

Por dato se entenderá la evidencia empírica o teórica ofrecida previamente en preguntas o respuestas del problema que se resuelve entre quienes argumentan y que sirven como fundamento para apoyar cierta conclusión (Durango, 2017). Las conclusiones se relacionan con enunciados y puntos de vista sobre conocimientos o saberes matemáticos que pueden obtenerse en la argumentación; en este sentido, la conclusión se relaciona no solo con solución racional sino también con solución más razonable que se proponga frente a un determinado problema. Los soportes pueden relacionarse no solo con teoría de la matemática sino también con saberes involucrados en oficios que desempeñan los estudiantes, tales como empleados en papelerías, barberos y estudiantes de gastronomía. Para esta investigación se destaca un problema que se relaciona con el oficio en una papelería. Los cualificadores modales se entienden como expresiones lingüísticas usadas en un argumento por los estudiantes o el profesor para matizar un punto de vista o una afirmación. Los refutadores son aquellas dudas, objeciones o impugnaciones sobre puntos de vista o afirmaciones que un participante comunica a otros mediante argumentos. Además, los refutadores pueden identificarse en el diálogo por intermedio de protagonistas o antagonistas en la comunicación para adelantar o retrasar argumentos, respectivamente.

[4] Las preguntas anidadas surgen del discurso y de la interacción entre profesor y estudiantes. Son diferentes a las orientadoras permitiendo promover y profundizar conocimientos en la argumentación.

Las garantías se refieren a conocimientos, puntos de vista o saberes matemáticos. En este sentido, algunos investigadores proponen una clasificación de las garantías que se usan en argumentos comunicados por profesores o estudiantes (Nardi, Biza y Zachariades, 2011; Durango, 2017). En primer lugar, las garantías teóricas se entienden como conocimientos sobre definiciones, propiedades, operaciones, algoritmos, axiomas y teoremas matemáticos y, en segundo lugar, las garantías empíricas se entienden como puntos de vista y saberes que construyen los estudiantes a partir de sus experiencias vividas. Para identificar las garantías teóricas se ubica en el diálogo definiciones, propiedades, operaciones, algoritmos, axiomas y teoremas matemáticos que se usan para la solución de un problema. Para identificar las garantías empíricas se ubica en el diálogo algunos enunciados que se relacionan con experiencias personales que comunican los estudiantes.

En esta investigación se asume la explicación escrita como una habilidad cognitivo-lingüística que favorece la resolución de problemas, donde la habilidad cognitivo-lingüística permite interpretar situaciones de problemas, teniendo en cuenta el contexto social y cultural del estudiante (Martínez y Parra, 2009). Asimismo, permite evidenciar conclusiones sobre los problemas planteados, a partir de preguntas orientadoras y anidadas y sirve de medio para completar ideas expuestas en la argumentación dialógica.

Teniendo en cuenta los planteamientos anteriores, la argumentación dialógica y las explicaciones escritas son ejes fundamentales investigativos, debido a que desde el punto de vista metodológico se pretende que los participantes comuniquen argumentos que conlleven a la resolución del problema que se les propone; con este fin se plantean algunas preguntas orientadoras, y surgen otras anidadas que soportan el proceso argumentativo. Los argumentos pueden partir de experiencias de los estudiantes (garantías empíricas) o de definiciones, propiedades, operaciones, algoritmos, axiomas o teoremas matemáticos (garantías teóricas), para tratar de proponer conclusiones que conlleven a una solución racional y razonable del problema. Además, se pide a los participantes que escriban explicaciones que consideren importantes durante la resolución del problema planteado, dado que en algunos problemas deben realizar procesos u operaciones para lograr encontrar una solución racional y razonable.

Los estudiantes utilizan las explicaciones escritas para ampliar los argumentos sobre puntos de vista o conocimientos matemáticos. Esto se observa en los datos compilados, cuando los estudiantes realizan un dibujo para explicar la forma de la cabeza y sus simetrías, para analizar el volumen de tinta en un lapicero, y al realizar operaciones para llegar a conclusiones sobre determinada variable de un problema.

3.2.1. Garantías empíricas

Algunos investigadores han estudiado el uso de garantías empíricas en la enseñanza de las matemáticas mediante el proceso de resolución de problemas. Por ejemplo, para Muñoz y Gorgorió (2015) el conocimiento se transforma cuando se usa en la realidad mediante referencia a imágenes, concepciones, creencias y opiniones derivadas de un proceso de socialización; los autores lo llaman conocimiento común o saber común. Además, la resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana permite que el aprendizaje adquiera un carácter práctico y funcional, ya que el uso adecuado de conocimiento es la base para el desarrollo de procesos (Cruz, 2017).

Por su parte, Ozturk y Guven (2016) enfatizan en creencias que pueden ser definidas como una visión matemática del mundo y que reflejan decisiones, preferencias y comportamientos que las personas harán a lo largo de sus vidas.

Para efectos de la investigación, las garantías empíricas se entienden como puntos de vista, experiencias y saberes de los estudiantes. Estas garantías permiten dar fuerza a un argumento mediante afirmaciones razonables que parten de la experiencia.

3.2.2. Garantías teóricas

Al igual que como con las garantías empíricas, algunos investigadores como Ozturk y Guven (2016) han estudiado las garantías teóricas en la resolución de problemas en las que se utilizan conocimientos matemáticos como fórmulas, algoritmos, reglas e incluso soluciones de otros problemas.

Para Mazzilli, Hernández y De La Hoz (2016), los conocimientos cobran sentido cuando los estudiantes comprenden y relacionan conocimientos matemáticos con situaciones diversas que se presentan en la vida diaria; más que enseñar a los estudiantes a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar conocimientos y saberes matemáticos en un amplio rango de situaciones (Figura 3).

En esta investigación, las garantías teóricas son conocimientos matemáticos relacionados con definiciones, propiedades, operaciones, algoritmos, axiomas o teoremas propuestos por la comunidad matemática. Estas garantías permiten dar fuerza a un argumento mediante afirmaciones racionales que parten del acervo cultural del estudiante.

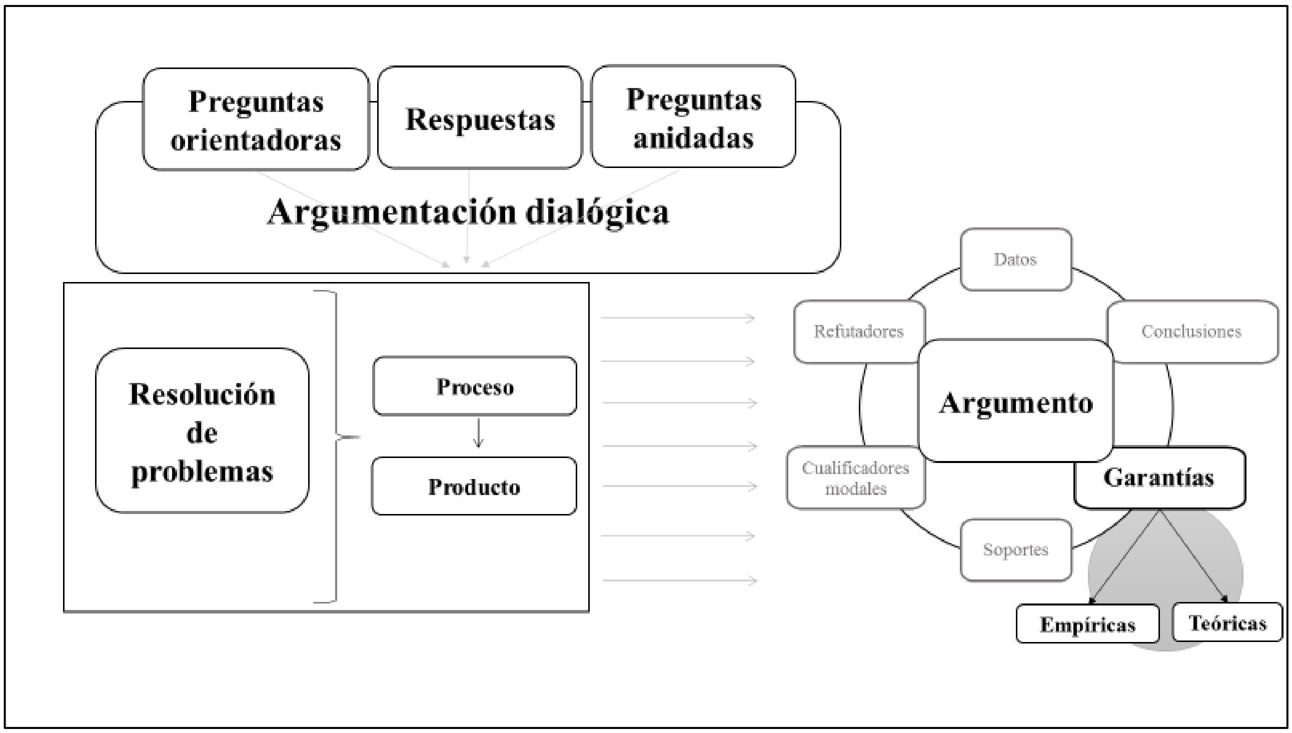


Figura 3. Esquema de la relación entre marco conceptual y metodología
Fuente: Elaboración del autor

3.3. Algunas formas comunicativas para resolver problemas

En la literatura investigativa en Educación Matemática se han propuesto diversas formas comunicativas empleadas por estudiantes para resolver problemas, por lo menos dos de acuerdo con el interés de esta investigación: forma verbal y explicaciones escritas (Ericsson y Simón, 1993; Craig, 2016; Cruz, 2017; Hastuti, Nusantara y Susanto, 2016; Özcan, Imamoglu y Katmer, 2017).

En primer lugar, una forma comunicativa se llama ‘método de pensar en voz alta’, caso en el que los estudiantes verbalizan su cognición al mismo tiempo que solucionan un problema (Ericsson y Simón, 1993). Además, esta forma permite que se utilice metacognición entendida como conocimientos sobre procesos cognitivos y conciencia que tiene un estudiante frente a la resolución de un problema; implica planificación, supervisión y evaluación de soluciones de un problema (Hastuti et al., 2016). Con este fin, en la investigación se utilizará metodológicamente la argumentación dialógica que se define como una actividad colectiva, comunicativa, racional y razonable compuesta por argumentos (Krummheuer, 2015; Durango, 2017).

En segundo lugar, otra forma comunicativa corresponde a las explicaciones escritas. Al respecto, Craig (2016) plantea que escribir párrafos explicativos sobre la resolución de un problema matemático ayuda a su comprensión, ya que permite comunicar estrategias, conocimientos o saberes utilizados. Las conclusiones de esta investigación sugieren que escribir sobre un problema aumenta su comprensión. Con este fin, en la investigación se utilizará metodológicamente, en algunos casos de manera emergente, la explicación escrita que se define como una habilidad cognitivo-lingüística que favorece la resolución de problemas.

4. METODOLOGÍA

En este capítulo se presentan en su orden: paradigma, enfoque, caracterización de participantes, rol del investigador, fases investigativas y fuentes de datos investigativos.

4.1. Paradigma

Esta investigación se enmarca en un paradigma cualitativo ya que su objetivo no es ni controlar ni predecir, sino *analizar cómo estudiantes usan garantías empíricas o teóricas en resolución de problemas mediante argumentación dialógica*. Bajo este paradigma, Lüdke y André (2007) afirman que el investigador mantiene contacto cercano, espontáneo, contextual y natural con el objeto investigativo. Por lo tanto, es un paradigma apropiado para ofrecer un análisis interpretativo de cara a contextos vivenciados, debido a que el objeto investigativo se presenta en un contexto social que se estudiará a través de la comunicación, de la argumentación dialógica, de la racionalidad y de la razonabilidad.

4.2. Enfoque

La investigación se desarrolla bajo un enfoque hermenéutico ya que el objetivo general pretende *analizar cómo estudiantes usan garantías empíricas o teóricas en resolución de problemas mediante argumentación dialógica*. En este sentido, la realidad se concibe a través de un fenómeno contextualizado en el que el profesor-investigador no solo se preocupa por la capacidad humana de los estudiantes para comunicar garantías empíricas o teóricas a través del diálogo y de la escritura, sino también por emplear un enfoque interpretativo acorde con la realidad de los estudiantes para el análisis de datos investigativos (Sánchez, 1998). Asimismo, el enfoque hermenéutico permite que el investigador interprete el objeto investigativo a partir de la interacción entre estudiantes con sus intereses, con el conocimiento y con sus experiencias (Sánchez, 1998).

4.3. Caracterización de participantes

La investigación se desarrolla en la *Institución Educativa Corporación CENDI – Centro de Desarrollo Integrado*– Medellín, Barrio Castilla. Esta es una institución de carácter público que enseña a estudiantes con extraedad permitiendo que se realicen dos grados en un año. Está avalada por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia con experiencia en trabajo de validación del bachillerato y de formación en programas técnicos para el trabajo y el desarrollo humano.

La institución cuenta aproximadamente con doscientos cincuenta estudiantes distribuidos en cuatro CLEIS (Ciclos Lectivos Especiales Integrados): CLEI 3 correspondiente a grados sexto y séptimo, CLEI 4 correspondiente a grados octavo y noveno, CLEI 5 correspondiente al grado décimo y CLEI 6 que corresponde al grado undécimo.

La investigación se realiza con trece estudiantes del CLEI 6, donde predominan estudiantes con edades entre 18 y 23 años. La distribución de los equipos se realiza de la siguiente manera: el problema relacionado con la durabilidad de un lapicero se aplicó con *Lucas, Luis, Leo y Larry*; el problema relacionado con barbería se aplicó con *Beto, Baco, Ben, Boris y Brad* y el problema relacionado con ahorro e inversión se aplicó con *Ana, Andy, Alan y Alex.*

Para el desarrollo de la investigación se cuenta con permisos del representante legal de la institución y de los participantes, además se tendrá en cuenta la normativa del comité de ética en investigaciones de la Universidad de Antioquia.

4.4. Rol del investigador

El rol como investigador se analiza desde la observación participante, la cual permite recoger los datos en el medio natural y estar en contacto con los participantes de la investigación. Este es un método interactivo de recolección de información que requiere una implicación del observador en los fenómenos que se está observando (Sampieri, 2018). Por lo tanto, la observación participante favoreció la construcción de problemas de tal manera que fueran de interés para los estudiantes, y la resolución de los mismos mediante la interacción social y la argumentación dialógica.

El dialogo parte de una pregunta orientadora que, en la observación participante, realiza el docente investigador a los estudiantes que buscan la resolución de cada problema A partir de esta pregunta, se proponen argumentos para buscar conclusiones con preguntas anidadas que orientan la resolución del problema y el análisis de las posibles variables implicadas en la solución, tanto racionales como razonables.

4.5. Fases investigativas

4.5.1. Primera fase

En esta fase se considera el planteamiento del problema investigativo y algunos estudios presentados en la revisión de literatura que sirven como fundamentos teóricos. Asimismo, para el diseño y selección de problemas se consideran las percepciones sobre resolución de problemas de los estudiantes a través de una entrevista, de tal manera que ellos planteen problemas que surgen de sus necesidades e intereses.

Los enunciados de problemas se construyen de acuerdo con respuestas comunicadas por los estudiantes en dicha entrevista donde, a partir de sus intereses, el investigador propone una situación con un cierto grado de incertidumbre y tendiente a la búsqueda de su solución.

4.5.2. Segunda fase

El pilar de esta fase es el trabajo de campo en el aula de clase. Allí se compila la información que se organiza mediante datos sobre el proceso y producto de resolución de problemas por parte de los estudiantes para generar conclusiones sobre los objetivos investigativos. Además, mediante argumentos que brindan los estudiantes, se podrá interpretar el uso de garantías empíricas y teóricas.

4.5.3. Tercera fase

Esta fase corresponde al análisis de datos que concluirá con la respuesta a la pregunta investigativa. En esta fase se busca la interpretación del objeto investigativo llevado a cabo durante la resolución de problemas en el aula, analizado a partir de argumentos que se construyen para dar respuesta a la solución del problema.

Los datos se analizan identificando argumentos en los diálogos y en las explicaciones escritas. Luego, se identificarán garantías empíricas y teóricas que comunican los estudiantes en resolución de problemas. Finalmente se estudia la relación entre garantías empíricas y teóricas para validar la solución del problema.

4.6. Fuentes de datos

Los datos se recogen mediante entrevistas semiestructurada y enunciados de problemas. A continuación, se explica cada uno de ellos.

4.6.1. Entrevista

Se realiza una entrevista semiestructurada con el fin de que los estudiantes planteen y propongan situaciones que surgen de sus necesidades e intereses. También se espera que expresen sus percepciones sin influencia de los supuestos del investigador o de los resultados de otros estudios (Creswell, 2009). La entrevista se utiliza como herramienta de selección de los problemas. En este sentido, las preguntas que conforman la entrevista son:

1. ¿Qué problemas ocurren en tu vida cotidiana?
2. ¿Cuáles problemas mencionados antes se pueden solucionar con matemáticas?
3. ¿Cómo se resuelve un problema en matemáticas? Explica
4. ¿Piensas que las matemáticas son complejas? ¿Por qué?

4.6.2. Enunciados de problemas

En la entrevista, los estudiantes proponen problemas que parten de sus intereses, prácticas, oficios y experiencias; estos se relacionan con la cocción de arroz, cuentas de servicios públicos, gastos, distribución del tiempo libre, papelerías, ahorro e inversión de dinero, barberías, tiendas o negocios de barrios, perfumerías y distribución de espacios. De los problemas mencionados, solo se proponen tres problemas diferentes a tres subgrupos de estudiantes del CLEI VI: un problema sobre un lapicero, un problema sobre ahorro e inversión y un problema relacionado con una barbería (Tabla 3).

Tabla 3. Enunciados de problemas propuestos

Enunciado del Problema 1- Grupo 1- Lucas, Luis, Leo y Larry Algunos estudiantes manifiestan que se les dificulta entender especificaciones de fabricación de lapiceros que se venden en una papelería	
Problema	Preguntas orientadoras
Tienes un lapicero negro recién comprado y sin estrenar.	¿Cuántas líneas de cuaderno es posible escribir con un lapicero hasta agotarlo completamente? ¿Cuál es el volumen de tinta de un lapicero? ¿Cuántas líneas tiene tu cuaderno? ¿Cuál es el tamaño de letra que escribes en cada línea de tu cuaderno? ¿Cuántas letras puedes escribir por línea?
Enunciado del problema 2- Grupo 2- Beto, Baco, Ben, Boris y Brad Algunos estudiantes manifiestan que quieren establecer relaciones entre las matemáticas y los oficios de una barbería	
Problema	Preguntas orientadoras
Luis va a la Barbería para que le hagan un corte desvanecido de tal forma que en la parte superior quede motilado a tres dedos.	¿Qué longitud de cabello deja cada guía de la máquina para motilar? ¿Cómo saber que el desvanecido quedó igual de alto en ambos lados? ¿Es posible motilar con tijeras de tal manera que quede igual longitud de cabello que la obtenida por la guía número uno de la máquina? ¿A qué medida de corte de cabello corresponden cada guía de la máquina para motilar?
Enunciado del Problema 3- Grupo 3- Ana, Andy, Alan y Alex Algunos estudiantes manifiestan que tienen dificultades para ahorrar e invertir y consideran que las matemáticas les pueden ayudar a optimizar gastos.	
Problema	Preguntas orientadoras
Dispones de cierta cantidad de dinero para ahorrar o invertir en una empresa.	¿Cómo distribuyes el dinero? ¿Cómo podemos definir ahorro e inversión? ¿Cómo saber que estás ahorrando?

Fuente: Elaboración del autor a partir de las respuestas de los estudiantes a la entrevista

5. ANÁLISIS DE DATOS

Los datos surgen de la argumentación dialógica entre estudiantes y profesor. Estos datos se obtienen de videograbaciones que se transcriben con el software *DragonNaturallySpeaking10.1,* conservando los diálogos originales comunicados

De las transcripciones se utilizan enunciados o afirmaciones del diálogo comunicado por los estudiantes o el profesor en sus argumentos y que se relaciona con la unidad de análisis de datos que corresponde al enunciado o afirmación del diálogo comunicado por los estudiantes en sus argumentos dialógicos que permitan al investigador interpretar el tipo de garantía que los estudiantes utilizan para establecer una conclusión al resolver un problema.

Para facilitar la documentación del análisis de los datos se utilizan esquemas de los argumentos dialógicos (Figuras). Además, se considera la siguiente estructura: (1) para nombrar los participantes se utilizan seudónimos que representan a los estudiantes, y (2) los turnos de los participantes en el diálogo se indican con un número dentro de corchetes.

Para el análisis se utilizan dos categorías emergentes. La primera es la identificación de garantías empíricas y teóricas en la resolución del problema mediante argumentación dialógica, y la segunda es la relación entre garantías empíricas o teóricas con resolución del problema mediante argumentación dialógica.

En la categoría identificación de garantías empíricas y teóricas en la resolución del problema mediante argumentación dialógica se analizan los componentes de un argumento dialógico (Nardi, Biza y Zachariades, 2011; Durango, 2017), para centrar la atención en el uso de garantías empíricas o garantías teóricas para la resolución del problema. Para ello se sigue la siguiente estructura: (1) las *garantías empíricas* se indican en un cuadro relleno de color verde claro y las *garantías teóricas* se indican con un cuadro relleno de color verde oscuro, (2) las preguntas tanto orientadoras como anidadas que propone el profesor están señaladas con un contorno negro, (3) aquellas ideas que se consideran aclaratorias –refutaciones– para la resolución del problema tienen un contorno rojo, (4) las ideas que sirven de justificación (razón), no necesariamente garantías, se representan con un contorno verde, (5) los cualificadores modales se resaltan con negrilla, y (6) las conclusiones que se proponen en la resolución del problema se representan con un contorno azul.

En la categoría relación entre garantías empíricas o teóricas con resolución del problema mediante argumentación dialógica se estudian los factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución (Schoenfeld, 1992) y las etapas de resolución de un problema (Pólya, 1945), para obtener la relación entre la resolución de un problema y el uso de garantías empíricas o garantías teóricas. Se debe tener en cuenta que las etapas para llevar a cabo el proceso de resolución de problemas (Pólya, 1945) se ubican de manera diferenciada con escala de grises. Además, los factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución (Schoenfeld, 1992) no se encuentran en el esquema dado que no se presentan en un orden específico en el diálogo. Evidenciar en los esquemas las componentes de un argumento permitió identificar *garantías empíricas o teóricas* en argumentos dialógicos que comunican los estudiantes en la resolución de problemas.

