UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA EN EL CONTEXTO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

Sandra Milena Zapata

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de Educación Avanzada

Medellín, Colombia

2019

Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano

Sandra Milena Zapata

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Doctora en Educación

Asesores:

Doctora Zaida Margot Santa Ramírez

Doctor Carlos Mario Jaramillo López

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Grupo de Investigación:

Educación Matemática e Historia – Edumath (UdeA – Eafit)

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada

Medellín, Colombia

2019

A Dios, mi eterna fortaleza.

A mi amado hijo Juan José, quien con su inmenso amor y ternura me fortalece en todo momento.

A mi mamá, porque su amor, presencia y apoyo incondicional hicieron posible este sueño.

A mi hermano, cuyo amor y comprensión me inspiran para ser mejor.

A mis adorados sobrinos Kevin y Samuel, de quienes siempre recibo tanto amor como alegrías.

A mi cuñada Johanna, porque te convertiste en una hermana que siempre ha estado presente para animarme y apoyarme.

Agradecimientos

Mi eterno agradecimiento con mis asesores, la doctora Zaida Margot Santa Ramírez y el doctor Carlos Mario Jaramillo López, quienes siempre dieron lo mejor de sí para orientar este arduo proceso, en el que su experiencia y conocimiento alumbraron las decisiones que enfocaron mi labor investigativa. Gracias, porque con su confianza y apoyo incansable me alentaron permanentemente para seguir su ejemplo de disciplina, constancia, amor por la educación, la academia y el trabajo.

Al doctor Rodolfo Vergel Causado, a quien tuve la fortuna de conocer en un evento académico, y desde entonces, no ha tenido reparos en compartir su invaluable experiencia y conocimiento conmigo; sus orientaciones y recomendaciones, caracterizadas por su sutileza, rigor y exigencia académica, me invitaron a reflexionar de manera permanente, para refinar cada elaboración teórica, que en su momento cuestionó, avaló o corrigió, haciendo todas la intervenciones necesarias para refinar mi proceso investigativo.

Al doctor Jorge Enrique Fiallo Leal, quien, con su amplio conocimiento en el campo de la investigación en educación, me ha orientado y brindado recomendaciones para formalizar mi trabajo. Él, desde el proceso de candidatura, estuvo presente y dispuesto a sostener diálogos académicos gracias a los cuales fue posible afinar componentes metodológicos y considerar posibilidades para las tareas diseñadas.

Al doctor John Henry Durango Urrego, por sus palabras de aliento, confianza y apoyo, por compartir conmigo su conocimiento, por cada recomendación y observación acerca de mi trabajo; a él, toda mi admiración y respeto, su excelencia y agudeza académica son un ejemplo y referente a seguir.

A los profesores que integran el Grupo de Investigación Edumath, por su disposición para escuchar acerca de los referentes de mi estudio y hacer aportes en la consolidación de mi trabajo de investigación.

A los profesores y compañeros de los seminarios de investigación, quienes fueron críticos y propositivos, propiciando reflexiones y convocando a la evaluación de la pertinencia y valoración de los aciertos de las decisiones tomadas en el estudio.

A los profesores participantes del proceso de investigación, por su amor, entrega y dedicación en su labor profesional. Porque fueron constantes, disciplinados, propositivos, críticos y objetivos; y, sobretodo, generosos con su tiempo y su conocimiento. A ellos, mi agradecimiento eterno, pues hicieron posible este propósito.

A mi familia y amigos, quienes hacen mi vida amable, deseándome lo mejor, confiando en que lograría culminar este proceso, entendiendo mis ausencias, apoyando mis sueños y valorando mis proyectos.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

GLOSARIO

Álgebra temprana: propuesta de cambio curricular, que concibe maneras de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como una guía hacia una enseñanza con compresión y significado de las matemáticas (Kaput, 1998).

Analiticidad: característica del pensamiento algebraico temprano, que define un rasgo específico en cuanto al carácter operatorio de los elementos (Radford, 2010a, 2010b).

Conocimiento profesional: referido en términos de un conocimiento didáctico para la enseñanza, que comprende cuatro dimensiones (Ponte, 2012).

Designación simbólica: característica del pensamiento algebraico, referida a la manera de nombrar objetos (Radford, 2010a, 2010b).

Dimensiones del conocimiento profesional: referidas para enmarcar el conocimiento profesional, a través de: conocimiento de las matemáticas, de los estudiantes, del currículo y de la práctica profesional (Ponte, 2012).

Medios semióticos: todos los medios que son utilizados por los individuos, que se encuentren en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia (Radford, 2010a, 2010b).

Pensamiento algebraico temprano: pensamiento caracterizado por componentes analíticos como: sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica (Radford, 2010a, 2010b).

Pensamiento algebraico factual: estrato de pensamiento con naturaleza aparentemente concreta, que opera a nivel de un número particular o de hechos factuales (Radford, 2010a, 2010b).

Pensamiento algebraico contextual: estrato de pensamiento en el cual la indeterminancia se hace explícita y trasciende los casos particulares hasta formas generales (Radford, 2010a, 2010b).

Pensamiento algebraico simbólico: estrato de pensamiento en el cual la presencia de los símbolos alfanuméricos cobra relevancia y empiezan a sustituir las frases clave (Radford, 2010a, 2010b).

Sentido de la indeterminancia: característica del pensamiento algebraico que reconoce la presencia de objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros (Radford, 2010a, 2010b).

RESUMEN

La tesis doctoral titulada *transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano*, se justifica en tres campos: uno teórico, uno metodológico y uno práctico, los cuales dan cuenta de la necesidad de promover pensamiento algebraico en grados iniciales de escolaridad, prestando especial atención al papel que el profesor tiene frente a ello, específicamente en lo referido a su conocimiento profesional. De esta manera, tuvo como objetivo analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano. En el estudio se definieron dos referentes que ofrecieron un horizonte teórico; el primero, asociado con el conocimiento profesional (Ponte, 2012) y, el segundo, con el pensamiento algebraico temprano (Radford, 2010a, 2010b, 2013b, 2018; Vergel, 2016a, 2019); debido a que la naturaleza del problema planteado sugirió la necesidad de la elaboración de una postura explicativa, no se definió un marco teórico. En consecuencia, para dar respuesta a la pregunta: ¿cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano?, la investigación se enmarcó en la teoría fundamentada, que permitió la definición de una postura teórica explicativa.

Como resultado del análisis realizado a través de los procesos de codificación abierta, axial y selectiva, se logró la elaboración de una postura explicativa que da cuenta de que el profesor transforma su conocimiento profesional cuando se configura como un ser consciente de sus necesidades y responsabilidades, frente a la promoción del pensamiento algebraico; además, actúa en consecuencia, reconociendo que es susceptible de comprender la naturaleza de los cambios que develan sus acciones, en interacción consigo mismo, sus pares, sus estudiantes y el conocimiento.

Palabras clave: conocimiento profesional, dimensiones del conocimiento, transformación, pensamiento algebraico temprano, características y formas de pensamiento algebraico.

ABSTRACT

The doctoral thesis entitled transformation of the professional knowledge of the primary mathematics teacher in the context of early algebraic thought, is justified in three fields: one theoretical, one methodological and one practical, which account for the need to promote algebraic thought in initial grades of schooling, paying special attention to the role that the teacher has in front of it, specifically in relation to their professional knowledge. In this way, it had as its objective: to analyze how the primary mathematics teacher transforms his professional knowledge in the context of early algebraic thought. The study defined two references that offered a theoretical horizon, the first, associated with professional knowledge (Ponte, 2012) and the second with early algebraic thought (Radford, 2010a, 2010b, 2013b, 2018; Vergel, 2016a, 2019); because the nature of the problem raised suggested the need for the development of an explanatory position, no theoretical framework was defined. Consequently, in order to answer the question: how does the primary school mathematics teacher transform his professional knowledge in the context of early algebraic thought? the study was framed in the grounded theory, which allowed the definition of an explanatory theoretical position.

As a result of the analysis, carried out through the processes of codification open, axial and selective, it was achieved the elaboration of an explanatory position that realizes that the teacher transforms his professional knowledge when he is configured as a being aware of his needs and responsibilities, in front of the promotion of algebraic thought; in addition, he acts accordingly, recognizing that he is susceptible to understand the nature of the changes that reveal his actions, in interaction with himself, his peers, his students and knowledge.

Keywords: professional knowledge, dimensions of knowledge, transformation, early algebraic thinking, characteristics and form of algebraic thinking.

INTRODUCCIÓN

La tesis doctoral titulada: *transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano*, se enmarcó en una justificación de carácter teórico, determinada por los problemas reportados en la literatura (Kieran, 2004; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Cai y Knuth, 2011; Vergel, 2016a; Carraher y Schlieman, 2007; Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007; Brizuela, Martinez y Cayton-Hodges, 2013), que apuntan tanto a la necesidad de algunos profesores de fundamentar su pensamiento algebraico, como a la justificación y pertinencia de incluir la enseñanza del álgebra en grados iniciales.

Adicionalmente, se justificó en un marco metodológico (Blanton y Kaput, 2002; Cai y Knuth, 2011; Brizuela et al., 2013; Aké, 2014; Cañadas y Molina, 2016) asociado con el cómo promover el pensamiento algebraico en grados iniciales; por último, se reconoce la experiencia como un componente que permitió justificar la pertinencia de la investigación, en tanto ha propiciado objetos de reflexión en términos de las necesidades e intereses que se pueden observar en un grupo de profesores de primaria, para realizar tareas de formación en el campo de este pensamiento y para diseñar tareas de carácter algebraico.

La tesis se estructuró en cinco capítulos, a través de los cuales se dio sustento a una elaboración teórica que permitió dar respuesta a la pregunta y consecución al objetivo de investigación. El capítulo 1 presenta el planteamiento del problema, justificado en tres líneas: una teórica, una metodológica y una práctica; estos planteamientos confluyen en la pregunta: ¿cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano?; adicionalmente, se presenta en correspondencia con el objetivo que propone analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

El capítulo 2 contempla dos posturas teóricas para el estudio, una asociada con el conocimiento profesional (Ponte, 2012) y otra con el pensamiento algebraico temprano (Radford, 2010a, 2010b, 2013b, 2018; Vergel, 2016a, 2015a, 2019); ambas constituyen referentes en el estudio, dado que ofrecen un horizonte teórico en el desarrollo de la investigación, sin que se configuren como un marco teórico pues, dadas las características del estudio, fue necesario asumir la elaboración de una postura explicativa a través de la teoría fundamentada.

El capítulo 3 se enfoca en componentes metodológicos y da cuenta de una caracterización de la teoría fundamentada, a través de procesos de codificación de categorías temáticas. Posteriormente, describe cómo se llevó a cabo el trabajo de campo y las características de los participantes. Expone, también, los métodos de recolección de información y los fundamentos teóricos de las tareas de formación, como uno de los escenarios propuestos para el desarrollo del trabajo de campo. Estas últimas contemplaron, en su estructura, cuatro momentos que propiciaron reflexiones asociadas con el conocimiento profesional.

El capítulo 4 fue dedicado a la presentación del análisis y de los resultados; en este, se describen los criterios bajo los cuales se realizó el respectivo análisis, el cual se desarrolló a través de: procesos de codificación abierta para cada tarea, procesos de codificación axial, mediados por un inter – análisis que detalló el establecimiento de relaciones entre categorías, y un intra – análisis que permitió dilucidar relaciones entre los momentos de las tareas de formación, para, finalmente, bajo un proceso de codificación selectiva, dar lugar a la elaboración de una postura explicativa que, además, se sintetizó en un modelo para explicar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Por último, se presentan unas conclusiones en términos de la respuesta a la pregunta de investigación y la consecución del objetivo propuesto. Se exponen unos posibles aportes al campo de la Educación Matemática, derivados de la elaboración teórica para la postura explicativa. También se presentan, en este capítulo, las dificultades que se percibieron en el estudio y posibles líneas de investigación recomendadas a partir del desarrollo del estudio en cuestión.

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El presente capítulo exhibe los argumentos que sustentan el problema de investigación; para ello, se pretende poner en consideración un conjunto de posturas (Kaput, 1998, 2000, 2008; Blanton y Kaput, 2002; Kieran, 2004; Carraher y Schlieman, 2007; Derry et al., 2007; Cai y Knuth, 2011; Ponte, 2012, Ponte, 2014; Godino et al., 2012; Brizuela et al., 2013; Vergel, 2016b; Cañadas y Molina, 2016; Fernández e Ivars, 2016) que permiten reflexiones relacionadas con el conocimiento del profesor de matemáticas de primaria y lo que puede ocurrir con este último, cuando trabaja en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

En especial, el pensamiento algebraico es objeto de reflexión en el presente estudio, pues la investigación se enmarca en el contexto del pensamiento algebraico temprano, con miras a que los profesores puedan llevar al aula tareas de carácter algebraico e incentivar este tipo de pensamiento en sus estudiantes; pero esta condición no es necesariamente fácil para el profesor de primaria, frente al cual, los estudios reportan la necesidad de reflexionar sobre su conocimiento profesional, dado que la promoción y el reconocimiento de dicho pensamiento no es un asunto simple, según lo documenta la literatura (Cai y Knuth, 2011).

1.1. Planteamiento del Problema

El problema planteado en la investigación se justifica a partir de tres perspectivas: una teórica, una metodológica y una práctica. Por lo tanto, este apartado se ocupa de presentar los argumentos que permiten justificar dicho problema a la luz de cada perspectiva mencionada, los cuales propician reflexiones en cuanto a lo que puede ocurrir con el conocimiento profesional de los profesores de primaria cuando enfrentan tareas de formación, referidas por Ponte et al. (2009) como tareas de aprendizaje profesional, para dar respuesta a la necesidad de materializar una propuesta de cambio curricular denominada álgebra temprana, en una de sus líneas particulares, la del pensamiento algebraico temprano. A continuación, se presentan tanto las respectivas reflexiones, como las perspectivas teórica y metodológica, las cuales se han agrupado en un bloque de argumentos.

1.1.1. Justificaciones teórica y metodológica del problema. Las reflexiones que se suscitan a partir de la primera perspectiva, corresponden a un componente teórico; en este se presentan problemas reportados en la literatura, que señalan la necesidad de indagar sobre el conocimiento que poseen los profesores y cuál deberían tener para integrar el pensamiento algebraico temprano en las matemáticas escolares, esto es, para "algebrizar el currículo" de la educación básica primaria (Kaput, 2000, 2008; Blanton y Kaput, 2002; Kieran, 2004; Carraher y Schlieman, 2007; Derry et al., 2007; Cai y Knuth, 2011; Brizuela et al., 2013; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Vergel, 2016a; Cañadas y Molina, 2016).

Además, se resalta el hecho de que en la perspectiva metodológica se presentan inquietudes referenciadas en la literatura (Cai y Knuth, 2011; Cañadas, 2016; Fernández e Ivars, 2016; Vergel, 2016b; Castro, 2011; Castro, Godino y Rivas, 2011; Castro, 2014; Vergel y Rojas, 2018; Zapata, Santa y Jaramillo, 2018) en relación a cómo los profesores de la educación básica primaria pueden promover pensamiento algebraico temprano entre sus estudiantes, dada la necesidad, justificación y pertinencia de incluir la enseñanza del álgebra en estos niveles de escolaridad. Los elementos que permiten dilucidar las justificaciones teóricas y metodológicas del problema, se agrupan en las líneas de reflexión que se presentan a continuación.

1.1.1.1. Algebrización del currículo en la educación primaria. La idea de "algebrizar el currículo", sugerida por Kaput (1998), consiste en la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas de la educación primaria. Así, Kaput (1998) menciona que "[…] la clave para la reforma del álgebra es integrar el razonamiento algebraico en todos los grados y en todos los temas "algebrizar" las matemáticas escolares" (p. 24). La algebrización del currículo hace parte de una propuesta de cambio curricular conocida como early algebra (álgebra temprana) que surge en Estados Unidos a partir del trabajo presentado por Kaput (1998) en un encuentro organizado por el National Council of Teachers of Mathematics -NCTM- (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas).

Se puede observar que, para el NCTM (1998), es una necesidad manifiesta la vinculación del álgebra en los últimos grados de la educación primaria y esta se reafirma mediante el documento de los Principios y Estándares de la Matemática Escolar (NCTM, 2000), que propone, además, extender este requerimiento a los primeros grados de escolaridad. En consecuencia, la idea de empezar a promover formas de pensamiento algebraico en los estudiantes de la educación primaria cobra cada vez mayor relevancia (Vergel y Rojas 2018) y esto se evidencia en estudios e investigaciones que presentan justificaciones teóricas para apoyar la vinculación del álgebra en estos niveles (Kaput, 2008; Blanton y Kaput, 2002; Kieran, 2004; Carraher y Schlieman, 2007; Derry et al., 2007; Cai y Knuth, 2011; Brizuela et al., 2013; Godino et al., 2012; Vergel, 2016a; Cañadas y Molina, 2016).

De manera adicional, el NCTM (1998) justifica esta necesidad cuando menciona que la introducción del pensamiento algebraico temprano pretende que los estudiantes construyan una base sólida de aprendizaje y experiencia, como preparación para un trabajo sofisticado en el álgebra. En este sentido, Vergel y Rojas (2018) plantean que “son serios y contundentes los argumentos que sugieren la introducción progresiva al álgebra en el contexto escolar de la educación primaria pues posibilita más adelante el acceso comprensivo de los estudiantes a conceptos algebraicos más avanzados” (p. 19).

En coherencia con las recomendaciones del NCTM (2000), la presencia del álgebra en la educación básica primaria ha recibido un especial interés en el campo de la investigación en educación matemática. Como muestra de esto, Kieran (2004), Cai y Knuth (2011), Carraher y Schlieman (2007) han puesto de manifiesto una transición, no necesariamente armoniosa, entre la aritmética y el álgebra escolar, en tanto que en los procesos de enseñanza se desconocen las relaciones existentes entre ambas; así, sus estudios han aportado justificaciones teóricas para apoyar la inclusión del álgebra en la escuela primaria.

Contemplar la idea de la inclusión del álgebra en la educación primaria, ha propiciado reflexiones en relación con posibles beneficios en la educación secundaria. Esto podría deberse, por ejemplo, a asuntos expuestos por autores como Hohensee (2017), quien menciona que existen investigaciones que sustentan que incorporar el álgebra al currículo escolar, en edades tempranas, puede preparar a los estudiantes para el desarrollo futuro de tareas con carácter algebraico. En una línea similar, Derry et al. (2007) argumentan que la iniciación de la enseñanza del álgebra en los niveles de la educación primaria, podría tener como consecuencia una preparación de los estudiantes para el trabajo algebraico en la escuela secundaria. De manera similar, Carpenter, Frankle y Levi (2003) mencionan que, debido a que la comprensión del carácter simbólico del álgebra amerita un proceso de maduración y tiempo, es conveniente la iniciación de su enseñanza en los primeros niveles.

Numerosas investigaciones (Cai y Knuth, 2011; Cañadas, 2016; Fernández e Ivars, 2016; Vergel, 2016a, 2016b; Castro, 2011; Castro et al., 2011; Castro, 2014; Vergel y Rojas, 2018; Radford, 2018) han mostrado la inconveniencia de posponer el estudio del álgebra hasta la educación secundaria; en esta misma línea, Zapatera (2016) menciona que numerosos estudios “[…] han propuesto su integración en el currículo de la educación primaria al reconocer que el álgebra es el corazón de las matemáticas y puede ser desarrollada por estudiantes de primaria” (p. 33). Sin embargo, para los profesores de los niveles iniciales, la incorporación de esta área de trabajo matemático no es trivial, lo cual hace compleja su aplicación en el aula (Solar, 2016) y pone de manifiesto la necesidad de desarrollar orientaciones para los profesores sobre cómo enfocar acciones que posibiliten el desarrollo del pensamiento algebraico en estos grados de escolaridad.

La inclusión del pensamiento algebraico en la educación básica primaria, entendida en la investigación como álgebra temprana, se vislumbra como la materialización de una propuesta de cambio curricular, que propende por la promoción del pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad; en este orden de ideas, la introducción del álgebra en los niveles de primaria, no debería entenderse como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las mismas (Vergel, 2010).

Cabe reconocer que, el pensamiento algebraico de los estudiantes, no es competencia exclusiva de los niveles de secundaria y media, pues la educación básica primaria tiene incidencia en su desarrollo y es una responsabilidad de los profesores su promoción. Al respecto, Vergel (2016a) manifiesta que "una introducción progresiva al álgebra en la escuela primaria puede facilitar más adelante el acceso de los estudiantes a los conceptos algebraicos más avanzados" (p. 15). Como ya se había mencionado, es precisamente en el marco de la idea de enseñar tópicos de álgebra a los estudiantes de la educación básica primaria, que se propone el álgebra temprana (early algebra) como una posibilidad de "integrar el pensamiento algebraico en todas las asignaturas de las matemáticas escolares" (Vergel, 2016a, p. 12).

Las ideas hasta ahora expuestas, aluden a la existencia de una necesidad manifiesta en términos de la vinculación de conceptos de carácter algebraico en el currículo de la educación primaria. Este escenario propicia reflexiones adicionales para efectos del desarrollo del presente estudio, el cual centra su foco de atención en el profesor de primaria y en indagar cómo podría atender al requerimiento de promover formas de pensar algebraicas en los primeros años de escolaridad, pues, tradicionalmente en estos niveles, se hace énfasis en el pensamiento aritmético y se relega el estudio del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico a la educación secundaria (Zapatera, 2016).

Las indagaciones y reflexiones logradas hasta el momento, permiten reconocer que la algebrización del currículo, en términos de la inclusión de conceptos algebraicos en la educación básica primaria, no es un asunto trivial y que lograrla puede depender de múltiples factores. Sin embargo, el interés del trabajo doctoral se enfoca específicamente en uno de los posibles factores, el conocimiento profesional del profesor, expuesto en la perspectiva de Ponte (2012). Por ello, es necesario continuar indagando para desarrollar un análisis y reflexión en relación a los siguientes aspectos: el papel del profesor de primaria en la algebrización del currículo; la formación de profesores en la promoción del pensamiento algebraico temprano; el conocimiento profesional y su incidencia en el pensamiento algebraico temprano; además, proponer algunas fundamentaciones teóricas sobre la posibilidad de transformación del conocimiento profesional del profesor de primaria.

1.1.1.2. El papel del profesor de primaria en la algebrización del currículo. Con la intención de dilucidar una interpretación, a la luz de la teoría relacionada con el objeto de estudio en cuestión, y evidenciar la naturaleza del problema, se analizan investigaciones (Kaput, 2000, 2008; Blanton y Kaput, 2002; Kieran, 2004; Carraher y Schlieman, 2007; Derry et al., 2007; Godino et al., 2012; Brizuela et al., 2013; Martinez y Cayton-Hodges, 2013; Cai y Knuth, 2011; Vergel, 2016a; Vergel y Rojas, 2018; Radford, 2010a, 2011, 2018) que pueden permitir inferir que la promoción y vinculación del pensamiento algebraico, en la educación básica primaria, es un asunto que requiere poner el foco de atención en el profesor de estos niveles; es por esto que, el presente estudio centra su interés, particularmente, en el conocimiento profesional.

Hace varias décadas, investigaciones nacionales e internacionales (Ponte, 2013; Lin y Rowland, 2016; Santa, 2016; Losano y de Costa, 2017; Potari y Ponte, 2017; Strutchens, 2017) reportan un especial interés por el profesor de matemáticas como objeto de estudio. Estas dan cuenta de un importante número de indagaciones que ponen de manifiesto el complejo entramado que subyace a la profesión docente, atendiendo algunos aspectos como: la reflexión sobre la práctica, las concepciones, la identidad, las creencias, las prácticas profesionales, la formación inicial y continuada, el conocimiento y el desarrollo profesional. Es así como:

> En los últimos diez años, el enfoque en el docente ha estado claramente centrado en las prácticas profesionales, junto con las condiciones institucionales y los procesos de formación del profesorado que pueden promover su transformación con el fin de fomentar el aprendizaje de los estudiantes. (Ponte, 2013, p. 7)

De acuerdo a la perspectiva anterior, se pude inferir que, la investigación enfocada en el profesor de matemáticas, presupone un análisis de otros factores inherentes a la práctica profesional, como lo son el currículo, la concepción de escuela, de las matemáticas, del trabajo de los estudiantes y de la formación como agente transformador. Para el caso de la formación de profesores de matemáticas, las investigaciones reportan que este tópico fue bastante escaso hasta mediados de los años noventa; en este sentido, hay evidencias bibliográficas que constituyen muestras claras del visible interés emergente en los profesores y en la enseñanza de las matemáticas como objetos de investigación (Lin y Rowland, 2016).

Para el presente trabajo doctoral, cabe anotar de nuevo que el profesor de matemáticas y su conocimiento profesional determinan un foco de análisis en lo referido a la promoción del pensamiento algebraico en la educación básica primaria. En el marco del conocimiento profesional del profesor (Ponte, 2012), entendido también como conocimiento para la enseñanza, se destaca el conocimiento didáctico, en el cual se distinguen cuatro dimensiones: el conocimiento de las matemáticas, del currículo, de los estudiantes y de los procesos de trabajo en el aula (Ponte, 2012). Se puede apreciar entonces que, frente al reto de promover el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, cada una de estas dimensiones tiene un papel determinante, pues su presencia se manifiesta desde el conocimiento de la disciplina, hasta la toma de decisiones sobre la práctica, poniendo en consideración las posibilidades de los estudiantes para aprender conceptos de carácter algebraico.

En coherencia con la idea anterior, el problema de investigación tiene matices que pueden interpretarse en el marco del conocimiento profesional del profesor, toda vez que para promover pensamiento algebraico, él requiere conocer el objeto disciplinar y, con ello, el cómo, el porqué y el para qué del mismo; conocer el currículo, para tomar decisiones frente a la incorporación del pensamiento algebraico en la práctica; conocer a los estudiantes y sus procesos de aprendizaje, para identificar manifestaciones de carácter algebraico en su pensamiento. Finalmente, conocer los procesos de trabajo en el aula, donde subyace la práctica y se ponen en escena todos los cambios que implica la vinculación del pensamiento algebraico temprano.

Autores como Koellner, Jacobs, Borko, Roberts y Schneider (2011) manifiestan que mejorar el conocimiento profesional de los profesores sobre el álgebra y la enseñanza de la misma, es considerado un componente clave para apoyar el pensamiento algebraico de los estudiantes. En este sentido, Ponte (2014) percibe en esta `mejoría` un desafío propio de los profesores e investigadores, en tanto que ellos deben fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación básica primaria.

Además, desarrollar pensamiento algebraico en la educación primaria, implica para los profesores comprender qué significa `pensar algebraicamente` y esto es un reto (Zapata et al., 2018) que repercute en la reflexión sobre la práctica y los componentes inherentes a la misma, como el conocimiento profesional del profesor. En este sentido, Cañadas (2016) se refiere al pensamiento algebraico escolar y menciona “la necesidad de indagar sobre los conocimientos que deben tener los maestros para abordarlo en las aulas” (p. 12), y deja una línea de trabajo abierta para los investigadores en el campo de la educación matemática.

Diferentes investigaciones (Kieran, 2004; Godino et al., 2012; Cai y Knuth, 2011; Vergel, 2016a; Carraher y Schlieman, 2007; Derry et al., 2007; Brizuela et al., 2013) permiten apreciar consideraciones de orden teórico que apuntan a que es necesario que los profesores de la educación primaria fundamenten su pensamiento algebraico, dado el requerimiento de incorporar la enseñanza del álgebra en estos niveles de escolaridad. En este sentido, se puede observar que la promoción del pensamiento algebraico de los estudiantes puede ser una tarea que corresponde a los profesores de estos niveles; asumirla implicaría reflexiones y acciones no solo frente al conocimiento matemático, sino también frente al conocimiento del currículo, de los estudiantes y de los procesos de trabajo en el aula.

En coherencia con la idea anterior, una de las exigencias a nivel del conocimiento profesional, podría tener que ver con modificar el trabajo enmarcado en un enfoque aritmético, pues este sugiere una tendencia a no ver los aspectos relacionales de las operaciones, dado que enfatiza en el cálculo. Para Kieran (2004), es necesario el fomento de "una forma de pensar algebraica, con un enfoque en las relaciones, en las operaciones, en sus inversas y en la representación, y no solo en la solución de un problema y en el trabajo con números y letras" (p. 140), que posibilite un reconocimiento estructural en el que no solo predomine el pensamiento aritmético.

Conseguir un enfoque diferente para el trabajo con el pensamiento aritmético, centrado en formas de pensar algebraicas, constituye un reto para los profesores, que puede ser analizado a la luz de su conocimiento profesional, en el cual se manifiesta su conocimiento de las matemáticas, sus creencias en relación al tipo de conceptos que se enseñan en la educación primaria, del currículo y las decisiones que toma sobre la práctica. Es por ello que el conocimiento profesional del profesor puede ser determinante en la inclusión del álgebra temprana, específicamente, en la promoción del pensamiento algebraico temprano.

Adicionalmente, los procesos de formación, inicial y continuada, como espacios para la reflexión en y sobre la práctica y para fomentar interacciones académicas y profesionales, se han constituido también en objetos de reflexión en el campo de la investigación en educación matemática; en lo referido al pensamiento algebraico temprano, han suscitado análisis pertinentes para justificar el problema doctoral, en tanto que aportan evidencias científicas acerca de las posibles necesidades de formación manifiestas en los profesores para la promoción del álgebra en la educación primaria.

1.1.1.3 Formación de profesores en la promoción del pensamiento algebraico temprano. Para Castro y Godino (2008), en el caso del pensamiento algebraico, la formación de profesores debe constituirse en un referente de análisis, debido a que la incorporación de este exige el conocimiento profesional de quienes lo enseñan. Con estas consideraciones, se podría pensar en la necesidad de propiciar orientaciones para el trabajo algebraico escolar, las cuales, aunadas a las reflexiones sobre la práctica, pueden posibilitar cambios en relación a las decisiones que el profesor toma frente al currículo que opera en el aula, evidenciando una posible manifestación de su conocimiento profesional.

Para el caso particular del profesor de la educación básica primaria, respecto a la introducción del pensamiento algebraico temprano, cabe reflexionar cuáles podrían ser los rasgos de su formación y el tipo de instrucción que debe orientar. Al respecto, Castro et al. (2011) señalan que, la incidencia de posibles deficiencias en la formación de los profesores, podría afectar las competencias algebraicas espontáneas que manifiestan los estudiantes. En relación con este último aspecto, Castro (2011) menciona que:

> […] la mayoría de los estudios describen los logros y dificultades exhibidos por niños cuando discuten, descubren y representan las relaciones encontradas. Del conjunto de estudios reportados se concluye que los niños pueden, mediado el diseño y la instrucción apropiada, comprender tareas enmarcadas en la generalización. (p. 48)

En coherencia con la anterior idea, presentada por Castro (2011), el favorecimiento del pensamiento algebraico en estudiantes de educación básica primaria, podría lograrse siempre que existan acciones de los profesores que lo permitan. No obstante, a pesar de las necesidades manifiestas en relación con la formación de profesores para la enseñanza del álgebra en la educación primaria, Hohensee (2017) declara que, la existencia de investigaciones que ofrezcan orientaciones a los programas de formación sobre la preparación de profesores para enseñar álgebra temprana es escasa. Este desafío no solo lo experimentan los profesores en formación, también quienes están en ejercicio son convocados a vincular el pensamiento algebraico temprano en su experiencia profesional (Zapata et al., 2018).

Autores como Mason (2008) y Hohensee (2017), se refieren a las posibles dificultades asociadas con el hecho de que los profesores consigan fomentar el pensamiento algebraico temprano. Mason (2008), por ejemplo, alude a que los profesores podrían lograr este propósito, siempre que ellos logren el desarrollo de su pensamiento algebraico, condición que se podría favorecer con la participación en programas de formación y desarrollo profesional. De otro lado, Hohensee (2017) reporta, en sus estudios, la necesidad de ofrecer una preparación pertinente para los profesores en formación, debido a que, probablemente, la incorporación del álgebra en la educación primaria no será un asunto trivial para ellos.

Un análisis adicional, con relación a las implicaciones que tiene la propuesta de cambio curricular denominada álgebra temprana, es la reflexión sobre las prácticas profesionales y cómo estas se configuran para incorporar elementos del pensamiento algebraico temprano, proceso en el cual, los profesores son agentes fundamentales (Godino et al., 2012). En consecuencia, no solo el tema de la formación hace parte de las reflexiones que se suscitan a partir de las necesidades, intereses y problemas que enfrentan los profesores, también es objeto de análisis su práctica y las decisiones que pueden tomar frente a ella; al respecto, Castro y Godino (2008) precisan:

> Consideramos que es importante ayudar a los maestros en formación a comprender que las decisiones instruccionales se toman sobre lo que se sabe acerca de la comprensión que los niños tienen, y que para lograr esto se requiere que los maestros sean conscientes de los objetos y significados matemáticos puestos en juego con motivo de una actividad matemática. (p. 9)

Castro et al. (2012) consideran que, si bien es importante que los profesores logren reconocer y entender cómo se manifiesta el pensamiento algebraico en los estudiantes, también se requiere de su participación en experiencias formativas que propendan por la realización de tareas enmarcadas en dicho pensamiento. En consecuencia, podría ser necesario propiciar espacios de formación docente que permitan profundizar en el desarrollo y diseño de tareas de carácter algebraico, que convoquen a la reflexión sobre la práctica y a la vinculación de los estudiantes en estos procesos. Para Vergel (2010), este tipo de acciones puede implicar cambios en la toma de decisiones sobre el trabajo que se lleva a cabo en el aula de clase y, para el campo de la educación matemática, puede representar una línea de investigación.

La responsabilidad que pueden tener los investigadores en educación matemática frente a la formación de profesores, especialmente en el caso del pensamiento algebraico temprano, es objeto de reflexión para Ponte (2012), quien manifiesta que:

> La idea de que el profesorado es el principal agente de su formación no implica que los investigadores en educación matemática dejemos de tener responsabilidades como formadores de profesores. Cabe encontrar formas apropiadas que favorezcan los procesos naturales de desarrollo profesional del profesorado. En este contexto, surgen tres ideas fundamentales, la de colaboración, la de práctica como punto de partida de la formación, y la de investigación sobre la práctica como proceso clave en la construcción de conocimiento. (p. 92)

En este orden de ideas, la reflexión sobre la práctica y el 'aprendizaje de la práctica' (Vaillant y Marcelo, 2015; Lin y Rowland, 2016), pueden ofrecer una interpretación a la naturaleza del problema objeto de estudio en cuestión; así, también, a través de procesos de formación docente, pueden propiciarse reflexiones que convoquen a la toma de decisiones y ejecución de acciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en la educación primaria.

Poniendo en consideración que la participación de los profesores en procesos formativos posibilita reflexiones enmarcadas en el conocimiento que, generalmente, se quedan en la teoría, es importante resaltar que existe una necesidad manifiesta asociada con estructurar su conocimiento y consolidar su formación con el propósito de trascender la teoría para cualificar la práctica; en este sentido, Ponte (2012) expone:

> La formación tiende a ser vista como un movimiento "desde fuera hacia dentro", donde se espera del profesorado que asimile los conocimientos y la información que le son transmitidos, mientras que el desarrollo profesional representa un movimiento "desde dentro hacia fuera", donde se espera del profesorado que decida sobre las cuestiones a considerar, los proyectos a emprender y el modo de llevarlos a cabo. Por un lado, la formación se centra sobre todo en aquello que el profesorado no tiene y que, sin embargo, "debería tener". Por otro lado, el desarrollo profesional presta especial atención a las realizaciones del profesorado. Además, la formación tiende a ser

> vista de modo compartimentado, en asuntos o disciplinas; en su lugar, el desarrollo profesional interpreta el profesorado como un todo que conjuga los aspectos cognitivos, afectivos y relacionales. Cabe señalar, aún, que la formación parte invariablemente de la teoría y a menudo no llega a salir de la teoría, a diferencia del desarrollo profesional, que tiende a considerar teoría y práctica de forma integrada. (p. 89)

Considerando la anterior cita, la formación trasciende cuando se manifiesta una actuación decidida del profesor en busca de lograr una integración entre la teoría y la práctica; por lo cual, puede ser válido pensar, en términos de las reflexiones logradas, que la determinación y actuación del profesor ante su aprendizaje para mejorar sus prácticas, podrían ser elementos decisivos en la transformación de su conocimiento profesional y, en este sentido, se hace necesario considerar la urgencia de generar espacios de reflexión para el profesor de primaria, en los que predominen interacciones que transformen su conocimiento de la enseñanza y potencien su desarrollo profesional.

1.1.1.4. Conocimiento profesional y su incidencia en el pensamiento algebraico temprano. El conocimiento profesional no es sinónimo de dominio de contenidos disciplinares, ni didácticos (Martínez, Rodríguez y Gómez, 2017); se trata más bien de un "conjunto de informaciones, habilidades y valores que los profesores poseen procedentes, tanto de su participación en procesos de formación (inicial y en ejercicio), cuanto del análisis de su experiencia práctica" (Montero, 2001, p. 202). Pero este conjunto de saberes debe ser abundante y flexible para: fomentar la comprensión de los estudiantes, permitir al profesor comprender la naturaleza de la disciplina y posibilitar la construcción de nuevos conocimientos, permeados por la experiencia y las interacciones que suceden con los pares y con la práctica misma; de esta manera, estos aspectos pueden propiciar posibles modificaciones curriculares.

Cabe precisar que, en el estudio doctoral en cuestión, el análisis de la pertinencia de hacer modificaciones curriculares, en el marco de la propuesta álgebra temprana, sugiere una revisión centrada en el conocimiento profesional del profesor de primaria, quien debería saber lo que es esencial del álgebra, cuál es su papel en el currículo y cómo debe ser enseñada (Guimarães et al. 2006), con miras a posibilitar que los estudiantes de estos niveles promuevan su pensamiento algebraico. De allí, la necesidad de reconocer cómo se concibe en esta investigación este conocimiento y qué ocurre particularmente con él, en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

La naturaleza del conocimiento profesional subyace en la idea de que este se trata de un "conocimiento particular de un grupo social específico –el profesorado de matemáticas– que, a pesar de estar sujeto a múltiples influencias, asume su especificidad en función de su actividad práctica y de las condiciones en la cuales ésta se ejerce" (Ponte, 2012, p. 85). Así, dicho conocimiento se apoya en elementos de carácter teórico, pero también social y experiencial, orientados hacia una actividad práctica (Ponte, 2012). Esta postura para el conocimiento profesional, ofrece al presente estudio un panorama posible para entender qué ocurre con este tipo de conocimiento, cuando los profesores de primaria trabajan en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Siguiendo la línea de reflexiones frente al conocimiento profesional, es pertinente mencionar una postura ampliamente reconocida, que exalta la complejidad que subyace en el estudio del conocimiento del profesor, se trata de la teoría expuesta por Shulman (1986), que en los inicios de su trabajo distingue tres tipos de conocimiento, categorizados como: conocimiento del contenido temático de la materia, conocimiento pedagógico del contenido (asociado con el tema de la materia para la enseñanza) y un conocimiento curricular.

Shulman (1987) logra una ampliación de la noción de conocimiento inicialmente concebida, y los clasifica en siete tipos: conocimiento del contenido temático de la materia o asignatura, conocimiento pedagógico general, conocimiento curricular, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los aprendices y sus características, conocimiento del contexto educativo y conocimiento de los fines, propósitos y valores educacionales y sus bases filosóficas e históricas.

Shulman (1986, 1987) destaca el manejo de la disciplina como un componente que permite comprender la naturaleza de los conceptos, lo cual “será importante en las subsiguientes decisiones pedagógicas que consideren el énfasis curricular” (Shulman, 1986, p. 9). En esta misma línea, Potari y Ponte (2017) exaltan el saber disciplinar como un conocimiento fundamental, en tanto “los maestros necesitan saber sobre el tema que enseñan, necesitan saber cómo enseñar, y necesitan saber cómo actuar y comportarse como maestros” (p. 3). Estas posturas pueden validar, tanto la importancia del conocimiento de las matemáticas, como la complejidad del acto mismo de enseñar.

Teniendo en cuenta que en el acto de enseñar confluyen saberes de tipo profesional que permean las prácticas educativas desde ámbitos no solo pedagógicos y didácticos, sino también experienciales, relacionales, contextuales, sociales y culturales, puede ser pertinente mencionar que “conocer algo nos permite enseñarlo y conocer un contenido con profundidad significa estar mentalmente organizado y bien preparado para enseñarlo de una forma general” (Prieto y Contreras, 2008, p. 252); no obstante, es válido reconocer que el manejo de la disciplina es solo un componente y que posibles creencias asociadas con el hecho de que saber matemáticas implica idoneidad para enseñarla, pueden ser reconsideradas para exaltar que el conocimiento profesional trasciende el campo disciplinar.

La idea de que el conocimiento profesional trasciende, puede leerse en el trabajo de Ball, Thames y Phelps (2008) que, enmarcado en el conocimiento matemático para la enseñanza, tomó como uno de sus referentes el constructo propuesto por Shulman (1987) y se enfocó en que “los conocimientos matemáticos necesarios para llevar a cabo la labor de enseñanza de las matemáticas […] tienen que ver con las tareas de enseñanza y las exigencias matemáticas de esas tareas” (Ball et al., 2008, p. 395). En esta línea, dichos conocimientos no solo aluden al carácter disciplinar de las matemáticas, sino que también trascienden hasta las decisiones sobre la práctica, en las que pueden definirse las dimensiones asociadas con el conocimiento profesional del profesor expuestas por Ponte (2012).

Para referirse al conocimiento del profesor, autores como Ball et al. (2008), argumentan la importancia y necesidad de que este conozca el tema que enseña; de esta manera:

> […] no puede haber nada más fundamental para la competencia del maestro. La razón es simple: los maestros que no conocen bien un contenido no tienen probabilidades de tener el conocimiento que necesitan para ayudar a los estudiantes a aprender este contenido. (p. 404)

Considerando la anterior idea, que parece estar enfocada en el conocimiento matemático y que alude a la preparación para enseñar un contenido, no se desconoce que dicha preparación tiene elementos de fondo que no pueden evadirse ni reemplazarse con el dominio disciplinar del área y que podrían estar asociados con las experiencias del profesor, sus creencias, su identidad, su conocimiento curricular, contextual, social, su desarrollo profesional y su conocimiento profesional.

Poniendo en consideración que "el conocimiento de los maestros no es solo ´saber cosas´ (hechos, propiedades, relaciones si-entonces...), sino también conocer cómo identificar y resolver problemas profesionales y, en términos más generales, saber construir conocimiento" (Ponte y Chapman, 2006, p. 461), la línea que separa el saber y el conocer no siempre estará claramente definida, lo que posiblemente deja ver la estrecha relación que los vincula; por esta razón, puede ser necesario, para el presente estudio, considerar una postura del conocimiento profesional que enmarque varias dimensiones del mismo, pues la promoción del pensamiento algebraico temprano trasciende el conocimiento disciplinar hasta el currículo, el trabajo de los estudiantes y la práctica misma.

Mochón y Morales (2010) afirman que el conocimiento matemático para la enseñanza engloba el conocimiento útil del profesor para su práctica docente, aspecto que requiere especial atención si se desean avances significativos en educación. Aunque esta postura es clara y común para algunos investigadores (Shulman, 1986, 1987; Ponte, 1994; Borko, 2004; Ball et al., 2008; Prieto y Contreras, 2008; Potari y Ponte, 2017), también es claro que este aspecto no es suficiente para enmarcar, en un campo simplemente disciplinar, la complejidad que subyace en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

A la luz de las reflexiones hasta ahora expuestas, sería válido pensar que el aprendizaje en el campo profesional, puede determinar una forma del conocimiento del profesor, el cual es susceptible de ser revisado, cuestionado o ampliado; Speer, King y Howell (2015, citados por Potari y Ponte, 2017) hacen una reflexión acerca de la conveniencia de los marcos teóricos para estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas a nivel de primaria y mencionan que tienen que extenderse, ya que hay diferencias en la naturaleza de los conocimientos matemáticos necesarios a nivel de secundaria y universidad.

