UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas

Autor

Luis Carlos Villa Monsalve

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2020

Conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas

Luis Carlos Villa Monsalve

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Educación

Asesor:

Dr. Walter Fernando Castro Gordillo

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Grupo de Investigación:

Matemáticas, Educación y Sociedad (MES)

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2020

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Walter Fernando Castro Gordillo, director de este trabajo de investigación, por su dedicación, paciencia y apoyo. Asimismo, por compartir cada uno de sus conocimientos al desarrollo de este trabajo.

A los profesores del posgrado en Educación, línea Educación Matemática, por cada una de las observaciones planteadas en los diferentes cursos.

A mis compañeros del seminario permanente, curso compartido para los programas de maestría y doctorado, que realizaron en ese espacio la lectura a mis avances del trabajo aportando elementos teóricos y metodológicos.

A los estudiantes y comunidad educativa de las instituciones Colegio Santo Domingo de Guzmán, Institución Educativa José Antonio Galán, Corporación Universitaria Minuto de Dios – Seccional Bello y la Universidad de Antioquia, que me permitieron realizar la aplicación del cuestionario.

A mis padres Myriam y Alberto, y hermano: Jhonnattan por motivarme a seguir adelante en los momentos difíciles e inculcarme el valor de la responsabilidad.

A Claudia Mejía y a mi hija Isabella Villa por su paciencia y acompañamiento.

Finalmente, a todas aquellas personas, familiares, amigos y compañeros de trabajo por sus comentarios y aportes a este trabajo.

Tabla de contenido

Índice de tablas

Índice de Figuras

Resumen

En el presente trabajo de investigación se analizaron los conflictos de significado que manifiestan tanto estudiantes de undécimo grado de dos instituciones de educación secundaria como estudiantes de primer semestre de dos universidades, cuando resuelven tareas algebraicas. El interés de esta investigación radica en que el álgebra escolar está en la base del estudio de las matemáticas de nivel superior, y los conflictos de significado que surgen durante la resolución de tareas algebraicas son un eventual obstáculo para progresar en la comprensión de los objetos emergentes de las prácticas matemáticas.

Se contó con la participación de 25 estudiantes de cada una de las instituciones para la aplicación de un cuestionario conformado por 11 Tareas algebraicas, las cuales fueron categorizadas en problemas de palabras, lenguaje, traducción, ecuaciones y equivalencia. El análisis se realizó con herramientas teóricas y metodológicas provistas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) a partir de la configuración de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

Del análisis realizado a las soluciones manifestadas por los estudiantes en el cuestionario, se encontraron conflictos de significado similares tanto en el ámbito de educación secundaria como en el universitario, donde prevalece el uso del lenguaje aritmético sobre el lenguaje algebraico, lo cual pone en evidencia la necesidad de generar estrategias que los faculte en la compresión y uso del lenguaje algebraico.

Palabras claves: Enfoque Ontosemiótico, resolución de problemas, dificultades algebraicas, conflictos de significado, significado institucional, significado personal.

Abstract

This research study had as main objective to analyze the conflicts of meaning that both eleventh grade students from two secondary education institutions and first semester students from two universities present when solving algebraic tasks. The interest of this research is that school algebra is at the base of the study of higher level mathematics, and the conflicts of meaning that arise during the resolution of algebraic tasks are an eventual obstacle to progress in the understanding of emerging objects of mathematical practices.

A questionnaire made of 11 algebraic tasks was applied to 25 students of each institution, these tasks were categorized by word problems, language, translation, equations and equivalence. The analysis was made with theoretical tools and methodologies provided by the Ontosemiotic Approach from the configuration of intervening and emerging objects of the practice systems.

From the analysis carried out to the solutions manifested by the students in the questionnaire, similar conflicts of meaning were found both in the secondary education and in the university field, where the use of arithmetic language prevails over algebraic language, which demonstrates the need to generate strategies that empower them in the compression and use of algebraic language.

Key words: Ontosemiotic Approach, problems resolution, algebraic difficulties, conflicts of meaning, institutional meaning, personal meaning.

Descripción del proyecto de investigación

Presentación

El presente trabajo de investigación se encuentra enmarcado en la Línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia, en la Maestría en Educación; tiene el apoyo del Grupo de Investigación Matemáticas, Educación y Sociedad (MES), y se desarrolla en instituciones educativas, públicas y privadas, de nivel secundario y terciario, en la ciudad Medellín-Colombia, con estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad.

El desarrollo del presente estudio pretende identificar y analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas. Además, el interés del desarrollo de esta investigación refiere a que el álgebra escolar está en la base del estudio de las matemáticas de nivel superior, y los conflictos de significado que surgen durante la resolución de tareas algebraicas son un eventual obstáculo para progresar en la comprensión matemática, y los resultados deficientes en pruebas escolares podrían impedir el acceso a niveles superiores de formación matemática. Si bien existen numerosos estudios (Abrate, Font y Pochulu, 2008; Figueroa y Díaz, 2011; López, Gómez y Restrepo, 2015; Socas, 2011) sobre errores, obstáculos y dificultades, no hay un estudio que considere el estudio de los conflictos de significado manifestados por estudiantes de undécimo y primer semestre de universidad en la ciudad de Medellín, y en dos instituciones públicas y privadas, de nivel secundario y terciario. La información recolectada podría informar a las instituciones educativas de eventuales acciones que se deberían tomar para ayudar a los estudiantes a superar tales conflictos para que puedan continuar con sus estudios superiores, pues poco se conoce sobre las fuentes, características o implicaciones.

La motivación para esta investigación y para el planteamiento del problema se encuentra, en primer lugar, en mi experiencia como docente de matemáticas de educación secundaria en un colegio de carácter oficial y ubicado en el municipio de Bello-Antioquia, en segundo lugar, en la deserción académica reportada en los primeros semestre de universidad, y en tercer lugar, la ausencia de estudios, en la literatura, con respecto a los conflictos de significado en la resolución de tareas algebraicas.

Con base en lo anterior, se ha realizado una revisión de literatura en fuentes como Redalyc, Dialnet, Scielo, Scopus, con palabras claves como “resolución de tareas algebraicas”, “dificultades en matemáticas”, “obstáculos y errores matemáticos”, “conflictos semióticos”, “conflictos de significado” tanto en español como en inglés. En la búsqueda llevada a cabo, se ha encontrado que los conflictos de significado manifestados por los estudiantes, en la resolución de tareas algebraicas, parece influenciar negativamente, su desempeño académico y afectar su permanencia en la universidad.

Por tanto, se diseña un cuestionario que permita analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas.

A continuación, se presenta el planteamiento del problema del trabajo, un marco conceptual en estrecha relación con elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS)(Godino, Batanero y Font, 2007), el diseño metodológico basado en el enfoque Fenomenológico-Hermenéutico propuesto en Sánchez (1998) y las referencias bibliográficas.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática ha puesto énfasis en las dificultades escolares que los estudiantes experimentan durante su educación secundaria y universitaria (Gavilán, 2011; Castellanos y Obando, 2009; Chavarría-Arroyo, 2014), y puede observarse que a pesar de los años, de propuestas teóricas y prácticas para abordarlas, quedan aún por resolver.

Algunas investigaciones consideran que las dificultades o los conflictos de significado surgen de las estrategias y de las convenciones que los estudiantes emplean en la resolución de tareas algebraicas, y son el resultado de prácticas escolares en Matemáticas (Gavilán, 2011; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Suárez et al., 2014). Para Gavilán (2011) en el aula de clase, en ocasiones, no se atiende a una visión didáctica de la Historia de las Matemáticas, la cual posibilita un conocimiento más contextualizado de los conceptos matemáticos que son tanto un proceso como un producto sociocultural, que evidencia que se aprende en sociedad y para resolver problemas. Algunas veces, en la escuela, solo se abordan contenidos y se desarrollen habilidades memorísticas, sin que los estudiantes hayan comprendido, sin argumentar procedimientos y sin validar las respuestas. Con base en lo anterior, tanto estudiantes de secundaria como de universidad que tienen habilidades satisfactorias en matemáticas, manifiestan conflictos de significado sobre objetos matemáticos (Socas, 1997). Analizar y reconocer esos conflictos de significado permitirá a estudiantes e instituciones arbitrar procedimientos para resolverlas.

Otras investigaciones (Chavarría-Arroyo, 2014; Godino, Batanero, y Font, 2007; Pérez y Ramírez, 2011; Vélez y López, 2009) han informado la importancia de centrar la atención en los conflictos de significado de los estudiantes para resolver tareas algebraicas, debido a las deficiencias que presentan en conocimientos previos, los cuales son indispensables para construir “el edificio matemático” correspondiente al curso. Por consiguiente, se puede considerar que estudiantes que presentan conflictos de significado para resolver tareas aritméticas, también los presentarán para resolver tareas algebraicas debido a que aprobaron cursos de aritmética sin comprender sus teoremas y aplicaciones.

El aprendizaje de las matemáticas constituye un camino en el que cada nuevo paso presupone un conocimiento adecuado de los pasos anteriores, sin los cuales, los avances son solo aparentes, se construyen un sinfín de caminos y ante el primer conflicto los estudiantes se quedan en un laberinto sin salida.

El objeto de estudio de la presente investigación son las tareas algebraicas en estrecha relación con los conflictos de significado en la resolución de las mismas. Posteriormente se definirá la postura frente al concepto de “conflicto de significado” y de “tareas algebraicas”.

En este sentido, se usará el marco teórico Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática, EOS, (Godino, Batanero y Font, 2007) que permitirá describir tanto los significados asociados con diversos objetos algebraicos como los conflictos de significado entre conocimiento personal y conocimiento institucional. El marco teórico EOS proveerá las herramientas de análisis de datos.

Los datos se obtuvieron mediante la aplicación de un cuestionario como instrumento de recolección de la información en dos instituciones de educación secundaria y en dos instituciones de educación universitaria. Tras aplicar el cuestionario se identificaron conflictos de significado en la comprensión y uso del lenguaje algebraico que no los faculta para resolver tareas algebraicas.

El documento está divido en cinco apartados. En el primero, se presenta el planteamiento del problema y los objetivos trazados. En el segundo, se presenta el marco teórico a partir de los elementos del Enfoque Ontosemiótico, (EOS). En el tercer apartado, se presenta la metodología utilizada en el desarrollo de la investigación. En el cuarto apartado, se presentan los resultados derivados de la metodología aplicada y, por último, en el quinto apartado, se presentan las conclusiones y algunas recomendaciones.

1.1. Antecedentes

Se presenta un apartado de antecedentes investigativos sobre las dificultades escolares o conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas, los cuales conllevan al planteamiento del problema de investigación y al objetivo general para efectos del desarrollo del presente estudio.

La literatura internacional sobre la formación matemática de estudiantes de educación secundaria de la transición hacia la universidad (Aznar, Baccelli, Distéfano y Anchorena, 2016; Pérez y Ramírez, 2011; Suárez et al., 2014) han reportado diversidad de dificultades estudiantiles cuando resuelven tareas algebraicas. Socas (1997, 2008, 2016), por ejemplo, analiza las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y señala que muchas de ellas tienen sus orígenes en el microsistema educativo: estudiante, curso, docente e institución académica. El autor propone cinco (5) categorías para describir la procedencia de estas dificultades, dos de ellas están asociadas con la propia disciplina; a saber: 1) Dificultades asociadas con la complejidad de los objetos de las matemáticas, 2) Dificultades asociadas con los procesos de pensamiento matemático. Las otras tres se asocian con los procesos educativos en los cuales se desenvuelve la enseñanza de las matemáticas, ellas son: 3) Dificultades asociadas con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, 4) Dificultades asociadas con los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, 5) Dificultades asociadas con actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Otras investigaciones (Palarea y Socas, 1994; Ruano, Socas y Palarea, 2008) reportan que en todo proceso de construcción de conocimiento emergen errores y dificultades. De manera particular, Briceño (2009) destacan que:

> […] el error es una debilidad común, elemento que está presente en todos los procesos y acciones del sujeto como ente falible. En el plano socio-cognitivo-educativo, el error es considerado como un equívoco grave que tiene que penalizarse, algunos lo califican como un acto disfuncional que no es de provecho en los ambientes de aprendizaje (p.10).

Si se tiene presente que el error está presente en todos los procesos y acciones del sujeto, es el docente uno de los encargados de identificarlos mediante, por ejemplo, la resolución algún tipo de tarea, en este caso matemática, por cuanto los errores son vistos como un obstáculo que se interpone a los nuevos conocimientos. Por consiguiente, el docente debe centrar su mirada en cada uno de sus estudiantes, pues cada quien tiene ritmos de aprendizaje y estrategias diferentes.

Para Abrate, Pochulu y Vargas (2006) “los errores surgen en la clase por lo general de manera espontánea y son la manifestación de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables; como por ejemplo, profesor, alumno, currículo, contexto cultural” (p.69). Al reflexionar sobre los errores que se presentan cotidianamente en las aulas de clase, es propicio considerar que el aula se concibe como un espacio de formación, donde el profesor es quien enseña, educa y transforma, y los estudiantes expresan lo que piensan para construir conocimiento. Cuando los estudiantes expresan lo que piensa, no tienen temor al error, al equivocarse y surgen nuevas estrategias de aprendizaje que permiten la construcción de una solución acorde a la necesidad de aprender.

Sin embargo, uno de los aspectos que en ocasiones pasa por desapercibido en las aulas de clase, tanto de secundaria como de universidad, son las dificultades que manifiestan los estudiantes en la construcción y comprensión de los objetos y conceptos matemáticos. Al respecto, Briceño (2009) manifiestan que “el estudiante adulto participante de un escenario universitario llega a clase con su bagaje de conocimientos, experiencias, actitudes, conflictos cognitivos, bloqueos o traumatismos, de los que en la mayoría de los casos probablemente no es consciente” (p.17). Cuando el estudiante adulto manifiesta dificultades para resolver tareas algebraicas, es posible que presente dificultades en algunos cursos, lo cual desencadena en un bajo desempeño académico y una posible deserción.

Por consiguiente, se precisa clasificar, para fines de esta investigación, lo que se considerará como error, obstáculo, dificultad o conflicto de significado, en el aprendizaje de las matemáticas. Si bien en el apartado ‘Marco conceptual’, se hace un estudio conceptual donde se discuten los términos anteriores, se quiere plantear, tempranamente, que: “Hablamos de errores cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática” (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 69). Esta institución matemática dependerá de las condiciones socioculturales en las que se encuentre el estudiante.

Mavshoviz-Hadar, Zaslavsky e Invar (citado por Rico, 1995) clasifican los errores, y proponen seis categorías descriptivas: 1) Datos mal usados; 2) Interpretación incorrecta del lenguaje; 3) Inferencias no válidas lógicamente; 4) Teoremas o definiciones deformadas; 5) Falta de verificación en la solución; 6) Errores técnicos.

Si bien las teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática concuerdan en la necesidad de identificar los errores en el proceso de aprendizaje, conceden un papel importante al profesor, en tanto que debe considerar los significados y conflictos de significado que manifiestan estudiantes.

No obstante, se debe enfatizar que, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas encontramos gran variedad de conflictos de significado que son potencialmente generadores de errores. En relación con el concepto de “conflicto de significado[1]” Sterling (2017) afirma:

> … un conflicto de significado se asume como la diferencia en la interpretación de los significados asociados a los objetos matemáticos por los estudiantes (significado personal) y por la institución matemática (significado institucional). Una dificultad se asocia con un significado, cuya interpretación por fuera de la institución matemática, afecta la comprensión de los objetos matemáticos, sus definiciones, sus procedimientos y sus usos. Así un significado asociado a un objeto matemático que puede ser sencillo, por ejemplo, considerar que el término matemático “cociente” se asocia a una “resta” numérica, lo denominaremos “dificultad” o “conflicto de significado” (p.5).

Con respecto a lo anterior, se considera importante realizar un rastreo bibliográfico para identificar cuáles son las dificultades o los conflictos de significado que manifiestan estudiantes en la resolución de tareas algebraicas y que se han reportado durante los últimos años en el grado undécimo y en el primer semestre de universidad. El rastreo bibliográfico se presenta en el siguiente apartado.

1.2.Planteamiento del problema

Tanto docentes de undécimo grado como de primer semestre de universidad se muestran preocupados con las dificultades y con los errores que sus estudiantes presentan en la resolución de tareas algebraicas (Gavilán, 2011; Figueroa y Díaz, 2011; Morales y Díaz, 2003). Parte de las dificultades que presentan los estudiantes están relacionadas con el uso y compresión de la lengua vernácula y que se agravan “al emplear palabras que en el contexto

[1] En este sentido, dificultad y conflictos de significado se asumirán como equivalentes.

matemático tienen diferente significado que, en el lenguaje habitual, como raíz, potencia, primo, diferencia, matriz” (Gavilán, 2011, p. 100). Conceptos como hipotenusa y polígonos, por ejemplo, presentan mayor dificultad para su comprensión debido a que son propios del lenguaje matemático, los cuales son abordados a partir de procedimientos algorítmicos.

Es así como el papel del lenguaje matemático es pieza clave para la resolución de tareas algebraicas, debido a que intervienen conceptos como ecuación, proporción, reparto proporcional, signo igual, que deben ser interpretados en términos polisémicos de propiedades, de representaciones y de relaciones. Al respecto, cuando se requiere resolver tareas algebraicas de enunciado, Gavilán (2011) afirma que:

> es preciso haber asumido una forma de pensar basada en la comprensión del significado de las operaciones y las consecuencias que tienen sobre los números sobre los que actúan, así como el significado del signo igual en el contexto de una ecuación (p.101).

Por tanto, de lo que se acaba de mencionar se puede inferir que se debe tener conocimientos adecuados de la estructura y sintaxis del álgebra, superando la fase de las operaciones aritméticas para asumir el significado de las operaciones algebraicas que representan la simbolización de un proceso. Por consiguiente, es recomendable que los estudiantes reconozcan los objetos y conceptos algebraicos antes de realizar tareas algebraicas de enunciado.

Escalante y Cuesta (2012) reportaron que los estudiantes universitarios tienen dificultades cuando realizan traducciones de lenguaje natural, aritmético o geométrico al lenguaje algebraico. Asimismo, ellos afirman que los estudiantes, participantes en su investigación, no han desarrollado “pensamiento algebraico”, que les permitiría comprender definiciones, procedimientos y uso de conceptos, tales como el de variable.

Reportes de investigación (Ruano et al., 2008; Suárez et al., 2014) informan que tanto estudiantes de últimos grados de educación secundaria como de primeros semestres de universidad, exhiben conocimiento mínimo del lenguaje algebraico que no los faculta para resolver tareas relativamente sencillas. Los estudiantes presentan dificultades tanto para usar como para interpretar paréntesis, trabajar con el signo igual sin tener en cuenta el significado de equivalencia, simplificar expresiones algebraicas y realizar traducciones del lenguaje natural al lenguaje algebraico. García (2016) afirma “…sí es posible identificar las causas más comunes de los errores que cometen los estudiantes cuando es necesario el manejo y la comprensión de los distintos usos y significados de las letras en álgebra" (p. 159). Causas que son posibles de investigar mediante cuestionarios, en los cuales se requiere que los estudiantes identifiquen variables, operen con expresiones algebraicas, planteen y resuelvan ecuaciones de una o varias variables y resuelvan problemas verbales (García, 2016).

Otros reportes de investigación (Aponte, González y Rincón, 2011; Escalante y Cuesta, 2012) informan dificultades que manifiestan los estudiantes en los primeros semestres de educación superior en relación con la realización y presentación de tareas algebraica. Si bien en las instituciones universitarias se han preocupado por disminuir las dificultades, por medio de semilleros y cursos intensivos, los resultados son poco alentadores (Díaz, 2008; Londoño, 2013; Patiño y Cardona, 2012; Vélez y López, 2009). A su vez, Castellanos y Obando (2009) concuerdan que existen diversas dificultades que pueden incidir en el desempeño académico de los estudiantes, que los ubica en los percentiles inferiores, tales dificultades no surgen de manera accidental, sino que están relacionadas con estrategias estudiantiles para resolver tareas algebraicas.

Informes sobre índices de deserción en los primeros semestres de universidad, afirman que un número elevado de estudiantes en Latinoamérica no logra culminar sus estudios universitarios. Asimismo, la permanencia de los estudiantes en la universidad se enmarca en el modelo de integración del estudiante y en el desgaste del estudiante, (Aponte et al., 2011; Díaz, 2008; Osorio, Bolancé y Castillo-Caicedo, 2012; Vélez y López, 2009). En el primer modelo, Osorio, Bolancé y Castillo-Caicedo (2012) consideran que "…la permanencia en la universidad está directamente correlacionada con la relación del estudiante con sus profesores y compañeros", (p. 34), mientras que en el segundo modelo "…el rendimiento académico es una de las variables al momento de desertar de la universidad" (Osorio et al,, Bolancé y Castillo-Caicedo, 2012, p.34).

González (2008) reporta estudios realizados en Chile durante el año 2004 sobre deserción universitaria, en su estudio "las áreas del conocimiento más críticas son Humanidades y Derecho con cifras del orden de 80%, y las más eficientes son las áreas de Educación y Salud con un 37% y un 27%, respectivamente" (citado en Díaz, 2008, p.66). Si bien las áreas de Educación y Salud son consideradas como las más eficientes en temas de deserción en los primeros semestres, han sido tema de estudio para determinar su naturaleza. Aunque los estudios anteriores refieren al contexto chileno, la deserción "es un problema que adquiere especial gravedad en la institución universitaria actual, nacional, latinoamericana, norteamericana y europea, tanto de carácter público como privado" (Vélez y López, 2009, p.178).

Latiesa (1998), en un estudio titulado *Tipología y causas de la deserción universitaria y el retraso en los estudios,* concluye que "la principal causa de deserción universitaria es el bajo rendimiento académico de los estudiantes, que no están lo suficientemente preparados para enfrentarse al mundo universitario, por deficiencias de conocimientos en ciencias básicas" (citado en Vélez y López, 2009, p.178). Si bien no se disponen de reportes específicos de la incidencia de las dificultades en la resolución de tareas algebraicas, se puede colegir que la deserción y repitencia de los cursos de primer semestre, tiene una correlación directa con una baja comprensión de los objetos matemáticos que son inicialmente abarcados durante el periodo de estudio escolar.

Por tanto, cuando se presenta una baja comprensión de los objetos matemáticos que son inicialmente abordados durante el periodo escolar, las dificultades en la resolución de tareas algebraicas pueden afectar de manera negativa tanto las oportunidades de ingreso a niveles superiores de formación; tanto técnica como universitaria, como su permanencia. Por ejemplo, algunos ítems de las pruebas de admisión hacen referencia a problemas sencillos que se pueden modelar algebraicamente. En cuanto a los estudiantes de primer semestre, sus conocimientos algebraicos podrían ser una causa para bajos desempeños en los cursos de matemáticas con lo cual podrían incurrir en bajo rendimiento académico y en su eventual abandono de los estudios universitarios.

Al respecto, en el año de 1998 el Ministerio de Educación Nacional[2] realizó una convocatoria para realizar una herramienta que permitiera determinar la deserción académica

---

[2] El Ministerio de Educación Nacional es la entidad encargada entre otras funciones sancionadas en la ley por el Artículo 2, en su decreto 1306 del 17 de abril de 2009, de formular la política nacional de educación, regular y establecer los criterios y parámetros técnicos cualitativos que contribuyan al mejoramiento del acceso, calidad y equidad de la educación, en todos sus niveles y modalidades.

en las instituciones de educación superior. La convocatoria fue adjudicada al Centro de Estudios sobre Desarrollo económico CEDE, de la Universidad de los Andes.

El estudio realizado por el CEDE entre los años 1998 y 2006, y que contó con la participación de 70 instituciones de educación superior, permitió estimar que la deserción académica en Colombia por cohortes es de un 48, 2%; del cual el 25% corresponde al primer y segundo semestre[3].