5.1. Resolución del problema sobre un lapicero

En este apartado se presenta el análisis de un problema sobre un lapicero que resuelven los estudiantes Lucas, Luis, Leo y Larry. Este problema se trató en la investigación ya que ellos manifiestan que se les extravía constantemente el lapicero negro, suponen que la tinta de uno solo les alcanzaría para escribir durante el semestre completo y consideran que comprando solo un lapicero les bastaría. Algunos de ellos trabajan en una papelería y comunican que es un utensilio muy vendido.

Con el fin de comprender las variables implicadas en la durabilidad de un lapicero –tamaño del cuaderno, volumen de tinta en un lapicero, tamaño de letra, forma de rayar el cuaderno, letras que se pueden escribir por renglón, tiempo que demoran en escribir un renglón de cuaderno–, se propusieron previamente algunas preguntas orientadoras que permitieron discutir sobre estas variables y ayudar en la resolución del problema.

5.1.1. Identificación de garantías empíricas y teóricas en la resolución del problema sobre un lapicero

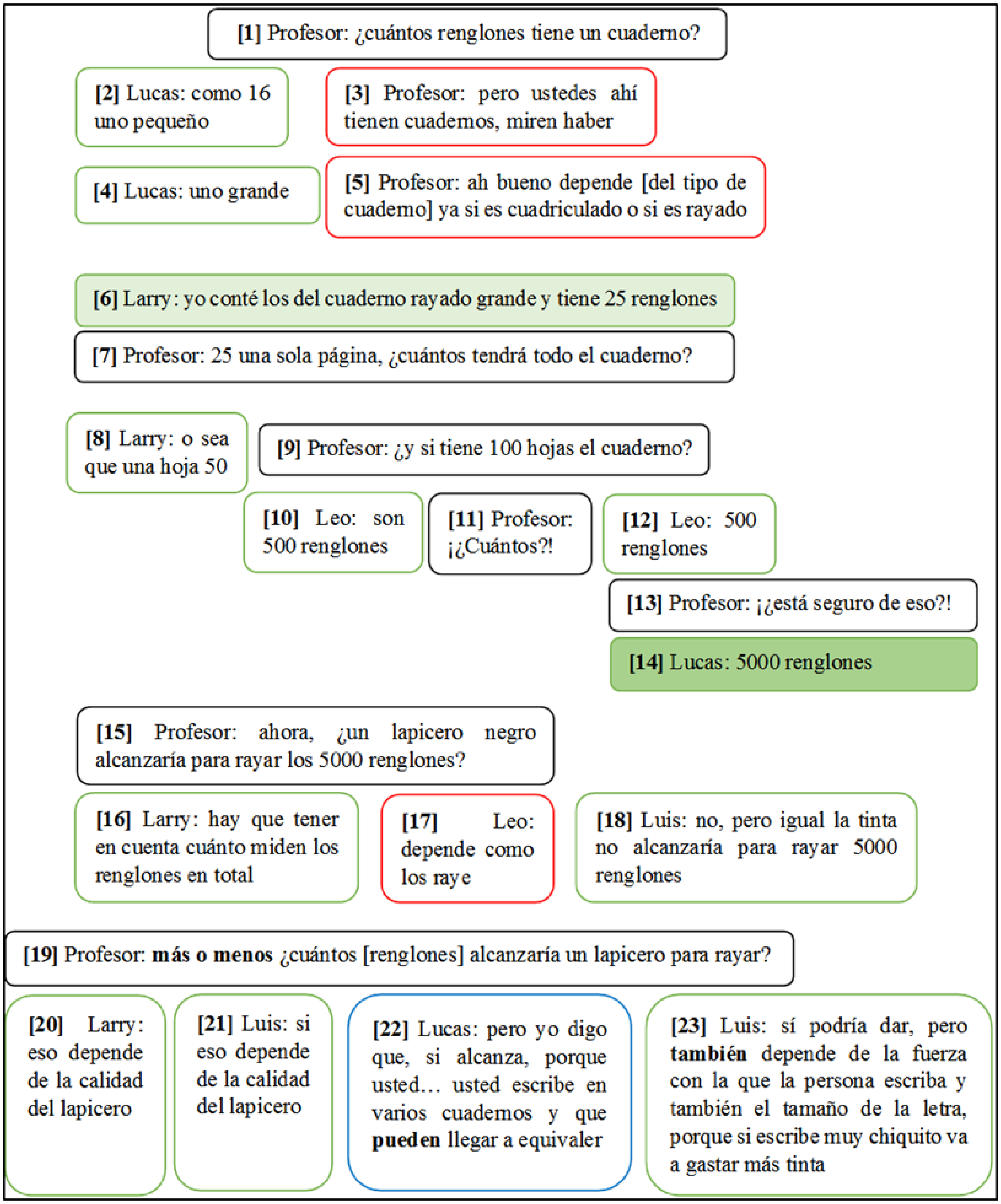


Figura 4. Esquema del argumento 1 en resolución del problema sobre un lapicero
Fuente: Elaboración del autor

El esquema del argumento dialógico 1 (Figura 4) inicia con una pregunta orientadora [1], donde el profesor busca que los estudiantes analicen especificaciones sobre cantidad de hojas y renglones de un cuaderno, y que comparen diversos tipos y tamaños de cuadernos para que se puedan controlar y predecir variables que aporten a la resolución del problema en cuestión. En este sentido, la resolución del problema inicia con una pregunta orientadora del profesor dirigida hacia sus estudiantes.

Los estudiantes utilizan como datos que una página de un cuaderno tiene veinticinco renglones [6]. Asimismo, a partir de preguntas orientadoras que realiza el profesor, consideran como dato que un cuaderno contiene cien hojas [9] y utilizan un tercer dato [14] que sirve para continuar el proceso de resolución del problema.

Las conclusiones se relacionan con preguntas orientadoras que realiza el profesor a los estudiantes. En el argumento dialógico se logra concluir que un cuaderno rayado de cien hojas contiene cinco mil renglones [14], conclusión que se relaciona directamente con el resultado de una operación matemática. Además, se pueden evidenciar conclusiones que se relacionan con puntos de vista y que no brindan necesariamente una respuesta razonable del problema [22, 23]; estas conclusiones solo se basan en un acuerdo entre los estudiantes.

Los estudiantes utilizan como soporte las características de un cuaderno e interactúan con el material tangible con cierto control sobre el problema [5]. Al decidir trabajar con un tipo específico de cuaderno, uno rayado y grande [6], se acuerda implícitamente un soporte ya que si se cambia de tipo de cuaderno se cambian características, condiciones y solución del problema.

Los estudiantes utilizan cualificadores modales como expresiones que buscan plantear una idea sobre la solución del problema [19], que manifiestan aproximación a una relación entre variables [22] o que ayudan a proponer nuevas variables implicadas en la resolución del problema [23].

Los estudiantes utilizan refutadores como objeciones o impugnaciones, por ejemplo, sobre la afirmación que comunica Leo en sus argumentos, donde manifiesta una conclusión incorrecta (Figura 5), y el profesor mediante sus objeciones y preguntas anidadas [11, 13] busca corregir tal punto de vista. Los refutadores se evidencian también cuando Leo intenta mostrar un punto de vista diferente al de su compañero [17] o al comunicar una oposición [18].

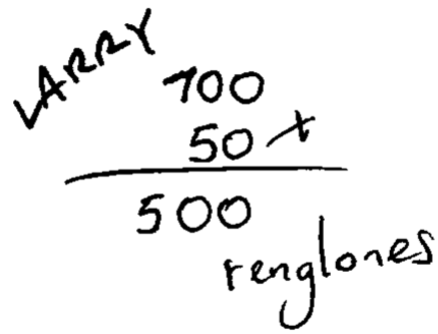


Figura 5. Operación realizada por Larry
Fuente: Tomado de explicaciones escritas por los participantes

En conclusión, los estudiantes usan *garantías empíricas* para llegar a la conclusión del problema ya que se basan en cantidad de renglones de un cuaderno en el que a diario escriben apuntes de sus diferentes materias [6]. Además, se apoyan en sus cuadernos para dar respuesta a la pregunta anidada [8].

Los estudiantes concluyen que una página de cuaderno tiene veinticinco renglones [6]. Para lograr dar respuesta a la pregunta orientadora [1] utilizan una *garantía teórica* que se basa en el principio multiplicativo que sirve para calcular cantidad total de reglones que contiene el cuaderno [14]. En este sentido, se puede evidenciar un producto de la resolución del problema partiendo de una serie de datos empíricos (*se centra en relacionar de manera estructural datos y respuesta del problema*).

[24] Profesor: ¿Cómo podemos analizar el volumen de tinta de un lapicero o cómo lo podríamos medir?

[25] Profesor: porque dentro de las especificaciones del lapicero **nunca** aparece cuánta tinta contiene

[26] Larry: según el peso de la mina vacía, y después se pesa llena

[27] Profesor: ¿solo habría esa forma, por peso?, entonces ¿**más o menos** cuánta tinta tendría ese lapicero?

[28] Larry: mililitros

[29] Lucas: centímetros cúbicos

[30] Profesor: ¿Cuántos centímetros cúbicos?

[31] Lucas: **por ahí** tres, y creo que eso es **mucho,** por ahí dos o uno, ¿no?

[32] Larry: es que **también** hay que tener en cuenta el grosor

[33] Profesor: ¿Será que se puede hallar el volumen con la fórmula del volumen de un cilindro?, ¿o no?

[34] Luis: sí, obvio

[35] Leo: si la tinta es un líquido y la forma es un cilindro, entre **más** angosto sea el cilindro **menos** líquido va a caber dentro

[36] Profesor: depende **también** de la altura ¿o será que no?

[37] Larry: y el grosor del material

[38] Lucas: pero usted no sabe cuánto mide los bordes

[39] Leo: y aparte el grosor del material, o sea una cosa es lo que usted ve por fuera, el cilindro que se ve por fuera y lo que se ve adentro que es **mucho** más angosto

[40] Profesor: ¿Cómo podríamos medir el radio de ese cilindro?, ¿o no es posible?

[41] Leo: de ser posible demás que sí, pero no sabemos

Figura 6. Esquema del argumento 2 en resolución del problema sobre un lapicero
Fuente: Elaboración del autor

El esquema del argumento dialógico 2 (Figura 6) inicia con una pregunta orientadora [24] con la que se pretende que los estudiantes propongan características que se deben considerar para calcular el volumen de tinta que contiene un lapicero, para plantear una aproximación [31] a la solución del problema.

Los estudiantes utilizan datos de la pregunta anidada que propone el profesor [36], donde muestran que la altura en la tinta del lapicero importa para saber su volumen y que es una variable que se debe considerar.

Las conclusiones se relacionan con la solución del problema. En el argumento dialógico se logra concluir que un lapicero contiene entre uno a tres centímetros cúbicos de tinta [31], aparte de la altura de la tinta, el grosor de la mina influye en el volumen [37], y, por último, aunque se podría hallar el volumen de tinta con la fórmula de un cilindro, no conocen forma de hallar el radio de un sólido tan pequeño [41].

Los estudiantes utilizan como soporte el conocimiento que tienen sobre forma de la mina del lapicero [39], y analizan que el sólido (cilindro) tiene un espesor que no se puede despreciar. Una cosa es lo que se alcanza a ver, pero se debe estudiar el volumen con su espesor.

Los cualificadores modales se utilizan para examinar una aproximación a la solución del problema [27], para estudiar la cantidad de volumen que contiene el lapicero [31, 39], para analizar variables implicadas en el volumen contenido [32, 36] y para estudiar relaciones entre variables [35, 39].

Los refutadores se pueden evidenciar en el uso de objeciones o impugnaciones sobre afirmaciones que comunican, por ejemplo, cuando Larry realiza una objeción [32] a la conclusión [31] manifestada por Lucas, donde muestra que la conclusión carece de garantías ya que no considera las características necesarias para calcular el volumen. Como refutador se puede evidenciar también que Lucas realiza una objeción [38] para mostrar un dato desconocido para la solución del problema, y así poder analizar el volumen.

En conclusión, los estudiantes utilizan *garantías empíricas* para comparar la relación entre el radio del cilindro y el volumen que contiene [35], asimismo, los estudiantes parten de la idea de que entre más grande sea un recipiente mayor volumen ocupa. Los estudiantes usan una *garantía teórica* para estudiar el volumen de un sólido, utilizan definición de volumen y crean una relación entre la diferencia de peso [26]; además, utilizan *garantías teóricas* para buscar relación entre unidades de medida para un volumen, bien sea en mililitros [28] o en centímetros cúbicos [29].

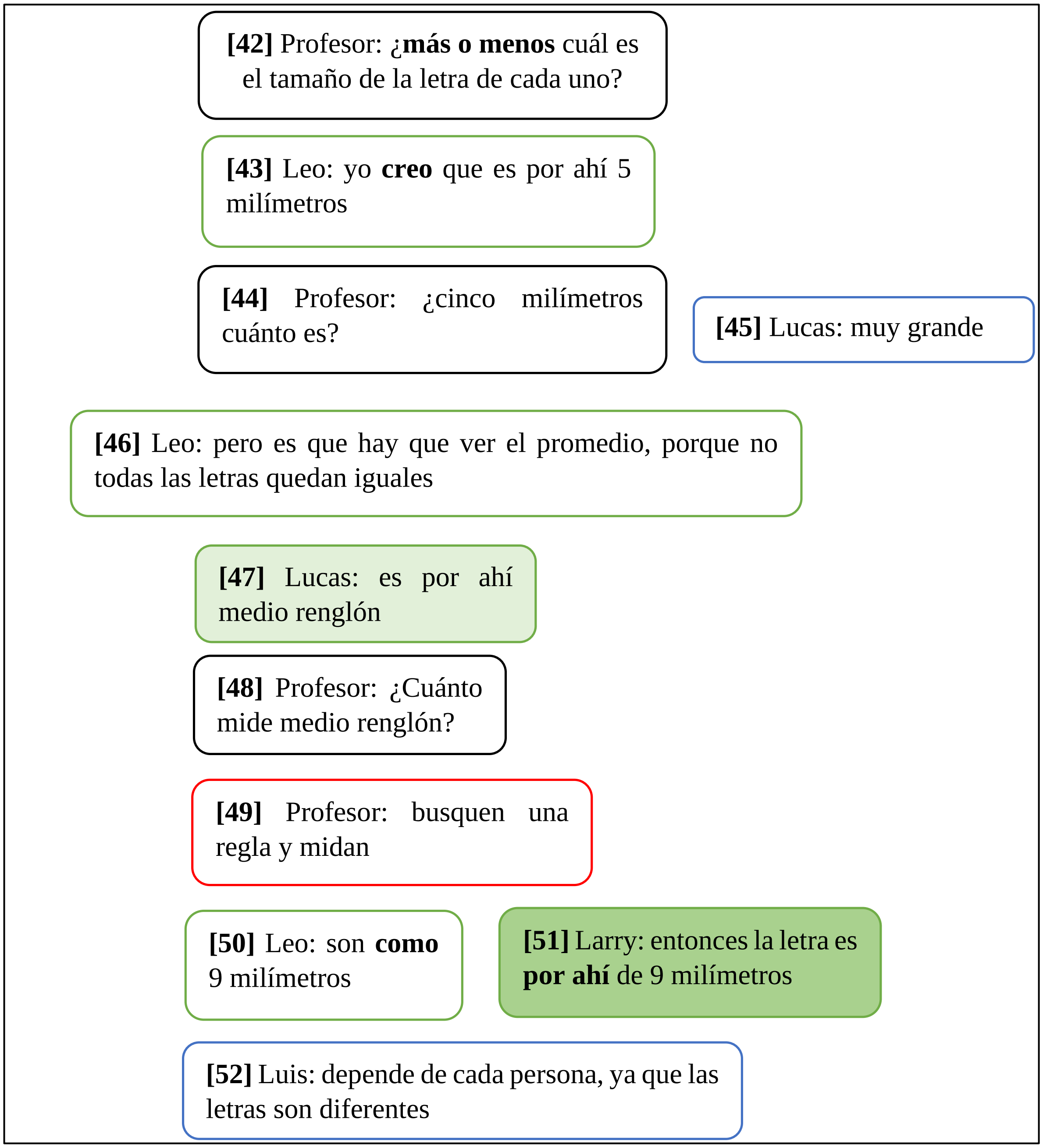


Figura 7. Esquema del argumento 3 en resolución del problema sobre un lapicero
Fuente: Elaboración del autor

El esquema del argumento dialógico 3 (Figura 7) inicia con una pregunta anidada relacionada con el tamaño de letra de cada estudiante [42]. Está pregunta anidada surge luego de que los estudiantes proponen que la durabilidad de un lapicero depende de la forma como raye el cuaderno [17]. En este sentido, se estudia la relación que existe entre forma de rayar una hoja de cuaderno y durabilidad del lapicero.

Los estudiantes utilizan como datos que el tamaño de letra es aproximadamente medio renglón [48]. A partir de este dato se realiza el proceso de resolución del problema, donde se debe analizar el promedio del tamaño de las letras debido a que el de cada estudiante es diferente [46]. Luis concluye que el análisis del promedio del tamaño de letra [52] depende de cada persona, dado que son diferentes.

Los estudiantes utilizan como soporte el tamaño de las letras de sus cuadernos [50] y una regla para medir [49] y proponer una conclusión sobre el promedio en el tamaño de letra [52].

Los estudiantes utilizan cualificadores modales para referirse a una solución aproximada [42]. Asimismo, se evidencia escaso de conocimiento teórico sobre las variables que se cuestionan [42, 48] y proponen conclusiones aproximadas [43, 51].

Los refutadores se utilizan cuando Lucas [45] realiza una objeción sobre la afirmación que comunica Leo [43] para proponer que el tamaño de una letra es de cinco milímetros.

En conclusión, los estudiantes usan *garantías empíricas* para manifestar el tamaño de letra [47], dado Lucas realiza una relación entre el tamaño de un renglón y el espacio que ocupa la letra. Asimismo, los estudiantes usan una *garantía teórica* que se basa en el sistema internacional de medidas [51], donde se usa un sistema de medidas predeterminado para una longitud (metros), pero que mediante un sufijo indica una porción de la unidad. Para llegar a garantías, utilizan la regla como un artefacto de medida [49].

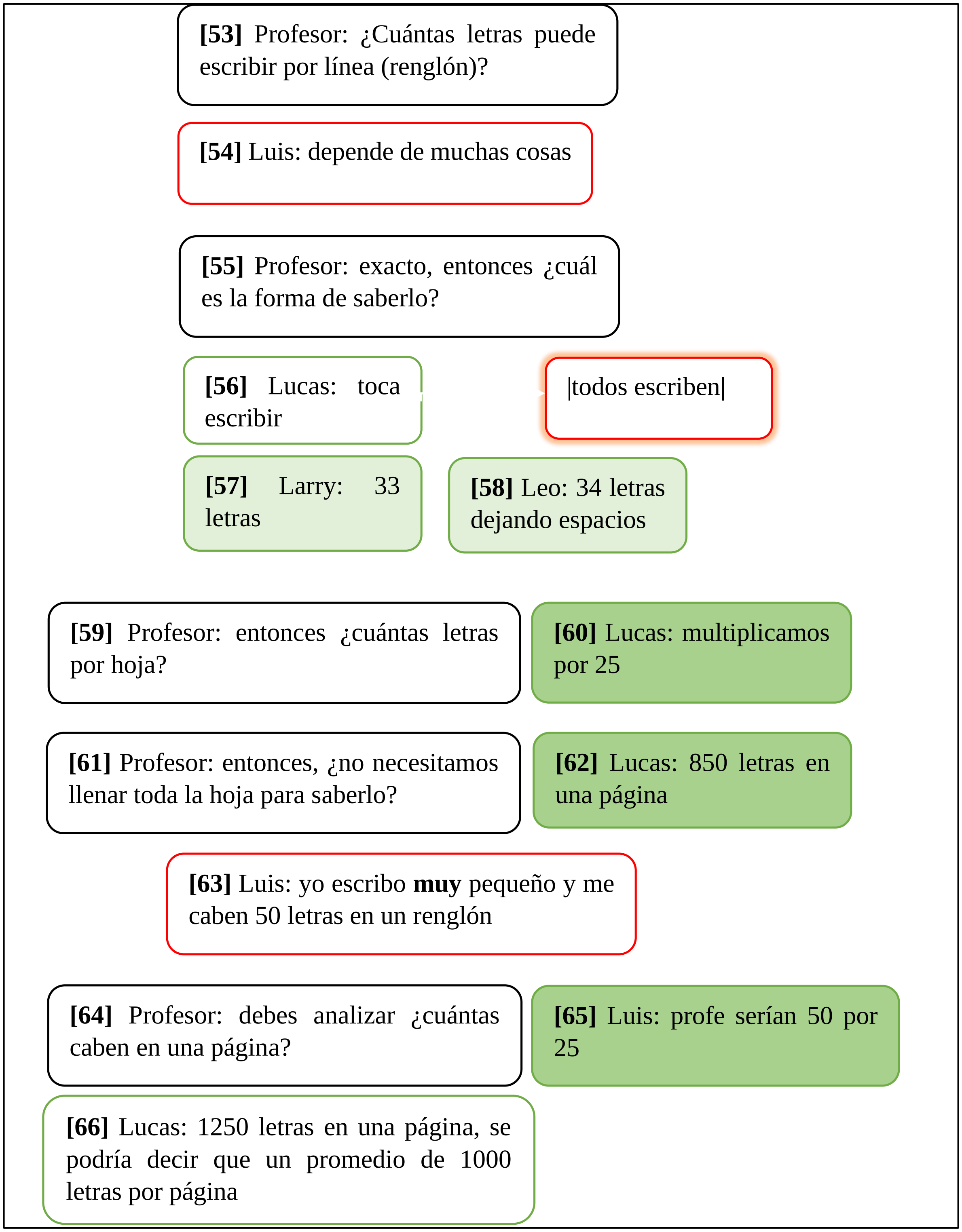


Figura 8. Esquema del argumento 4 en resolución del problema sobre un lapicero
Fuente: Elaboración del autor

El esquema del argumento dialógico 4 (Figura 8) inicia con una pregunta anidada [53] sobre el tema tratado en el argumento dialógico anterior (Figura 7). Esto se hace luego de conocer el tamaño de una letra de cada estudiante, para comprender el número de letras que caben en un renglón, en una hoja y en un cuaderno de cien hojas, estudiando la implicación de rayar el cuaderno.

Los estudiantes utilizan datos discutidos en el diálogo anterior (Figura 7) para lograr proponer la solución del problema [60] donde requieren saber que una página tiene veinticinco renglones.

En el argumento dialógico se logra concluir que existen variables [54] que se deben controlar para comunicar una solución del problema. Además, se acuerda que la manera razonable de dar solución del problema sobre cantidad de letras que se pueden escribir en un renglón es escribir [56] y, por último, luego de controlar y analizar las variables, se concluye que en promedio se pueden escribir mil letras por página [66].