Consecuentemente, la postura de algunos investigadores (Shulman, 1986, 1987; Ponte, 1994; Borko, 2004; Ball et al., 2008; Prieto y Contreras, 2008; Potari y Ponte, 2017) frente a la relevancia que tiene el conocimiento matemático del profesor, genera especial interés en lo que puede ocurrir con los que no tienen formación específica en el área, como puede ser el caso de los profesores de la educación básica primaria en Colombia (Guacaneme, Obando, Garzón y Villa-Ochoa, 2013), pues dicho conocimiento tiene una naturaleza determinante en las decisiones sobre la práctica.

Con relación a la práctica, Ball y Cohen (1999, citados por Ponte et al., 2009) reconocen que las investigaciones con orientación hacia esta, representan un intento por ayudar a los profesores a desarrollar el conocimiento necesario para sus prácticas; pero, además, deben propiciar tareas y situaciones reflejo de la realidad del aula. Por lo tanto, muchas de las tareas que se ofrecen a los profesores, les brindan la oportunidad de experimentar el tipo de matemáticas y pedagogía que se espera que ofrezcan a sus estudiantes (Llinares, 2009b) y que contribuyen a su formación profesional.

De acuerdo con lo anterior, es posible apreciar, en esta misma dirección, la idea de Ponte (2012) acerca de que el profesor debe contar con una formación matemática apropiada, pero no solo esto, también con competencias en el campo didáctico, buenas relaciones con los estudiantes, actitud profesional ante los problemas que emerjan y la capacidad de actualización a nivel profesional. En este sentido, Ponte (2014) reconoce que, para que los profesores puedan promover o desarrollar los diferentes aspectos del pensamiento algebraico, es indispensable que ellos desarrollen su propio pensamiento.

Conseguir el desarrollo del pensamiento algebraico de los profesores de la educación básica primaria no es necesariamente un asunto trivial (Avalos y Matus, 2010); sin embargo, se podría lograr a través de experiencias de formación que consoliden una cultura profesional, en la que la colaboración y la reflexión sobre el aprendizaje de los estudiantes, sean rasgos esenciales en la transformación que demanda el sistema y las necesidades curriculares.

Las reflexiones en términos del reto que puede representar el conocimiento profesional de los profesores de primaria en el contexto del pensamiento algebraico, puede tener algunas implicaciones inmediatas o, a largo plazo; para Agudelo (2007), estas pueden estar asociadas con el posiblemente escaso conocimiento del álgebra escolar de algunos profesores de primaria, el cual repercute en la imposibilidad de promover el pensamiento algebraico de los estudiantes en estos niveles; en este sentido, Agudelo (2007) manifiesta que:

> […] la mayoría de profesores de matemáticas escolares no atribuyen las dificultades de sus estudiantes y su baja motivación por el estudio del álgebra al currículo que opera en sus aulas de clase; no están conscientes de que este currículo depende de su forma de saber matemáticas y de sus concepciones de su rol como profesores”. (p. 3)

Respecto a la postura de Agudelo (2007), una de las concepciones que se evidencian en los profesores, está asociada con que no es trascendente iniciar la enseñanza del álgebra en la primaria, en tanto que es un asunto propio de la educación secundaria. Esta situación pone de manifiesto que, posiblemente, no es reconocido el carácter algebraico de algunos conceptos estudiados en los niveles iniciales de escolaridad; por ejemplo, puede ocurrir que las propiedades de algunas operaciones básicas (estructuras aditivas y multiplicativas) no sean reconocidas como elementos que fundamentan el pensamiento algebraico y que, tal vez, no sean dotadas de sentido en las prácticas profesionales. Una condición como esta puede ameritar reflexiones sobre el conocimiento disciplinar, tanto como sobre el currículo y la práctica. Pero, especialmente, podría propiciar un análisis en términos de los cambios que pueden ocurrir en el conocimiento profesional y en las dimensiones descritas por Ponte (2012), para la promoción del pensamiento algebraico temprano.

1.1.1.5 Reflexiones sobre la posibilidad de transformación del conocimiento profesional. El conocimiento profesional trasciende, desde capacidad para aprender en procesos formativos, con objetivos y finalidades enmarcadas en la disciplina, la pedagogía o la didáctica (Prieto y Contreras, 2008), hasta reflexiones y acciones que podrían suscitar transformaciones. Es por esto que, el presente estudio, considera la conformación de un grupo de profesores que participen de un proceso de investigación, como una oportunidad para el aprendizaje, la reflexión sobre la práctica y la interacción con pares; en este sentido, la participación en procesos de formación debería tener incidencia en posibles cambios del conocimiento profesional.

El inicio del pensamiento algebraico temprano en los niveles de la educación básica primaria, puede implicar la necesidad de acciones que propendan por posibles cambios o transformaciones del conocimiento profesional. En esta línea y, tomando en consideración que la incorporación de este se proyecta como un asunto no necesariamente trivial (Agudelo, 2005; Britt e Irwin, 2008; Avalos y Matus, 2010; Castro, 2014; Hohensee, 2017), cabe la reflexión en cuanto a qué puede ocurrir con el profesor, su práctica y su conocimiento, para lograr que en su aula opere un currículo que contemple conceptos de carácter algebraico.

Como consecuencia de entender qué ocurre con el conocimiento profesional del profesor, la presente investigación requiere concebir una postura frente al mismo. En este sentido, la manifestación de una posible transformación del conocimiento es un referente en la investigación, toda vez que el problema puede advertir asuntos asociados con las dimensiones del mismo, asociadas con el conocimiento de las matemáticas, de los estudiantes y los procesos de aprendizaje, del currículo y de la práctica (Ponte, 2012). Es por ello que, en el presente estudio, se vislumbra que una posible transformación en el conocimiento profesional de los profesores de primaria, generada por la necesidad de promover el pensamiento algebraico temprano, podría estar enmarcada en las siguientes líneas:

Conocimiento de las matemáticas. Para Ponte (2012), uno de los rasgos distintivos relacionados con el conocimiento del profesor, es justamente el que se asocia con la disciplina, pues en esta interviene la especificidad de la materia que enseña. Considerando los diferentes argumentos expuestos hasta ahora (Guimarães et al., 2006; Mason, 2008; Cai y Knuth, 2011; Castro, 2011; Castro et al., 2012; Godino et al., 2012; Aké, 2014; Vergel y Rojas, 2018), que aluden a la necesidad de consolidar el conocimiento disciplinar de los profesores de primaria, para la promoción del pensamiento algebraico temprano, puede ser válido pensar que si el profesor no cuenta con las condiciones para hacerlo o no es consciente del tipo de currículo que opera en su aula, entonces podría empezar a evidenciar algún tipo de cambio cuando enmarca sus reflexiones y acciones en esta línea de trabajo.

Ponte (2012) aclara que, en este componente, no se trata de las matemáticas como ciencia, sino de la interpretación que el profesor hace en el campo de la disciplina escolar, así como de las formas de representación de conceptos y procedimientos; en este sentido, la visión que tiene el profesor de las matemáticas tiene un papel importante, pues define los aspectos conceptuales que él destaca en la misma. Esta línea posibilita una reflexión adicional en términos de la necesidad de una posible transformación, pues para el profesor de primaria, el trabajo con el pensamiento aritmético puede primar sobre el algebraico (Kieran, 2004; Agudelo, 2007; Zapatera, 2016), por lo cual, promocionar este último implicaría modificaciones en el conocimiento de las matemáticas.

Conocimiento de los estudiantes y de sus procesos de aprendizaje. En la amplia gama de diversidades propias de los estudiantes, se encuentran condiciones como: intereses, comportamientos, reacciones, valores, gustos, modos de pensar y de aprender, las cuales, para Ponte (2012), son decisivas en el trabajo del profesor. Conocer a los estudiantes, en el presente estudio, puede implicar reconocer que ellos están en condiciones de aprender conceptos de carácter algebraico, pese a ideas asociadas con concepciones que dan cuenta de que este trabajo es propio de los niveles de secundaria (Carpenter, et al., 2003; Agudelo, 2005; Derry et al., 2007; Ponte, 2014; Hohensee, 2017). Lo anterior puede evidenciar un posible cambio en el componente del conocimiento de los estudiantes, que además se asocie con una actuación del profesor que así lo posibilite (Castro 2014; Aké, 2014; Vergel y Rojas, 2018).

Promover el pensamiento algebraico temprano, reconociendo capacidades en los estudiantes para comprender conceptos algebraicos (Britt e Irwin, 2008; Castro 2014; Aké, 2014; Vergel, 2016a; Radford, 2018; Vergel y Rojas, 2018), implica que el profesor tenga el conocimiento disciplinar para entender cómo dotar de sentido los conceptos que subyacen en su práctica y cuál es el carácter algebraico de estos y, esta situación, como ya se ha mencionado, no es un asunto simple (Agudelo, 2005; Avalos y Matus, 2010; Castro, 2014; Hohensee, 2017); en consecuencia, esta condición, posiblemente, develaría cambios en el conocimiento del profesor; adicionalmente, tampoco es trivial que reconozca en las expresiones, gestos, comportamientos, lenguaje y representaciones, manifestaciones del pensamiento algebraico de los estudiantes y acciones que podrían evidenciar una promoción de este, por lo cual, el profesor debería desarrollar algún tipo de sensibilidad frente al trabajo algebraico de sus estudiantes.

Conocimiento del currículo. Tanto el conocimiento del currículo, como el modo de gestionarlo en la práctica, implica la identificación y el reconocimiento de las finalidades y objetivos principales de la enseñanza de las matemáticas (Ponte, 2012). Asuntos como: organizar contenidos, identificar materiales pertinentes, recursos para la evaluación, entre otros, que evidencien la toma de decisiones sobre la práctica, pueden ser algunos de los posibles cambios que se requieran en el conocimiento del profesor al momento de trabajar en el contexto del pensamiento algebraico temprano. Con ello, propiciar cambios en las decisiones de tipo curricular, que develen los propósitos de trascender el trabajo aritmético, característico de estos niveles (Kieran, 2004; Agudelo, 2007; Cai y Knuth, 2011; Zapatera, 2016;), puede evidenciar algunos rasgos de transformaciones curriculares.

La toma de decisiones sobre el currículo es un asunto clave al definir las prioridades que orientan el proceso de enseñanza y aprendizaje (Ponte, 2012); así mismo, esta “requiere ser constantemente alimentada y renovada, en sintonía con la correspondiente evolución de las perspectivas curriculares” (Ponte, 2012, p. 88). La idea de una revisión permanente y una renovación constante, puede convocar a asuntos como: actualizaciones curriculares, reflexiones sobre la práctica y, por ende, posibles cambios en las decisiones sobre el currículo que opera en el aula de clase. Lo anterior, para el caso del pensamiento algebraico temprano, es un componente determinante en el proceso de su promoción y vinculación en las prácticas profesionales.

Conocimiento de la práctica educativa. Para Ponte (2012), este conocimiento representa un componente fundamental, toda vez que, en él, se “incluyen las planificaciones a largo o medio plazo, tales como el plan pensado de cada sesión de clase, la elaboración de las tareas a realizar y todas aquellas cuestiones relativas a la conducción de la actividad en el aula” (p. 88); el protagonismo que Ponte (2012) confiere a este conocimiento, se debe a que en él convergen decisiones cruciales que orientan la práctica y que están mediadas por los conocimiento hasta ahora señalados (conocimiento de las matemáticas, conocimiento del currículo y conocimiento de los estudiantes y de sus procesos de aprendizaje). Así, el trabajo del profesor de primaria, en el contexto del pensamiento algebraico temprano, puede exigir un cambio en las planificaciones, en el diseño de tareas para los estudiantes, en las decisiones y acciones que orientan la labor docente, es decir en su conocimiento sobre la práctica.

En coherencia con lo anterior, la transformación podría evidenciarse considerando estos conocimientos: en el conocimiento de las matemáticas, específicamente en el campo del pensamiento algebraico temprano; en el conocimiento curricular, pues el currículo de primaria no es necesariamente reconocido como una posibilidad para promover el pensamiento algebraico; en el conocimiento de los estudiantes y sus procesos de aprendizaje, que pueden poner de manifiesto habilidades algebraicas no exploradas; y en el conocimiento sobre los procesos de trabajo en el aula, en el cual se develan las posibilidades de fundamentar el pensamiento algebraico temprano en la práctica profesional.

Hasta este punto, han sido expuestas reflexiones asociadas con la transformación del conocimiento profesional en la perspectiva de Ponte (2012), dado que en el estudio se encuentra pertinente asumir dicha postura para dilucidar los cambios que ocurren en dicho conocimiento, en el contexto del pensamiento algebraico temprano; sin embargo, no se desconoce que las distintas concepciones, relacionadas con el conocimiento profesional, podrían develar asuntos asociados con lo que el profesor sabe y cómo enseña lo que sabe.

Ponte (2014) estima que la articulación entre el contenido matemático y el conocimiento pedagógico, contribuye al desarrollo del conocimiento profesional y, para el caso del álgebra, este aspecto es particularmente importante debido a que su incursión implica modificaciones curriculares y de la práctica docente; como consecuencia, los cambios y decisiones deben estar mediados por el conocimiento profesional de cada profesor y tiene implicaciones en el mismo.

Sin dejar de reconocer el reto que la articulación mencionada por Ponte (2014) representa, puede ser pertinente precisar que esta situación sugiere reflexiones adicionales para los investigadores, puesto que “la cultura profesional que predomina en las escuelas tiende a preservase, en lugar de cuestionarlas y transformarlas” (Richit y Ponte, 2017, p. 29); adicionalmente, posibilitar tal cuestionamiento o transformación, debe implicar en el estudio, el reconocimiento de que:

> El diseño de escenarios apropiados de aprendizaje profesional para un grupo de maestros y la realización de una actividad de desarrollo profesional requiere la capacidad de recopilar toda la información necesaria sobre los profesores y sus contextos, así como una sensibilidad al tratar fenómenos emergentes a menudo contradictorios durante las actividades. Esta sensibilidad es parte de la preparación profesional de los educadores. (Ponte et al. 2009, p. 206)

Con relación a diseñar escenarios de aprendizaje profesional, cabe resaltar que, de acuerdo a la literatura revisada y analizada, se observa que la incidencia del conocimiento profesional del profesor en la inclusión del álgebra temprana, específicamente en la línea del pensamiento algebraico temprano, no está necesariamente explícita en las investigaciones indagadas; lo anterior, podría deberse a que muchas de ellas enfatizan en que para el profesor de primaria puede ser un asunto complejo (Agudelo, 2005; Avalos y Matus, 2010; Cai y Knuth, 2011; Castro, 2014; Hohensee, 2017). Sin embargo, la existencia de estudios enmarcados en programas de desarrollo profesional (Britt e Irwin, 2008; Cai y Knuth, 2011; Hohensee, 2017), dan cuenta de resultados satisfactorios en términos de la promoción del pensamiento algebraico y dejan abierta una línea de reflexión con relación a cuál fue la incidencia del profesor y de su conocimiento en estos procesos.

Algunos planteamientos frente a la transformación del conocimiento profesional (Badia y Monereo, 2004; Mochón, 2010), dejan abiertas líneas de reflexión frente a los intentos por explicar, en distintas perspectivas, asuntos como:

> […] los cambios en la enseñanza deben provenir de los cambios en el conocimiento de los profesores, en sus creencias o en el entorno del aula a menos que se ponga atención al mismo tiempo en los conocimientos del profesor y cómo lleva éstos al aula, para lo cual se tendría que motivar además un cambio de sus creencias y concepciones. (Mochón, 2010, p. 369)

En esta misma línea, Badia y Monereo (2004) exponen que el campo de la investigación tiene un tema pendiente, con relación al "desarrollo de una teoría estrictamente psicológica que explique el cambio o transformación del conocimiento de los profesores" (p. 48). Para el caso específico de lo que ocurre con el conocimiento profesional, en lo relacionado a la necesidad de promover el pensamiento algebraico temprano en la educación básica primaria, no se pudieron evidenciar estudios que expongan planteamientos explicativos al respecto.

Para Koellner et al. (2011), existe un amplio consenso acerca de la necesidad de cambios en la forma en que los docentes se acercan a la instrucción matemática, particularmente a la enseñanza del álgebra. En este sentido, Koellner et al. (2011) también exponen que "muchos estudios han demostrado que las concepciones de los docentes sobre las prácticas son resistentes al cambio" (p. 450). Pese a las posibles tensiones que puede generar el cambio, no se puede desconocer que este debería ser un aspecto esencial, que debe ser atendido para lograr avances en la educación (Mochón, 2010).

Finalmente, es fundamental precisar que la necesidad de estudiar el conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano, se debe a que este involucra aspectos relacionados con la disciplina, el currículo, los estudiantes y la práctica; así, considerando que el problema puede develar elementos asociados con lo anteriormente mencionado, cobra sentido analizar y reflexionar sobre la elaboración de posturas explicativas que permitan comprender la naturaleza de una posible transformación en el conocimiento profesional.

1.1.2. Justificación práctica del problema. La justificación práctica está determinada por las interacciones que se suscitaron en un grupo de profesores de educación básica primaria del departamento de Antioquia. Estas han develado necesidades manifiestas por ellos, asociadas con el conocimiento que exhiben para realizar tareas de formación en el campo del pensamiento algebraico escolar, para elegir y diseñar tareas para los estudiantes en esta misma línea y para promover formas de pensar algebraicas en sus prácticas.

El presente apartado da cuenta de cómo mi experiencia profesional e investigativa me ha posibilitado analizar algunas inquietudes de los profesores mencionados, en cuanto a la iniciación del pensamiento algebraico en la educación básica primaria. Generalmente, en estos niveles, no se cuenta con docentes especializados en matemáticas (Guacaneme, Obando, Garzón, Villa-Ochoa, 2013), situación que propicia una reflexión profunda, no solo frente al currículo, sino también a las posibilidades de promover dicho pensamiento en los primeros grados escolares y al conocimiento profesional del profesor de primaria, como ya fue expuesto en apartados anteriores.

1.1.2.1. La experiencia profesional como generadora de reflexiones. Los trabajos realizados como investigadora y formadora de profesores, a través de diplomados, cursos de actualización, programas de desarrollo profesional, formación inicial y continua, tanto en el municipio de Medellín como en regiones del departamento de Antioquia, me han permitido observar, reconocer y reflexionar respecto a inquietudes y necesidades asociadas con el conocimiento de la enseñanza de los profesores; este se constituye en un objeto de análisis emergente en mi labor, pues en el campo de la educación matemática es recurrente encontrar que los objetos de investigación se originan en la propia práctica profesional del investigador (Borba y Araújo, 2008).

En el campo de mi práctica profesional, en el año 2016, tuve la oportunidad de trabajar como formadora en el marco de la realización de un programa de desarrollo profesional, un diplomado denominado “Matemáticas en Contexto”, que fue ofrecido a profesores de regiones de Antioquia. En este escenario, tuve la posibilidad de conocer y trabajar con un grupo de profesores de todos los niveles, quienes, inquietos frente a sus necesidades formativas, pusieron de manifiesto algunas reflexiones que pueden asociarse con el conocimiento de las matemáticas, del currículo, de los estudiantes y de los procesos de trabajo en el aula.

Adicionalmente, en mi rol de investigadora, me he preocupado por observar y analizar cuáles han sido los conceptos matemáticos que ofrecen dificultades a los profesores con los que he trabajado como formadora, y este análisis ha permitido reconocer que el pensamiento algebraico es uno de los que genera mayores inquietudes en ellos, especialmente en la educación básica primaria. Pero esta no es una situación que se evidencia únicamente en mi práctica profesional, pues las perspectivas teóricas y metodológicas presentadas en este capítulo, también develan asuntos similares (Kaput, 2000, 2008; Blanton y Kaput, 2002; Kieran, 2004; Carraher y Schlieman, 2007; Derry et al., 2007; Cai y Knuth, 2011; Brizuela et al., 2013; Godino et al., 2012; Vergel, 2016b; Cañadas y Molina, 2016; Fernández e Ivars, 2016).

En coherencia con lo anterior, la experiencia del trabajo con profesores y las reflexiones que se suscitan en las diferentes interacciones con ellos, me han permitido reconocer que tienen inquietudes relacionadas con el pensamiento algebraico temprano y con el diseño de tareas enmarcadas en este conocimiento. Particularmente, los profesores manifiestan necesidades en relación al reconocimiento de su estructura y a cómo promoverlo en la educación básica primaria.

Dichas necesidades, permiten que los profesores con los que he trabajado reconozcan impedimentos para realizar tareas de carácter algebraico, limitaciones frente al conocimiento para incluir o reconocer conceptos de este tipo en el currículo de primaria e inquietudes frente a sus posibilidades para promover el pensamiento algebraico entre sus estudiantes. Si se pone en consideración que ellos no son especialistas en matemáticas, como muchos de los profesores de estos niveles (Guacaneme-Suárez, Obando-Zapata, Garzón y Villa-Ochoa, 2017), incluso, su pregrado no es en dicha área, además, han tenido poco acceso a programas de formación o desarrollo profesional, entonces tiene sentido que tales impedimentos se pongan de manifiesto a nivel profesional y en sus prácticas de aula.

A la luz de lo anterior, cabe mencionar que los procesos de formación y desarrollo profesional en los que he trabajado con los profesores, posibilitan el fortalecimiento de aprendizajes, reflexiones sobre la práctica, la experiencia y la consolidación de interacciones sociales y académicas; de este modo, se convierten en una oportunidad para enriquecer la actividad docente, toda vez que permiten develar tanto las necesidades de tipo disciplinar, didáctico y pedagógico, como las fortalezas de la práctica profesional.

Se hace necesario resaltar que, las inquietudes expresadas por los profesores me han convocado a reflexionar como investigadora, y también, han sido objeto de análisis en algunos episodios de los encuentros llevados a cabo en el marco de procesos de formación continua y desarrollo profesional, donde las tareas propuestas han puesto en evidencia necesidades asociadas con el conocimiento de la enseñanza, reconocido por Ponte (2012) como conocimiento profesional.

Como consecuencia de las acciones expuestas hasta este punto, se origina en mi práctica profesional un objeto de investigación asociado con el conocimiento profesional del profesor de primaria en el contexto del álgebra. En este caso particular, los profesores de educación básica primaria con los que he tenido la oportunidad de trabajar como formadora, reconocen que, debido a que su conocimiento algebraico puede no ser suficiente, han decido obviar la promoción de este, entre sus estudiantes. De este modo, se puede apreciar que no solo asuntos relacionados con el conocimiento de la disciplina se convierten en objeto de reflexión, sino también los relacionados con el currículo que opera en sus prácticas, como se puede observar a continuación.

1.1.2.2. Reflexiones sobre el currículo y sobre la práctica. El currículo, como objeto de reflexión para los profesores, se ha constituido en uno de los elementos de mayor atención en sus prácticas. Particularmente, el estudio de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas les ha posibilitado distinguir tres componentes, estrechamente vinculados pero claramente diferenciados: los pensamientos matemáticos (numérico y sistemas numéricos, espacial y sistemas geométricos, métrico y sistemas de medidas, variacional y sistemas algebraicos y analíticos, y aleatorio y sistemas de datos), los contextos para el desarrollo de las matemáticas escolares (matemáticos, cotidianos y de otras ciencias) y los procesos matemáticos (formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos) (MEN, 1998). No obstante, los profesores reconocen que, en sus prácticas, debido a su escasa formación en el área de las matemáticas, priman el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, tanto como la ejercitación de procedimientos y algoritmos, condición que minimiza la presencia de los demás componentes en el aula de clase.

Estas particularidades ameritan una reflexión adicional, toda vez que los anteriores componentes son un referente en todo diseño curricular de la educación básica (primaria y secundaria) y media (académica y técnica), para la organización del trabajo escolar; esta condición presupone que los profesores deberían conocer las características de los referentes curriculares colombianos y que estas deberían permear sus prácticas, sin embargo, de acuerdo con las manifestaciones de los profesores, se observa que esto ocurre parcialmente.

En coherencia con lo anterior, uno de los componentes que recibe menor atención en la educación básica primaria, es el pensamiento variacional, según lo expresan los profesores con los cuales he trabajado en procesos de formación. Las razones para ello pueden aludirse a que este se asocia con: el estudio de reglas de formación, la formulación de conjeturas, la generalización y la argumentación (MEN, 2006); se resalta que el conocimiento que tienen los profesores de estos aspectos puede ser reducido, lo cual imposibilita desarrollar formas de pensar algebraicamente en sus estudiantes.

El pensamiento variacional es entendido en los Estándares Básicos de Competencias como aquel que “tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos” (MEN, 2006, p. 66). En particular, los profesores aceptan que este no es reconocido como un pensamiento sobre el que se deba profundizar tanto como en el numérico (para el caso de primaria); y consideran que, con trabajar algunas secuencias, logran enmarcar la esencia de este pensamiento; sin embargo, estas son trabajadas sin profundidad.

Partiendo de los supuestos anteriores y, considerando que el pensamiento variacional concibe como uno de sus propósitos posibilitar, en la educación básica primaria, secundaria y media, un acercamiento a la comprensión y uso de los sistemas analíticos para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico (MEN, 2006), no se puede desconocer la necesidad e importancia de que en la educación básica primaria se fortalezca el pensamiento algebraico; este último, está asociado con formas de pensar dentro de actividades como: analizar las relaciones entre las cantidades, observar la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir (Kieran, 2004).

1.1.2.3. Encuentro preliminar, objeto de reflexión. Previo al inicio oficial del desarrollo del trabajo de campo, se propuso a los profesores que aceptaron hacer parte de la investigación, asistir a un encuentro en el cual se presentó de manera oficial la propuesta para el desarrollo de las actividades; en este espacio se buscó indagar por las necesidades e intereses formativos del grupo. Así mismo, se desarrollaron actividades con las cuales se exploraron conceptos de carácter algebraico en dos líneas específicas de este pensamiento: (a) el reconocimiento de estructuras y relaciones, y (b) la búsqueda de patrones y generalizaciones. El desarrollo de estas permitió reafirmar reflexiones de los profesores, que develaban inquietudes relacionadas con conceptos de carácter algebraico, con las posibilidades que tienen de realizar y proponer tareas en esta línea, tanto como de promover pensamiento algebraico entre sus estudiantes.

La intención del encuentro previo fue ambientar la preparación del trabajo de campo; es así como, fue posible crear un espacio académico para el desarrollo de algunas tareas, enmarcadas en el pensamiento algebraico escolar, las cuales suscitaron reflexiones entre los profesores y en mí, como investigadora. Los cuatro profesores que aceptaron participar de manera voluntaria en la presente investigación, son nombrados a través de seudónimos (Maritza, Gina, Edier y Julieth), considerando aspectos éticos y de confidencialidad. Algunas de las ideas expuestas por los profesores, durante el encuentro preliminar, exhiben una premisa que ha sido objeto de análisis en mis reflexiones, relacionada con la existencia de una tendencia a fortalecer el pensamiento aritmético en primaria, restando importancia a otros pensamientos, entre ellos, el algebraico (Kieran, 2004; Agudelo, 2007; Cai y Knuth, 2011; Koellner, et al., 2011; Zapatera, 2016). Esta situación podría deberse a que el conocimiento matemático de los profesores puede requerir fundamentarse en lo referido al pensamiento algebraico temprano, para poder entender su esencia y su presencia en los distintos componentes de la matemática escolar, especialmente en el pensamiento numérico.

Es precisamente en el marco del pensamiento numérico, que se orientó en el encuentro preliminar, una actividad relacionada con el algoritmo de la división; así, los conversatorios se enfocaron en las principales dificultades que tienen los estudiantes para aprender y comprender el proceso de dividir y las estrategias que los profesores utilizan para enseñarlo. Al respecto, se suscitaron reflexiones asociadas con la didáctica, con el conocimiento disciplinar, con la motivación de los estudiantes, con la abstracción que exigen estos conceptos, pero, particularmente, con el carácter algebraico de dicho algoritmo. Presentaré un episodio, producto del encuentro preliminar, que develó algunos de los asuntos mencionados y que emergieron en el transcurso del encuentro en mención, en el cual se suscitaron algunas reflexiones, a la luz de las actividades desarrolladas.

En lo referido al algoritmo de la división, el desarrollo de la actividad propuesta inició con un conversatorio acerca de asuntos como: ¿cuáles son las estrategias que utilizamos para enseñar a dividir?, ¿cuáles son las mayores dificultades que se presentan en el proceso de enseñar a dividir?, ¿cómo entendemos el algoritmo de la división?, ¿este algoritmo tiene un carácter aritmético o algebraico? (todos estos asuntos se amplían en el capítulo de análisis del presente estudio). Las respuestas dadas a estos planteamientos, pusieron en evidencia que los profesores reconocen este como un concepto que enmarca elementos aritméticos y sin conexión con componentes de carácter algebraico.

En la línea de la idea anterior, una de las profesoras participantes mencionó que reconoce el algoritmo de la división, como la prueba para verificar que una división es correcta, pero que no hay nada algebraico en ese concepto, pues todo es aritmético, desde el proceso de dividir hasta el proceso de la prueba. El resto del grupo de profesores coinciden con esta respuesta y, en general, sus intervenciones permiten interpretar que, posiblemente, los profesores no reconocen las relaciones de dependencia que subyacen en el algoritmo de la división, o la posibilidad de explorar formas de pensamiento algebraico, a partir del estudio del este algoritmo.

La actividad propuesta, enmarcada en el algoritmo de la división, tenía varias intenciones adicionales: propiciar el reconocimiento de un conjunto y una operación abstracta (denominada asterisco, *), estudiar las propiedades que se cumplen en este conjunto con dicha operación y analizar el proceso de solución de una ecuación en este conjunto. La tarea tuvo que hacerse de manera gradual, dado que los profesores no estaban familiarizados con este tipo de problemas. La indicación inicial era definir el conjunto de los posibles residuos que resultan cuando dividimos un número natural entre tres.

Inicialmente los profesores no lograron dirimir el problema, solo cuando se desarrollaron ejemplos considerando diferentes situaciones consiguieron proponer el conjunto. Es así como, se definió una estructura de residuos $[Z]_3 = \{0, 1, 2\}$, y una ley de formación que indicaba que para encontrar el resultado de operar dos elementos a y b, pertenecientes al conjunto $[Z]_3$, se debe: sumar ambos elementos $(a + b)$, dividir el resultado de la suma entre tres, esto es, $(\frac{a+b}{3})$, para, finalmente, determinar el residuo de dicha división; este residuo r es el resultado de la operación indicada, es decir, $a * b = r$. A continuación, se presentan en la tabla 1, algunos apartados de los diálogos que emergieron de la realización de esta tarea por parte del grupo de profesores.

Tabla 1. Diálogo sostenido con los profesores durante el desarrollo de la primera parte de la tarea preliminar

Investigadora: *¿cuántos y cuáles residuos se pueden obtener en el proceso de dividir un número natural entre tres?*
Los profesores piensan y empiezan a responder.

Gina: *infinitos números.*

Edier: *eso depende de cuál sea el número natural que estoy dividiendo.*

Maritza: *sí, son infinitos los residuos.*

[El consenso inicial de los profesores, fue que la cantidad de residuos era infinita].

Investigadora: *entonces, ¿podemos encontrar algunos de ellos?*

Julieth*: solo algunos.*

Investigadora: *¿cómo podemos hacerlo?*

Edier*: hay que hacer algunas divisiones.*

[Pedí a los profesores dividir distintos números naturales entre tres. Luego de realizar las divisiones, concluyeron que los posibles residuos eran cero, uno y dos; el conjunto fue nombrado como $[Z]_3$. Con el conjunto definido, pasamos a analizar la ley de formación que permitiría operar estos elementos].

Investigadora: *vamos a operar los elementos del conjunto $[Z]_3$. Pero la operación que definiremos no es convencional, es una operación con unas características especiales. Así, para encontrar el resultado de operar dos elementos del conjunto debemos: sumar ambos elementos, dividir el resultado de la suma entre tres, y determinar el residuo de dicha división, el cual será el resultado de la operación, es decir, el residuo es el resultado que estamos buscando. Llamaremos a esta operación asterisco (*).*

[Los profesores analizan esta forma de operar y discuten entre sí lo que lograron interpretar de la misma].

Edier*: a ver, el divisor es el tres, y el dividendo es… lo que me dé la suma de los dos números que tome. Pero si por ejemplo me da uno divido tres, eso no se puede hacer. ¿Entonces?*

Maritza: *uno divido tres sí se puede hacer, pone cero al cociente.*

Investigadora*: ¿y en el residuo qué se obtiene?*

[Los profesores hacen la operación y concluyen que obtienen uno en el residuo].

Investigadora: *muy bien, entonces para este caso diremos que, por ejemplo, cero operado con uno da como resultado uno, pero ese uno es el residuo obtenido. Vamos a hacerlo con todos los elementos.*

Gina: *¡son muchas operaciones! Todos con todos.*

Julieth: *no son tantas, porque algunos resultados son iguales.*

[Para facilitar el registro de los resultados, propuse a los profesores realizar una tabla de doble entrada para hacer una representación tabular de los resultados obtenidos].

Fuente. Fragmento tomado del archivo de audio m2_28_10_2017_min10_32.

Para presentar los resultados, los profesores debieron registrar en una tabla de doble entrada los residuos obtenidos en cada proceso. No todos llegaron a un consenso, por lo cual fue necesario revisar cómo se estaba realizando la operación propuesta. La tabla 2 muestra cuáles fueron las elaboraciones de los profesores.

Tabla 2. Representaciones tabulares elaboradas por los profesores

*****	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

Construcción de la profesora Gina

*****	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	1

Construcción del profesor Edier

*****	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Construcción de las profesoras Julieth y Maritza

Fuente. Transcripción del registro tomado del archivo fotográfico m2_28_10_2017.

La representación tabular posibilitó comprender cómo había sido entendida la operación abstracta (*); en el caso de la profesora Gina, ella registró los resultados obtenidos al sumar los dos elementos del conjunto; mientras que el profesor Edier registró los resultados de cada división. Las profesoras Julieth y Maritza, quienes registraron correctamente los resultados de la operación, explicaron este proceso a sus compañeros. Una vez entendida la operación abstracta, los profesores mencionaron que este tipo de actividades tienen un carácter algebraico implícito, por las posibilidades de abstracción y por el tipo de operación y representación que se hace en la misma. Algunas de las reacciones de los profesores se registran en la tabla 3.

Tabla 3. Reacción de la profesora Julieth frente a la operación abstracta

[…] las operaciones con las que estamos acostumbrados a trabajar, son la suma, la resta, la multiplicación y la división; esta operación asterisco (*) es muy interesante, exige muchas abstracciones, me gustó mucho porque me ayuda a relacionar de manera diferente los números de un conjunto, es como hacer varios procedimientos para buscar un resultado al operar los elementos del conjunto. La forma de representar los resultados, también es muy interesante, los razonamientos no son solamente numéricos, como que van más allá de lo aritmético.

Fuente. Fragmento tomado del archivo de audio m2_28_10_2017_min10_32.

La actividad llamó la atención de los profesores, por dos situaciones; en primer lugar, las reflexiones logradas por ellos develan que el proceso de abstracción e interpretación de las leyes de formación propuestas exigen un conocimiento matemático de conceptos comúnmente estudiados en sus clases; sin embargo, parece ser que, dicho conocimiento, requiere ser refinado y que, para ello, es necesario consolidar espacios en los que se pueda profundizar en estos temas. En segundo lugar, llama la atención de los profesores, el cómo diseñar tareas que propendan por la abstracción, cómo promoverla en sus prácticas y las ventajas que tiene hacerlo. Al respecto, el consenso de los profesores es que ellos deben aprender mejor este tipo de conceptos matemáticos, para poder enseñarlos y, sobre todo, para proponer tareas asociadas con los mismos.

Cabe precisar que este es solo un episodio preliminar que condujo a esclarecer el diseño de otros, que evidencian el mismo interés por parte de los profesores en relación a nociones asociadas con el pensamiento algebraico. Así, por ejemplo, después de la puesta en común y de consensuar los razonamientos exhibidos por los profesores en el desarrollo de la tarea anteriormente presentada, pasamos a analizar algunas propiedades de los números reales, con miras a explorar qué uso hacen de estas en el proceso de solución de una ecuación. Para tal efecto, la segunda parte de la actividad propendió por el análisis de las propiedades que se cumplen en los números reales con la operación adición y en el conjunto $[Z]_3$ con la operación asterisco. A continuación, en la tabla 4, se presentan algunas intervenciones que han sido objeto de reflexión con relación al trabajo realizado con profesores.

Tabla 4. Diálogo sostenido con los profesores durante el desarrollo de la segunda parte de la tarea preliminar

Investigadora: *¿cuáles propiedades se cumplen en los números reales, con la operación adición?*

Maritza*: asociativa y conmutativa.*

Investigadora: *¿qué uso hacemos de cada propiedad?*

Maritza: *pues las usamos cuando estamos sumando números, para encontrar los resultados con más facilidad.*

Edier: *sí, para eso son.*

Investigadora: *en el proceso de solución de una ecuación, ¿son utilizadas?*

Gina: *no, a menos que necesitemos cambiar el orden de los números o asociar para totalizar un resultado.*

Investigadora: *y ¿cuáles otras propiedades trabajamos con los estudiantes?*

[Ante el silencio de los profesores, proseguí con la intervención].

Investigadora: *continuando con la reflexión respecto a cuáles propiedades trabajamos en el aula, les pregunto, ¿cómo entendemos la propiedad clausurativa?, volvamos al conjunto* $[Z]_3$*, con la operación asterisco, ¿esta propiedad se cumple?*

Maritza: *esa propiedad casi no se trabaja, yo no la enseño, recuerdo que un natural sumado con un natural, da un natural, entonces en la tabla si se cumple.*

Investigadora: *y ¿qué pasa con las otras propiedades?*

Julieth: *¿cuáles serían las otras?*

Investigadora: *por ejemplo, que exista un módulo en la suma, o en la multiplicación…, que existan elementos inversos para cada elemento, dependiendo del conjunto…, además, ¿qué uso hacemos de estos conceptos cuando resolvemos una ecuación?*

Edier: *ah, lo que menciona no lo reconocía como propiedades precisamente, y usar esas propiedades en una ecuación como tal, yo no lo hago; no sé mis compañeras.*

Maritza: *no, yo tampoco.*

Julieth: *ni yo.*

Gina: *yo tampoco, solo la conmutativa y la asociativa, como dije antes.*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de audio m3_28_10_2017_min12_33.

Después de reflexionar al respecto, y de tratar de dirimir las cuestiones planteadas en el transcurso del desarrollo de la tarea en cuestión, los profesores concluyeron que la existencia del elemento neutro e inverso (cabe mencionar que ellos asocian estas existencias con la propiedad modulativa e invertiva), en la adición y multiplicación de números reales, no son relevantes en el proceso de solución de una ecuación. Además, presentaron confusiones con relación a que el número cero en la adición, y el número uno en la multiplicación, tenían la misma función; en consecuencia, las definiciones de elemento neutro e inverso no son generales para ellos, pues las entienden como casos específicos y aislados que ocurren en conjuntos con las operaciones básicas y no como un concepto que se puede generalizar.

La coincidencia en el poco o ningún uso (consciente) de las propiedades de los números reales, en el proceso de solución de una ecuación, condujo a variadas reflexiones entre el grupo de profesores; estas apuntaron a asuntos específicos de sus prácticas: la planeación, el conocimiento matemático, las tareas que proponen a sus estudiantes, la comprensión de los alcances y limitaciones del currículo institucional, la trascendencia de estos conceptos en la vida académica de sus estudiantes y la importancia de comprender generalizaciones, relaciones y estructuras matemáticas para poder enseñarlas. Por consiguiente, muchas de las ideas emergentes se han enfocado en dos asuntos de especial interés en la práctica de los profesores: su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano y la promoción de este en sus prácticas.

Las reflexiones que emergen de este trabajo preliminar, evidencian asuntos del conocimiento matemático, en particular, en lo referido al acceso al pensamiento algebraico; los profesores manifiestan que, generalmente, han enseñado la aritmética sin establecer vínculos con otros temas del currículo y, en este sentido, desconocen que la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico y puede ser vista como parte del álgebra, en lugar de ser vista como un dominio claramente distinto (Carraher y Schlieman, 2007).

Las ideas expuestas por los profesores de primaria, objeto de análisis de mis reflexiones, develan un asunto importante, que es enseñar aritmética restando importancia a la generalización, la cual es un factor inherente al pensamiento algebraico (Carraher y Schlieman, 2007). Esta situación podría deberse a que el conocimiento matemático de los profesores requiere fundamentarse en el marco del pensamiento algebraico, haciendo énfasis en su conocimiento sobre generalizaciones, estructuras y relaciones algebraicas.

En coherencia con lo anterior, no solo el conocimiento matemático referido al pensamiento algebraico ha sido una inquietud manifiesta por los profesores, sino que también mencionan que en el currículo de su institución es casi imperceptible la presencia de conceptos asociados con el álgebra y que en sus prácticas ocurre lo mismo. Estas situaciones han propiciado reflexiones referentes a la práctica profesional y al conocimiento sobre la enseñanza.

Otra de las actividades preliminares propuestas en el encuentro realizados con los profesores, sugirió un conversatorio en el cual pusieron de manifiesto algunos elementos que permiten caracterizar su práctica en relación al pensamiento algebraico temprano enmarcado en secuencias, búsqueda de patrones y generalidades, y al tipo de tarea que proponen para promover dicho pensamiento. Al respecto, se pueden mencionar asuntos como los que se presentan en la tabla 5.

Tabla 5. Argumentos provistos acerca del tipo de tarea que proponen los profesores

Julieth*: yo no trabajo mucho las secuencias, normalmente les pongo una ficha (copia extraída de un texto) o en la guía encuentran actividades para completar espacios de números que faltan, por ejemplo, de dos en dos, de tres en tres, los niños completan los espacios y casi siempre lo hacen bien y ahí es como si trabajaran con incógnitas también.*

Gina: *a mí me gusta trabajar las secuencias con figuras, por ejemplo: triángulo, cuadrado, círculo, triángulo, ____, _____, y que ellos completen lo que sigue. También lo hago con frutas: uvas, pera, manzana, fresa, uvas, ____, manzana, ____ (los espacios son completados por los estudiantes).*

Maritza*: para trabajar la variación, yo los pongo a comparar figuras y a colorear en qué se diferencian unas de las otras, a los niños les gusta mucho hacer esas actividades.*

Edier: *yo trabajo con figuras geométricas para que encuentren una regularidad, pero esas tareas las hago cuando nos toca geometría.*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de audio m3_28_10_2017_min15_53.

Los ejemplos provistos por los profesores fueron similares; además, en sus reflexiones, coincidían cuando mencionaban que con estas actividades buscan que los estudiantes comprendan la variación o el cambio. En este espacio, los profesores describieron sus prácticas, detallaron el tipo de tareas que proponen a sus estudiantes, las fuentes donde las consultan y los resultados de su aplicación; estas reflexiones, además de permitir una visión global de las prácticas de los profesores, también pudieron dar cuenta de que la búsqueda de generalizaciones no es un objetivo en sus prácticas y que, posiblemente, consideran que los estudiantes no están en condiciones de lograrlas.