En particular, la Universidad de Antioquia dentro de su Reglamento Estudiantil[4], en su artículo 22, establece que uno de los factores que influye para que la calidad de estudiante se termina o se pierde, es "cuando se haya perdido el derecho a permanecer en la institución por inasistencia o bajo rendimiento académico, de acuerdo con lo establecido en los respectivos reglamentos" (p.7). Si bien se reconoce que uno de los factores que influyen en la deserción académica es el bajo rendimiento, el cual es de carácter forzoso o no voluntario, también se reconoce que éste está influenciado por problemas de cultura y clima organizacional que se alimenta de factores académicos, sociales, económicos, entro otros. Para la presente investigación solo se abordarán los relacionados con los factores académicos, en especial, con las tareas algebraicas.

Con base en lo anterior, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación[5] (ICFES) ha desarrollado e implementado pruebas estandarizadas[6] que valoran las competencias adquiridas por los estudiantes durante su formación básica y media. Al respecto, el ICFES, en decreto 869 de 2010 establece como objetivos de las pruebas estandarizadas:

- *Comprobar el grado de desempeño de las competencias de los estudiantes que están por finalizar el grado undécimo de la educación media.*

---

[3] Ministerio de Educación Nacional (2006). Diagnóstico de la deserción estudiantil en Colombia. Boletín Educación Superior. No 7.

[4] Recuperado de http://portal.udea.edu.co/wps/wcm/connect/udea/b2694dcb-0fd3-49a2-a5cf-0f6aab701139/reglamento-estudiantil-pregrado-con-concordancias.pdf?MOD=AJPERES&CVID=lgcKqM7

[5] Nombre asignado en el año 2009 mediante el Decreto 5014 en el cual se sustituyen las Pruebas ICFES por las Pruebas Saber y se conserva la sigla ICFES.

[6] Recuperado de http://www2.icfes.gov.co/instituciones-educativas-y-secretarias/saber-11/guias-de-orientacion

- *Proporcionar elementos al estudiante para la realización de su autoevaluación y el desarrollo de su proyecto de vida.*
- *Proporcionar a las instituciones educativas información pertinente sobre las competencias de los aspirantes a ingresar a programas de educación superior, así como sobre las de quienes son admitidos, que sirva como base para el diseño de programas de nivelación académico y prevención de la deserción en este nivel.*
- *Monitorear la calidad de la educación de los establecimientos educativos del país, con fundamento en los estándares básicos de competencias y los referentes de la calidad emitidos por el Ministerio de Educación Nacional.*
- *Proporcionar información para el establecimiento de indicadores de valor agregado, tanto de la educación media como de la educación superior.*
- *Servir como fuente de información para la construcción de indicadores de calidad de la educación, así como para el ejercicio de la inspección y vigilancia del servicio público educativo.*

Asimismo, el ICFES en la guía de orientación para el 2019-2[7], define las competencias que se evalúan en Matemáticas en la prueba Saber 11° y que son:

- *La interpretación y la representación.*
- *Formulación y ejecución.*
- *Argumentación.*

Al verificarse el primer objetivo planteado por el ICFES para la Prueba Saber 11° los resultados no son favorables. Un ejemplo de esta situación se presenta en el Colegio Santo Domingo de Guzmán, ubicado en el municipio de Bello, en el departamento de Antioquia. En esta institución, los resultados de las Pruebas (ICFES[8] , 2017), muestran que para los 53 estudiantes del grado 11° que presentaron la prueba de matemáticas, solo el 11% de ellos se

---

[7] Obtenido de https://www.icfes.gov.co/documents/20143/193560/Guia%20de%20orientacion%20de%20saber%2011%202019%20-%202.pdf

[8] Obtenidos de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016-web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/agregadosEstablecimiento.jsf#No-back-button

encuentra en un nivel avanzado que los faculta para deducir y combinar procedimientos para dar respuestas a las preguntas.

Estos resultados permiten colegir que la mayoría de estudiantes del grado 11° del colegio Santo Domingo de Guzmán en el año 2017 presentaron dificultades en la resolución de tareas solicitadas y que posiblemente generarán consecuencias negativas en sus eventuales estudios universitarios que involucren el estudio de las matemáticas.

En este sentido, se reconoce que los estudiantes manifiestan dificultades en la resolución de tareas algebraicas, pero se desconoce el carácter de tales dificultades. Si bien los estudios usados hasta aquí se refieren a "dificultades", indagaremos sobre conflictos de significado con base en el uso del marco teórico EOS, que provee los conceptos y las herramientas para efectuar la indagación en el tiempo y en los contextos en los cuales se desarrolla esta investigación. Surge la siguiente pregunta de investigación *¿Cuál es la naturaleza de los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas?*, donde se propone como objetivo *analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas.*

2. MARCO CONCEPTUAL

Con el propósito de *analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*, el presente apartado se ocupará de presentar algunos elementos teóricos con respecto al Enfoque Ontosemiótico. La elección de este enfoque se fundamenta en que favorece estudiar los hechos y fenómenos didácticos a nivel microscópico, es decir, permite comprender y guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para generar hipótesis que pueden ser de utilidad para otros estudiantes y contextos.

Seguidamente se retomarán algunos elementos teóricos sobre la resolución de tareas algebraicas y su importancia en el aprendizaje de las matemáticas. Finalmente se incluyen algunos elementos teóricos sobre los conflictos de significado que manifiestan los estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad.

2.1. Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) aparece a comienzos de la década de 1990 bajo la dirección del Dr. Juan D. Godino y su grupo de estudio e investigación en la Universidad de Granada, España. Se inició con el desarrollo de un marco teórico integrativo para la didáctica de las matemáticas que aborda el problema de la articulación de teorías a partir de supuestos antropológicos, ontológicos y semióticos. El EOS está compuesto de un conjunto de nociones teóricas que se "clasifican en cinco grandes grupos cada uno de los cuales permite un análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticos" (Godino, Batanero y Font, 2008, p.1). Estos grupos son:

(1) Sistema de prácticas operativas y discusivas: Este componente del EOS incluye toda la práctica relacionada con el proceso de resolver, validar y generalizar problemas matemáticos, así como comunicar todos los procesos y solución, o soluciones, de cada problema planteado. Se distinguen, como grupos complementarios en este componente, los significados personales y los significados institucionales. Los primeros incluyen los significados que desarrolla el estudiante como resultado de una interacción social al que está

expuesto mientras aprende. Por otra parte, los significados institucionales son aquellos que han sido establecidos por una institución, es decir, son significados propios de la Matemática (Godino, Batanero y Font, 2008). De lo anterior, “la actividad de resolución se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático” (Godino, Batanero y Font, 2008, p.1).

(2) *Configuración de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas:* En el EOS , los “objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática (Godino y Font, 2002. p.2). Para el EOS, los objetos matemáticos son para ser “comprendidos” y se describen por medio de la función semántica, la cual se define como aquella en la que el objeto tiene significados en función de una praxis tanto personales como institucionales ante cierta clase de situaciones-problemas.

(3) Configuraciones y trayectorias didácticas: En este componente se describen los roles entre el docente y el estudiante, además se escribe los roles que estos tienen con los objetos matemáticos. En este componente se describen y analizan los procesos de enseñanza y aprendizaje. En una configuración didáctica se tienen en cuenta “las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático” (Godino, Batanero y Font, 2008, p.1).

El contexto en la resolución de tareas algebraicas tiene un papel fundamental en todas las fases del aprendizaje matemático, esto quiere decir, que la articulación entre el contexto y la resolución de tareas algebraicas no solo se debe dar en la fase de aplicación sino también en la fase de exploración y de desarrollo.

Para Godino, Batanero y Font (2007) el profesor de matemáticas ha de conocer y ser capaz de realizar prácticas matemáticas acordes al nivel y al contexto de los estudiantes además de saber articular los temas de estudio.

(4) Dimensión normativa: En este componente se consideran todas las normas sociales y sociomatemáticas que condicionan y posibilitan el proceso de estudio. Es así como “el

reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos (Godino, Batanero y Font, 2008, p.1).

(5) Criterio de idoneidad didáctica: En este componente del EOS, el objetivo principal es el de validar el efecto de las normas guiar las acciones de los investigadores, motivo por el cual "el sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje" (Godino, Giacomone, Batanero, y Font, 2017, p.95).

De igual manera, con el objetivo de esclarecer algunos términos que fueron mencionados, se comenzarán a definir dado que poseen una determinada interpretación en el EOS.

Práctica matemática: Es toda actuación o expresión (verbal, grafica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver una tarea matemática, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y tareas (Godino y Batanero, 1998).

Objeto matemático: Es cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática. El objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2019).

Institución: Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situación problemática; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento (Godino, Batanero y Font, 2007).

Conocimiento, competencia, comprensión: En el EOS las posturas pragmatistas llevan a entender la comprensión como competencia, donde se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007).

Tarea matemática: Se reconoce una gran diversidad de tipos de tareas usadas en educación matemática, tales como problemas, tareas realistas, tareas prácticas, tareas ricas en tecnología, tareas que provocan conflictos cognitivos, tareas rutinarias, tareas de aplicación, entre otras. Aunque el campo de tareas es muy diverso no se trata de cosas que hay que hacer, sino de actividades que sean significativas para enmarcar la actividad matemática (Godino, 2013).

De lo anterior, el EOS establece un sistema de prácticas, en el cual intervienen los siguientes significados:

Se habla de *significado institucional de referencia* cuando, por ejemplo, un docente diseña una clase a partir de documentación que ha sido validada por expertos. Luego de haber obtenido la información, el docente la delimita para sus estudiantes acorde a las necesidades del contexto, por tanto, se habla de un *significado institucional pretendido*. Esta información es presentada a sus estudiantes para finalmente ser evaluada, entonces, se habla de un *significado institucional implementado y evaluado*, respectivamente.

De manera similar, cuando estudiantes inician su proceso de aprendizaje trae consigo sus conocimientos previos que, dentro del sistema de prácticas, son *significados personales globales*, los cuales al momento de ser plasmados en una evaluación se convierten en *significados personales declarados*. Finalmente, cuando el estudiante ha adquiridos los conocimientos y estos van en correspondencia con los significados institucionales evaluados, se habla de que el estudiante a alcanzado un *significado personal logrado.*

Para el presente trabajo de investigación se utilizarán elementos del Enfoque Ontosemiótico, el cual permite analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos (objeto que es público y se puede mostrar a otro) que lo acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Igualmente, será de utilidad debido a la noción de configuración epistémica la cual permite analizar y describir los distintos conflictos de significado en la resolución de tareas algebraicas, a partir de la identificación de los objetos matemáticos en los distintos problemas.

2.2.Resolución de tareas algebraicas

La resolución de tareas ha estado presente en el currículo de matemáticas por más de dos décadas. Si bien ha generado cambios en la enseñanza de las matemáticas, no obstante, su evaluación ha sido poco considerada (Blanco y Cárdenas, 2013).

Blanco y Cárdenas (2013) manifiestan que cuando se analizan diferentes trabajos sobre educación matemática (Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Puig, 2008), se puede encontrar con distintos significados tanto para el vocablo ‘tarea’ como para el vocablo ‘resolución de tarea’ y resaltan tres de ellas: Enseñanza para la resolución de tareas, Enseñanza sobre la resolución de tareas y Enseñanza vía resolución de tareas.

a) La primera de ellas se preocupa por la forma en que los conocimientos de matemáticas, que han sido previamente trabajados, puedan tener una aplicación a través de la solución de tareas. Esta primera aproximación al significado de los vocablos mencionados anteriormente, da cuenta de una enseñanza tradicional, donde estudiantes ponen en práctica sus conocimientos teóricos en solución de tareas, las cuales se dan al final de un capítulo y que en ocasiones los estudiantes manifiestan que no encuentran relación entre lo trabajado en clase y los problemas planteados.

b) La segunda de ellas hace énfasis en que los estudiantes deben aprender a buscar y utilizar estrategias para resolver tareas. Por tanto, la resolución de problemas se constituye como un contenido y una actividad que los estudiantes deben aprender.

c) Finalmente, la enseñanza de las matemáticas puede plantearse a partir de tareas que los estudiantes irán abordando y resolviendo. Por tanto, los profesores que utilizan la Enseñanza vía resolución de tareas inician sus clases con una tarea que incorpora ciertos aspectos claves del tema para acercase a las nociones teóricas.

Así pues, resolver tareas constituye un tipo de actividad que debe ser resaltada en los procesos de enseñanza y aprendizaje por niños y adolescentes. Además, la resolución de tareas en un ambiente escolar, contribuye a la formación intelectual y científica de los estudiantes. Es por eso que el presenta trabajo de investigación pretende usar las tareas algebraicas para analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad.

Al respecto, se han desarrollado propuestas curriculares que asumen la resolución de tareas matemáticas como “una actividad fundamental en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes” (Gusmão, Cajaraville, Font y Godino 2014, p.256). Tales propuestas curriculares que se han venido implementando en la mayoría de instituciones educativas, buscan obtener un buen resultado ya sea en pruebas estandarizadas como por ejemplo la prueba PISA, Pruebas Saber (3, 5, 9, 11) o simplemente para el ingreso a la educación terciaria. Sin embargo, al analizar los resultados obtenidos por los estudiantes participantes de las pruebas mencionadas anteriormente, y solo considerando las respuestas de la prueba de matemáticas, se puede evidenciar que los resultados no son los esperados (Castro-Rodríguez, Lupiáñez, Ruiz-Hidalgo, Rico y Díez, 2015).

Al respecto, diversas investigaciones (Abrate, Font y Pochulu, 2008; Abrate et al., 2006; Castro, Martínez-Escobar y Pino-Fan, 2017; Figueroa y Díaz, 2011; Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portolés, 2007; Socas, 1997) sobre las dificultades que los estudiantes de educación secundaria manifiestan en la resolución de tareas algebraicas, informan que posiblemente estos resultados están asociados con procedimientos aritméticos evolutivamente inmaduros y una alta frecuencia de errores procedimentales que se fortalecen en el momento del aprendizaje del álgebra.

Godino y colaboradores (2012) afirman que: “el álgebra aparece de manera abrupta en secundaria, sin continuidad con los temas de aritmética, medida y geometría tratados en primaria” (p.486). Esto significa que, cuando el álgebra aparece en los planes de formación de los estudiantes de educación secundaria, genera conflictos de significado en la comprensión de los objetos matemáticos. Por tanto, cuando un estudiante presenta un conflicto de significado asociado con un objeto matemático, en realidad presenta una diferencia en la interpretación entre lo establecido por la institución denominado ‘significado institucional’ y los que son generados por él denominados ‘significados personales’. Por tanto, el objeto matemático tiene un significado institucional, sin embargo, algunos estudiantes que interpretan de manera distinta los objetos matemáticos, crean sus propios significados frente al objeto de estudio, dando como resultado una configuración que no coincide con la institucional.

Diversos trabajos abordan la resolución de tareas matemáticas que se resuelven con la ayuda de conceptos algebraicos (García y Benítez, 2013; Godino, 2013; López y García, 2009; Socas, Hernández, y Palarea, 2014; Suárez, Segovia y Lupiáñez, 2014). Sin embargo, en este trabajo de investigación estamos interesados en la resolución de tareas algebraicas enmarcadas por requerimientos curriculares.

2.3.Conflictos de significado

A continuación, discutimos la idea de "conflicto de significado" y definiremos nuestra postura en relación con este concepto, que será fundamental en el cuestionario que se diseñará para dar respuesta a la pregunta de investigación y dar cuenta de los objetivos de investigación.

Se asumirá por conflicto de significado la definición propuesta por Sterling (2017), donde se plantea que es una diferencia en la interpretación de los significados a los objetos matemáticos, analizados mediante un sistema de prácticas, que presenta la institución con los significados logrados por parte del estudiante.

En este trabajo se reconocerá que los conflictos de significado son un constructo que facilitará comprender las diferentes acepciones que los escolares muestran de los objetos matemáticos. A su vez, se ha usado de manera indistinta conflictos de significado y dificultades, dado que se reportan tanto en los diversos artículos revisados como en las investigaciones realizadas por Godino y colaboradores, que son similares en sus acepciones.

Godino y Font (2002) agrupan seis tipos de objetos matemáticos: 1) Problemas y situaciones (cuestiones, ejercicios, etc.), 2) Lenguaje (términos, expresiones, gráficos, etc.), 3) Acciones (técnicas, algoritmos, etc.) 5) Conceptos (definiciones o reglas de uso) y 6) Propiedades de los conceptos y acciones.

2.4.Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas

Las dificultades y los errores que presentan los estudiantes en la construcción del lenguaje algebraico han sido motivo de investigación por parte de académicos (Socas, Ruano y Domínguez, 2016). Rico (1997), Kilpatrick (2010), Castellanos y Obando (2009) han reportado que existe un creciente interés por lograr modelos que ayuden a prevenir e interpretar las dificultades y los errores de los estudiantes pero que a pesar de la antigüedad de las investigaciones, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos para interpretar esos resultados, existen interrogantes importantes aún por solucionar.

Estrategias y reglas personales que no tienen un carácter accidental surgen diariamente en las clases de matemáticas por parte de los estudiantes, las cuales generan errores procedimentales y son consecuencia de años anteriores.

Socas, Ruano y Domíguez (2016) refiere que estudiantes que presentan una buena actuación en las clases de matemáticas, afirman que han dado con la respuesta a una tarea sin comprender lo solicitado. Afirmación que pone en evidencia serios errores operacionales, estructurales y procesuales de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes y que no los faculta para un aprendizaje subsiguiente.

Investigaciones realizadas en años anteriores (Malisani, 1999; Puig, 1998 y Rico, 1997) han mostrado la importancia de tener presente no solo las respuestas correctas de los estudiantes, sino también, las dificultades y los errores que cometen. Si bien en el pasado no se tenía presente los errores que cometían los estudiantes al presentar una tarea y simplemente se consideraban los buenos resultados, hoy en día se presta atención a los errores que comenten los estudiantes con el objetivo de ayudar en la corrección de dichos errores.

Al respecto, Werner (1986), afirma que: "… los alumnos tienen con frecuencia concepciones inadecuadas sobre los objetos matemáticos; a veces, estas concepciones inadecuadas los conducen a usar procedimientos equivocados que no son reconocidos como tales por el profesor" (citado en Socas et al., 2016). Sin embargo, esta postura deja al estudiante como único responsable de cada una de las concepciones que se desarrolle para alcanzar una respuesta, es decir, como si solo se tratara de un asunto metodológico y deja por fuera la posibilidad que los errores sean también producto de otras variables del proceso educativo: profesorado, currículo, contexto.

Con base en lo anterior, se hace necesario delimitar las causas de los posibles errores que comenten los estudiantes para tener una explicación general de cada error o particular para cada estudiante. Lo anterior, proporcionará herramientas al objetivo de estudio de la presente investigación, el cual está orientado a analizar la naturaleza de los conflictos de significado. Para esto, se hace necesario abordar los conceptos de dificultad y errores en el aprendizaje del álgebra.

2.4.1. Dificultades

En investigaciones realizadas por el profesor Martin Socas (1997) se puede observar que las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas tienen naturaleza distinta y que generalmente se ubican en el microsistema educativo: profesor, materia, estudiante e institución escolar. Estas dificultades se generan en los primeros años escolares debido a la falta de comprensión de las propiedades básicas de la aritmética, las cuales van generando obstáculos en la práctica, es decir, barreras que limitan al estudiante a visualizar un camino para hallar una posible solución a una determinada tarea y que posteriormente se manifiestan en forma de errores.

El error va a hacer categorizado de acuerdo con su procedencia, sin embargo, en la mayoría de ocasiones es visto como un esquema cognitivo que está presente en el estudiante y no solamente como un despiste (Socas et al., 2016).

Las dificultades al presentar "naturaleza diferente" pueden ser agrupadas en cinco categorías:

Dificultades asociadas con la complejidad de los objetos de las matemáticas: Se relaciona con las dificultades que tiene los estudiantes en la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos; donde el uso excesivo de vocabulario común para la enseñanza del álgebra genera confusiones semánticas debido a que conceptos, que son utilizados en la vida cotidiana, cambian de significado cuando son utilizados en contextos matemáticos.

Dificultades asociadas con los procesos de pensamiento matemático: Se relaciona con las rupturas que se dan en relación con los modos de pensamiento.

Dificultades asociadas con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas: Se refiere a las dificultades vinculadas con la institución escolar, es decir, tanto con la organización del currículo escolar como con los métodos de aprendizaje de las matemáticas, pues en ocasiones el currículo no está adaptado a las competencias del alumno ni a su lenguaje.

Dificultades asociadas con los procesos de desarrollo cognitivos de los alumnos: Se refiere a las dificultades manifestadas por estudiantes cuando resuelven tareas específicas, donde no se tiene en cuenta características del desarrollo cognitivo del estudiante, ni sus características y sus capacidades.

Dificultades asociadas con actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas: Se refiere a las dificultades manifestadas por los estudiantes en relación con el gusto hacia las matemáticas, a su vez dificultades asociadas a la usencia de estrategias metodológicas por parte de profesores para abordar un determinado tema, y los temores que son originados en el núcleo familiar, como lo es el temor al fracaso, a la equivocación, etc., los cuales generan "bloqueos" en su proceso de formación.

De lo anterior, una de las dificultades usualmente manifestadas por estudiantes de secundaria y primer semestre de universidad (Socas, 1997), en referencia a la resolución de tareas algebraicas, son las relacionadas con el concepto de variable, cuya comprensión es motivo de inquietud dado que este concepto es ubicuo en las matemáticas escolares.

Küchemann (1980) aplicó una prueba a más de 3000 estudiantes, con edades entre los 13 y los 15 años, quienes debían manipular expresiones algebraicas y resolver tareas en los que la variable está representada por símbolos literales. Al revisar las respuestas, identificó seis maneras como ellos interpretan los símbolos literales:

Letra evaluada: A la letra se le asigna un valor numérico.

Letra no utilizada: La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado.

Letra como objeto: Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como un objeto en sí.

Letra como incógnita específica: La letra representa un número particular pero desconocido y los estudiantes son capaces de operar directamente sobre ella.

Letra como número generalizado: Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores.

Letra como variable: Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

Kücheman (1980) considera que un estudiante habrá comprendido el significado de variable cuando sea capaz de trabajar con la letra como incógnita.

Finalmente, otra de las dificultades que se presentan con frecuencia en el proceso de enseñanza del álgebra, es la referida a la compresión del signo igual. De acuerdo con reportes de investigación (Freiman y Lee, 2004) se reconoce que la comprensión del signo igual es la base inicial hacia el estudio del álgebra.

Carpenter, Franke y Levi (2003) reportaron que estudiantes de preescolar y de primer año de escuela primaria, exhiben la creencia que después del signo igual debe ubicarse el resultado de la operación. Esta interpretación del signo igual como una acción que se realiza sobre números que están a la izquierda y cuyo resultado se escribe a la derecha, hace que sea difícil asumirlo en términos de relación.

En este sentido, el signo igual debe ser interpretado de forma relacional, conservando las propiedades de la "relación de equivalencia" y no tanto aquellas características operacionales.

Investigaciones (Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil y Stephens, 2006; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) afirman que estudiantes que no tienen una comprensión relacional del signo igual, presentan mayores dificultades cuando operan con temas algebraicos que los que sí la tienen. En particular, determinan que aquellos estudiantes que no interpretan adecuadamente el signo igual tienen bajo desempeño al trabajar con ecuaciones equivalentes.

Por tanto, se aprecia que las dificultades se pueden analizar a partir de varios puntos de vista, dependiendo del énfasis, ya sea desarrollo cognitivo de los estudiantes, métodos de enseñanza o currículo de matemáticas.

2.4.2. Errores

Los errores están presentes en las tareas que resuelven los estudiantes cuando son sometidos a nuevas temáticas, esto los obliga a realizar una revisión de los objetos matemáticos que fueron adquiridos en grados anteriores. Para Matz (1980) los errores son: “intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (citado en Socas et al., 2016). Esta afirmación que está en correspondencia con la primera aproximación al concepto de error que se presentó en el apartado de antecedentes.