Los estudiantes utilizan como soporte sus cuadernos [56] y el conocimiento de las características desde los diálogos anteriores [60, 65], para lograr proponer una solución del problema.

Los estudiantes utilizan algunos cualificadores modales para expresar una solución diferente a la de su compañero, dadas las características del tamaño de la letra de Luis [63]. Además, se utilizan para proponer una solución de la que no se tiene certeza [66], o en la que el estudiante se atreve a plantear hipótesis sobre solución del problema.

Los refutadores se utilizan en la objeción que comunica Luis [63] relacionada con la solución que ofrece al problema, dado que el tamaño de letra se sale del promedio manifestado por los demás compañeros. Luis encuentra una solución particular del problema [65].

En conclusión, los estudiantes usan *garantías empíricas* para conocer la cantidad de letras que se pueden escribir por renglón [57, 58], donde toman sus cuadernos para llenar un renglón de letras para contarlos posteriormente [56]. Además, usan una *garantía teórica* que se basa en el principio multiplicativo para calcular la cantidad de letras que se pueden escribir en una hoja [60], luego de conocer que en un renglón caben treinta y cuatro letras y que una página tiene veinticinco renglones [62]. Asimismo, Luis utiliza una *garantía* *teórica* para concluir una solución particular del problema dado que caben muchas más letras por renglón y la solución del problema cambia significativamente [66].

5.1.2. Relación entre garantías empíricas o teóricas con resolución del problema sobre un lapicero

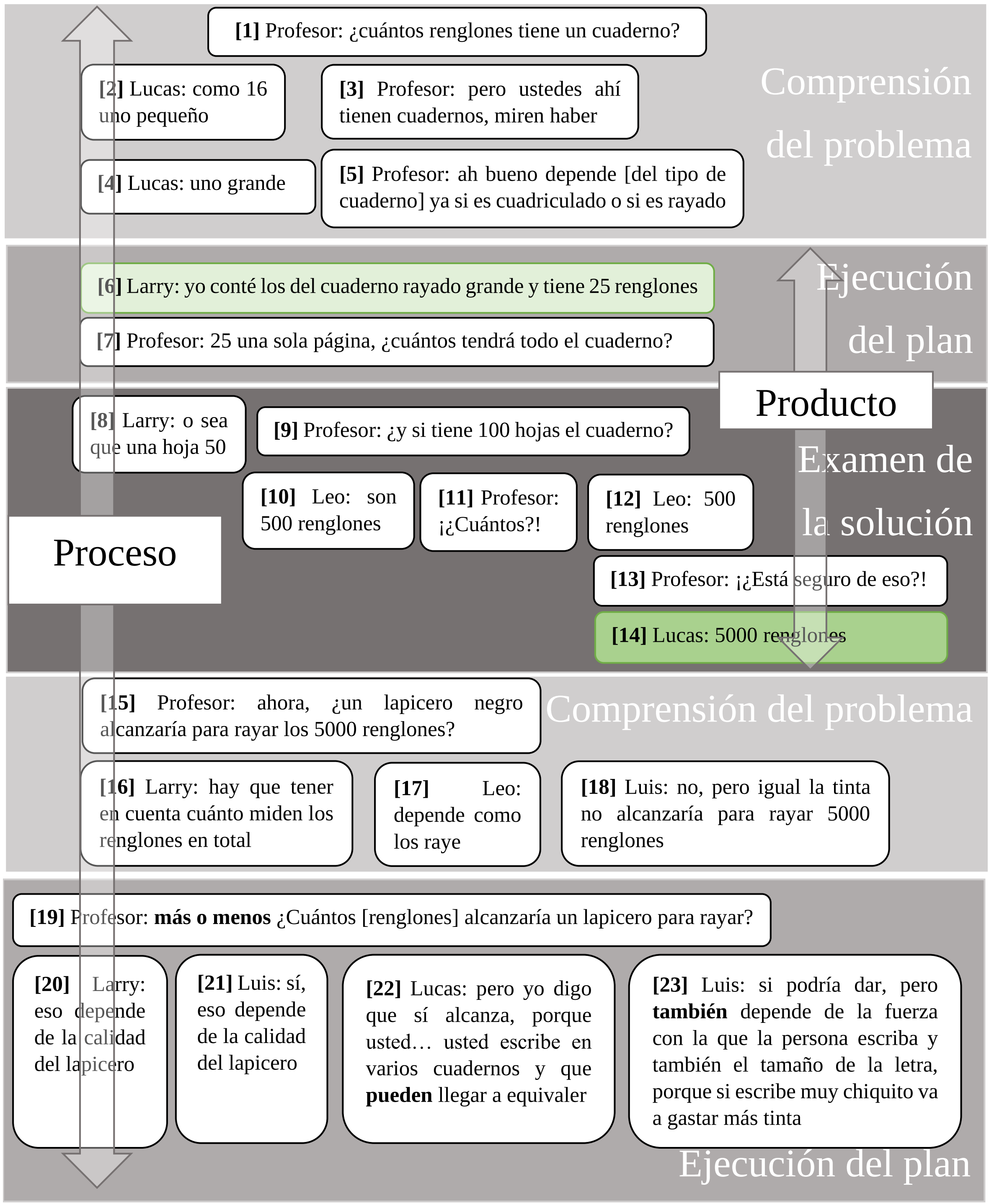


Figura 9. Esquema del argumento 1 en resolución del problema sobre un lapicero
Fuente: Elaboración del autor

El análisis de la **resolución del problema** fue emergente. En ningún momento, durante la argumentación dialógica se realizó un diseño instruccional de problemas para que los estudiantes utilizaran factores que inciden en el proceso de resolución (Schoenfeld, 1992) o las etapas heurísticas (Pólya, 1945). La resolución del problema inicia por algunas preguntas orientadoras y anidadas propuestas por el profesor o por los estudiantes.

La resolución de problemas como proceso [1-20] acontece a partir de preguntas orientadoras y anidadas del profesor, debido a que los estudiantes fueron concertando diferentes puntos de vista sobre las variables que se debían considerar para llegar a la solución.

Respecto a los cuatro factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución del problema (Schoenfeld, 1992) se puede interpretar que:

(1) Recursos: se evidencian en el uso de conocimientos sobre el número de renglones que posee su cuaderno mediante el uso de una *garantía empírica* [6] y relación que existe entre el tamaño del cuaderno y el número de renglones [12]. Estos recursos pueden relacionarse de forma directa con el uso de *garantías empíricas* ya que emplean un objeto tangible para llegar a una conclusión sobre el problema.

(2) Heurísticas: se evidencia que las preguntas orientadoras y anidadas sugieren diferentes estrategias y técnicas para tratar el problema [1, 9, 15, 19]. Con algunas de estas preguntas el profesor orienta a los estudiantes a buscar tanto variables del problema como posibles soluciones que satisfacen el problema, sin perder de vista que deben obtener una respuesta tanto racional como razonable mediante el uso de una *garantía teórica* [14]. Es decir, los estudiantes deben usar conocimientos matemáticos y conocimientos vinculados con sus experiencias.

Si se consideran las etapas heurísticas de Pólya (1945), mediante el diálogo, los estudiantes buscan llegar a una *comprensión del problema* [1-6] y comenzar a controlar y predecir variables implicadas en la solución. Se sospecha que *configuran un plan* mentalmente ya que no se percibe de forma implícita en la argumentación dialógica, debido a que utilizan *garantías empíricas* basadas en sus experiencias con el objeto tangible [6] para pasar a la *ejecución del plan* [6-7], donde el estudiante cuenta renglones de su cuaderno para proponer una solución mediante el uso de una *garantía empírica.* Se realiza de forma posterior un *examen de la solución* [8-14], paso en el que se percibe un error en la multiplicación realizada por Larry [10], y el profesor mediante preguntas anidadas [11, 13] permite que los estudiantes encuentren la solución correcta mediante el uso de una *garantía teórica* [14].

Posterior a la conclusión sobre cantidad de renglones que posee un cuaderno [14], el profesor sin perder de vista la intención del problema inicial, cuestiona a los estudiantes sobre la posibilidad de que un lapicero alcance para rayar cinco mil renglones [15]. Este cuestionamiento permite que aparezcan nuevas variables que se consideran al responder el nuevo problema. Cabe destacar que se hace necesario volver a la *comprensión del problema* [15-18] y a la *ejecución de un plan* [19-23], aunque este no conduzca precisamente a una solución, sino que permita un acuerdo entre los estudiantes. En este sentido, proponen posibles variables que intervienen [16, 17, 20, 21], se controlan algunas para poder llegar a conclusiones sobre el problema [19], y se concluye que un lapicero si alcanza para rayar cinco mil renglones, pero depende de las variables mencionadas antes [22, 23]. En este caso solo se llegó hasta la ejecución de un plan porque no se logró llegar a la solución del problema.

Las etapas heurísticas propuestas para el proceso de resolución de problemas no cumplen un orden específico cuando se analizan mediante argumentación dialógica, debido a que, luego del *examen de la solución,* el estudiante o el profesor con sus objeciones o preguntas anidadas puede recurrir nuevamente a la *comprensión del problema* [15-18], además, si se le anexa una variable al problema se requiere iniciar nuevamente con las etapas [15-23].

(3) Controles: se evidencian cuando los estudiantes deciden trabajar con un cuaderno grande y rayado [6], obteniendo un control y acotando posibilidades del problema [1]. En este sentido, los estudiantes llegan a la solución del problema bajo los controles realizados [14] concluyendo que un cuaderno grande y rayado tiene en total cinco mil renglones. De esta conclusión parten nuevos problemas [15, 19] a los cuales deben encontrar solución, además, se evidencia que los estudiantes proponen nuevos controles [16, 17, 20] para lograr proponer soluciones.

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes consideran que las matemáticas son una asignatura exacta que solo permite respuestas mentales y rápidas [2]. Prefieren proponer una solución rápida que una solución correcta y que parta del uso de *garantías empíricas* que implique contar renglones [6] o del uso de *garantías teóricas* al aplicar operaciones, tales como la multiplicación (50 *100) [14]. Asimismo, los sistemas de creencias en este problema cambian a medida que se avanza en el proceso, y los estudiantes emplean el tiempo para contar [8], rayar y medir [16] y, de esta manera, proponen soluciones tanto racionales como razonables.

La resolución de problemas como **producto** [6-14] acontece a partir de la multiplicación de datos emergentes que los estudiantes concluyeron [8] Desde el punto de vista del análisis es un producto ya que, bajo los mismos supuestos de que cincuenta renglones que contiene una hoja por cien hojas de un cuaderno, da como solución cinco mil renglones. De allí, se presume una relación estrecha entre resolución de problemas como producto y el uso de *garantías teóricas* como soporte para la solución de un problema o conclusión. Además, se debe tener en cuenta que se utilizó un proceso para lograr concluir datos aportados para el producto.

En la explicación escrita, Larry plantea la multiplicación entre el número de renglones por hoja y el número de hojas del cuaderno (Figura 7), pero no concluye la solución correcta [10]. Mediante preguntas anidadas [11] el profesor orienta al estudiante; Lucas logra plantear la multiplicación y concluir de manera correcta [14], para analizar el número de renglones que tiene el cuaderno (Figura 10).

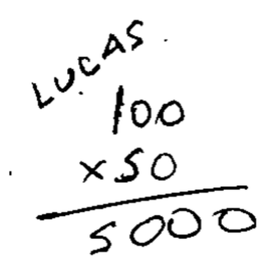


Figura 10. Operación realizada por Lucas
Fuente: Tomado de explicaciones escritas por los participantes

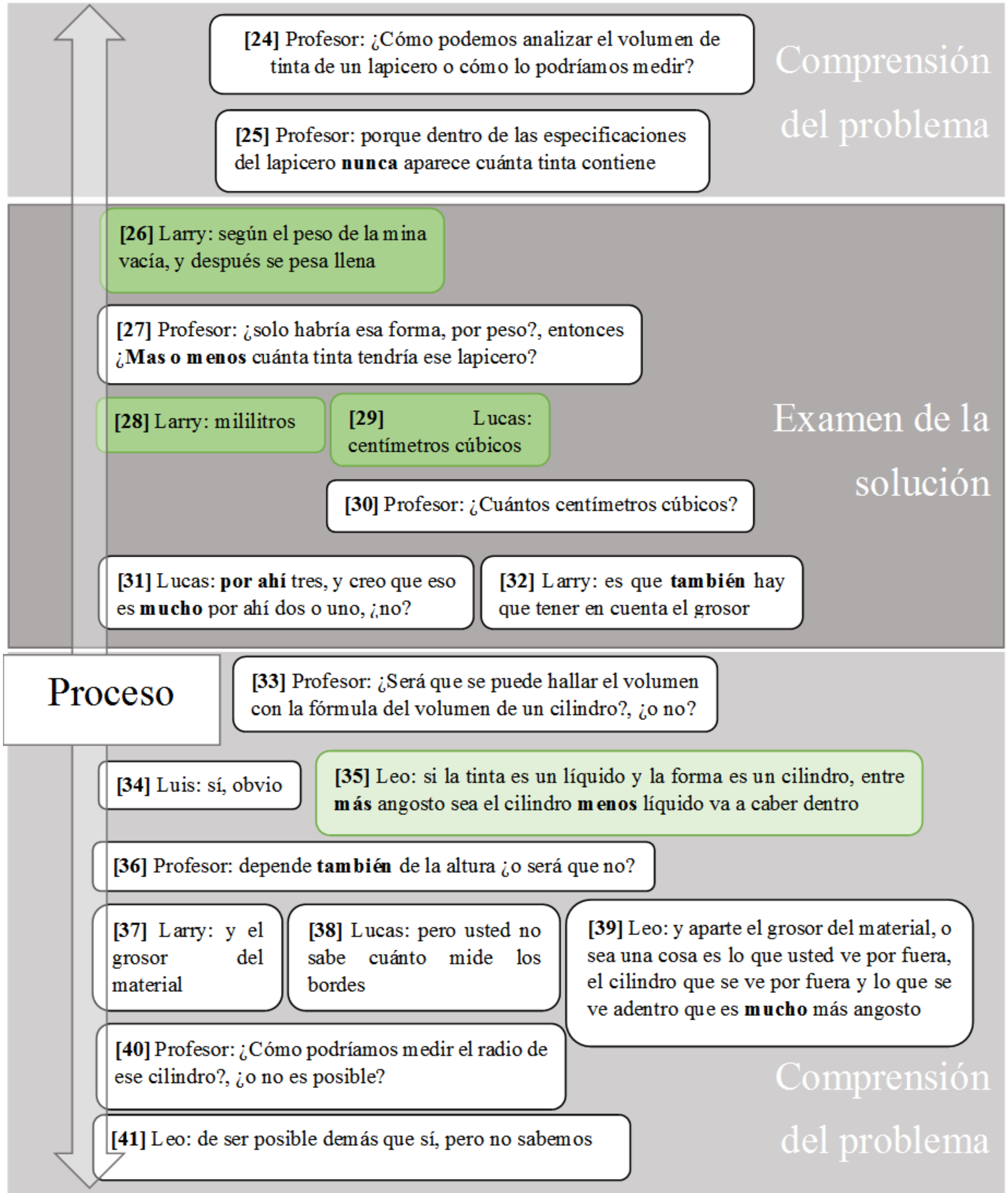


Figura 11. Esquema del argumento 2 en resolución del problema sobre un lapicero
Fuente: Elaboración del autor

Al analizar los factores que inciden en los estudiantes durante el proceso [24-41] de resolución del problema (Schoenfeld, 1992) se puede afirmar:

(1) Recursos: los estudiantes utilizan conocimientos sobre forma que tiene la mina del lapicero y relación que existe entre el tamaño y la capacidad que contiene. Estos recursos se pueden vincular con el uso de *garantías teóricas*, ya que para calcular el volumen de tinta es necesario conocer y controlar estas variables.

(2) Heurísticas: las preguntas orientadoras y anidadas que propone el profesor [24, 27, 30, 33, 36, 40] permiten que los estudiantes utilicen diferentes estrategias de solución para proponer conclusiones sobre las variables en cuestión. De igual forma, los estudiantes utilizan como estrategia de solución fraccionar el problema en preguntas más simples que les permitan ejercer control sobre ellas [34-39] para resolver el problema principal.

La resolución de problemas como proceso acontece a partir de la *comprensión del problema* [24-25], donde se crea la necesidad de conocer especificaciones del lapicero. Dado que no se especifican [25], los estudiantes *configuran el plan* y lo *ejecutan* en su mente ya que no se percibe en el diálogo. Proponen una solución del problema y pasan a *examinarlo* [26-32], con nuevas variables implicadas en la solución mediante el uso de *garantías teóricas* [28, 29]. Dichas variables se estudian y es necesario volver a *comprender el problema* [33-41]; usan una *garantía empírica* [35] para comunicar una relación entre un cilindro y su volumen. No se cumplen las etapas heurísticas ya que no se logró pasar de la *comprensión del problema*, mediante el estudio de algunas variables.

(3) Controles: los estudiantes utilizan como control las unidades de medida en centímetros cúbicos [29], proponiendo conclusiones sobre algunas variables del problema mediante el uso de *garantías teóricas* [28, 29]. En este sentido, se percibe escaso control de la variable del problema, ya que no logran proponer una solución.

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes consideran que las matemáticas admiten no tener conocimientos totales de los objetos o de sus cualidades [41]. Se percibe que los sistemas de creencias de los estudiantes cambian a medida que avanzan en la solución del problema.

La resolución de problemas como **producto** no se propone dentro de la solución del problema, dado que se basó en el estudio de estrategias de solución.

En la explicación escrita, Larry diseña un dibujo para analizar la forma del lapicero [35] y explicar la importancia del grosor [37] para hallar el volumen (Figura 12).

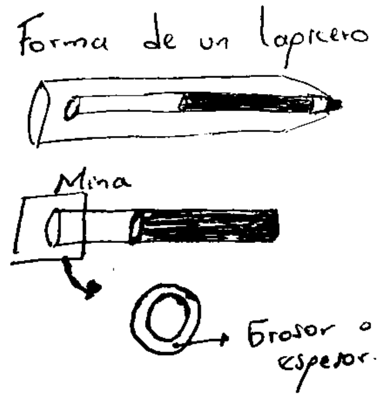


Figura 12. Dibujo de un lapicero realizado por Leo
Fuente: Tomado de explicaciones escritas por los participantes

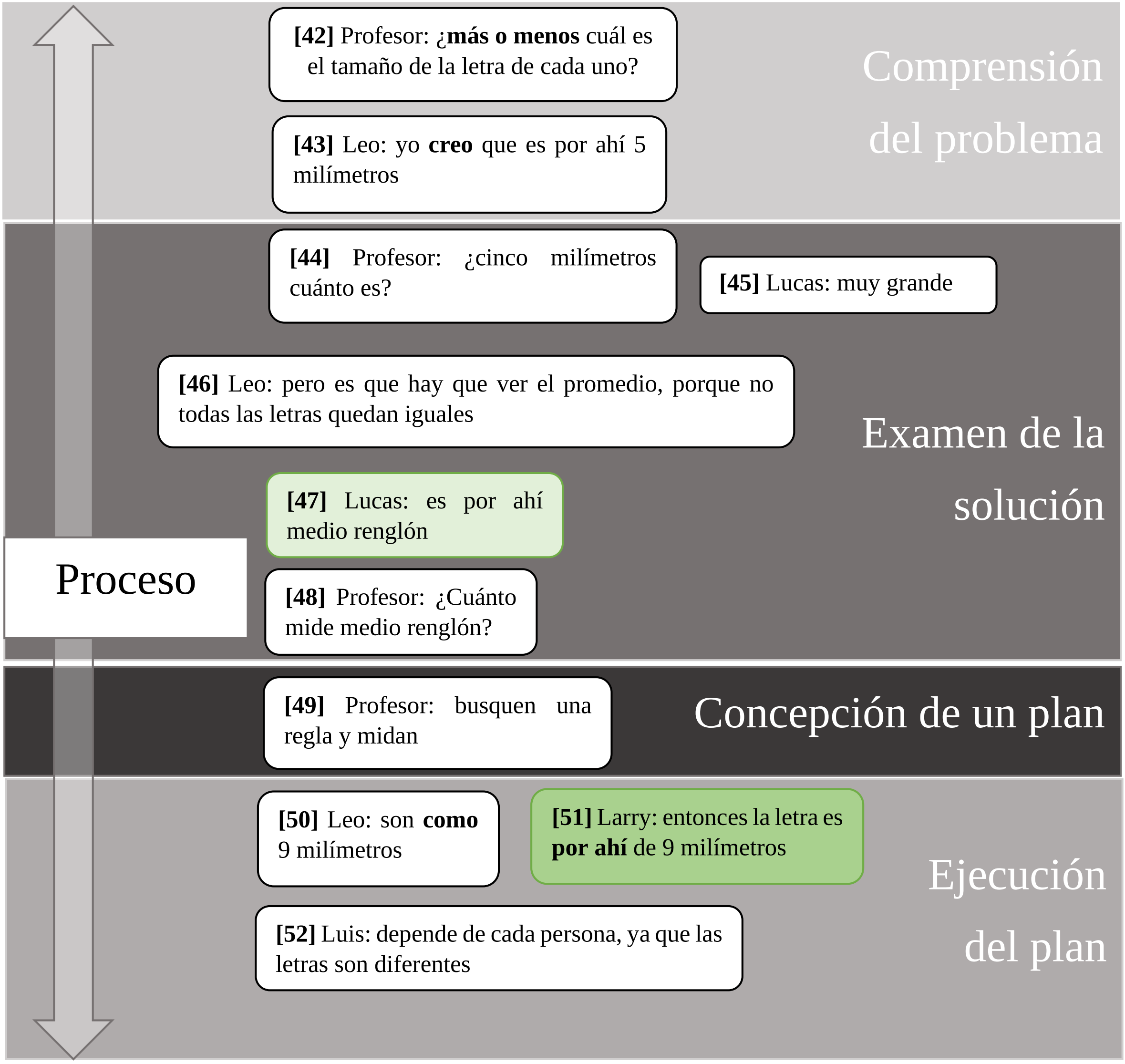


Figura 13. Esquema del argumento 3 en resolución del problema sobre un lapicero
Fuente: Elaboración del autor

La resolución de problemas como proceso [42-52] requiere de estrategias y análisis de nuevas variables [46] que permitan manifestar conclusiones tanto racionales [51] como razonables [47] sobre la solución del problema. Mediante preguntas anidadas [42, 44, 48] que surgen del diálogo, el profesor orienta al estudiante que no percibe una solución inmediata y eficaz.