Para concluir este apartado, es necesario precisar que la propuesta curricular de álgebra temprana presenta concepciones amplias, como puede ser el estudio y la generalización de patrones, de relaciones numéricas, de relaciones entre estructuras algebraicas, de propiedades aritméticas, la caracterización de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio y comprensión de estructuras abstraídas, de cálculos, de relaciones y la modelización (Vergel y Rojas, 2018). Es por ello que el presente estudio se enfoca en la línea de trabajo referida al pensamiento algebraico temprano, específicamente en el componente de estructuras y relaciones, y la generalización de patrones, como se pudo observar en el encuentro preliminar. Este, además, puso de manifiesto una necesidad de generar cambios en el conocimiento de los profesores en el contexto del pensamiento algebraico.

1.1.3. Pregunta de investigación. De acuerdo al panorama de ideas expuestas en este apartado, cabe mencionar que los profesores logran reflexiones en términos de su conocimiento profesional y estas podrían enmarcarse en las distintas dimensiones propuestas por Ponte (2012). Dichas reflexiones se enfocan en el conocimiento de los profesores en un contexto específico, el pensamiento algebraico temprano, el cual sugiere hacer revisiones y posibles modificaciones sobre la práctica, pues trabajar en esta línea y promover formas de pensar algebraicas entre los estudiantes, se constituye en un reto que puede modificar el conocimiento profesional de los profesores de primaria.

Así mismo, en coherencia con las perspectivas teórica y metodológica, se evidencia que es viable pensar en una revisión centrada en el conocimiento del profesor, con miras a la promoción del pensamiento algebraico temprano. En este escenario de ideas analizadas, el estudio doctoral en cuestión propone la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano?

1.2. Objetivo de la investigación

Las diferentes consideraciones teóricas y metodológicas en diversos estudios (Kieran, 2004; Carraher y Schlieman, 2007; Derry et al., 2007; Cai y Knuth, 2011; Godino et al., 2012; Brizuela et al., 2013; Vergel, 2016a), aunadas a mi experiencia profesional, permiten dilucidar posibles ideas que se focalizan en el requerimiento de que los profesores de la educación primaria fundamenten su conocimiento profesional con relación al pensamiento algebraico temprano; adicionalmente, dada la necesidad, justificación y pertinencia de incluir la enseñanza del álgebra en estos niveles de escolaridad, parece ser necesario que dicho conocimiento sea susceptible de transformaciones.

En este sentido, la promoción del pensamiento algebraico de los estudiantes es una tarea que corresponde a los profesores de estos niveles; asumirla implica reflexiones y acciones no solo frente al conocimiento matemático, sino también frente al conocimiento del currículo, de los estudiantes y de los procesos de trabajo en el aula. Así, para llevar a cabo la investigación en cuestión, se propone el siguiente objetivo general: analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

2. REFERENTES TEÓRICOS

Las consideraciones teóricas expuestas en este apartado, hacen parte de los referentes que son objeto de análisis en el trabajo doctoral; estas constituyen un punto de partida para la investigación y aportan ideas teóricas que podrían permitir, tanto la interpretación de cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional, como la proposición de aportes teóricos al respecto, en el contexto del pensamiento algebraico temprano. Por lo tanto, cabe mencionar que el interés investigativo por elaborar una postura o aproximación explicativa, para referir la transformación del conocimiento profesional, requiere enmarcar el estudio en un diseño de teoría fundamentada; por lo anterior, no se asume un marco teórico en la investigación, pues se espera que la postura construida dé cuenta de dicho marco, pero teniendo en cuenta unos elementos teóricos, los cuales se presentan a continuación.

El conocimiento profesional del profesor de matemáticas constituye un referente teórico en la presente investigación; este constructo ha sido ampliamente reconocido en el campo de la Educación Matemática, convirtiéndose en objeto de análisis en diversos estudios (Shulman, 1986; Ponte, 1992, 1994, 1999; Ponte y Chapman, 2006; Ponte y Chapman, 2008; Ball et al., 2008; Ponte, 2012). En este, particularmente, dicho conocimiento se propone a la luz de la perspectiva expuesta por Ponte (2012), quien considera, entre diversos aspectos, uno designado como conocimiento didáctico. En este último se reconocen cuatro dimensiones: conocimiento de las matemáticas, del currículo, de los estudiantes y de los procesos de trabajo en el aula; es por esto que, estas dimensiones, son foco de atención en el desarrollo del estudio en cuestión.

Adicionalmente, para efectos del desarrollo de la presente investigación, es necesario asumir una postura teórica con relación a otro referente, el pensamiento algebraico temprano, debido a que este constituye un contexto pertinente para evidenciar aspectos relevantes relacionados con la pregunta de investigación; en esta línea, se ponen en consideración los planteamientos expuestos por Radford (2018), confirmados por Vergel

(2015a, 2015b, 2016a, 2016b, 2016c) y Vergel y Rojas (2018), acerca del pensamiento algebraico temprano. A continuación, se presentan algunos componentes relacionados con los referentes teóricos de la investigación, en las líneas del conocimiento profesional del profesor y del pensamiento algebraico temprano.

2.1. Algunas posturas teóricas para el conocimiento profesional del profesor

Un elemento de análisis del presente estudio se enmarca en los problemas teóricos y metodológicos que se alcanzan a vislumbrar en algunas investigaciones (Kaput, 1998, 2000; Kieran, 2004; Derry et al., 2007; Carraher y Schlieman, 2007; Cai y Knuth, 2011; Godino et al., 2012; Brizuela et al., 2013; Vergel, 2016a), cuyo objeto de reflexión ha sido el pensamiento algebraico y el requerimiento de su presencia e inclusión en los primeros grados de escolaridad. Esta condición convoca a poner el foco de atención en el profesor de matemáticas y en su formación, para que pueda responder a esta necesidad a nivel disciplinar, metodológico y práctico; es por ello que, de manera específica, este apartado se enfoca en el conocimiento profesional del profesor y cómo este se puede configurar en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Considerando la revisión de la literatura y las reflexiones que esta suscita, se presentan algunas posturas epistemológicas que dan cuenta de constructos que permiten interpretar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y que han propiciado el planteamiento de teorías y modelos que ofrecen un acercamiento al mismo. Si bien es reconocido que no hay un consenso o acuerdo universal acerca de un marco teórico que describa el conocimiento de los profesores de matemáticas (Rowland y Ruthven, 2011), es claro que, en los fundamentos que sustentan la validez y pertinencia de cada constructo propuesto, se vislumbran algunos elementos transversales y comunes permeados por el conocimiento y la experiencia de los investigadores.

Particularmente, la postura teórica de Shulman (1986, 1987) para referirse al conocimiento didáctico del contenido, propio de los profesores, manifiesta que este constituye:

> […] la mezcla entre el contenido y la didáctica por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses de los alumnos, y se exponen para la enseñanza. (Shulman, 1987, p. 8)

En coherencia con lo anterior, Shulman (1986) se refiere al conocimiento didáctico del contenido como un conocimiento indispensable para la enseñanza, toda vez que involucra los tópicos a enseñar y sus formas de representación, ilustración, ejemplificación, explicación y demostración, para hacerlos comprensibles para otros. Para Shulman (1986), lo anterior, implica proponer una organización del conocimiento; inicialmente, lo hace en tres categorías: (a) el conocimiento del contenido de la materia, referido a los conceptos y procedimientos a estudiar; (b) el conocimiento pedagógico general, asociado con formas de representación posibles y estrategias para el aprendizaje de los estudiantes; y (c) el conocimiento del currículo, relacionado con las formas de concebir los programas académicos y estructuras curriculares; posteriormente, Shulman (1987) extiende estas categorías, vinculando una nuevas.

La ampliación sugerida por Shulman (1987) es coherente con la necesidad de que los profesores conozcan las dinámicas de sus aulas de clase y los contextos donde enseñan; así, agrega cuatro categorías nuevas: (d) el conocimiento pedagógico del contenido; (e) el conocimiento de las características, los aspectos cognitivos y la motivación de los estudiantes; (f) el conocimiento de los contextos educativos y, (g) el conocimiento de las finalidades, valores educativos y objetivos educativos; esta extensión posibilita una consolidación del modelo de conocimiento didáctico.

En coherencia con los planteamientos expuestos por Shulman (1986, 1987), la necesidad de definir y comprender la relación entre el contenido del tema a enseñar y la didáctica para este, implica entender que "[…] la enseñanza como transformación de la comprensión [del contenido de un tema] se apoya en la profundidad, calidad y flexibilidad del conocimiento del contenido y en la capacidad de hacer poderosas representaciones y reflexiones sobre ese conocimiento" (Shulman, 1999, p. xi), lo cual configura el conocimiento como un constructo susceptible de ser flexible y modificable.

Así, el conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986, 1987) ha recibido especial atención desde sus inicios, al ser reconocido en el campo de la investigación y la práctica como "el conocimiento que va más allá del tema de la materia per se y que llega a la dimensión del conocimiento del tema de la materia para la enseñanza" (Shulman, 1987, p. 9). En esta línea, se puede observar que es un conocimiento ampliamente conocido y utilizado, que ha sido referente en modelos asociados con el conocimiento del profesor.

Uno de ellos, es el definido en el trabajo de Ball et al. (2008), quienes vinculan otros dominios del conocimiento para referirse al conocimiento matemático para la enseñanza, en el cual reconocen dos categorías; una, es el conocimiento del contenido, que a su vez considera el conocimiento común del contenido, el especializado y el conocimiento en el horizonte matemático; la otra categoría es el conocimiento pedagógico del contenido, que enmarca el conocimiento del contenido y los estudiantes, del contenido y la enseñanza y del contenido y el currículo. Estos se proponen con el fin de aclarar conceptos relacionados con los constructos para el conocimiento del profesor y el alcance del conocimiento pedagógico del contenido.

Entender los constructos relacionados con el conocimiento del profesor, sugiere posicionarse también frente al proceso de formación y desarrollo profesional. Para Santa (2016), la formación de profesores debe movilizar no solo el conocimiento disciplinar sino también el conocimiento de la enseñanza, relacionado con el campo del conocimiento profesional; dicha formación propende por apoyar el desarrollo profesional de los profesores en ambientes cercanos a sus realidades educativas. Sin embargo, parece ser que, en los procesos de formación, los complejos y amplios componentes del conocimiento profesional son entendidos y atendidos de manera compartimentada, negando, en algunos casos, la posibilidad de buscar la integración entre la teoría y la práctica (Santa, 2016).

Respecto a la posibilidad de vincular la teoría y la práctica, Zapata y González (2017) destacan la existencia de experiencias de formación que conciben el contexto como un escenario para construir conocimiento profesional, en el que el profesor se ve "como científico y como profesor, e intenta vincular su formación con su práctica" (p. 67). Este es un logro en el campo de la formación, pues las investigadoras también reconocen que en dicho campo han centrado muchos de sus esfuerzos para refinar componentes disciplinares del profesor.

La necesidad de refinar componentes disciplinares, exaltando la relevancia que tiene el conocimiento matemático del profesor, es ciertamente fundamental y necesario; en este sentido, la postura de algunos investigadores (Shulman, 1986, 1987; Ponte, 1994; Borko, 2004; Ball et al., 2008; Prieto y Contreras, 2008; Potari y Ponte, 2017) alude a la necesidad del conocimiento disciplinar, cuya naturaleza es determinante en las decisiones que se toman sobre la práctica; lo anterior genera especial interés en los profesores que no cuentan con una formación específica en el área de matemáticas, en cuanto a lo que puede ocurrir con su conocimiento profesional y los cambios que este podría requerir a partir de una necesidad asociada con el conocimiento en esta área.

Considerar el conocimiento matemático como uno de los componentes del conocimiento profesional, permite pensar este último como un conjunto de saberes; esta idea también fue expuesta por Tardif (2004), para quien, dichos saberes, son producto de la formación, la experiencia y las relaciones con todos los actores educativos; estos saberes podrían clasificarse como pedagógicos, disciplinares, curriculares y experienciales. Así, el conocimiento profesional del profesor es ampliamente reconocido y ofrece concepciones multimodales, lo cual convoca diferentes dominios: en términos de la práctica, del saber disciplinar, curricular y de los estudiantes (Rodrigues, Menezes y Ponte, 2018).

Adicionalmente, parece ser que la orientación hacia la práctica es un punto de convergencia entre diferentes investigadores al momento de referirse al conocimiento profesional; de este modo, Prieto y Contreras (2008) definen el conocimiento profesional del profesor como:

> Un conjunto de saberes pedagógicos, criterios profesionales y argumentaciones teóricas explícitas o implícitas de naturaleza diferente. Es decir, constituirían el marco de referencia organizativo de las prácticas docentes que influyen y afectan los procesos formativos en las aulas y a partir de las cuales los profesores los perciben, organizan y ejecutan. (p. 251)

Para algunos autores, en el aula se evidencia un conocimiento de naturaleza implícita, esto es, el profesor cuenta con un conocimiento para ejercer su labor, (Bornrne y Tillema, 1995); para otros investigadores, este podría ser amplio y complejo, en tanto que los profesores aprenden de sus actividades, de la reflexión sobre estas y el contexto de las prácticas (Ponte, 1999; Lin y Rowland, 2016); pero el conocimiento profesional no está solo en la práctica, “sino que debe ser construido de manera progresiva, desde las concepciones de partida que toda persona tiene y en un constante ir y venir a la teoría y a la práctica, mediante procesos de investigación” (Rivero, 2003, p. 47).

En coherencia con el anterior párrafo, la participación de los profesores en procesos de investigación puede tener dos enfoques (Lin y Rowland, 2016); en uno, pueden ser aprendices a través de la colaboración en proyectos de investigación y, en el otro, pueden participar en una investigación – acción, que incluye el diseño de tareas para sus prácticas de aula. Estos espacios de participación promueven la reflexión y propician oportunidades de aprendizaje, posiblemente conducentes a promover acciones (producto de la reflexión) en sus aulas de clase. Aunque los enfoques de las investigaciones pueden ser diferentes, es claro que:

> A través de la participación en un proyecto de investigación, los profesores pueden recibir rápidamente apoyo teórico de otros investigadores. […] los profesores tienen que invertir un

> esfuerzo considerable en el proceso de vincular la teoría y la práctica para mejorar su trabajo en el aula. (Lin y Rowland, 2016, p. 505)

En coherencia con la anterior cita, Silva (2013) realiza un análisis del fundamento epistemológico del conocimiento profesional del profesor y lo asocia con la idea de que el profesor es un investigador: "el profesor tiene una condición histórica de producción de conocimiento, es decir, el concepto de la profesión docente no se reivindica solo desde el mejoramiento del orden laboral, sino también, desde la posibilidad de pensar que produce conocimiento" (p. 45). Siendo así, la reflexión que conduce a las acciones sobre la práctica, constituye al profesor como un investigador (Ponte, 2012), toda vez que emprende acciones pensadas sobre su labor docente; sin embargo, la realidad se aleja de este presupuesto pues las comunidades investigativas, a nivel universitario, pueden tener incidencia, pero en las instituciones de educación básica y media, posiblemente no ocurre lo mismo.

El constructo del conocimiento profesional podría "considerar la ´forma´ en que la matemática es comunicada a los alumnos a través de las tareas que el profesor elige, las características de la interacción didáctica en el aula, los aspectos sobre los que se evalúa, etc." (Llinares, 2009a, p. 8). En este sentido, se puede apreciar que la elección y posible diseño de tareas se configuran como un punto de análisis, dado que su elaboración pone de manifiesto elementos asociados con el conocimiento profesional, como pueden ser: el conocimiento matemático, didáctico, pedagógico, sobre los estudiantes, la gestión de aula, el currículo, el contexto, la experiencia, el aprendizaje del profesor, su identidad, la interacción con el otro, y la participación en proyectos.

Otro elemento que puede ser determinante en el tema del conocimiento profesional, podría estar asociado con la identidad profesional, con las concepciones y creencias sobre la matemática y cómo entenderla. Para Santa (2016) "la identidad del maestro se construye y reconstruye mediante procesos de reflexión y autorreflexión sobre la profesión y sobre la misma práctica" (p. 49). El desarrollo de esta identidad manifiesta un proceso de aprendizaje mismo que puede ser producto de muchas interacciones, es decir, el profesor aprende de todos los contextos profesionales en los que se desempeña, desde la preparación de su clase, el diseño de sus actividades, la definición de estrategias y recursos, aprende de sus estudiantes, de sus respuestas, de anticipar sus posibles preguntas e intervenciones, aprende de sus compañeros, aprende cuando participa en comunidades de aprendizaje y en proyectos de investigación (Lin y Rowland, 2016; Tzur, 2007; Ponte y Chapman, 2006).

El conocimiento profesional del profesor es reconocido como un constructo aún más complejo, en permanente construcción, permeado por procesos progresivos y regresivos (Hernández y Pérez, 2017). Adicionalmente, está expuesto a los cambios de los contextos, de la cultura, de la sociedad, de la identidad del profesor, de la experiencia, de las prácticas, de la reflexión y de la investigación, como elementos que, a su vez, podrían ser constitutivos del mismo y que lo hacen susceptible de ser flexible y dinámico.

En coherencia con la posibilidad de que el conocimiento profesional sea flexible y dinámico, Ponte (2012) procura elaborar una perspectiva teórica, no segmentada y dinámica, que integra diversas vertientes del conocimiento del profesor (Rodrigues et al., 2018) y, constituye para el presente estudio, un acercamiento que permite dilucidar un posicionamiento en relación a cómo será entendido y asumido el conocimiento profesional del profesor en el trabajo doctoral. A continuación, se presenta la postura mencionada.

2.2. Acercamiento a una postura teórica para el estudio

Un constructo ampliamente estudiado, como el conocimiento profesional del profesor, puede ser susceptible de cambios asociados con su historia y evolución. Una de las definiciones que podría pensarse ha evidenciado este tipo de variaciones, es la dada por Ponte (1992), quien se refiere a este como un conocimiento "producto de la actividad profesional caracterizada por la acumulación de una experiencia práctica en un dominio dado, y que será tanto más eficaz cuanto más se pueda referir a conocimientos de orden científicos" (p. 194). Sin embargo, una definición posterior ofrece otros matices a la anterior perspectiva.

Es así como, un par de años después, el mismo autor menciona que la práctica no es suficiente como fuente de aprendizaje para el profesor (Ponte, 1994), pues esta debe estar acompañada de procesos cíclicos de revisión y retroalimentación junto con la teoría. Ponte (1994) también dota de un carácter social al conocimiento profesional, aludiendo que tanto este, como las creencias y concepciones tienen raíces sociales; de esta manera, la reflexión consciente continua, podría ser un factor determinante en la mejora del conocimiento.

Referirse al conocimiento profesional del profesor implica, para muchos investigadores (Ponte, 1999; Llinares, 2009a; Ball et al. 2008), categorizar los conocimientos que se circunscriben en la labor profesional. De esta manera, Ponte (1999) manifiesta que este conocimiento involucra un componente fundamental que se relaciona directamente con la práctica; es un conocimiento esencialmente orientado para las acciones, que se despliega en cuatro dominios:

> […] (1) el conocimiento de los contenidos de la enseñanza, incluidas sus interrelaciones internas y con otras disciplinas, sus formas de raciocinio, de argumentación y de validación; (2) el conocimiento del currículo, incluidas las finalidades y objetivos y su articulación vertical y horizontal; (3) el conocimiento del alumno, de sus procesos de aprendizaje, de sus intereses, de sus necesidades y dificultades más frecuentes, vistos como aspectos culturales y sociales que pueden interferir positiva o negativamente en su desempeño escolar; y (4) el conocimiento del proceso instruccional, en lo que se refiere a la preparación, condiciones y validación de la práctica. Este conocimiento, lejos de estar aislado, se relaciona de un modo muy estrecho con diversos aspectos del conocimiento personal e informal del profesor de la vida cotidiana como un conocimiento del contexto (de la escuela, de la comunidad, de la sociedad) o como el conocimiento que él tiene de sí mismo. (Ponte, 1999, p. 61)

Los anteriores dominios presentan reformulaciones con el paso del tiempo y con la consolidación de nuevas posturas. Por ejemplo, Ponte y Chapman (2006) señalan la complejidad del conocimiento profesional en íntima relación con las prácticas, en el sentido de que su estudio debe implicar tener en cuenta cuatro factores: la materia; los participantes, los profesores y los estudiantes; los objetivos asociados con el currículo; y las condiciones laborales. Los cambios en las posturas epistemológicas que se evidencian en relación al conocimiento profesional, ponen de manifiesto que su carácter flexible es necesario, toda vez que no es posible considerar en una definición la riqueza de las particularidades que proponen los contextos cambiantes.

De acuerdo con Ponte (2012), existe una necesidad de ampliar el cuadro conceptual de ideas asociadas con el profesorado, con sus conocimientos y con sus modos de pensar; en consecuencia, el concepto de conocimiento profesional abre paso a una distinción entre el conocimiento académico, de carácter teórico y formal, y el sentido común, natural de los individuos; de esta manera, podría ser válido fijar la atención en un conocimiento profesional propio de los profesores, sujeto a múltiples influencias, pero con un enfoque particular en la práctica, en las reflexiones que en ella se suscitan y en las interacciones que motivan decisiones sobre el currículo.

De esta manera, el conocimiento profesional del profesor, con un enfoque particular sobre la práctica, pone de relieve la actividad asociada con la enseñanza de las matemáticas; para Ponte (2012), este se apoya en dos tipos de conocimiento, uno de naturaleza teórica y otro social – experiencial; el primero, se vincula con asuntos de las matemáticas, su enseñanza y la educación en general; el segundo, con los estudiantes, las dinámicas de aula, los valores y la cultura de la comunidad escolar. Así entonces, la práctica se constituye en un espacio en el que se pone en escena el conocimiento profesional en la perspectiva expuesta y es en ella y sobre ella que deben primar las reflexiones y acciones que conlleven a su transformación.

Reconociendo lo manifestado por Ponte (2012), en cuanto a que el conocimiento profesional puede contemplar diversos aspectos, se exaltan los siguientes: uno, orientado a situaciones de la práctica educativa y, otro, a la práctica no educativa (asociada con la formación y el desarrollo profesional) y, en coherencia con el problema de investigación en cuestión, que se enmarca en asuntos de la práctica, de la experiencia, del currículo y de la necesidad de analizar el conocimiento disciplinar y pedagógico, con miras a promover el pensamiento algebraico temprano, se podría vislumbrar un primer acercamiento a un marco que defina una postura teórica, necesaria para la investigación.

2.2.1. Conocimiento profesional del profesor en la perspectiva de João Pedro da Ponte. A la luz de las ideas hasta ahora expuestas y de la reflexión sobre las mismas, es posible asumir que, la postura de Ponte (2012), parece enmarcar algunos de los objetos de análisis fundamentales para efectos del desarrollo de la presente investigación. Así, estos elementos se corresponden con los componentes que el autor expone para el conocimiento profesional, referido a la práctica educativa, y designado como conocimiento didáctico, el cual se asocia con las dimensiones presentadas en la figura 1: (a) conocimiento de las matemáticas; (b) conocimiento del alumnado; (c) conocimiento del currículo; y (d) conocimiento de los procesos de trabajo en el aula.

Figura 1. Dimensiones del conocimiento didáctico (Ponte, 2012, p. 87).

La figura 1 muestra en el centro del esquema el conocimiento referido a la práctica educativa, como núcleo del conocimiento didáctico asociado con el conocimiento profesional del profesor. Las separaciones entre una y otra dimensión se marcan de manera tenue, debido a que todas se relacionan de manera estrecha (Ponte 2012) y la posibilidad de alejar unas de otras no es concebida por el autor. Aunque las anteriores dimensiones fueron presentadas en el capítulo 1, se retoman ideas básicas en este apartado, pues estas constituyen un objeto de estudio en la presente investigación, en términos de analizar la transformación del conocimiento profesional del profesor en la perspectiva de Ponte (2012). A continuación, se indican mencionan características de las dimensiones en cuestión:

La primera dimensión, relacionada con el conocimiento de las matemáticas, se refiere a las especificidades de la disciplina matemática y la matemática escolar misma; en esta dimensión se retoma que, "más allá de los conceptos y procedimientos fundamentales dentro de la disciplina, surgen las formas de representación de esos conceptos y procedimientos que dan una perspectiva general sobre el carácter de la matemática escolar" (p. 87). La anterior caracterización ofrece elementos teóricos para reconocer posibles manifestaciones de una de las dimensiones del conocimiento profesional, referido por Ponte (2012) como un conocimiento didáctico.

La segunda dimensión está determinada por el conocimiento de los estudiantes y de sus procesos de aprendizaje, como una condición decisiva en el trabajo profesional, en tanto permite entender sus intereses, hábitos, relaciones, gustos, comportamientos, modos de pensar, entre otros, que son determinantes en el ejercicio profesional. Conocer a los estudiantes y reconocer sus necesidades, permite determinar las condiciones y posibilidades que estos tienen para llevar a cabo las tareas que se proponen en el aula. Adicionalmente, este tipo de conocimiento, índice en las decisiones que se toman sobre el currículo.

La tercera dimensión se relaciona con el conocimiento del currículo; está asociada con las finalidades y objetivos de la enseñanza de las matemáticas; además, es determinante en las decisiones que operan en el aula y en las formas de orientar la enseñanza; adicionalmente, incluye el conocimiento de los objetivos académicos, la organización y la evaluación de los contenidos. Así, esta dimensión trasciende del campo concerniente a referentes curriculares, hasta el desarrollo de las planeaciones, con su respectiva evaluación y validación.

La cuarta dimensión, relativa a la práctica educativa, constituye un componente fundamental que incluye el conocimiento de los procesos de trabajo en el aula; esta dimensión es el núcleo del conocimiento didáctico (Ponte, 2012), y en ella confluye la planeación de la enseñanza con todo lo que esto engloba. Adicionalmente, Ponte (2012) estima que, esta dimensión tiene una relación directa y estrecha con las demás, y aunque todas están vinculadas entre sí, pareciera ser que esta se configura como el centro de la postura expuesta para el conocimiento profesional.

El anterior constructo es un referente en el presente estudio, en tanto el problema de investigación en cuestión advierte asuntos asociados con el conocimiento matemático, específicamente, en el campo del pensamiento algebraico temprano; también de tipo curricular, pues en el currículo colombiano no es necesariamente reconocida la posibilidad de promover el pensamiento algebraico temprano como una circunstancia común en las aulas de clase; el conocimiento de los estudiantes y el trabajo en el aula, también se han constituido como objetos de reflexión emergentes en la experiencia vivida con profesores, quienes develan sus necesidades frente a la imposibilidad de trabajar y reconocer conceptos de carácter algebraico en edades tempranas.

Adicionalmente, sería conveniente considerar asuntos como: los aprendizajes a través de tareas de formación profesional, que promuevan reflexiones y acciones en el aula; sobre la práctica del profesor y su conocimiento; las construcciones logradas en un campo de interacciones (con pares, estudiantes y consigo mismo); la manifestación de las reflexiones; la identidad y la construcción de conocimiento matemático escolar. Es decir, podría ser necesario vincular un conocimiento producto de la triada de interacciones: con los pares, con los estudiantes y del profesor consigo mismo.

Ahora bien, estas interacciones podrían estar asociadas con el conocimiento profesional, en la medida que pueden propiciar una transformación del mismo; sin embargo, pueden emerger otras, producto de los complejos entramados que permean las particularidades de las prácticas educativas, de la institución, de las identidades de los profesores, los cambios generacionales y los requerimientos que determine el contexto.

Finalmente, cabe precisar que, la necesidad de estudiar el conocimiento profesional, se debe a que este involucra elementos disciplinares, curriculares y propios de la práctica; así, considerando que el problema reviste elementos asociados con lo anteriormente mencionado, cobra sentido analizar y reflexionar sobre posturas que nos permitan asumir una propia en particular, para el conocimiento del profesor de primaria en el campo del pensamiento algebraico temprano.

2.3. Álgebra temprana

El álgebra temprana ha sido reconocida desde hace varias décadas, como un campo de estudio que tiene su foco de atención en la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares de la educación básica primaria (Kaput, 1998, 2000; Kieran, 2004, 2006; Blanton y Kaput, 2005; Carraher y Schlieman, 2007; Molina, 2007; Radford, 2010a; Britt y Irwin, 2011; Cai y Knuth, 2011; Godino et al., 2015; Blanton, et al., 2015; Vergel, 2016a; Vergel y Rojas, 2018). En la anterior perspectiva, se puede apreciar que subyace una idea de cambio curricular, que concibe el álgebra temprana “como una manera de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como una guía hacia una enseñanza con compresión y significado de las matemáticas” (Vergel, 2010, p. 72), la cual trasciende a la idea de “algebrizar el currículo” sugerida por Kaput (1998).

Kaput (1998), uno de los pioneros del álgebra temprana, pone en consideración que la “algebrización del currículo” logra una integración del pensamiento algebraico en todos los temas de la matemática escolar y en todos los grados; por lo tanto, resuelve tres grandes problemas, a saber:

1. Abre un espacio curricular para las matemáticas del siglo XXI que se necesitan con urgencia en el nivel de la enseñanza secundaria, espacio que ha sido bloqueado por el currículo las escuelas secundarias del siglo XIX que se encuentra en vigencia.

2. Añade un nuevo nivel de coherencia, profundidad y poder a las matemáticas escolares, tanto como plan de estudios como un hábito de la mente.

3. Elimina el elemento curricular más pernicioso de la matemática escolar actual: cursos de álgebra tardíos, abruptos, aislados y superficiales en la escuela secundaria. (Kaput, 2000, p. 1)

Los planteamientos expuestos por Kaput (1998, 2000), con relación a los problemas que podría resolver el álgebra temprana, permiten vislumbrar una concepción de esta, en la cual, Kaput (1998) puso en consideración cinco aspectos: (a) la generalización y la formalización (el estudio y la generalización de patrones); (b) el estudio de las funciones, relaciones y variación (el reconocimiento e identificación de relaciones numéricas y funcionales); (c) las manipulaciones guiadas sintácticamente (el desarrollo y uso del simbolismo); (d) el estudio de la estructura (comprensión de estructuras abstraídas de cálculos y de relaciones); y, (e) un lenguaje de modelado (la modelización); una vinculación progresiva de los anteriores aspectos, en la escuela primaria, podría facilitar el acceso de los estudiantes a conceptos algebraicos en la educación secundaria.

Facilitar el trabajo algebraico en la educación secundaria, de acuerdo con Kaput (1998, 2000), es un asunto que puede lograrse siempre que en las aulas se promuevan procesos asociados con la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. En la línea anterior, Kaput (1998) se refirió a cuatro formas posibles de organización para el álgebra escolar: funciones y relaciones; modelos; estructura; y, lenguaje y representación; lo anterior, permitiría consolidar hábitos de pensamiento subyacentes en la estructura de las matemáticas.

Previo al trabajo presentado por Kaput (1998), en un evento organizado por el NCTM (1998), Kieran (1989) había manifestado algunas reflexiones relacionadas con la necesidad de investigar acerca de la naturaleza del pensamiento algebraico; esto suscitó en la comunidad académica inquietudes relacionadas con: los procesos de generalización que pueden elaborar los estudiantes en los niveles de la educación primaria y la promoción del pensamiento algebraico en estos niveles de escolaridad, en los que prevalece un privilegio hacia el pensamiento aritmético (Kieran, 2007).

No obstante, pese al privilegio que recibe el pensamiento aritmético, las reflexiones en torno al algebraico en los primeros grados de escolaridad, sugieren maneras de trabajo que incluyen aspectos como: "el desarrollo de formas de pensar como el análisis de relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción" (Kieran, 2004, p. 149); estos últimos, podrían configurar una base para el trabajo algebraico, el cual, según Kieran (2006), evidencia una comprensión pobre de las relaciones y las estructuras matemáticas, la cual puede tener origen en el proceso de transición entre la aritmética y el álgebra.

El pensamiento aritmético en el currículo de la educación primaria y su transición al pensamiento algebraico (Kieran, 2007), pueden configurar una oportunidad para el desarrollo de este último; al respecto, Kieran (2007) menciona la viabilidad de hacer modificaciones en el pensamiento aritmético, las cuales se resumen en poner el foco de atención en: (1) las relaciones, más allá de los cálculos numéricos; (2) las operaciones y las propiedades que estas cumplen; (3) la representación y solución de un problema; (4) tanto los números, como las letras; y, (5) una re-significación del signo igual, como símbolo que denota una relación de equivalencia entre cantidades. La posibilidad de estos cambios favorece el estudio del álgebra, y que esta trascienda el dominio de la aritmética hasta la estructura subyacente en las matemáticas (Cai y Knuth, 2011).

A las modificaciones sugeridas por Kieran (2007), se adicionan tres tipos de actividades algebraicas, clasificadas en categorías: generacional, transformacional y global. Las actividades generacionales conciben como objetos del álgebra, las expresiones de generalidad y las ecuaciones. Las de tipo transformacional, se enfocan en los cambios simbólicos de expresiones o ecuaciones, cuya justificación subyace en axiomas y propiedades de las estructuras. Por último, las actividades de tipo global, contemplan procesos matemáticos generales, en los cuales el álgebra constituye una herramienta que no es exclusiva; estos tipos de actividades promueven el desarrollo de formas de pensar en relaciones y estructuras (Kieran, 2004).

Ocuparse del estudio de aspectos relacionales, en el contexto del álgebra temprana, constituye una de las líneas que ha fortalecido esta perspectiva de cambio curricular; la línea en mención, denominada pensamiento relacional (Carpenter et al., 2003, 2005; Molina, 2006, 2009; Fernández e Ivars, 2016), es presentada por Molina (2009), aludiendo a que:

> Este tipo de pensamiento, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas –algebraicas–, consiste en la actividad intelectual de examinar expresiones aritméticas –algebraicas–, considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar deliberadamente relaciones entre ellas o entre sus términos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados. (p. 141)

En coherencia con el planteamiento de Molina (2009), el pensamiento relacional se constituye en una “actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolos como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objeto” (Molina, 2006, p. 62); esto es, el pensamiento relacional puede poner el foco de atención en las relaciones que configuran el abordaje de una situación, donde el centro de interés no es el cálculo de respuestas (foco aritmético) sino las relaciones que pueden establecerse para ello (foco algebraico), lo cual obedece a un cambio estructural (Molina, 2009).

En el contexto del álgebra temprana y, considerando las múltiples acepciones que esta puede tener, según las posturas explicativas de distintos investigadores (Kaput, 1998, 2000, 2008; Blanton y Kaput, 2002; Kieran, 2004; Carraher y Schlieman, 2007; Derry et al., 2007; Godino et al., 2012; Brizuela et al., 2013; Martinez y Cayton-Hodges, 2013; Cai y Knuth, 2011; Vergel, 2016a; Vergel y Rojas, 2018; Radford, 2010a, 2011, 2018), es necesario precisar que, en aras de responder a la pregunta de investigación para el estudio doctoral, se ha definido un enfoque específico, en la línea de los planteamientos teóricos presentados por Radford (2010a, 2010b) y confirmados por Vergel (2016a, 2019), los cuales se enfocan en un pensamiento algebraico temprano, caracterizado a partir de tres componentes o vectores: sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica.

2.3.1. Pensamiento algebraico temprano. En el marco de las ideas expuestas por Radford (2011), el pensamiento algebraico temprano "se considera que está basado en las posibilidades del estudiante para comprender patrones en formas co-variacionales desarrolladas culturalmente y usarlos para tratar con cuestiones de términos lejanos o no especificados" (p. 23); este teórico aduce que entre el pensamiento numérico y el algebraico existe una distinción específica, y es que este último reconoce "cantidades *indeterminadas* o no especificadas como si fueran conocidas. Pero no sólo eso. Estas cantidades desconocidas se tratan de manera *analítica,* lo cual significa que se hacen *deducciones* por cuanto se parte de ciertas premisas para conseguir un resultado" (Vergel y Rojas, 2018, p. 49).

En la línea argumental propuesta en el párrafo anterior, y siguiendo las ideas expuestas por Radford (2010b, 2013b), Rojas y Vergel (2018) expresan que:

> […] entendemos el pensamiento algebraico como un sistema de procesos corporizados de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente; de hecho, su idea de *Saber como movimiento*, pura posibilidad, está constituida de formas de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas. Compartimos con este autor (Radford) que el Saber algebraico es una síntesis evolutiva (sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa) y culturalmente codificada (como patrones de acción) de hacer y reflexionar en términos analíticos (i.e., la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido que comporta procesos de deducción) sobre números indeterminados y conocidos. (Rojas y Vergel, 2018, p. 26)

En el pensamiento algebraico temprano, la analiticidad define un rasgo específico y distintivo; en palabras de Viète (1983), "lo que era distintivamente algebraico […] era la manera *analítica* en la cual pensamos cuando pensamos algebraicamente" (Radford, 2018, p. 6). Pappus (citado por Vergel, 2016a) también se refirió a la analiticidad y lo hizo en términos del movimiento que ocurre, desde lo que es dado hasta lo que es buscado; esa idea de movimiento es precisada por Radford (2018) y reafirmada por Vergel y Rojas (2018); estos últimos, hacen alusión a lo que es o no distintivo del pensamiento algebraico y a lo que puede significar pensar algebraicamente, a través de un ejemplo:

> […] Consideremos la ecuación $5x + 3 = 9 + x$. Una solución a través del método de ensayo–error no la consideramos como algebraica. Incluso los estudiantes pueden movilizar signos alfanuméricos, pero esto no es lo que hace distintivo el pensamiento algebraico; esto, más bien, descansa en conceptos aritméticos. Ahora bien, si el estudiante deduce de $5x + 3 = 9 + x$ que $5x = 6 + x$ —por la suma de -3 a ambos lados de la ecuación—, podemos afirmar que el estudiante está pensando algebraicamente. (Vergel y Rojas, 2018, p. 50)

En coherencia con las ideas hasta ahora expuestas en este apartado, la idea del pensamiento algebraico tiene que ver necesariamente con aspectos indeterminados y analíticos; al respecto, Radford (2010b) cita que, con relación a la naturaleza del pensamiento algebraico, existe un consenso sobre dos aspectos: álgebra trata con objetos de naturaleza indeterminada (incógnitas, variables y parámetros), y estos objetos se tratan de manera analítica; es decir, con ellos se hacen cálculos que permiten manipular las cantidades indeterminadas como si fuesen números específicos (que se suman, restan, multiplican y dividen, entre otras formas de operar); en consecuencia, considerar una caracterización para este pensamiento, implica razonar sobre la indeterminación con formas analíticas, una forma particular de reflexionar matemáticamente.

Asumir el pensamiento algebraico, en términos de una manera de reflexionar matemáticamente, para Vergel (2019), implica “entender el saber algebraico como una forma prototípica de acción y reflexión humana que se convierte en potencialidad cultural y, por tanto, sería pura posibilidad para los estudiantes” (p. 3); es posible, entonces, relacionar lo dicho por Radford (2010b) y por Vergel (2019) para inferir la necesidad de la proposición de acciones que posibilite a los estudiantes razonar, reflexionar, proponer y resolver problemas, en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

El saber algebraico, como síntesis evolutiva (de acción humana, dinámica y transformativa), obedece a una caracterización. Esta última puede asociarse con las consideraciones de Radford (2017), para quien el saber algebraico es concebido como “un sistema de acciones codificadas culturalmente” (p. 101), constituido por formas de reflexión y acción en procesos analíticos, esto es, “la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido” (Vergel y Rojas, 2018, p. 51). En esta línea, para Radford (2010a), una caracterización del pensamiento algebraico se constituye por tres componentes relacionados entre sí: (a) el sentido de indeterminancia, (b) la analiticidad y, (c) la designación simbólica o expresión semiótica.

2.3.1.1. Caracterización del pensamiento algebraico. Las reflexiones expuestas, en términos del pensamiento algebraico, permiten dilucidar rasgos característicos del mismo. Esta caracterización aporta un referente teórico para la investigación, en la perspectiva ofrecida por Radford (2010a), para quien, tal como se había mencionado antes, el pensamiento algebraico temprano podría estar determinado por tres componentes (o vectores) que lo distinguen, los cuales se presentan a continuación.

2.3.1.1.1. Sentido de indeterminancia. Esta característica se asocia con una sensación de indeterminación, propia de los objetos algebraicos básicos, los cuales pueden ser incógnitas, variables y parámetros. Radford (2010a) la nombra "como aquello opuesto a la determinancia numérica" (p. 39). Al respeto, también menciona que:

> Es la indeterminación (a diferencia de la determinación numérica) la que hace posible, por ejemplo, la sustitución de una variable o de un objeto desconocido por otro; no tiene sentido sustituir 3 por 3, pero puede ser que tenga sentido sustituir una variable desconocida por otra, bajo ciertas condiciones. (Radford, 2010a, p. 39)

También, Vergel (2014) se refiere a esta caracterización del pensamiento algebraico, como una posibilidad para "repensar la forma en que las cantidades indeterminadas pueden ser significadas por los estudiantes jóvenes" (p. 79). En esta línea, llama la atención Radford (2010a) en cuanto al papel de la semiótica e insiste en que, en el caso de las variables y otros objetos algebraicos, estos "sólo pueden ser representados indirectamente, a través de construcciones basadas en signos (ver Kant, 1929, p. 579) estos signos pueden ser letras, aunque no necesariamente, pues el uso de letras no equivale a hacer álgebra" (Radford, 2010a, p. 39).

2.3.1.1.2. La analiticidad. En esta característica, los objetos indeterminados se manejan analíticamente (Radford, 2010a); en consecuencia, la analiticidad está relacionada con formas de trabajar sobre los objetos indeterminados o básicos (incógnitas, variables y parámetros) de manera analítica, reconociendo el carácter operatorio de dichos objetos (Vergel, 2014).

En este orden de ideas, Vergel (2019) se refiere a la analiticidad como un "proceso en el cual las cantidades indeterminadas y sus operaciones se manejan de manera analítica y, aun cuando estas cantidades no son conocidas, se suman, restan, multiplican, dividen, etc., como si fueran conocidas" (p. 4). En esta caracterización, se adjudica un carácter operatorio al tratamiento de objetos indeterminados; este tratamiento comporta procesos de deducción, mediante los cuales es posible llegar a resultados a partir de premisas iniciales (Vergel, 2019).

2.3.1.1.3. La designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos. Esta característica se refiere a una forma determinada de nombrar o referir los objetos algebraicos básicos (Vergel, 2014). El pensamiento algebraico tiene un modo simbólico particular para designar objetos que solo pueden representarse indirectamente, a través de construcciones basadas en signos (Radford, 2010a).

Para Radford (2010a), en este componente analítico que caracteriza el pensamiento algebraico, se destaca que usar letras no significa hacer álgebra; en este sentido, y aunque tradicionalmente las letras y signos para operaciones se han considerado como el sistema semiótico de álgebra por excelencia, desde la perspectiva semiótica de Radford (2010b), los signos también pueden ser algo muy diferente, "palabras o gestos, por ejemplo, son signos por sí mismos, hablando semióticamente, podrían ser signos algebraicos, tan genuinos a este proceso como las letras" (Radford, 2010b, p. 2).

Es importante, entonces, resaltar que, lograr una caracterización del pensamiento algebraico, a través de tres componentes analíticos (sentido de indeterminancia, analiticidad y designación simbólica o expresión semiótica de los objetos), implica el tratamiento de objetos algebraicos indeterminados de manera analítica (Radford, 2010a, 2010b). Radford (2010b) acepta la existencia de una "zona conceptual donde los estudiantes pueden comenzar a pensar algebraicamente, incluso si aún no están recurriendo (o al menos no en gran medida) a símbolos alfanuméricos" (Radford, 2010b, p. 3).