Si bien Socas (1997, 2016) reconoce que los errores que comenten los estudiantes se sitúan en tres orígenes distintos tales como obstáculos, ausencia de sentido, y actitudes afectivas y emocionales, solo se abordarán para fines de esta investigación los que están relacionados con la ausencia de sentido, los cuales se originan en los estadios de desarrollo (semántico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación y pueden ser diferenciados en tres etapas distintas: a) errores del álgebra que tiene su origen en la aritmética, b) errores de procedimiento, y c) errores del álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico.

En conclusión, detenerse en los errores que presentan los estudiantes en la resolución de tareas permitirá analizar los distintos significados que dan los estudiantes al objeto algebraico y determinar el nivel de comprensión que el alumno tiene en relación al objeto matemático frente a un problema

2.5.Enfoque Fenomenológico-Hermenéutico

La metodología fenomenológico-hermenéutica (FH de aquí en adelante) es una tradición filosófica europea que está siendo desarrollada y aplicada en investigación en Educación Matemática. Esta metodología, que sobresale como una metodología de investigación cualitativa, tiene el valor fundamental en su capacidad de acceder a la comprensión profunda de la experiencia humana investigada a partir de diversos ámbitos disciplinarios.

Max Van Manen, pedagogo neerlandés catedrático en Métodos de Investigación, ha profundizado en aspectos de la pedagogía fenomenológica y de la pedagogía hermenéutica y es considerado como el pionero en la formación de la FH como metodología de investigación educativa. Si bien hay otros autores asociados con este enfoque de investigación educativa como el de Vandenberg y Lance (1992) y el de Barnacle (2004), el protagonismo y el liderazgo de Van Manen se asumirá a lo largo de la investigación.

Fuster (2019) considera que para acceder a la comprensión profunda de la experiencia humana se deben tener presente las siguientes fases dentro del método fenomenológico hermenéutico:

Etapa previa: En esta fase se establece el punto de partido del investigador, el cual debe desprenderse de prejuicios, ya sean por tradición, religión o culturales, para fijarse en las experiencias de los escolares (Fuster, 2019).

Recoger la experiencia vivida: Es una fase descriptiva, pues se toman datos de los relatos de la experiencia personal, para abordar el fenómeno de investigación (Fuster, 2019). Al respecto, Max Van Manen (2003) (citado en Fuster, 2019) considera que “antes de solicitar a otros que nos brinden una descripción sobre un fenómeno a explorar, tendríamos que intentar hacer una primera nosotros, para poseer una percepción más puntual de lo que pretendemos obtener” (p. 82), para ello el investigador ha de redactar una experiencia personal sobre el fenómeno que está abordando.

Reflexionar acerca de la experiencia vivida: en esta etapa se pretende aprehender el significado esencial de algo (Fuster, 2019). En este sentido, cuando se analizan las respuestas de estudiantes frente a una tarea algebraica, no solo se observa si la respuesta es correcta o incorrecta. Vemos a un estudiante que manifiesta conflictos de significados que nos conlleva a hablar de él.

Escribir-reflexionar acerca de la experiencia vivida: En esta última etapa, se pretende integrar cada una de las reflexiones individuales en una grupal. Para Husserl la finalidad del método fenomenológico es pasar de las cosas singulares al ser universal (Fuster, 2019).

Con base en las anteriores etapas, Ayala (2008) plantea que el interés aplicado al campo de la investigación en educación sobre el aspecto FH se orienta a la determinación del sentido y la importancia pedagógica de los fenómenos educativos vividos continuamente. Del mismo modo, plantea que Max Van Manen propone que el conjunto de actividades o métodos son tanto de naturaleza empírica como reflexiva.

Finalmente, es importante resaltar que con base en este enfoque se plantean interrogantes acerca del significado y sentido de determinada experiencia.

3. METODOLOGÍA

En este apartado se describe el diseño del método de investigación, además, se propone un cuestionario, se indica los análisis de datos a realizar y algunas rubricas para la toma de datos. Por consiguiente, se acudió a un diseño cualitativo dado que permite analizar, en este caso, los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas (Sánchez, 1998).

La población de interés de esta investigación fueron estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad, para la cual se propuso un cuestionario que recogiera la mayor cantidad de tareas algebraicas clasificadas en tareas de variables, de palabras, de lenguaje, traducción, de ecuación y de equivalencia.

El método usado es de tipo fenomenológico-hermenéutica (Ayala, 2008) dado que se pretende analizar la experiencia que han tenido los estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad con la resolución de tareas algebraicas. Para esto, se tomaron datos con estudiantes de grado undécimo y primer semestre de universidad, y se estudió los conflictos de significado que ellos manifiestan, sin que medie acción didáctica por parte del autor de este trabajo.

Se planteó trabajar con estudiantes de undécimo grado de dos instituciones educativas, y con estudiantes de primer semestre de universidad, de dos universidades. Nos hubiera gustado trabajar con un número mayor tanto de instituciones educativas de nivel secundario como de nivel terciario; sin embargo, el número de instituciones y de estudiantes fue determinado por las condiciones institucionales. No consideramos estudiar ni el estrato socioeconómico de las instituciones, ni de los estudiantes, ni la edad de los estudiantes, y tampoco diferenciaremos el género.

La naturaleza de los conflictos de significado en la resolución de tareas algebraicas se analizó a partir de las respuestas que proporcionaron los estudiantes participantes.

Se utilizaron varios procedimientos para el análisis de la información. La clasificación de los conflictos de significado, por ejemplo, se realizó con la ayuda de esquemas de análisis en los que se reflejen primero, el tipo de conflicto, segundo, los códigos de los alumnos, tercero, el ítem en el que ha fallado al final, el número total de conflictos de cada tipo.

3.1.Recolección y análisis de datos

Para la recolección de datos, se diseñó un cuestionario, con base en las investigaciones de Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), Abrate, Font y Pochulu (2008), Abrate et al., (2006), y Socas (1997). Se deseó analizar los conflictos de significado en la resolución de tareas algebraicas, con la intensión de reportar a instituciones sobre el fenómeno estudiado para que implementen acciones que ayuden a mejorar la situación en futuras generaciones.

El EOS, como se mencionó en líneas anteriores, fue de utilidad debido a la noción de configuración epistémica la cual permito analizar y describir los distintos conflictos de significado en la resolución de tareas algebraicas, a partir de la identificación de los objetos matemáticos en los distintos problemas.

Los significados institucionales se buscaron a partir de los documentos rectores para la enseñanza de la Matemática en Colombia (MEN, 1998) y los significados personales se analizaron a partir de las respuestas obtenida del cuestionario.

El procedimiento de análisis implicó el análisis de cada estudiante a partir del análisis de cada tarea del cuestionario. Este análisis permitió observar la relación con el nivel de comprensión del estudiante en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales. Además, permitió realizar una clasificación de los conflictos de significado, el cual proporcionó herramientas para realizar ciertas conjeturas sobre el origen de los mismos.

3.2.Fases del cuestionario

Las Fases que se consideraron fueron cinco:

Fase 1: Estudio de las investigaciones relacionadas con la resolución de tareas algebraicas con el objetivo de analizar el contexto, las posibles causas y consecuencias de los conflictos de significados que manifiestan los participantes.

Fase 2: Al concluir la revisión de la literatura relacionada con la resolución de tareas algebraicas, se seleccionaron tareas algebraicas para elaborar la prueba piloto, las cuales fueron clasificadas en tareas de variable, de palabras, de lenguaje, traducción y de equivalencia.

Fase 3: Aplicación del cuestionario piloto a un grupo de estudiantes para analizar el tiempo que se toman en resolver el cuestionario, las observaciones y las recomendaciones realizadas por los participantes.

Fase 4: En esta etapa se aplicó el cuestionario, el cual tuvo una duración de 90 minutos. El objetivo del cuestionario fue analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas.

Fase 5: Después de la aplicación del cuestionario, se analizó para identificar factores que ayuden a elaborar categorías de agrupación.

3.3.Clasificación y selección de las tareas algebraicas

Para la selección de las tareas del cuestionario se analizaron investigaciones (Godino et al., 2012; López y García, 2009; Sterling, 2017; Arteaga y Guzmán, 2005) relacionadas con resolución de tareas algebraicas. Estas debían ser tanto adecuadas al nivel de escolaridad de los participantes como pertinentes a las categorías que se presentarán más adelante. Por consiguiente, se buscó que las tareas empleadas en la construcción del cuestionario evaluaran lo operacional, conceptual y procesual; abarcando diferentes temáticas algebraicas.

3.4.Prueba piloto

Con el propósito de construir el cuestionario final, se realizó una Prueba Piloto con 20 tareas previamente seleccionadas entre un conjunto de 50 que fueron retomadas de investigaciones realizadas por Socas, Ruano y Hernández (2016), García (2014), Sterling (2017), Ursini y Trigueros (2006), Aké, Godino y Gonzato (2013), Aké, Castro y Godino (2011) y Arteaga y Guzmán (2005). Ésta fue distribuida en cinco cuestionarios (*C1, C2, C3,* *C4 y C5*), donde cada uno fue aplicado a cinco estudiantes y organizado de la siguiente manera, a saber:

- *C1*) de la tarea 1 a la tarea 4,
- C2) de la tarea 5 a la tarea 8,
- C3) de la tarea 9 a la tarea 12,
- C4) de la tarea 13 a la tarea 17,
- C5) de la tarea 18 a la tarea 20.

La distribución permitió que los participantes analizaran la redacción de cada una de las tareas y que en el tiempo proporcionado por la institución (1 hora) se lograra responder cada una de las tareas. A los participantes se les informó sobre el "consentimiento informado" y sobre su derecho a no participar en la prueba o abandonarla en cualquier instante sin necesidad de justificar su decisión.

A cada uno de los participantes se les manifestó que frente a una duda o comentario durante la realización del cuestionario lo realizara en el mismo cuestionario, esto permitiría realizar futuras modificaciones para obtener el cuestionario final.

Al aplicar esta Prueba Piloto se observó que las tareas tenían poco espacio para su solución, presentaban errores de redacción, algunas tareas eran similares, requerían de información adicional, las páginas no estaban numeradas. Por tanto, se mejoró la distribución de las tareas, se corrigieron los errores de redacción, se eliminaron algunas tareas y las páginas del cuestionario fueron numeradas.

3.5.Análisis de la Prueba piloto

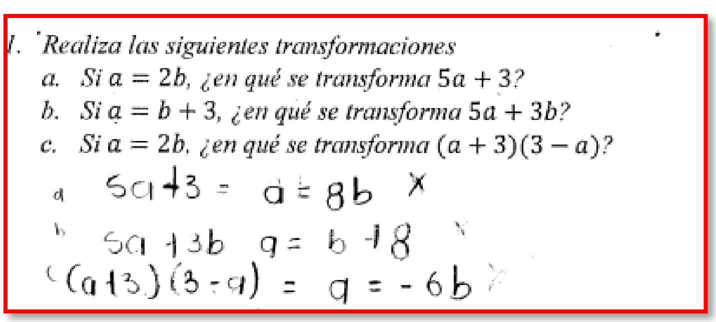
Para construir el cuestionario final y después de haber aplicado la Prueba Piloto se prosiguió con la tabulación de cada una las de las soluciones como se muestra en la Figura 1:

	CARACTERIZACIÓN DE SOLUCIONES DE LOS ESTUDIANTES POR TAREA					
	TAREAS / TIPO DE SOLUCIÓN	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Novedosa	No responde
C1	Tarea 1	0	0	2	1	2
	Tarea 2	0	2	3	0	0
	Tarea 3	0	0	3	0	2
	Tarea 4	0	0	0	5	0
C2	Tarea 5	0	0	0	2	3
	Tarea 6	1	0	4	0	0
	Tarea 7	0	0	2	3	0
	Tarea 8	0	1	4	0	0
C3	Tarea 9	0	0	2	0	3
	Tarea 10	2	0	1	0	2
	Tarea 11	0	0	2	0	3
	Tarea 12	2	1	0	0	2
C4	Tarea 13	3	0	1	0	1
	Tarea 14	1	0	2	0	2
	Tarea 15	1	0	2	0	2
	Tarea 16	1	1	0	0	3
	Tarea 17	1	0	1	0	3
C5	Tarea 18	5	0	0	0	0
	Tarea 19	0	1	1	1	2
	Tarea 20	0	0	2	0	3
	TOTAL	17	6	32	12	33

Figura 1. Tabulación Prueba Piloto

Se esperaría que de cada una de las tareas los estudiantes respondieran de manera correcta. Sin embargo, inquieta la cantidad de estudiantes que responden de manera incorrecta o simplemente no responden. Se presentan algunas respuestas proporcionadas por los participantes.

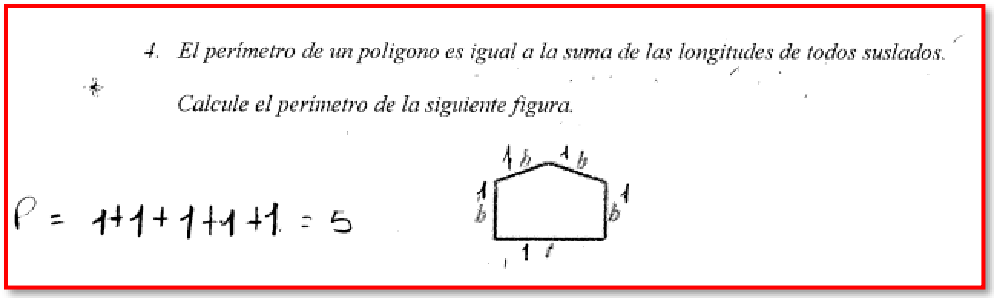
La solución presentada en la Figura 2 muestra que el estudiante en los literales a y b realiza operaciones sin tener presente las recomendaciones iniciales, es decir, no considera que a debe ser evaluada en la expresión dada. Asimismo, el estudiante considera que la solución de la Tarea debe darse en términos de una ecuación donde se requiere determinar el valor de a. Finalmente, en el literal c el estudiante no utiliza la propiedad distributiva para dar solución a la tarea y nuevamente considera que se debe encontrar el valor de a.


1. *Realiza las siguientes transformaciones*
   a. *Si* $a = 2b$, *¿en qué se transforma* $5a + 3$?
   b. *Si* $a = b + 3$, *¿en qué se transforma* $5a + 3b$?
   c. *Si* $a = 2b$, *¿en qué se transforma* $(a + 3)(3 - a)$?

a $5a+3 = \quad a = 8b$ X
b $5a+3b \quad a = b+8$
c $(a+3)(3-a) = \quad a = -6b$

Figura 2. Solución de la Tarea 1 en la Prueba Piloto

En la Figura 3 se presenta la solución que proporcionó un estudiante para determinar el perímetro de un polígono donde los lados son representados por letras. En esta solución el estudiante no establece la relación adecuada para determinar el perímetro del polígono, asigna valores particulares a cada letra y muestra que *b* y *t* son iguales.



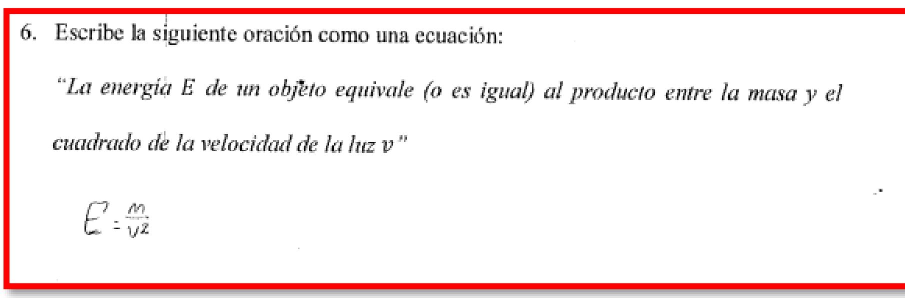
4. *El perímetro de un polígono es igual a la suma de las longitudes de todos suslados.*

Calcule el perímetro de la siguiente figura.

$P = 1+1+1+1+1 = 5$

Figura 3. Solución de la Tarea 4 en la Prueba Piloto

La solución presentada en la Figura 4 muestra que el estudiante asocia la expresión de ‘equivale’ con el signo igual, pero confunde la expresión ‘entre’ como el cociente entre dos expresiones y no como el producto. Lo anterior muestra cierto desconocimiento del lenguaje algebraico que no faculta al estudiante para transformar una tarea verbal en una expresión algebraica.



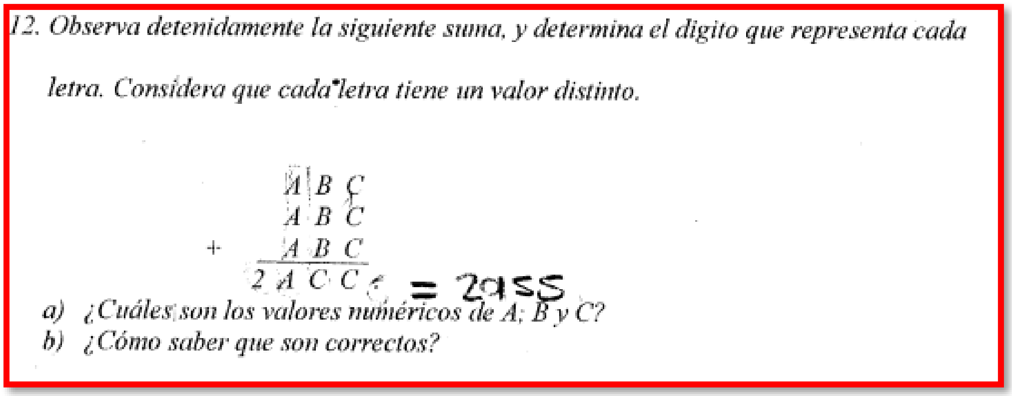
6. Escribe la siguiente oración como una ecuación:

“La energía E de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz v”

$E = \frac{m}{v^2}$

Figura 4. Solución de la Tarea 6 en la Prueba Piloto

De la Figura 5 se puede observar que el estudiante determina los valores correctos para cada letra de la tarea. Sin embargo, los valores de las letras A, B y C, han sido determinados mediante ensayo y error, lo cual da como conclusión que el estudiante no utiliza propiedades aritméticas o algebraicas que lo ayuden a obtener la solución.



12. Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el digito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ A\,B\,C \\ +\quad A\,B\,C \\ \hline 2\,A\,C\,C \end{array} = 2955$$

a) ¿Cuáles son los valores numéricos de A; B y C?
b) ¿Cómo saber que son correctos?

Figura 5. Solución de la Tarea 12 en la Prueba Piloto.

3.6.Discusión del cuestionario

En este apartado se presenta el cuestionario, que indaga sobre los conflictos de significado que manifiestan los participantes cuando resuelven tareas algebraicas.

De acuerdo tanto con la revisión de la literatura como del marco conceptual, se asumió que el cuestionario conste de once tareas que consideran tanto el tipo de conflictos de significados reportados en la literatura, como categorías macro que agrupa estos conflictos.

Las tareas del presente cuestionario se clasifican en tareas numéricas, algebraicas, gráficas, geométricas , de relaciones lineales, de tasas y de mezclas (Cerdán, 2008).

Las categorías de agrupación de las tareas consideradas para este cuestionario son: variables, problemas de palabras, lenguaje, traducción, ecuaciones y equivalencias.

Tabla 1. Categorías y su descripción operativa.

Categorías	Descripción del procedimiento de solución.
Variables	Dadas premisas se debe determinar un valor.
Problemas de palabras	Dado un texto con cantidades, conocidas y desconocidas, y relaciones entre ellos, se debe plantear una expresión algebraica que la represente.
Lenguaje	Dada una expresión en lenguaje vernáculo escribir una expresión algebraica equivalente.
Traducción	Dado un problema en palabras se debe escribir su equivalente en símbolos algebraicos, y dada una expresión algebraica, se debe dar una interpretación.
Ecuaciones	Dada una ecuación lineal, cuadrática, o racional obtener el conjunto de valores que la resuelven.
Equivalencias	Dadas dos ecuaciones determinar si son equivalentes.

Objetivo: *Analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y de primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*

Las Tareas del instrumento empleado se divide de acuerdo a los objetos matemáticos presentes, los cuales están distribuidos en los siguientes bloques de contenido que se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Descripción del contenido de las tareas.

Número de la tarea	Objetos matemáticos presentes
1a. 1b. 1c.	Sumas, restas y productos aritméticos, situaciones numéricas en expresiones algebraicas.
3a. 3b. 3c. 3d. 5	Aplicación de fórmulas geométricas, reconocimiento de las letras como objetos con valor propio.
2. 4. 6. 7. 8. 9. 10.	Sustitución de valores numéricos en expresiones algebraicas, interpretación de datos numéricos en problemas algebraicos, resolución de ecuaciones algebraicas.

Las clasificaciones presentadas en las Tablas 1 y 2 no son las únicas, ni pueden tomarse como una clasificación exhaustiva; se ha realizado con el propósito de ser referencia para el posterior análisis de los datos.

A continuación, se presenta un análisis de objetos y significados que pueden estar presentes en la solución de cada una de las tareas propuestas en el cuestionario. El instrumento utilizado se denomina Guía de Reflexión de Objetos y Significados- GROS- (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008). La Guía reconoce, entre muchos, algunos significados que pueden ser utilizados para resolver la tarea, estos significados se desglosan en: lenguaje, procedimientos, conceptos, propiedades, y una solución esperada, que corresponde a una configuración epistémicas específica, señalada en la Guía. La Guía no es exhaustiva, pues reconoce tan solo una posible configuración entre varias. Esta Guía también es utilizada para identificar posibles conflictos de significado que pueden estar asociados con la configuración epistémica propuesta. Al final de cada tarea se propone una posible solución, que, de nuevo, es una entre varias.

3.6.1. Descripción de la Tarea 1.

La Tarea 1 fue tomada de la investigación realizada por Socas, Ruano y Domínguez (2016) cuya solución requiere que los estudiantes utilicen las entidades primarias asociadas con las ecuaciones. Por tanto, se presenta una Tarea relacionada con un proceso de sustitución formal.

Realiza las siguientes transformaciones:

a) *Si* $a = 2b$, *¿en qué se transforma* $5a + 3$*?*
b) *Si* $a = b + 3$, *¿en qué se transforma* $5a + 3b$*?*
c) *Si* $a = 2b$, *¿en qué se transforma* $(a + 3)(3 - a)$*?*

Figura 6. Tarea 1

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 3. Elementos lingüísticos de la Tarea 1.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
$Si\ a = 2b$ $Si\ a = b + 3$	Refiere a una equivalencia.
¿en qué se transforman?	Las expresiones tienen una expresión equivalente.
Transformar	Las expresiones iniciales tienen una forma equivalente que se busca, y es la que se espera como respuesta.

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 4:

Tabla 4. Conceptos de la Tarea 1.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Equivalencia	Las partes implicadas poseen idéntico valor.
	Dos expresiones son equivalentes si el conjunto de valores que las satisfacen, son iguales.
	Dos expresiones son ‘iguales’ en el sentido que cumple con el axioma de simetría, donde se tiene que si $x = y$ entonces $y = x$.
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 5:

Tabla 5. Procedimientos de la Tarea 1.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Sustitución	Evaluar la condición inicial en una nueva expresión algebraica para encontrar una solución en términos de b.
Sustitución	Reemplazar una expresión por otra que es equivalente.
Uso de la propiedad distributiva	Se debe usar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma; la respuesta se expresa como una suma, sin resolución de la cerradura.
Uso del paréntesis	Utilizar el paréntesis de forma adecuada, respetando la jerarquía en las operaciones, y usando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

Posible solución:

a. *Se transformaría en* $5(2b) + 3; 10b + 3$

b. *Se transformaría en* $5(b + 3) + 3b; 5b + 15 + 3b; 8b + 15$

c. *Se transformaría en* $3a - a^2 + 9 - 3a;\ -a^2 + 9;\ -(2b)^2 + 9;\ -4b^2 + 9$

Figura 7. Posible solución Tarea 1.

3.6.2. Descripción de la Tarea 2.

La Tarea 2 fue tomada de la investigación realizada por Godino et al. (2012), la solución puede ser abordada tanto aritmética como algebraicamente, donde se requiere que los estudiantes realicen procesos de traducción (Duval, 2016). Por tanto, el estudiante en esta Tarea puede abarcar las categorías de problemas de palabras, lenguaje, traducción, ecuación y equivalencia, donde se requiere dar una interpretación.

Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Figura 8. Tarea 2.

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 6. Elementos lingüísticos de la Tarea 2.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Cierta cantidad	Valor desconocido que es motivo de búsqueda
40 días *60 días* *4€*	Uso de constantes. Valores numéricos en términos de número de días y en términos de costos o de dinero.

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 7:

Tabla 7. Conceptos de la Tarea 2.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Recibir	Operación utilizada para encontrar la adición, o proceso de adicionar un número de otro para encontrar la cantidad resultante.
Recibir	Condición de existencia de una cantidad de dinero.
Presupuesto	Conjunto de ingresos y gastos previstos para realizar una determinada actividad durante un periodo de tiempo.
Presupuesto	Cantidad de dinero de la cual se dispone para ser invertida con un fin.
Ahorrar	Acción que consiste en gastar menos dinero
Cantidad de dinero para comer	Dinero que se utiliza para comprar alimentos

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 8:

Tabla 8. Procedimientos de la Tarea 2.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Algoritmo para sumar	Permite establecer las relaciones entre los sumandos y el total
Resolución de ecuaciones de primer grado	Para hallar el valor de cada una de las incógnitas
Resolución de ecuaciones de primer grado	Encontrar un valor sometido a condiciones

Uso del paréntesis	Utilizar el paréntesis de forma adecuada, respetando la jerarquía en las operaciones

A continuación, se presentan posibles soluciones de la Tarea 2.

Posible solución 1. Como se mencionó inicialmente, la Tarea puede ser resuelta por procedimientos tanto aritméticos como algebraicos. La siguiente corresponde a una solución numérica.

El ahorro de 4€ por día durante 40 días supone un ahorro total de 160€. Con esta cantidad de dinero ahorrado, el estudiante pudo comer durante 20 días más. Por tanto, el gasto diario del estudiante fue de $160€/20\ días\ = 8€/día$. Finalmente, si se tiene presente que los días reales fueron 60 días, el dinero total que recibió es de $60\ días\ x\ 8€/\text{día} = 480€$.

Se aprecia que en la solución numérica 'emerge' el concepto matemático de razón en uso: dinero por día, que se representa como 'dinero/día'.

Posible solución 2. La siguiente es una posible solución algebraica.

Sea D el dinero recibido de los padres. Sea x el gasto diario previsto por los padres para comer 40 días. Por tanto:

$$x = D/40$$

Además, sea y el gasto diario real, el cual permitió comer al estudiante 60 días, tal que

$$y = D/60$$

Si se despeja D en ambas situaciones, se concluye que

$$40x = 60y$$

Además, $y = x - 4$ corresponde a un proceso de traducción (Duval, 2016) que relaciona el gasto previsto con el gasto real. Por tanto, se tiene que

$$40x = 60(x - 4)$$
$$20x = 240$$
$$x = 12$$

Finalmente, la cantidad recibida es de

$$12x40 = 480.$$

Con lo cual el monto recibido corresponde a 480 euros.

Figura 9. Posible solución Tarea 2.

Se aprecia que en la solución algebraica provista se utiliza reiteradamente la equivalencia entre expresiones, lo que simplifica resolver el problema; igualmente se aprecia la traducción de la lengua vernácula al lenguaje algebraico. Finalmente, el problema se resuelve mediante la conjunción de procesos de traducción y procesos de tratamiento, en donde la asignación de significado a las incógnitas o letras, es esencial.

3.6.3. Descripción de la Tarea 3.

La Tarea 3 fue tomada de la investigación realizada por Suarez (2016), consta de 4 literales; las Tareas 3a y 3b están diseñadas para evaluar el uso de las letras como letras evaluadas. A su vez, la Tarea 3c está diseñada para evaluar el uso de las letras como objetos. Finalmente, la Tarea 3d está diseñada para valorar el uso de las letras como números generalizados.

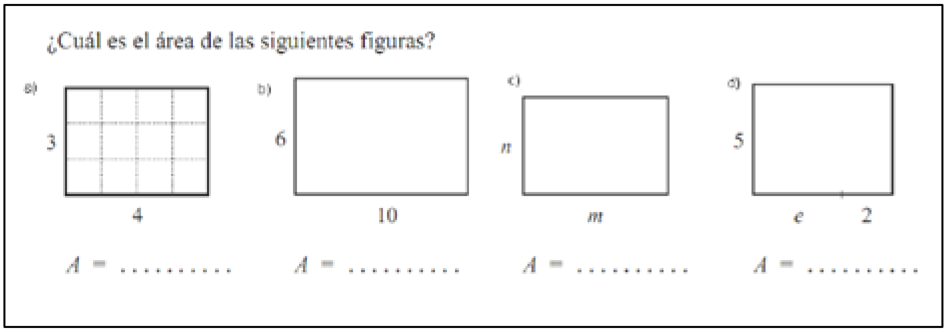


Figura 10. Tarea 3.

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 9. Elementos lingüísticos de la Tarea 3.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
$3;\ 4$ $6;\ 10$ $m; n$ $5(e+2)$	Refiere a las longitudes de los lados de las figuras.
3; 4 *6; 10* *m; n* *5(e+2)*	Los números contiguos a los lados refieren a las longitudes, desconocidas, de éstos.
A	Refiere al valor del área.
A=…….	Refiere que el valor del área no se conoce, debe ser calculado y su valor puesto en el espacio indicado por los puntos suspensivos.
A	Corresponde al valor único del área de la figura superior.

El uso de la misma letra '*A*' para denotar medidas de áreas diferentes, puede ser motivo de conflicto para los estudiantes, dado que se usa la misma letra, para denotar áreas que se aprecian diferentes.

Asimismo, el uso de cuadricula para representar las dimensiones de la figura *a*, puede ser motivo de conflicto para los estudiantes, dado que solo se usa la cuadricula en ésta figura, dejando la posibilidad al estudiante de realizar el mismo procedimiento en la figura *b* pero no con las figuras *c* y *d*.

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 10:

Tabla 10. Conceptos de la Tarea 3.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Área	Espacio que queda encerrado entre los límites de una figura.
Área	Valor de una magnitud.
Lado	Segmento de línea utilizado para formar un polígono.
Segmento	Fragmento de recta comprendido entre dos puntos.
Ancho	Referencia relativa, de menor dimensión horizontal.
Largo	Referencia relativa, de mayor dimensión horizontal.

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 11:

Tabla 11. Procedimientos de la Tarea 3.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
¿Cuál es el área?	Multiplicar las dimensiones de la figura.
¿Cuál es el área?	Dividir la figura, de manera homogénea, en filas y columnas de acuerdo como se indique, y contar cada una de las figuras emergentes.

Posible solución:

a) Una posible solución de la Tarea:

$$3+3+3+3;\ (3+3)+(3+3);\ 6+6;\ 12.$$

Otra posible solución de la Tarea sería

$$3x4 = 12$$

b) Una posible solución de la Tarea:

$$6+6+6+6+6+6+6+6+6+6$$
$$(6+6)+(6+6)+(6+6)+(6+6)+(6+6)$$
$$(12+12)+(12+12)+12$$
$$(24+24)+12$$
$$48+12$$
$$60$$
$$Así\ A = 60$$

Otra posible solución de la Tarea:

$$6x10 = 60$$
$$Así\ A = 60$$

c) Una posible solución de la Tarea:

$$mxn = nxm$$

d) Una posible solución de la Tarea:

$$(e+2)+(e+2)+(e+2)+(e+2)+(e+2)$$
$$(e+e)+(e+e)+e+(2+2)+(2+2)+2$$
$$(2e+2e)+e+(4+4)+2$$
$$(4e+e)+(8+2)$$
$$5e+10$$

Otra posible solución de la Tarea:

$$5(e+2)$$
$$5e+10$$

Figura 11. Posible solución Tarea 3

3.6.4. Descripción de la Tarea 4.

La Tarea 4, de tipo simbólica, fue tomada de la investigación realizada por Sterling (2017) donde se requiere que los estudiantes utilicen su conocimiento sobre propiedades de equivalencia.

Escribe la siguiente oración como una ecuación:

"La energía E de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz v"

*Figura 12***.** Tarea 4

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 12. Elementos lingüíticos de la Tarea 4.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
La energía E *Masa m*	Uso de variables.
Velocidad de la luz	Uso de constantes.

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 13:

Tabla 13. Conceptos de la Tarea 4.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Equivale	Las partes implicadas poseen idéntico valor.
Cuadrado	Potencia sobre v
Ecuación	Dada una ecuación lineal, cuadrática, o racional obtener el conjunto de valores que la resuelven.
Energía	Valor de la energía total de una partícula medida por un observador que está en reposo respecto a la partícula.
Producto	Dado dos factores se deben multiplicar entre sí.
Masa	Cantidad de materia que contiene un cuerpo.
Velocidad	Magnitud física de carácter vectorial.

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 14:

Tabla 14. Procedimientos de la Tarea 4.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Oración como una ecuación	Se debe escribir la energía en función de la masa y la velocidad de la luz.

A continuación, se presenta una posible solución de la Tarea 4:

$$\boxed{E = mv^2}$$

Figura 13. Posible solución Tarea 4

3.6.5. Descripción de la Tarea 5.

La Tarea 5 fue tomada de la investigación realizada por Ursini y Trigueros (2006) la cual requiere de la identificación de dos intervalos no continuos. En primer lugar, la variable x debe ser reconocida como un número general y no como un número particular, el cual debe ser evaluado para obtener una expresión. Por tanto, la variable x es una cantidad desconocida y cuyo valor puede determinarse.

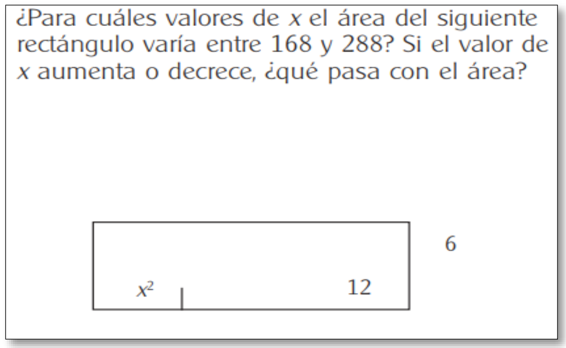


Figura 14. Tarea 5

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 15. Elementos lingüísticos de la Tarea 5.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Para cuáles valores de x	Uso de variables.
x^2	Potencia sobre x
168 y 288 *12* *6*	Uso de constantes.

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 16:

Tabla 16. Conceptos de la Tarea 5.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Área	Espacio que queda encerrado entre los límites de una figura.

Rectángulo	Paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre si
Aumenta	Nos permite establecer las relaciones entre los sumandos y el total
Decrece	Nos permite calcular el valor de cada una de las letras, ya que restamos al total (que es un valor constante y conocido).

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 17:

Tabla 17. Procedimientos de la Tarea 5.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Determinar el valor de x	Se sustituye cada una de las letras del crucigrama, por el valor numérico calculado mediante los procedimientos que se indican.
¿Qué pasa con el área?	Analizar su comportamiento de crecimiento de decrecimiento.

Posible solución:

$$168 \leq (x^2 + 12)6 \leq 288$$
$$168 \leq 6x^2 + 72 \leq 288$$
$$96 \leq 6x^2 \leq 216$$
$$16 \leq x^2 \leq 36$$
$$4 \leq x \leq 6$$

El área varía entre los valores de $4 \leq x \leq 6$
Si el valor de x aumenta, al área del rectángulo aumenta.
Si el valor de x disminuye, el área del rectángulo disminuye.

Figura 15. Posible solución Tarea 5

3.6.6. Descripción de la Tarea 6.

La Tarea 6 fue tomada de la investigación realizada por Ursini y Trigueros (2006) donde se quiere identificar la relación entre el número de kilogramos de tomate que se venden y la ganancia obtenida. En esta Tarea se puede plantear una ecuación donde es necesario interpretar una de las variables como incógnitas.

Un hortelano vende el kilogramo de tomate a $12.00 y le cuesta $240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar $4 500.00?

Figura 16. Tarea 6

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 18. Elementos lingüísticos de la Tarea 6.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
$12 *$24* *$4500*	Refiere a un determinado valor.

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 19:

Tabla 19. Conceptos de la Tarea 6.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Relación	Correspondencia entre dos conjuntos.
Kilogramo	Unidad básica de masa en SI.

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 20:

Tabla 20. Procedimientos de la Tarea 6.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Hallar la relación	Determine una ecuación para encontrar el valor de la variable.

Posible solución

Sea T la ganancia total del hortelano tal que

$$T = 12x - 240$$
$$4500 = 12x - 240$$
$$4500 + 240 = 12x$$
$$4740 = 12x$$
$$\frac{4740}{12} = x$$
$$x = 395$$

Tiene que vender 395 kilogramos de tomate para obtener una ganancia de \$4500

Figura 17. Posible solución Tarea 7.

3.6.7. Descripción de la Tarea 7.

La Tarea 7, fue tomada y adaptada de la investigación realizada por Cerdán (2008) donde se requiere realizar una traducción del lenguaje vernáculo al lenguaje algebraico, y realizar reducción de términos semejantes.

Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitad de su largo, para imprimir en cada página una superficie de 300 cm^2. Si los márgenes son de 2 cm. arriba y abajo y 2.5 cm. en cada lado, determina ¿cuáles son las dimensiones de la hoja?

Figura 18. Tarea 7.

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 21. Elementos lingüísticos de la Tarea 7.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
ancho	Mitad de su largo
l $\frac{l}{2}$	Incógnitas en la Tarea
márgenes	Indican las áreas que se pueden imprimir y el área de escritura

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 22:

Tabla 22. Conceptos de la Tarea 7.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Área	Espacio que queda encerrado entre los límites de una figura.
Ancho	Referencia relativa, de menor dimensión horizontal.
Largo	Referencia relativa, de mayor dimensión horizontal.

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 23:

Tabla 23. Procedimientos de la Tarea 7.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Determinar las dimensiones de la hoja	Se deben restar en cada lado las márgenes de la hoja y determinar, por medio del área del paralelogramo, sus dimensiones.

Posible solución

Sea L y $\frac{L}{2}$ las dimensiones de la hoja correspondientes al largo y ancho respectivamente

$\Rightarrow$ el área de la superficie de impresión está dada por la expresión:

$$(L-4)\left(\frac{L}{2}-5\right)=300$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{2}-5L-2L+20=300$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{2}-7L-280=0$$

$$\Rightarrow L^2-14L-560=0$$

$$L=\frac{14\pm\sqrt{(14)^2+2240}}{2}$$

$$L=\frac{14\pm\sqrt{2436}}{2}$$

$$L=\frac{14\pm2\sqrt{609}}{2}$$

$L=7\pm\sqrt{609}$ así $L_1=31.678$ y $L_2=-17.678$

Así las dimensiones de la hoja son: $L=31.678\ cm$ y $\frac{L}{2}=15.839\ cm$

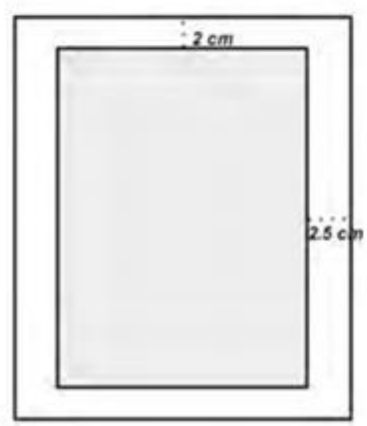


Figura 19. Posible solución Tarea 7.

3.6.8. Descripción de la Tarea 8.

La Tarea 8, planteada y adaptada, fue tomada de la investigación realizada por Sterling (2017), la cual es abordada en ambientes escolares a través de situaciones referidas al reparto de herencias, dinero en efectivo y ganancias en centros comerciales. Estos tipos de tareas favorecen el proceso de enseñar las teorías, conceptos y formulas por medio de la experiencia. En esta Tarea las cantidades que reciben las tres primas no son equivalentes.

> *Lucia Gustín lega su fortuna a sus tres primas, María, Camila y Sofia. Ella da 15000€ de más a María que a Camila, pero 5000€ de más a Sofia que a Camila, si su fortuna es de 158000€ ¿Cuánto recibe María, Camila y Sofia?*

Figura 20. Tarea 8

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 24. Elementos lingüísticos de la Tarea 8.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Lega entre tres	Repartir en tres partes

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 25:

Tabla 25. Conceptos de la Tarea 8.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Equivalencia	Dadas dos ecuaciones determinar si son equivalentes.
Ecuación	Dada una ecuación lineal, cuadrática, o racional obtener el conjunto de valores que la resuelven.
Reparto	Entrega de una parte del todo.

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 26:

Tabla 26. Procedimientos de la Tarea 8.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Resolución de ecuaciones de primer grado	Se sustituye cada una de las letras por el valor numérico calculado mediante los procedimientos que se indican.

Posible solución

$$Sea\ M\ el\ valor\ correspondiente\ para\ María$$

$$Sea\ C\ el\ valor\ correspondiente\ para\ Camila$$

$$Sea\ S\ el\ valor\ correspondiente\ para\ Sofía$$

Ella da 15000€ más a María que a Camila

C =*Cantidad que recibe Camila*

$C + 15000€$ *cantidad que recibe María*

$$M = C + 15000€$$

5000€ demás a Sofía que a Camila

$$S = C + 5000€$$

¿cuánto recibe María, Sofía y Camila?

$$C + S + M = 158000€$$

$$C + (C + 5000€) + (\ C + 15000€) = 158000€$$

$$3C = 138000€$$

$$C = 46000€$$

Por tanto, Camila recibe 46000€, Sofía recibe 51000€ y María recibe 61000€

Figura 21. Posible solución Tarea 8.

3.6.9. Descripción de la Tarea 9.

La Tarea 9, fue tomada de la investigación realizada por Aké, Castro y Godino (2011); el objetivo de su inclusión refiere a explorar el conocimiento que lo faculta para resolver la tarea algebraica.

Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el dígito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline 2 & A & C & C \end{array}$$

a) ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C?
b) ¿Cómo sabes que son correctos?

Figura 22. Tarea 9.

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 27. Elementos lingüísticos de la Tarea 9.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
A B C	Incógnitas dentro de la Tarea

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 28:

Tabla 28. Conceptos de la Tarea 9.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Equivalencia	Las partes implicadas poseen idéntico valor.
Equivalencia	Dos expresiones son equivalentes si el conjunto de valores que las satisfacen es igual.
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 29:

Tabla 29. Procedimientos de la Tarea 9.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	

Algoritmo para sumar	Nos permite establecer las relaciones entre los sumandos y el total
Resolución de ecuaciones de primer grado	Encontrar un valor sometido a condiciones

Posible solución 1. Se debe tener presente que la suma de tres veces un numero debe dar como resultado un número donde la cifra de las unidades sea igual al número buscado. Por tanto, para la letra C el único valor posible es el cinco y se descarta que $C = 0$ *puesto que implicaría que B=0. Para la segunda columna se debe tener presente que la suma de tres números iguales más una unidad da como resultado un numero de dos cifras donde el valor de las unidades es cinco, dando como resultado que el valor buscado es ocho. Finalmente, para la letra A se tiene que la suma de tres números repetidos más dos unidades da como resultado un número cuyo valor de sus decenas es dos y en sus unidades es el mismo número, dando como única posibilidad al número nueve.*

Posible solución 2. Se presentó en el trabajo realizado por (Godino et al., 2012), en el cual manifiestan que:

> *se puede obtener usando la expresión polinómica de los números naturales. La suma se puede expresar del siguiente modo:* $3(100A + 10B + C) = 2000 + 100A + 10C + C$*, de donde se obtiene* $200A + 30B - 8C = 2000$ *considerando que* $A \neq B \neq C$ *cuyos valores pertenecen a* $[0,9]$.

Figura 23. Posible solución Tarea 9.

La posible solución 1, muestra que posiblemente estudiantes con un conocimiento mínimo pueden determinar la solución de la tarea mediante un procedimiento de ensayo y error, el cual no obedece a un razonamiento algebraico elemental.

3.6.10. Descripción de la Tarea 10.

La Tarea 10, fue tomada del trabajo de investigación realizado por Arteaga y Guzmán (2005), los cuales la clasifican como una tarea de tasa en la que “existen comparaciones entre cantidades no homogéneas. Por ejemplo, kilómetros por hora, salario por día, patas por animal, etc." (Arteaga y Guzmán, 2005, p. 36). Por tanto, se analizará la forma en que estudiantes transforman la tarea de un lenguaje verbal a un lenguaje algebraico y cómo lo aplican para la construcción de un sistema de ecuaciones lineales, el cual garantice su solución.

> En una caja hay arañas y escarabajos; hay 8 animales en total. Arturo cuenta el número total de patas y resulta que son 54. Si sabemos que un escarabajo tiene 6 patas y una araña 8, ¿cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja? (Adaptado de Santos, citado en Arteaga & Guzmán 2005, p. 38).

Figura 24. Tarea 10.

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 30. Elementos lingüísticos de la Tarea 10.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
8 animales	Cantidad total de animales en una caja
54 patas	Cantidad total de patas entre las arañas y los escarabajos
6 patas	Cantidad de patas que tiene un escarabajo
8 patas	Cantidad de patas que tiene una araña

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 31:

Tabla 31. Conceptos de la Tarea 10.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Equivalencia	Dadas dos ecuaciones determinar si son equivalentes.
Ecuación	Dada una ecuación lineal, cuadrática, o racional obtener el conjunto de valores que la resuelven.

Equivalencia	Dadas dos ecuaciones determinar si son equivalentes.

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 32:

Tabla 32. Procedimientos de la Tarea 10.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Resolución de ecuaciones de primer grado	Se sustituye cada una de las letras por el valor numérico calculado mediante los procedimientos que se indican.

Posible Solución:

Sea a el número total de arañas que hay en una caja

Sea e el número total de escarabajos hay en una caja

Del enunciado se tiene que la suma entre el número de arañas y escarabajos que contiene la caja es de 8 animales en total

$$a + e = 8.\ Ecuación\ 1$$

Además, se tiene que

Sea $8a$ el producto entre la cantidad de patas que tiene una araña y el número total de arañas que hay en la caja

Sea $6e$ el producto entre la cantidad de patas que tiene un escarabajo y el número total de escarabajos que hay en la caja

Por tanto,

$$8a + 6e = 54.\ Ecuación\ 2$$

Si se despeja e de la ecuación 1 se tiene que

$$e = 8 - a.\ ^{(*)}$$

Al sustituir $^{(*)}$ en la ecuación 2 se tiene que

$$8a + 6e = 54$$
$$8a + 6(8 - a) = 54$$
$$8a + 48 - 6a = 54$$
$$8a - 6a = 54 - 48$$
$$2a = 6$$
$$a = 3\ ^{(**)}$$

Si sustituimos $^{(**)}$ en la ecuación 1 se tiene que

$$e = 8 - a$$
$$e = 8 - 3$$
$$e = 5$$

Por lo tanto,

$$a = 3\ arañas$$
$$e = 5\ escarabajos$$

Figura 25. Posible solución Tarea 10.

3.6.11. Descripción de la Tarea 11.

La Tarea 11, fue tomada del trabajo realizado por Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco (2015), en el cual proponen un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento elemental.

Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:
«En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa. ¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?».

Figura 26. Tarea 11.

A continuación, se presentan la Guía de Objetos y Significados para cada uno de los objetos primarios requeridos para la solución.

Tabla 33. Elementos lingüísticos de la Tarea 11.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS: REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
2€ *10 céntimos* *4kg*	Uso de constantes

Los conceptos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 34:

Tabla 34. Conceptos de la Tarea 11.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
kilogramo	Unidad básica de masa en SI.

Los procedimientos que pueden estar asociados con la solución se muestran en la Tabla 35:

Tabla 35. Procedimientos de la Tarea 11.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Resolución de ecuaciones de primer grado	Se sustituye cada una de las letras por el valor numérico calculado mediante los procedimientos que se indican.
Resolución de ecuaciones de primer grado	Encontrar un valor sometido a condiciones

Posible solución:

La solución de la Tarea 11 se presenta en la Figura 27

kg	1	2	3	4	5	6	7
Coste	2*1+0,1	2*2+0,1	2*3+0,1	2*4+0,1	2*5+0,1	2*6+0,1	…

Figura 27. Posible solución Tarea 11.