Conjuntamente, de los factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución del problema (Schoenfeld, 1992) se puede afirmar que:

(1) Recursos: los estudiantes utilizan la regla como artefacto de medida que permite proponer conclusiones racionales sobre el problema mediante el uso de una *garantía teórica* [50], y hacen uso de sus cuadernos para proponer conclusiones razonables relacionadas con una *garantía empírica* [47].

(2) Heurísticas: mediante preguntas anidadas [42, 44, 48] el profesor orienta el proceso de resolución de problemas. En este sentido, se puede evidenciar como estrategia que los estudiantes hacen uso de artefactos [49] que tienen a su alrededor para llegar a una solución del problema.

En la *comprensión del problema* [42-43] se evidencia que, en la argumentación dialógica, los estudiantes realizan procesos mentales que no permiten visualizar la configuración de un plan y la ejecución del problema, dado que proponen una solución inmediata del problema en cuestión [43]. Se realiza posteriormente un *examen de la solución* [44-48] para estudiar la racionabilidad mediante el uso de *garantías teóricas* [51] y razonabilidad de la solución mediante el uso de una *garantía empírica* [47]. Se logra evidenciar que cuando aparece una nueva variable o impugnación, los estudiantes inician nuevamente las etapas de resolución. En este caso, con la impugnación [49] el profesor configura un plan que es ejecutado por sus estudiantes [50-52], pero del que no se logra encontrar solución, sino que se analizan las variables implicadas.

(3) Controles: los estudiantes como control del problema proponen el promedio del tamaño [46] de las letras para llegar a conclusiones mediante el uso de garantías tanto *empíricas* [47] como *teóricas* [51], debido a que las letras tienen diferente tamaño [52].

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes tienen como creencia que las matemáticas permiten respuestas tanto desde lo que perciben en su entorno [47], relacionado con *garantías empíricas*, como desde lo que se propone en clases [49], relacionado con *garantías teóricas*.

La resolución de problemas como **producto** no se evidencia en el argumento dialógico 3, dado que los estudiantes utilizaron estrategias heurísticas para la solución.

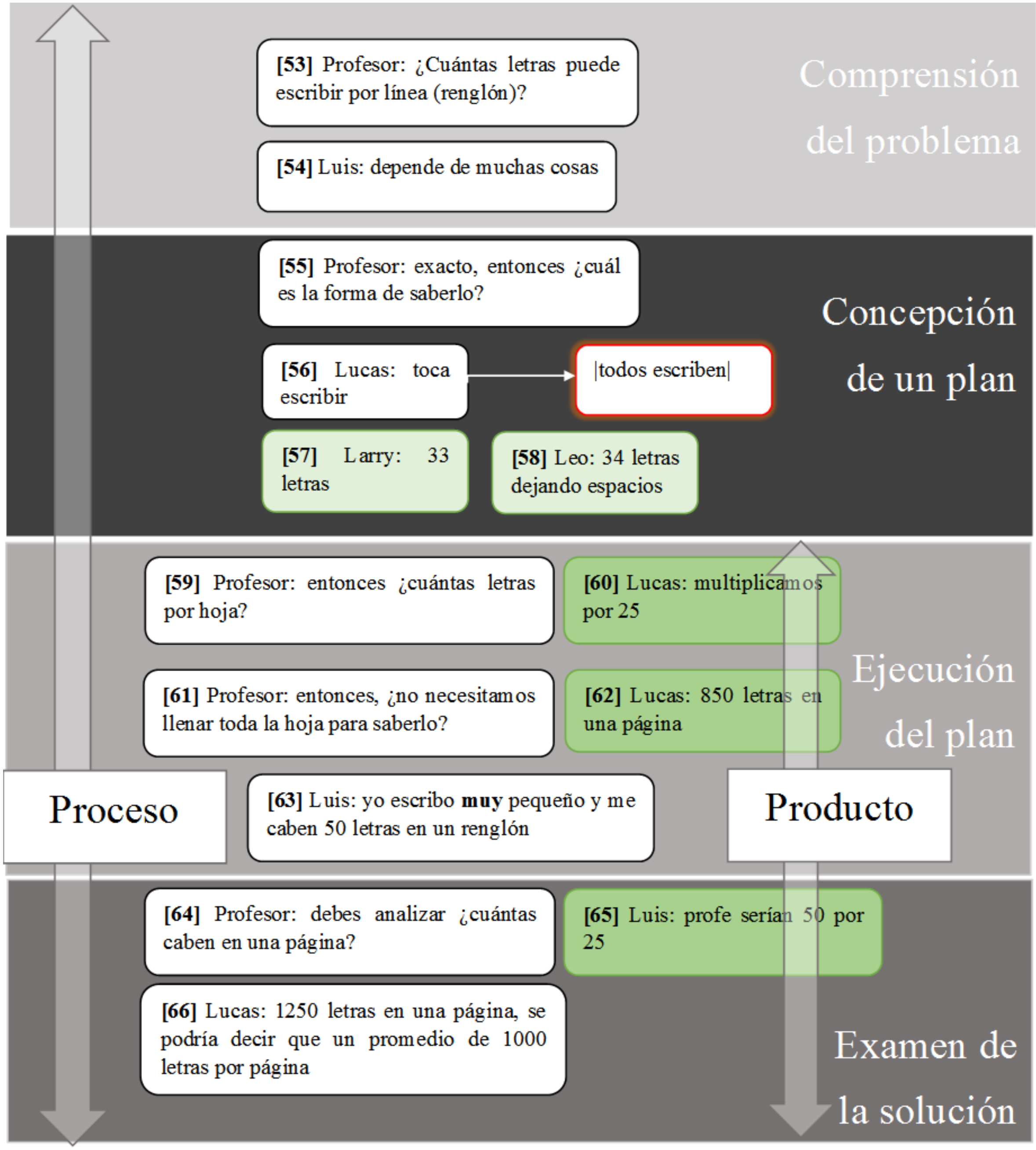


Figura 14. Esquema del argumento 4 en resolución del problema sobre un lapicero
Fuente: Elaboración del autor

La resolución de problemas como proceso [53-66] se estudia a partir de estrategias que utilizan los estudiantes para manifestar la solución del problema. Se evidencia que los estudiantes hacen uso de conocimientos sobre su entorno, sobre su cuaderno [57, 58], para analizar la solución razonable del problema, además de conocimientos adquiridos en el aula [60, 65] para proponer soluciones racionales.

Asimismo, de los cuatro factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución del problema (Schoenfeld, 1992) se puede afirmar que:

(1) Recursos: los estudiantes utilizan como recursos su cuaderno [56] para analizar la cantidad de renglones y lograr conclusiones mediante el uso de *garantías empíricas* [57, 58], además del conocimiento sobre características tanto del cuaderno como del lapicero relacionadas con el uso de *garantías teóricas* [60, 62].

(2) Heurísticas: los estudiantes utilizan como estrategia de solución la familiarización con el problema [56] y el control de variables para lograr proponer soluciones.

La *comprensión del problema* [53-54] se realiza mediante la afirmación de Luis [54] donde busca manifestar variables del problema. Mediante una pregunta anidada [55], el profesor orienta a los estudiantes a la *concepción de un plan* [55-58], que busca que escriban letras en un renglón para buscar la solución mediante el uso de *garantías empíricas* [57, 58]. La *ejecución del plan* [59-63] conlleva a encontrar soluciones racionales y razonables del problema mediante el uso de *garantías teóricas* [60, 62]. Dado que la solución de Luis [63] se sale de los parámetros manifestados por los compañeros, se hace necesario realizar un *examen de la solución* [64-66] y se logran conclusiones del problema.

(3) Controles: los estudiantes proponen como control el número de letras de su cuaderno [60] y dejar espacio para lograr concluir [62].

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes hacen uso de diferentes estrategias [56, 60] para proponer la solución de un problema y comprenden que la resolución de problemas no implica que se tenga que llegar a una solución, sino proponer características que cumple el problema. Además, comprenden que un problema admite diversas soluciones.

La resolución de problemas como **producto** [59-66] acontece a partir de la multiplicación de los datos que ofrecen tanto preguntas anidadas del profesor como conclusiones que manifiestan los estudiantes relacionados con el uso de *garantías teóricas*.

En la explicación escrita Lucas plantea una multiplicación para encontrar el número de letras que caben en una página [60]; llega a una conclusión racional sobre el problema (Figura 15).

$$\begin{array}{r} 34 \times \\ 25 \\ \hline 170 \\ 68 \\ \hline 850 \end{array}$$

Figura 15. Operación realizada por Lucas
Fuente: Tomado de explicaciones escritas por los participantes

5.1.3. Solución del problema sobre un lapicero mediante argumentos dialógicos

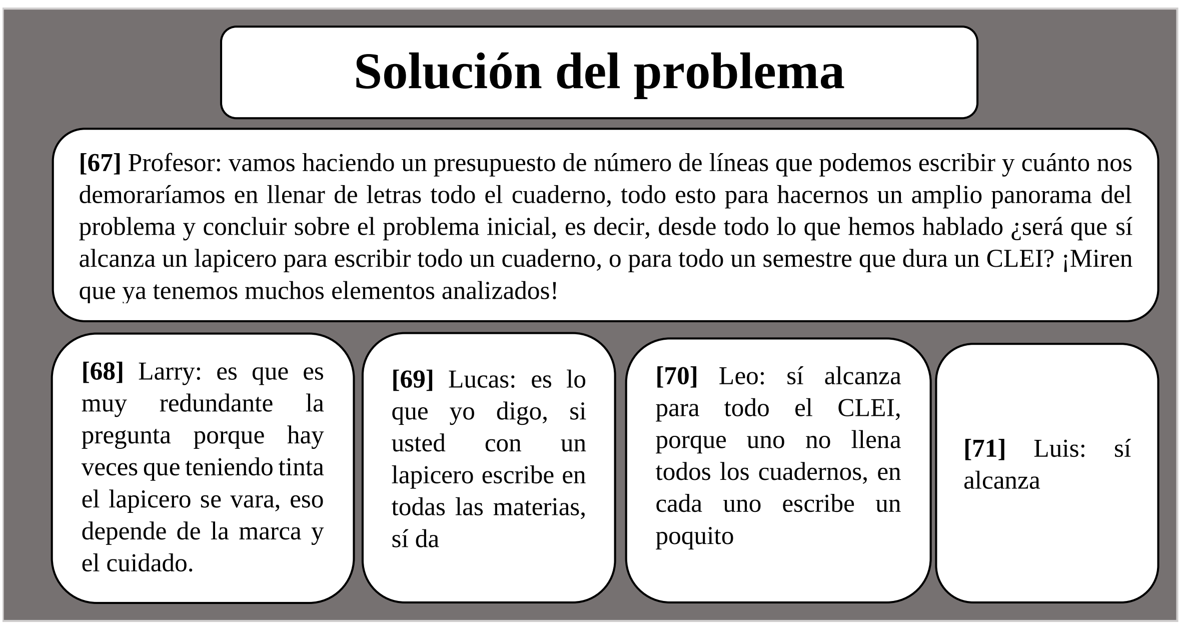


Figura 16. Esquema de solución del problema sobre un lapicero
Fuente: Elaboración del autor

Posterior, al análisis de algunas variables implicadas en la durabilidad de un lapicero y ejerciendo un control sobre ellas, cada estudiante propone una solución al problema (Figura 16). Para Larry no acontece aún un control de variables para solucionar el problema, falta controlar variables como marca del lapicero y cuidado que se le da [68]. Lucas logra concluir que sí es posible que un solo lapicero alcance para escribir durante el semestre completo y se basa en una *garantía empírica* que parte de lo que escribe en cada materia [69]. Leo percibe una relación entre lo que alcanza un lapicero para escribir y la cantidad de renglones que escribe en cada cuaderno y concluye que sí alcanza para escribir durante el semestre completo [70]. Por último, Luis concluye que sí alcanza [71], luego de escuchar argumentos manifestados por sus compañeros y haber estudiado las variables.

5.2. Resolución del problema sobre barbería

En este apartado se presenta el análisis de un problema sobre una barbería que resuelven Beto, Baco, Ben, Boris y Brad. Este problema se abordó porque los estudiantes manifiestan que tienen la barbería como oficio y consideran que esto les permite utilizar matemáticas al usar medidas de cortes de cabello.

Con el fin de comprender medidas empíricas (tres dedos, cerquillo) que utilizan algunos barberos, y que permiten proponer e interpretar medidas desde el conocimiento matemático, se analizan las variables: tipo de corte, longitud del cabello, medida correspondiente a tres dedos, longitud realizando un corte con peinilla, volumen y densidad de cabello. Al respecto, se proponen algunas preguntas orientadoras que permiten discutir estas variables y la resolución del problema.

5.2.1. Identificación de garantías empíricas y teóricas en resolución del problema sobre barbería

[1] Profesor: el [motilado] de Beto es el blow, ¿qué significa?

[2] Beto: este es uno de los motilados más complejos y difíciles que hay, por el poco espacio que hay para hacer el desvanecido…

[3] Beto: porque es un desvanecido que hay que hacer… como mínimo el desvanecido de barbera a la uno tiene que ser de un centímetro y medio, no es como los otros cortes que se puede uno subir y tiene más espacio para desvanecer, entonces es uno de los más complicados para hacer por el espacio tan limitado que hay

[4] Profesor: ¿cuando usted me dice centímetro y medio, cuando está realizando el corte ¿usted mide? O sea, utiliza un metro para poder hacer el corte

[5] Beto: claro que mido, pero no… uno mide a cálculo, y todo lo que usted hace a un lado le tiene que quedar igual en el otro

[6] Profesor: ¿cómo saber que si quedo igual?

[7] Beto: a veces uno **se puede** guiar por los dedos

[8] Baco: hay barberos que cuando me están motilando así [indica que con las cejas]

[9] Ben: **se puede** medir con las cejas

[10] Beto: pero eso es solo para el cerquillo, ya para eso tiene uno otras cosas para identificar y que quede derecho, con la cejas, por ejemplo acá el cerquillo (muestra en Camilo) que baja acá, de la frente acá va enfocado en las cejas, todo va depende de la cabeza de la persona, [si me entiende] porque todas las cabezas varían, entonces por decir él (Brad) se hace el mojicano no le va a quedar bien, [si me entiende] por la cabeza

Figura 17. Esquema de argumento 1 en resolución del problema sobre barbería
Fuente: Elaboración del autor

El argumento dialógico 1 (Figura 17) inicia con una pregunta anidada [1] que parte del diálogo entre profesor y estudiantes sobre el corte que cada uno tiene diseñado en su cabello. Se busca comprender algunas especificaciones y características sobre el corte de Beto, concluyendo acerca de las medidas sobre el desvanecido que lleva el corte. Se aclara que el nombre de cada corte ya viene definido por un tipo de desvanecido y con una medida de altura y distancia entre guías [3].

Los estudiantes utilizan como datos evidencias empíricas relacionadas, por un lado, con medidas que se utilizan en cada corte de cabello [2] y, por otro lado, con las distancias entre cada cuchilla de la guía para realizar el desvanecido [3], dado que algunos cortes lo llevan, pero variando su altura [10].

Las conclusiones se relacionan con preguntas anidadas que el profesor realiza [4, 6] con intención de orientar el diálogo. Los estudiantes logran concluir que cada corte de barbería tiene un desvanecido diferente [3] y las cejas sirven como guía para realizar un corte [10], es decir, las cejas son utilizadas para que la longitud de cabello quede igual en ambos lados de la cabeza. Además, se concluye que algunos cortes dependen de forma de la cabeza, ya que las cabezas son diferentes tanto en forma como en tamaño.

Los estudiantes utilizan el conocimiento que tienen sobre el oficio de barbería [3] como soporte, resaltando los tipos de cortes que existen y sus respectivas longitudes y características [5].

Los estudiantes utilizan cualificadores modales como expresiones que buscan analizar las formas de manejo de las longitudes de los cortes de cabello [7], cómo se realiza el desvanecido y la distancia que se deja entre las guías [9].

Los estudiantes utilizan refutadores como objeciones o impugnaciones, por ejemplo, Baco muestra una manera diferente a la propuesta por Beto para analizar si el corte quedó igual [8].

Por último, los estudiantes usan *garantías empíricas* para llegar a la conclusión del problema. En primer lugar para indicar que existe un sistema de medidas entre el oficio de barbería relacionado con los dedos [5], y en segundo lugar para concluir sobre la forma de saber que un corte quedó igual en ambos lados de la cabeza, para esto se puede utilizar los dedos [7] o las cejas [8, 9].

En el argumento dialógico 1 no se usan *garantías teóricas* debido a que los estudiantes usan *garantias empíricas* que parten de sus experiencias como barberos, y es posible que preguntas anidadas orienten la resolución de problemas como proceso.

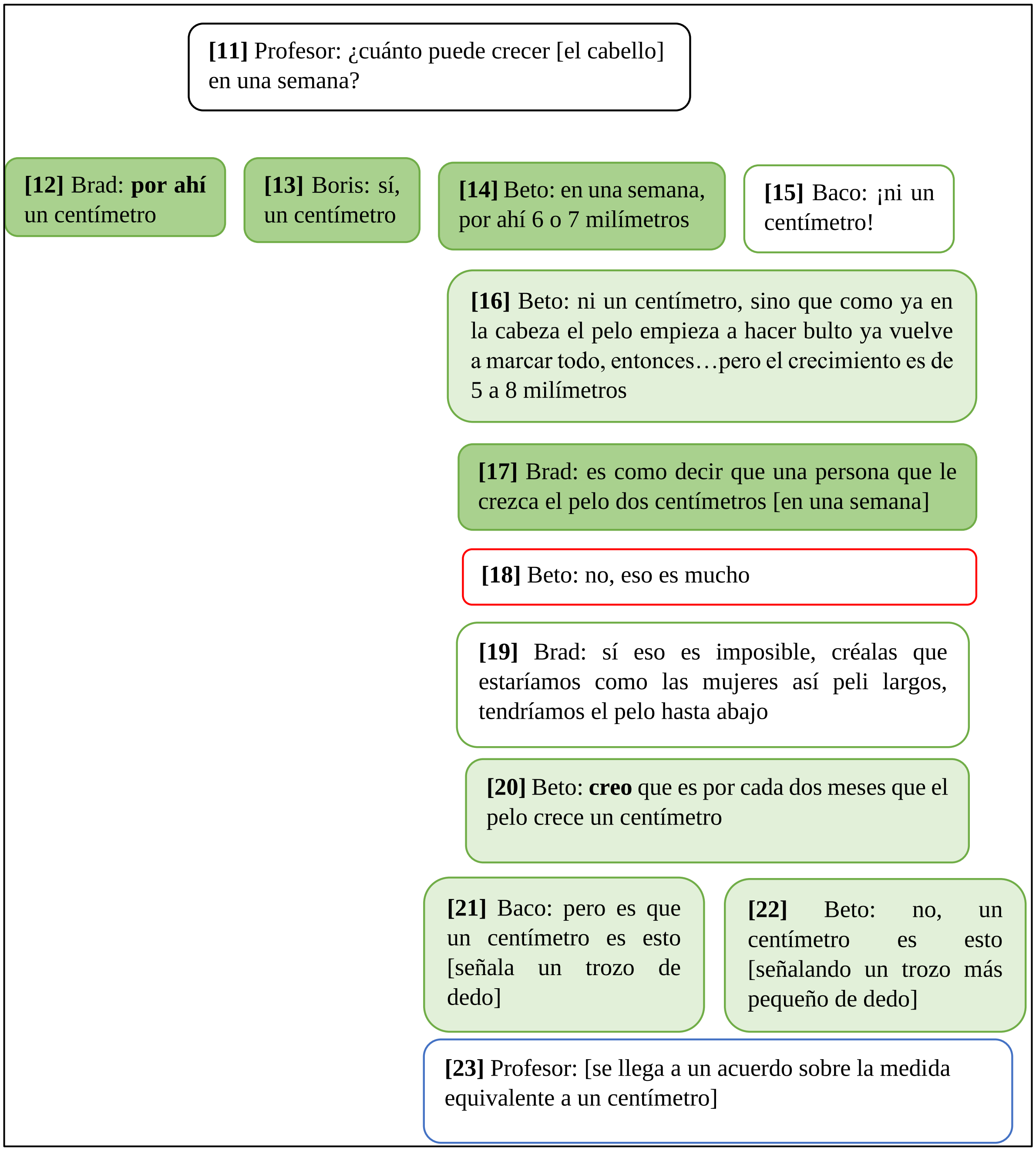


Figura 18. Esquema de argumento 2 en resolución del problema sobre barbería
Fuente: Elaboración del autor

El esquema del argumento dialógico 2 (Figura 18) inicia con una pregunta anidada [11] que busca estudiar el crecimiento del cabello de una persona en un tiempo determinado. Al respecto, los estudiantes manifiestan diversos argumentos relacionados con *garantías empíricas* [16, 20, 21, 22] y *garantías teóricas* [12, 13, 14, 17] para proponer una conclusión [23].

Los estudiantes utilizan como datos la evidencia empírica relacionada con sus observaciones cuando realizan un corte y con el crecimiento del cabello de una persona [12], comparando con unidades de medida del sistema internacional [13, 14].

Las conclusiones se relacionan con la pregunta anidada que realiza el profesor [11]. Logran concluir que es imposible que a una persona le crezca el cabello un centímetro en una semana [19], de ser posible, todos se mantendrían pelilargos. Además, teniendo en cuenta que el crecimiento es entre siete y ocho milímetros [14], se llega a un acuerdo entre estudiantes y profesor para la medida equivalente a un centímetro [23].

Los estudiantes utilizan como soporte el conocimiento que tienen sobre el oficio de barbería [16], además de la correspondencia o relación entre medida de un trozo de dedo y un centímetro dentro del sistema internacional de medidas [12].

Los estudiantes utilizan cualificadores modales como expresiones que ayudan a concertar una aproximación a una conclusión [12, 20], además como expresión para representar una cantidad [18] o lugar [19].

Los estudiantes utilizan refutadores como objeciones o impugnaciones. Por ejemplo, Baco utiliza una expresión de asombro o indagación [15] para manifestar el crecimiento del cabello en una semana; Beto utiliza refutadores para manifestar que la conclusión de Brad no es adecuada para las condiciones del problema y comunicar que no está de acuerdo con tal conclusión.

En conclusión, los estudiantes usan *garantías empíricas* para llegar a la conclusión de que el cabello de una persona no puede crecer un centímetro, en relación con las observaciones en su oficio de barberos y manifiestan que la acumulación de cabello es la que hace que pareciera ser más largo [16]. Beto expresa que según sus observaciones el cabello crece un centímetro en dos meses [20] y Baco [21] y Beto [22] realizan una aproximación con sus dedos para manifestar la medida de un centímetro.