Adicionalmente, en coherencia con la caracterización del pensamiento algebraico, se debe exaltar la existencia de medios semióticos de objetivación, entendidos como, todos los medios que son utilizados por los individuos, que se encuentren en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones, para organizar sus actuaciones y para, así, adquirir las metas de sus acciones (Radford, 2003).

A la luz de Radford (2008, 2010a), los medios semióticos pueden ser utilizados para comunicar y materializar una intención y, en este sentido, inciden en el desarrollo y en la manifestación del pensamiento matemático. Entre los medios semióticos, se pueden reconocer: artefactos, gestos, palabras, símbolos, que, en términos de Radford (2011), no son únicamente herramientas por medio de las cuales es posible acercarse y manipular el mundo, también son mediadores de actos intencionales, que portan una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva.

2.3.1.2. Formas de pensamiento algebraico. Los componentes analíticos que caracterizan el pensamiento algebraico (sentido de indeterminancia, analiticidad y designación simbólica o expresión semiótica de los objetos) están plenamente relacionados con las formas de pensamiento descritas por Radford (2010a, 2010b) y reafirmadas por Vergel (2014, 2015a, 2018). Estos autores postulan tres formas de pensamiento, que se caracterizan por medios semióticos de objetivación, los cuales, en coherencia con Vergel (2015a), constituyen mediadores que posibilitan herramientas a través de las cuales manipulamos el medio y direccionamos nuestros actos, portadores de una conciencia construida históricamente.

2.3.1.2.1. Pensamiento algebraico factual. La naturaleza de este pensamiento es aparentemente concreta, y opera a nivel de un número particular o de hechos factuales (Radford, 2010b). En este estrato de pensamiento, no se hace explícita una enunciación para la indeterminancia; al respecto, Vergel (2015a) exalta que:

> En este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números; por lo que podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice “aquí”, señala con la

> mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala y dice "más 2". (Vergel, 2014, p. 79)

Vergel (2015a) señala que, en el estrato del pensamiento factual, cuando la indeterminancia queda implícita, es mostrada mediante casos puntuales o hechos específicos, manifiestos a través de medios semióticos de objetivación como pueden ser: percepción, gestos y palabras. En este sentido, el pensamiento algebraico factual, como forma ideal que pre-existe en la cultura (Radford, 2012), aparece a través de la materialidad de la actividad, y de los medios semióticos movilizados por los participantes de la misma.

2.3.1.2.2. Pensamiento algebraico contextual. Esta estratificación del pensamiento trasciende los casos particulares, hasta formas generales. La indeterminación se hace explícita y se convierte en objeto de discurso; de hecho, la forma algebraica de esta es una descripción del término general, de cómo debería ser dibujado o imaginado (Radford, 2010b). Medios semióticos como percepción, gestos y palabras, manifiestos en el pensamiento algebraico factual, son sustituidos por otros, por ejemplo, frases clave (Vergel, 2014). Los objetos algebraicos se dotan con un carácter general, así:

> La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice "arriba quito uno" o "dos por la figura más uno", o "# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total". Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos. (Vergel, 2014, p. 80)

El pensamiento algebraico contextual puede manifestarse como una evolución del factual (Vergel, 2015a), en consecuencia, las expresiones cambian de un estrato de pensamiento a otro. Por ejemplo, la expresión $1000 \times 2 + 3$, que pudiera ser una manifestación propia del pensamiento factual, porque se afinca en números concretos, en el nivel contextual puede ser sustituida por la expresión # *figura* $\times 2 + 3$ (Vergel, 2015a). Esto es, en este último estrato la indeterminancia se pone de manifiesto mediante una representación explícita, que empieza a hacer parte del discurso algebraico.

2.3.1.2.3. Pensamiento algebraico simbólico. Para este estrato de pensamiento, la presencia de los símbolos alfanuméricos cobra relevancia, toda vez que empiezan a sustituir las frases clave del estrato anterior (Radford, 2010b). Por ejemplo, en este tipo de pensamiento, expresiones algebraicas como $n + (n - 1)$ o $2n - 1$, son características y amplían los medios semióticos de objetivación presentes en los anteriores estratos. Para Radford (2010b), "en este estrato de pensamiento 'hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso' a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica" (Radford, 2010b, p. 8).

El tránsito de una representación concreta a una abstracta, de fórmulas icónicas a simbólicas, llama la atención de Radford (2010b) en tanto considera que este podría representar un problema didáctico, el cual, puede sugerir la necesidad de:

> […] implementar actividades en el aula que permitirá a los estudiantes dotar a sus fórmulas de nuevos significados abstractos. En términos más precisos, el problema es transformar el significado icónico de la fórmula en algo que ya no se designa con objetos concretos. (Radford, 2010b, p. 11)

En el caso de los estratos de pensamiento contextual y simbólico, la indeterminación se explicita lingüísticamente; esto es, el uso de expresiones como "la figura siguiente", "la fila superior", representan una forma de generalidad contextual, que evoluciona a una generalidad simbólica, donde los objetos generales y las operaciones que con ellos se realizan, alcanzan a representar un sistema semiótico alfanumérico del álgebra (Radford, 2010b).

2.3.1.3. Generalización algebraica de patrones. Si ponemos en consideración que la generalización es estimada como uno de los mecanismos principales para consolidar el pensamiento algebraico, entonces, esta ha de ser una forma imprescindible de introducir el álgebra en la educación básica primaria (Radford, 2010b). Radford (2013a) propone una estructura para la generalización algebraica, y aduce que esta última puede denotarse de forma gestual, mediante un lenguaje natural o un leguaje simbólico alfanumérico e, incluso, a través de las combinaciones de estos.

Para Vergel (2019), el trabajo en el marco de la generalización de patrones posibilita un acercamiento a situaciones de variación, las cuales constituyen un componente fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Vergel (2014) expresa que:

> […] el pensamiento algebraico, desde la caracterización sugerida por Radford (2010b) (indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica), engloba la generalización algebraica de patrones también caracterizada por este autor (Radford, 2013a). Es más, conjeturamos que, al parecer, la analiticidad, relativa a la generalización algebraica, propulsa la analiticidad asociada al carácter operatorio de la indeterminancia, instanciando una forma de pensamiento algebraico contextual pues la indeterminancia, en este estrato de pensamiento, es analítica. (Vergel, 2014, p. 186)

En la cita anterior, Vergel (2014) se refiere a una caracterización elaborada por Radford (2013a), para la generalización algebraica de patrones. Esta elaboración teórica (Radford, 2013a) está concebida a partir de tres problemas relacionados entre sí: uno fenomenológico, otro epistemológico y otro semiótico, los cuales se sintetizan como se muestra a continuación:

> […] El primero es un problema fenomenológico planteado alrededor de la escogencia de las determinaciones sensibles, un problema en el que participan, entre otros, la intuición, la atención, la intención y la sensibilidad. El segundo es un problema epistemológico, que consiste en la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo

objeto. El tercer problema es un problema semiótico, que resulta de los medios a través de los cuales se denota el objeto generalizado. (Radford, 2013a, p. 3)

Una caracterización, como la presentada en el párrafo anterior, sugiere la posibilidad de definir una estructura para referirse al proceso de generalización de patrones. Para Radford (2013a), la estructura de una generalización algebraica recorre los siguientes puntos:

- El reconocimiento de una característica o propiedad que es común en algunos elementos de una secuencia; esto es, la identificación de una comunalidad. "Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$)" (Vergel, 2019, p. 4).

- La característica o propiedad consciente es generalizada para todos los términos subsiguientes de la secuencia, esto es, $(p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots)$; en este caso, se concluye "la generalización de la comunalidad a todos los términos" (Vergel, 2019, p. 4).

- El uso de la propiedad común y la capacidad para, a partir de su utilización, "*deducir una expresión directa* que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia" (Radford, 2013a, p. 6).

En síntesis, una generalización algebraica requiere la identificación de una comunalidad local (una regularidad cercana), la cual, se generaliza posteriormente a todos los términos subsiguientes, para, finalmente, construir expresiones que se salen del campo perceptual, esto es, definir un término n-ésimo (Vergel, 2019). La deducción de la característica común, de acuerdo con Radford (2013b), exige hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales. La figura 2 presenta la estructura de la generalización descrita por Radford (2013b).

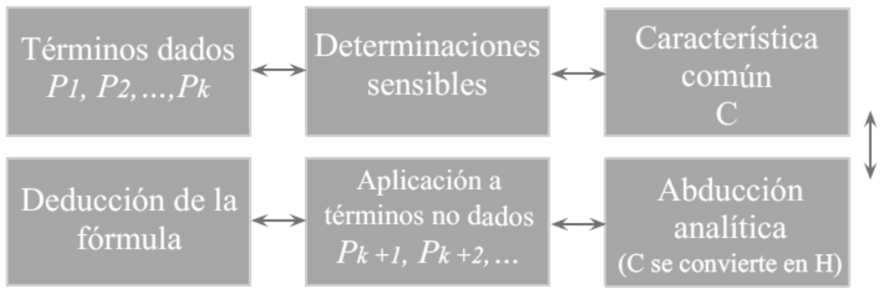


Figura 2. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales. (Radford, 2013b. p. 7).

En la anterior estructura (figura 2), la generalización de la característica común (que puede ser una o varias) es fundamental; en términos de Radford (2013b), esto se debe a que "la abducción [generalización de la característica común] es simplemente utilizada para pasar de un término a otro" (p. 7). En esta línea, que una generalización sea algebraica, depende de:

> […] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*. Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H. (Radford, 2013a, p. 7)

La generalización algebraica de patrones permite conceptualizar acerca de otros dos tipos de generalizaciones: factuales y contextuales. En la primera, la generalización responde a un esquema operacional, afincado en un nivel concreto de uso de representaciones numéricas, específicamente; lo general o indeterminado en este estrato de generalización no alcanza a ser nombrado. En la segunda, se evidencia una evolución, sin que esto signifique la deducción de generalizaciones simbólicas algebraicas; luego, en este estrato, “se generalizan no solo las acciones numéricas sino también los objetos de las acciones” (Radford, 2003, p. 65).

En el estudio doctoral, tanto la caracterización del pensamiento algebraico temprano, como el reconocimiento de los estratos de pensamiento y el modelo o estructura de generalización algebraica, aportan elementos teóricos que posibilita un reconocimiento del tipo de pensamiento algebraico manifiesto por los profesores y, adicionalmente, sustentan analíticamente datos obtenidos en la investigación, para la definición de una postura explicativa en relación a los posibles cambios del conocimiento profesional de los profesores, en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

2.4. Necesidad de una postura explicativa

En el estudio doctoral se consideran unos referentes que ofrecen un horizonte teórico para el conocimiento profesional (Ponte, 2012), en el contexto del pensamiento algebraico temprano (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2014, 2016a, 2018); estos aportan unos insumos teóricos para la investigación, pero no alcanzan a responder la pregunta planteada en la misma: ¿cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano? Por lo cual, se hace necesario la elaboración de una postura explicativa para documentar la transformación del conocimiento profesional.

Considerando la revisión y el análisis de la literatura, lograda en el transcurso de la investigación en cuestión, parece ser que aún no se dispone de una teoría que dé cuenta de cómo ocurre la transformación del conocimiento profesional, en un contexto particular, el del pensamiento algebraico temprano; de lo anterior, se infiere la pertinencia de pensar en la configuración de una postura explicativa, que permita dilucidar la naturaleza de la transformación que pudiera ocurrir en el conocimiento profesional, cuando la reflexión del profesor enfatiza en la necesidad de promover pensamiento algebraico temprano en la educación básica primaria.

A la luz de las ideas expuestas en este apartado, cabe destacar que la algebrización del currículo es un asunto complejo y convoca a una reflexión docente profunda; posiblemente, también requiere y exige que el conocimiento profesional de los profesores se cualifique y se modifique de alguna forma, mediante acciones concretas, en términos de entender la complejidad de la configuración del pensamiento algebraico temprano y, en consecuencia, su incorporación en el currículo de la educación básica primaria. Pretender explicar qué ocurre con ese conocimiento profesional, y cómo el profesor puede transformarlo, genera un espacio que posibilita la elaboración de una postura explicativa en el marco de la teoría fundamentada, la cual se presenta en apartados posteriores.

3. METODOLOGÍA

Este apartado pretende presentar elementos básicos de la metodología de investigación considerada para el proceso de análisis y recolección de información; el estudio se enmarca en un enfoque cualitativo y, a través de la teoría fundamentada, la cual no se apoya en un marco teórico en particular y cuyo propósito es generar conceptos originales e hipótesis como resultado del método, busca una abstracción generada por las voces de los participantes, la interpretación de sus quehaceres y del conjunto de significados que se toman como datos para una posible generación conceptual.

El estudio buscó elaborar una postura explicativa acerca de cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano; para la consecución de este propósito, en la investigación se consideró un aspecto adicional, descrito en este apartado: el diseño de tareas de formación en el contexto del pensamiento en cuestión; estas tareas constituyeron una posibilidad para recolectar datos que pudieran ser analizados e interpretados, con miras a definir la mencionada postura explicativa, a la luz de la teoría fundamentada.

3.1. Enfoque de la investigación

La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, en el cual, tanto la indagación por las cualidades del objeto de estudio, como el análisis detallado de sus características y de las relaciones entre ellas, posibilitan la construcción de conocimiento. Para Hernández et al. (2014), "la acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien "circular" en el que la secuencia no siempre es la misma, pues varía con cada estudio" (p. 7); además, requiere un acercamiento a la particularidad de la realidad objeto de interpretación.

En la línea de la anterior idea, el enfoque cualitativo ofrece la posibilidad de definir la realidad a través de las interpretaciones de los participantes, del investigador y de las interacciones que se suscitan a lo largo de la investigación (Hernández et al., 2014); esta convergencia de realidades no es estática; de hecho, es susceptible de ser modificada gracias a que “todo individuo, grupo o sistema social tiene una manera única de ver el mundo y entender situaciones y eventos” (Hernández et al., 2014, p. 9). En consecuencia, comprender la realidad como objeto de estudio implica el análisis de “los aspectos explícitos, conscientes y manifiestos, así como aquellos implícitos, inconscientes y subyacentes” (Hernández et al., 2014, p. 10).

Para comprender la realidad, en correspondencia con el enfoque de investigación, el estudio doctoral inicia con un proceso inductivo (va de lo particular a lo general), examinando, explorando y describiendo hechos relacionados con el conocimiento profesional de una comunidad de profesores de matemáticas de educación básica primaria, con miras a generar una postura explicativa acerca de cómo se transforma dicho conocimiento, en la perspectiva de Ponte (2012). Particularmente, el estudio doctoral considera este proceso inductivo en el marco de la realización de tareas de formación, como un escenario para propiciar interacciones que ponen de manifiesto el conocimiento en cuestión, en el marco del pensamiento algebraico temprano.

Adicionalmente, el carácter inductivo del estudio permite iniciar con el análisis de las reflexiones que emergen en una comunidad de profesores, a partir del desarrollo de las tareas de formación. Así, las interacciones que se propician en el ambiente natural de los profesores, las interpretaciones de las múltiples perspectivas, lógicas y visiones que los actores tienen de su realidad, posibilitan la construcción de una perspectiva teórica (Bogdan y Biklen, 2006), relacionada con la transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Cabe precisar que el estudio doctoral reconoce una relación sistémica; en esta, la dinámica del trabajo de campo puede sugerir hacer modificaciones para entender la naturaleza de la transformación del conocimiento profesional, que posiblemente se suscite en el desarrollo de las tareas de formación y prácticas de los profesores, en el contexto del pensamiento algebraico temprano. En este sentido, el estudio no es lineal, pues se enfoca en dicha transformación, la cual puede ser producto de las interacciones de los participantes, del diálogo entre las experiencias que emergen, de la visión teórica del conocimiento profesional, de los cambios en sus prácticas, de los procedimientos y los resultados de la investigación (Santa, 2016).

A la luz de las ideas hasta ahora expuestas y, considerando las características de la investigación y el objetivo de la misma, el enfoque cualitativo es pertinente para el estudio, toda vez que permite analizar un objeto de tipo social relacionado con la transformación del conocimiento profesional, pues se busca comprender la naturaleza de esta. Adicionalmente, las observaciones naturalistas y sin control que se generaron en los espacios de interacción, mediados por las tareas de formación, posibilitaron la búsqueda de subjetividades y perspectivas "desde dentro" (Krause, 1995), en la realidad misma de los participantes, con miras a descubrir, explorar y analizar cómo se da tal transformación.

3.2. Diseño de la investigación

La elección del diseño de la investigación estuvo determinada, tanto por los objetivos planteados como por las características del problema. Si consideramos que este se enfoca en la transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria, entonces la teoría fundamentada ofrece posibilidades para develar y poder elaborar una postura teórica que permita explicar cómo ocurre dicha transformación; esta explicación, según Hernández et al. (2014), está dotada de riqueza interpretativa y aporta nuevas visiones al fenómeno estudiado. De esta manera, el diseño del estudio se enmarcó en la teoría fundamentada (Glaser y Strauss, 1967) y, desde esta perspectiva, el propósito es desarrollar una teoría basada en datos empíricos.

3.2.1. Teoría fundamentada. La teoría fundamentada, creada en 1967 por Barney Glaser y Anselm Strauss, fue definida por sus autores como una de las tradiciones de investigación cualitativa que permite develar y formular una teoría subyacente en los datos obtenidos de la realidad investigada. La teoría fundamentada se clasifica en dos diseños: emergente y sistemático. Para el primero, la teoría es una consecuencia de las relaciones que se establecen entre categorías que emergen y que se vinculan entre sí. En el segundo, se proponen unas categorías iniciales a través de una codificación abierta y, posteriormente, mediante el establecimiento de relaciones, se formula una codificación axial que posibilita la definición de un eje central, hasta llegar a una codificación selectiva, que conlleva a plantear una postura teórica.

Consecuentemente, la teoría fundamentada consiste en una codificación dada por el investigador a los sucesos, incidentes u ocurrencias expresados por entrevistados o situaciones observadas, para ser posteriormente agrupadas en categorías, conceptos o constructos. De este modo, utiliza procedimientos que, por inducción, generan explicaciones teóricas a un fenómeno estudiado (Vasilachis et al., 2006); en consecuencia, este proceso permite, en forma inductiva, "generar conceptos e interrelacionarlos, siguiendo un conjunto de rígidas y detalladas reglas formuladas por los autores" (Vasilachis et al., 2006, p. 81).

La teoría fundamentada, tal como fue concebida por Glaser y Strauss (1967), "ofrece una respuesta sistemática a la pregunta de cómo trascender el análisis laxo de los datos cualitativos" (García y Manzano, 2010, p. 23); esta concepción se preserva, aun cuando los autores fundadores presentaron diferencias conceptuales que los llevaron a poner el acento en distintos componentes de la construcción teórica. Así, Glaser (1992) decide privilegiar la creatividad del investigador, sobreponiéndola a aspectos procedimentales, mientras que Strauss y Corbin (1990) deciden enfatizar en los procedimientos y definir una metodología; lo anterior, propició dos diseños de la teoría fundamentada, el primero emergente y el segundo sistemático (Hernández et al., 2014), como se mencionó anteriormente.

En ambos diseños, la teoría se elabora a partir de los datos. Específicamente, en el emergente se plantea una teoría, como consecuencia de la creación de relaciones establecidas en las categorías emergentes de una codificación abierta; esto es, "se efectúa la codificación abierta y de ésta emergen las categorías (también por comparación constante), que se conectan entre sí para producir teoría. Al final, el investigador explica la teoría y las relaciones entre categorías" (Hernández et al., 2014, p. 476).

Para el diseño sistemático, los datos se codifican planteando unas categorías iniciales, mediante una codificación abierta; posteriormente, el establecimiento de relaciones, a través de una codificación axial, permite definir un eje central y posibilita la creación de conexiones que refinan las categorías, hasta llegar a una codificación selectiva que derive en la creación de una teoría. Respecto a la codificación, Vasilachis et al. (2006) hace las siguientes precisiones:

> Dado que el análisis comienza con la codificación, hay que aclarar que: a) en la codificación abierta solo se atribuirán nombres o categorías conceptuales a diferentes partes relevantes de las observaciones, textos, entrevistas, que implicará partir o "romper" los datos textuales; de ese análisis surgen primero los conceptos, y luego de un trabajo de abstracción las categorías conceptuales con sus propiedades –atributos– y sus variaciones –dimensiones–; b) en la codificación axial, se ubicarán las categorías principales en un modelo paradigmático, en el cual se identificarán las condiciones causales, intervinientes y contextuales, el fenómeno principal, sus estrategias de acción y las consecuencias; y c) en la codificación selectiva se comienza realmente a pensar en una teoría. (p. 89)

Cabe anotar entonces que, para efectos del desarrollo de la investigación doctoral y poder dar respuesta a la pregunta planteada, fue pertinente enmarcar el estudio en un diseño sistemático, de modo que, los datos obtenidos en el desarrollo de las tareas de formación y demás interacciones con los profesores, se confrontaron permanentemente con las ideas emergentes; dicha confrontación posibilitó la generación de propiedades para las categorías conceptuales que se logren dilucidar en el trabajo de campo, posiblemente asociadas con el conocimiento profesional de los profesores, en la perspectiva de Ponte (2012), con miras a comprender el objeto de estudio en cuestión. En consecuencia, en el marco de un diseño sistemático, los datos obtenidos en el desarrollo de las tareas de formación constituyeron unas categorías conceptuales que permitieron dilucidar cómo el profesor de matemáticas de primaria, transforma su conocimiento profesional, con relación a cada dimensión considerada por Ponte (2012), cuando se promueven formas de pensamiento algebraico temprano (Radford, 2011; Vergel y Rojas 2018).

A la luz de Strauss y Corbin (2012), la teoría fundamentada se deriva de datos recopilados de forma sistemática, que son analizados a través de la investigación. El protagonismo de estos es crucial, pues a partir de ellos emerge la teoría; así, la estrecha cercanía que guardan con el análisis y la elaboración teórica posibilita que se "generen conocimientos, aumenten la comprensión y proporcionen una guía para la acción" (p. 14). Esa generación de conocimientos ofrece un marco explicativo en la investigación en cuestión, para analizar cómo ocurre la transformación del conocimiento profesional. Para Strauss y Corbin (1990):

> La teoría fundamentada es una teoría derivada inductivamente del estudio del fenómeno que representa. Es descubierta, desarrollada y provisoriamente verificada a través de la recolección y análisis sistemáticos de datos pertenecientes al fenómeno. Por lo tanto, la recolección de datos, el análisis y la teoría se hallan en una relación recíproca. Uno no comienza con una teoría y luego la prueba. Más bien se comienza con un área de estudio y se permite que emerja lo que es relevante para esa área. (p. 23)

De acuerdo con Hernández et al. (2014), en la teoría fundamentada, "el investigador produce una explicación general o teoría respecto a un fenómeno, proceso, acción o interacciones que se aplican a un contexto concreto y desde la perspectiva de diversos participantes" (p. 472); así, este diseño también posibilitó analizar la transformación del conocimiento profesional, siempre que aportó comprensión a la situación objeto de estudio, porque pudo representar la complejidad contemplada en el proceso.

En coherencia con el enfoque de investigación considerado, la teoría fundamentada es de tipo inductivo; para Strauss y Corbin (2012) esta combina la generación inductiva de categorías y los resultados de las comparaciones permanentes de los sucesos observados; para el caso del presente estudio, dichos sucesos se enfocan en las interacciones de los profesores con sus compañeros, consigo mismos y con sus estudiantes. Esta “combinación”, que posibilita el descubrimiento de categorías y el establecimiento de relaciones con los sucesos, se debe refinar continuamente a lo largo de la recolección y análisis de los datos, y en el proceso de categorización (Strauss y Corbin, 2012).

3.2.1.1. Proceso de codificación. Para Vasilachis et al. (2006), la teoría fundamentada en los datos es concebida, por su naturaleza, como una estrategia para generar teoría y, entre sus principales componentes, podrían considerarse: la comparación constante, el muestreo teórico y la codificación (abierta, axial, selectiva). Respecto a este último componente, Hernández et al. (2014) manifiestan que:

> […] la teoría fundamentada tiene como rasgo principal que los datos se categorizan con codificación abierta, luego el investigador organiza las categorías resultantes en un modelo de interrelaciones (codificación axial), que representa a la teoría emergente y explica el proceso o fenómeno de estudio. (p. 496)

Así, el proceso de codificación puede ser entendido como aquel “por medio del cual se fragmentan, conceptualizan e integran los datos para formar una teoría” (Strauss y Corbin, 2012, p. 3); en este orden de ideas, el desarrollo conceptual logrado en el estudio debe evidenciarse a través del establecimiento de relaciones que vinculan los datos; paralelamente, este ha de ser un proceso dinámico y flexible, el cual, para efectos del desarrollo del estudio en cuestión, consideró un conjunto de tareas de formación que posibilitaron la constitución de datos objeto de análisis. A continuación, se presentan los distintos procedimientos de codificación utilizados en la investigación.

3.2.1.1.1. Codificación abierta. Este es un proceso analítico que permite la identificación de conceptos y el descubrimiento de propiedades y dimensiones en los datos (Strauss y Corbin, 2012). Los conceptos representan fenómenos y posibilitan la definición de categorías, en las cuales es posible identificar propiedades y dimensiones. Estas dos últimas se asocian, respectivamente, con las características de una categoría que dan significado a la misma, y con las escalas en las cuales varían las propiedades que dan especificaciones a la categoría. Para efectos del trabajo doctoral, los sucesos o interacciones manifiestos durante el desarrollo de las tareas de formación, que mostraron similitud en su naturaleza, fueron denominados bajo categorías que representaron el fenómeno objeto de estudio y que se indicarán en el capítulo 4.

En coherencia con la anterior idea, en el análisis de este estudio se reunieron todos los acontecimientos o sucesos que compartieron características comunes, asociadas con el conocimiento profesional y otras que emergieron (las cuales serán descritas en detalle en el capítulo 4) durante el desarrollo de las tareas de formación, en un contexto particular, el pensamiento algebraico temprano. Este proceso de agrupación permitió la definición de unas categorías iniciales caracterizadas por sus propiedades y la naturaleza común de su definición. Las categorías en mención se definen posteriormente.

En el proceso de definir categorías, para efectos del análisis logrado en el estudio, se destaca la necesidad de la identificación de propiedades, en términos de sus características particulares; en esta línea, en la investigación fue posible empezar a detectar regularidades que permitieron evidenciar cambios en el conocimiento profesional de los profesores y, adicionalmente, reconocer en este, un proceso flexible mediado por la reflexión y la acción producto de diferentes interacciones.

No solo la identificación de propiedades fue determinante en el proceso de codificación abierta. También el reconocimiento de las dimensiones, que indicaron la variación de las propiedades de una categoría fue relevante en la investigación; en consecuencia, estas permitieron dilucidar cómo iba ocurriendo la transformación objeto de análisis, y en qué medida se evidenciaban variaciones en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas de primaria, participantes en el estudio en cuestión.

El método de codificación abierta asumido en el estudio fue el de *análisis línea por línea,* que a la luz de Strauss y Corbin (2012) "exige un examen minucioso de los datos, frase por frase y a veces palabra por palabra [...]. Ésta es quizás la forma más demorada de codificación, pero suele ser la más productiva" (p. 131). Este procedimiento se realizó con el software Atlas.ti que permitió procesar y organizar la información transcrita de cada instrumento utilizado en la investigación. Cabe precisar que el software es reconocido como un soporte diseñado para aplicar los planteamientos de Glaser y Strauss (1967). Al respecto, San Martin (2014) menciona que Atlas.ti se puede reconocer como:

> El principal soporte informático para desarrollar TF [Teoría Fundamentada], este programa fue diseñado a finales de los ochenta por el alemán Thomas Murh, quien recurriendo a la tecnología hizo un intento por aplicar los planteamientos metodológicos de Glaser y Strauss. Este software permite expresar el sentido circular del análisis cualitativo, por cuanto otorga la posibilidad de incorporar secuencialmente los datos, sin la necesidad de recoger todo el material en un mismo tiempo. Por esta razón, permite llevar a cabo el muestreo teórico necesario para realizar el análisis constructor de teoría. (p. 114)

En el presente estudio, el software Atlas.ti permitió la organización y clasificación de la información a través de la definición de unidades de análisis; estas últimas se asociaron con episodios, palabras claves, expresiones o indicios que pudieran develar una transformación en el conocimiento profesional de los participantes; cada unidad fue codificada y posteriormente agrupada en categorías. Cabe mencionar que, aunque la herramienta facilitó el proceso de sistematización para la definición de categorías, el establecimiento de relaciones entre ellas fue una elaboración propia de la investigadora, tanto como la producción de mapas o esquemas para la construcción de la postura teórica.

3.2.1.1.2. Codificación axial. En el proceso de generar una postura explicativa, a través de un diseño sistemático, posterior a una codificación abierta, se realiza una codificación axial (Strauss y Corbin, 2012). Esta última es definida por Strauss y Corbin (2012) como: "el acto de relacionar categorías o subcategorías siguiendo las líneas de sus propiedades y dimensiones, y de mirar cómo se entrecruzan y vinculan éstas" (p. 135). En coherencia con esta definición, el propósito de la codificación axial es establecer relaciones entre las categorías con miras a develar elementos relevantes del fenómeno estudiado en cuestión y poder elaborar las respectivas explicaciones teóricas; para el caso particular de la investigación en cuestión, se trata de fundamentar una postura teórica explicativa que dé cuenta de la transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Con el proceso de codificación axial se busca establecer relaciones entre categorías; es por ello que, en la elaboración de un esquema explicativo, existen acciones básicas como las descritas a continuación, enunciadas por Strauss y Corbin (2012):

- Acomodar las propiedades de una categoría y sus dimensiones, tarea que comienza durante la codificación abierta.

- Identificar la variedad de condiciones, acciones/interacciones y consecuencias asociadas con un fenómeno.

- Relacionar una categoría con sus subcategorías por medio de oraciones que denotan hipótesis.

- Buscar claves en los datos que denoten cómo se pueden relacionar las categorías principales entre sí. (p. 135)

A las anteriores acciones y con miras a la elaboración de una postura explicativa, se suma la necesidad de que los análisis realizados logren relacionar dos aspectos: *la estructura* y *el proceso* (Strauss y Corbin, 2012). Ambos ofrecen, respectivamente, la posibilidad de comprender el *por qué* y el *cómo.* Lo anterior, es relevante en el proceso de codificación axial, en tanto que:

> […] la estructura o las condiciones establecen el escenario, o sea, crean las circunstancias en las cuales se sitúan o emergen los problemas, asuntos, acontecimientos o sucesos pertenecientes a un fenómeno. El proceso, por su parte, denota la acción/interacción, en el tiempo, de las

> personas, organizaciones y comunidades, en respuesta a ciertos problemas y asuntos. (Strauss y Corbin, 2012, p. 139)

En consecuencia, la vinculación de la estructura y el proceso posibilita captar la complejidad del fenómeno objeto de análisis y entender la naturaleza evolutiva de los acontecimientos (Strauss y Corbin, 2012). En este orden de ideas, las relaciones entre los acontecimientos no son necesariamente explícitas, y son la interpretación del investigador y su capacidad para describir fenómenos, las que permiten el establecimiento de vínculos entre las categorías, lo cual puede hacerse mediante un esquema que evidencie las conexiones que entre ellas emergen; a este proceso se denomina *paradigma*, en el marco de la teoría fundamentada.

Así, un paradigma se configura como una herramienta analítica que posibilita organizar datos e integrar estructuras y procesos, construyendo, de manera sistemática, categorías y relacionándolas entre sí (Strauss y Corbin, 2012); en el estudio, el paradigma da cuenta de un esquema organizativo que enuncia una perspectiva analítica de los datos que se obtuvieron en el desarrollo de las tareas de formación y las distintas interacciones que estas suscitaron.

Con la descripción lograda por Strauss y Corbin (2012) para referirse a paradigma, se vinculan tres componentes. Estos son: a) condiciones; b) acciones / interacciones; y c) consecuencias. El primer componente está determinado por una forma conceptual para explicar por qué o cómo las personas responden de cierta manera; las condiciones agrupan acontecimientos o sucesos que componen la estructura en la cual están inscritos los fenómenos. El segundo, se relaciona con respuestas estratégicas; con el cómo los grupos enfrentan los problemas, o dan respuesta a los acontecimientos que emergen en las condiciones. En el último, las consecuencias, son el resultado de las acciones o interacciones y el análisis de ellas aporta explicaciones al fenómeno en cuestión. Los anteriores componentes determinaron en el estudio una posibilidad para entender la anatomía o naturaleza de la transformación del conocimiento profesional.

Para dilucidar cómo el profesor transforma su conocimiento profesional, la codificación axial, con todos sus componentes, posibilitó poner el foco de atención en las categorías y en cómo estas se relacionan con las dimensiones descritas por Ponte (2012). En consecuencia, el conocimiento disciplinar, del currículo, de los estudiantes y de los procesos de trabajo en el aula, fueron objeto de estudio durante el análisis, así como otras categorías que emergieron de las interacciones de los participantes, y que posibilitaron aclarar la estructura y el proceso de dicha transformación.

*3.2.1.1.3. Codificación selectiva***.** Este tipo de codificación demarca el último paso del análisis, y con ella se busca "integrar los conceptos en torno a una categoría central y completar las categorías que necesitan más desarrollo y refinamiento" (Strauss y Corbin, 2012, p. 256). Para esta fase del análisis, la profundidad y complejidad de la postura teórica en construcción, se refleja en los diagramas o representaciones que muestran las relaciones establecidas y en los análisis que se suscitan en la acción de dilucidar cómo el profesor de matemáticas transforma su conocimiento profesional.

En la codificación selectiva los datos se vuelven teoría y, en este proceso, se tiene en cuenta la determinación de una categoría central o modular, la cual representa el tema principal de la investigación que, en el contexto específico del estudio, se trata de la transformación del conocimiento profesional. Este proceso se denomina integrativo y procura la conceptualización y el refinamiento de las categorías que configuran un esquema de relaciones, que ha de mostrar consistencia y cohesión con los datos.

En la elaboración de una postura teórica explicativa, a partir de los datos, para efectos del estudio en cuestión, la codificación selectiva se convirtió en una herramienta que permitió un proceso de consolidación de las relaciones establecidas entre las categorías, mediante un esquema explicativo que evidenció los posibles hallazgos teóricos asociados con la transformación del conocimiento profesional de los profesores, en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Entre las técnicas que pueden ser empleadas para el desarrollo de una codificación selectiva, se distinguen: la escritura de argumentos que cuenten una historia, el uso de diagramas, la elaboración y selección de memorandos o registros de análisis y el uso de programas de computación para hacer clasificaciones. Poniendo en consideración las características del estudio en cuestión, se reconoce la pertinencia de utilizar diagramas que permitan representar las categorías y relaciones que entre estas se establecen; en este sentido, en la investigación se entiende que los diagramas "son más útiles que contar las historias para organizar las relaciones entre los conceptos" (Strauss y Corbin, 2012, p. 167).

En el proceso de integración, donde los datos se vuelven teoría, los diagramas integradores, son considerados como:

> […] representaciones muy abstractas de los datos. *No* es necesario que incluyan todos los conceptos que hayan emergido durante el proceso de investigación, sino centrarse en aquellos que llegan a la posición de categorías principales. Los diagramas deben fluir, con aparente lógica y sin demasiadas explicaciones. Los diagramas explicativos tampoco deben ser demasiado complicados, los que tienen muchas palabras, líneas o flechas, se hacen difíciles de "leer". Los detalles deben dejársele a la escritura. (Strauss y Corbin, p. 168)

En el estudio, los diagramas elaborados permitieron dilucidar los componentes básicos de la postura explicativa, entrelazando las dimensiones que caracterizan el conocimiento profesional y la incidencia que tiene en estas la presencia del pensamiento algebraico temprano, como contexto que posibilita, no solo empezar a vislumbrar cambios en dicho conocimiento, sino también reconocer la naturaleza o anatomía de los mismos. Es así como, una de las herramientas que se considera pertinentes para el estudio, y que ofrece la posibilidad de elaborar diagramas explicativos, es la de los mapas conceptuales, toda vez que "son un recurso esquemático para la representación de un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones" (Novak y Gowin, 1988, p. 33). En esta línea y en el marco del estudio en cuestión, estos permiten el establecimiento de relaciones entre conceptos, que se vinculan de manera coherente y en correspondencia con las propiedades que los caracterizan.

Cabe mencionar que, el esquema teórico propuesto, debe ser consistente y garantizar una relación válida entre las categorías (Strauss y Corbin, 2012). Para ello, es indispensable comparar el esquema con los datos, con miras a consolidar categorías que no se han desarrollado plenamente, descartar inconsistencias o evitar datos que no sean acordes con la teoría; este proceso de comparación posibilita validar el esquema elaborado y, en consecuencia, la postura explicativa creada (Strauss y Corbin, 2012). En esta línea, el aporte teórico del presente estudio se enmarca en el análisis de la transformación del conocimiento profesional para ofrecer un esquema explicativo de cómo esta ocurre.

3. 3. Trabajo de campo

El trabajo de campo posibilitó el desarrollo de tareas de formación que procuraron responder a necesidades manifiestas por una comunidad de profesores de educación básica primaria, en cuanto a su conocimiento disciplinar relacionado con el pensamiento algebraico temprano. La investigación se llevó a cabo con cuatro profesores pertenecientes al departamento de Antioquia (Colombia); ellos trabajan en distintas veredas localizadas en el oriente antioqueño y accedieron a participar voluntariamente del proceso, asistiendo a encuentros periódicos realizados durante aproximadamente ocho meses; en estos encuentros, los objetos de reflexión estuvieron mediados por conceptos de carácter algebraico, reflexiones sobre el currículo, procesos de aprendizaje de sus estudiantes y de trabajo en el aula.

De manera general, cada uno de los encuentros estuvo mediado por el desarrollo de tareas de formación, las cuales tuvieron una estructura definida para la realización de las actividades, pero, a la vez, esta fue flexible en tanto prestó atención a las necesidades e inquietudes manifiestas por la comunidad de profesores. En el desarrollo de cada tarea se consideraron cuatro momentos; el primero permitió una ambientación del trabajo a realizar, mediado por las reflexiones que suscitaron encuentros anteriores y las expectativas del nuevo. En este espacio, los profesores tuvieron la oportunidad de contar sus experiencias, compartir videos del trabajo realizado con los estudiantes, manifestar cómo se sentían con su participación en el proceso de investigación y cómo esto podía incidir en su práctica de aula.

El segundo momento fue dedicado al desarrollo de actividades de carácter algebraico. Estas posibilitaron reflexiones en distintos campos del conocimiento, pues no solo los elementos disciplinares propiciaron inquietudes, sino también la forma cómo opera el currículo en sus prácticas y el trabajo de sus estudiantes, todos esos aspectos hicieron parte de los objetos de análisis que mediaron este momento.

Un tercer momento se enfocó en el diseño de actividades para el aula, pensadas a la luz del momento anterior, con la intención de incorporar en sus prácticas actividades de carácter algebraico y proyectar planeaciones de las mismas. Este espacio permitió también que los profesores empezaran a reconocer cuáles de las tareas que operan en sus prácticas pueden tener un carácter algebraico, del cual no eran siempre conscientes.

Para finalizar, el momento de cierre fue mediado por la reflexión acerca de algunas cuestiones como: qué se había aprendido en estos encuentros, cómo esta experiencia propiciaría acciones en las aulas, qué aspectos importantes encontraban pertinentes para su práctica profesional, cómo diseñar estrategias para que sus estudiantes pudieran aprender conceptos algebraicos como los analizados en el encuentro, qué tanta relación tenía el trabajo realizado durante los encuentros con el currículo que opera en sus aulas, cómo incidirían las interacciones entre ellos y las tareas en las decisiones sobre la práctica, entre otros asuntos que podían ser objeto de análisis.

Todas las tareas realizadas durante el desarrollo del trabajo de campo, estuvieron mediadas por los momentos descritos; cada participante reconoció las dinámicas del trabajo propuesto y, en consecuencia, se familiarizó rápidamente con este. A continuación, se presenta una descripción que cada uno de los profesores participantes realizó de sí mismo, acerca de su experiencia y del contexto en el cual se desempeñan.

3.3.1. Participantes. Para el desarrollo del trabajo de campo, se contó con la participación de cuatro profesores pertenecientes a instituciones educativas públicas del departamento de Antioquia; ellos decidieron vincularse de manera activa y voluntaria en el desarrollo del estudio; por lo tanto, conjuntamente, se decidió realizar reuniones periódicas, las cuales, a través del desarrollo de tareas de formación, definidas en la perspectiva de Ponte et al. (2009) como tareas profesionales, se constituyeron en espacios académicos.

Cabe anotar que los cuatro profesores tienen más de diez años de experiencia trabajando bajo la modalidad de Escuela Nueva y, dado que, en algunos casos, en la institución solo cuentan con otro compañero para interactuar, han aceptado participar en estos espacios y tener la oportunidad de compartir sus perspectivas, a través de un proceso de investigación. En el estudio se decidió privilegiar las voces de los profesores, es por ello que, a continuación, se presenta una descripción propia de cada participante; adicionalmente, se comparten las reflexiones expuestas por ellos, en las cuales se refieren a lo que significa trabajar en el contexto del modelo de Escuela Nueva y ser profesor rural.

Maritza: *soy profesora de la Institución Educativa Rural Zoila Duque Baena, sede Pedro Pablo Betancur, vereda Portugal, en el municipio de Abejorral, Antioquia. Soy Tecnóloga Agropecuaria, del Politécnico Jaime Isaza Cadavid; Licenciada en Educación Rural, del Centro Universitario de Bienestar Rural, CURB; Especialista en Pedagogía de la Recreación Ecológica, de la Universidad los Libertadores; Magíster en Educación, de la Universidad de Antioquia. Además, llevo 13 años laborando como docente de primaria en el modelo de Escuela Nueva. La institución es de carácter mixto, orienta los niveles de preescolar, primaria, secundaria y media. En el establecimiento educativo trabajamos dos docentes, yo oriento la básica primaria y el compañero a los jóvenes de secundaria con el modelo de pos-primaria. Oriento las actividades pedagógicas desde los grados de* *preescolar a quinto. Cuento con 17 estudiantes, 8 niñas y 9 niños. Sus edades oscilan entre los 5 y 15 años de edad, ya que se cuenta con dos estudiantes en extra edad.*

Gina: *soy docente de básica primaria en la Institución Educativa Zoila Duque Baena, sede San Vicente. Mi formación es en Educación Básica con énfasis en Tecnología e Informática, de la Universidad Pontificia Bolivariana; posteriormente realicé un posgrado en Pedagogía Lúdica y Gestión Ambiental, con la Universidad de Área Andina. Me vínculo a la profesión docente el 4 de febrero del año 2000. Llevo 19 años en esta ardua pero hermosa tarea. He vivido experiencias que marcan mi vida de manera significativa en una comunidad que llevo en mi corazón, por su calidez colaboración y apoyo en mi quehacer como docente. Trabajo en el modelo de Escuela Nueva, con un aula multigrado, atendiendo todas las áreas del conocimiento y grados de escolaridad.*

Julieth: *soy docente de educación básica primaria en la Institución Educativa Rural Zoila Duque Baena, de la vereda Chagualal, en el municipio de Abejorral. Soy normalista superior con énfasis en Lengua Castellana, Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, Especialista en Informática y Multimedia de la Educación y estudiante de Maestría en Educación, línea Educación Matemática de la Universidad de Antioquia. en Febrero de 2009 fui contratada por la Alcaldía municipal para ser la coordinadora de primera infancia y en enero de 2010 ingresé en provisionalidad a la Secretaria de Educación Departamental de Antioquia, donde fui nombrada para la Institución Educativa Manuel Canuto Restrepo, como docente de básica primaria en el modelo de Escuela Graduada, luego pasé a la Sede Rosa Arango como mono-docente de Escuela Nueva, un modelo pedagógico flexible para atender el nivel de preescolar y el ciclo de la educación básica primaria; de allí fui nombrada para la Sede San Luis y finalmente trasladada para la I.E.R Zoila Duque Baena, donde a pesar de ser escuela graduada también se maneja el modelo de Escuela Nueva, debido a que, por el número de estudiantes solo somos dos docentes.*

Edier: *soy docente de aula, de la básica primaria en la Institución Educativa Rural Zoila Duque Baena, sede Santa Ana, de la vereda Santa Ana, en el Municipio de Abejorral. Soy normalista superior con énfasis en Lengua Castellana y Licenciado en Matemáticas. Cuando inicié mi carrera profesional asumí el modelo de Escuela Nueva, que ha sido un reto como docente, debido a que implica atender todos los grados de preescolar a quinto en una misma aula y con todas las áreas. Este ambiente de aprendizaje, en ocasiones se torna un poco complejo, ya que no se puede tener la dedicación para cada grado, como se requiere en la consolidación de procesos de formación; es por ello que, indagar, investigar y capacitarme, siempre ha sido un espacio fundamental, ya que me permite mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, en contextos y situaciones complejas de una ruralidad que requiere lo mejor de cada maestro, a pesar de las dificultades en el uso de recursos y materiales didácticos.*

Los profesores participantes en la investigación exaltan que, hacer parte de estos procesos formativos, aporta herramientas teóricas y metodológicas para consolidar sus prácticas, y precisan que la pertinencia de estas es valiosa, pues el trabajo bajo el modelo de Escuela Nueva ofrece unos retos y condiciones especiales para llevar a cabo los objetivos de la labor docente y de aprendizaje de los estudiantes, por lo cual, todos los conocimientos nuevos son bienvenidos (entrevista sostenida con los profesores). A continuación, se presenta cómo se concibe el modelo de Escuela Nueva y se exponen algunas reflexiones extraídas de diferentes entrevistas realizadas con los profesores participantes de la investigación, con relación a lo que para ellos significa trabajar bajo este modelo y ser profesor rural.