Dependiendo el número de bolsas que se necesiten, se puede plantear la siguiente regla: $y = 2x + 0{,}1$. Siempre que $0 < x \leq 4$.

Finalmente, el costo total de una bolsa de 4kg de peras sería 8,1€.

3.7. Caracterización de soluciones

A continuación, se presenta la Tabla 36, la cual describe las formas de solución que se consideran en esta investigación.

Tabla 36. Caracterización de soluciones de los estudiantes a las tareas propuestas.

CÓDIGO	SOLUCIÓN	DESCRIPCIÓN
1	Correcta	Manifiesta uno o varios significados sobre los conceptos de variable, ecuación, igualdad, razón, proporción.
2	Parcialmente correcta	Manifiesta significados incompletos en la solución de las tareas y/o diferentes a los esperados.
3	Incorrecta	Manifiesta conflictos de significado, referentes a que no corresponden a la tarea planteada.
4	Novedosa	Realiza la resolución de tareas algebraicas, pero su solución no está contemplada en la posible solución.
5	No responde	No manifiesta ningún significado sobre los conceptos de variable, ecuación, igualdad, razón, proporción.

3.8.Aplicación del cuestionario

Gracias a las observaciones que manifestaron los participantes en la Prueba Piloto se logró elaborar el cuestionario final, el cual fue validado por profesores de educación secundaria, profesores de educación terciaria y docentes investigadores en educación matemática.

Se determinó que de cada institución solo se tomara un máximo de 25 participan para trabajar con muestras homogéneas, para un total de 100 participantes en la presente investigación. En todos los casos se contó con la aprobación tanto de las autoridades escolares como de los acudientes y de los estudiantes, para la aplicación de la Prueba. Al inicio y al final de la Prueba los estudiantes fueron informados de sus derechos y de la posibilidad de no participar sin perjuicio alguno para ellos. A los participantes se les manifestó que la aplicación del cuestionario hace parte de una investigación y por tanto los resultados del mismo no repercutirían en sus notas académicas. Asimismo, se les agradeció tanto a estudiantes que participaron en la aplicación del cuestionario como a los padres de familia o acudientes que proporcionaron los respectivos permisos.

El cuestionario tuvo una duración de dos horas para que cada participante contestara de manera individual las once tareas. Sin embargo, se evidenció que algunas tareas no fueron abordadas por los participantes, algunos de los cuales manifestaron que no fue por falta de tiempo sino porque no se acordaban de cómo empezar a solucionar las tareas que presentaban enunciados.

Para hacer el análisis del cuestionario, las soluciones de cada tarea se caracterizan de acuerdo con la Tabla 36.

Al caracterizar las soluciones proporcionadas por los participantes como una 'solución correcta', se está comparando que los significados personales de los estudiantes sean acordes con los significados institucionales. Esta comparación se realiza con el objetivo de analizar los conflictos de significado atribuidos a la resolución de tareas algebraicas.

Por cada una de las instituciones educativas se ha propuesto una tabla donde se encuentra el conteo de respuestas ya sean 'correctas', 'parcialmente correctas', 'incorrectas', 'novedosas' y 'no responde'.

Con el objetivo de preservar la identidad de los participantes e identificar su respuesta, se ha usado las nomenclaturas [$\boldsymbol{Cn}$] para denotar a los participantes de los colegios, donde n representa el número con el cual se ha designado al estudiante. De manera similar, se ha usado la nomenclatura [$\boldsymbol{Un}$] para denotar los participantes de las universidades.

3.9. Análisis de las respuestas al cuestionario

Para realizar el análisis de este cuestionario, se realizó una clasificación de las respuestas como se muestra en la Tabla 36: Correcta, parcialmente correcta, incorrecta, novedosa y no responde.

En cada una de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad, se analizaron los conflictos de significado asociados al uso de paréntesis, uso del signo igual sin tener en cuenta el significado de equivalencia, simplificar expresiones algebraicas y realizar traducciones del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Es importante aclarar que la 'posible solución' planteada en cada una de las Tareas se ha realizado con la intención de comparar los significados personales de los estudiantes con un representante del significado institucional. Por tanto, esta comparación se realiza para identificar los 'conflictos de significado', es decir, para conocer los significados que los estudiantes atribuyen y que alteran la solución de las Tareas propuestas.

Para cada una de las Tareas se realizó una tabla que evidencia el conteo de las respuestas correctas, parcialmente correctas, incorrecta, novedosa y no responde.

Después de la tabla de conteo, se muestran algunas soluciones proporcionadas por los participantes.

A continuación, se presentan y se discuten cada una de las 11 Tareas del cuestionario:

Tabla 37. Resumen de resultados Tarea 1.

Tarea 1: Realiza las siguientes transformaciones a. Si $\mathbf{a} = \mathbf{2b}$, ¿en qué se transforma $\mathbf{5a} + \mathbf{3}$?

Objetivo: *Analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y de primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*

b. Si $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{3}$, ¿en qué se transforma $\mathbf{5a} + \mathbf{3b}$?
c. Si $\mathbf{a} = \mathbf{2b}$, ¿en qué se transforma $(\mathbf{a} + \mathbf{3})(\mathbf{3} - \mathbf{a})$?

Resultados				
	$C_{1\text{ a }25}$	$C_{26\text{ a }50}$	$U_{1\text{ a }25}$	$U_{26\text{ a }50}$
Correcta	5	8	12	7
Parcialmente correcta	4	5	4	5
Incorrecta	12	10	6	1
Novedosa	3	0	0	4
No responde	1	2	3	8

En la Tabla 37 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 1. De acuerdo con esta clasificación, se observa que el 32% de los participantes contestaron coherentemente con los significados institucionales que fueron planteados en la posible solución de la Tarea 1. Sin embargo, el 29% de los participantes se ubica entre la cantidad que responde incorrectamente frente al 14% de los participantes que simplemente no responde.

Con base en lo anterior, se muestran algunas soluciones manifestadas por los participantes:

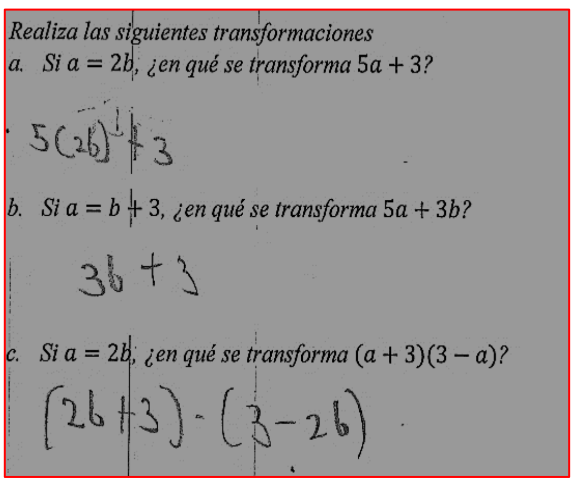


Figura 28. Respuesta estudiante U44

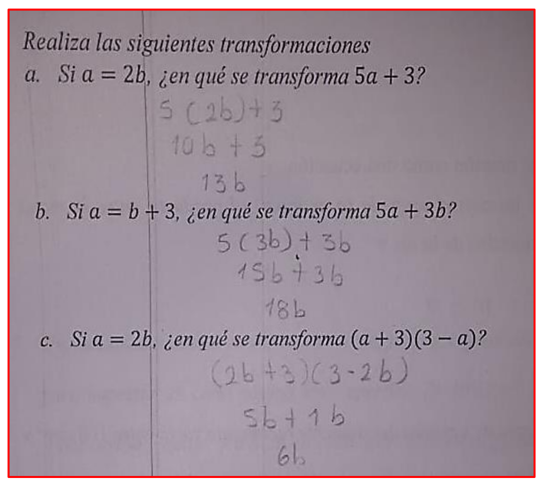


Figura 29. Respuesta estudiante U4

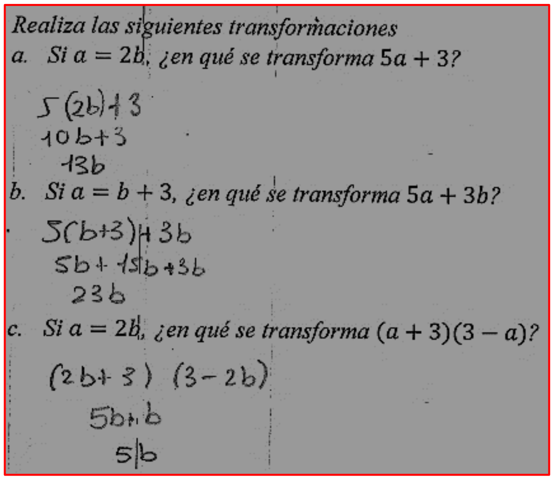


Figura 30. Respuesta estudiante C45

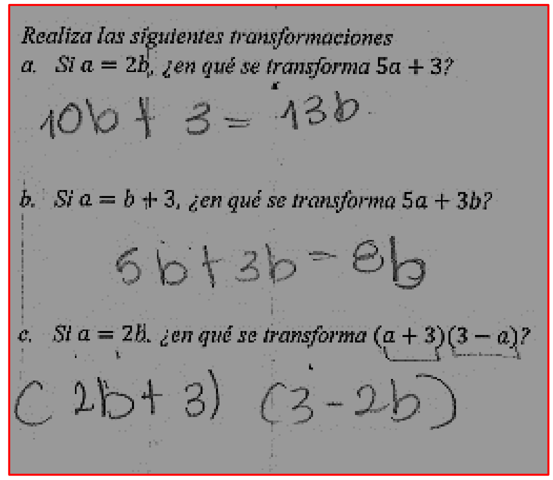


Figura 31. Respuesta estudiante C3

En la Figura 28 se muestran las soluciones planteadas a la Tarea 1 por el estudiante U_{44}, el cual en la Tarea 1.a realiza la transformación adecuadamente. En la Tarea 1.b no se percibe que el estudiante haga uso de la condición que $a = b + 3$, lo cual lo lleva a plantar una solución que no está acorde con lo esperado y, en la Tarea 3.c, realiza la transformación de manera adecuada.

De manera similar, la Figura 29 muestra la solución planteada por el estudiante U_4 a la misma Tarea, donde inicialmente soluciona la Tarea 1.a de manera correcta, sin embargo, es interesante que sume dos expresiones, una de las cuales es 'desconocida' y trate de llegar a una solución en función de un solo término. En la Tarea 1.b sustituye de manera incorrecta dado que no utiliza la condición inicial $a = b + 3$, y propone una solución que no corresponde a la descripción de la Tarea. En la Tarea 1.c nuevamente realiza la transformación adecuadamente, pero suma expresiones considerando solo los números sin tener en cuenta las letras que representan valores desconocidos.

Soluciones similares se pueden observar en las soluciones de los estudiantes de undécimo grado de las dos instituciones, donde prevalece la idea que frente a una expresión algebraica se debe llegar a una solución en función de un solo término. Esto podría ser una forma de la "falta de cerradura" (Socas, 2007), que proviene de la propiedad de cerradura, aplicada a números reales.

Con base en lo anterior, se puede observar que algunos estudiantes resuelven operaciones de expresiones algebraicas como si se tratara de expresiones aritméticas, en las cuales suman todos los términos que aparecen en la tarea.

Tabla 38. Resumen de resultados Tarea 2.

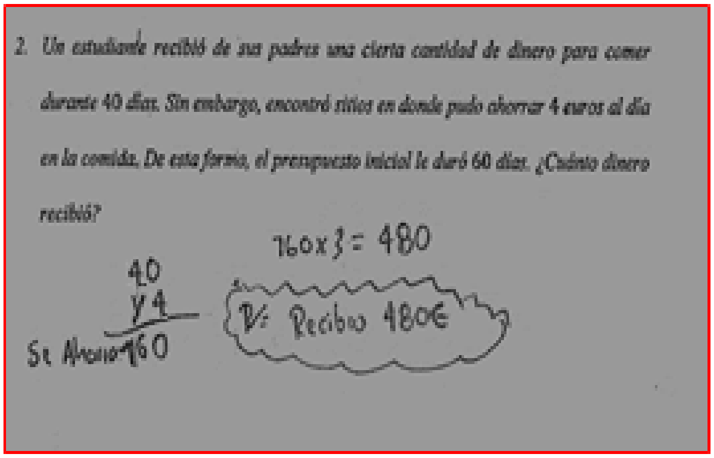
Tarea 2:

Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante $\mathbf{40}$ días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar $\mathbf{4}$ euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró $\mathbf{60}$ días. ¿Cuánto dinero recibió?

Resultados				
	$C_{1\text{ a }25}$	$C_{26\text{ a }50}$	$U_{1\text{ a }25}$	$U_{26\text{ a }50}$
Correcta	2	1	4	5
Parcialmente correcta	4	3	0	3
Incorrecta	15	18	15	9
Novedosa	0	0	0	0
No responde	4	3	6	8

En la Tabla 38 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 2. De acuerdo con esta clasificación, se observa que solo el 12 % de los participantes contestaron la Tarea 2 de manera correcta, pero entre los que contestaron de manera incorrecta y los que no responden suman un 78%. Porcentaje que preocupa debido a que es un factor negativo tanto para los estudiantes de undécimo grado como para los estudiantes de primer semestre de universidad, puesto que al primero lo limita para ingresar a una universidad y, al segundo, lo afecta en el rendimiento académico.

Con base en lo anterior, se muestran algunas soluciones manifestadas por los participantes:



2. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

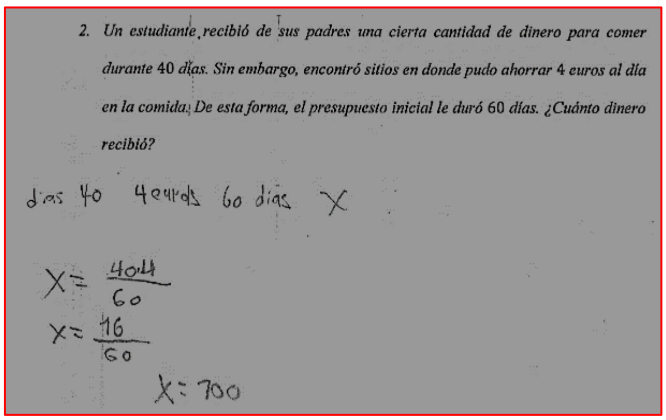
160x3 = 480

40
x4
Si Ahorro 160

R: Recibió 480€

Figura 32. Respuesta estudiante C6

En la Figura 32 se puede observar que el estudiante C_6 da una solución correcta de la Tarea 2. Sin embargo, solo realiza operaciones con números enteros sin considerar una posible solución algebraica.



2. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

días 40 4euros 60 días X

X= 40·4 / 60

X= 16 / 60

X= 700

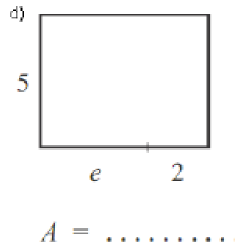
Figura 33. Respuesta estudiante U44

Por otra parte, la solución planteada por el estudiante U_{44}, a la misma, Tarea puede considerarse como algebraica en cuanto reconoce que existe una incógnita, hace uso de letras para representar cantidades desconocidas y realizar operaciones elementales para dar con la solución. Por tanto, identifica y usa cada uno de los elementos que considera importantes, reconoce cada una de sus constantes y determina que la incógnita será representada por x. Luego, plantea la ecuación donde establece que x es proporcional al producto entre los 40 días y 4€ (para determinar el ahorra durante los 40 días) e inversamente proporcional a la cantidad total de días que el estudiante comió con el presupuesto otorgado por sus padres. Sin embargo, no considera la diferencia entre los 60 días (donde el estudiante pudo ahorrar 4€ diarios) y los 40 días (en donde el estudiante no podía ahorrar).

Tabla 39. Resumen de resultados Tarea 3.d.

Tarea 3.d:

¿Cuál es el área de las siguientes figuras?



Resultados				
	$C_{1\text{ a }25}$	$C_{26\text{ a }50}$	$U_{1\text{ a }25}$	$U_{26\text{ a }50}$
Correcta	3	7	7	4
Parcialmente correcta	1	3	3	4
Incorrecta	16	12	12	16
Novedosa	0	0	0	0
No responde	5	3	3	1

En la Tabla 39 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 3.d. De acuerdo con la Tabla, se observa que la cantidad de estudiantes que determina de manera correcta el área de cada una de las figuras en la Tarea no supera el 21% frente a un 56% que la realiza de manera incorrecta. Todos los participantes acudieron a la fórmula para hallar el área de un triángulo e incluso recurrieron a contar los cuadros que aparecían en la tarea 3.a, sin embargo, esta condición no se podía aplicar para todas las figuras y, por tanto, la estrategia no era viable.

Por otra parte, se reconoció que los estudiantes no aceptan la falta de clausura (Socas, 2016) y realizan operaciones con expresiones algebraicas como si se tratara de un polinomio aritmético desconociendo el significado de las expresiones algebraicas, su uso y sus propiedades. Por tanto, se observa que estudiantes presentan cierta tendencia hacia el uso de las operaciones numéricas, que no amplían, a pesar de estar en el último grado de educación secundario o en primer semestre de universidad.

Finalmente, se observa que los estudiantes no utilizan toda la información de la Tarea, lo cual podría estar vinculado con dificultades en el uso del lenguaje algebraico.

Con base en lo anterior, se muestran algunas soluciones manifestadas por los participantes:.

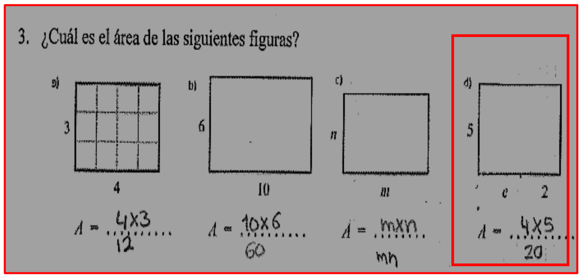


Figura 34. Respuesta estudiante C22

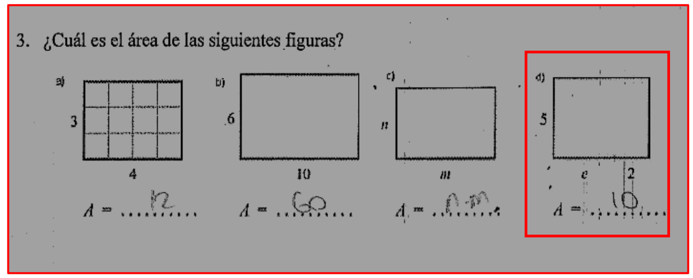


Figura 35. Respuesta estudiante C44

Por ejemplo, en la Figura 34 se presenta la solución planteada por el estudiante C_{22} a la Tarea 3.d, en la cual le asigna un valor determinado a la letra 'e' y sobre ese valor determina el área de la figura.

Por otro lado, en la Figura 35 se observa que el estudiante C_{44} ignora por completo la letra que aparece en la Tarea y realiza operaciones con la intención de determinar el área de la figura, pero inquieta que los objetos algebraicos no han sido desarrollados en su práctica matemática.

Tabla 40. Resumen de resultados Tarea 4.

Tarea 4:

Escribe la siguiente oración como una ecuación:
"La energía $\boldsymbol{E}$ de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz $\boldsymbol{v}$"

Resultados				
	$C_{1\text{ a }25}$	$C_{26\text{ a }50}$	$U_{1\text{ a }25}$	$U_{26\text{ a }50}$
Correcta	6	7	8	12
Parcialmente correcta	2	4	7	0
Incorrecta	7	8	5	7
Novedosa	5	0	4	0
No responde	5	6	1	6

En la Tabla 40 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 4. De acuerdo con esta clasificación, se puede observar que el 33% de los participantes dieron solución de manera correcta, reconocen que deben pasar de un enunciado en lenguaje vernáculo a una expresión en lenguaje matemático, donde la energía está en función de la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz.

Por otra parte, el 45% de los participantes se ubican entre la cantidad que contestaron de manera incorrecta y los que no respondieron. Con base en lo anterior, se muestran algunas soluciones manifestadas por los participantes.

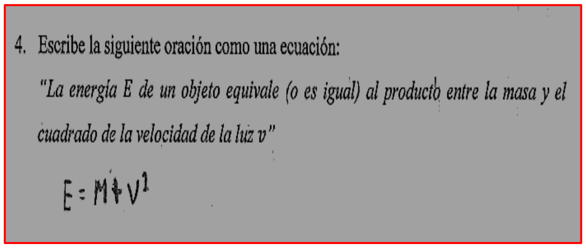


Figura 36. Respuesta estudiante C6.

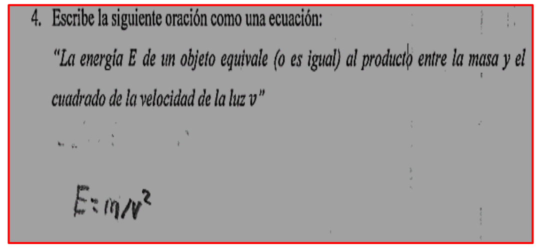


Figura 38. Respuesta estudiante U1.

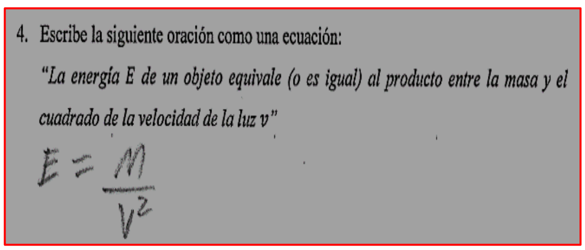


Figura 37. Respuesta estudiante C27.

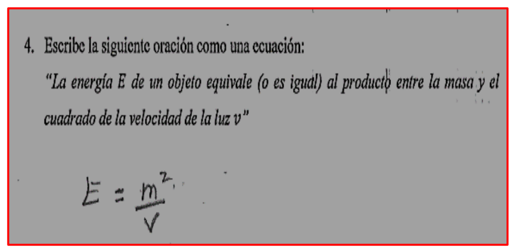


Figura 39. Respuesta estudiante U27.

Por ejemplo, en la Figura 36 se observa que el estudiante C_6 reconoce que existe una equivalencia. Sin embargo, uno de los conflictos hallados en la solución planteada por el estudiante corresponde al hecho que 'sumar la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz' asociando la palabra 'entre' como si indicara que se debe realizar una adición entre estas dos cantidades. Estudios realizados (Godino y Font, 2002; Socas y Ruano, 2016) reportan que los diversos significados de las palabras son causa de errores cuando se usan en matemáticas.

Otros ejemplos se observan en las Figura 37 y en la Figura 38, donde los estudiantes C_{27} y U_1, respectivamente, usaron el signo igual para representar la equivalencia entre dos cantidades. Sin embargo, asocian la expresión 'entre' como el cociente entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz.

Finalmente, el estudiante U_{27} representó la solución de la Tarea como se muestra en la Figura 39, en la cual se puede observar que uno de los conflictos hallados corresponde al hecho de que ubica el ‘cuadrado de’ como el exponente de la masa. Lo anterior, pone en evidencia que los estudiantes aún tienen dificultades con la sintaxis del álgebra.

Tabla 41. Resumen de resultados Tarea 5.