Los estudiantes usan *garantías teóricas* relacionadas con unidades de medidas determinadas por el sistema internacional [12, 13, 14]. Por su parte, Brad parte de datos que manifiestan los estudiantes para operarlos y realizar comparaciones entre el tamaño del cabello en cierto periodo de tiempo [17].

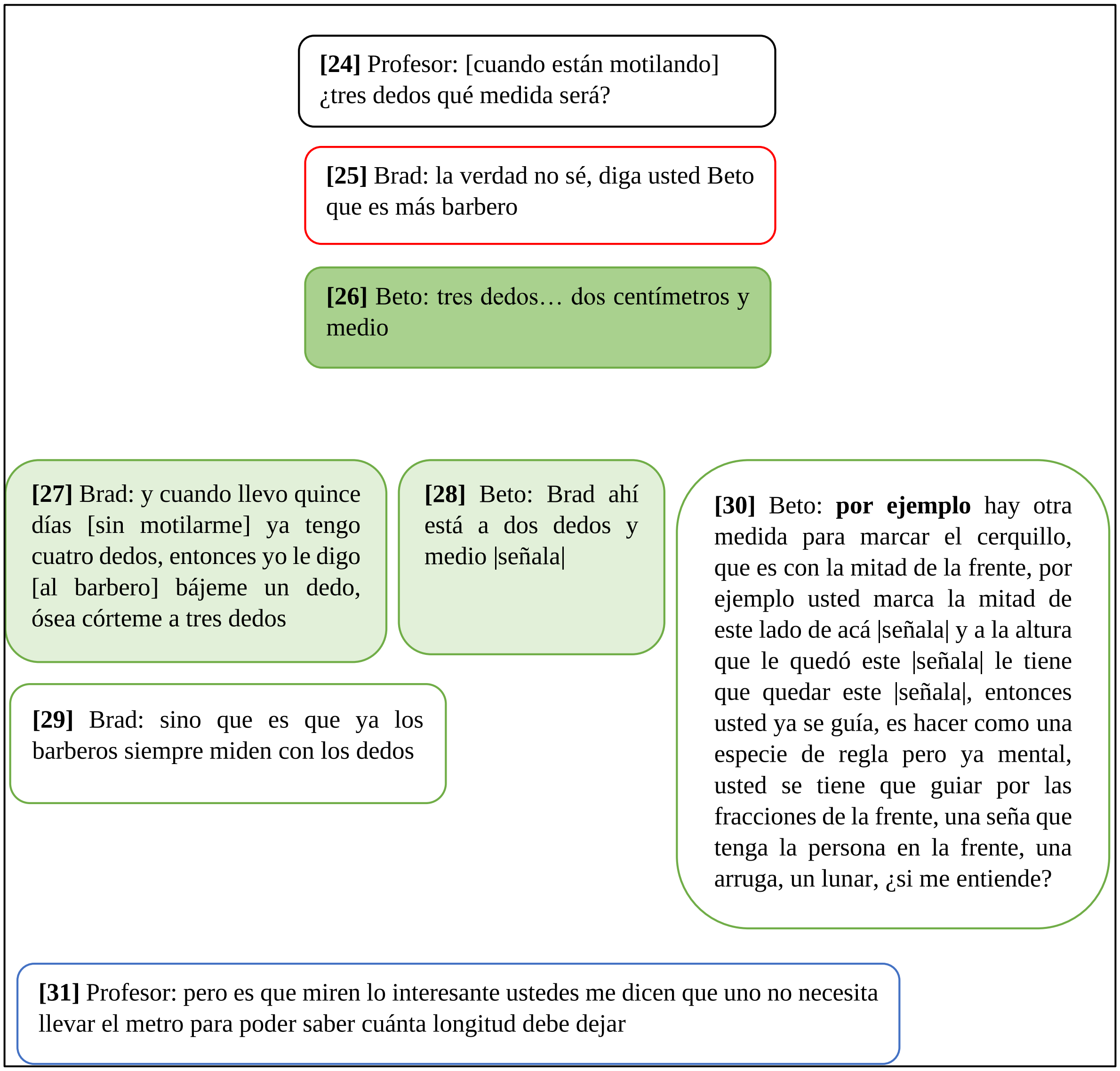


Figura 19. Esquema de argumento 3 en resolución del problema sobre barbería
Fuente: Elaboración del autor

El esquema del argumento dialógico 3 (Figura 19) inicia con una pregunta orientadora [24] que busca estudiar la relación entre medidas que utilizan algunos barberos como *garantías empíricas* [27, 28] que parten del conocimiento sobre el oficio y de su experiencia, y *garantías teóricas* que se pueden analizar desde unidades de medida propuestas por el sistema internacional [26].

Los estudiantes utilizan como datos evidencia empírica relacionada con la forma en que se debe realizar cada corte conservando la simetría bilateral (que divide el cuerpo en dos partes idénticas) y la manera en que debe realizar el desvanecido.

Las conclusiones se relacionan con la pregunta orientadora que realiza el profesor [24] con la intención de orientar el diálogo. Los estudiantes concluyen que algunos barberos tienen una manera especial de medir que es con los dedos [29] y que para conservar la simetría bilateral utilizan una regla mental relacionada con fracciones del tamaño de la frente, una seña de la persona o un lunar [30]. Manifiestan que no es necesario un metro u otro instrumento para saber la longitud de cabello que deben dejar [31].

Los estudiantes utilizan como soporte el conocimiento que tienen sobre el oficio de barbería relacionado con la medida a tres dedos para realizar un corte y la correspondencia aproximada en el sistema internacional [26, 27].

Los estudiantes utilizan cualificadores modales como expresiones que resaltan mayor experiencia de algunos estudiantes con el oficio de barberos [25], lo que les permite tener mayor conocimiento, además los utilizan para explicar un concepto u objeto mediante una particularidad [30].

Los estudiantes utilizan refutadores como objeciones o impugnaciones. En el esquema de argumento dialógico 3, Brad actúa como antagonista con sus compañeros y le permite a Beto iniciar el diálogo ya que considera que tiene mayor conocimiento del oficio [25].

En conclusión, los estudiantes usan *garantías empíricas* para concluir sobre el problema. Brad manifiesta que cuando lleva quince días sin motilarse tiene cuatro dedos de cabello y va a que el barbero le baje un dedo y le quede a la medida deseada de tres dedos [27]. Beto analiza el corte de su compañero Brad para estudiar la longitud de cabello que tiene y concluye que está a dos dedos y medio [28].

Los estudiantes usan *garantías teóricas* para llegar a conclusiones sobre el problema, realizan una comparación entre la medida empirica utilizada por algunos barberos (dedos) y la correspondencia con la *garantia teórica* que se relaciona con el sistema internacional de medidas para expresar un longitud (centímetros) [26].

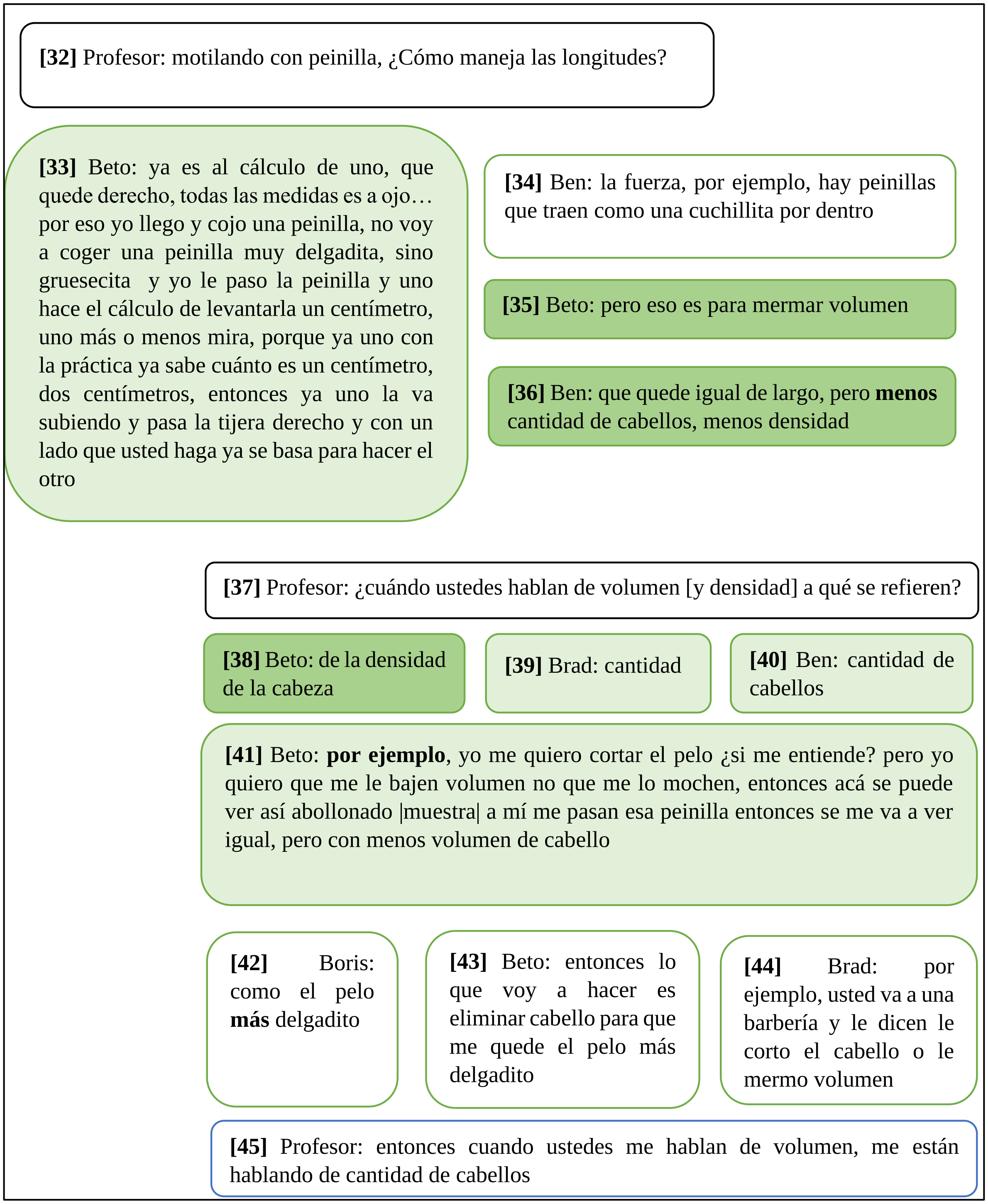


Figura 20. Esquema de argumento 4 en resolución del problema sobre barbería
Fuente: Elaboración del autor

El esquema del argumento dialógico 4 (Figura 20) inicia con una pregunta anidada [32] que parte del diálogo entre profesor y estudiantes sobre el manejo de longitudes cuando se realiza un corte con peinilla. Se busca comprender la relación entre la longitud del cabello que dejan algunos barberos a tres dedos o con peinilla relacionado con *garantías empíricas* [33], y la longitud de cabello que se deja en milímetros o centímetros relacionado con *garantías teóricas*, donde aparecen nuevas variables a considerar, tales como volumen y densidad del cabello [35, 36].

Los estudiantes utilizan como datos evidencia empírica relacionada con la cantidad de dedos para controlar la longitud de cabello que deben dejar en cada corte [33], asimismo utilizan como datos evidencia teórica relacionada con la definición de volumen y densidad del cabello [36].

Las conclusiones se relacionan con preguntas anidadas que realiza el profesor [32, 37] con la intención de orientar el diálogo. Los estudiantes logran concluir que cuando se realiza un corte con peinilla la fuerza que se ejerce influye en la longitud del cabello que queda [34]. Se concluye que el volumen se relaciona con dejar la misma longitud de cabello, pero menos cantidad [42, 43, 44, 45].

Los estudiantes utilizan como soporte el conocimiento que tienen sobre el oficio de barbería relacionado con el cálculo de longitudes con los dedos [33] y la cantidad de cabellos que deben dejar [35], además de conocimientos relacionados con características y definición del concepto de fuerza, volumen y densidad [34, 35, 36].

Los estudiantes utilizan los cualificadores modales como expresiones que buscan analizar la cantidad de cabellos que quedan cuando se busca rebajar volumen de cabello [36], además se utilizan para mostrar una particularidad de cómo queda la cabeza cuando se disminuye el volumen de cabello [41].

Los estudiantes utilizan refutadores como objeciones o impugnaciones. Por ejemplo, Brad realiza una objeción [39] para iniciar una idea diferente a la manifestada por su compañero Beto [38], cuando se busca estudiar el volumen y la densidad.

En conclusión, los estudiantes usan *garantías empíricas* para llegar a la conclusión del problema. En primer lugar para explicar la manera en que calculan longitudes con la peinilla y estudiar cómo, a medida que va subiendo la peinilla, realiza una relación con la longitud de cabello que debe cortar [33] y en segundo lugar, para estudiar cómo el concepto volumen se relaciona con cantidad de cabellos [39, 40]. Además, se analiza cómo se puede dejar la misma longitud de cabello pero con menor volumen [41].

Las *garantías teóricas* se usan para llegar a conclusiones sobre el problema, los estudiantes utilizan la definición de volumen [35] para explicar relación entre longitud y la cantidad de cabello [36].

5.2.2. Relación entre garantías empíricas o teóricas con resolución del problema sobre barbería.

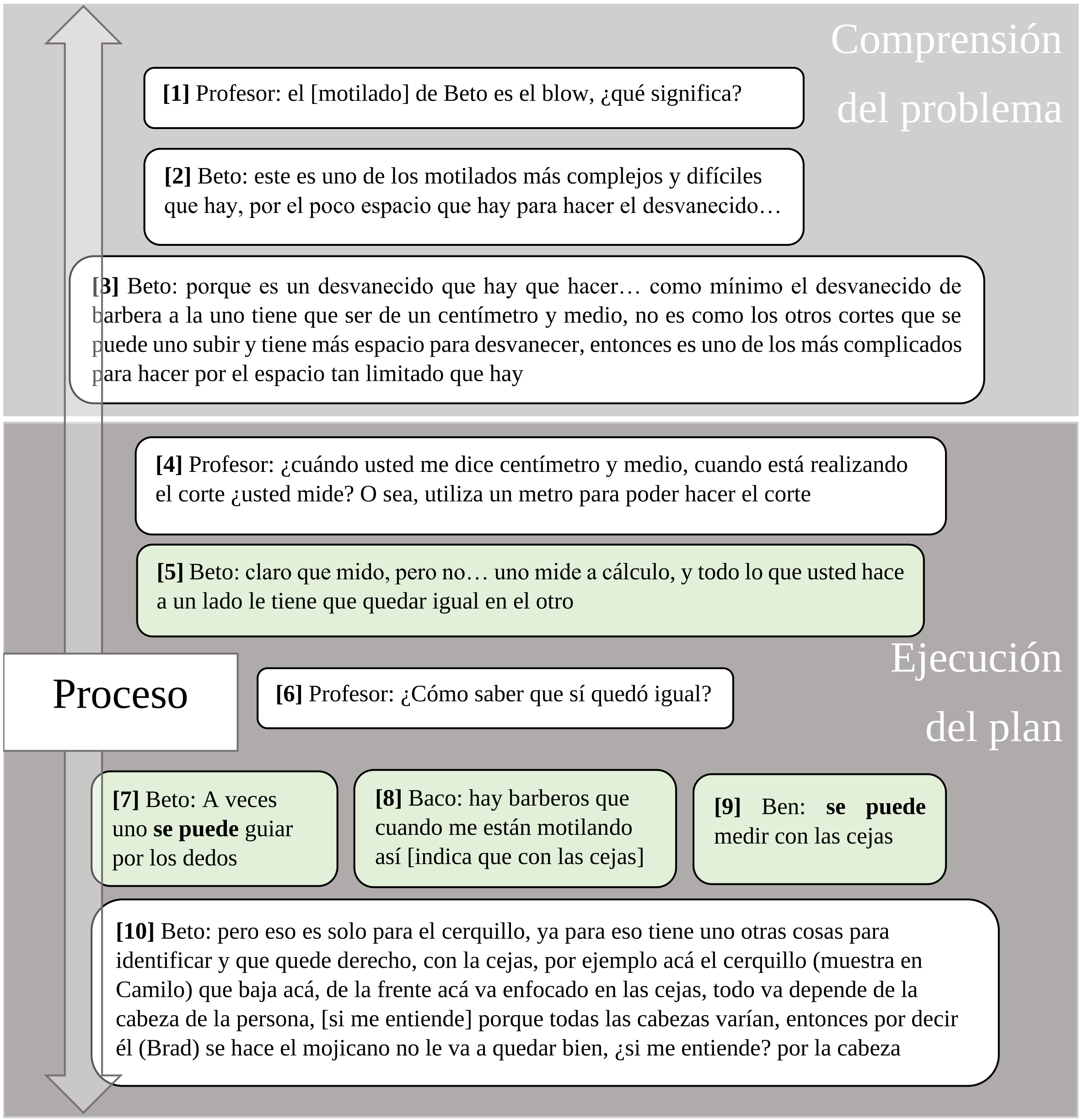


Figura 21. Esquema de argumento 1 en resolución del problema sobre barbería
Fuente: Elaboración del autor

La resolución de problemas como proceso [1-10] acontece a partir de preguntas anidadas [1, 4, 6] propuestas por el profesor para orientar la resolución del problema. Con dichas preguntas se busca comprender la diferencia entre tipos de cortes que se pueden realizar en una barbería [1] y la manera cómo los estudiantes utilizan medidas [4, 6].

Además, se analiza el método utilizado para que el corte quede igual en ambos lados de la cabeza (figura 22).

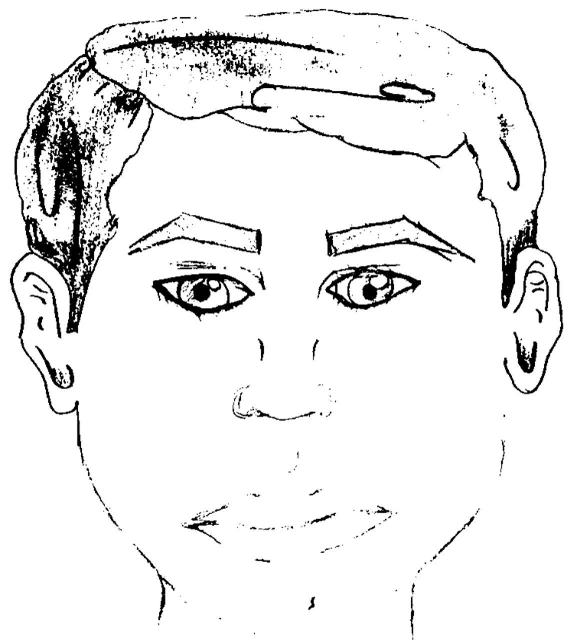


Figura 22. Imagen realizada por Lucas
Fuente: Tomado de explicaciones escritas por los participantes

En la argumentación dialógica se pueden interpretar los cuatro factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución del problema (Schoenfeld, 1992):

(1) Recursos: se evidencian en el uso de conocimientos sobre tipos de cortes que se pueden realizar, la altura en el desvanecido de cada corte [3], y en el método utilizado para que cada corte quede con simetría bilateral [7, 8]. Estos conocimientos se relacionan con experiencias de los estudiantes en el oficio de barbería y con el uso de *garantías empíricas*.

(2) Heurísticas: se evidencia que las preguntas anidadas [1, 4, 6] sugieren diferentes estrategias y técnicas para tratar el problema. En este caso, se evidencia que el estudiante parte el problema en otros más simples que le permiten proponer conclusiones del problema inicial.

Si se consideran las etapas heurísticas de Pólya (1945), los estudiantes buscan llegar a una *comprensión del problema* [1-3] mediante el diálogo, donde se estudia el corte de cabello del estudiante Beto que corresponde al blow, un corte complejo de realizar en el que el desvanecido tiene unas medidas predeterminadas. Se presume que los estudiantes realizan la *configuración del plan* como un proceso mental ya que no se hace visible en la argumentación dialógica, motivo por el que pasan a la *ejecución del plan* [4-10]. En esta ejecución se logra interpretar que los barberos utilizan *garantías empíricas* relacionadas con la medida para llevar a cabo un corte, medidas que conciernen a longitudes que se dejan al realizarlo utilizando los dedos, pero que se comparan con longitudes de conocimientos matemáticos como centímetros y milímetros. También se utilizan las cejas y los dedos como estrategia para dejar el corte igual a ambos lados de la cabeza. En el diálogo 1 los estudiantes no llegaron hasta el *examen de la solución* debido a que se centró en discutir y comparar formas de medir.

(3) Controles: se evidencian cuando los estudiantes explican las medidas que realizan en un corte utilizando sus dedos [3] y no una unidad de medida del sistema internacional.

(4) Sistemas de creencias: para llegar a la resolución del problema, loes estudiantes utilizan conocimientos relacionados con el oficio de barbería y pocos conocimientos de la clase de matemáticas.

La resolución de problemas como **producto** no acontece en la argumentación dialógica, dado que los estudiantes utilizan *garantías empíricas* relacionadas con su oficio de barberos para manifestar argumentos que permitan conclusiones sobre el problema.