3.3.2. Escuela Nueva. De acuerdo con el MEN (2010), es un modelo pedagógico que surge en Colombia en la década de los setenta; su diseño fue elaborado por Vicky Colbert, Beryl Levinger y Óscar Mogollón, con el objetivo de ofrecer programas completos para la primaria y mejorar la calidad y efectividad de las escuelas del país, especialmente las ubicadas en zonas rurales, con aulas multigrado (donde todas las áreas y grados son atendidos simultáneamente por un profesor). Las sedes educativas rurales se caracterizan por una alta dispersión de su población, razón por la cual, los niños y niñas de diferentes grados, cuentan con un solo docente que orienta su proceso de aprendizaje (MEN, 2010).

Para los profesores participantes de la investigación, pensar en el modelo educativo de Escuela Nueva en Colombia, convoca a la reflexión de la labor realizada por un mono-docente que se encarga de orientar todas las áreas del conocimiento, en todos los grados de escolaridad; adicionalmente, trabajar en sitios alejados de un casco urbano, es una de las características del modelo, que ofrece mayores retos; aunque, tradicionalmente, ha sido impartido en zonas rurales, no se desconoce la existencia de aulas multigrado en zonas urbanas, pero en menor proporción.

Así entonces, los profesores participantes de la investigación reconocen que tienen el reto de realizar acciones pedagógicas pensadas para un grupo heterogéneo en edades y grados de escolaridad, más allá de las propias diferencias sociales, familiares y personales que trae la escuela tradicional en sí. Sin embargo, esta heterogeneidad la consideran como una oportunidad que les exige el diseño de estrategias de intervención de clases enmarcadas en proyectos, en los que pueden converger elementos curriculares de todos los niveles.

De la experiencia del trabajo con Escuela Nueva, los profesores exaltan que, una planeación enmarcada en proyectos, les permite condiciones de flexibilidad curricular, posibilitando las bondades de tener una malla de áreas en constante construcción y reconstrucción, para los diferentes saberes; lo anterior, además, les permite y convoca a actualizarse permanentemente, de acuerdo a las dinámicas, ritmos y necesidades. En este sentido, participar en el desarrollo de un trabajo de investigación, representa para ellos, “la oportunidad de aprender conceptos desde otras perspectivas, y trabajar en una línea de pensamiento poco explorada, como lo es el pensamiento algebraico” (entrevista sostenida con los profesores en uno de los encuentros de formación).

Otro aspecto característico de la Escuela Nueva es la presencia, en muchos casos, de uno o dos profesores por sede; esta condición genera que las interacciones entre pares sean pocas y los diálogos pedagógicos, mediados por la reflexión docente, reducidos. Es así como, la participación en el proceso de investigación ofreció la posibilidad, a esta comunidad de profesores, de interactuar con sus compañeros, de ser apoyo mutuo, compartir experiencias, conocimientos, reflexiones, inquietudes y propósitos profesionales.

3.3.3. Ser profesor rural. Las distintas reflexiones expuestas por los profesores, permiten dilucidar cómo conciben lo que significa e implica ser un profesor rural, en el contexto del modelo de Escuela Nueva. Las siguientes apreciaciones hacen parte de las reflexiones manifiestas por los participantes de la investigación, con relación al modelo bajo el cual trabajan:

> Ser profesor en zona rural implica enfrentar diversas situaciones, en nuestro caso particular, nuestras sedes se encuentran a más de 18 kilómetros del casco urbano, a 1650 msnm, con un clima templado, hace parte de la cultura cafetera, donde todas las labores de la familia en el campo están inmersas en dicho cultivo. Los estudiantes, en su mayoría, tienen que desplazarse desde sus hogares caminando aproximadamente una hora para llegar a su escuela, por caminos de pendientes pronunciadas, ya que estamos sobre una zona de ladera.

Los profesores explican que, ser profesor rural y asumir el modelo de Escuela Nueva, es un gran reto, ya que se deben atender varios grados en una misma aula, con todas las áreas; por lo tanto, la formación y cualificación deben ser fundamentales para aportar lo mejor tanto en el saber, como en la formación de los estudiantes; así mismo, trabajar con una población de contexto rural, con dificultades de acceso a la institución, por la lejanía entre las viviendas de los estudiantes, y bajos recursos económicos, representa un gran esfuerzo, en tanto deben mantener la motivación para que los estudiantes superen los diferentes obstáculos y den lo mejor de sí.

Es por ello que los profesores participantes consideran que tienen responsabilidades adicionales con su formación, es decir, afirman que cualificarse aporta elementos para consolidar sus prácticas y responder a los retos particulares que el contexto demanda; adicionalmente, un proceso de cualificación les posibilita fortalecer interacciones entre pares, comunicar sus experiencias, expectativas y escuchar las voces de quienes comparten sus mismos intereses, inquietudes, metas académicas y profesionales.

Para llevar a cabo el trabajo de campo, se procedió con las siguientes acciones: conformación del grupo de profesores; diseño de tareas de formación, en las que el pensamiento algebraico temprano fue objeto de análisis; desarrollo de estas, las cuales propiciaron reflexiones asociadas con el conocimiento profesional; y, finalmente, recolección de información, para la creación de categorías y sistemas de categorías, que permitieron analizar la posible transformación de dicho conocimiento. A continuación, se presentan los métodos de recolección de información.

3.4. Métodos de recolección de la información

El diseño de la teoría fundamentada sugiere el análisis y la interpretación de los datos desde el inicio de la recolección de los mismos. Para Vasilachis et al. (2006):

> […] recolección, grabado, transcripción, lectura, codificación –abierta, axial y selectiva–, memos, matrices y creación de la teoría incipiente, se darán en una secuencia ininterrumpida y recurrente, como un "zig-zag" (Creswell, 1998) desde los datos a las primeras reflexiones teóricas, hasta que finalice el trabajo de campo. (p. 89)

En consecuencia, se puede inferir que es necesario destacar que el proceso de recolección y análisis ocurren prácticamente de manera paralela. De este modo, los episodios asociados con el conocimiento profesional, presentes en el desarrollo de las tareas de formación, en el aula de clase y en los ambientes cotidianos de los profesores, ofrecieron *datos* que generaron categorías, y que fueron analizados permanentemente, en busca del establecimiento de relaciones y selección de conceptos, que permitieron fundamentar una postura teórica frente a la transformación de dicho conocimiento.

Para el proceso de recolección de información, se conformaron comunidades con los profesores participantes, en las que la colaboración y observación sobre la práctica, en la perspectiva del Ponte (2012), orientaron el objetivo de las reuniones. La recolección de datos se realizó a través de herramientas como: observaciones, bitácoras de campo, un friso de reflexiones (en el estudio, esta herramienta se diseñó como un plegable de papel, que se dobla en forma de zigzag, y en el cual se incorporan tarjetas con reflexiones de los docentes), entrevistas individuales y grupales, anotaciones de episodios sobre las interacciones que se suscitan entre profesores y estudiantes, registros en videos, audios, material elaborado por los profesores y planeaciones de clases, entre otros registros, que pusieron de manifiesto elementos objeto de análisis para la definición de categorías.

Además, en el presente estudio se consideró la información emergente, que por algún motivo no se había previsto, y que pudo ayudar a dilucidar con detalle la naturaleza de la transformación que el profesor de primaria afronta, con relación a su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano. Cada uno de estos registros fue utilizado con autorización de los participantes, previamente firmada, en la que ellos manifestaron pleno consentimiento del uso de estos datos; además, de manera verbal, expresaron gusto por el papel y el protagonismo que cada uno tendría en el desarrollo de la investigación.

3.4.1. Fases de la recolección de la información. La realización de encuentros periódicos con los profesores, tuvo como objetivo evidenciar su conocimiento profesional, a través del desarrollo de tareas de formación enmarcadas en el pensamiento algebraico temprano, que permitieron la recolección de información y datos necesarios para el análisis requerido en el estudio. Este proceso tuvo diferentes fases, las cuales mediaron y estuvieron presentes durante el trabajo de campo.

Fase 1. Se consideraron los registros logrados durante el trabajo de campo, como son las grabaciones de audios y videos en cada uno de los encuentros de formación. Estas grabaciones recogieron las reflexiones de los profesores que emergieron durante el desarrollo de las tareas, las entrevistas sostenidas en distintos episodios, la presentación de sus planeaciones de clases, los conversatorios sostenidos, entre otros; en general, se retomó toda la información visual y auditiva generada en cada espacio de reflexión.

Fase 2. Consideró elementos adicionales a los mencionados en la fase 1; cada profesor contó con una bitácora y un friso, en los cuales registraron el desarrollo de las tareas realizadas, los conceptos que estaba aprendiendo, las reflexiones que motivaron ideas nuevas para incorporar el pensamiento algebraico en su aula, las decisiones que tomaron sobre la práctica y que evidenciaron cambios en la misma, las inquietudes sobre el trabajo de los estudiantes, y sus posibilidades de aprendizaje, entre otras que pudieron ser objeto de reflexión en los encuentros. La investigadora también contó con una bitácora para reportar las notas de campo, que dan cuenta de las reflexiones de los encuentros, en los cuales un foco teórico de atención estuvo puesto sobre el conocimiento profesional del profesor (Ponte, 2012) y las formas de pensamiento algebraico (Radford, 2011; Vergel, 2015a; Vergel y Rojas, 2018).

Fase 3. Los registros descritos anteriormente se transcribieron en un texto que se editó en el software Atlas.ti, para organizar la información a través de códigos y establecer categorías que se relacionaron entre sí, y fueron objeto de análisis.

Fase 4. Consistió en la elaboración del análisis de las transcripciones realizadas en la fase 3, el cual permitió vislumbrar unas categorías y las posibles relaciones entre ellas; este análisis se describe de manera detallada en el capítulo 4, pero retoma algunos de los elementos teóricos del presente capítulo, especialmente con relación a los procesos de codificación de los registros y datos mencionados en las fases 1 y 2, y que empiezan a sistematizarse en la fase 3.

En consecuencia, el proceso de análisis permitió generar un sistema de categorías, en el cual la información recolectada fue codificada mediante una caracterización que permitió clasificar datos; este sistema categorial se presenta a través de diagramas, mapas conceptuales, cuadros, matrices, entre otros, y permitió definir cómo se vinculan estos registros con la teoría, para validar o dar respuesta a la pregunta de investigación. Debido a la relevancia de los datos en el estudio doctoral, es necesario precisar cuál es el escenario que propició la generación de estos; para ello, se presentan a continuación algunas posturas de tipo teórico inherentes a la estructura de las tareas de formación.

3.5. Tareas de formación en el trabajo de campo

Como se ha mencionado anteriormente, uno de los escenarios que posibilitó la recolección de la información estuvo determinado por las tareas de formación, que en la perspectiva de Ponte et al. (2009) se definen como problemas y actividades, que son ofrecidas a los profesores para que tengan la oportunidad de profundizar su conocimiento acerca de lo que deben enseñar a sus estudiantes y de la manera cómo pueden hacerlo; estas propician reflexiones sobre las interacciones que emergen en las prácticas de aula y con los pares.

Las tareas de formación pueden ser asociadas con tareas que evidencian un aprendizaje profesional; en esta línea, “son tareas complejas que crean oportunidades para que los maestros reflexionen sobre los problemas pedagógicos y sus posibles soluciones a través de procesos de reflexión, intercambio de conocimientos y construcción de conocimiento” (Ponte et al., 2009, p. 193). Para el estudio en cuestión, estas configuran uno de los motivos que convocó el encuentro de los profesores; es así como, “estas tareas están en el centro de la formación de maestros de matemáticas y determinan lo que los maestros están aprendiendo, junto con varias formas de trabajo, dinámicas y contextos” (Ponte et al., 2009, p. 185).

En este orden de ideas, las tareas de formación, desde la perspectiva de Ponte et al. (2009), como tareas de aprendizaje profesional y la caracterización de tarea, dada por Vergel y Rojas (2018), como categoría didáctica revestida de densidad epistemológica, por cuanto su abordaje implica movilización, mediante signos y de operar con ellos, se inspiran en los desarrollos teóricos de Vygotsky (1995), desde los cuales se deduce que la educación puede ser entendida como el desarrollo artificial del niño (o de un individuo).

Los dos tipos de tareas (propuestas en las perspectivas de Ponte et al., 2009 y Vergel y Rojas, 2018), sugieren propósitos similares en términos del desarrollo conceptual y de las reflexiones (pedagógicas, matemáticas, didácticas, etc.) que se puedan generar. En este sentido, se exalta la máxima vygotskyana según la cual "la instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo y, de esta manera, despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentran en proceso de maduración" (Wertsch, 1988, p. 87).

En la línea de la anterior idea, dichas tareas desempeñan un papel fundamental en las ofertas de aprendizaje que se pueden hacer a los participantes en un proceso de formación; cuyo papel protagónico lo ejercieron activamente, de este modo, es posible pensar que podrían constituir un componente que evidencie la transformación del conocimiento profesional, cuyos productos reflejen un tipo de conocimiento del profesor, asociado con la reflexión y la puesta en práctica de lo que aprende.

Adicionalmente, se puede observar que las tareas de formación podrían cumplir más de una función, pues pueden facilitar el aprendizaje de los profesores, la reflexión sobre lo que saben, lo que aprenden, cómo enseñarlo y cómo llevarlo al aula. Es necesario resaltar que estas surgieron de las necesidades, intereses y problemas que enfrentan los profesores; no obstante, por su diseño flexible y amplio, el estudio acogió también propuestas realizadas por ellos.

La validez de las tareas de formación puede ser mayor si se consideran, en la perspectiva de Ponte et al. (2009), como un elemento determinante en la formación; al respecto, se encuentra que:

> […] la formación de profesores tiene como objetivo transformar a los profesores potenciales y practicantes desde las perspectivas de los principios sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas hasta las perspectivas más profesionales para hacer frente a los desafíos que presenta la enseñanza de las matemáticas. Esta transformación ocurre de manera más ventajosa a través de la participación en tareas que fomentan el conocimiento para enseñar matemáticas. (Ponte et al., 2009, p. 186)

En relación con la anterior cita, el favorecimiento del pensamiento algebraico en estudiantes de educación básica primaria, podría lograrse mediante acciones formativas diseñadas para los profesores; en este sentido, Branco y Ponte (2012) estiman que estos deben entender lo que implica la enseñanza del álgebra en primaria y, en consecuencia, tener conocimiento sobre ella, con miras al diseño de situaciones de carácter algebraico que posibiliten el desarrollo de este pensamiento.

El diseño de acciones formativas, con miras a lograr que los profesores entiendan las implicaciones de enseñar álgebra en los niveles de primaria, sugieren tareas que se enmarquen en problemas no convenciones, desafiantes, abiertos, que posibiliten el trabajo cooperativo, interacciones sociales y entre pares, y que, sobre todo, generen “profundas consideraciones y conexiones matemáticas y pedagógicas y desafíen las concepciones y creencias personales sobre las matemáticas y sobre cómo se llega a entender la matemática" (Zaslavsky, Chapman y Leikin , 2003, p. 899). Tareas con estas características, motivaron la participación y trabajo de los profesores, en tanto ofrecieron retos en términos de su conocimiento profesional, definido por Ponte (2012) como conocimiento didáctico, y que contempla la complejidad de la labor docente en distintas configuraciones, desde lo que el profesor sabe hasta lo que él hace con ese saber.

Bajo los presupuestos teóricos de Ponte (2014), el proceso de transformación de la práctica profesional define nuevos rumbos para la enseñanza y desarrolla recursos para el aprendizaje, la formación y las formas de organización escolar. Adicionalmente, "los profesores serán llamados a enfrentar nuevos desafíos, de donde puede resultar una responsabilidad y una competencia mayor, en términos del ejercicio de su actividad" (Ponte, 2014, p. 9). No obstante, cabe reconocer que otros factores pueden vincularse en la respuesta a estos desafíos; tal es el caso del conocimiento profesional, que podría transformarse a partir de las necesidades develadas en los contextos de su labor docente.

Como se mencionó anteriormente, la definición de nuevos rumbos para la enseñanza se asocia con desafíos inherentes a la labor profesional; uno de ellos es la creación de oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, la cual es una responsabilidad del profesor y devela la manifestación de su conocimiento profesional. Siendo así, el diseño de tareas debe considerar que "son un elemento fundamental en la caracterización de cualquier currículo, puesto que determinan en gran medida las oportunidades de aprendizaje ofrecidas a los alumnos" (Ponte, 2004, p. 12).

Ponte (2014) también se refiere al papel de las tareas que los profesores eligen o diseñan para sus estudiantes; al respecto, exalta que las finalidades de estas pueden enfocarse en: apoyar el aprendizaje, ayudar a verificar lo que los estudiantes aprenden, comprender sus capacidades, pensamientos y dificultades; estas finalidades caracterizan, a su vez, las tareas de formación de los profesores y develan una manifestación de su conocimiento profesional asociado con el conocimiento de sus estudiantes y sus necesidades.

De esta manera, el papel de las tareas en la investigación es definido en el contexto profesional del profesor como tareas de formación; para el caso de las tareas que el profesor propone a sus estudiantes, es necesario precisar que estas son nombradas como ‘tareas de aprendizaje para los estudiantes’ que, de acuerdo con Ponte (2004), "determinan en gran medida las oportunidades de aprendizaje ofrecidas a los alumnos. Por eso, la elección adecuada es uno de los pasos más importantes del trabajo del profesor" (p. 1).

En la labor del profesor, la selección de las tareas es un elemento fundamental para la creación de oportunidades de aprendizaje (Ponte, 2004, 2014); por esta razón, lograr el diseño de estas no es un asunto necesariamente sencillo, pues deben considerar elementos asociados con sus características, como son: grado (accesible, difícil), estructura (abierta, cerrada), duración (corta, mediana, larga), contexto (realidad, matemático, semirrealidad), tipo (exploración, ejercicios, problemas, investigación, aplicación y modelación) (Ponte, 2014).

Si ponemos en consideración que el profesor tiene la posibilidad de formular tareas para los estudiantes, en las que se crean situaciones de aprendizaje para desarrollar actividades productivas (Ponte, 2004), entonces se debe resaltar que esta labor, propia de su actividad profesional, "constituye uno de los problemas fundamentales a los que se enfrenta el profesor durante su práctica profesional” (Ponte, 2004, p. 1). Así, la formulación de tareas para los estudiantes es una acción del profesor que bien puede vincularse con su conocimiento profesional. Específicamente, su diseño está en relación directa con el conocimiento que posee el profesor de las matemáticas, de sus estudiantes, del currículo y de los procesos de trabajo en el aula, es decir, en el diseño de tareas de aprendizaje para los estudiantes convergen las dimensiones del conocimiento profesional.

3.5.1. Estructura de las tareas de formación. El desarrollo de las tareas de formación, llevado a cabo durante los encuentros, tuvo en cuenta unos momentos particulares, los cuales fueron descritos en el apartado del trabajo de campo. En esta línea, los momentos de cada tarea pudieron realizarse en uno o más encuentros, de acuerdo con la estructura general, de modo que permitieron organizar los objetivos y alcances de cada una de las mismas. A continuación, se presenta la estructura general que medió el diseño de las tareas de formación.

Tabla 6. Estructura general de las tareas de formación

Estructura general de las tareas de formación.	**Descripción**
Momento de reflexiones iniciales	Retomar reflexiones del último encuentro. Ambientación para el encuentro de formación, objetivos y metas. Caracterización de las prácticas, mediante la reflexión que suscita la puesta en común de los videos de clase.
Actividades enmarcadas en el pensamiento algebraico	Desarrollo de actividades de carácter algebraico. Elaboraciones conceptuales asociadas con características del pensamiento algebraico y tipos de pensamiento algebraico.
Reflexión sobre la práctica. Elaboración de propuestas para el aula.	Diseño de tareas de aprendizaje para los estudiantes. Reconocimiento de la presencia o necesidad de objetos algebraicos en el currículo que opera en las aulas.
Reflexiones del encuentro (a nivel del colectivo e individual).	Registro en la bitácora reflexiva o el friso, considerando aspectos como: pertinencia de la tarea para refinar o generar nuevos conocimientos disciplinares, reflexión sobre las necesidades y posibilidades de los estudiantes para desarrollar actividades de carácter algebraico.

Fuente. Elaboración propia para ilustrar la estructura de las tareas de formación, en correspondencia con el conocimiento profesional del profesor (Ponte, 2012).

De manera adicional, la estructura de la tarea, aunque es flexible porque es susceptible de modificaciones, según los intereses y las necesidades manifiestas por los profesores, guarda en su diseño una estrecha relación con las dimensiones descritas por Ponte (2012) para caracterizar el conocimiento didáctico en términos del conocimiento profesional; en este sentido, cada momento se corresponde con la naturaleza propia de las reflexiones que pueden asociarse con: el conocimiento de las matemáticas, en el campo del pensamiento algebraico, de los estudiantes, del currículo y de los procesos de trabajo en el aula.

Algunos de los elementos de carácter teórico y metodológico, expuestos hasta ahora, fueron retomados en el análisis de los datos mediante el desarrollo de los procesos de codificación descritos, que posibilitaron una fundamentación conceptual en el proceso investigativo. En este sentido, el camino metodológico descrito en este apartado, para Vasilachis et al. (2006), debe permitir la concreción de los propósitos e interacciones con el contexto conceptual y, para el estudio en cuestión, pone en consideración los procedimientos utilizados para producir una postura teórica y dar respuesta a la pregunta de investigación.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se ponen en consideración elementos que fundamentan el análisis, junto con una descripción que da cuenta de cómo fue realizado. Posteriormente, se presentan cada una de las tareas de formación desarrolladas durante la investigación, con sus respectivos procesos de codificación: abierta y axial. Para efectos de la elaboración de una postura teórica, se decidió realizar un inter – análisis con cada tarea y un intra – análisis con cada momento considerado, así, ambos análisis aportaron elementos teóricos para la elaboración de la codificación selectiva, que dio cuenta de cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

4.1. Consideraciones generales para el análisis

El proceso de análisis inició con la estructuración de las categorías emergentes, a través de la organización de los instrumentos, los cuales permitieron recolectar la información, para luego hacer la transcripción y clasificación de la misma; posteriormente, se analizaron los datos para dotarlos de sentido y lograr una interpretación que diera cuenta de cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional; este análisis estuvo sujeto a criterios de rigor o calidad, como son: validez interna, validez externa, confiabilidad y objetividad (Vasilachis et al., 2006).

Dos aspectos fundamentales se consideraron en el proceso de análisis: la identificación tanto de regularidades como de irregularidades en los datos y la definición de categorías; de hecho, ambos se convirtieron en objeto de estudio de la investigación. En los documentos transcritos y editados en el software Atlas.ti[1], se nombraron unidades de análisis, las cuales, para el estudio, fueron fragmentos de episodios, palabras claves o frases, expresadas por los profesores, que pudieran dar indicios de una posible transformación o aportar información para analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional, en la perspectiva de Ponte (2012); esto es, en términos de cuatro dimensiones: conocimiento de las matemáticas, de los estudiantes, del currículo y de los procesos de trabajo en el aula.

A las unidades de análisis se les asignó un código, es decir, un nombre que enmarcara el significado de la unidad; cada uno de los códigos, posteriormente, pasaron a hacer parte de unas categorías, según las características de cada unidad. Encontrar relaciones entre categorías posibilitó agruparlas para conformar categorías temáticas. Lo anterior, en coherencia con Vasilachis et al. (2006), implicó "seleccionar eventos o incidentes relevantes que sean indicativos de categorías conceptuales con sus propiedades y dimensiones" (p. 88).

También, los eventos relevantes estuvieron asociados con las unidades de análisis y posibilitaron la definición de las categorías temáticas; adicionalmente, hubo un momento de la investigación, en el cual, agregar nuevas unidades no aportó información novedosa y los datos se volvieron repetitivos o redundantes (Hernández et al., 2010); esto es, se alcanzó la saturación teórica, que indicó la posibilidad de contar con datos suficientes para plantear la postura explicativa buscada en el estudio.

[1] La licencia para el uso de este recurso fue provista por la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Existen otros elementos que fueron considerados durante el desarrollo del estudio; uno de ellos, se asocia con propiciar condiciones para llevar a cabo el trabajo de campo, el cual, se desarrolló en una de las sedes de la Universidad de Antioquia, ubicada en el oriente antioqueño; el otro, con establecer una relación ética entre la investigadora y los participantes (Vasilachis et al., 2006). Con respecto a este último aspecto, a los profesores se les informó la intención de la investigación y ellos aprobaron la utilización de la información brindada a través de su participación. Otro de los aspectos a reiterar en este apartado, se relaciona con la utilización del software Atlas.ti, como una herramienta que permitió asistir el análisis de la investigación y posibilitó la organización y clasificación de la información, con miras a la determinación de las categorías objeto de análisis.

Un aspecto a resaltar en el estudio doctoral y, considerando que la teoría fundamentada puede ofrecer posibilidades para la elaboración de una postura teórica en relación con la transformación del conocimiento profesional, es la definición de mi papel en la investigación. Es necesario precisar que no solo las perspectivas de los participantes inciden en la elaboración teórica, sino que mi participación como integrante de la comunidad de profesores también lo hace; de allí que fue un requerimiento definir en qué momentos fui observadora o participante. Finalmente, también se tuvieron en cuenta cuáles fueron las limitaciones de la investigación, determinadas en el análisis. A continuación, se presenta una descripción del proceso de análisis.

4.2. Descripción del proceso de análisis

Las tareas de formación, como un escenario para la recolección de información, propiciaron interacciones, reflexiones e inquietudes en una comunidad de cuatro participantes, convocados por el interés que suscita hacer parte de un trabajo de investigación; las necesidades de formación manifiestas por los profesores, fueron punto de partida en el diseño y elaboración de las tareas propuestas, las cuales, ofrecieron retos a nivel del conocimiento profesional de los profesores (Ponte, 2012) en un contexto particular: el pensamiento algebraico temprano (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2013, 2014).

La estructura de las tareas de formación fue presentada en el capítulo 3; en esta se explicitaron cuatro momentos para cada tarea, estrechamente relacionados entre sí, pero claramente diferenciados, debido a las naturalezas particulares de cada uno: momento 1 (M_1), reflexiones iniciales; momento 2 (M_2), actividades enmarcadas en el pensamiento algebraico temprano; momento 3 (M_3), reflexión sobre la práctica y elaboración de propuestas para el aula; momento 4 (M_4), reflexiones del encuentro, a nivel del colectivo e individual. La anterior estructura fue definida para efectos del desarrollo de los encuentros con los profesores, sin embargo, esta fue flexible, toda vez que los profesores pudieron retomar acciones de unos momentos, para desarrollar otros. Durante el trabajo de campo se realizaron cuatro tareas de formación (TF_1, TF_2, TF_3 y TF_4), cada una de ellas contempló los momentos ya mencionados, y que se muestran en el esquema presentado en la tabla 7.

Tabla 7. Tareas de formación y sus respectivos momentos

	Momento 1 (M_1)	**Momento 2 (M_2)**	**Momento 3 (M_3)**	**Momento 4 (M_4)**
Tarea de formación 1 (TF_1)	Reflexiones iniciales. Presentación de cada profesor. Conversatorio para conocer intereses y reflexiones profesionales.	Actividad enmarcada en el pensamiento algebraico: algoritmo de la división.	Diseño de planeaciones asociadas con la actividad enmarcada en el pensamiento algebraico, propuesta en la tarea de formación 1.	Reflexiones individuales y grupales suscitadas por la tarea de formación 1.
Tarea de formación 2 (TF_2)	Reflexiones iniciales. Caracterización de las prácticas, mediante la reflexión que suscita la puesta en común de los videos de clase	Actividad enmarcada en el pensamiento algebraico: Operaciones asterisco (*) y sus propiedades.	Diseño de planeaciones asociadas con la actividad enmarcada en el pensamiento algebraico, propuesta en la	Reflexiones individuales y grupales suscitadas por la tarea de formación 2.

	asociados con la tarea de formación 1.		tarea de formación 2.	
Tarea de formación 3 (TF_3)	Reflexiones iniciales. Caracterización de las prácticas, mediante la reflexión que suscita la puesta en común de los videos de clase asociados con la tarea de formación 2.	Actividad enmarcada en el pensamiento algebraico: reconocimiento de una estructura algebraica y solución de ecuaciones.	Diseño de planeaciones asociadas con la actividad enmarcada en el pensamiento algebraico, propuesta en la tarea de formación 3.	Reflexiones individuales y grupales suscitadas por la tarea de formación 3.
Tarea de formación 4 (TF_4)	Reflexiones iniciales. Caracterización de las prácticas, mediante la reflexión que suscita la puesta en común de los videos de clase asociados con la tarea de formación 3.	Actividad enmarcada en el pensamiento algebraico: patrones, regularidades y procesos de generalización.	Diseño de planeaciones asociadas con la actividad enmarcada en el pensamiento algebraico, propuesta en la tarea de formación 4.	Reflexiones individuales y grupales suscitadas por la tarea de formación 4.

Fuente. Elaboración propia para ilustrar la estructura de cada tarea de formación, en correspondencia con los momentos presentes en ellas.

El proceso de interpretación de los datos distinguió, inicialmente, una codificación abierta. Para ello, se examinaron detalladamente las transcripciones de los distintos instrumentos de recolección, utilizados durante el desarrollo de las tareas de formación. Este acercamiento inicial al análisis, se realizó con ayuda del software Atlas.ti, que permitió crear una lista de códigos que fueron continuamente comparados, mediante la detección de similitudes y diferencias; posteriormente, estos se categorizaron, según sus propiedades, dimensiones y significados (Strauss y Corbin, 2012). En el estudio se definieron 42 categorías, estas se agruparon en categorías temáticas, las cuales fueron objeto de análisis en la definición de la postura explicativa.

Posterior al proceso de codificación abierta y, tomando en consideración la estructura presentada en la tabla 7, el proceso de análisis de la información se realizó teniendo en cuenta dos aspectos:

a) El desarrollo de cada una de las tareas; para efectos del presente estudio, a este proceso se le denominó inter – análisis, y es entendido como el análisis que se realizó a lo largo (al interior) del desarrollo de cada una de las tareas de formación; esto es, la tarea de formación 1 (TF_1), con todos sus momentos, la tarea de formación 2 (TF_2), con todos sus momentos y así, sucesivamente; en este proceso se evidenciaron cambios denominados en la investigación como *in-situ*.

b) El desarrollo de cada uno de los momentos de las tareas de formación a lo largo del trabajo de campo, agrupados según su naturaleza; a este proceso se le denominó intra – análisis, y es entendido como el análisis que se realizó para cada uno de los momentos de todas las tareas de formación, esto es, todos los momentos 1, de las cuatro tareas, todos los momentos 2, de las cuatro tareas y así, sucesivamente, con cada momento; en este proceso se evidenciaron cambios progresivos a lo largo del desarrollo del trabajo de campo. Una representación de los análisis inter e intra, se muestra en la tabla 8.

Tabla 8. Esquema para ilustrar el proceso de análisis en cada tarea de formación y momento

	Momento 1 (M_1)	**Momento 2 (M_2)**	**Momento 3 (M_3)**	**Momento 4 (M_4)**	
Tarea de formación 1 (TF_1)					Inter – análisis
Tarea de formación 2 (TF_2)					
Tarea de formación 3 (TF_3)					
Tarea de formación 4 (TF_4)					
	Intra – análisis				

Fuente. Elaboración propia para ilustrar una forma de análisis: inter – análisis e intra – análisis.

El análisis enfocado en el desarrollo de cada una de las tareas (inter – análisis), se enmarcó en la búsqueda de relaciones entre las categorías definidas en el proceso de codificación abierta. Este proceso propició una codificación axial, que favoreció la identificación de las relaciones en mención; inicialmente, se realizó para cada tarea de formación y, posteriormente, para el conjunto de todas las tareas. Esto es, el proceso del inter – análisis, que se realizó con cada una de las tareas, permitió encontrar nuevas relaciones entre ellas, la cuales favorecieron la generación de interpretaciones y elaboraciones que pudieron dar cuenta de lo ocurrido con la transformación del conocimiento profesional de los profesores. En la tabla 9, se presenta un esquema que ilustra lo anteriormente mencionado.

Tabla 9. Esquema para ilustrar el proceso de inter – análisis en cada tarea de formación

	Momento 1 (M$_1$)	**Momento 2 (M$_2$)**	**Momento 3 (M$_3$)**	**Momento 4 (M$_4$)**		
Tarea de formación 1 (TF$_1$)					Inter – análisis	**Análisis de todas las tareas**
Tarea de formación 2 (TF$_2$)					Inter – análisis	
Tarea de formación 3 (TF$_3$)					Inter – análisis	
Tarea de formación 4 (TF$_4$)					Inter – análisis	

Fuente. Elaboración propia para ilustrar los inter – análisis y su configuración en un análisis global de todas las tareas.

Un proceso similar al presentado en la tabla 9, ocurrió en el intra – análisis, cuando se establecieron relaciones entre momentos con naturaleza similar, esto es, se encontró que entre los momentos 1 de cada una de las tareas, los momentos 2, 3 y 4, también existían relaciones susceptibles de ser analizadas. De esta manera, la codificación axial, que se realizó inicialmente sobre los momentos de forma separada, propició unas relaciones adicionales entre todos los momentos, que parecían evidenciar cambios paulatinos y progresivos a lo largo del trabajo de campo. La tabla 10 ilustra lo que se menciona en este apartado.

Tabla 10. Esquema para ilustrar el proceso de intra – análisis en cada momento

	Momento 1 (M_1)	**Momento 2 (M_2)**	**Momento 3 (M_3)**	**Momento 4 (M_4)**
Tarea de formación 1 (TF_1)				
Tarea de formación 2 (TF_2)				
Tarea de formación 3 (TF_3)				
Tarea de formación 4 (TF_4)				
	Intra – análisis	Intra – análisis	Intra – análisis	Intra – análisis
	Análisis de todos los momentos			

Fuente. Elaboración propia para ilustrar los intra – análisis y su configuración en un análisis global de todos los momentos.

Una vez establecidas las relaciones que proveen las codificaciones axiales correspondientes a todas las tareas de formación y a todos los momentos de estas, se identificó que entre ambas existían relaciones que era necesario estudiar, para tener una mirada panorámica de lo que había ocurrido con la transformación del conocimiento profesional de los profesores en el desarrollo del trabajo de campo. En coherencia con la teoría fundamentada, este proceso pudiera permitir una codificación selectiva, en la cual, la elección de una categoría central, relacionada con todas las demás categorías, permitió un acercamiento a una postura explicativa para referirse a la transformación del conocimiento profesional del profesor de primaria, inicialmente de manera general y, posteriormente, con particularidades y detalles propios para cada profesor. Los procesos de análisis mencionados en este apartado, se presentan en la figura 3.

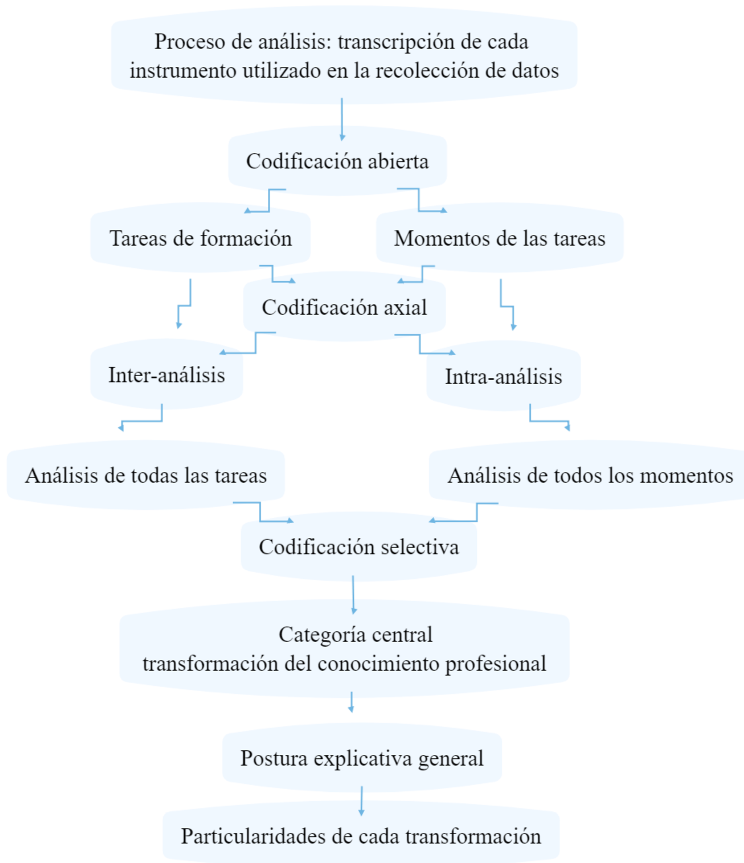


Figura 3. Esquema explicativo para la estructura del proceso de análisis.

4.3. Descripción, fundamentación y análisis de las tareas de formación

En este apartado, se describen y fundamentan las tareas de formación realizadas con los profesores. Adicionalmente, se presentan los análisis sobre las categorías encontradas durante el proceso de codificación, y las relaciones establecidas entre las mismas, en correspondencia con sus propiedades y atributos. En cada espacio de formación concertado con los profesores se propiciaron reflexiones en distintos escenarios y con diferentes naturalezas; estos se han nombrado como momentos de las tareas de formación y, para efectos del análisis, se estimó conveniente enumerarlos; en consecuencia, cada tarea de formación tuvo desarrollo en los escenarios mencionados, los cuales fueron flexibles y no siempre guardaron secuencialidad, pues las reflexiones, en estrecha interacción con los profesores, se propiciaron de manera permanente para cada momento.

4.3.1. Tarea de formación 1. La tarea de formación propuesta contempló unas reflexiones iniciales (M_1) alrededor del reconocimiento de los profesores como profesionales intelectuales, de las concepciones (referidas por Ponte (2012) como ideas o posicionamientos que un profesor tiene sobre su práctica) acerca de su profesión, de sus experiencias y condiciones para asumir retos, y de sus responsabilidades en el proceso formativo de los estudiantes. También fueron objeto de análisis, elementos de orden curricular, y algunas necesidades de formación manifiestas por ellos a través de las reflexiones que se suscitaron en el conversatorio.

El conversatorio fue mediado por la elaboración de un friso, en el cual se registraron las reflexiones motivadas a partir de la narración de experiencias profesionales, desde el inicio de la labor profesional hasta la actualidad. Se propusieron unas ideas que motivaron la reflexión en torno a experiencias y concepciones, también en relación con el momento inicial de su profesión docente, en distintos ámbitos, su progreso y el momento actual. Los tópicos alrededor de los cuales se hizo la discusión, fueron: la labor del profesor intelectual, los retos profesionales, las responsabilidades profesionales, el conocimiento del área de las matemáticas, el trabajo con los estudiantes, los apoyos curriculares, el trabajo de los estudiantes y la práctica profesional.

El diseño del friso, presentado en la figura 4, dispone de unos 'bolsillos' que posibilitan agregar tarjetas escritas, lo cual permitió a los profesores incorporar nuevas reflexiones sobre los tópicos propuestos a medida que participaron en el desarrollo de la investigación. Cada reflexión lograda en los encuentros, debió consignarse en el friso, además de las que se generaron de manera individual y durante las prácticas de aula. Las reflexiones registradas en el friso, hicieron parte de las bitácoras de los participantes, pero estas reflexiones eran "flexibles" pues, por la disposición de los bolsillos, los profesores pudieron volver sobre ellas cada vez que tuvieron algo nuevo para agregar, complementar o modificar.

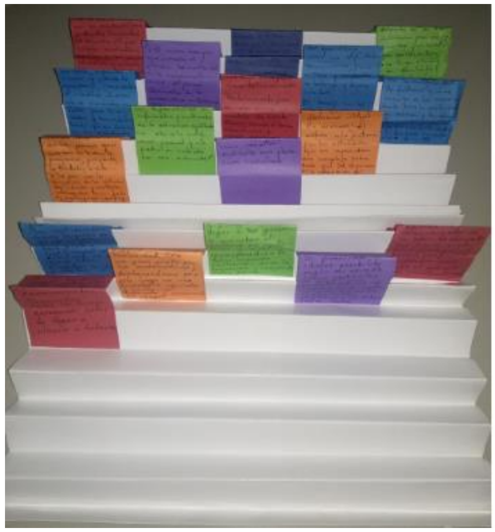


Figura 4. Modelo del friso.

Las interacciones presentes en el desarrollo de la tarea de formación, pusieron en evidencia algunos de los asuntos que son objeto de reflexión en las prácticas de los profesores; es así como se retoma, de manera particular, en esta línea, uno de esos objetos: el algoritmo de la división, para ambientar el momento de la actividad de carácter algebraico (M_2). Este algoritmo constituyó un escenario propicio para exaltar el carácter algebraico de algunos de los conceptos estudiados durante la educación básica primaria, además, es considerado por los profesores como uno de los que ofrece mayor dificultad a los estudiantes.

La búsqueda de relaciones de variación y cambio, a través del algoritmo de la división, fue una de las líneas de reflexión propuestas, que permitió que los profesores reconocieran en la misma, componentes que trascendían el trabajo aritmético. De esta manera, se propiciaron algunos elementos para apoyar las planeaciones de clase de los profesores (M_3)

que vincularon los componentes conceptuales estudiados y que exaltaron formas de pensar algebraicas.