Tarea 5:

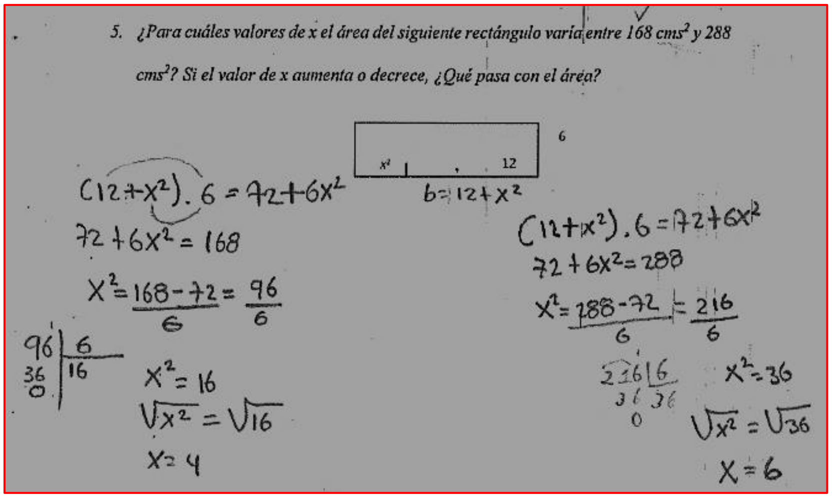
¿Para cuáles valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 cms^2 y 288 cms^2? Si el valor de x aumenta o decrece, ¿Qué pasa con el área***?***

	Resultados			
	$C_{1\ a\ 25}$	$C_{26\ a\ 50}$	$U_{1\ a\ 25}$	$U_{26\ a\ 50}$
Correcta	2	1	4	5
Parcialmente correcta	0	0	1	0
Incorrecta	14	13	10	16
Novedosa	0	0	0	1
No responde	9	11	10	3

En la Tabla 41 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 5. De acuerdo con esta clasificación, solo el 12 % de los participantes solucionaron la Tarea de manera correcta, los cuales analizaron que se debe de realizar operaciones en términos de x para llegar a obtener el área del rectángulo. Además, reconocieron que x representa una cantidad desconocida, variable y, por tanto, pertenece al intervalo **[4,6].** Cantidad que puede determinarse aplicando operaciones aritméticas o algebraicas.

Por otra parte, se observó que todos los participantes reconocen la ecuación para determinar el área de un triángulo ($\boldsymbol{A = b * h}$***).*** Sin embargo, solo la utilizan cuando tienen valores particulares-números-, pero no con operaciones algebraicas.

Sin embargo, inquieta el hecho que el 53% de los participantes solucionan la Tarea de manera incorrecta y que el 33% del resto de los participantes no contestaran. Con base en lo anterior, se muestran algunas soluciones manifestadas por los participantes.



5. ¿Para cuáles valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 cms^2 y 288 cms^2? Si el valor de x aumenta o decrece, ¿Qué pasa con el área?

$(12+x^2).6 = 72+6x^2$

$72+6x^2 = 168$

$x^2 = \frac{168-72}{6} = \frac{96}{6}$

$x^2 = 16$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$

$x = 4$

$(12+x^2).6 = 72+6x^2$

$72+6x^2 = 288$

$x^2 = \frac{288-72}{6} = \frac{216}{6}$

$x^2 = 36$

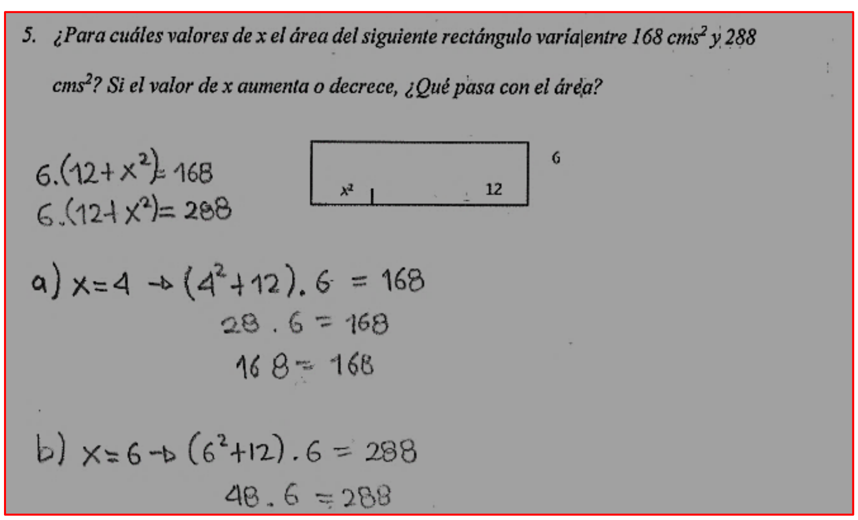
$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$

$x = 6$

Figura 40. Respuesta estudiante C17.

En la Figura 40, se muestra la solución planteada por el estudiante C_{17} a la Tarea 5, donde reconoce que debe hallar un valor desconocido y que está representado por la letra x. Además, reconoce que 168 y 288 representa los valores mínimo y máximo, respectivamente, del área del rectángulo. Sin embargo, utiliza el signo igual para determinar valores particulares y no hace uso de la condición '*para cuales valores'* planteada en la Tarea.

La anterior solución, también fue realizada por otros estudiantes tanto de undécimo grado como como de primer semestre de universidad. Ejemplo de esto, se observar en la Figura 41 donde se observa que el estudiante C_{31} realiza operaciones similares a las analizadas anteriormente.



5. ¿Para cuáles valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 cms^2 y 288 cms^2? Si el valor de x aumenta o decrece, ¿Qué pasa con el área?

$6.(12+x^2) = 168$

$6.(12+x^2) = 288$

a) $x=4 \rightarrow (4^2+12).6 = 168$

$28.6 = 168$

$168 = 168$

b) $x=6 \rightarrow (6^2+12).6 = 288$

$48.6 = 288$

Figura 41. Respuesta estudiante C31.

Tabla 42. Resumen de resultados Tarea 6.

Tarea 6:

Un hortelano (persona que cultiva y cuida huertas) vende el kilogramo de tomate a \$12.00 y le cuesta \$240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar \$ 4500.00 ?

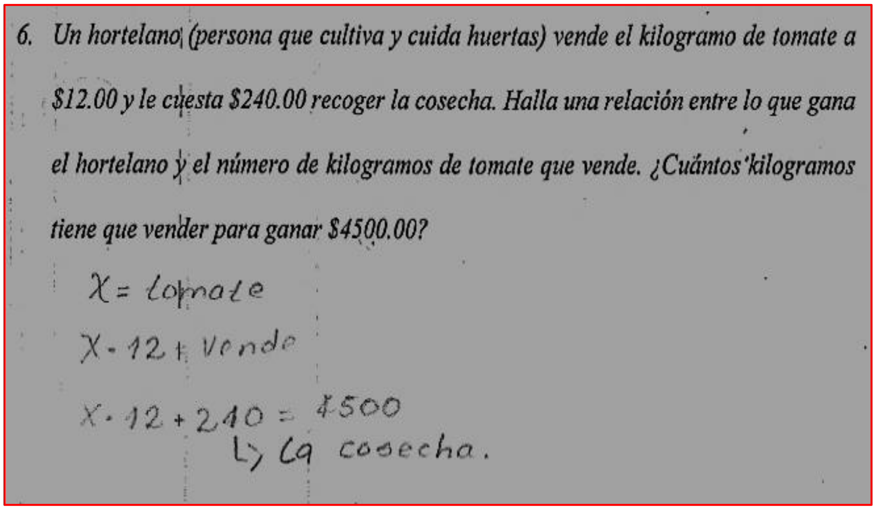
	Resultados			
	$C_{1\text{ a }25}$	$C_{26\text{ a }50}$	$U_{1\text{ a }25}$	$U_{26\text{ a }50}$
Correcta	3	2	5	4
Parcialmente correcta	0	0	0	2
Incorrecta	18	20	12	6
Novedosa	0	2	0	0
No responde	4	1	8	13

En la Tabla 42 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 6. De acuerdo con esta clasificación, el 84% de los estudiantes no da la soluciona de acuerdo con lo planteado en la descripción de la Tarea dado que no identifican la relación que existe entre el valor del kilogramo de tomate, lo que cuesta recoger la cosecha y la ganancia obtenida.

Por otra parte, reconocieron que en la Tarea existe un elemento desconocido el cual se debe determinar a partir de operaciones matemáticas, utilizaron el signo igual como un signo que permite vincular las magnitudes de cantidad, costo e inversión con las ganancias, sin embargo, de las operaciones matemáticas se observó que la gran mayoría de los estudiantes optan por utilizar las relacionadas con lo aritmético y dejan de lado las que están relacionadas con lo algebraico.

Tampoco se evidenció por parte de los estudiantes soluciones que estén relacionadas con el uso de funciones.

Con base en lo anterior, se muestran algunas soluciones manifestadas por los participantes



6. Un hortelano (persona que cultiva y cuida huertas) vende el kilogramo de tomate a $12.00 y le cuesta $240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar $4500.00?

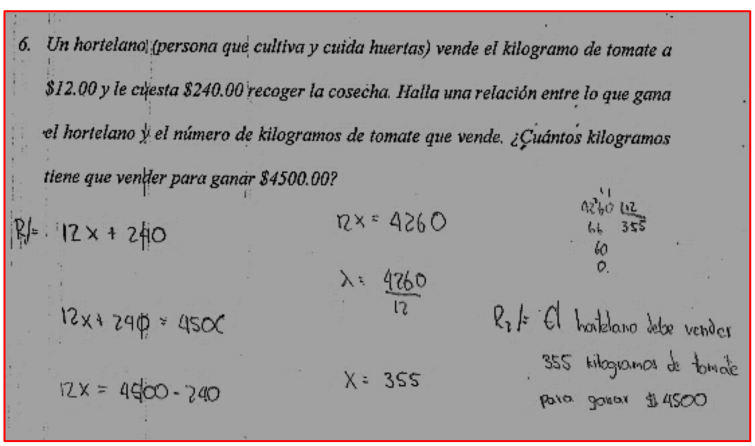
X = tomate

X · 12 + vende

X · 12 + 240 = 4500
↳ la cosecha.

Figura 42. Respuesta estudiante C5.

En la Figura 42 se observa la solución que el estudiante C_5 realiza de la Tarea, en la cual reconoce que $12.00; $ 240.00 y $4500.00 son valores determinados del problema, plantea que x es una incógnita, es decir, es un valor desconocido que depende de la cantidad de kilogramos de tomate vendidos, reconoce que existe una relación entre el costo total del proceso y la ganancia. Sin embargo, presenta dificultades para traducir el enunciado que, inicialmente está en lenguaje natural, a un enunciado en lenguaje algebraico, asocia la palabra ‘cuesta’ como el hecho que se tiene que adicionar lo que cuesta recoger la cosecha y no como su inverso aditivo. Finalmente, la Tarea solo queda planteada sin dar una solución.



6. Un hortelano (persona que cultiva y cuida huertas) vende el kilogramo de tomate a $12.00 y le cuesta $240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar $4500.00?

R/= 12x + 240

12x + 240 = 4500

12x = 4500 - 240

12x = 4260

x = 4260/12

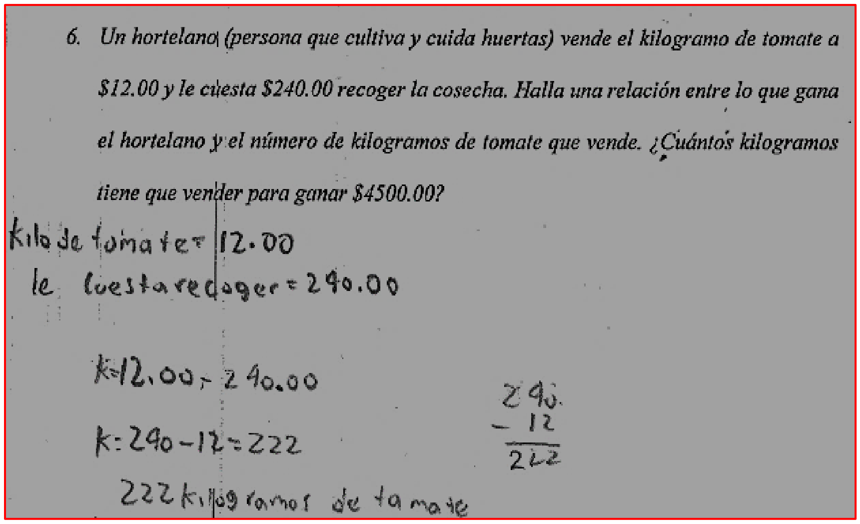
x = 355

4260 | 12
66 355
60
0

R/= El hortelano debe vender 355 kilogramos de tomate para ganar $ 4500

Figura 43. Respuesta estudiante C28.

Otro ejemplo se puede observar en la solución planteada por el estudiante C_{28} en la Figura 43, donde nuevamente se puede observar que no asocia correctamente la palabra ‘cuesta’ y realiza operaciones que lo conducen a una solución, la cual no verifica de acuerdo con las condiciones dadas iniciales en el problema. Además, se puede observar el uso de la letra x como objeto e incógnita, la cual es utilizada como abreviatura y para determinar una cantidad desconocida (Socas, 2016).


6. *Un hortelano (persona que cultiva y cuida huertas) vende el kilogramo de tomate a $12.00 y le cuesta $240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar $4500.00?*

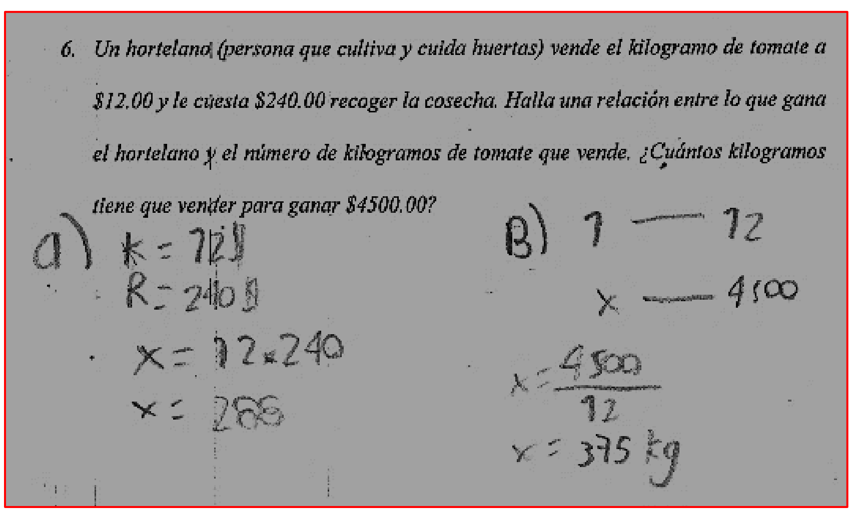
Kilo de tomate = 12.00
le cuesta recoger = 240.00

k=12.00, 240.00
k: 240 − 12 = 222
222 kilogramos de tomate

240
− 12
222

Figura 44. Respuesta estudiante U1.

De igual forma, la solución planteada por los estudiantes U_1 y U_{43} en las Figuras 44 y 45, respectivamente, ponen de manifiesto que los estudiantes omiten información cuando no la relacionan con las condiciones iniciales, no verifican si la solución determinada cumple con las relaciones de equivalencia que están implícitamente en el enunciado, con lo cual dan soluciones incorrectas.


6. *Un hortelano (persona que cultiva y cuida huertas) vende el kilogramo de tomate a $12.00 y le cuesta $240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar $4500.00?*

a) k = 12$
R = 240$
x = 12+240
x = 288

B) 1 — 12
x — 4500
x = 4500 / 12
x = 375 kg

Figura 45. Respuesta estudiante U43.

Tabla 43. Resumen de resultados Tarea 7.

Tarea 7:

Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitad de su largo, para imprimir en cada página una superficie de $\mathbf{300\ cm^2}$. Si las márgenes son de $\mathbf{2\ cm}$ arriba y abajo, y $\mathbf{2.5cm}$ en cada lado, determina ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja?

Resultados				
	$C_{1\ a\ 25}$	$C_{26\ a\ 50}$	$U_{1\ a\ 25}$	$U_{26\ a\ 50}$
Correcta	0	0	0	0
Parcialmente correcta	0	0	0	0
Incorrecta	6	3	12	15
Novedosa	0	0	0	0
No responde	19	22	13	10

En la Tabla 43 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 7. De acuerdo con esta clasificación, solo el 34% de los participantes plantearon una posible solución con las condiciones iniciales del problema, identificaron tanto los elementos lingüísticos como conceptuales, pero al momento de plantear una expresión matemática que los faculte para resolver la Tarea no presentan un procedimiento que permita dar con la solución. Por lo anterior, dichas soluciones fueron categorizadas como incorrectas dado que se presenta una disparidad entre los significados que presentan los estudiantes (significado personal) frente a los que fueron propuesto en la descripción de la Tarea (significados institucionales). Lo anterior, se observa en la Figura 46 donde el estudiante U_{17} hace uso de pictogramas para sintetizar la información presentada, ubica valores de manera incorrecta en las dimensiones de la hoja sin tener presente que son las márgenes y, por tanto, no considera que el área presenta corresponde a la región delimitada por las márgenes.

Finalmente, en el procedimiento se observa la omisión de trabajar con los elementos del lenguaje algebraico, es decir, no se observa el uso de la letra como incógnita.

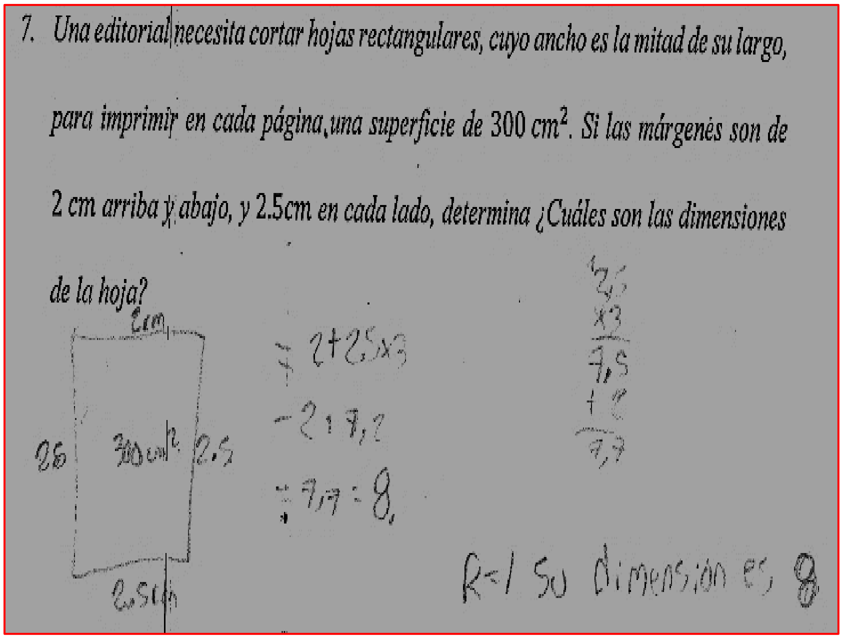


Figura 46. Respuesta estudiante U17.

Otro ejemplo de una solución categorizada como incorrecta se puede observar en la Figura 47, en la cual el estudiante U_{28} manifiesta una solución sin tener presente los elementos lingüísticos, conceptuales y procedimentales del área. Asimismo, se puede observar que el estudiante ignora la pregunta presente al final de la Tarea y da una solución alejado de lo pretendido.

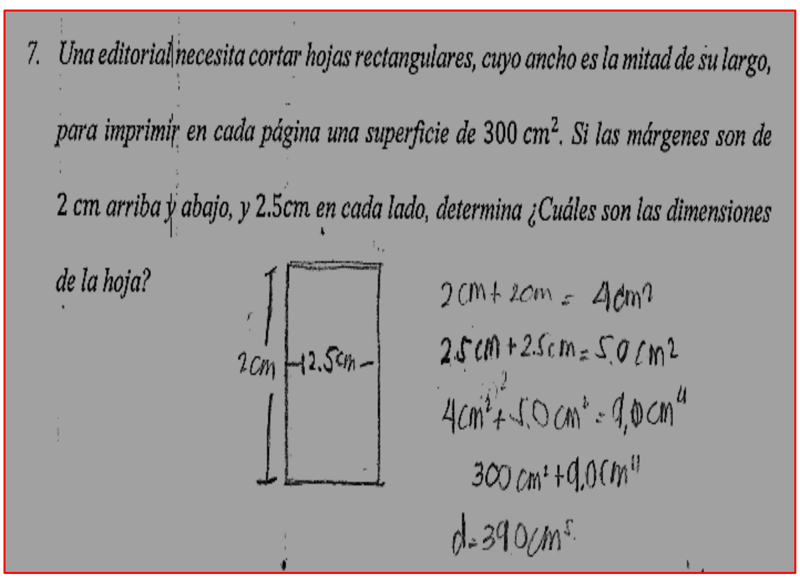


Figura 47. Respuesta estudiante U28.

Tabla 44. Resumen de resultados Tarea 8.

Tarea 8:

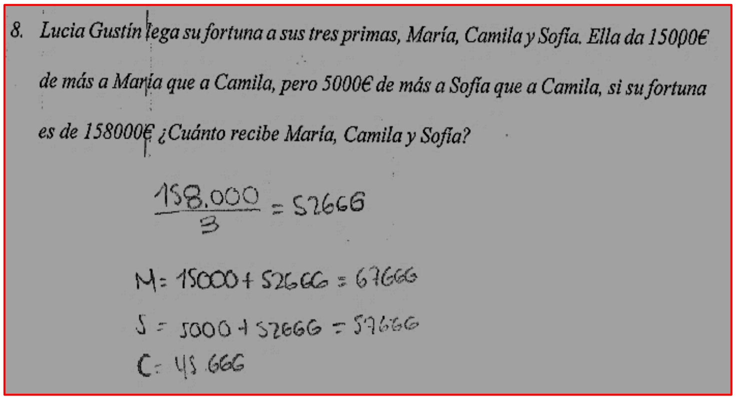
Lucia Gustín lega su fortuna a sus tres primas, María, Camila y Sofía. Ella da 15000€ de más a María que a Camila, pero 5000€ de más a Sofía que a Camila, si su fortuna es de 158000€ ¿Cuánto recibe María, Camila y Sofía?

Resultados				
	$C_{1\text{ a }25}$	$C_{26\text{ a }50}$	$U_{1\text{ a }25}$	$U_{26\text{ a }50}$
Correcta	4	2	1	0
Parcialmente correcta	7	1	9	0
Incorrecta	12	8	3	4
Novedosa	0	0	0	0
No responde	2	14	12	21

En la Tabla 44 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 8. De acuerdo con esta clasificación, se puede observar que de los participantes solo el 7% de ellos solucionaron la Tarea de manera correcta y, por tanto, no presentan disparidad entre sus significados con los significados pretendidos. No obstante, de la misma tabla también se puede observar que el 49% de los participantes dejaron la Tarea sin responder y que el 27% contestaron de manera incorrecta.

Una solución categorizada como incorrecta se presenta en la Figura 48 donde el estudiante U_3 considera que la fortuna debe ser repartida mediante un reparto equivalente, no tiene presente el uso del lenguaje algebraico que le permita traducir el enunciado a un lenguaje matemático y, por tanto, no presenta una solución que coincida con la que fue propuesta en la descripción de la Tarea.

Con base en lo anterior, el estudiante hace uso de la letra como objeto al momento de abreviar el nombre de cada uno de los sujetos de la Tarea y asumiendo que tienen un valor propio.


8. Lucia Gustín lega su fortuna a sus tres primas, María, Camila y Sofía. Ella da 15000€ de más a María que a Camila, pero 5000€ de más a Sofía que a Camila, si su fortuna es de 158000€ ¿Cuánto recibe María, Camila y Sofía?

$\frac{158.000}{3} = 52666$

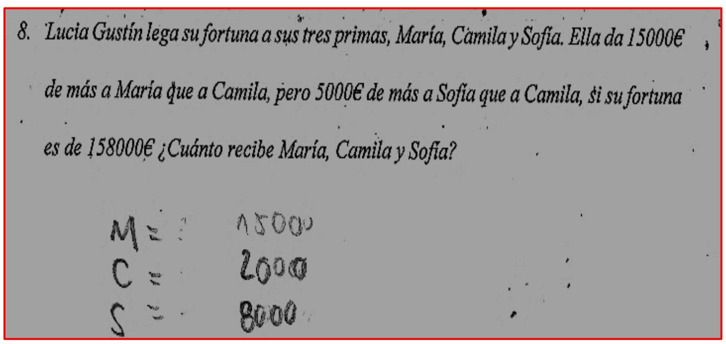
M= 15000 + 52666 = 67666

S = 5000 + 52666 = 57666

C= 45 666

Figura 48. Respuesta estudiante U3.