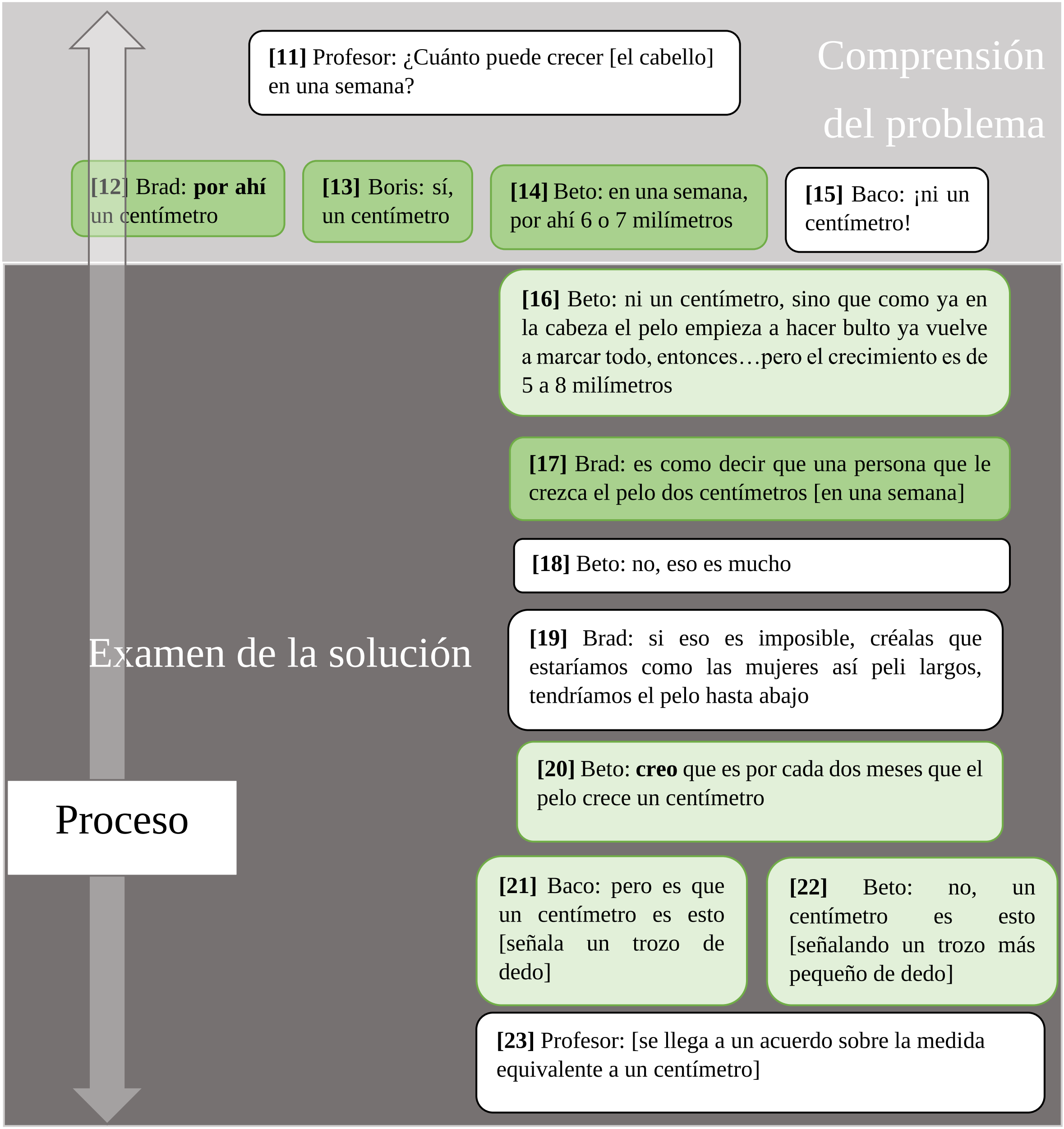


Figura 23. Esquema de argumento 2 en resolución del problema sobre barbería
Fuente: Elaboración del autor

La resolución del problema inicia con algunas preguntas anidadas que surgen del diálogo entre profesor y estudiantes relacionadas con la longitud de crecimiento del cabello en un determinado tiempo.

La resolución de problemas como proceso [11-23] acontece a partir de la pregunta anidada [11] que busca orientar la resolución del problema sobre la medida de la longitud de cabello. Los estudiantes manifiestan diversos argumentos tanto empíricos relacionados con el oficio de barberos [16], como teóricos relacionados con unidades de medida del sistema internacional [17].

Al analizar los factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución del problema (Schoenfeld, 1992) se puede afirmar:

(1) Recursos: se evidencian en el uso de conocimientos sobre el crecimiento de cabello de una persona en un determinado periodo de tiempo [16, 20], conocimiento que se relaciona con la experiencia como barberos, la observación (*garantía empírica*), y el conocimiento relacionado con la longitud correspondiente a un centímetro [12, 16] para concluir sobre el problema *(garantías teóricas*).

(2) Heurísticas: se evidencia que para llegar a la solución del problema, los estudiantes utilizan como estrategia mostrar con sus dedos la medida que consideran corresponde a un centímetro, y de esta manera logran llegar a un acuerdo sobre esta medida [23].

Si se consideran las etapas heurísticas (Pólya, 1945), los estudiantes buscan llegar a una *comprensión del problema* [11-15] mediante el diálogo y argumentos sobre posibles soluciones. En la argumentación dialógica no se evidencia la *configuración de un plan,* ni la *ejecución del plan.* Se presume que es un proceso que los estudiantes realizan de manera mental pasando de la comprensión del problema *al examen de la solución*, donde se estudia el diálogo y se llega a la solución tanto racional como razonable. Se tiene en cuenta el uso de *garantías empíricas* [16, 20, 21, 22] relacionadas con la experiencia de los estudiantes y con el oficio de barbería y el uso *garantías teóricas* relacionadas con el aprendizaje en la clase de matemáticas sobre unidades de medidas en el sistema internacional [12, 13, 14, 17].

(3) Controles: se evidencian cuando los estudiantes deciden trabajar con el sistema internacional de medidas (milímetro y centímetro) para mostrar la correspondencia con el método empírico que utilizan en el oficio de barbería (dedos) y no con el sistema inglés.

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes comienzan a buscar relaciones entre conocimientos que parten de su experiencia como barberos y conocimientos aprendidos en clases de matemáticas.

La resolución de problemas como **producto** no acontece en la argumentación dialógica dado que los estudiantes utilizan *garantías empíricas* relacionadas con su oficio de barberos para manifestar argumentos que permitan conclusiones sobre el problema.

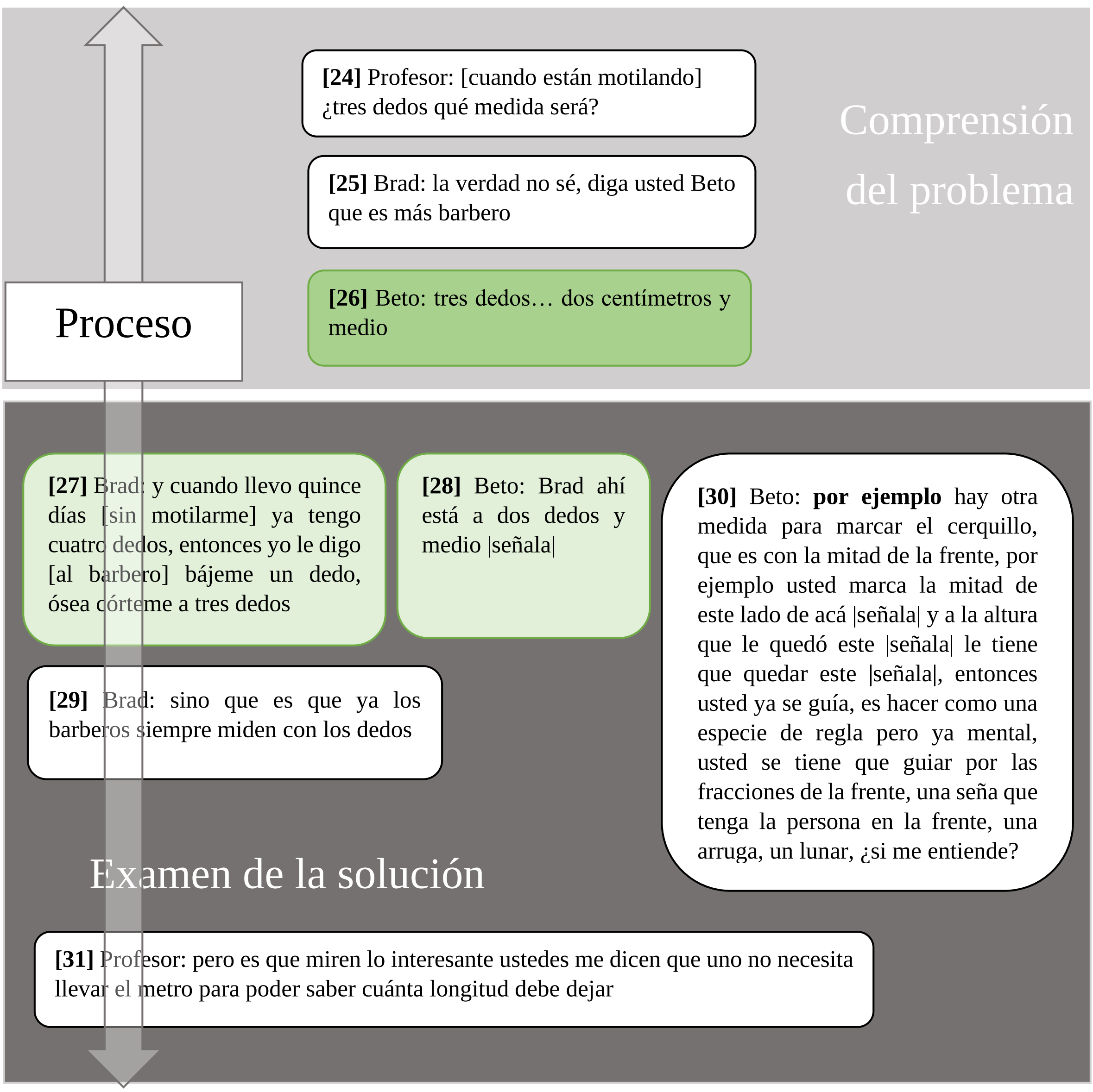


Figura 24. Esquema de argumento 3 en resolución del problema sobre barbería
Fuente: Elaboración del autor

La resolución del problema inicia con una pregunta orientadora [24] y continúa con el diálogo entre los estudiantes buscando llegar a conclusiones sobre la medida en el sistema internacional que corresponde a la medida de tres dedos utilizada por algunos barberos para realizar un corte. De esta manera se llega a un acuerdo sobre la solución del problema [26].

La resolución de problemas como proceso [24-31] acontece a partir de una pregunta orientadora [24] propuesta por el profesor con la intención de estudiar formas de medir y compararlas con las propuestas por la comunidad académica dentro del sistema internacional de medidas. De esta manera se llega a conclusiones sobre el problema [30] relacionadas con el uso de *garantías empíricas* [27, 28] y con el uso *de garantías teóricas* [26]. En la resolución de problemas como proceso se analizan los factores, así:

(1) Recursos: se evidencian en el uso de conocimientos sobre la medida a tres dedos en barbería que relaciona con una *garantía empírica* [27], y su correspondencia en centímetros relacionada con el sistema internacional de medidas y con *garantías teóricas* [26].

(2) Heurísticas: se evidencia que para responder a la pregunta orientadora [24], los estudiantes utilizan como estrategia de solución la comparación de las medidas con lo observado en cierto periodo de tiempo, y muestran relaciones con conocimientos que parten de la experiencia.

Si se consideran las etapas heurísticas (Pólya, 1945), los estudiantes llegan a una *comprensión del problema* [24-26] mediante el diálogo. Beto manifiesta una posible solución del problema [26] que conlleva a que los estudiantes pasen a la etapa de *examen de la solución* [27-31], dejando de lado la *configuración de un plan* y la *ejecución del plan*. En la etapa *examen de la solución* se evidencia que los estudiantes hacen uso de *garantías empíricas* para mostrar la razonabilidad de la solución del problema, ya que los argumentos parten de la experiencia como barberos.

(3) Controles: se evidencia que los estudiantes buscan la relación entre la medida con los dedos y la medida en centímetros, pero para seguir en su oficio de barberos tendrán en cuenta los dedos y no pensarán en una regla como instrumento de medida (figura 25).

Figura 25. Imagen tomada durante la argumentación dialógica
Fuente: Tomado de explicaciones escritas por los participantes

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes consideran que, aunque las matemáticas les ayude a explicar “cosas” de su oficio de barberos, no es necesario cambiar sus prácticas para poder realizar una buena labor.

La resolución de problemas como **producto** no acontece en la argumentación dialógica, dado que los estudiantes utilizan *garantías empíricas* relacionadas con su oficio de barberos para manifestar argumentos que permitan conclusiones sobre el problema.

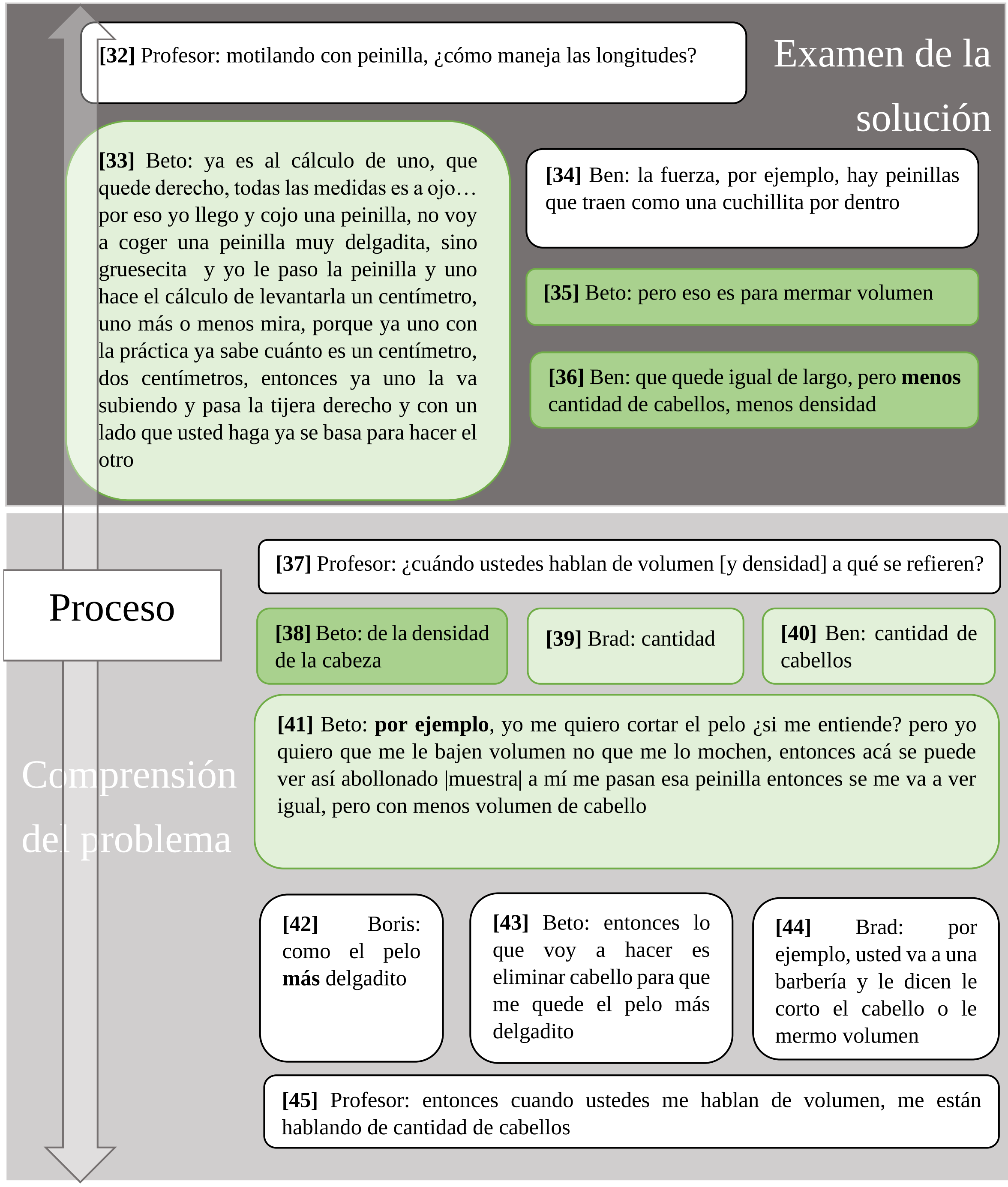


Figura 26. Esquema de argumento 4 en resolución del problema sobre barbería
Fuente: Elaboración del autor

La resolución del problema inicia con algunas preguntas anidadas [32, 37] del diálogo entre profesor y estudiantes, relacionadas con el manejo de la longitud de cabello que se debe dejar al realizar un corte con peinilla, y con la discusión y comprensión de conceptos como fuerza, volumen y densidad manifestados por estudiantes en sus argumentos [34, 35, 36].

La resolución de problemas como proceso [32-45] acontece a partir de preguntas anidadas [32, 37] con las que se busca estudiar el manejo de longitudes cuando se utiliza una peinilla para realizar un corte [33]. Aparecen nuevas variables del problema relacionadas con la fuerza que se debe ejercer en la peinilla para dejar cierta longitud [34], con el volumen según la cantidad de cabellos [35] y la densidad del cabello relacionada con su grosor [38]. Se evidencia que los estudiantes usan *garantías empíricas* [33, 39, 40, 41] relacionadas con la experiencia y con supuestos que parten de la observación, y *garantías teóricas* [35, 36, 38] relacionadas con conceptos que se trabajan en clase de matemáticas. En el proceso de resolución de problemas se analizan los factores, así:

(1) Recursos: se evidencian en el uso de conocimientos sobre fuerza, volumen y densidad que poseen los estudiantes de la clase de matemáticas y que se relaciona con *garantías teóricas* [36, 38]. Además, se evidencian en el conocimiento de los estudiantes para realizar un corte con peinilla dejando la longitud de cabello deseada y que se relaciona con *garantías empíricas* que parte de la experiencia del oficio de barbería [33, 41].

(2) Heurísticas: se evidencia que las preguntas anidadas [32, 37] sugieren diferentes estrategias y técnicas para tratar el problema. Una de ella es analizar el problema desde las variables implicadas en la solución del problema como pueden ser la fuerza, el volumen y la densidad del cabello, para poder proponer luego conclusiones.

Si se consideran las etapas heurísticas (Pólya, 1945), en el argumento dialógico 4, los estudiantes no realizan la *comprensión del problema* como primera etapa para la resolución del problema. Ante la pregunta anidada [32] Beto genera una solución que es apoyada y mejorada por sus compañeros [34-36], y debido a que aparecen nuevas variables del problema se hace necesaria la *comprensión del problema* [37] y mediante el diálogo se llega a acuerdos relacionados con conceptos manifestados por los estudiantes.

(3) Controles: se evidencia que los estudiantes prefieren trabajar con el sistema de medida conocido y explicar los problemas desde este sistema de medida.

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes encuentran relaciones entre medidas realizadas en el oficio de barberos y conceptos que se trabajan en clase de matemáticas, por ejemplo, el concepto de volumen puede estar asociado a la cantidad de cabellos de una persona. Los estudiantes consideran que las matemáticas se utilizan a diario, pero no se es consciente de ello.

La resolución de problemas como **producto** no acontece en la argumentación dialógica, dado que los estudiantes utilizan *garantías empíricas* relacionadas con su oficio de barberos para manifestar argumentos que permitan conclusiones sobre el problema.

5.3. Resolución del problema sobre ahorro e inversión

Se presenta el análisis de un problema sobre ahorro e inversión que resuelven los estudiantes Ana, Andy, Alan y Alex. Este problema es de interés en la investigación ya que los estudiantes manifiestan que su principal fuente de ingreso es su trabajo y la de egreso son sus hijos y la familia. Esta razón conlleva a la necesidad de ahorrar y generar más dinero con el capital que cuentan, es decir, desean invertir o ahorrar. Consideran que las matemáticas ayudan en la toma de decisiones respecto al beneficio ahorro vs inversión.

5.3.1. Identificación de garantías empíricas y teóricas en la resolución del problema sobre ahorro e inversión

[1] Profesor: tienen cierta cantidad de dinero para invertir y ahorrar ¿ustedes qué harían, ahorrarían, invertirían o las dos?

[2] Ana: las dos

[3] Andy: las dos

[4] Alan: **es que** lo más lógico sería hacer las dos, y si tiene el dinero, posiblemente el cincuenta -cincuenta o hacer que tenga un porcentaje mayor una de las dos para que sea mejor, por ejemplo, tener un setenta y cinco por ciento para ahorrar y el resto para invertir

[5] Ana: aparte porque si usted va a invertir va a recibir también

[6] Profesor: ¿pero usted (Alan) por qué dice setenta y cinco – veinticinco, o cincuenta-cincuenta?, ¿por qué no diez -noventa?

[7] Alan: en realidad ese valor es… es proporcional, es como a usted le parezca más lógico, yo dije ese número o ese valor para que tengan una idea

[8] Ana: así como invierte también va a recibir, y eso que va a recibir también lo va a ir ahorrando a la vez

[9] Alex: sería un qué… yo por mi parte, si fueran solo esos dos de invertir o ahorrar, serían un sesenta por ciento en ahorro y un cuarenta por ciento en inversión

[10] Profesor: ¿Por qué esa forma?

[11] Alex: el cuarenta por ciento de inversión porque como dice Ana, eso que vas a invertir más adelante se puede sumar, y el sesenta por ciento en ahorro porque es bueno tener un ahorro

[12] Alan: además, también es bueno tener un porcentaje más alto de ahorro porque a veces las inversiones no dan, a veces se rompen y se pierde lo que se invirtió

[13] Alex: no todas las inversiones son efectivas, usted puede que hoy compre el dólar y mañana puede que baje entonces si usted le invirtió todo al dólar ya mañana está en la quiebra, entonces es bueno tener un poco de ahorro

Figura 27. Esquema de argumento 1 en resolución del problema sobre ahorro e inversión
Fuente: Elaboración del autor

Los estudiantes usan *garantías empíricas* para llegar a la conclusión del problema ya que parten de conocimientos relacionados con su experiencia y lo que observan que ocurre a sus familiares o conocidos. Consideran que cuando se realiza una inversión se debe recibir una cantidad de dinero extra [5, 8], además, para proponer una distribución de dinero usan *garantías empíricas* relacionadas con historias de personas conocidas o familiares. Concluyen que es bueno tener un porcentaje más alto de ahorro ya que las inversiones no funcionan siempre y se puede perder [12].

Los estudiantes usan como *garantía teórica* conocimientos relacionados con la definición de porcentaje [4] para proponer una distribución del dinero y, de esta manera, proponer conclusiones sobre el problema planteado [1]. Esta definición se relaciona con tomar la cantidad de dinero del cual se dispone y su división en cien partes iguales para decidir luego cuántas partes utilizar para ahorrar y cuántas para invertir.

Además, se debe tener en cuenta que los estudiantes utilizan como datos que la distribución del dinero se analiza por porcentajes [4, 9, 11], proponiendo una manera de distribuir el dinero. Estos datos se relacionan con el uso de *garantías empíricas* que parten de lo que observan los estudiantes en su contexto familiar y social.

En el argumento dialógico los estudiantes logran concluir que no tienen conocimientos necesarios sobre ahorro e inversión para saber con claridad la distribución del dinero [7]. Por tanto, utilizan una proporción racional que les parece lógica [11], de acuerdo con conocimientos provenientes de otras experiencias relacionadas con *garantías empíricas* [8]. Concluyen que las inversiones pueden generar pérdida y por lo tanto, se deben tomar prevenciones [13]. Es importante mencionar que las conclusiones se relacionan con preguntas orientadoras y anidadas que surgen del diálogo.