Esta tarea de formación, al igual que las demás, cierra con las reflexiones que pudo propiciar el desarrollo de la misma (M_4), considerando todos sus escenarios, y unos compromisos propios del encuentro: la puesta en escena de la clase planeada, en la cual sería objeto de análisis el algoritmo de la división y su carácter algebraico. Esta, además, debe ser presentada en el siguiente encuentro, como objeto de discusión y reflexión en relación con las distintas manifestaciones del pensamiento algebraico.

4.3.1.1. Proceso de codificación abierta para la tarea de formación 1. La tarea de formación 1 fue presentada de manera general en el apartado anterior; los datos que aportó el desarrollo de esta son objeto de análisis en el proceso de codificación abierta que, inicialmente, favoreció la definición de unas categorías, para empezar a vislumbrar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano. Un primer acercamiento al proceso de análisis, se apoyó en el trabajo realizado con el software Atlas.ti, en el cual, los primeros códigos que fueron recurrentes empezaron a definir categorías: 19 en total para este proceso inicial; las cuales son presentadas en la tabla 11.

Tabla 11. Categorías emergentes en el proceso de codificación abierta para el desarrollo de la tarea de formación 1

Aprendizaje suscitado por las interacciones
Carácter algebraico de algunos conceptos aritméticos
Carácter algebraico del algoritmo de la división
Concepciones de la enseñanza del álgebra
Concepciones sobre el trabajo de los estudiantes
Conocimiento de las matemáticas
Conocimiento de los estudiantes
Conocimiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes
Conciencia de la relación entre aritmética y álgebra
Conciencia de las posibilidades de enseñar álgebra
Conciencia de las responsabilidades profesionales
Dotar de sentido una propiedad

Importancia de fundamentar pensamiento algebraico para la secundaria
Motivación por trabajar conceptos algebraicos
Noción de variación
Sensación de indeterminación
Procedimientos algebraicos imprecisos
Reflexiones sobre la práctica
Tomar conciencia de que sí se hace trabajo algebraico

Fuente. Elaboración propia. Categorías emergentes en la tarea de formación 1.

En el marco del desarrollo de la tarea de formación 1, la codificación abierta se realizó con diferentes instrumentos, dispuestos para el proceso de recolección de información; estos fueron: bitácoras de los profesores y de la investigadora, frisos, videos y entrevistas; todo el material transcrito se guardó en siete archivos clasificados según su contenido; así, emergieron las categorías indicadas en la figura 5 (tabla 11), las cuales evidenciaron unas propiedades y dimensiones iniciales acordes con la primera parte del trabajo de campo. A continuación, se presentan las categorías mencionadas en relación con el material objeto de análisis durante la transcripción.

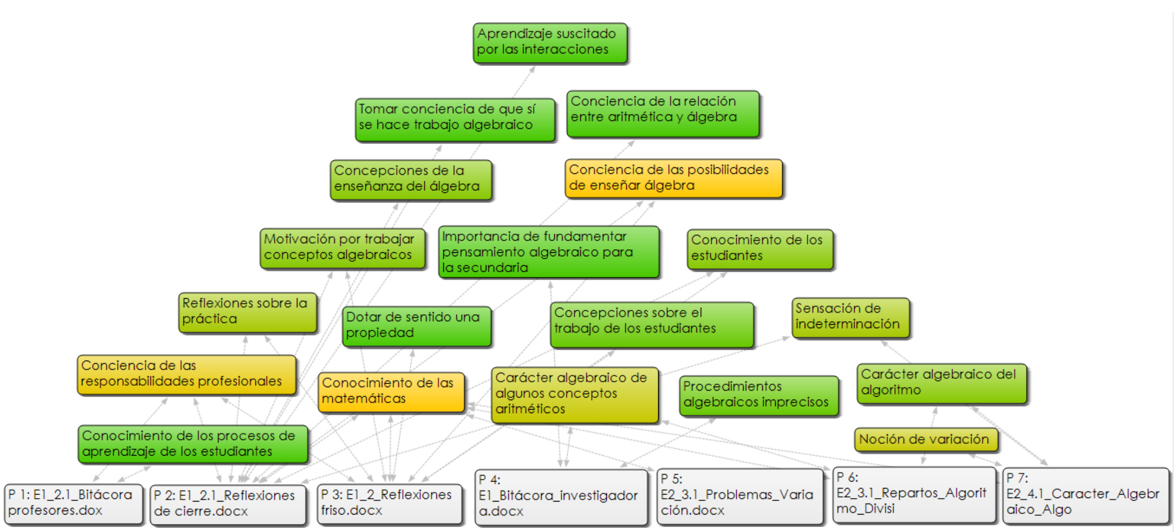


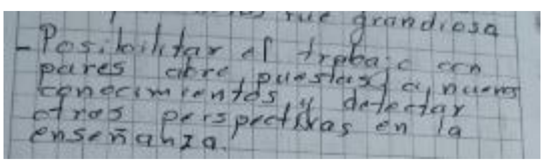
Figura 5. Categorías emergentes en el proceso de codificación abierta para la tarea de formación 1.

En el proceso de codificación abierta, se señalaron los datos que fueron objeto de estudio (unidades de análisis); estos fueron examinados de manera detallada para establecer comparaciones, identificar diferencias y similitudes (Strauss y Corbin, 2012) que permitieran una agrupación acorde con las propiedades particulares de cada unidad en cuestión. En este sentido, se establecieron dos criterios, uno de fundamentación, asociado con la construcción analítica elaborada sobre las unidades de análisis, para efectos del estudio, esto es, con qué frecuencia se ha vinculado una unidad con la categoría, y otro de densidad, relacionado con la cantidad de categorías comunes. Este último criterio no aplica para el proceso de codificación abierta, pues es en la codificación axial donde se tiene en cuenta la definición de categorías comunes.

La asignación de los colores, indica que las categorías señaladas con amarillo: conciencia de las responsabilidades profesionales, conocimiento de la disciplina y conciencia de las posibilidades de enseñar álgebra, son algunas de las que evidencian mayor fundamentación en el proceso de análisis (cantidad de unidades de análisis vinculadas a la categoría), lo cual puede indicar que, particularmente, estas categorías pueden ser determinantes en la definición de una postura explicativa, que dé cuenta de la transformación del profesor. Las categorías señaladas con el color verde (claro y oscuro), presentan una fundamentación menor, que puede indicar que los elementos allí nombrados, por ahora, aportan información incipiente en la interpretación de la transformación del conocimiento profesional. Este tipo de asuntos son de esperarse al iniciar un proceso de análisis.

4.3.1.2. Proceso de codificación axial para la tarea de formación 1. El desarrollo de la tarea de formación inició con espacios para la reflexión de los profesores, y durante el proceso de codificación axial, se alcanzaron a identificar expresiones (unidades de análisis) que indicaron asuntos asociados con las responsabilidades profesionales, los retos que afrontan y las posibilidades de interactuar con otros compañeros. Inicialmente, la tarea propició el compartir de experiencias relacionadas con las prácticas y las vivencias cotidianas; estos asuntos posibilitaron la creación de vínculos entre los profesores, el desarrollo de la autonomía, la autorregulación y el reconocimiento, propio y del otro, además, de fortalecer el trabajo conjunto (Fiorentini, 2008).

Posteriormente, las reflexiones trascendieron de la necesidad de fortalecer las relaciones existentes, hasta enfocarse en el reconocimiento de conceptos matemáticos que generan inquietudes en sus prácticas; de esta manera, el desarrollo de un conversatorio acerca del pensamiento algebraico y la promoción de este, propició acercamientos en la comunidad de participantes, pues a medida que los integrantes interactuaron, coincidieron en que este no era un pensamiento propio para la primaria; algunas de las ideas relacionadas con estos asuntos, se presentan en la figura 6, donde se registran las transcripciones de un apartado del conversatorio en mención.



Julieth: *yo coincido con mis compañeros, y sí tenemos mucha responsabilidad, y también con el pensamiento algebraico, porque al igual que los demás pensamientos, este también se podría trabajar, y ¿cómo hacerlo? Es un gran reto, nos toca formarnos porque no tenemos esa preparación en esta línea, y pensamos que el álgebra es para el bachillerato, por eso tal vez no la enseñamos y también, nos toca aprovechar el trabajo con los pares para ampliar nuestras perspectivas.*

Maritza: *yo reconozco que no tener una formación específica en matemáticas me genera una responsabilidad mayor porque tengo que estar actualizándome y estudiando, y esta es un área a la que toca dedicarle mucho tiempo para entender bien los conceptos. Por ejemplo, lo que hablamos hace un momento, yo no tendría como herramientas para decir que voy a enseñar álgebra a mis niños, y no creo que ellos puedan entender tampoco, porque eso es muy complejo y precisamente por eso se trabaja por allá en el bachillerato.*

Edier: *por eso también es que queremos aprovechar mucho esta oportunidad de compartir, porque este espacio nos permite eso, aprender unos de otros. Lo que la compañera dice es cierto, las responsabilidades son cada vez mayores, antes bastaba con enseñar a sumar, restar, operaciones, algunos problemas, ahora uno ve que todo es más demandante, y que hay que actualizarse para enseñarle a los niños lo que necesitan aprender. Y con lo otro, lo del pensamiento algebraico, así como tal, no lo trabajamos en la primaria.*

Figura 6. Conversatorio sostenido por los profesores en el desarrollo de la tarea de formación 1.

El conversatorio posibilitó el fortalecimiento de vínculos entre los profesores (Fiorentini, 2008), propiciando espacios para “compartir espontáneamente algo de interés común, pudiendo presentar visiones y entendimientos diferentes sobre los conceptos matemáticos, los saberes didáctico-pedagógicos y experiencias relativas a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática” (p. 49). Así, los profesores tuvieron la oportunidad de conocer las perspectivas de sus compañeros en relación con las responsabilidades profesionales, la promoción del pensamiento algebraico y las experiencias laborales. En esta línea, el trabajo realizado con el friso (figura 7) y, las historias narradas en torno a su elaboración, fueron una oportunidad de acercamiento y de reconocimiento de intereses comunes, que, además, estuvieron asociados con el encuentro preliminar (capítulo 1), donde el pensamiento algebraico fue promotor de reflexiones sobre el trabajo que se realiza en primaria con conceptos algebraicos, concepciones y responsabilidades frente a dicho trabajo.

Figura 7. Construcción del friso.

El contexto presentado en el desarrollo de la tarea de formación, para efectos del análisis, condujo a la definición de diferentes categorías, que tuvieron que ver con concepciones, reflexiones sobre la práctica, pensamiento algebraico, conciencia (en diferentes manifestaciones) y, en esta línea, el auto-reconocimiento como una forma de evidenciarla. Con respecto a la tarea, esta propendió por exaltar el auto-reconocimiento del profesor para develar rasgos de su identidad profesional, la cual, en la perspectiva de Ponte y Chapman (2008):

> […] incluye su apropiación de los valores y normas de la profesión; las creencias sobre la enseñanza y sobre sí mismos como profesores; una visión de lo que significa ser un "profesor excelente" y el tipo de profesor que desea ser; un sentido del yo como aprendiz y una capacidad para reflexionar sobre la experiencia. (p. 242)

Reconocerse a sí mismo, ser reconocido y reconocer al otro, generó en la comunidad de profesores un ambiente de confianza, que permitió buscar apoyos, comprender y enfrentar problemas de la práctica profesional, asumir desafíos curriculares y de la formación misma (Fiorentini, 2008). En esta línea, el reconocimiento referido en este apartado, como una propiedad de la toma de conciencia, tuvo en esta tarea inicial distintas manifestaciones, las cuales se configuraron como un asunto de interés común para todos. Así, los elementos en mención favorecieron la proposición de la primera categoría temática. La figura 8 presenta de manera explícita las categorías que han sido referidas en este apartado y, que conformaron la categoría temática denominada *toma de conciencia*.

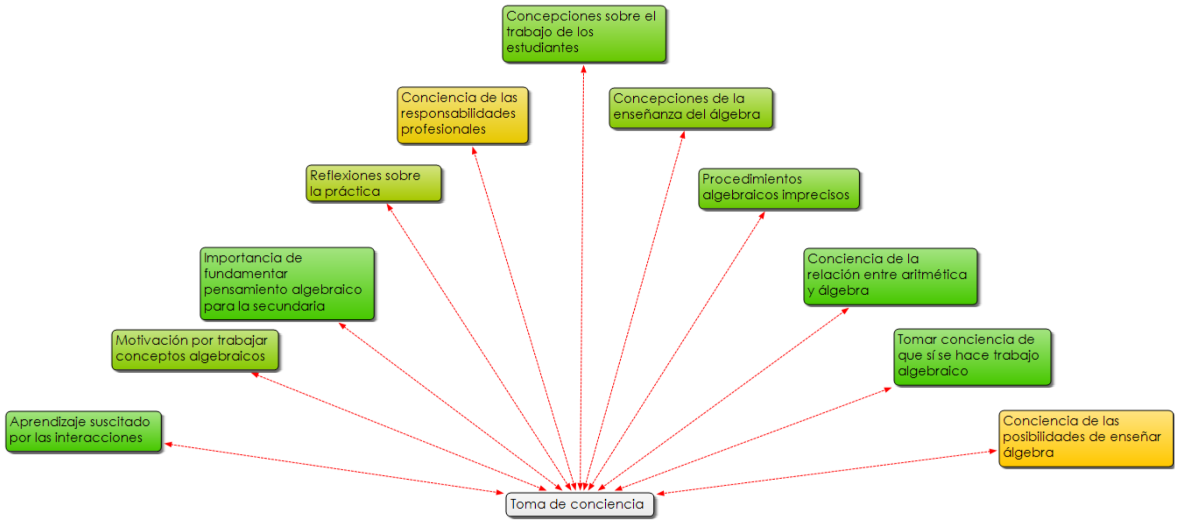


Figura 8. Categoría temática para la toma de conciencia.

A partir del reconocimiento de la responsabilidad profesional, social y cultural que implica la labor docente, se observa en las reflexiones de los profesores la manifestación de una toma de conciencia asociada con su labor y los retos que esta implica (figura 8), especialmente en lo referido al pensamiento algebraico temprano; en este sentido, asuntos como: las concepciones de la enseñanza del álgebra, el trabajo que los estudiantes hacen en esta línea, las posibilidades de enseñarla, la toma de conciencia de que sí es posible hacer trabajo algebraico en los niveles de primaria, la relación entre aritmética y álgebra, la importancia de fundamentar el pensamiento algebraico para la secundaria y la motivación por trabajar conceptos algebraicos, fueron objeto de reflexión a lo largo del desarrollo de la tarea, y pudieron evidenciar un posible elemento inicial a considerar en la transformación del conocimiento profesional, referido a la toma de conciencia con variadas manifestaciones.

La toma de conciencia fue un asunto que resultó de las interacciones con los compañeros y de los aprendizajes que estas propiciaron, gracias a los cuales fue posible reconocer experiencias, necesidades formativas asociadas con procedimientos algebraicos imprecisos, retos profesionales, posibilidades de aprender del otro, de la reflexión consigo mismo y sobre la práctica. Las reflexiones de los profesores, referidas a los anteriores aspectos, reflejan un sujeto consciente del cómo pude posicionarse frente a su labor profesional.

La emergencia de la toma de conciencia, como una categoría de análisis, implicó para el estudio la necesidad de una acepción para la conciencia; en consecuencia, se asume la postura teórica aportada por Radford (2017), quien menciona que:

> […] la conciencia es una reflexión subjetiva y posicionamiento propio sobre el mundo externo. La conciencia es el proceso subjetivo emocional, afectivo, por medio del cual cada uno de nosotros como individuo reflexiona sobre el mundo y se orienta en él. Esta reflexión no es contemplativa. La conciencia individual es una forma específicamente humana de reflexión subjetiva sobre la realidad concreta, durante la cual formamos sensibilidades culturales para ponderar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir a los otros, a nosotros mismos y a nuestro mundo. La conciencia sólo puede entenderse como el producto de relaciones y mediaciones histórico-culturales emergentes y contingentes, que no son dadas, sino que "surgen durante el establecimiento y el desarrollo de la sociedad" (Leont'ev, 1978, p. 79). Desde este punto de vista, la conciencia aparece en la vida concreta, no como su origen, sino como su resultado. (p. 122)

La designación de la toma de conciencia fue uno de los primeros objetos de estudio que emergió en el análisis, y que puede contribuir con la elaboración de una postura explicativa, para dar cuenta de cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional; en este sentido, el profesor que toma conciencia, se asume en el estudio como ser consciente de sus formas de pensar y hacer; esto es, un sujeto que evidencia su aprendizaje a través del "encuentro consciente y deliberado con formas histórica y culturalmente codificadas de pensamiento y acción" (Radford, 2017, p. 133).

La toma de conciencia, manifiesta a través de las reflexiones que emergieron, develaron fortalezas y necesidades formativas en la comunidad de profesores, en distintas dimensiones, a nivel del conocimiento disciplinar y curricular, de las experiencias de trabajo en el aula, del reconocimiento de los intereses de sus estudiantes y de la realidad de su práctica educativa, de las responsabilidades y los retos que tienen con los estudiantes, en los niveles de primaria y cómo esto incidirá en secundaria; manifestaciones adicionales se propiciaron al reconocer que su conocimiento puede ser escaso en relación con algunos conceptos disciplinares, y que una oportunidad para aprender de y para la práctica, puede darse gracias al trabajo realizado con los compañeros y al apoyo recibido de los mismos.

El análisis descrito para la toma de conciencia, se apoyó en la red de relaciones presentada en la figura 9, en la cual se pueden apreciar unidades de análisis codificadas, donde los profesores manifestaron sus apreciaciones en relación con la responsabilidad profesional asociada a la promoción del pensamiento algebraico temprano y las condiciones que tienen para hacerlo. En la figura 9, se alcanzan a observar algunos de los cuestionamientos y líneas de reflexión que plantearon los profesores en relación con su trabajo y el que realizan los estudiantes.

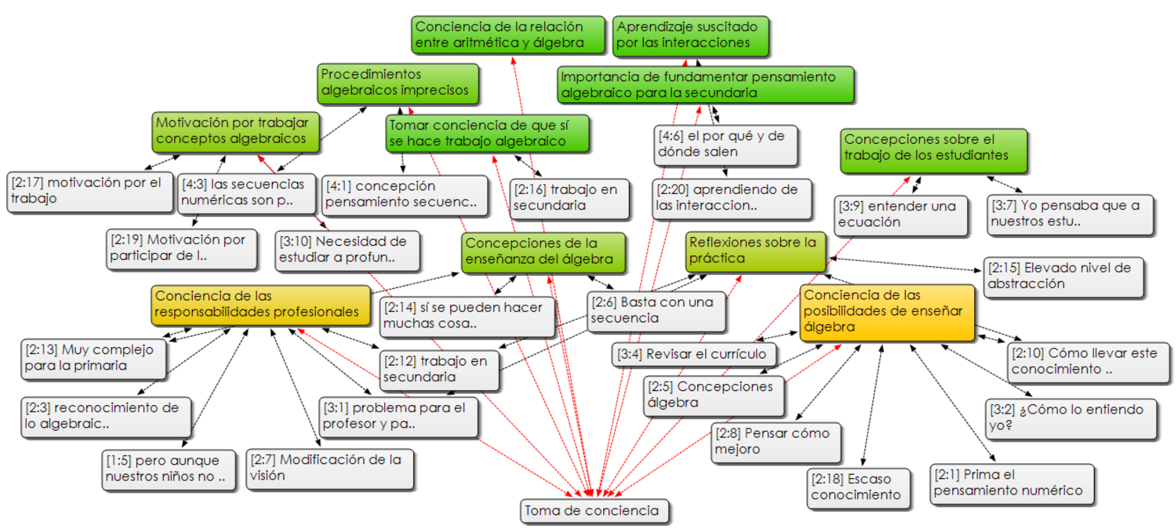


Figura 9. Red de relaciones para la categoría temática toma de conciencia.

Las interacciones logradas por los profesores, hasta este momento de la tarea, convocaron a poner el foco de atención en el conocimiento de las matemáticas, lo cual propició un cambio en la naturaleza de las reflexiones (M_2), pues se dio inicio al desarrollo de una actividad de carácter algebraico. La propuesta para abordar esta fue a través del algoritmo de la división, debido a que, según los profesores, es un concepto que causa conflicto en todos los grados. Lo anterior generó la necesidad de proponer una nueva categoría temática, asociada con el conocimiento de las matemáticas, específicamente en la línea del pensamiento algebraico temprano. Esta agrupó las categorías que se presentan en la figura 10.

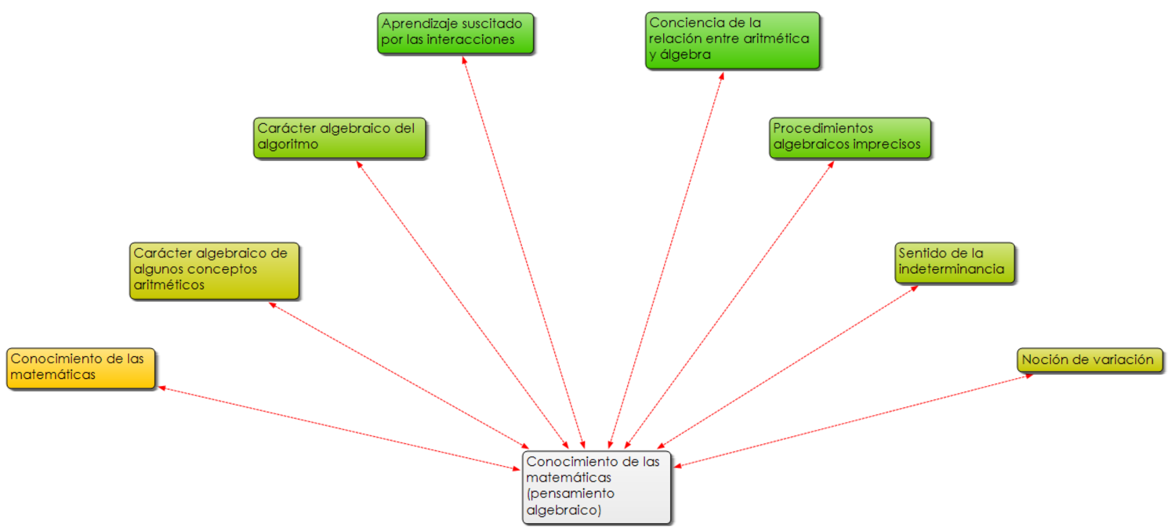


Figura 10. Categoría temática para el conocimiento de las matemáticas (pensamiento algebraico).

Para explorar los conceptos asociados con el algoritmo de la división, se indagó por las estrategias de enseñanza usadas por los profesores; ante el ejercicio propuesto para mostrar cómo dividir, ellos coincidieron en el procedimiento presentado en la tabla 12.

Tabla 12. Explicación provista por la profesora Julieth

[…] cuántas veces está este número en este [señalando el divisor y el dividendo, respectivamente], ahora multipliquemos este por este, [señalando el cociente y el divisor], para llegar a este, ¿cuánto le falta? [señalando el dividendo] ahora bajo este número [señalando una de las cifras del dividendo]… de nuevo volvemos a repetir el procedimiento.

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_17_02_2018_min10_14.

En lo referido al conocimiento disciplinar, los profesores manifiestan que entienden el algoritmo (cabe mencionar que este era reconocido como "la prueba de la división" y el uso del mismo se enfocaba en verificar que el resultado de una división era correcto). De hecho, aunque todos han estado en procesos de formación diferentes, se observa que utilizan una estrategia similar para enseñar a los estudiantes cómo hacer una división y se vuelve repetitivo el conjunto de indicaciones.

Frente a lo anterior, se indagó por la naturaleza del algoritmo de la división, y todos los profesores coincidieron en que es de carácter numérico; ante esta respuesta, también se preguntó por la posibilidad de explorar conceptos algebraicos en este, y los profesores expresaron que no era viable pensar que en este pudieran subyacer asuntos algebraicos, debido a que "*el carácter numérico, predominante en este, imposibilita reconocer rasgos algebraicos en el mismo*" (entrevista grupal, 17 de febrero de 2018).

Es así como se inició un conversatorio acerca de la necesidad de dotar de carácter algebraico el algoritmo; los profesores coincidieron en sus reflexiones y en las entrevistas sostenidas con ellos, que no existía tal, pues en este predomina un carácter numérico (bitácoras de los profesores Edier y Julieth, 17 de febrero de 2018). Una apreciación adicional se observa en un apartado de una entrevista presentado en la tabla 13.

Tabla 13. Respuesta provista por la profesora Maritza

[…] es que todo lo que tiene que ver con la división son procesos numéricos, algo algebraico como tal, ahí, no existe.

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_17_02_2018_min12_34.

Frente a este tipo de apreciaciones, se propuso desarrollar otro tipo de actividades; la intención era explorar el carácter algebraico del algoritmo de la división y que los profesores empezaran a reconocerlo. Para ello, se sugirió analizar la siguiente situación: *Supongamos que tenemos una división en la que el residuo es 8 y el divisor es 47, ¿cuál división proponen?* Los participantes se tomaron un tiempo, trabajaron inicialmente de manera individual y, luego, se reunieron para llegar a un consenso. La profesora Maritza se encargó de presentar la explicación que consideraron expresaba la puesta en común de las ideas de los profesores. Esta se muestra en la tabla 14.

Tabla 14. Argumento provisto por la profesora Maritza

[…]en el momento lo primero que hicimos fue ubicar las partes de la división que teníamos, y pensar qué papel juega cada una de esas partes, en la división que estamos desarrollando. Para nosotros, ese 47 que está en la casilla del divisor, nos está dando a entender que ese 47 está en una, dos, tres, cuatro veces…en otro número [señalando con el marcador un proceso cíclico], y fuera de eso a un número que da exacto en esa cantidad de veces, tendríamos que sumarle el 8, porque ese 8 es lo que nos sobraría del residuo; entonces en este caso, lo que hicimos fue: el 47, tres veces me da 141, y le sumamos el 8, porque ese 8 debe quedar de residuo; siendo así, me nos queda ya en el dividendo 149, en el divisor 47, en el cociente 3 y en el residuo el 8. Pero pueden ser muchos más.

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_03_03_2018_min3_25.

A partir de análisis como los anteriores, los profesores empezaron a hablar de relaciones de dependencia; exploraron el concepto de variable e hicieron representaciones en tablas, en las cuales pudieron encontrar regularidades, que les permitieron pensar en posibles características comunes, y empezar a reconocer características del pensamiento algebraico (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2015a, 2015b), estos aspectos pueden observarse en la figura 11, que fue tomada de una de las producciones de la profesora Maritza durante el desarrollo de la tarea.

Puedo variar el cociente y por ende el dividendo también cambiaría; ese dividendo va a depender de lo que yo ponga en el cociente y siempre debo dejar fijo el divisor y el residuo, teniendo en cuenta la condición dada para este caso. Entonces puedo proponer muchísimas divisiones.

Figura 11. Fragmento tomado del archivo de video m2_03_03_2018.

La posibilidad de inferir relaciones de dependencia, permitió que los profesores se acercaran a una generalización, inicialmente factual y, posteriormente, contextual, ligada a un esquema operacional en un nivel concreto (Radford, 2003), que no garantizó una expresión general; esto favoreció la modificación de la concepción de que solo existe un carácter numérico en muchos de los conceptos que se trabajan en primaria, específicamente, en el caso del algoritmo de la división. Parece ser que empezó a cambiar la idea de que es posible abordar el concepto de variación a partir de componentes aritméticos, como se muestra en la transcripción de un apartado de la bitácora del profesor Edier, presentado en la tabla 15. Un cambio en esta perspectiva, refleja otras formas de representación y procedimientos, es decir, indica un cambio en la dimensión del conocimiento de las matemáticas.

Tabla 15. Apartado de la bitácora del profesor Edier

[…] si con los niños trabajamos el "algoritmo de la división" todo el tiempo, entonces estamos acercándonos a conceptos algebraicos, como las variaciones; ya pudimos darnos cuenta de que cuando dejamos unos elementos fijos y los otros empiezan a variar, y sobre todo en función de alguno de esos que está fijo, lo que se nos está generando es una "relación de dependencia", asociado con el pensamiento algebraico. Y esa idea de variación se va fortaleciendo en los niños, necesitamos es buscar o pensar en tareas de este tipo.

Fuente. Fragmento tomado del archivo de imagen m4_03_03_2018.

Las tareas que representan una relación funcional atienden a la propuesta curricular de *álgebra temprana*, pues ponen de manifiesto un modo de pensamiento algebraico (Radford, 2018; Cañadas y Molina, 2016), en tanto permiten una aproximación al reconocimiento de variables, relaciones entre ellas, representaciones e interpretaciones. En consecuencia, las reflexiones que se propiciaron a la luz de la tarea de formación 1, posibilitó una manifestación de uno de los componentes característico del pensamiento algebraico: el sentido de la indeterminancia (entendida como esa sensación de indeterminación que es prototípica de los objetos básicos del álgebra como: incógnitas, variables y parámetro) (Radford, 2010a; Vergel y Rojas, 2018).

La evidencia de rasgos característicos del pensamiento algebraico (Radford, 2010), permite apreciar una sensibilidad por la manifestación de objetos indeterminados en conceptos de carácter algebraico; de esta manera, la manifestación de rasgos característicos del pensamiento algebraico (Radford, 2018, Vergel y Rojas, 2018) en las actuaciones y reflexiones de los profesores, se relaciona con una de las dimensiones de su conocimiento profesional, llamada por Ponte (2012) conocimiento de las matemáticas.

La puesta en escena del conocimiento de las matemáticas, incide también en las reflexiones sobre la práctica y las decisiones que toman los profesores en cuanto al tipo de tareas que proponen o diseñan para los estudiantes ("*Y esa idea de variación se va fortaleciendo en los niños, necesitamos es buscar o pensar en tareas de este tipo"* (Edier, entrevista, 2018)), pues empezaron a reconocer elementos de carácter algebraico en tareas que para ellos antes eran netamente aritméticas (“*y sobre todo en función de alguno de esos que está fijo, lo que se nos está generando es una “relación de dependencia”, asociado con el pensamiento algebraico”* (Edier, entrevista, 2018)*)*. La red de relaciones, presentada en la figura 12, muestra algunos de los apartados que definieron unidades de análisis en este episodio.

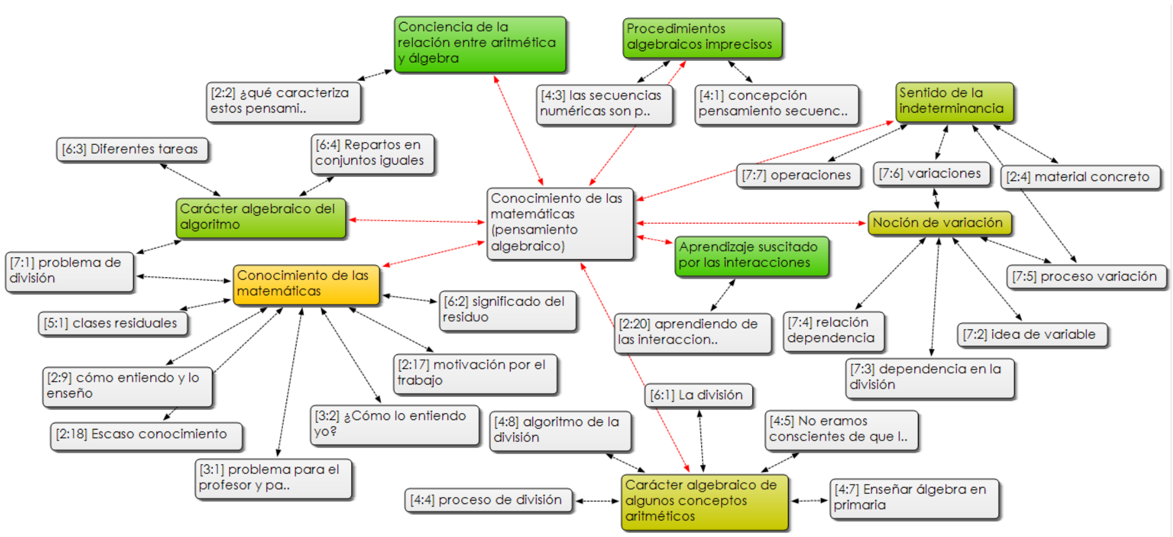


Figura 12. Red de relaciones para la categoría temática conocimiento de las matemáticas (pensamiento algebraico).

Una manifestación del impacto de la tarea (TF_1) se reflejó en la visión que los profesores tienen del currículo que opera en sus aulas, esta visión, también empezó a evidenciar cambios en las reflexiones de los participantes, pues reconocen la necesidad de buscar nuevos tipos de tareas para sus planeaciones y vincular representaciones de funciones, a través de operaciones básicas, lo cual puede implicar la toma de decisiones frente al currículo y la práctica. La identificación de estas regularidades favoreció la definición de otra categoría temática, denominada conocimiento de la práctica educativa, la cual vinculó las categorías que se presentan en la figura 13.

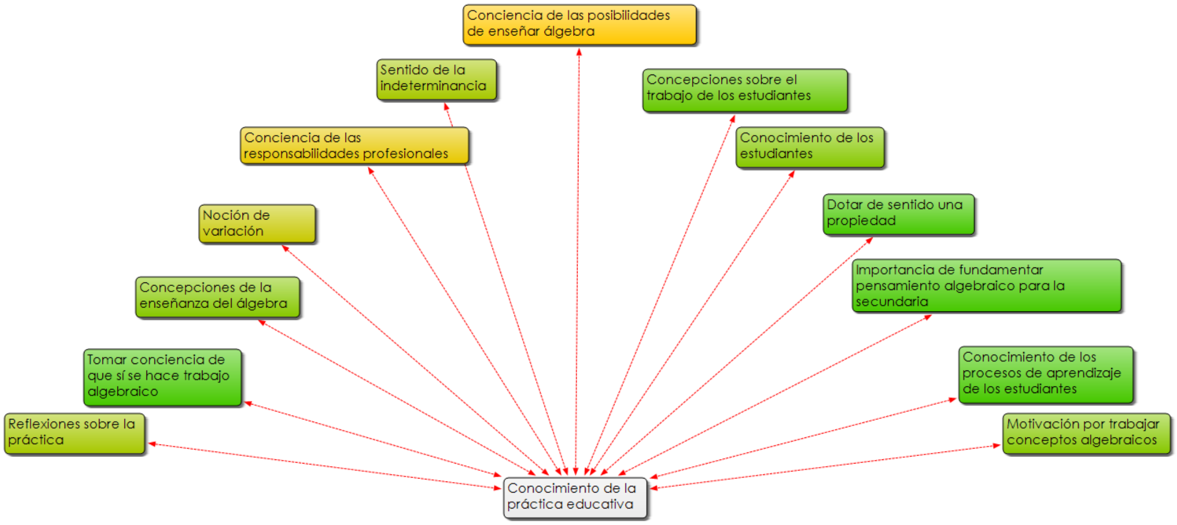
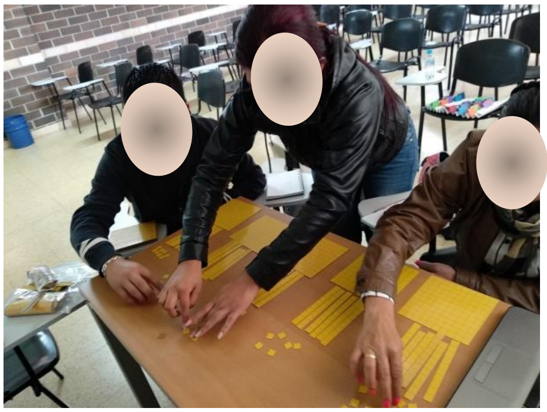


Figura 13. Categoría temática conocimiento de la práctica educativa.

El conocimiento de la práctica educativa se manifestó en el momento dispuesto para el diseño de tareas para los estudiantes. Se observó que la planeación propuesta vinculó el algoritmo de la división, a través del trabajo con material concreto; los profesores revisaron que, a partir del trabajo propuesto, pudieran garantizar situaciones de variación, la utilización con sentido de propiedades y la presencia de cantidades indeterminadas. Este tipo de consensos entre ellos, permitió poner de manifiesto la presencia de componentes analíticos en la tarea de aprendizaje elaborada.

Dichos componentes estuvieron asociados con categorías que emergieron a lo largo del trabajo realizado, como son: reflexiones sobre la práctica, la toma de conciencia de que se hace trabajo algebraico en primaria, la motivación para trabajar conceptos en esta línea, y la necesidad de hacerlo, con miras a apoyar el estudio en grados superiores y asumir así responsabilidades profesionales propias de los profesores de primaria. Tomando en consideración otros factores adicionales como el conocimiento de los estudiantes y las concepciones que tienen sobre el trabajo que ellos realizan, los profesores plantearon, con apoyo de la investigadora, una actividad para llevar al aula haciendo uso de material en base 10. Esta se presenta en la tabla 16.

Tabla 16. Apartado de una exposición realizada por la profesor Julieth

	*[…]con los niños trabajaremos el algoritmo de la división a partir de repartos sucesivos con material concreto. Esto se hará en varios momentos, primero deben representar la cantidad 831, con material base 10. Luego repartirla en 5 conjuntos, en cada uno quedará la misma cantidad de fichas, unidades, decenas y centenas. Los repartos inician con las centenas, luego con las decenas y finalmente con las unidades. En cada proceso será necesario hacer descomposición de cantidades.*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m3_03_03_2018_min12.

A partir de la situación planteada en la tabla 16, los profesores, además, sugirieron para su planeación, vincular situaciones de variación en las cuales dejaran fijos unos valores, mientras otros cambiaban, para que los estudiantes reconocieran cómo esto reflejaba situaciones de dependencia. El nivel de dificultad en la estructura general de la tarea descrita sería modificado, para atender a todos los grados bajo el modelo en el cual trabajan los participantes de la investigación. El análisis logrado en este apartado, para la categoría temática asociada con el conocimiento de la práctica pedagógica, se apoyó en las relaciones presentadas en la red de la figura 14, donde se alcanzan a observar las unidades de análisis codificadas y que mediaron las descripciones realizadas en este apartado.

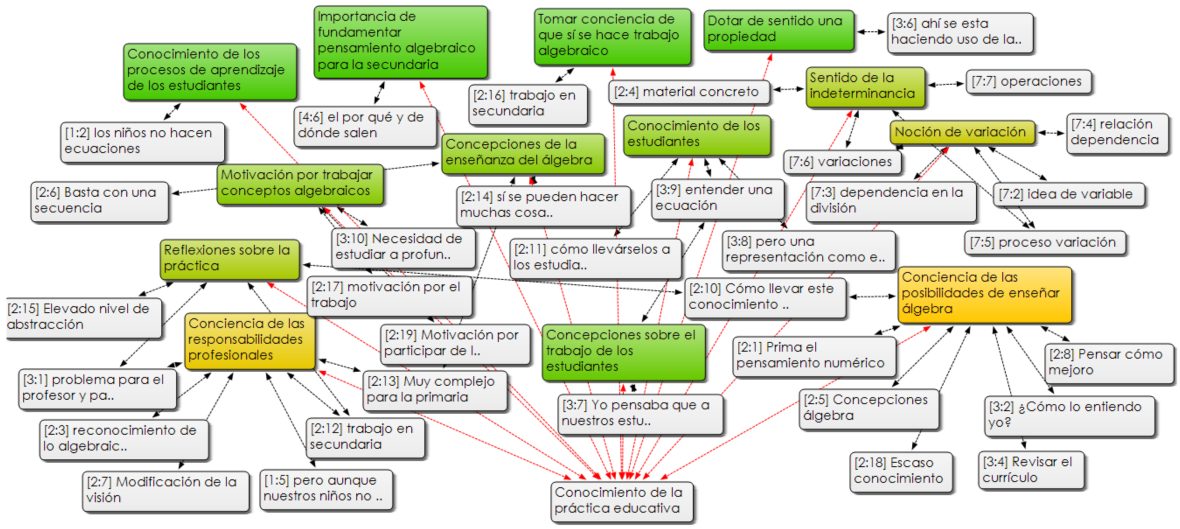


Figura 14. Red de relaciones para la categoría temática conocimiento de la práctica educativa.

La tarea de formación 1 cierra con algunas reflexiones de los profesores y la valoración del trabajo desarrollado. Al respecto, el análisis realizado para este momento posibilitó la definición de una categoría temática denominada modificación de concepciones, pues la mayoría de las observaciones provistas por los profesores, se asociaron con el hecho de que el encuentro posibilitó cambios en sus ideas, especialmente en las categorías que se presentan en la figura 15.

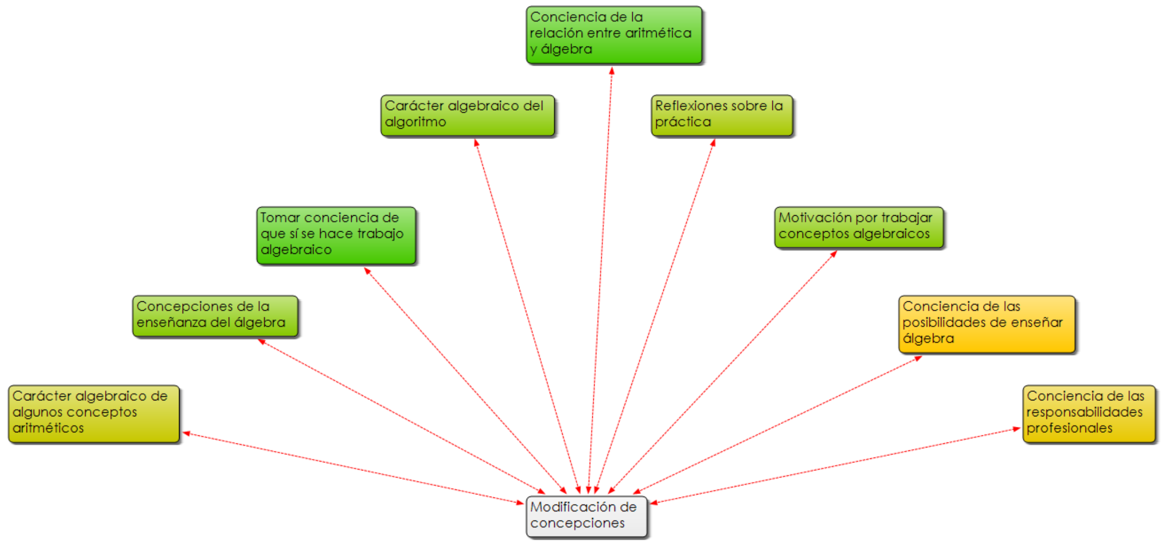


Figura 15. Categoría temática modificación de concepciones.

En este espacio, los profesores mencionaron que algunas de las ideas que posiblemente no permiten el desarrollo consciente de tareas de carácter algebraico con los estudiantes, están asociadas con el hecho de que este pensamiento exige aspectos tales como: un nivel de abstracción elevado, la determinación de reglas generales, relaciones funcionales, el estudio de patrones numéricos y geométricos, que posiblemente no están al alcance de los estudiantes. Además, manifiestan un escaso conocimiento de cuáles son las líneas de trabajo que pueden caracterizar el pensamiento algebraico escolar en niveles de la educación básica primaria.

Las necesidades mencionadas no solo son un reflejo de la realidad de los profesores, sino de las observaciones que he venido realizando a lo largo de mi experiencia profesional, como investigadora y formadora de profesores; también, dichas necesidades muestran coherencia con muchos de los problemas reportados en la literatura, los cuales tienen por objeto problematizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en los niveles de primaria, y hacen énfasis en que existe una fuerte tendencia por privilegiar el pensamiento numérico, sin establecer vínculos con el algebraico (Blanton y Kaput, 2005;

Britt y Irwin, 2011; Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schlieman, 2007; Godino y otros, 2015; Kieran, 2004; Molina, 2007; Vergel, 2016a).