Otro ejemplo de lo anterior se puede observar en la Figura 49 donde el estudiante U_{30} parametriza los nombres de María, Camila y Sofía con las letras M, C, S, respectivamente y les asigna valores particulares. Lo anterior, pone en evidencia que el estudiante hace uso de la letra tanto para referirse a un objeto como para atribuirle valores numéricos.


8. Lucia Gustín lega su fortuna a sus tres primas, María, Camila y Sofía. Ella da 15000€ de más a María que a Camila, pero 5000€ de más a Sofía que a Camila, si su fortuna es de 158000€ ¿Cuánto recibe María, Camila y Sofía?

M = 15000

C = 2000

S = 8000

Figura 49. Respuesta estudiante U30.

Tabla 45. Resumen de resultados Tarea 9.

Tarea 9:

Observa detenidamente la siguiente suma y determina el dígito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

Digito: Se llama digito a cada uno de los siguientes números:

$$\begin{array}{cr} & ABC \\ & ABC \\ + & ABC \\ \hline & 2ACC \end{array}$$

a) ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C?

b) ¿Cómo saber que son correctos?

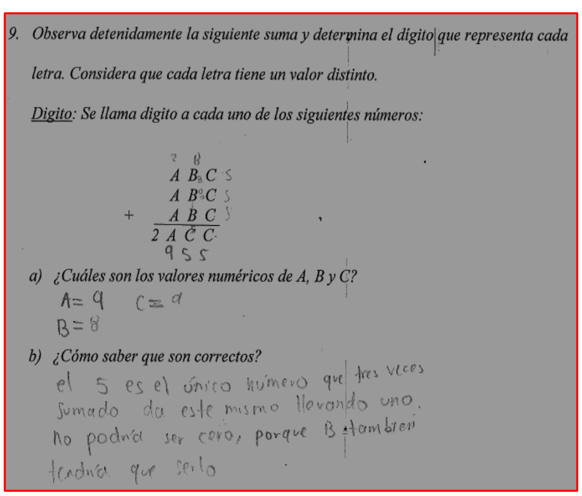
Resultados				
	$C_{1\ a\ 25}$	$C_{26\ a\ 50}$	$U_{1\ a\ 25}$	$U_{26\ a\ 50}$
Correcta	4	2	5	8
Parcialmente correcta	12	16	17	14
Incorrecta	2	3	3	3
Novedosa	1	0	0	0
No responde	6	4	0	0

En la Tabla 45 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 9. De acuerdo con esta clasificación, se observa que el 78 % de los estudiantes que participaron en la solución del cuestionario contestaron entre correcta y parcialmente correcta a la Tarea, en la cual debían determinar el valor numérico que representaba cada letra.

Inicialmente, se observó que los estudiantes hicieron uso de la información planteada considerando que cada una de las letras representa un valor determinado y diferente a las demás, que están familiarizados con las operaciones básica de la aritmética y que usan la de noción de suma. Sin embargo, cada uno de los valores de las letras fueron determinadas por ensayo y error, donde se consideraba que ‘C’ solo podía tener el valor numérico de ‘5’.

En esta Tarea no se encontró procedimientos algebraicos para determinar la solución, es decir, no se encontró una expresión polinómica que muestre que la suma se puede transformar en una ecuación lineal.

Con base en lo anterior, se muestran algunas soluciones manifestadas por los participantes


9. *Observa detenidamente la siguiente suma y determina el dígito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.*

Digito: Se llama digito a cada uno de los siguientes números:

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ A\ B\ C \\ +\ A\ B\ C \\ \hline 2\ A\ C\ C \\ 9\ 5\ 5 \end{array}$$

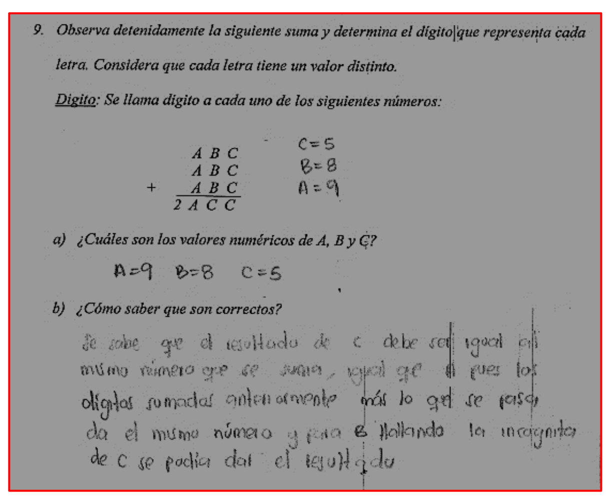
a) *¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C?*

A= 9 C= 9
B= 8

b) *¿Cómo saber que son correctos?*

el 5 es el único número que tres veces sumado da este mismo llevando uno. no podría ser cero, porque B también tendría que serlo

Figura 50. Respuesta estudiante C30.


9. *Observa detenidamente la siguiente suma y determina el dígito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.*

Digito: Se llama digito a cada uno de los siguientes números:

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ A\ B\ C \\ +\ A\ B\ C \\ \hline 2\ A\ C\ C \end{array}$$

C=5
B=8
A=9

a) *¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C?*

A=9 B=8 C=5

b) *¿Cómo saber que son correctos?*

Se sabe que el resultado de C debe ser igual al mismo número que se suma, igual que el pues los dígitos sumados anteriormente más lo que se pasó da el mismo número y para B hallando la incógnita de C se podía dar el resultado

Figura 51. Respuesta estudiante U8.

Tabla 46. Resumen de resultados Tarea 10.

Tarea 10:

En una caja hay arañas y escarabajos; hay 8 animales en total. Arturo cuenta el número total de patas y resulta que son 54. Si sabemos que un escarabajo tiene 6 patas y una araña tiene 8, ¿cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja?

Resultados				
	$C_{1\text{ a }25}$	$C_{26\text{ a }50}$	$U_{1\text{ a }25}$	$U_{26\text{ a }50}$
Correcta	4	2	6	5
Parcialmente correcta	0	0	0	0
Incorrecta	0	3	7	8
Novedosa	0	0	0	0
No responde	21	20	12	12

En la Tabla 46 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 10. De acuerdo con esta clasificación, inquieta el hecho que el 65% de los participantes no respondiera y que solamente el 12% la determinara correctamente. Determinación que se realizó por medio de ensayo y error, con lo cual no utilizan conceptos matemáticos que están presentes en la Tarea.

En la Figura 53 se observa que el estudiante U_6 hace uso de pictogramas para determinar la solución de la Tarea. Si bien es clasificada como correcta, pone en evidencia que cuando los estudiantes intentan resolver Tareas algebraicas, manifiestan cierto desconocimiento sobre el uso y significado del lenguaje algebraico y, por tanto, recurren a estrategias que utilizan conocimientos numéricos, pero no las ventajas del uso del lenguaje algebraico. Sin embargo, se aprecia que el estudiante U_6 utiliza una notación que le permite 'codificar' la información al usar dibujos que incluye la información numérica y utiliza una sintaxis propia, cuando multiplica una figura, que representa una araña con seis patas, por el número cinco, y obtiene 30 patas. Parece que el estudiante utiliza su propia versión del álgebra, que no coincide con la versión institucional.

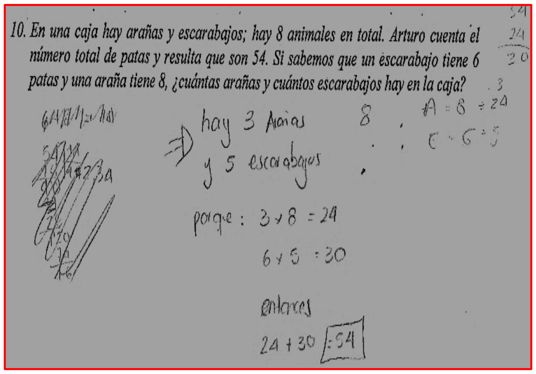


Figura 52. Respuesta estudiante C41.

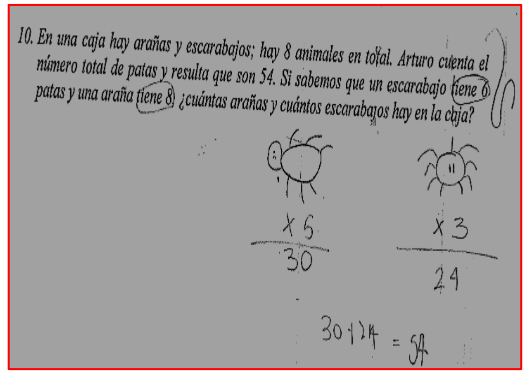


Figura 53. Respuesta estudiante U6.

Tabla 47. Resumen de resultados Tarea 11.

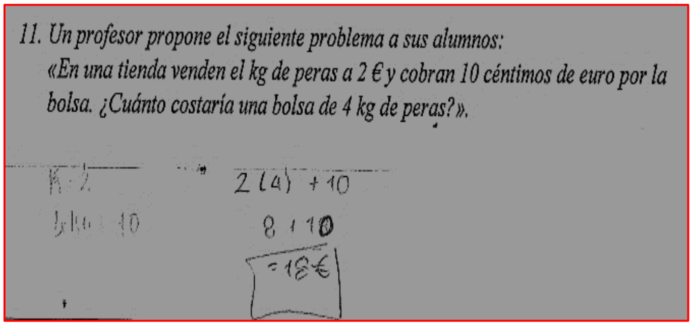
Tarea 11:

Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:
«En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa. ¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?».

Resultados				
	$C_{1\ a\ 25}$	$C_{26\ a\ 50}$	$U_{1\ a\ 25}$	$U_{26\ a\ 50}$
Correcta	2	7	9	3
Parcialmente correcta	0	0	0	0
Incorrecta	8	14	9	11
Novedosa	0	0	0	0
No responde	15	4	7	11

En la Tabla 47 se muestra la distribución de las respuestas manifestadas por los estudiantes tanto de undécimo grado como de primer semestre de universidad de la Tarea 11. De acuerdo con esta clasificación, el 42% de las soluciones manifestadas por los estudiantes fueron categorizadas como incorrectas dado que al momento de contrastarlas con la solución planteada en la descripción de la Tarea se encontró que a los participantes se les dificulta resolver tareas cuando no son propias de su contexto, como en el caso de cuánto equivale un céntimo. También se observó un mínimo conocimiento y uso de la letra como variable puesto que reconoce los conceptos de variable dependiente y variable independiente. De manera similar, no se encontró que los estudiantes utilizaran la noción función lineal a trozos de la forma $y = 2x + 0{,}1$.

Con base en lo anterior, en la Figura 54 se observa que el estudiante C_{36} no plantea una función en donde se haga uso de la letra variables, además, realiza operaciones de adición sin realizar la equivalencia de un céntimo a euro y opera sobre ellas.

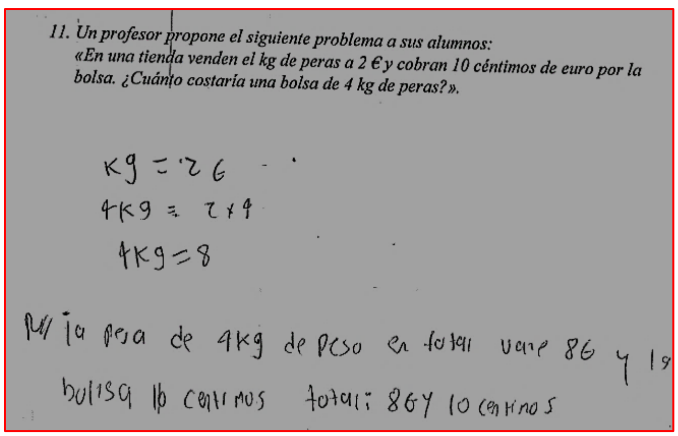


11. Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:
«En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa. ¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?».

2(4) + 10
8 + 10
=18€

Figura 54. Respuesta estudiante C36

Finalmente, en la Figura 55 se presenta la solución manifestada por el estudiante U_{34}, la cual ha sido categorizada como correcta, pero llama la atención que en su procedimiento prevalece el uso de elementos aritméticos por encima de los algebraicos.



11. Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:
«En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa. ¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?».

Kg = 2€
4Kg = 2×4
4Kg = 8

R/ la pera de 4kg de peso en total vale 8€ y la bulisa 10 centimos total: 8€ y 10 centimos

Figura 55. Respuesta estudiante U34

4. RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados obtenidos luego de aplicar el cuestionario tanto a los estudiantes de undécimo grado como a los estudiantes de primer semestre de universidad, el cual tuvo como objetivo analizar los conflictos de significado que manifestaron en la resolución de tareas algebraicas. Para su elaboración, se contó con 11 tareas categorizadas en tareas de variables, de palabra, de lenguaje, de traducción, de ecuaciones y de equivalencias, y para su aplicación, se contó con la participación de dos instituciones de secundaria y de dos instituciones universitarias donde de cada una se contó con la participación de 25 estudiantes para un total de 100 participantes en la investigación.

Aspectos como la edad, el género, el estrato socioeconómico de las instituciones o de los estudiantes, no fueron considerados a lo largo de la presente investigación, pero se reconoce que son aspectos que interfieren en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Se presenta inicialmente el análisis realizado a las respuestas manifestadas por los estudiantes de las dos instituciones de educación secundaria, en el cual se han sumado la cantidad de respuestas correctas, parcialmente correctas, novedosas, incorrectas y no responden.

Se les aplicó las 11 tareas del cuestionario a 50 estudiantes entre las dos instituciones dando como resultado un total de 550 respuestas. De dicha aplicación, se observó que solo el 13% de las respuestas corresponde a correctamente, el 11% a parcialmente correctas, el 40% a incorrecta, el 2% a novedosa y, finalmente, el 33% a no responde. Por tanto, preocupa el hecho que entre las respuestas incorrectas y no responde se tenga un 73%.

Con base en lo anterior, se observó que las tareas de mayor cantidad de respuestas correctas fueron aquellas donde el estudiante debía evaluar la letra de acuerdo a las condiciones iniciales y, por tanto, las tareas donde se requería el uso del lenguaje algebraico presentara una cantidad mínimo o nula de respuestas correctas. Ejemplo de esto, se observó en la Tarea 7 donde ninguno de los estudiantes de las dos instituciones de educación secundaria presentó respuestas correctas.

Lo anterior, pone en evidencia que estudiantes presentan dificultades al operar con los distintos significados que puede tener las letras en álgebra y que solo se limitan a usarla en condiciones particulares. Además, se observó el desconocimiento del lenguaje algebraico dado que en las tareas de traducción presentaron dificultades para plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones que les permitiera dar con la solución.

Asimismo, algunas de las dificultades que presentan los estudiantes de educación secundaria no corresponden al grado en que se ubican, es decir, las dificultades que presentan corresponden de otros grados académicos y han ido pasando de nivel en nivel hasta llegar a un ámbito universitario, colocando en riesgo su rendimiento académico.

De manera similar, se realizó el análisis de las respuestas manifestadas por los estudiantes de primer semestre de universidad, el cual arrojó que el 21% corresponde a correctas, el 13% a parcialmente incorrectas, el 35% a respuestas incorrectas, el 2% a respuestas novedosas y, finalmente, el 31% a de no responde. Al realizar la suma de los porcentajes entre las respuestas incorrectas y las que no responden, se obtuvo un total del 65%, porcentaje que es preocupante.

Al realizar el análisis general del cuestionario entre las cuatro instituciones participantes, se observó que solamente el 17% de las tareas corresponde a correctas, 12% a parcialmente correctas, 37% a incorrectas, 2% a novedosas y, por último, 32% a no responde. Asimismo, los resultados mostraron que el porcentaje de respuestas correctas es mayor en las universidades participantes dando como resultado que estos estudiantes fueron más efectivos al resolver las tareas algebraicas.

5. CONCLUSIONES

Después de realizar el análisis del cuestionario e identificar los conflictos de significado que manifiestan los estudiantes cuando resuelven tareas algebraicas, se presentan las siguientes conclusiones.

De acuerdo con el EOS, los conflictos de significado que presentaron los estudiantes al momento de resolver cada una de las Tareas del cuestionario se pueden analizar a partir de dos perspectivas, a saber:

La primera está relacionada con los conflictos epistémicos que surgen de la utilización de documentos guía utilizados para la enseñanza del lenguaje algebraico, los cuales presentan diversos conceptos de manera generalizada y sin considerar el contexto en el cual se va a aplicar. En este tipo de conflictos no interviene el sujeto sino la información que a él se le presenta, la cual en ocasiones no es propia de su contexto, los conceptos se presentan de manera teórica dejando la aplicación para el final.

El segundo está relacionado con los conflictos cognitivos, propios del sujeto, en donde se analiza su comprensión (situacional, conceptual y proposicional). Para esto, se hizo uso del cuestionario y se observó que los estudiantes presentaron conflictos de significado cognitivo debido a que los objetos matemáticos, los cuales están inmersos en una práctica matemática, de tipo algebraica, en donde también intervienen docentes (representante de la Institución) no han sido comprendidos y, por tanto, no son usados de manera competente para resolver una determinada tarea algebraica.

Con base en lo anterior, tanto los estudiantes del Colegio Santo Domingo de Guzmán como de la Institución Educativa José Antonio Galán de undécimo grado, presentaron dificultades en la comprensión y uso del lenguaje algebraico dado que, al momento de resolver las tareas presentadas del cuestionario, prefirieron utilizar el lenguaje aritmético como conocimiento general dejando a un lado el lenguaje algebraico. Situación que fue similar para los estudiantes de primer semestre tanto de la Universidad de Antioquia como de la universidad Uniminuto, en la cual se esperaría que dichos estudiantes utilizaran más el lenguaje algebraico para solucionar cada una de las tareas propuestas en el cuestionario, pero se evidenció que también recurrieron a utilizar el lenguaje aritmético en cuanto no se evidenció en las soluciones manifestadas el uso de los elementos lingüísticos, conceptuales y procedimentales del lenguaje algebraico.

Otro de las situaciones que se pudo observar de las soluciones manifestadas por los estudiantes está relacionada con el conflicto de significado entre las nociones de incógnita y ecuación, las cuales interfieren en el reconocimiento de los objetos de variable y función.

Es así como el cuestionario desarrollado a partir de Enfoque Ontosemiótico proporcionó elementos que permitieron analizar los conflictos de significado, los cuales dejan en evidencia que es necesario en la formación de los estudiantes mostrar las diferencias entre incógnita, variable, ecuación y función a fin de capacitarlos para la resolución de tareas algebraicas que los faculte para afrontar situaciones simulares en el campo universitario. Por tanto, es importante que a partir de los primeros años de educación a los estudiantes se les instruya el lenguaje algebraico y reconozcan sus propiedades.

Por último, es importante y urgente presentar las conclusiones a las que se llegaron por medio de la implementación del cuestionario a cada una de las instituciones participantes, puesto que permitirá generar estrategias a un futuro y que ayudarán a los estudiantes a mejorar la comprensión y uso de los objetos que intervienen en la práctica matemática.

6. REFERENCIAS

Abrate, R., Font, V., & Pochulu, M. (2008). Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones. Proyecciones, 6(2), 49-56.

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. *Villa María: Universidad Nacional de Villa María*.

Aké, L., Castro, W. F., & Godino, J. D. (2011). Conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental: un estudio exploratorio.

Aponte Torres, Juan de Jesús, & González Fiagá, Sandra Biviana, & Rincón Márquez, Hélver (2012). Búsqueda de soluciones a la deserción y la mortalidad en el área de matemáticas en el Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Santo Tomás, Seccional Tunja. *Revista Interamericana de Investigación, Educación y Pedagogía*, *5*(1), undefined-undefined. [fecha de Consulta 10 de Noviembre de 2019]. ISSN: 1657-107X. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=5610/561058724003

Arroyo, G. C. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, *28*(2), 15-44.

Arteaga, J., & Guzmán, J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas. *Educación matemática*, *17*(1), 33-53.

Ayala, R. (2008). La metodología fenomenológico-hermenéutica de m. Van manen en el campo de la investigación educativa. Posibilidades y primeras experiencias.

Aznar, A., Baccelli, S., Figueroa, S., Distéfano, M. L., & Anchorena, S. (2016). Las Funciones Semióticas como instrumento de diagnóstico y abordaje de errores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 670-690.

Barnacle, R. (2004). Reflection on lived experience in educational research. *Educational philosophy and theory*, *36*(1), 57-67.

Blanco, L. J., Janeth, N., & Cárdenas, A. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currí- The problem solving as content in the Mathematics Cu-rriculum of Elementary and Secondary education, *32*(1), 137-156.

Briceño, M. T. (2009). El uso del error en los ambientes de aprendizaje: una visión transdisciplinaria. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales*, (14), 9-28.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912 (Paperback: $24.50). Web site: www. heinemann. com..

Castellanos, M., & Obando, J. A. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico.

Castro, W. F., Martínez-Escobar, J. D., & Pino-Fan, L. R. (2017). Niveles de Algebrización de la Actividad Matemática Escolar: Análisis de Libros de Texto y Dificultades de los Estudiantes. *Journal of Research in Mathematics Education*, *6*(2), 164. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.1981

Castro-Rodríguez, E., Lupiáñez, J. L., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico Romero, L., & Díez Lozano, Á. (2015). Matemáticas escolares y cambio curricular (1945-2014). El caso de los números racionales.

Cerdán, F. (2008). Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos. *Valencia: Servei de Publicacions*.

Díaz, C. (2008). Modelo Conceptual para la Deserción Estudiantil Universitaria Chilena. *Estudios Pedagógicos. Universidad Austral de Chile, XXXIV, núm,* 65-86. https://doi.org/10.4067/S0718-07052008000200004

Duval, R. (2016). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba.

Elena Castro-Rodríguez, José L. Lupiáñez, Juan F. Ruiz- Hidalgo, L. R. y Á. D. (2015). Matemáticas Escolares Y Cambio Curricular (1945-2014). El Caso De Los Números Racionales. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, *19*(3).

Escalante, J., & Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable : un estudio con estudiantes universitarios. *Educación matemática*, *24*(1), 107-132.

Figueroa, J., & Díaz, D. S. (2011). Dificultades y errores que presentan los estudiantes de los grados décimo y undécimo de los colegios de Cali al resolver un problema de olimpiadas. *Scientia et technica*, *3*(49), 174-179.

Freiman, V., & Lee, L. (2004). Tracking Primary Students’ Understanding of Equal Sign. In M. Hoines, & A. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 415-422). Bergen: PME.

Fuster Guillen, Doris Elida. (2019). Investigación cualitativa: Método fenomenológico hermenéutico. *Propósitos y Representaciones*, *7*(1), 201 229. https://dx.doi.org/10.20511/pyr2019.v7n1.267

García, M. L., & Benítez, A. A. (2013). Diseño e Implementación de Tareas para Apoyar el Aprendizaje de las Matemáticas. *Formación universitaria*, *6*(1), 13-20.

Gavilán Bouzas, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar:¿ puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo?. *Revista de Investigación en la Escuela, 73, 95-108.*

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-335.

Godino, J. D., Batanero, C., & Vicenç, F. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127-135.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores, *11*, 1-15.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un Marco Teórico Integrativo para la Educación Matemática: El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS).

Godino, J. D., Castro, W. F., Aké, L. P., & Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *26*(42 B), 483-511. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005.

Godino, J. D., Ake, L. P., Contreras, A., Diaz, C., Estepa, A., Blanco, T. E., ... & Wilhelmi, M. R. (2015). Designing a questionnaire for assessing the didactic-mathematical knowledge on elementary algebraic reasoning. *Ensenanza de las ciencias*, *33*(1), 127-150.

Godino, J. D., & Font, V. (2002). Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas. *Anexo al artículo, Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática". Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*, 1-9.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas * Onto-Semiotic Approach to Mathematics Teacher's Knowledge and Competences. *Bolema Rio Claro*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. *ICME 11, Topic Study Group 27, Mathematical Knowledge for Teaching*.