Los estudiantes utilizan como soporte el conocimiento sobre porcentajes para hacerse una idea de la mejor forma de ahorro [4, 7], y utilizan conocimientos que parten de sus experiencias y observaciones [8, 9, 12] relacionados con *garantías empíricas* para llegar a conclusiones sobre el problema.

Los estudiantes utilizan cualificadores modales para matizar un punto de vista [4] frente a la decisión lógica que prevalece.

Al utilizar una forma diferente de distribuir el dinero, los estudiantes actúan como antagonistas, ya que en la comunicación retrasan los argumentos. En este sentido, se podría analizar refutadores como impugnaciones que utilizan los estudiantes para justificar conclusiones desde diferentes puntos [4, 9].

[14] Profesor: ¿cómo podemos definir ahorro e inversión?

[15] Alan: pues ahorro sería eso que usted está guardando para gastarlo en un futuro si necesita algo, pues si está en la quiebra ese ahorro le va a servir, para dar un impulso

[16] Andy: pero sabiendo que no se puede gastar la plata, así tenga deuda lo que sea

[17] Alan: eso, hasta que diga ¡hasta hoy! hoy ya me las gasto y lo otro de la inversión es como otra cosa, porque usted amontona un dinero para invertir y no sabe si va a funcionar, hay algún tiempo que sí le va a dar, pero hay otro que ese dinero que lo puede hasta…

[18] Ana: pero si funciona, a medida que recibe de la inversión puede ahorrar **más**

[19] Alan: pero usted no sabe si ese dinero le va a llegar, porque si la empresa se está cayendo yo le sigo dando para que suba un poquito, posiblemente eso que usted ganó se pierda

[20] Alex: es **como** una inversión a largo plazo de ahorro

[21] Alan: que no se sabe si va a ganar o a perder

[22] Alex: ah entonces así es que ganan esa gente con la plata de uno, usted va y guarda

[23] Profesor: entonces desde eso que me dice yo pensaría que es mejor invertir que ahorrar

[24] Profesor: El ahorro también podría ganar unos intereses, ¿esos intereses serían un tipo de inversión?

[25] Alan: dependiendo de donde los guarde, puede ser debajo del colchón, o en una alcancía, o como usted dice ganar unos intereses es en el banco, pero el banco está dando unos intereses de cero coma cuatro (0.4) o cero coma dos (0.2) por año, eso dependiendo lo que usted ahorre eso no le va a ganar nada

[26] Andy: eso no le da nada a uno

[27] Alan: si usted ahorra como un millón eso le va a dar como cuatro mil pesos

[28] Ana: eso, dan **más** intereses en una cooperativa

[29] Alex: si ya hace tiempo metí **como** cinco millones y apenas me han dado como veinte mil pesos

Figura 28. Esquema de argumento 2 en resolución del problema sobre ahorro e inversión
Fuente: Elaboración del autor

Los estudiantes usan *garantías empíricas* para llegar a la conclusión del problema que consiste en definir ahorro e inversión [14]. El ahorro lo relacionan con guardar un dinero para gastarlo a futuro e inversión con adquirir un negocio [15, 27, 29]. Además, crean una relación cuando afirman que una inversión es un ahorro a largo plazo ya que el dinero va aumentando [20]. Usan conocimientos de su vida diaria para proponer ideas sobre el problema [14].

Los estudiantes usan como *garantía teórica* conocimientos relacionados con el interés que paga un banco por cierta cantidad de dinero [25], analizando que oscila entre el 2 y el 4 % efectivo anual, lo que se considera poca ganancia.

Además, se debe tener en cuenta que utilizan como datos que el ahorro se relaciona con guardar y la inversión con adquirir [15]; este es el motivo para continuar con el diálogo y llegar a conclusiones sobre el problema [14]. Es importante resaltar que los datos surgen de *garantías empíricas y teóricas*.

Los estudiantes logran concluir que las inversiones pueden llevar a una persona a la quiebra y por tanto no son rentables siempre [16, 18, 22], aunque una buena inversión puede generar ingresos adicionales.

Los estudiantes utilizan como soporte el conocimiento sobre la tasa de interés que pagan los bancos por ciertas cantidades de dinero [25] y concluyen que depende de la entidad bancaria y que las cooperativas son más rentables [28].

Los estudiantes utilizan cualificadores modales para proponer una aproximación de ganancias de dinero [20, 29] y para mostrar un valor adicional de interés [18, 28].

Los refutadores utilizan impugnaciones a las conclusiones que manifiestan los estudiantes y que van en contravía con los presupuestos de otros estudiantes [19, 21, 26], estos sirven para devolverse en la idea y proponer mayores argumentos para ciertas conclusiones.

[30] Profesor: ¿en qué se invierte el dinero? Por ejemplo, yo me compraría un taxi

[31] Andy: eso es inversión

[32] Alan: eso es una inversión a largo plazo

[33] Profesor: nadie me asegura que ese dinero…

[34] Alan: que ese taxi le va a dar los ochenta millones que usted le metió

[35] Andy: por lo que tiene que hacerle arreglos, sacar para la gasolina, que se le dañó algo

[36] Alan: seguros, SOAT, técnico mecánico

[37] Ana: usted algún día lo va a recibir, pero tiene que esperar mucho para recibir todo eso

[38] Andy: si compra el taxi, tiene que trabajar duro y guardar la platica que le quede, sacar una plata

[39] Alan: o simplemente comprar ese taxi, y con la plata que está dando ese taxi paga la mitad del taxi cierto, y saca otro, y esos dos taxis se van pagando entre sí

[40] Ana: no porque eso ya sería más duro

[41] Alex: eso es **más** difícil porque ya serían dos deudas

[42] Andy: no, porque él (profesor) pone a trabajar un taxi y trabaja en el otro, y ahí tiene sus dos taxis

[43] Alan: lo **mínimo** que le va a dar un taxi en el día son setenta mil pesos, y setenta mil por treinta es otra cosa, obviamente quitando la técnico mecánica, y los gastos del carro que son la gasolina, el aceite, etcétera, la gasolina se la tiene que dar el señor que está trabajando, que se haga treinta mil o lo que le quiera meter al carro

[44] Alex: pero si usted pone a trabajar un taxi ¿Cuánto tiene que pagar por tranquearlo?

[45] Alan: pero usted preocúpese mejor por los seguros, la técnico mecánica

[46] Profesor: eso gasta mucho

[47] Ana: pero también ¿cuánto gana?

[48] Andy: también gana mucho

Figura 29. Esquema de argumento 3 en resolución del problema sobre ahorro e inversión
Fuente: Elaboración del autor

Los estudiantes usan *garantías empíricas* para llegar a la conclusión de que comprar un taxi es inversión [31, 32], aunque no se tenga certeza de si ese taxi va a ser rentable;

proponen incluso una estrategia de mayor inversión [39] donde, con el trabajo de un taxi se pagan dos. Esto se relaciona directamente con experiencias que conocen de vecinos o conocidos.

Los estudiantes usan *garantías teóricas* para encontrar la relación entre costos vs beneficios de invertir en un taxi [43], donde se debe analizar el costo de seguros, combustible y el promedio de ingresos que genera, para calcular su rentabilidad.

Los estudiantes utilizan como datos el ingreso aproximado de un taxista, el precio del SOAT −Seguro Obligatorio de Accidentes de Tránsito−, seguros, combustible y demás, para llegar a conclusiones sobre la factibilidad de invertir en un taxi.

Los estudiantes logran concluir que la inversión en un taxi es una excelente alternativa [37], aunque nadie asegura que el dinero se recupere [41]. Además, así como genera un capital gasta también demasiado [44, 45, 47, 48]. No se logra llegar a un acuerdo sobre la rentabilidad del taxi.

Los estudiantes utilizan como soporte el conocimiento empírico sobre los costos y beneficios de poseer un taxi, y de esta manera llegan a conclusiones sobre el problema.

Los cualificadores modales son utilizados para mostrar una comparación con otros elementos [41, 43].

Los refutadores se utilizan como impugnaciones a las conclusiones que manifiestan los estudiantes y con las cuales no se está de acuerdo, además ayudan a reiniciar el diálogo [41, 44].

5.3.2. Relación entre garantías empíricas o teóricas con resolución del problema sobre ahorro e inversión.

Se estudian los cuatro factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución del problema (Schoenfeld, 1992), así:

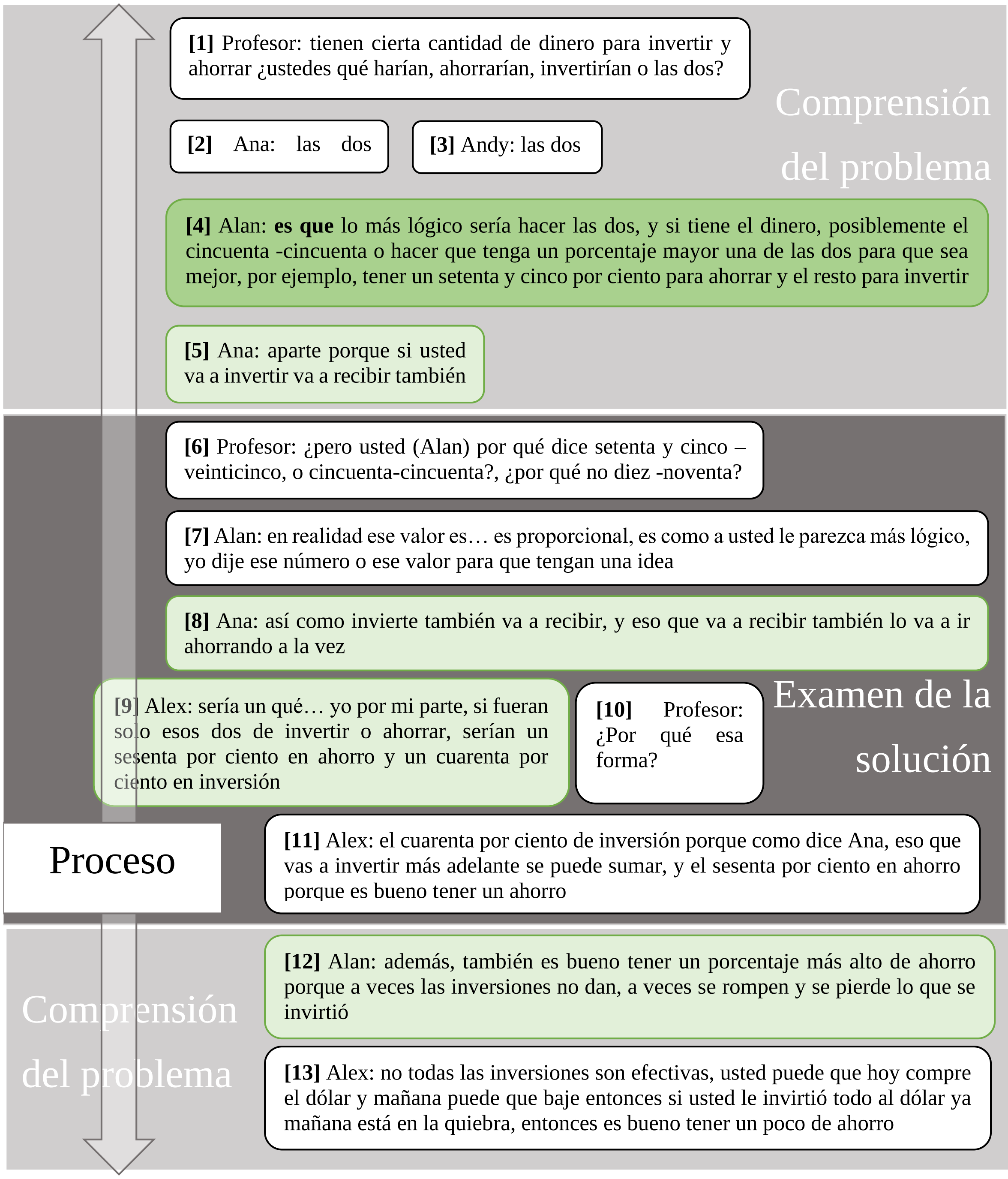


Figura 30. Esquema de argumento 1 en resolución del problema sobre ahorro e inversión
Fuente: Elaboración del autor

(1) Recursos: los estudiantes usan conocimientos sobre porcentajes para proponer conclusiones sobre el problema [4] y conocimientos que parten de la observación [8, 12]. Esto se relaciona con *garantías teóricas* y *garantías empíricas* respectivamente.

(2) Heurísticas: los estudiantes utilizan como estrategia fraccionar el problema y analizar las variables implicadas para llegar a conclusiones tanto razonables como racionales.

Al considerar las etapas heurísticas (Pólya, 1945), los estudiantes buscan llegar a una *comprensión del problema* mediante el diálogo [1-5] y de esta manera comienzan a proponer conclusiones sobre el problema. Para comprenderlo, manifiestan posibles soluciones, lo cual conlleva a utilizar una *garantía empírica* relacionada con la observación [5] y una *garantía teórica* relacionada con la teoría de porcentajes para la distribución del dinero [4]. A partir de las soluciones que proponen los estudiantes se pasa a la etapa de *examen de la solución* [6-11], donde se estudia la forma que proponen para la distribución del dinero y concuerdan en que se debe realizar de una manera proporcional, pero dando mayor porcentaje al ahorro ya que algunas inversiones pueden llevar a pérdidas [7, 11]. Por último, la conclusión manifestada por Alex y que se relaciona con la ganancia que puede generar una inversión [11], conlleva a que los estudiantes deban volver a la *comprensión del problema* [12-13] y estudien variables implicadas en la conclusión sobre ahorrar o invertir.

(3) Controles: cada estudiante propone una distribución del dinero de acuerdo con conocimientos que consideran lógicos para la solución del problema [4, 8, 9, 11].

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes consideran las matemáticas como una asignatura que busca explicar el comportamiento económico y social de una población, por tanto, sus conocimientos y temáticas parten de situaciones que ocurren en el entorno. Como evidencia, ellos utilizan *garantías empíricas* relacionadas con sus experiencias y observaciones de situaciones que ocurren a sus familiares [5, 8, 12].

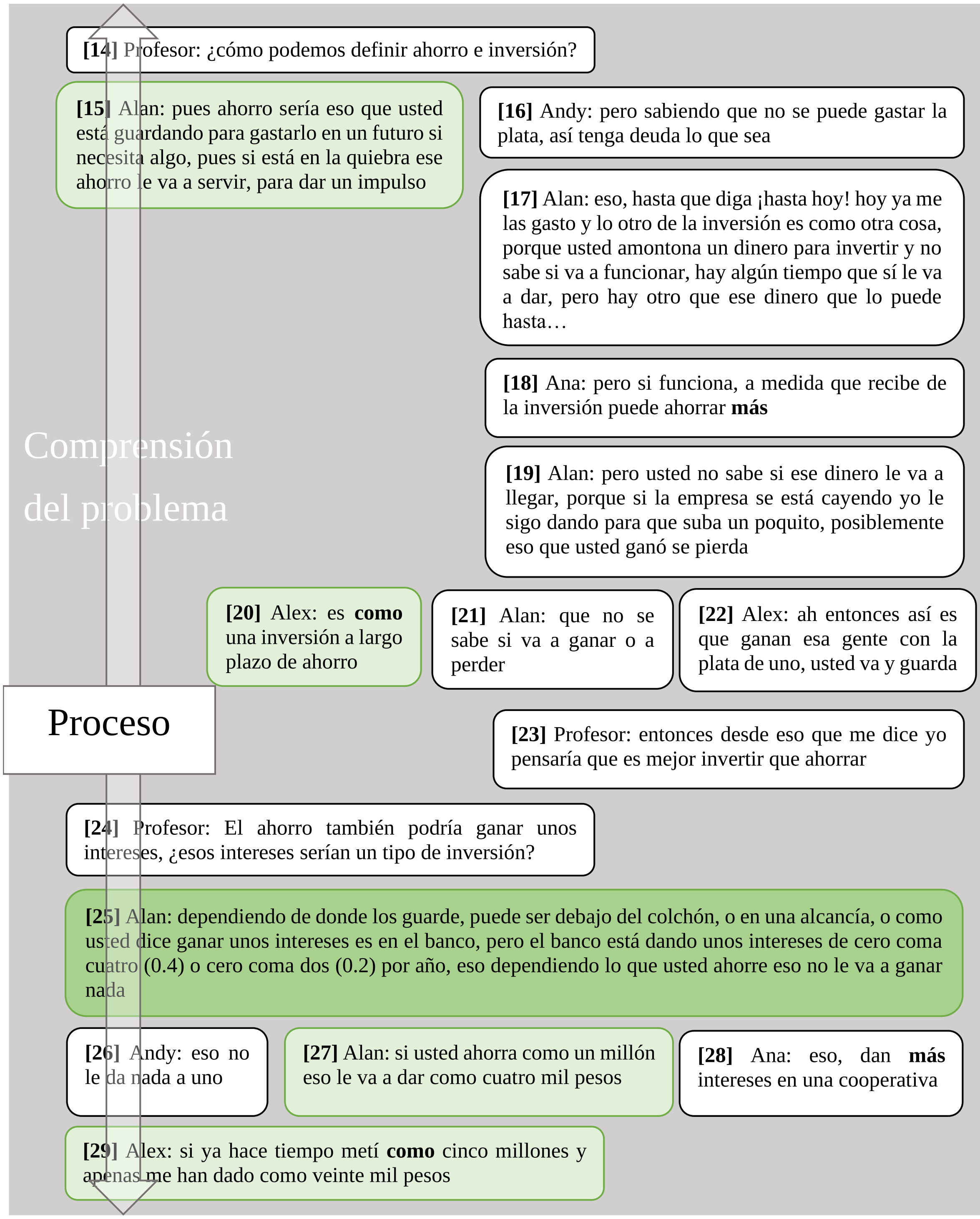


Figura 31. Esquema de argumento 2 en resolución del problema sobre ahorro e inversión
Fuente: Elaboración del autor

(1) Recursos: los estudiantes usan conocimientos relacionados con las tasas de interés que brindan los bancos [25] y algunas experiencias de ahorro para soportar sus conclusiones [27, 29], aspectos relacionados con el estudio de las garantías.

(2) Heurísticas: los estudiantes utilizan como estrategia llevar el problema a situaciones conocidas y para brindar conclusiones sobre el problema.

Al considerar las etapas heurísticas (Pólya, 1945), los estudiantes llegan a la *comprensión del problema* [14-29] mediante el diálogo, y buscan proponer conclusiones sobre el problema. En este argumento dialógico no se logra pasar de la primera etapa heurística. Una posible causa es que el problema es conceptual y requiere llegar a acuerdos sobre las variables que definen los conceptos.

(3) Controles: se conocen las tasas de interés que pagan los bancos y cada estudiante propone qué hacer con su dinero y cómo invertir.

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes consideran el ahorro y la inversión como dos puntos claves de la economía que están estrechamente relacionados, además encuentran en las matemáticas conceptos que se han pensado para explicar y comprender el comportamiento económico.

Figura 32. Esquema de argumento 3 en resolución del problema sobre ahorro e inversión
Fuente: Elaboración del autor

(1) Recursos: los estudiantes usan conocimientos empíricos relacionados con la experiencia de familiares, amigos o vecinos sobre las ganancias y gastos que produce un taxi como inversión [31, 39, 43] y que corresponden a *garantías empíricas*.

(2) Heurísticas: los estudiantes estudian las posibles variables que influyen en la compra y administración del taxi [36, 38, 46] y proponen conclusiones sobre el problema.

Al considerar las etapas heurísticas (Pólya, 1945), los estudiantes llegan al *examen de la solución* [30-48] como justificación a la pregunta anidada ¿en qué se invierte el dinero? El diálogo gira en torno a la propuesta de invertir en un taxi y al análisis de las variables a tener en cuenta para saber si la inversión es rentable.

(3) Controles: aunque se propuso la inversión en un taxi, algunos estudiantes estuvieron de acuerdo y otros tuvieron argumentos válidos que los motivaron a buscar nuevas formas de inversión.

(4) Sistemas de creencias: los estudiantes concluyen que las matemáticas estudian las acciones de la vida cotidiana, optimizan los recursos y ayudan a tomar mejores decisiones.

Los aspectos anteriores conllevan a analizar la resolución de problemas como **proceso** [1- 48]. Esto acontece a partir de preguntas orientadoras y anidadas del profesor, donde los estudiantes fueron concertando diferentes puntos de vista sobre las variables que se deben considerar.

La resolución de problemas como **producto** no acontece en la argumentación dialógica de la resolución del problema, dado que los estudiantes se basan en *garantías empíricas* [5, 8, 12, 15, 20, 27, 29, 31, 32, 39] que parten de sus observaciones sobre ahorro e inversión en sus familias o personas cercanas.

6. DISCUSION

El análisis de datos se realiza a partir de dos categorías. La primera es identificación de garantías empíricas y teóricas en la resolución del problema mediante argumentación dialógica y la segunda es relación entre garantías empíricas o teóricas con resolución del problema mediante argumentación dialógica. A partir de estas categorías se realiza la discusión de los principales hallazgos.

En la categoría garantías empíricas y teóricas en argumentos dialógicos se logran encontrar componentes de un argumento (Toulmin, 2007), para centrar nuestra atención en el uso de garantías por parte de los estudiantes en la resolución del problema. En los tres problemas se evidencia que los estudiantes hacen uso de garantías empíricas relacionadas con sus oficios. Por ejemplo, en el problema de la barbería, los estudiantes manifiestan sus argumentos y conclusiones a partir de lo que viven a diario.

En la categoría relación entre garantías empíricas o teóricas con resolución del problema mediante argumentación dialógica, se evidencia que en los esquemas diseñados se estudian los cuatro factores que inciden en los estudiantes durante el proceso de resolución del problema (Schoenfeld, 1992) y las etapas heurísticas de resolución de problemas (Pólya, 1945). En esta categoría se encuentra el uso de garantías empíricas y teóricas dentro del proceso y producto de resolución de problemas.

Por un lado, dado que los problemas surgen de los intereses manifestados por los estudiantes, se evidencian conocimientos empíricos relacionados con experiencias y que sirven para soportar ciertas conclusiones y discusiones del problema. Cáliz, Sepúlveda y Rico (2015) afirman que provocar discusiones alrededor de la comprensión de situaciones en resolución de problemas y del planteamiento de un enunciado, proporciona explicaciones que conllevan a la búsqueda de información y estrategias cognitivas y heurísticas que permiten la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos.

Por otro lado, si se analiza la manera como se presentan los problemas, se puede afirmar que los estudiantes participan activamente en la construcción de su conocimiento, debido a que el aprendizaje se centra en ellos y no en el profesor o el saber matemático. Además, se estimula el trabajo colaborativo puesto que se trabaja en pequeños grupos facilitando la interacción social.