El escaso reconocimiento de las características del pensamiento algebraico, genera reflexiones adicionales; si se toma en cuenta que la incorporación del álgebra en la educación básica primaria, a través del desarrollo del pensamiento algebraico, demanda una revisión de orden curricular en la cual el conocimiento del profesor se pone de manifiesto mediante la interpretación de los documentos que definen y orientan el currículo, entonces esta no es una tarea trivial. Al respecto, Carraher y Schliemann (2007) exponen:

> Aunque existe algún acuerdo de que el álgebra tiene un lugar en el currículo de la escuela primaria, la base de investigación necesaria para integrar el álgebra en el currículo de matemáticas temprano aún está emergiendo, es poco conocida y lejos de ser consolidada. (p. 671)

Así, la necesidad de pensar en función del currículo está relacionada tanto con la posibilidad de proponer y explorar diferentes tipos de experiencias que fundamenten el pensamiento algebraico, como de modificar concepciones asociadas con este; los componentes, objeto de análisis en esta categoría, se indican en la red de relaciones presentada en la figura 16, donde se pueden apreciar las unidades de análisis que constituyeron cada categoría definida para este momento de la tarea.

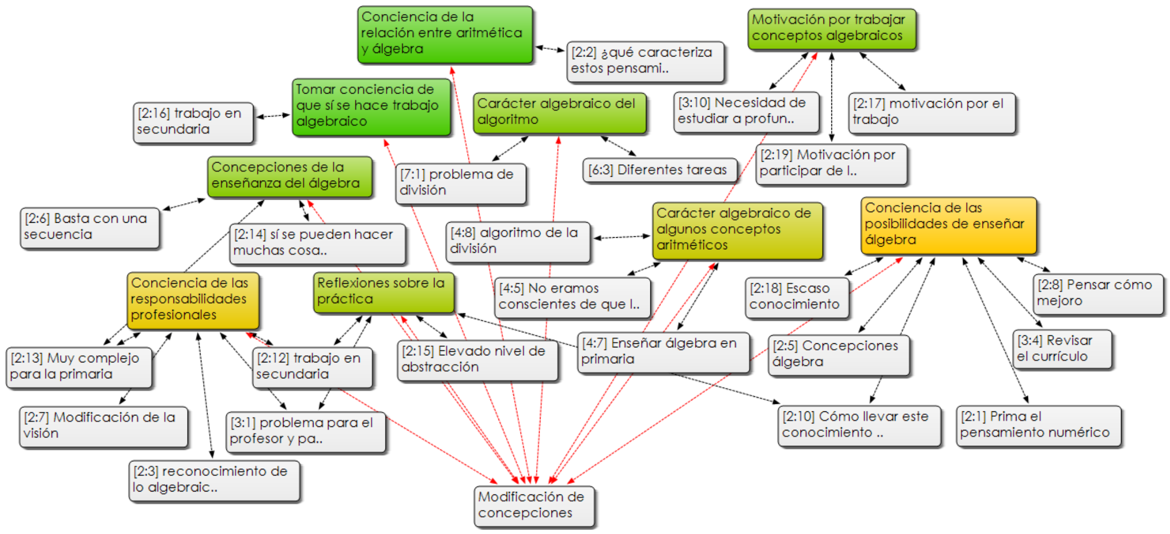


Figura 16. Red de relaciones para la categoría temática modificación de concepciones.

Adicionalmente, una modificación en las concepciones de los profesores, pudo reflejarse en las tareas de aprendizaje diseñadas para los estudiantes, que fueron coherentes con los fundamentos teóricos reportados en algunos estudios (NCTM, 2000; Kaput, 2000; Cai y Knuth, 2011; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2007; Butto y Rojano, 2004); estas tareas dan cuenta de los rasgos que caracterizan dicho pensamiento e indican que no se trata de ofrecer un curso de álgebra en la educación primaria, sino de aprender a pensar algebraicamente; esto implica resaltar los aspectos algebraicos de las tareas propuestas (Castro, 2014) y reconocer la necesidad de modificar algunas concepciones, asociadas con este tipo de pensamiento.

4.3.1.3. Inter – análisis para la tarea de formación 1. El proceso del inter – análisis, designado para el estudio, consistió en la elaboración de un esquema explicativo inicial, correspondiente a lo que se observó y analizó en la tarea de formación 1. El esquema explicativo se diseñó a través de un mapa conceptual (ver figura 18), que vinculó las categorías descritas a lo largo de este apartado y que permitió el establecimiento de relaciones en las mismas, como se indica la red expuesta en la figura 17.

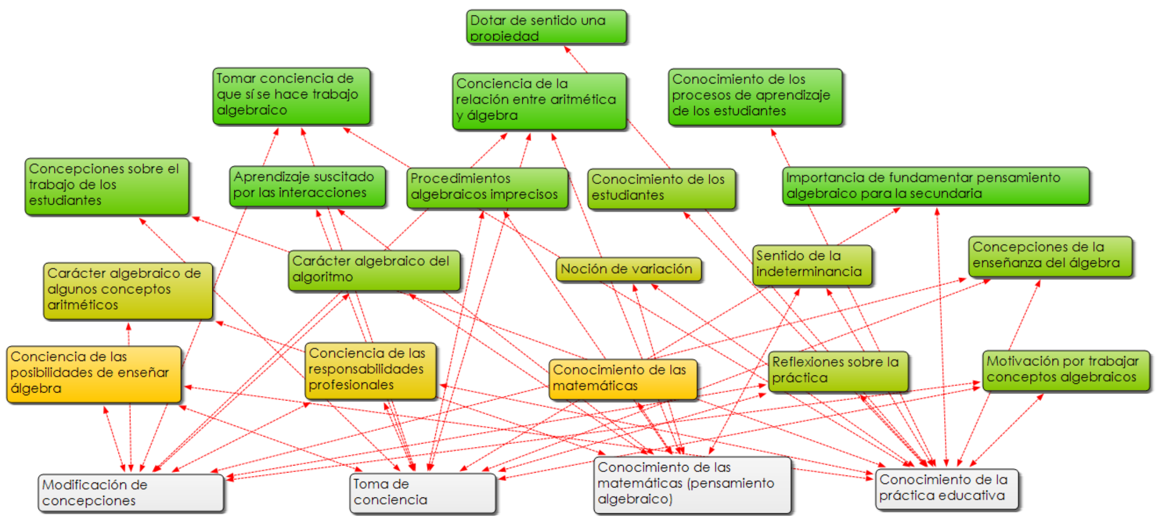


Figura 17. Red de relaciones para las categorías temáticas del desarrollo de la tarea de formación 1.

En la figura 17, se exponen las categorías que fueron objeto de análisis, a través del establecimiento de relaciones entre ellas; estas categorías fundamentaron la creación del mapa conceptual que se presenta en la figura 18 y que resume los componentes que, en esta tarea inicial, hacen parte de la naturaleza de la transformación del conocimiento profesional. Asumiendo como elemento central al profesor de matemáticas de primaria, como un sujeto consciente, la postura teórica que se empieza a vislumbrar, inicialmente, está designada por el conjunto de relaciones establecidas en mapa; cabe precisar que el mapa de la figura 18 es una elaboración propia, producto de la interpretación realizada a la luz del análisis de las categorías temáticas descritas en este apartado.

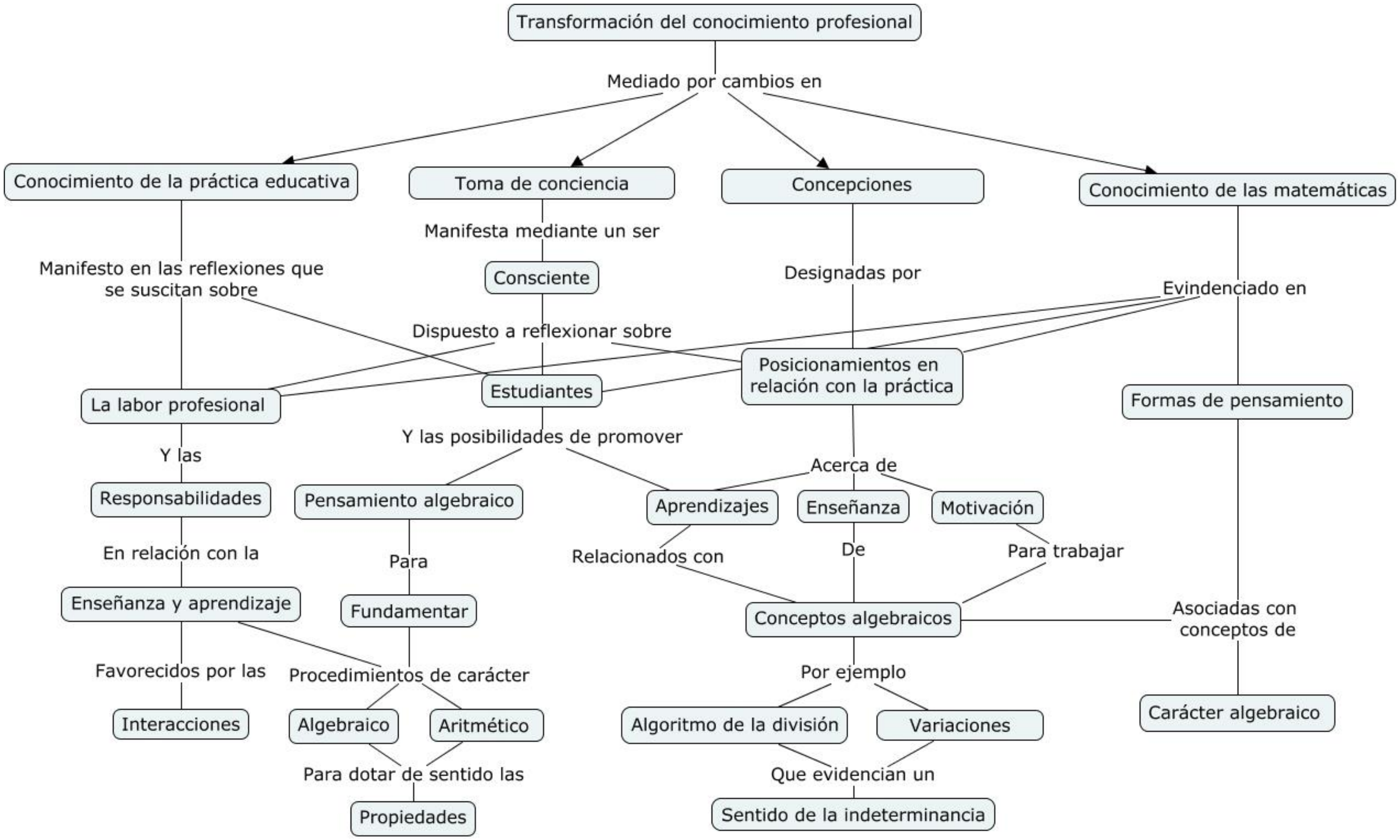


Figura 18. Elaboración propia. Mapa conceptual para el inter – análisis del desarrollo de la tarea de formación 1.

El esquema explicativo inicial (mapa conceptual, figura 18), aportado por el inter – análisis, provisto para la tarea de formación 1, permite empezar a vislumbrar que el profesor de matemáticas de primaria, transforma su conocimiento profesional toda vez que se configura como un ser consciente (a través de la toma de conciencia, en la perspectiva de Radford (2017)); este ser reflexiona sobre su práctica y las responsabilidades profesionales asociadas con la promoción del pensamiento algebraico y el aprendizaje del mismo, suscitados por diferentes interacciones: con los pares, la investigadora, los estudiantes, consigo mismos y con el conocimiento.

La configuración del profesor como sujeto consciente, transciende a las reflexiones sobre los estudiantes, en términos de las posibilidades de promover el pensamiento algebraico para fundamentar los procedimientos que permiten dotar de sentido una propiedad, tanto en el campo del álgebra, como de la aritmética; en esa misma línea, la promoción de aprendizajes relacionados con conceptos algebraicos, pudo evidenciar un componente analítico del pensamiento algebraico: el sentido de la indeterminancia (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2013, 2014, 2015a, 2019), cuya manifestación permitió un acercamiento a una caracterización del pensamiento de los profesores.

Otro de los elementos mediadores en la transformación del conocimiento profesional, se relaciona con la modificación de concepciones, asociadas con el aprendizaje y enseñanza de conceptos de carácter algebraico y la motivación para hacerlo; esto se debe a que en los currículos que operan en las aulas de los profesores, este no era un hecho evidente o, al menos, ellos no habían tomado conciencia de ello; la presencia de este elemento en la transformación del conocimiento puede ser determinante en la toma de decisiones sobre la práctica.

Finalmente, el conocimiento de las matemáticas, además de tener una relación directa con la disciplina y las formas de pensamiento algebraico, se configura como un componente que evidencia su incidencia en la práctica, los estudiantes y las concepciones;

en este sentido, los elementos descritos en el proceso de interpretación de la transformación del conocimiento profesional, empiezan a mostrar inter – relaciones que consolidan su configuración, donde se vislumbra el inicio de la fundamentación de una postura explicativa.

4.3.2. Tarea de formación 2. Esta consideró unas reflexiones iniciales, suscitadas por la puesta en común de los videos, en los cuales los profesores presentaron el desarrollo de la clase planeada en uno de los momentos de la tarea de formación 1. La clase desarrollada se enfocó en trabajar el algoritmo de la división a partir de repartos iguales, con ayuda de material concreto en base 10. Adicionalmente, los profesores sugirieron variaciones sobre la actividad y, para ello, elaboraron una tabla, en la cual, los estudiantes registraron valores que definían cantidades fijas y variables. La naturaleza de las consideraciones iniciales del encuentro (M_1), evidencian rasgos que permitieron una posible caracterización de la práctica de los participantes, quienes manifestaron sentirse cómodos con la idea de grabar algunas de sus clases, debido a su interés de llevar a sus aulas lo aprendido en el desarrollo de la investigación y de recibir apoyo y realimentación permanente.

Finalizada la proyección de los videos y las respectivas intervenciones de los profesores e investigadora, se dio inicio al desarrollo de una actividad enmarcada en el pensamiento algebraico (M_2), relacionada con: una operación no convencional asterisco (*) y sus propiedades. En esta línea, la intención de estudiar el algoritmo de la división trascendió a lograr un acercamiento a las clases residuales, las cuales posibilitaron trabajar con una operación abstracta, construir una estructura algebraica $< Z_6, \; *>$ y analizar las propiedades que se cumplen en la misma.

En la línea de la anterior idea, para el desarrollo de un momento posterior de la tarea, se propuso la definición del conjunto de residuos obtenidos al dividir un número natural entre 6. Este, estuvo dado por $[Z]_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Adicional a la definición del conjunto, se sugirió una ley de formación para operar estos elementos; dicha operación respondió a una serie de procesos, el primero, consistió en sumar un par de elementos a y b del conjunto $[Z]_6$, esto es $(a + b)$; el segundo proceso, sugirió dividir el resultado de la suma entre seis, es decir, $(\frac{a+b}{6})$; finalmente, se debió determinar el residuo de dicha división, r, el cual es el resultado de la operación. Así, la operación asterisco (*) indaga por el residuo, de modo que $a * b = r$.

Aunque el trabajo con este tipo de operaciones no era familiar para los profesores participantes, era viable que lograran un acercamiento a su comprensión, a través del dominio de carácter numérico que subyace en las operaciones propuestas. Así, transitar por el algoritmo de la división para llegar al reconocimiento de clases residuales, explorar algunas propiedades que se cumplen en el conjunto con la operación definida y resolver ecuaciones, permitieron estudiar la estructura de $< Z_6,\ *>$, y evidenciar formas de pensamiento algebraico manifiestas por los profesores.

La necesidad de un estudio estructural ha sido reconocida en distintas investigaciones (NCTM, 2000; Kieran, 2007; Kaput, 2008; Carpenter, Levi, Franke y Zeringue, 2005; Molina, 2009; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Macgregor, 1996), que presentan enfoques que podrían fundamentar el pensamiento algebraico en la educación básica primaria. Algunos de estos, han sido objeto de análisis a nivel investigativo en el campo de la educación matemática, sugiriendo líneas de trabajo con relación a cómo promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de escolaridad, donde se requiere de una reflexión que permita cambios curriculares que propendan por una transición entre la aritmética y el álgebra. Para Cai y Knuth (2011), dicha transición:

> […] requiere el desarrollo de formas particulares de pensar, incluso analizar relaciones entre cantidades, notar la estructura, estudiando el cambio, generalizando, resolviendo problemas, modelando, justificando, probando y prediciendo. Es decir, el aprendizaje temprano de álgebra desarrolla no solo nuevas herramientas para comprender relaciones matemáticas, también nuevos hábitos mentales. (p. ix)

Es así como, el diseño de las tareas de formación propuestas, se fundamentó en la posibilidad de estudiar algunas estructuras algebraicas que permitieron la comprensión de operaciones, relaciones, propiedades, representaciones, patrones, regularidades y modelos. Tomando esto en consideración y que el desarrollo del pensamiento algebraico ha sido objeto de investigación en la educación básica primaria, se presentan en la tabla 17, algunos de los enfoques descritos en diferentes investigaciones, que sugieren líneas de trabajo para la promoción de dicho pensamiento.

Tabla 17. Enfoques para promover el pensamiento algebraico

Autores	Enfoques
Principios y estándares (2000)	(1) Comprender patrones, relaciones y funciones; (2) representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos; (3) usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; y (4) analizar el cambio en varios contextos.
Kieran (2007)	(1) Un enfoque en las relaciones y no simplemente en el cálculo de una respuesta numérica; (2) un enfoque en las operaciones, así como sus inversas, y en la idea relacionada de hacer / deshacer; (3) un enfoque en representar y resolver un problema en lugar de simplemente resolverlo; (4) un enfoque en números y letras, en lugar de solo en números; y (5) un reenfoque del significado del signo igual que denote una relación de equivalencia entre cantidades.
Kaput (2008)	(1) Álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones; (2) álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta; y (3) álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes para expresar y apoyar el razonamiento sobre situaciones que se modelan.
Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005); Molina (2009).	Un enfoque en el estudio de (1) las relaciones de equivalencia y sus propiedades; (2) de las operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos, o de otro tipo; (3) de las propiedades de las estructuras que se generan; (4) del pensamiento relacional, la comprensión de los estudiantes de los significados operacional y relacional del signo igual.
Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014)	(1) Usar sistemáticamente símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales; (2) reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones; (3) reconocer patrones, regularidades y funciones; (4) modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta en la situación dada.

Macgregor (1996)	(1) Un enfoque basado en los procesos antes que en las respuestas. (2) La comprensión de las relaciones existentes entre las operaciones y el conocimiento de las diversas interpretaciones del signo igual. (3) El conocimiento de las propiedades importantes de los números y la capacidad de trabajar en el sistema de números reales.

Fuente. Elaboración propia. Enfoques reportados en estudios e investigaciones con énfasis en el desarrollo del pensamiento algebraico.

En coherencia con lo anterior, se observan algunas concordancias en las formas de concebir los enfoques del pensamiento algebraico; una de ellas está asociada con el trabajo enmarcado en estructuras y relaciones. El estudio de estas últimas líneas, inspiró el diseño de las actividades propuestas para este momento de la tarea; adicionalmente, a este se sumó el interés manifiesto por los profesores, en el encuentro preliminar, por ahondar en el estudio de este tipo de estructuras.

El momento destinado a la reflexión sobre la práctica, dispuesto para el diseño de planeaciones enmarcadas en el pensamiento algebraico (M_3), develó nuevas concepciones de los profesores acerca de este último, de su incorporación en la educación básica primaria, y de la necesidad de vincularlo en sus prácticas de aula, a través del uso consciente de las propiedades y de la posibilidad de dotarlas de sentido. El diseño de planeaciones conjuntas enriqueció las interacciones y la creación de vínculos entre los participantes.

Una vez diseñada la tarea para los estudiantes, se realizó el cierre del encuentro con las reflexiones que suscitó el mismo, tanto a nivel del colectivo como individual (M_4). Para ello, se dispuso del registro en la bitácora reflexiva, la incorporación de nuevas tarjetas en el friso y un conversatorio que consideró aspectos como: la pertinencia de la tarea para refinar o generar nuevos conocimientos disciplinares, el reconocimiento de la presencia o necesidad de objetos algebraicos en el currículo que opera en las aulas, la reflexión sobre las necesidades y posibilidades de los estudiantes para desarrollar actividades de carácter algebraico, preguntas y sugerencias. La tarea cerró con el compromiso de desarrollar la planeación propuesta y compartirla en el siguiente encuentro.

4.3.2.1. Proceso de codificación abierta para la tarea de formación 2. El proceso de codificación abierta evidenció la presencia de nuevas categorías y la recurrencia de otras, descritas previamente en la tarea 1. Se generaron 35 categorías, 16 nuevas para esta tarea, pues en la anterior hubo 19 en total. La presencia de nuevas propiedades y dimensiones para definir categorías emergentes, posibilitó empezar a vislumbrar de manera explícita e implícita, elementos que inciden en la transformación del conocimiento profesional, en el campo del pensamiento algebraico temprano, y que serán descritos durante la codificación axial. A continuación, se presentan las categorías emergentes en el desarrollo de la tarea de formación 2.

Tabla 18. Categorías emergentes en el proceso de codificación abierta para el desarrollo de la tarea de formación 2

Analiticidad
Aprendizaje suscitado por las interacciones
Búsqueda de regularidades
Característica común
Carácter algebraico de algunos conceptos aritméticos
Carácter algebraico del algoritmo de la división
Clases residuales
Concepciones de la enseñanza del álgebra
Concepciones sobre el trabajo de los estudiantes
Conocimiento de la disciplina
Conocimiento de los estudiantes
Conocimiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes
Conocimiento del currículo
Conciencia de la necesidad de usar las propiedades
Conciencia de la relación entre aritmética y álgebra
Conciencia de las posibilidades de enseñar álgebra
Conciencia de las responsabilidades profesionales
Dotar de sentido una propiedad
Existencia del elemento inverso
Existencia del elemento neutro
Importancia de fundamentar pensamiento algebraico para la secundaria
Interacciones consigo mismo
Modificación de conceptos previos

Motivación por trabajar conceptos algebraicos
Noción de ecuación
Noción de variación
Operación abstracta
Pensamiento contextual
Procedimientos algebraicos imprecisos
Posibilidades de los estudiantes de aprender álgebra
Propiedad uniforme
Reflexiones sobre la práctica
Sentido de la indeterminancia
Tomar conciencia de que sí se hace trabajo algebraico
Validar con los compañeros

Fuente. Elaboración propia. Categorías emergentes en el desarrollo de la tarea de formación 2.

En el proceso de codificación abierta, los instrumentos de recolección de información fueron organizados según la naturaleza de las reflexiones que se suscitaron en los distintos escenarios de la tarea de formación, y los datos se clasificaron de acuerdo a este criterio. Las categorías descritas para esta tarea, empiezan a mostrar regularidades según los colores de la figura 19, que indican: fundamentación y densidad. La primera, tiene que ver con la interpretación y construcción que se realiza a partir de las unidades de análisis objeto de estudio y, la segunda, con la cantidad de categorías relacionadas. Este último proceso no se evidencia en el esquema presentado en la figura 19, pues hace parte de la codificación axial.

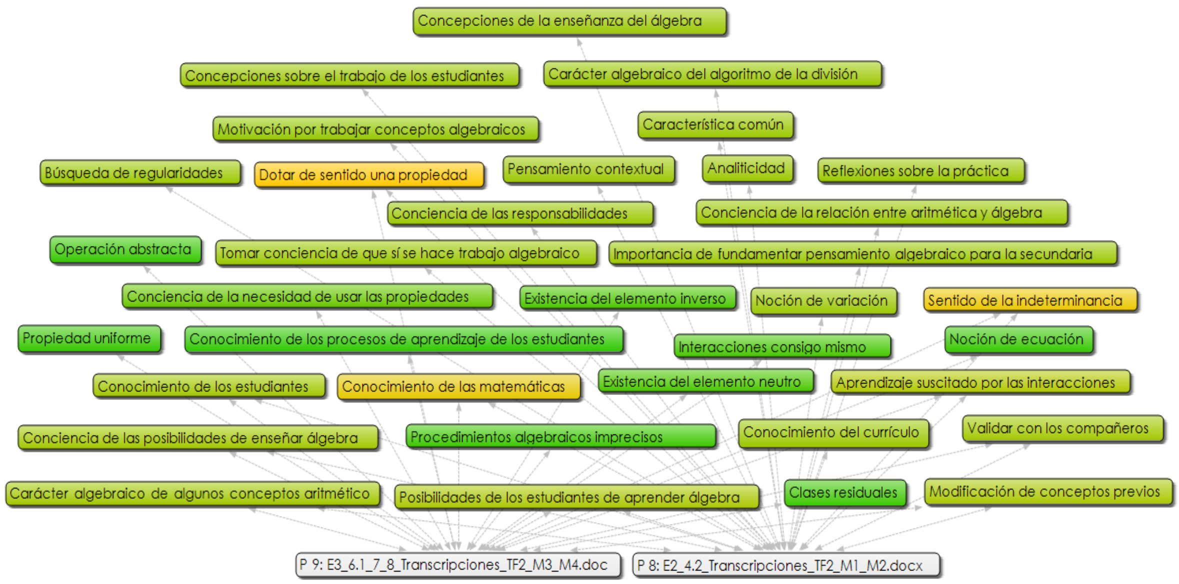


Figura 19. Categorías emergentes en el proceso de codificación abierta para el desarrollo de la tarea de formación 2.

Como se alcanza a apreciar en la figura 19, las categorías asociadas con: conocimiento de la disciplina, sentido de la indeterminancia y dotar de sentido una propiedad (señaladas con color amarillo), se destacan por la fundamentación asociada a estas. Lo anterior indica que, entre ellas, deben existir relaciones que, posiblemente, permitan comprender qué está ocurriendo con el conocimiento de los profesores; inicialmente, puede decirse que comparten propiedades y dimensiones, asociadas con el conocimiento de las matemáticas, pero un análisis detallado de este aspecto se realiza en el proceso de codificación axial.

Las categorías señaladas con verde claro, también se destacan por su fundamentación; la mayoría de ellas están relacionadas con el conocimiento de las matemáticas, mientras las demás, se asocian en menor medida con el conocimiento del currículo, las concepciones, la toma de conciencia y el trabajo de los estudiantes. Finalmente, el color verde oscuro señala las categorías con menor fundamentación y se observa que estas tienen que ver principalmente con objetos matemáticos propios de la tarea de formación. Por lo cual, tiene sentido su poca presencia, pues se trata de conceptos nuevos para los profesores.

4.3.2.2. Proceso de codificación axial para la tarea de formación 2. La tarea inicia con las reflexiones que se generaron a partir de la visualización de los videos presentados por los profesores. El trabajo realizado por los estudiantes se enmarcó en la secuencia presentada en la tabla 19, en la cual se describen los momentos, procesos y componentes que hicieron parte de la planeación propuesta durante el desarrollo de la tarea de formación 1 y refinada, posteriormente, por los profesores.

Tabla 19. Diseño de la tarea para los estudiantes

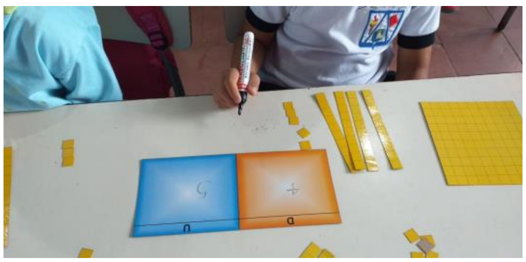
Secuencia de tareas	**Descripción**	**Procesos**	**Componentes**
Algoritmo de la división	Estudio del algoritmo de la división, a través de la exploración con material concreto, representaciones gráficas y representación formal.	Visualización. Modelación. Representación.	Material concreto. Niveles de representación.
Carácter algebraico del algoritmo de la división	Proposición de problemas que indagan por residuos, dividendos, divisores, elaboración de tablas para buscar regularidades.	Abstracción. Representación.	Problemas abiertos. Exploración del algoritmo de la división.

Fuente. Estructura de la tarea de formación diseñada por los profesores durante el desarrollo de la tarea de formación 1.

Cabe mencionar que cada profesor proyectó su video y, en este apartado, se hizo énfasis en una caracterización de las prácticas en general, con los elementos comunes observados, y que pueden evidenciar transformación del conocimiento profesional, aportando elementos para el esquema explicativo que se busca elaborar en la investigación. Lo anterior, no implica que las particularidades de cada profesor no sean tenidas en cuenta para el análisis, de hecho, estas son objeto de estudio dentro del esquema explicativo y son determinantes para indicar el proceso de transformación individual.

La tarea desarrollada con los estudiantes, inició con la representación de cantidades con material concreto para, posteriormente, hacer repartos de estas. Todos los profesores coincidieron, como se muestra en la tabla 20, en que este fue un proceso tranquilo para los estudiantes y que esto ayudó al desarrollo de la actividad.

Tabla 20. Observaciones de los profesores respecto a la primera parte de la tarea de los estudiantes



Julieth: *los niños empezaron representando cantidades pequeñas, y luego aumentamos la dificultad, lo hicieron bien.*

Gina: *sí, ahí no hubo inconveniente.*

Edier*: les gustó mucho.*

Maritza: *y pudimos trabajar simultáneamente con todos los grados.*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m1_17_03_2018_min11.

Hacer repartos sucesivos, a partir de la composición y descomposición de cantidades, fue el proceso que se alcanzó a observar en el video de todos los profesores; es decir, se afianzó un trabajo concreto para este concepto, y se mostró cómo la cantidad 831 se repartió en cinco conjuntos. Posteriormente, los estudiantes verificaron que el producto entre los elementos de cada conjunto y el total de conjuntos, más el residuo (denominado por los estudiantes como lo que sobra), correspondía a 831. Solo una profesora trascendió de la representación concreta a la abstracta, mostrando cómo cada paso del proceso de división se relacionaba con los repartos del material en base 10. Las apreciaciones por parte de algunos profesores, en relación con el trabajo desarrollado, se presentan en la tabla 21.

Tabla 21. Comentarios acerca de la experiencia con la tarea de los estudiantes

Julieth: *yo noté que con este método los niños entendieron cómo dividir; yo me desconecté de ese discurso que presenté en el encuentro pasado, iba mostrando a los niños cada proceso y ellos*

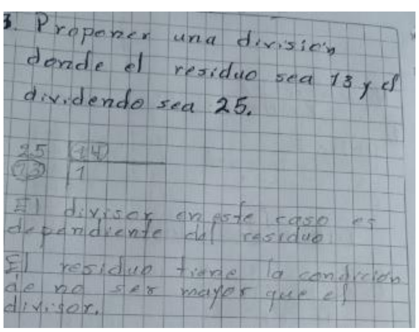
iban haciendo operaciones que entendían; porque yo muchas veces sentí que cuando enseñaba a dividir los niños solo se dedicaban a repetir lo que yo decía y hacía, mientras que esta vez, no fue así.

Maritza: *es verdad, yo solo hice lo concreto, pero cuando haga lo que hizo la compañera, seguro lo entenderán con facilidad.*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de audio m1_17_03_2018_min21.

Se alcanzan a percibir sutiles modificaciones en el trabajo que los profesores venían haciendo (*yo me desconecté de ese discurso que presenté en el encuentro pasado,* (Judith, 2018, bitácora personal)), en las nuevas ideas que vinculan a sus planeaciones, en el tipo de material utilizado para enseñar a dividir, en el discurso y en la visión que tenían acerca de promover pensamiento algebraico en los niveles de primaria; lo anterior se evidencia, además, en la entrevista sostenida con los profesores en un conversatorio presentado en la tabla 22.

Tabla 22. Conversatorio acerca de la experiencia con la tarea de los estudiantes

	Maritza: *yo les varíe el ejercicio, les dije que dejaran fijos el residuo (13) y el dividendo (25). Esa modificación me pareció muy interesante porque tenían que estar atentos de que el residuo no iba a ser mayor que el divisor, y muchos cometieron ese error al principio, pero después entendieron lo asumieron como una regla para respetar* (La imagen corresponde a un apartado de la planeación de la profesora).

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m1_17_03_2018_min41.

Con las reflexiones exhibidas por los profesores en este momento de la tarea, se evidencia seguridad para proponer situaciones en las cuales se promueve el pensamiento algebraico y se hace de manera consciente; en este caso, los profesores reconocen que, en el desarrollo de la tarea, no solo están presentes componentes numéricos, sino que se está propendiendo por el desarrollo de relaciones funcionales (Cañadas, 2016), como se muestra en la tabla 23.

Tabla 23. Conversatorio acerca de la experiencia con la tarea de los estudiantes

Edier: *muy interesante, yo en ese dejé fijo el dividendo (25) y el cociente (14), los niños entendieron como variaban los elementos y como unos dependían de otros, especialmente los de quinto.*
Gina: *yo también lo hice así y me parece que con las fichas base 10 ellos hacen muy fácilmente los repartos y las variaciones de las cantidades.*
Julieth: *yo todavía no he realizado esa parte.*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de audio m1_17_03_2018_min51.

Las reflexiones exhibidas por los profesores, hasta este momento de la tarea, generaron una categoría temática: conocimiento de la práctica educativa, que agrupó algunos componentes que podrían permitir interpretar la transformación del conocimiento profesional; así, parece ser que, la transformación incide directamente en la práctica, siempre que esté mediada por la *reflexión-acción*, es decir, ante el proceso de transformación del conocimiento, la práctica educativa parece ser una de las primeras dimensiones que se modifica, cuando las reflexiones de los profesores y la toma de conciencia transciende hasta la acción. La categoría temática en mención, se puede apreciar en la figura 20.

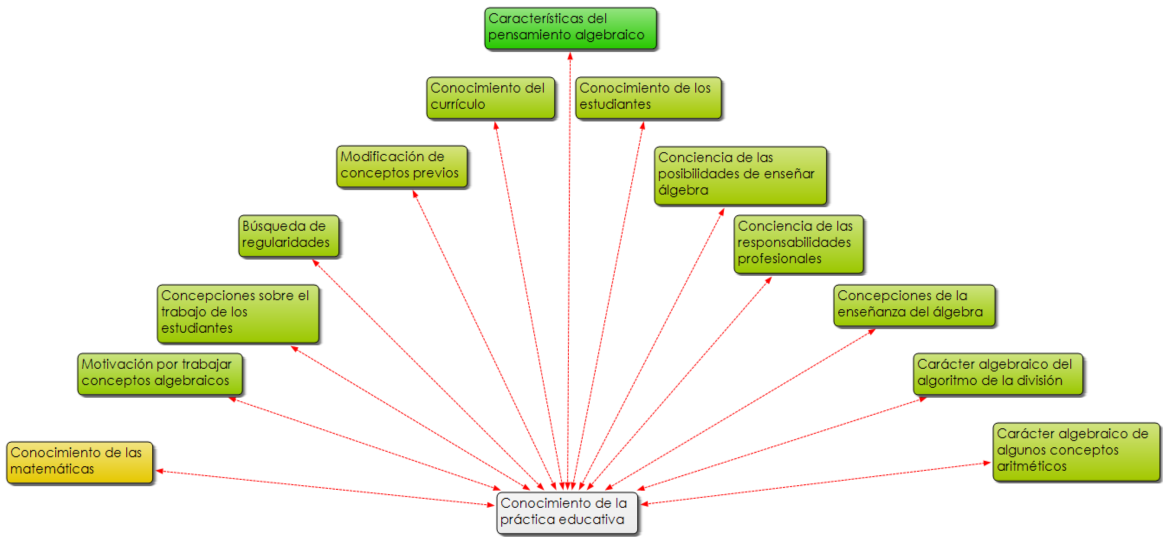


Figura 20. Categorías temáticas emergentes para el conocimiento de la práctica educativa.

De acuerdo con lo anterior, parece ser que se reafirma la idea de que la transformación está mediada, inicialmente, por (1) la toma de conciencia, (2) por modificaciones en: las concepciones, en el conocimiento de las matemáticas, de los estudiantes, y (3) por la manera como lo anterior se refleja en la práctica educativa. Tareas como las propuestas, no solo propendieron por la reflexión disciplinar, también convocaron a poner en evidencia otras dimensiones del conocimiento profesional (Ponte, 2012), aunque en ninguno de estos componentes deja de estar presente el pensamiento algebraico temprano y sus manifestaciones, lo que pudiera indicar que este es un factor determinante en el proceso de transformación objeto de análisis.

El proceso de codificación axial, para este momento de la tarea, posibilitó la generación de relaciones recurrentes entre las categorías definidas; una posible interpretación de esto, podría asociarse con el hecho de que se está consolidando la estructura de la naturaleza para la transformación del conocimiento profesional, donde sus componentes guardan relaciones estrechas entre sí, vinculando las categorías como un todo, esto es, dentro de la transformación, el conocimiento de la práctica profesional se empieza a configurar como un factor determinante para evidenciar cambios.

Adicionalmente, se observa que los profesores, tanto en la planeación propuesta, como en los nuevos elementos que incorporaron en ella y en el desarrollo de la misma, tuvieron presente la idea de que el trabajo que estaban haciendo era algebraico y, este hecho, es consecuente con la búsqueda de generalizaciones, a través de la identificación de regularidades y variaciones (Radford, 2010b); en consecuencia, la consolidación de una forma de pensamiento algebraico se manifiesta en las acciones y discurso de los profesores, tanto como en el aula de clase. Esta situación, además, ofrece elementos conceptuales para que los profesores modifiquen su conocimiento de las matemáticas, gestionen el currículo, lo piensen en función de sus estudiantes y actúen en sus prácticas (Ponte, 2012).

Posterior a la visualización de los videos, en el marco del desarrollo de la tarea de formación 2, se propuso una actividad de carácter algebraico. Esta, propendió por el reconocimiento de componentes relacionales y estructurales, con miras a dotar de sentido las propiedades que cumplen las operaciones. La tarea ofreció una experiencia para desarrollar pensamiento algebraico; al respecto Torres, Cañadas y Moreno (2018) mencionan que se debe trascender la fluidez aritmética para atender la estructura de las matemáticas.

La comprensión de componentes estructurales se enfocó a partir del trabajo con clases residuales. Como ya se había mencionado, el algoritmo de la división se constituyó en un mecanismo para reconocer y explorar conceptos de carácter algebraico. A través de su estudio, se definieron conjuntos de clases residuales, específicamente en $[Z]_6$ y, mediante una operación abstracta (*), se construyó una estructura algebraica que permitió reconocer las propiedades de dicha operación, para dotarlas de sentido y buscar generalizaciones.

Para este momento de la tarea, la naturaleza de las reflexiones se vislumbró en mayor medida en torno al conocimiento de las matemáticas, siendo las categorías: dotar de sentido una propiedad y conocimiento de la disciplina, algunas de las que se destacaron y fueron fundamentadas en mayor proporción en relación con las demás. Entendiendo que la naturaleza de este momento de la tarea refleja especialmente asuntos asociados con el pensamiento algebraico temprano, se destaca la presencia de nuevos elementos, como: a) estratos del pensamiento, a través del pensamiento contextual y algunos medios semióticos; b) componentes que caracterizan el pensamiento algebraico, como la analiticidad; y, c) un acercamiento a una generalización algebraica, a través de la búsqueda de regularidades. La figura 21 muestra la categoría temática generada en este momento de la tarea.

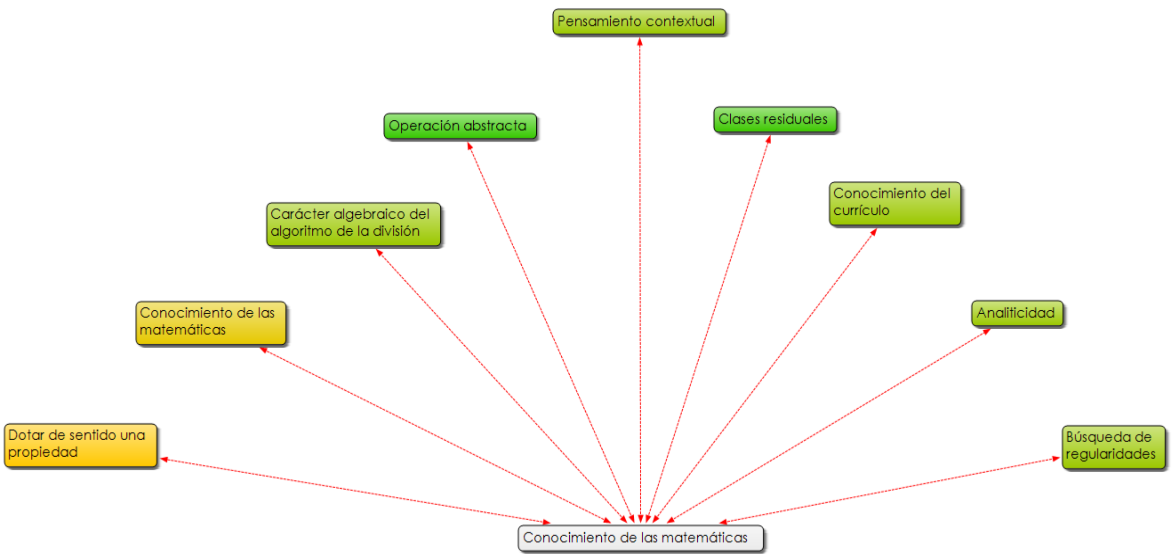


Figura 21. Categoría temática para el conocimiento de las matemáticas en el desarrollo de la tarea de formación 2.

El reconocimiento del carácter algebraico del algoritmo de la división, posibilitó explorar el comportamiento de los residuos. Aprovechando este contexto, se propuso una actividad para inferir un conjunto de elementos, compuesto por los residuos que se obtienen cuando se divide cualquier número natural entre seis; además, se definió una operación abstracta para operar los elementos del conjunto construido. Algunas de las reacciones manifiestas por los profesores, se presentan en la tabla 24.

Tabla 24. Reacción de la profesora Julieth frente a la operación abstracta

[…] para mí y yo creo que para mis dos compañeros también, esa operación no es conocida, no es convencional, yo reconozco la suma, la resta, la multiplicación, la división; pero esta operación asterisco (*) me gustó mucho porque me hizo pensar y ver relaciones diferentes entre los números y una forma diferente de operarlos. Como que me obligó a hacer inferencias con las operaciones adición y división combinadas y a reconocer otras formas de operar los elementos de un conjunto.

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_07_04_2018_min21.

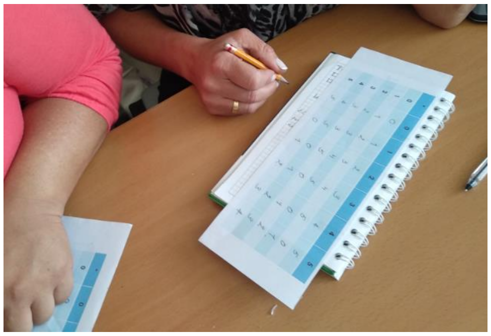
La comprensión de la operación asterisco (*) suscitó reflexiones entre los profesores, como la importancia de reconocer formas diferentes de hacer operaciones y que la representación de un conjunto de instrucciones, a través de un *, exige hacer abstracciones mediante el uso de operaciones no convencionales. Como mecanismo para estudiar la estructura construida, a partir del conjunto de residuos, se utilizó una representación tabular, a través de la elaboración de una tabla de doble entrada (Tablas de Cayley (Fraleigh, 2002)), la cual ayudó con el registro de los resultados obtenidos en cada operación.