Gusmão, T. C. R. S., Cajaraville, J. A., Font, V., & Godino, J. D. (2014). El Caso Victor: Dificultades metacognitivas en la resolución de problema. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *28*(48), 255-275. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48al3

Kilpatrick, J. (2010). *Educación Matemática*. Recuperado de papers3://publication/uuid/7CAE486A-932C-4F0E-BC11-3982B0D985F7.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics teaching in the Middle School*, *13*(9), 514.

Kuchemann, D. (1980). Children's Difficulties with Single Reflections and Rotations. *Mathematics in School*, *9*(2), 12-13.

Londoño, L. (2013). Factores de riesgo presentes en la deserción estudiantil en la Corporación Universitaria Lasallista. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (38), 183-194.

López, A. S., & García, C. M. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas, *21*, 79-115.

González, M. J., Gómez, P., & Restrepo, Á. M. (2015). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de educación*, *370*, 71-95.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Irice*, *13*, 1-27.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio

Osorio, A. M., Bolancé, C., & Castillo-Caicedo, M. (2012). Deserción y graduación estudiantil universitaria: una aplicación de los modelos de supervivencia. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *3*(6), 31-57. Recuperado de http://ries.universia.net/index.php/ries/article/view/97%5Cnhttp://ries.universia.net/index.php/ries/article/viewArticle/97

Palarea, M., & Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *SUMA*, *16*, 91-98.

Patiño, L., & Cardona, A. (2012). Revisión de algunos estudios sobre la deserción estudiantil universitaria en Colombia y latinoámerica. *Revista Theoria*, *21*(1), 9-20.

Peral, L. M., & Gómez, J. L. D. (2003). Concepto de Variable: Dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos º*, *11*.

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, *35*(73), 169-194.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (2ª parte) Desenho e aplicação de um instrumento para explorar a faceta epistêmica do conhecim. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*, 1-47.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-Khwârismî restaurado. *Investigaciones en matemática educativa II.*, 109-131. Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles/article7.htm%5Cnhttp://files/74/Componentes_historia_algebra.pdf

Rico, L. (1995). Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación matemática: errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, , evaluación e historia.*, 69-108. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/486/

Rico, Luis. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 15-38. https://doi.org/10.1016/j.trc.2016.03.006

Ruano, R. M., Socas, M. M., & Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra.

Sánchez Gamboa, S. (1998). Fundamentos para la investigación educativa: presupuestos epistemológicos que orientan al investigador.

Sanjosé López, V., Valenzuela, T., Fortes del Valle, M. del C., & Solaz Portolés, J. J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, *6*(3), 538. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2470916&info=resumen&idioma=SPA

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria.(Cap. V, pp. 125-154). *Rico, L. y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori*.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 5-34.

Socas, M. M., Hernández, J., & Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de matemáticas de estudiantes para profesor de educación primaria y secundaria. *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014*, *2014*, 145-154.

Socas, M. M., Ruano, R. M., & Domínguez, J. H. (2016). Análisis Didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (9).

Sterling López, A. L. (2017). *Dificultades manifestadas por estudiantes de 9° grado para representar algebraicamente problemas de palabras* (Doctoral dissertation).

Suárez, N., Núñez, J. C., Vallejo, G., Cerezo, R., Regueiro, B., & Rosário, P. (2014). Tareas para casa, rendimiento académico e implicación de padres y profesores. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, *7*(1), 417-423.

Suárez, J. G., Alex, I. S., Luis, J., & Gómez, L. (2014). El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas Use of Letters as a Source of Errors for University Students in Solving Algebraic Tasks, 1545-1566.

Suárez, J. G. (2016). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada)

Ursini, S., & Trigueros, M. (2006). ¿ Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas ?.

Vandenberg, R. J., & Lance, C. E. (1992). Examining the causal order of job satisfaction and organizational commitment. *Journal of management*, *18*(1), 153-167.

Vélez, A., & López, D. (2009). Estrategias para vencer la deserción universitaria. *Educación y Educadores*, *7*(0), 177-203. Recuperado de http://educacionyeducadores.unisabana.edu.co/index.php/eye/article/view/555

ANEXOS

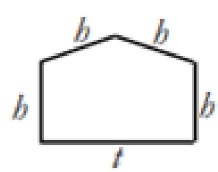
Anexo 1. Prueba Piloto

1. *Realiza las siguientes transformaciones*
   d. *Si* $a = 2b$, *¿en qué se transforma* $5a + 3$*?*
   e. *Si* $a = b + 3$, *¿en qué se transforma* $5a + 3b$*?*
   f. *Si* $a = 2b$, *¿en qué se transforma* $(a + 3)(3 - a)$*?*

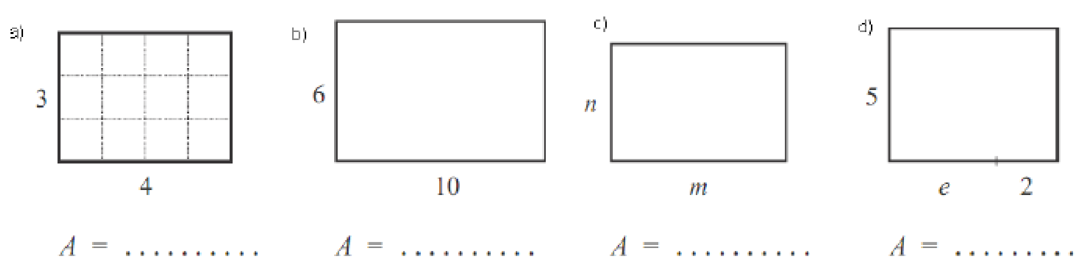
2. Completa la siguiente tabla

a	$(3 + a)$	a	$(3 - a)$	$(3 + a)\,(3 - a)$
4				
$p + 2$				

3. *Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante* 40 *días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar* 4 *euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró* 60 *días. ¿cuánto dinero recibió?*
4. *El perímetro de un poligono es igual a la suma de las longitudes de todos suslados. Calcule el perímetro de la siguiente figura.*



5. ¿Cuál es el área de las siguientes figuras?



6. Escribe la siguiente oración como una ecuación:

   "La energía E de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz v"

7. *¿para cuáles valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 y 288? Si el valor de x aumenta o decrece, ¿qué pasa con el área?*

8. *Un hortelano vende el kilogramo de tomate a $12.00 y le cuesta $240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar $4500.00?*

9. *Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitas de su largo, para imprimir en cada página una superficie de* $300\ cm^2$. *Si las márgenes son de 2 cm arriba y abajo, y 2.5 en cada lado, determina ¿cuáles son las dimensiones de la hoja?*

10. *Lucia Gustín lega su fortuna a sus tres primas, María, Camila y Sofía. Ella da 15000€ de más a María que a Camila, pero 5000€ de más a Sofía que a Camila, si su fortuna es de 158000€ ¿Cuánto recibe María, Camila y Sofía?*

11. *Pedro tiene una cierta cantidad de dinero. María tiene cuatro veces más dinero que Pedro. Si Pedro ganara 18.00 euros más, entonces tendría la misma cantidad de dinero que María. ¿Puedes calcular cuánto dinero tiene en total Pedro? ¿Cuánto dinero tiene María?*

12. *Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el digito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.*

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ A\ B\ C \\ +\quad A\ B\ C \\ \hline 2\ A\ C\ C \end{array}$$

c) *¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C?*
d) *¿Cómo saber que son correctos?*

13. *En una caja hay arañas y escarabajos; hay 8 animales en total. Arturo cuenta el número total de patas y resulta que son 54. Si sabemos que un escarabajo tiene 6 patas y una araña tiene 8, ¿cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja?*

14. *El teatro Tepeyac tiene 100 asientos, repartidos en dos secciones (delantera y trasera). Para una función de teatro, el precio del boleto para un lugar en la sección delantera es de $8 mientras que el precio del boleto para un asiento de la sección trasera es de $6. Si se venden todos los boletos, el ingreso total es de $660. ¿Cuántos asientos delanteros y cuántos asientos traseros hay en el teatro Tepeyac?*
15. *Se reparten 78 dulces entre Edgar, Juan y Saúl. Juan recibe tres veces el número de dulces que Edgar y Saúl recibe dos dulces menos que Edgar. ¿Cuántos dulces recibe cada niño?*

16. *En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50m cada una. Con ellas van a confeccionar 20 trajes que necesitan 3m de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4m cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse?*

17. *Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.*

18. *Un alumno formuló la siguiente conjetura:*

    «Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número».

    a) *¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?*
    b) *¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria a esta conjetura?*

19. *Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:*

    «En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa. ¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?».

    a. *Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones. Supón que en una bolsa caben 4 kg de peras.*
    b. *Resuelve el problema que enuncies e indica los conocimientos algebraicos que se usan.*

20. *En una granja colectiva se previó que una cierta cantidad de heno almacenado para el consumo del ganado duraría 198 días, pero el heno duró 217 días ya que era de la mejor calidad y el ganado consumió 171 kg menos por día de lo que se había previsto que gastaría. ¿Cuánto heno se había almacenado en la granja?*

Anexo 2. Modelo de Consentimiento informado

Colegio Santo Domingo de Guzmán

Bello, mayo 2 de 2019

Señor(a)
PADRE O MADRE DE FAMILIA
Grado 11°
Colegio Santo Domingo de Guzmán

Cordial Saludo

Con el visto bueno de la rectoría del colegio se está desarrollando la investigación titulada "*conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*" la cual tiene como objetivo analizar la naturaleza de los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas. Por tal motivo, le estoy solicitando muy comedidamente su autorización para entrevistar a su hijo(a) y así poder obtener una información más confiable en la investigación.

Los resultados de la investigación servirán para que los dicentes diseñen estrategias para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes y la participación de los estudiantes no repercute en las calificaciones.

Por favor diligenciar el formato adjunto y regresarlo el día de mañana.
Agradezco mucho su atención y colaboración.
Atentamente,

LUIS CARLOS VILLA MONSALVE

Licenciado en Matemáticas y Física
Estudiante de Maestría en Educación. Semestre III
Línea: Educación Matemática
Integrante del grupo de investigación Matemáticas, Educación y Sociedad (MES)
Universidad de Antioquia

Objetivo: *Analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y de primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*

CONSENTIMIENTO INFORMADO
PADRES O ACUDIENTES DE ESTUDIANTE

Yo ____ identificado con cédula de ciudadanía Numero ______________________ de _______________ padre (madre o acudiente del estudiante ____ de ____ años de edad del grado 11 del COLEGIO SANTO DOMINGO DE GUZMÁN, he sido informado de que se está realizando la investigación denominada "*Conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas"* en la cual se requiere que mi hijo(a) sea entrevistado .

Como padres entendemos que:

- La participación de mi hijo(a) en esta entrevista no tendrá repercusiones o consecuencias en sus actividades escolares, evaluaciones o calificaciones en el curso.
- La participación de mi hijo(a) en la entrevista no generará ningún gasto, ni recibiremos remuneración alguna por su participación.
- No habrá ninguna sanción para mi hijo(a) en caso de que no autorice su participación.
- La identidad de mi hijo(a) no será publicada y las imágenes y sonidos registrados durante la grabación se utilizarán únicamente para los propósitos de la investigación.
- El investigador garantizará la protección de las imágenes de mi hijo(a) y el uso de las mismas, de acuerdo con la normatividad vigente.

Atendiendo a la normativa vigente sobre consentimiento informado, y de forma consciente y voluntaria **DOY EL CONSENTIMIENTO** para la participación de mi hijo(a) en la entrevista.

Lugar y Fecha, ___________________________________

Firma____

Cédula No.: _____________ de _____________________

Objetivo: *Analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y de primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*

Anexo 3. Solicitud de autorización para realizar la investigación en el Colegio Santo Domingo de Guzmán

Bello, mayo de 2019

Teniente
ÁNGELA JOHANA ALVIS MONTILLO
Rectora
Colegio Santo Domingo de Guzmán

Cordial Saludo

Como docente del colegio y como estudiante de Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia, me dirijo a usted de manera respetuosa para solicitarle comedidamente, me otorgue autorización para realizar unas pruebas escritas y algunas entrevistas a los estudiantes del grado 11° con el fin de obtener información que sirva de base para adelantar la investigación denominada "*CONFLICTOS DE SIGNIFICADO QUE MANIFIESTAN ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO Y PRIMER SEMESTRE DE UNIVERSIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ALGEBRAICAS".*

Esta investigación se hace con el interés de analizar la naturaleza de los conflictos de significado que manifiestan los estudiantes en la resolución de tareas algebraicas. Adicionalmente, la información encontrada podrá servir para que los docentes del área de matemáticas busquen estrategias adecuadas que permitan disminuir los conflictos de significado hallados.

Agradezco mucho la atención prestada y colaboración para el buen desarrollo de la investigación.

Atentamente,

Luis Carlos Villa Monsalve
Docente de Razonadores (matemáticas)
Estudiante de Maestría en Educación. Semestre III
Universidad de Antioquia

Objetivo: *Analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y de primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*

Autorización Colegio Santo Domingo de Guzmán

MINISTERIO DE DEFENSA NACIONAL
POLICÍA NACIONAL
DIRECCION DE BIENESTAR SOCIAL
COLEGIO SANTO DOMINGO DE GUZMAN

MINISTERIO DE DEFENSA
POLICÍA NACIONAL

Unidad: ____________
Radicado No. ____________
Recibido por: ____________
Fecha: ________ Hora: ________

No. S - 2019 - / RECRI - CORAC – 1.10

Bello, 07 de mayo de 2019

Docente
LUIS CARLOS VILLA MONSALVE
Contrato Prestación de Servicios Colegio Santo Domingo de Guzmán
Carrera 45 22 D 184
Bello

Asunto: Respuesta comunicación con radicado interno E-2019-019580 recibida el 02/05/2019: "Solicitud autorización para realizar pruebas escritas y entrevistas a los estudiantes del Grado 11°, con el fin de obtener información para la investigación de la Maestría en Educación".

En respuesta a la comunicación con radicado interno E-2019-019580 recibida el 02/05/2019, en la cual solicita autorización para realizar pruebas escritas y entrevistas a los estudiantes del Grado 11°, con el fin de obtener información para la investigación *"Conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas"*, correspondiente a la Maestría en Educación que está adelantando en la Universidad de Antioquia; de manera atenta me permito informarle que esta Rectoría autoriza la realización de la investigación, siempre y cuando la integridad, imagen y privacidad de los estudiantes y del Colegio Santo Domingo de Guzmán, no se vea comprometida.

Atentamente,

Teniente **ÁNGELA JOHANA ALVIS MONTILLO**
Rectora Colegio Santo Domingo de Guzmán

Elaborado por: IJ. Luis Alberto Pérez
Revisado por: TE. Ángela Johana Alvis Montillo
Fecha de elaboración: 07-05-2019
Ubicación. C:\Users\monica.osorio\Desktop\ARCHIVOS CORAC-COSDO\ARCHIVOS CORAC 2.019\1 ACCIONES CONSTITUCIONALES\1.10 DERECHOS DE PETICION

Carrera 45 22 D 184, Bello (Antioquia)
Teléfono: 322 448 72 83
meval.cosdo-administrativa@policia.gov.co
www.policia.gov.co

ISO 9001

SC 6545-3-8-NO CO - SC 6545-3-8-NO

1DS-OF- 0001
VER: 3

Página 1 de 1

Aprobación: 27-03-2017

Objetivo: *Analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y de primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*

Anexo 4. Modelo de Consentimiento informado Institución Educativa José Antonio Galán

Bello, junio de 2019

Señor(a)
PADRE O MADRE DE FAMILIA
Grado 11°
Institución Educativa José Antonio Galán
Cordial Saludo

Con el visto bueno de la rectoría del colegio se está desarrollando la investigación titulada "*conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*" la cual tiene como objetivo analizar la naturaleza de los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas. Por tal motivo, le estoy solicitando muy comedidamente su autorización para entrevistar a su hijo(a) y así poder obtener una información más confiable en la investigación.

Los resultados de la investigación servirán para que los dicentes diseñen estrategias para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes y la participación de los estudiantes no repercute en las calificaciones.

Por favor diligenciar el formato adjunto y regresarlo el día de mañana.
Agradezco mucho su atención y colaboración.
Atentamente,

Carlos Villa

LUIS CARLOS VILLA MONSALVE

Licenciado en Matemáticas y Física
Estudiante de Maestría en Educación. Semestre III
Línea: Educación Matemática
Integrante del grupo de investigación Matemáticas, Educación y Sociedad (MES)
Universidad de Antioquia

CONSENTIMIENTO INFORMADO
PADRES O ACUDIENTES DE ESTUDIANTE

Yo ____ identificado con cédula de ciudadanía Numero _____________________ de ______________ padre (madre o acudiente del estudiante ____ de ____ años de edad del grado 11 de la INSTITUCIÓN EDUCATIVA JOSÉ ANTONIO GALÁN, he sido informado de que se está realizando la investigación denominada "*Conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas"* en la cual se requiere que mi hijo(a) sea entrevistado .

Como padres entendemos que:

- La participación de mi hijo(a) en esta entrevista no tendrá repercusiones o consecuencias en sus actividades escolares, evaluaciones o calificaciones en el curso.
- La participación de mi hijo(a) en la entrevista no generará ningún gasto, ni recibiremos remuneración alguna por su participación.
- No habrá ninguna sanción para mi hijo(a) en caso de que no autorice su participación.
- La identidad de mi hijo(a) no será publicada y las imágenes y sonidos registrados durante la grabación se utilizarán únicamente para los propósitos de la investigación.
- El investigador garantizará la protección de las imágenes de mi hijo(a) y el uso de las mismas, de acuerdo con la normatividad vigente.

Atendiendo a la normativa vigente sobre consentimiento informado, y de forma consciente y voluntaria **DOY EL CONSENTIMIENTO** para la participación de mi hijo(a) en la entrevista.

Lugar y Fecha, __________________________________

Firma____

Cédula No.: _____________ de ____________________

Objetivo: *Analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y de primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*

Anexo 5. Solicitud de autorización para realizar la investigación en la Institución Educativa José Antonio Galán

Bello, mayo de 2019

John Mario Garavito
Rector
Institución Educativa José Antonio Galán

Cordial Saludo

Como estudiante de Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia, me dirijo a usted de manera respetuosa para solicitarle comedidamente, me otorgue autorización para realizar unas pruebas escritas y algunas entrevistas a los estudiantes del grado 11° con el fin de obtener información que sirva de base para adelantar la investigación denominada "*CONFLICTOS DE SIGNIFICADO QUE MANIFIESTAN ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO Y PRIMER SEMESTRE DE UNIVERSIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ALGEBRAICAS"*.

Esta investigación se hace con el interés de analizar la naturaleza de los conflictos de significado que manifiestan los estudiantes en la resolución de tareas algebraicas. Adicionalmente, la información encontrada podrá servir para que los docentes del área de matemáticas busquen estrategias adecuadas que permitan disminuir los conflictos de significado hallados.

Agradezco mucho la atención prestada y colaboración para el buen desarrollo de la investigación.

Atentamente,

Carlos Villa

Luis Carlos Villa Monsalve
Docente de Razonadores (matemáticas)
Estudiante de Maestría en Educación. Semestre III
Universidad de Antioquia

Autorización Institución Educativa José Antonio Galán

"SOMOS SEMBRADORES DE VALORES PARA SERVIR Y VIVIR MEJOR"

Medellín, 06 de junio de 2019

Estudiante de Maestría
Luis Carlos Villa Monsalve

Asunto: Respuesta comunicación recibida el 4/05/2019 "solicitud para realizar prueba escrita y entrevistas a los estudiantes del grado 11°, con el fin de obtener información para la investigación de la Maestría en Educación".

En respuesta a la comunicación recibida el 4/05/2019, en el cual solicita autorización para realizar prueba escrita y entrevista a los estudiantes del Grado 11°, con el fin de obtener información para la investigación ""*conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*", correspondiente a la Maestría en Educación que se está adelantando en la Universidad de Antioquia; de manera atenta me permito informar que está Rectoría autoriza la realización de la investigación, siempre y cuando la integridad, imagen y privacidad de los estudiantes y de la Institución Educativa José Antonio Galán, no se vean comprometidas.

Atentamente,

John Mario Garavito Rivero
Rector

Calle 44A # 93 – 87 **236 3000 - 214 3010**
Manrique La Salle / Medellín – Antioquia
iejoseantoniogalan@josegalan.edu.co
www.josegalan.edu.co

Objetivo: *Analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y de primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*

Anexo 6. Cuestionario

Tarea

Nombre: ____

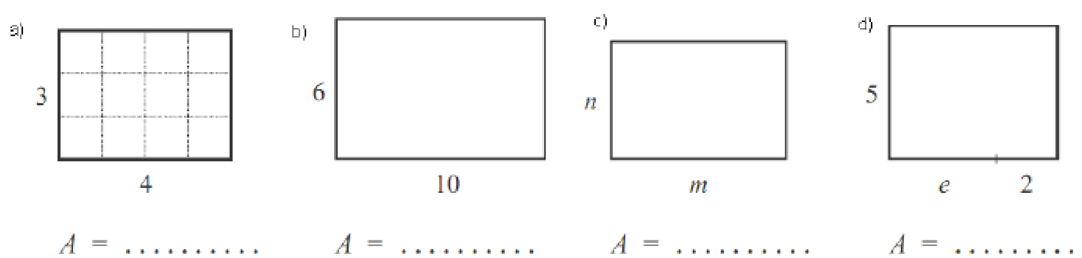
e-mail: ____

- ***Lee atentamente cada una de las tareas.***
- ***Escriba todo el proceso, si se equivoca, no borre, continúe aparte.***
- ***Responda cada pregunta en la hoja correspondiente.***

1. *Realiza las siguientes transformaciones*
   a. *Si* $a = 2b$, *¿en qué se transforma* $5a + 3$*?*
   b. *Si* $a = b + 3$, *¿en qué se transforma* $5a + 3b$*?*
   c. *Si* $a = 2b$, *¿en qué se transforma* $(a + 3)(3 - a)$*?*

2. *Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante* 40 *días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar* 4 *euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró* 60 *días. ¿Cuánto dinero recibió?*

3. ¿Cuál es el área de las siguientes figuras?



4. Escribe la siguiente oración como una ecuación:
   "La energía E de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz v*"*

Objetivo: *Analizar los conflictos de significado que manifiestan estudiantes de undécimo grado y de primer semestre de universidad en la resolución de tareas algebraicas*

5. *¿Para cuáles valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 cms^2 y 288 cms^2? Si el valor de x aumenta o decrece, ¿Qué pasa con el área?*

6. *Un hortelano (persona que cultiva y cuida huertas) vende el kilogramo de tomate a \$12.00 y le cuesta \$240.00 recoger la cosecha. Halla una relación entre lo que gana el hortelano y el número de kilogramos de tomate que vende. ¿Cuántos kilogramos tiene que vender para ganar \$4500.00?*

7. *Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitad de su largo, para imprimir en cada página una superficie de $300\ cm^2$. Si las márgenes son de $2\ cm$ arriba y abajo, y $2.5cm$ en cada lado, determina ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja?*

8. *Lucia Gustín lega su fortuna a sus tres primas, María, Camila y Sofía. Ella da 15000€ de más a María que a Camila, pero 5000€ de más a Sofía que a Camila, si su fortuna es de 158000€ ¿Cuánto recibe María, Camila y Sofía?*

9. *Observa detenidamente la siguiente suma y determina el dígito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.*
<u>*Digito*</u>*: Se llama digito a cada uno de los siguientes números:*

$$\begin{array}{rcccc} & & A & B & C \\ & & A & B & C \\ + & & A & B & C \\ \hline & 2 & A & C & C \end{array}$$

a) ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C?

b) ¿Cómo saber que son correctos?

10. *En una caja hay arañas y escarabajos; hay 8 animales en total. Arturo cuenta el número total de patas y resulta que son 54. Si sabemos que un escarabajo tiene 6 patas y una araña tiene 8, ¿cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja?*

11. *Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:*
    «En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa. ¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?».