La resolución de problemas se entiende como una estrategia de aula en la que se respeta la autonomía del estudiante quien aprende sobre los contenidos y la propia experiencia. Al estudiar las cuatro etapas propuestas por Pólya (1945) para resolver un problema en un contexto de la vida cotidiana, se encuentra una estrecha relación con los planteamientos de Patiño y Pulido (2015), al afirmar que para orientar el proceso de resolución de los estudiantes se formulan distintas preguntas, buscando desarrollar las cuatro etapas. De esta manera, en la fase de comprensión del problema los estudiantes se centran en el análisis del contexto de la situación. Para concebir un plan los estudiantes proponen posibles pasos para llevar a cabo las acciones que indicaron en la fase anterior; este proceso los lleva a plantearse inquietudes frente a qué procedimientos matemáticos son necesarios para dar solución al problema. En la ejecución del plan los estudiantes tienen claro que se debe hallar el problema. Por último, en cuanto al examen de la solución se realiza una socialización de las estrategias usadas por los estudiantes, analizando, comparando y revisando los procedimientos matemáticos desarrollados y una ejercitación con la que se busca fortalecer los conceptos construidos durante la solución de la situación, aplicándolos en otras situaciones y problemas nuevos.

Si se analizan las concepciones sobre la resolución de problemas propuestas por Pastells (2012), se encuentra similares situaciones que apoyan tales planteamientos. Por ejemplo, referente a las expectativas sobre las capacidades de los estudiantes, se detecta un bajo grado de confianza en ellos mismos para la resolución de problemas, pero durante el diálogo y la argumentación dialógica sobre los problemas que se plantean, los estudiantes superan esas expectativas. Con respecto a la percepción de la diversidad, se presenta un trabajo cooperativo que aporta nuevos horizontes, donde los estudiantes pueden participar con sus diferentes puntos de vista y creencias, mediante el uso de garantías empíricas o teóricas. Referente a las estrategias matemáticas utilizadas por los estudiantes se identifican estrategias heurísticas como: trabajo con material tangible, representación de objetos, fraccionar el problema, buscar regularidades, elaboración de conjeturas, refutación. Referente a la importancia de la resolución de problemas, al final del diálogo se dedica un espacio para escuchar de los estudiantes la estrategia que llevan a cabo, se toma conciencia de las funciones reales de la resolución de problemas y se comprende la utilidad para introducir nuevos conocimientos necesarios.

Se contribuye a mejorar algunas concepciones como causas de dificultades detectadas. Pastells (2012) menciona poca diversificación de las tipologías de problemas que se plantean a los estudiantes, para lo cual la investigación tuvo tres grupos de estudiantes que trabajaron problemas diferentes y de acuerdo con sus intereses; la mediación se da a partir de explicaciones más que a través de preguntas, la argumentación dialógica se lleva a cabo a partir de preguntas orientadoras y anidadas; la comunicación en el aula requiere de un espacio para discutir las estrategias de resolución y para exponer los resultados, por lo tanto, la investigación se da a partir del diálogo, donde cada estudiante manifiesta su punto de vista.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Sobre la pregunta investigativa: *¿Cómo estudiantes usan garantías empíricas o teóricas en resolución de problemas mediante argumentación dialógica?,* se logra concluir que los estudiantes, por un lado, usan garantías empíricas para realizar sus oficios; para comunicar ideas entre las personas que conocen de la profesión, por ejemplo: entre los barberos se habla de cortes a tres dedos (Resolución de problema 2).

Además, las experiencias personales de los estudiantes con objetos tangibles se usan como garantía empírica que permite experimentar, contar y concluir. Asimismo, la observación y conocimiento del contexto por parte de los estudiantes, se usa como garantía empírica que permite controlar el problema (Resolución de problema 1, 2 y 3).

Por otro lado, los estudiantes usan garantías teóricas para dar mayor soporte a sus conclusiones, para validar un conocimiento. Además, las operaciones matemáticas se usan como garantías teóricas que permiten llegar a conclusiones de manera rápida (Resolución de problema 1, 2 y 3).

Sobre el objetivo (1): *identificar garantías empíricas o teóricas en argumentos dialógicos que comunican estudiantes en resolución de problemas* se concluye que las preguntas orientadoras y anidadas que propone el profesor y estudiantes pueden ser una base para la utilización de un tipo específico de garantía (*empírica o teórica*), es decir, se encuentra una estrecha relación entre la preguntas orientadoras y anidadas y el tipo de garantía que el estudiante utiliza para justificar la solución. Asimismo, los estudiantes justifican sus afirmaciones de acuerdo con supuestos y conocimientos que adquieren a lo largo de su vida escolar (garantías teóricas), y de experiencias que parten de sus oficios (garantías empíricas).

Sobre el objetivo (2): *relacionar el uso de garantías empíricas o teóricas comunicadas por los estudiantes cuando resuelven problemas mediante argumentación dialógica,* se concluye que se encuentran indicios de que las garantías empíricas las usan los estudiantes en la resolución de problemas cuando ocurre el proceso y las garantías teóricas las usan los estudiantes en la resolución de problemas cuando ocurre el producto.

Además, cuando los estudiantes consideran las etapas heurísticas en la argumentación dialógica, el uso de un tipo específico de garantía no se limita a una de las etapas, es decir, las garantías se pueden encontrar en cualquier etapa. Los estudiantes consideran que la resolución de problemas debe seguir una secuencia de pasos para llegar a una solución, y se evidencia en los diálogos que esta perspectiva cambia.

Tabla 4. Inferencias presentadas en el análisis

Problemas	**Identificación de garantías empíricas y teóricas en la resolución del problema**	**Relación entre garantías empíricas o teóricas con resolución del problema**
Problema sobre un lapicero	*Los estudiantes usan garantías empíricas:* Como objetos tangibles para experimentar, contar y concluir. Para comparar la relación entre el radio del cilindro y el volumen que contiene, asimismo, los estudiantes parten de idea de que entre más grande sea un recipiente mayor volumen ocupa. Para manifestar el tamaño de letra, dado que utilizan una relación entre el tamaño de un renglón y el espacio que ocupa la letra. Para conocer la cantidad de letras que se pueden escribir por renglón, donde toman sus cuadernos para llenar un renglón de letras y contarlas. *Los estudiantes usan garantías teóricas:* Como operaciones matemáticas para llegar a conclusiones. Basadas en el sistema internacional de medidas, como sistema predeterminado	Las garantías empíricas se relacionan con la resolución de problemas como proceso, ya que utilizan la experiencia de sus oficios. Las garantías teóricas se relacionan con la resolución de problemas como producto, dado que utilizan operaciones y definiciones. Las etapas heurísticas propuestas para el proceso de resolución de problemas no cumplen un orden específico cuando se analizan mediante argumentación dialógica. En las etapas propuestas para la resolución de un problema, se sospecha que configuran el plan mentalmente ya que no se percibe de forma implícita en la argumentación dialógica, debido a que utilizan *garantías empíricas* basadas en sus experiencias con el objeto tangible: cuaderno y lapicero.

	para una longitud (metros). Basadas en el principio multiplicativo para calcular cantidad de letras que se pueden escribir en una hoja.	
Problema sobre una barbería	*Los estudiantes usan garantías empíricas:* Para indicar que existe un sistema de medidas entre el oficio de barbería relacionado con los dedos. Para concluir sobre la forma de saber que un corte quedó igual en ambos lados de la cabeza. Para llegar a la conclusión de que el cabello de una persona no puede crecer un centímetro, en relación con las observaciones en su oficio de barberos. *Los estudiantes usan garantías teóricas:* Relacionadas con unidades de medidas determinadas por el sistema internacional. Como la definición de volumen para explicar relación entre longitud y la cantidad de cabello.	Los barberos utilizan *garantías empíricas* relacionadas con la medida para llevar a cabo un corte. Dichas medidas conciernen a longitudes que se dejan al realizar un corte utilizando los dedos, pero que se comparan con longitudes de conocimientos matemáticos como centímetros y milímetros. La resolución de problemas como producto no acontece en la argumentación dialógica dado que los estudiantes utilizan *garantías empíricas* relacionadas con su oficio de barberos. En la resolución de problemas como proceso se analizan las medidas de la longitud del cabello y los estudiantes manifiestan diversos argumentos tanto empíricos relacionados con el oficio de barberos, como teóricos relacionados con unidades de medida del sistema internacional. Entre los sistemas de creencias, los estudiantes consideran que, aunque las matemáticas ayudan a explicar "cosas" de su oficio de barberos, no es necesario cambiar sus prácticas para poder realizar una buena labor.
Problema sobre ahorro e inversión	*Los estudiantes usan garantías empíricas*: Como conocimientos relacionados con su experiencia y observaciones de lo que ocurre a sus familiares o conocidos. Para llegar a la conclusión de que el ahorro se relaciona con guardar un dinero para gastarlo en el futuro, e inversión se relaciona con adquirir un negocio. Para concluir que comprar un taxi es	Para comprender el problema manifiestan posibles soluciones que conllevan a utilizar una *garantía empírica* relacionada con la observación y una *garantía teórica* relacionada con la teoría de porcentajes para la distribución del dinero. Como sistemas de creencias, los estudiantes consideran las matemáticas como una asignatura que busca explicar el comportamiento económico y social de una población, por tanto, sus conocimientos y

	inversión, aunque no se tenga certeza de si ese taxi va a ser rentable. *Los estudiantes usan garantías teóricas:* Como conocimientos relacionados con la definición de porcentaje para proponer una distribución del dinero. Como conocimientos sobre el interés que paga un banco por cierta cantidad de dinero, donde analizan que el interés oscila entre el 2 y el 4 % efectivo anual. Para encontrar la relación entre costos y beneficios de invertir en un taxi.	temáticas parten de situaciones que ocurren en el entorno. Como evidencia, utilizan garantías empíricas relacionadas con sus experiencias y observaciones de situaciones que ocurren a sus familiares. Al considerar las etapas heurísticas (Pólya, 1945), los estudiantes no logran pasar de la primera etapa en algunos argumentos dialógicos. Una posible causa es conceptual y requiere llegar a acuerdos sobre las variables que definen los conceptos.

Fuente: Elaboración propia a partir de inferencias presentadas en el análisis

A partir de las inferencias desarrolladas en esta investigación, se pueden realizar las siguientes recomendaciones:

1. Plantear tareas sobre oficios e intereses de los estudiantes que los involucren a todos, dado que esta investigación se planteó a subgrupos de un conjunto de estudiantes.
2. Construir nuevos problemas (cocción de comidas, gastos, optimización de espacios) que puedan derivarse de las experiencias de los estudiantes en un contexto.
3. Estudiar preguntas que realiza el profesor, ya que pueden ser parte fundamental de la argumentación y en el tipo de garantía que usan los estudiantes en la resolución de problemas.
4. Estudiar la manera implícita en que se presentan algunas etapas (configuración de un plan y ejecución del plan) de Pólya (1945) cuando se interpreta la resolución de problemas mediante argumentación dialógica.
5. Estudiar la argumentación en conjunto con las demás competencias, en aras de que los contenidos sean emergentes del contexto y de intereses de los estudiantes.

8. REFERENCIAS

Abdillah, A., Nusantara, T., Subanj, S., Susanto, H., & Abadyo, A. (2016). The Students Decision Making in Solving Discount Problem. *International Education Studies*, *9*(7), 57-63.

Aljaberi, N., & Gheith, E. (2016). Pre-Service Class Teacher'Ability in Solving Mathematical Problems and Skills in Solving Daily Problems. *Higher Education Studies*, *6*(3), 32-47.

Allen, J. (2009). Valuing Practice over Theory: How beginning teachers re-orient their practice in the transition from the universityto the workplace. *Teaching and Teacher Education*, *25*, 647-654.

Álvarez, C. (2015). Teoría frente a práctica educativa: algunos problemas y propuestas de solución. *Perfiles Educativos*, *XXXVII* (148), 172-190.

Arikan, E., & Ünal, H. (2015). Investigation of Problem-Solving and Problem-Posing Abilities of Seventh-Grade Students. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15*(5), 1403-1416.

Arnal-Bailera, A., & Gasca, B. (2018). Actividades con el ajedrez para trabajar la argumentación y la resolución de problemas en matemáticas en Educación Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *99,* 71-84.

Ashmore, A. Frazer, M., & Casey, R. (1979). Problem solving and problem solving networks in chemistry. *Journal of Chemical Education*, *56*(6), 377-379.

Bahar, A., & Maker, C. (2015). Cognitive Backgrounds of Problem Solving: A Comparison of Open-ended vs. Closed Mathematics Problems. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6).

Bostic, J., Pape, S., & Jacobbe, T. (2016). Encouraging sixth-grade students' problem-solving performance by teaching through problem solving. *Investigations in Mathematics Learning*, *8*(3), 30-58.

Cáliz, S., Sepúlveda, S., & Rico, S. (2015). ¿Cómo influye la habilidad explicativa en la resolución de problemas? *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *1*(1), 359-363.

Carpenter, T. (1989). Teaching as problem solving'. In R. Charles and E. Silver (Eds), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, pp.187-202. USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Charles, R., & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why & how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Chávez, J., & Montes, J. (2015). Niveles de verbalización y resolución colaborativa de problemas poco estructurados. *Diversitas: Perspectivas en Psicología*, *11*(1), 51-66.

Cockcroft, J. (1985). Mexico: Class formation, capital accumulation and the state.

Codina, A., Cañadas, M., & Castro, E. (2015). Mathematical problem solving through sequential process analysis. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *13*(35), 73-76.

Craig, T. (2016). The role of expository writing in mathematical problem solving. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *20*(1), 57-66.

Creswell, J. (2009). Mapping the Field of Mixed Methods Research. In A. Bryman, *Journal of Mixed Methods Research* (págs. 95-108). University of Leicester, United Kingdom: Sage.

Cruz, G. (2017). El desarrollo de habilidades cognitivas mediante la resolución de problemas matemáticos. *Revista Ciencia e Investigación, 2*(5), 14-17.

Díaz, J., & Díaz, R. (2018). Los Métodos de Resolución de Problemas y el Desarrollo del Pensamiento Matemático. *Rio Claro (SP), 32*(60), 57-74.

Domínguez, I., & Iglesias, P. (2017). Competencia lectora y resolución de problemas matemáticos. *Revista de estudios e investigación en psicología y educación, (1),* 153-162.

Durango, J. (2017). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso.* (Tesis doctoral). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Echenique, I. (2006). Matemáticas Resolución de Problemas, Educación Primaria. *Gobierno de Navarra*. *Departamento de Educación*. Recuperado de www.cfnavarra.es/publicaciones.

Elliot, J. (2010). El estudio de la enseñanza y el aprendizaje: una forma globalizadora de investigación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 68*(24), 201-222.

Ericsson, K., & Simon, H. (1980). Verbal reports as data. *Psychological Review*, *87*(3), 215-251.

Ericsson, K., & Simon, H. (1993). *Protocol Analysis*. Cambridge, MA: MIT press.

Falcón, S., Medina, P., & Plaza, Á. (2018). Facilitando a los alumnos la comprensión de los problemas matemáticos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 97,* 21-28.

Fernández, J. (2003). Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos. *Madrid: Praxis.*

Frazer, M. (1982). Nyholm Lecture. Solving chemical problems. *Chemical Society Reviews, 11*(2), 171-190.

Gagné, R. (1965). *The conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Garrido, O., & Burgos, C. (2017). Relación entre los argumentos dados en tareas de conservación de la cantidad y las estrategias de solución utilizadas al resolver problemas verbales de estructura aditiva. *REXE: Revista de estudios y experiencias en educación*, *16*(31), 95-106.

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación matemática, 6*(03), 37-51.

Gaulin, D. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma, 19,* 51-63.

Hastuti, I., Nusantara, T., & Susanto, H. (2016). Constructive metacognitive activity shift in mathematical problem solving. *Educational Research and Reviews, 11*(8), 656-667.

Kelly, G. J., Regev, J., & Prothero, W. (2007). Analysis of lines of reasoning in written argumentation. In *Argumentation in science education* (pp. 137-158). Springer, Dordrecht.

Kitchenham, B. (2004). Procedures for performing systematic reviews. *Keele, UK, Keele University*, *33,* 1-26.

Kress, N. (2017). 6 Essential Questions for Problem Solving. *Mathematics Teacher, 111*(3), 190-196.

Krummheuer, G. (2015). Methods for reconstructing processes of argumentation and participation in primary mathematics classroom interaction. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 51-74). Springer, Dordrecht.

Leitão, S., de Chiaro, S., & Ortiz, M. (2016). El debate crítico: un recurso de construcción del conocimiento en el aula. *Textos de didáctica de la lengua y la literatura, 73,* 26-33.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. In *Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 1-39). Cham, Suiza: Springer.

Lüdke, M., & André, M. (2007). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Martínez, F., & Parra, J. (2009). Desarrollo de habilidades cognitivo lingüísticas (describir, resumir, explicar) empleando una metodología de resolución de problemas. *Tecné Episteme Y Didaxis*: TED. https://doi.org/10.17227/01203916.203

Mazzilli D., Hernández, S., & De La Hoz (2016). Procedimiento para Desarrollar la Competencia Matemática Resolución de Problemas. *Escenarios, 14* (2), 103-119. doi: http://dx.doi.org/10.15665/esc.v14i2.935.

McDonald, S. (2017). Enhanced Critical Thinking Skills through Problem-Solving Games in Secondary Schools. *Interdisciplinary Journal of E-Learning & Learning Objects*, 13.

MEN, (1998). Serie lineamientos curriculares. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf8.pdf.

MEN, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, EDUTEKA. Recuperada en febrero 20, 2013, del sitio Web tema: Portal de Recursos Educativos Abiertos (REA) en http://www.temoa.info/es/node/49170.

Meyer, G. (1977). One-dimensional parabolic free boundary problems. *Siam Review, 19*(1), 17-34.

Moscovici, S., & Hewstone, M. (1983). Social representations and social explanations: From the “naive” to the “amateur” scientist. *Attribution theory: Social and functional extensions*, 98-125.

Muñoz, J., & Gorgorió, N. (2015). *Enseñanza basada en resolución de problemas: distancia entre conocimiento teórico y saber común.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2011). Warrant revisited: Integrating mathematics teachers pedagogical and epistemological considerations into Toulmin´s model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173. doi: 10.1007/s10649- 011-9345-y.

NCTM, P. (2003). Principios y estándares para la educación matemática. *Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla, España*.

Nortes, A. (1987). Resolución de problemas. *Bordón*, *44*(2) 213-216.

Novak, G. (1977). Representations of Knowledge in a Program for Solving Physics Problems. *In IJCAI*. Vol. 5, pp. 286-291.

Onuchic, L., & Allevato, N. (2004). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez*, 212-231.

Özcan, Z., Imamoglu, Y., & Katmer, V. (2017). Analysis of Sixth Grade Students' Think-Aloud Processes While Solving a Non-Routine Mathematical Problem. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *17*(1), 129-144.

Ozturk, T., & Guven, B. (2016). Evaluating Students' Beliefs in Problem Solving Process: A Case Study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *12*(2), 411-429.

Palarea, M., Hernández, J., & Socas, M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. *MM Socas et al. González, JL; Ortiz, AL; Gallardo, J.* Universidad de Málaga.

Pastells, A. (2012). Proceso de transformación de las concepciones del Profesorado sobre la resolución de Problemas matemáticos. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *30*(3), 71-88

Patiño, E., & Pulido, S. (2015). Resolución de problemas: Estrategia de aula para el desarrollo de operaciones con expresiones algebraicas. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *1*(1), 616-622.

Perales, F. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las ciencias*, *11*(2), 170-178.

Piñeiro, J., Pinto, E., & Díaz-Levicoy, D. (2015). ¿Qué es la Resolución de Problemas? *Boletín REDIPE*, *4*(2), 6-14.

Planas, N., & Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. *SUMA*, *64*, 35-44.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2018). Using the Relational Paradigm: effects on pupils' reasoning in solving additive word problems. *Research in Mathematics Education*, *20*(1), 70-90.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical model*. Princeton, New Jersey.

Pons, J., & Piquet, J. (2017). La Base de Orientación en la Resolución de Problemas: "cuando me Bloqueo o me Equivoco". *Journal of Research in Mathematics Education*, *6*(3), 256-282.

Postman, P., & Weingartner, C. (1969). *Teaching as a subversive activity*. Delta.

Robayo, B., & González, J. (2012). Algoritmos como herramienta en la búsqueda de nuevos datos para la resolución de problemas sobre isometrías del plano. *Tecné, Episteme y Didaxis, 32*, 11-22.

Rodríguez, J. (2003). Una propuesta metodológica para la utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas. *ISPEJV. La Habana. Cuba.*

Rodríguez, M., & Arroyo, J. (2016). Dificultades del lenguaje que influyen en la resolución de problemas. *Enseñanza & Teaching: Revista Interuniversitaria de Didáctica*, *34*(2), 17-42.

Sampieri, R. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill México.

Sánchez, G. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa: presupuestos epistemológicos que orientan al investigador*. Cooperativa Editorial Magisterio.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 334-370.

Schoenfeld, A. (2013). *Cognitive science and mathematics education*. Routledge.

Terán, M., & Pachano, L. (2005). La investigación-acción en el aula: tendencias y propuestas para la enseñanza de la matemática en sexto grado. *Educere La Revista Venezolana de Educación*, *029*(9), 171-179.

Toulmin, S. (2007). Los usos de la argumentación (Trad. de María Morrás y Victoria Pineda). Barcelona: *Península.*

Trujillo, C., & Zúñiga, C. (2015). Invención de problemas matemáticos de enunciado verbal (IPMEV). *RECME*, *1*(1), 775-780.

Tumbaco, A., Pavón, C., & Acosta, T. (2018). Actividades lúdicas para el desarrollo de la inteligencia creativa en la resolución de problemas matemáticos. *Conrado*, *14*(62), 91-94.

Vargas, C. (2015). *Resolución de problemas con ideas del pensamiento crítico.* En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 478-485). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Villarreal, J., Muñoz, G., Pérez, H., Corredor, A., Martines, E., & Porto, A. (2017). El desarrollo de habilidades investigativas a partir de resolución de problemas. Las matemáticas y el estado nutricional de los estudiantes. *Revista Lasallista de Investigación*, 14(1), 162-169.

Wick, J., Beggs, D., & Mouw, J. (1989). Developing Cognitive Abilities Test (2nd ed.). Chicago, IL: American Testronics.

Woods, D., Crowe, C., Hoffman, T., & Wright, J. (1985). Challenges to Teaching Problem-Solving Skills. *Chem 13 News*, *155*, 1-12.

Zabala, C. (2015). Control de algunas heurísticas frente a situaciones problema, involucrando razones trigonométricas. Una experiencia en grado decimo. *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM*, *2*, 145-152.