La representación tabular de los resultados obtenidos al operar los elementos del conjunto $<Z_6, *>$, permitió que los profesores observaran regularidades en la tabla de Cayley construida; así, ellos empezaron a notar que, tanto en filas como en columnas, estos elementos no se repetían y, aunque esto no indicó nada relevante para ellos en el estudio de la estructura en cuestión, esto conllevó a resultados importantes, por ejemplo, que la estructura es la de un grupo (Fraleigh, 2002). El anterior asunto es relevante en el tipo de trabajo que se quiere realizar con los profesores, especialmente en el estudio de los procesos de solución de ecuaciones lineales.

Que la estructura cumpla con las propiedades de un grupo, implica que en $<Z_6, *>$: a) la operación asterisco (*) es binaria (interna), esto es, para todo $a, b \in [Z]_6$, se cumple que $a*b = c$, con $c \in [Z]_6$; b) la operación * es asociativa, esto es, para todo a, b y $c \in [Z]_6$, *(a*b)*c = a*(b*c)*; c) en el conjunto $[Z]_6$ se garantiza la existencia de un elemento neutro *e*, tal que $a*e = e*a = a$; y d) para todo elemento $a \in [Z]_6$, existe un elemento $a' \in [Z]_6$ (llamado inverso de *a*) tal que: $a * a' = a' * a = e$. El cumplimiento de estas propiedades permite garantizar que las ecuaciones de la forma $a*x = b$ tienen solución.

Resultados como los presentados en el párrafo anterior, ofrecen un contexto favorable en el proceso de solución de una ecuación; además, son consecuentes con la caracterización del pensamiento algebraico descrito por Radford (2010a, 2010b), pues el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica, están presentes en la tarea diseñada y, en consecuencia, pueden reflejarse en el pensamiento de los profesores, como se muestra en la representación tabular construida por los profesores e indicada en la tabla 25.

Tabla 25. Representación tabular para $<Z_6, *>$



Maritza: *en la tabla se guarda una secuencia, que va de 0 a 5. Cada vez que llego a 5, vuelvo a iniciar, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, …y con esa secuencia ningún elemento se repite en las columnas, y ¡tampoco en las filas!*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_07_04_2018_min30.

En la elaboración de la tabla, los profesores coincidieron en la solución presentada en la figura 22, la cual muestra lo que ellos indicaron acerca de la no repitencia de elementos en filas y columnas. Otras regularidades, notadas por los profesores, tuvieron que ver con las diagonales de la tabla, tanto principales como secundarias, hecho que también es relevante en el estudio de la estructura, pues la simetría que denota la diagonal principal indica el cumplimiento de la propiedad conmutativa, la cual permitió a los profesores reducir la cantidad de operaciones realizadas.

*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Figura 22. Representación tabular de $<Z_6, *>$, a través de una tabla de Cayley.

Analizar la propiedad conmutativa fue un factor que posibilitó que los profesores exhibieran formas de pensamiento algebraico, relacionado con la posibilidad de establecer una generalización; así, el pensamiento factual (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2014, 2016a) se evidenció de manera explícita en las operaciones concretas que se realizaron con los elementos de Z_6, por lo cual, el sentido de la indeterminancia no se alcazaba a poner de manifiesto. Según Radford (2010a, 2010b), los medios semióticos de objetivación son elementos determinantes en la manifestación de las formas del pensamiento algebraico, para este caso, estos podrían asociarse con la representación tabular construida a través de la tabla de Cayley. En este sentido, diálogos como los expuestos en la tabla 26, evidencian la manifestación de un estrato del pensamiento: el factual.

Tabla 26. Argumento de los profesores para referirse a la propiedad conmutativa en $<Z_6, *>$

Maritza: *lo que yo noto, es que, si "sumamos" el 2 y el 5, daría lo mismo que "sumar" el 5 y el 2.* [La profesora usó el termino sumar para referirse de manera verbal a la operación *, sin embargo, en su bitácora registró las operaciones 2*5 = 5*2]

Edier: *¿pasa siempre? Vamos a ver, en la fila donde está el 2, 2*1 = 1*2; 2*4= 4*2; 2*5 = 5*5. Parece que sí, pasa siempre.*

Gina: *no lo aseguremos hasta que no lo comprobemos.* [La profesora empieza a hacer cada una de las operaciones y procede a afirmar su conclusión]. *Sí pasa con todos los números de la tabla.*

Julieth: *yo creo que sí, el orden de los elementos no cambia los resultados, pero de todas maneras es mejor hacerlo.*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_07_04_2018_min30.

La elocución de los profesores, apoyada en las regularidades que alcanzan a percibir en la tabla, configuraron un elemento denominado por Radford (2009) como nodo semiótico; esto es, la complementación de signos pertenecientes a sistemas semióticos distintos (elocución de los profesores y actividad perceptual); lo anterior, generó una toma de conciencia en relación con la forma de dirimir el problema, asociado con inferir la propiedad conmutativa, los profesores, percibieron regularidades, que posteriormente verbalizaron procurando acercarse a una forma general.

Parece ser que, inicialmente, se observa una generalización de orden aritmético, pues en las operaciones referidas por los profesores aparece un proceso inductivo (*2*1 = 1*2; 2*4= 4*2; 2*5 = 5*5*) para indicar el cumplimiento de la propiedad conmutativa; sin embargo, la presencia de expresiones como: "p*arece que sí, pasa siempre"* y *"sí pasa con todos los números de la tabla",* indican nociones de una generalidad, las cuales, para Radford (2003), "transmiten la idea del esquema de abstracción que subyace a la generalización de las acciones" (p. 49), mostrando el cumplimiento, sobre todos los casos, a través de la identificación de una característica común (abducción de la propiedad conmutativa); esta fue asumida como hipótesis, para ser presentada de manera general, por lo cual, se logra una abducción analítica (Radford, 2003), que evidencia una generalización algebraica como manifestación de una forma de pensamiento.

Además, la representación tabular posibilitó el análisis de otras propiedades que fueron objeto de discusión en diferentes oportunidades; así, los diálogos sostenidos con y entre los profesores evidenciaron que lograron ponerse de acuerdo y aclarar conceptos asociados con el cumplimiento de las propiedades; en otros momentos, cuestionaron lo que sabían y cómo lo enseñaban. En esta línea, la propiedad clausurativa, la existencia de un elemento neutro y de un elemento inverso, fueron objeto de reflexión, como se muestra en la tabla 27, presentada a continuación.

Tabla 27. Diálogo sostenido con los profesores acerca de las propiedades de los números enteros

(1) Investigadora: *¿cuáles propiedades se cumplen en los números enteros, con la operación adición?*

(2) Maritza*: la clausurativa, modulativa, cancelativa, asociativa y conmutativa.*

(3) Julieth: *la invertiva.*

(4) Investigadora: *vamos a analizar cada una, iniciemos con la clausurativa, ¿qué indica esta propiedad?*

(5) Maritza: *la clausurativa, que sumar un natural con otro, me da como resultado un natural. Cuando la enseño, siento que esa propiedad no se usa mucho, que no sirve para nada.*

(6) Edier: *sí, esa propiedad es muy obvia y a los muchachos no les dice nada.*

(7) Julieth: *la propiedad clausurativa no tiene muchas aplicaciones.*

(8) Edier: *yo no creo que haya propiedades que no sirvan para nada, tal vez no las entendemos muy bien… y así lo enseñamos.*

(9) Investigadora: *continuando con la reflexión respecto a cómo entendemos la propiedad clausurativa, volvamos al conjunto* $[Z]_6$*, con la operación asterisco (*), ¿esta propiedad se cumple?*

(10) Julieth: *¿cómo está en la tabla? Sí. Un entero sumado con un entero, da un entero.*

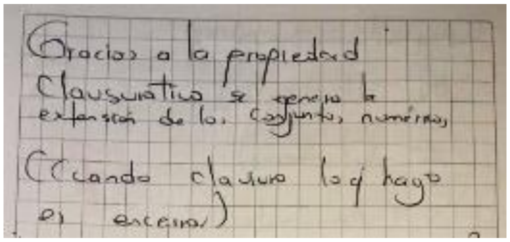
(11) Edier: *pero, la operación asterisco no es la suma de enteros, ¿sí se puede cumplir entonces?, ¿y las otras propiedades también se pueden cumplir en ese conjunto?*

(12) Maritza: *se cumple en la suma, la resta, la multiplicación o la división, pero esta operación no es como esas; entonces ¿cómo vamos a decir que cumple con todas las propiedades?*

(13) Investigadora: *vamos a reflexionar respecto a dos asuntos: (a) en el ejemplo que estamos estudiando ¿qué propiedades se cumplen? Y (b) ¿en la resta y en la división, se cumplen todas las propiedades mencionadas por la profesora Maritza?*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_07_04_2018_min3_45.

Obsérvese que, en la línea *(8)*, el profesor exaltó la función de las propiedades y, a pesar de encontrar la propiedad clausurativa muy evidente ("*esa propiedad es muy obvia*"), revierte la reflexión sobre lo que él sabe y cómo lo enseña. Este tipo de auto observaciones suscitan una revisión de conceptos y propiedades subyacentes en los conjuntos numéricos (Naturales, Enteros y Racionales), con los cuales trabajan normalmente, y una posible asociación de estos elementos con la estructura objeto de estudio $<Z_6, *>$. Después de reflexionar al respecto y de tratar de dirimir las cuestiones planteadas por la investigadora (*línea (13))*, los profesores concluyeron que la propiedad clausurativa se cumple en el conjunto de los números Naturales, Enteros y Racionales, con las operaciones adición y multiplicación y, también, para la estructura $<Z_6, *>$. Los profesores también lograron conclusiones en relación con su utilidad y la necesidad de comprenderla, como se encuentra en la bitácora de la profesora Julieth, presentada en la figura 23.



La utilidad de la propiedad puede verse en que, si no se cumple, entonces no podemos encontrar el resultado de operar dos elementos, en el conjunto trabajado.

Figura 23. *Fragmento tomado del archivo de video m2_21_04_2018.*

La existencia y comportamiento del elemento neutro, fue uno de los componentes asociados con el conocimiento de la matemática que suscitó mayores reflexiones, pues su funcionalidad e importancia no era necesariamente reconocida por los profesores. Igualmente, para el caso de los elementos inversos, se evidenció que este concepto no estaba asociado con la definición de elemento neutro y que, en ningún caso, la presencia de ambas definiciones, era requerida en el proceso de solución de una ecuación. Este argumento se fundamenta en diálogos como los que se presentan a continuación, en la tabla 28.

Tabla 28. Diálogo sostenido con los profesores acerca del comportamiento del elemento neutro y los elementos inversos en una estructura

(1) Investigadora: *¿qué puede indicar que el cero, con la operación adición en los enteros, sea el módulo?*
(2) Maritza*: que el cero ni quita, ni pone.*
Los demás profesores avalan esta afirmación.
(3) Investigadora: *muy bien, entonces, se puede entender lo que dicen como que, es un elemento que no cambia o altera una expresión; vamos a referirnos al cero como: elemento neutro* [continuando con el diálogo, se proponen otras preguntas] *¿Para qué sirve un elemento neutro? ¿Cuál es su utilidad?*

(4) Edier: *para tener el resultado de restarle a un número, otro igual.*

(5) Maritza: *para representar una cantidad nula, el cero, que es un número que a los estudiantes les cuesta entender.*

(6) Edier: *sí, para representar un conjunto vacío.*

(7) Investigadora: *y si me refiero a los elementos inversos, ¿qué entendemos?*

(8) Gina: *que invierte un valor, que deshace.*

(9) Investigadora: *muy bien; continuando con la reflexión en esta línea, qué significa entonces deshacer, ¿cómo se evidencia esto en el trabajo que hacen con los estudiantes?*

(10) Julieth: *por ejemplo, la suma, invierte la resta; la multiplicación a la división.*

(11) Investigador: *y cuando un elemento invierte a otro, en la suma, como lo está indicando Julieth, ¿qué resultado da?*

(12) Maritza: *nada, lo deshace, cero.*

(13) Investigadora: *¿y en la multiplicación?*

(14) Edier: *también, un conjunto vacío, cero.*

(15) Investigadora: *¿cómo es eso?, ¿qué entendemos en este caso?*

(16) Gina: *si tengo un número y lo multiplico con otro número, este lo anula, y da cero.*

(17) Investigadora: *¿lo que quieren decir es que la idea de anular está relacionada con la presencia del cero, es decir, obtener un resultado cero?*

[los profesores coinciden con esta interpretación]

(18) Julieth: *el que no altera en la tabla es el cero.*

(19) Investigador: *muy bien, ¿y quién invierte al dos?*

(20) Maritza: *el menos dos.*

(21) Investigadora: *¿y en la tabla?*

(22) Maritza: *nadie.*

[Los profesores coinciden con esta respuesta]

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_21_04_2018_min3_45.

Las expresiones de los profesores ponen en evidencia que, posiblemente, el reconocimiento de una propiedad y el significado de la misma, no ha sido un objeto comprendido por ellos; esto es, no se ha conferido significado, no se han dotado de sentido estas definiciones. El trabajo estructural, como una forma de promover pensamiento algebraico temprano (Cai y Knuth, 2011), convoca a propender por la fundamentación de este tipo de conceptos, como elementos estructurantes en el proceso de solución de una ecuación.

Para comprender el comportamiento del elemento neutro y su relación con el elemento inverso, fue necesario recurrir a estructuras familiares para los profesores, exponer distintos ejemplos que mostraran cómo el neutro no altera una expresión y cómo esto se relaciona con el inverso; la idea que los profesores tenían, de que anular era obtener cero, no se modificó fácilmente, pero se logró que comprendieran que *“anular una operación, es dejarla como estaba, no alterarla, dejarla en el neutro”* (explicación provista por la profesora Maritza). Otras reflexiones similares se evidencian en el diálogo expuesto en la tabla 29.

Tabla 29. Diálogo sostenido con los profesores acerca del comportamiento del elemento neutro y los elementos inversos en <Z, +, . > y <Q – {0}, +, . >

(1) Investigadora: *analicemos el conjunto de Racionales con dos operaciones, adición y multiplicación. Ya acordamos que el neutro, con la primera operación es el cero (0), y con la segunda operación, es el uno (1), ¿por qué?*

(2) Maritza*: por la propiedad que conserva el mismo valor, o sea, no lo altera, el neutro.*

Los demás profesores avalan esta afirmación.

(3) Investigadora: *muy bien, entonces, ¿está claro que anular no significa que obtendré como resultado un cero?*

(4) Edier: *no, no tiene que ser cero, sino el neutro.*

(5) Investigador: *¿quién quiere explicar este hecho?*

(6) Julieth: *por ejemplo, dos y un medio, dos multiplicado por un medio, uno anula al otro, sino que ese multiplicado se vuelve el inverso. Para la suma, el inverso es el menos dos y en la multiplicación, el inverso es un medio. Realmente es reversar, entonces si yo tengo un dos y le quito un dos me da el neutro, y si tengo un dos y lo multiplico con un medio me da el neutro.*

[Los profesores coinciden con esta respuesta]

(7) Investigador: *Vamos a revisar en la tabla, lo que acaban de decir, cómo lo usan.*

(8) Gina: *en la tabla, el neutro es cero.*

(9) Julieth: *sí, y si buscamos los pares que nos dan el cero, serán los opuestos ¿cierto?*

(10) Investigador: *por ejemplo…*

(11) Maritza*: tres y tres, dan cero (0).*

Los demás profesores avalan esta afirmación.

(12) Edier: *cuatro y dos, dos y cuatro.*

Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_21_04_2018_min3_45.

El reconocimiento de las propiedades analizadas, aportan una caracterización al pensamiento algebraico de los profesores, en tanto, en ellas, se alcanza a percibir la presencia de componentes analíticos como: el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica (aún en ausencia de símbolos alfa-numéricos); este hecho se da porque, desde la perspectiva semiótica de Radford (2010b), los signos también pueden ser palabras, por lo que las diferentes elocuciones de los profesores (líneas 2, 4, 6, 8, 9, 11 y 12), constituyen medios semióticos de objetivación que permiten caracterizar el pensamiento.

Caracterizar el pensamiento algebraico de los profesores, suscita reflexiones en términos de su conocimiento profesional, explícitamente con la dimensión del conocimiento de las matemáticas e, implícitamente, con el conocimiento de la práctica educativa. Un sustento de lo anterior, se presenta en la tabla 30, donde se evidencia que la participación en el proceso de formación empieza a impactar distintas dimensiones del conocimiento profesional (Ponte, 2012), indicando que los profesores aprecian la posibilidad de comprender los conceptos que utilizan.

Tabla 30. Reflexión que evidencia la necesidad de dotar de sentido una propiedad

Gina: *honestamente se lo digo, uno trabajaba las propiedades porque venían en la cartilla y le tocaba aprendérselo mecánicamente, pero honestamente, desde mi experiencia, uno no sabía de dónde estaba saliendo todo eso, entonces a mí me parece que el proceso que he vivido en la sesión pasada y en esta me han ayudado a entender qué es lo que verdaderamente estoy enseñando.*

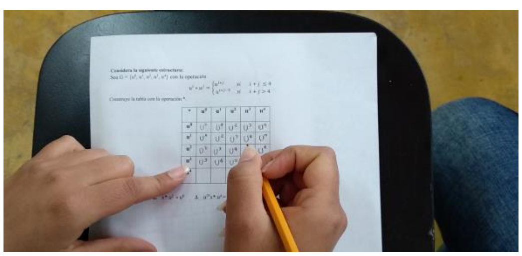
Fuente. Fragmento tomado del archivo de video m2_21_04_2018_min3_45.

La finalización de la actividad de carácter algebraico, donde las propiedades fueron el foco de atención, dio inicio al momento de planeación; aquí, la naturaleza de las reflexiones se orientó sobre la práctica, el currículo que opera en la misma y el trabajo de los estudiantes (dimensiones asociadas con el conocimiento profesional (Ponte, 2012)). Los profesores optaron por buscar una operación que pudiera ser representada en una tabla y que permitiera que los estudiantes hicieran distintos procedimientos con las operaciones convencionales. Después de explorar varias posibilidades y, reconociendo el interés de los profesores, se propuso una actividad (orientada por la investigadora) que pudiera responder a los intereses de los participantes, esta fue una idea inicial, susceptible de ser modificada.

La tarea consideró un conjunto con cinco elementos, $G = \{u^0, u^1, u^2, u^3, u^4\}$ y la operación multiplicación. Así, $u^1.u^3 = u^4$, esto es, la multiplicación de potencias con igual base. Inicialmente, el concepto que subyace en esta tarea era apto para los últimos grados de la educación primaria y esto generó interés por parte de los profesores. Pero con el ánimo de vincular otras operaciones y poder conservar en la tarea propuesta la estructura de grupo, se definió una operación particular, que se podía presentar ante los estudiantes como las reglas de un juego, en el que, si la suma de los exponentes era menor o igual que cuatro, se conservaba el resultado, pero si era mayor que cuatro, debían restar al resultado un cinco. De manera específica, la operación estuvo definida así:

$$u^i * u^j = \begin{cases} u^{i+j} & si \quad i+j \leq 4 \\ u^{i+j-5} & si \quad i+j > 4 \end{cases}$$

La tarea propuesta fue realizada por los profesores, con el ánimo de explorarla y tener elementos para sugerir posibles modificaciones. El desarrollo de esta propuesta fue tranquilo para los profesores, comprender la operación no implicó dificultades y manifestaron que el asunto de las condiciones para los resultados los obligaba a estar atentos a las reglas para operar. Los procedimientos realizados por los profesores, se presentan en la figura 24, donde se puede observar la representación de la operación.



Esta es una propiedad de la potenciación, pero trabajada con una operación abstracta, porque los resultados de los exponentes, especialmente el de la segunda condición, se reduce según la resta. Yo noto que aquí, el u^0 es el neutro, y cada fila y columna también guarda regularidades. A los niños si se les puede poner algo así para que piensen en estas operaciones, pero puede ser solo con números.

Figura 24. Apreciaciones sobre una actividad propuesta para apoyar el proceso de planeación.

Esta idea inicial fue parcialmente aceptada y modificada según los intereses de los profesores, quienes descartaron el trabajo con potencias y redujeron el conjunto a G = {0, 1, 2, 3, 4}, los cuales se operarían bajo la suma y, si este resultado era menor o igual que 4, se conservaba, pero si era mayor que cuatro, entonces se le restaría 5. Esto es:

$$i + j = \begin{cases} i+j & si \quad i+j \leq 4 \\ i+j-5 & si \quad i+j > 4 \end{cases}$$

La anterior representación no sería presentada a los estudiantes, pues podría ser muy compleja; por esta razón, los profesores planearon indicar cómo hacer la operación de manera verbal y a través de ejemplos. El objetivo de los profesores era permitir que los estudiantes hicieran distintas operaciones y reconocieran el comportamiento de algunas propiedades. Es así como, para este momento de la tarea, la categoría temática que fue objeto de análisis, se denominó "dotar de sentido una propiedad", como se muestra en la figura 25.

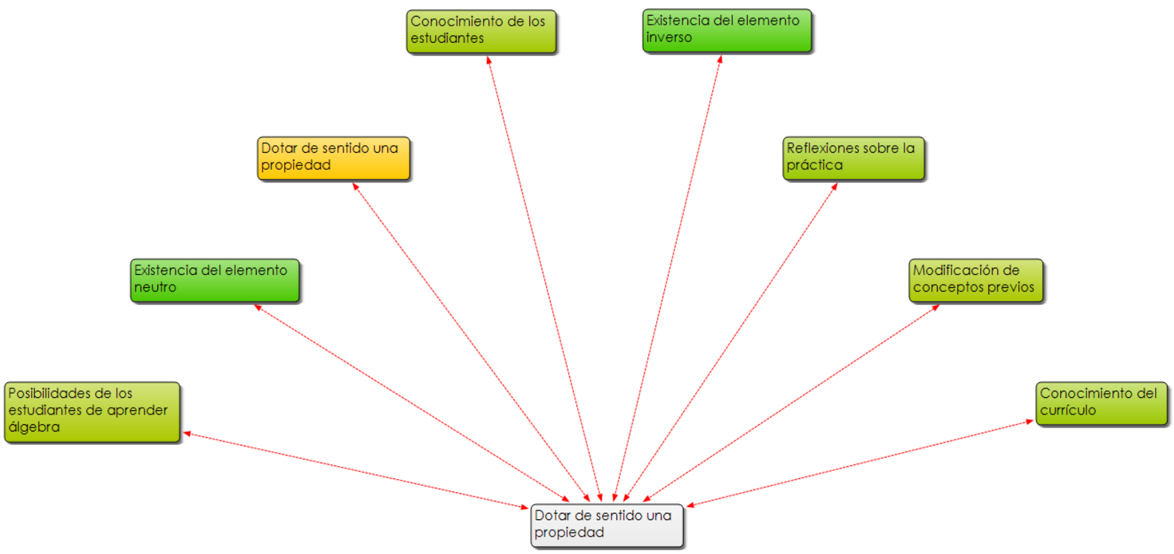


Figura 25. Categoría temática para dotar de sentido una propiedad.

La necesidad de llevar al aula tareas de aprendizaje para los estudiantes, que permitan la comprensión de las propiedades, no solo evidencia un compromiso profesional de los profesores, también muestra cómo su conocimiento profesional se empieza a consolidar desde distintas dimensiones para fortalecer sus prácticas. Así, el diseño propuesto por los profesores, nuevamente, permitió una caracterización del pensamiento algebraico, donde, los tres componentes analíticos (Radford, 2010a, Vergel, 2014, 2016a) se ponen de manifiesto de manera implícita y explícita.

Adicionalmente, una planeación como la propuesta por los profesores, también evidencia una estratificación de su pensamiento algebraico (Radford, 2010a, 2010b; Vergel 2014, 2018); en consecuencia, el pensamiento factual podría estar designado por las operaciones que se realizan a nivel concreto sobre la tabla, la cual, además, se comporta como un medio semiótico de objetivación. En el pensamiento contextual, el significado de las propiedades se convierte en objeto de discurso, trascendiendo de la particularidad a la generalidad, evidenciado en las elocuciones de los profesores (medios semióticos de objetivación).

Aún, no se evidencia que el objeto del discurso de los profesores (significado de las propiedades) sea sustituido por símbolos alfanuméricos o expresiones algebraicas. Pero sí se puede apreciar la presencia de un nodo semiótico (Radford, 2003), en el cual se complementan signos que son propios de representaciones semióticas diferentes, las elocuciones o el discurso y la observación o actividad perceptual. La presencia de este nodo, de nuevo, pone en escena un asunto relacionado con la toma de conciencia y la configuración del profesor como un ser consciente de su conocimiento.

Finalmente, la tarea cierra con unas reflexiones registradas en la bitácora, que hicieron especial énfasis en la realización de actividades muy exigentes pero valiosas, pues los participantes no habían tenido la oportunidad de entender el comportamiento general de las propiedades; para los elementos neutros e inversos, los profesores reconocen que siempre habían reducido su trabajo a la operación adición, con el 0, y la multiplicación, con el 1, pero que una visión general del concepto no la tenían, y tampoco una idea de la relación de este concepto con el elemento inverso.

Uno de los elementos de reflexión que pudo notarse con mayor énfasis en este momento de la tarea, fue la exaltación del papel de las interacciones; en este sentido, los profesores validan lo que hacen con sus compañeros, con la investigadora, consigo mismos y con el conocimiento de la disciplina. La búsqueda de apoyos en los pares promovió interacciones que fueron determinantes para dirimir las diferentes situaciones propuestas, además, generó confianza y credibilidad en lo que se estaba haciendo. Estos asuntos se pueden apreciar en la categoría temática que se constituyó para este momento del análisis, y la cual se presenta a continuación, en la figura 26.

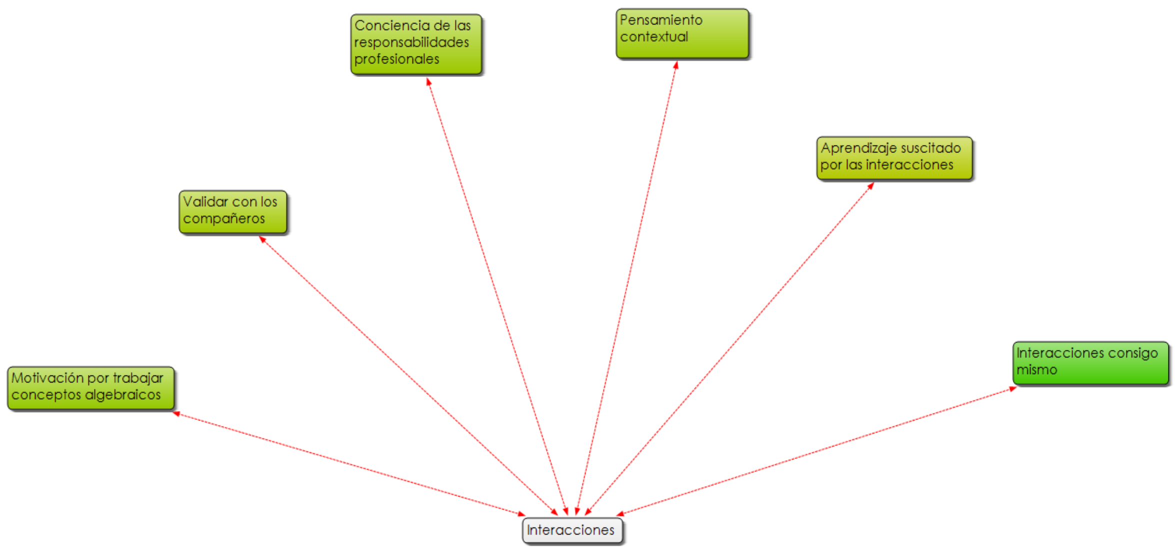
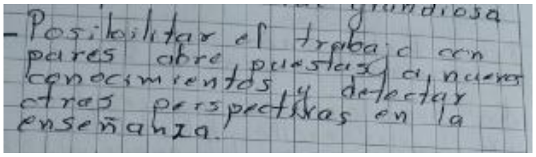


Figura 26. Categoría temática para las interacciones.

Las interacciones referidas por los profesores, fueron valoradas por ellos como una oportunidad para construir nuevos conocimientos, como se muestra en uno de los apartados de la bitácora de la profesora Maritza y que, además, fue expresado durante el espacio de socialización y aceptado por los compañeros como una sensación común. En la figura 27 se presenta el apartado y el audio del episodio en mención; este es un asunto que fue reiterativo a lo largo del trabajo de campo, pues por sus condiciones laborales, los profesores aprecian las posibilidades de compartir espacios académicos con sus compañeros, debatir y reflexionar sobre la práctica, debido a que esto no lo pueden hacer cotidianamente.



Yo mencioné en el friso que estos espacios para compartir con usted y los compañeros son muy valiosos, porque he aprendido mucho, de matemáticas y de cómo son las prácticas de los compañeros, otras perspectivas.

Figura 27. Reflexiones de la profesora Maritza en relación con la interacción con los pares.

Hasta este momento, las interacciones se empiezan a configurar como un elemento que contribuye a describir la naturaleza de la transformación del conocimiento profesional y a permitir entender cómo el profesor transforma ese conocimiento. Dichas interacciones transcienden a diferentes planos: interpersonal (con pares e investigadora), personal (consigo mismo y con el conocimiento de la disciplina), pero también profesional (en práctica educativa y con los estudiantes), pues los profesores se proyectan para que sus aulas sean los escenarios en los cuales dan vida a lo que están aprendiendo.

4.3.2.3. Inter – análisis para la tarea de formación 2. En el desarrollo de la tarea de formación 1, se empezaron a vislumbrar algunos cambios en las reflexiones y acciones de los profesores; estos, tal vez, se manifestaron en una dimensión incipiente, pero aportaron elementos que permitieron vislumbrar componentes necesarios para determinar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano. La red de relaciones, presentada en la figura 28, muestra las categorías temáticas que emergieron en el análisis de la tarea, la cual, constituye un insumo para el diseño del esquema explicativo.

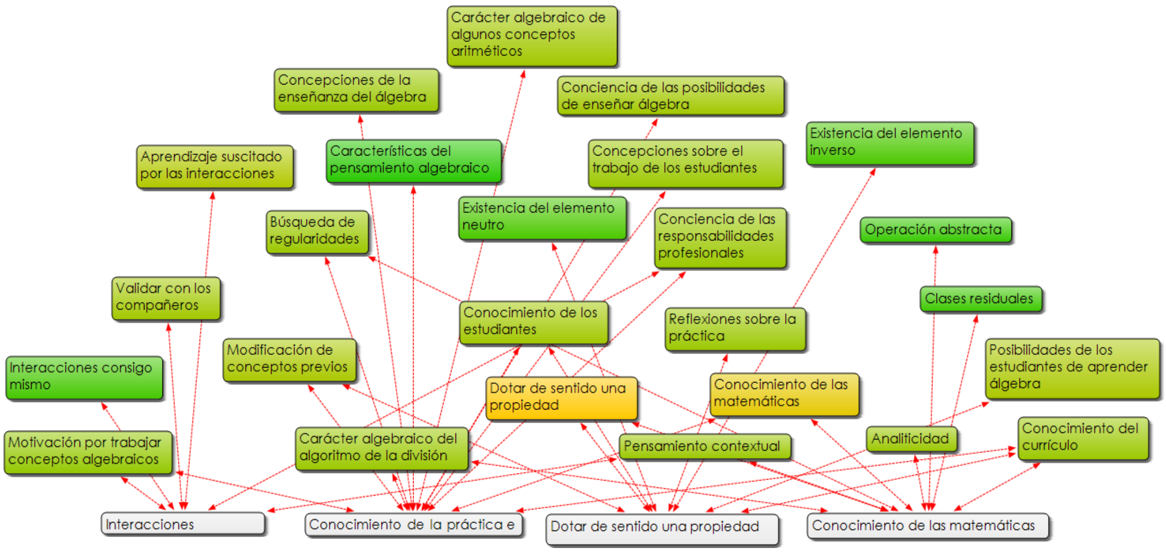


Figura 28. Red de relaciones para las categorías temáticas del desarrollo de la tarea de formación 2.

Lo primero que se podría exaltar en el proceso de inter – análisis de la tarea de formación 2, es que, en los cambios apreciados, aunque se están generando de manera natural, hay un elemento mediador que los está suscitando, el pensamiento algebraico, como un componente que ofrece distintos retos para los profesores, a nivel profesional. Para el inter – análisis, se retomaron todos los elementos discutidos en este apartado para elaborar un mapa conceptual que busca explicar qué ocurrió en el desarrollo de la tarea de formación 2. Los elementos objeto de estudio, se presentan a continuación en la figura 29.

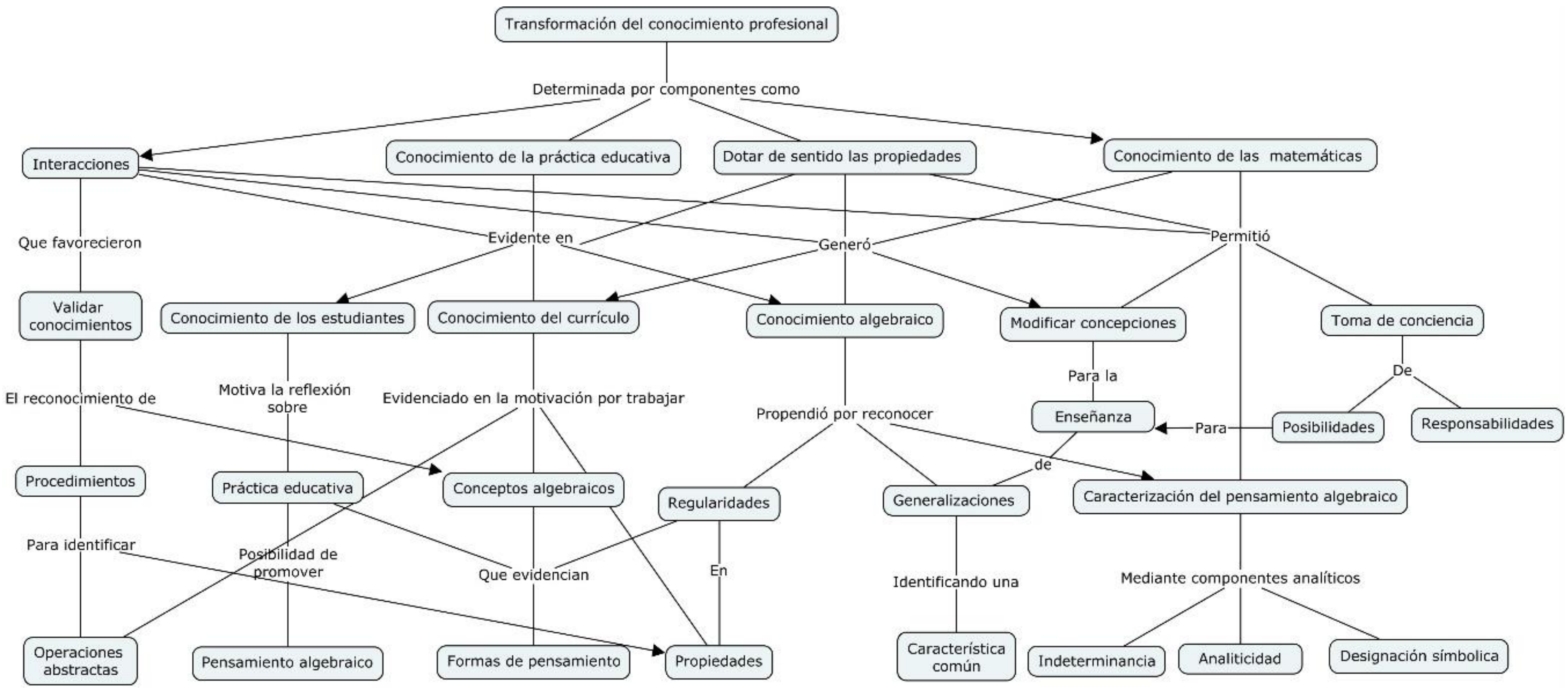


Figura 29. Elaboración propia. Mapa conceptual para el inter – análisis del desarrollo de la tarea de formación 2.

La transformación del conocimiento profesional continua configurándose a través de la presencia de componentes, que emergen en distintos escenarios, en los cuales el profesor tiene incidencia; así, las interacciones empiezan a denotar una línea de análisis susceptible de ampliarse a otros campos; en los espacios de formación, se observó que el grupo de profesores buscó apoyo en sus compañeros, los cuales estuvieron dispuestos a no avanzar hasta que todos manifestaron disposición para hacerlo; esta situación afianzó las relaciones profesionales y los vínculos entre pares (Fiorentini, 2008), motivando a la participación y a la creación de propuestas conjuntas, reflejadas en las planeaciones de clase.

En coherencia con la idea anteriormente expuesta, las interacciones se configuraron en distintos componentes: consigo mismos, con los pares (incluida la investigadora), con el conocimiento y con los estudiantes. Un asunto particular se observó durante el desarrollo de cada actividad, los profesores se auto-preguntaban y se auto-explicaban, es decir, interactuaban consigo mismos y confrontaban lo que estaban aprendiendo, para, posteriormente, validar la veracidad de sus conclusiones con sus compañeros; situaciones como las anteriores se evidenciaron en muchos de los videos, en los cuales se observó que, en la mayoría de los diálogos, constantemente preguntan a sus compañeros que si el procedimiento era correcto.

La presencia de estos comportamientos, pudo deberse al tipo de tareas propuestas que, en la línea de Vergel y Rojas (2018), constituyeron una categoría didáctica con actividades retadoras (Ponte et al., 2009), como fueron los procedimientos con operaciones abstractas, que no solo vincularon actividades novedosas para ellos, sino que también ofrecieron retos profesionales; esto se debe a que en sus ideas y concepciones, la posibilidad de enseñar álgebra y reconocer que en algunos de los conceptos que trabajaban existía un carácter algebraico, no era latente, y ahí empezó una ‘confrontación inicial’ con sus concepciones, sus experiencias y sus prácticas.

La interacción con los compañeros, consigo mismos y con el conocimiento, posibilitó condiciones de confianza para tomar decisiones sobre el currículo y actuar en la práctica; lo anterior, se reflejó en la disposición para diseñar tareas de aprendizaje para los estudiantes, en las cuales vincularon lo que estaban aprendiendo y empezaron a romper paradigmas y a reconocer que la promoción del pensamiento algebraico era una necesidad de la que no estaban conscientes, pero que terminó propiciando interés para su proceso formativo.

El asunto del interés, pudo tener origen en el tipo de conceptos algebraicos orientados y en las tareas propuestas, pues estas retomaron sus experiencias y necesidades frente a conceptos que no habían trabajo de manera favorable; además, se posibilitó un panorama diferente para detectar el carácter algebraico en conceptos que para ellos eran netamente aritméticos. Un elemento adicional al interés, tiene que ver con las manifestaciones del pensamiento de los profesores, es decir, con el cómo llegaban a las soluciones, lo que atribuyó a la toma de conciencia un reconocimiento de los aspectos procedimentales que daban respuesta a un problema de carácter algebraico, mediante la búsqueda de regularidades y de generalizaciones.

4.3.3. Tarea de formación 3. El primer momento de esta tarea se destinó para proyectar y analizar los videos, en los cuales los profesores llevaron a cabo la tarea de aprendizaje de los estudiantes, diseñada en encuentros pasados. Sobre esta realizaron modificaciones, una de ellas fue que a los niños se les propuso jugar lanzando fichas (que contenían los números del 0 al 4) y operar los valores que obtenían con la condición: “si la suma de las caras de las fichas es cuatro o menos, el resultado de la operación es esa suma; pero si es más de cuatro, entonces, a ese resultado le restamos cinco”, instrucción verbal en la que coincidieron los profesores para presentar la operación de la tarea, e indicar la operación dada a continuación.

$$i + j = \begin{cases} i + j & si \quad i + j \leq 4 \\ i + j - 5 & si \quad i + j > 4 \end{cases}$$

Los resultados se registraron en una tabla de doble entrada, que los profesores enseñaron refiriéndose a un plano, ubicando los valores de las fichas en una columna y en una fila y, el resultado, en el punto de intersección. Las reflexiones que suscitan esta propuesta (M_1) y las posibles evidencias de cómo el profesor transforma su conocimiento profesional en estos escenarios, son descritos en el proceso de codificación axial.

Posteriormente, la actividad enmarcada en el pensamiento algebraico (M_2) se enfocó en el reconocimiento de una estructura y la solución de ecuaciones propuestas en esta. Se retomó el conjunto de $<Z_6, *>$ con el fin de dar continuidad al trabajo realizado y utilizar las propiedades ya exploradas y estudiadas. Este momento de la tarea también aportó ideas para el trabajo que se propuso para los estudiantes (M_3), pues las tareas de aprendizaje diseñadas se enmarcaron en la solución de ecuaciones mediadas por el uso con sentido de las propiedades que se estudiaron previamente. Por último, los profesores valoraron el encuentro y realizaron aportes en términos de lo que aprendieron, los retos que tienen para el trabajo con sus estudiantes, las responsabilidades frente al currículo y la práctica misma (M_4).

4.3.3.1. Proceso de codificación abierta para la tarea de formación 3. El proceso de codificación abierta, al igual que con las otras tareas, inició con la asignación de códigos a los segmentos que definieron unidades de análisis. Estos códigos se agruparon en categorías que guardaban relación, según sus propiedades y dimensiones. Así, mediante estos criterios, se generaron para esta tarea de formación nuevas categorías y otras se reafirmaron, propiciando en total 47 categorías, las cuales se presentan en la tabla 31.

Tabla 31. Categorías emergentes en el proceso de codificación abierta para el desarrollo de la tarea de formación 3

Abducción analítica
Analiticidad
Aplicación a términos no dados
Aprendizaje suscitado por las interacciones
Búsqueda de regularidades
Característica común
Carácter algebraico de algunos conceptos aritméticos
Clases residuales
Concepciones de la enseñanza del álgebra

Concepciones sobre el trabajo de los estudiantes
Conocimiento de las matemáticas
Conocimiento de los estudiantes
Conocimiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes
Conocimiento del currículo
Conciencia de la estructura algebraica
Conciencia de la necesidad de usar las propiedades
Conciencia de la relación entre aritmética y álgebra
Conciencia de las posibilidades de enseñar álgebra
Conciencia de las responsabilidades profesionales
Conciencia términos dados
Deducción de la fórmula
Designación simbólica
Determinaciones sensibles
Dotar de sentido una propiedad
Existencia del elemento inverso
Existencia del elemento neutro
Generalización algebraica
Identificación de una comunalidad
Importancia de fundamentar pensamiento algebraico para la secundaria
Interacciones consigo mismo
Medios semióticos
Modificación de conceptos previos
Motivación por trabajar conceptos algebraicos
Noción de ecuación
Noción de variación
Nodos semióticos
Operación abstracta
Pensamiento contextual
Pensamiento factual
Pensamiento simbólico
Posibilidades de los estudiantes de aprender álgebra
Procedimientos algebraicos imprecisos
Propiedad uniforme
Reflexiones sobre la práctica
Sentido de la indeterminancia
Tomar conciencia de que sí se hace trabajo algebraico
Validar con los compañeros

Fuente. Elaboración propia. Categorías emergentes en la tarea de formación 3.

En algunas de las categorías presentadas en la tabla 31, la fundamentación es variable, teniendo más sustento los asuntos asociados con la disciplina, en lo referido al pensamiento algebraico, la conciencia y las concepciones. Así, las categorías que aparecen con color amarillo, en la figura 30, son las que tienen relación con un mayor número de códigos, asignados a las unidades de análisis; mientras que, las de colores verde claro y oscuro, tienen menos códigos asociados, lo cual puede indicar que, para esta tarea, tal vez no tienen tanta presencia, sin embargo, son objeto de análisis en la medida que puedan aportar información acerca de cómo el profesor transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

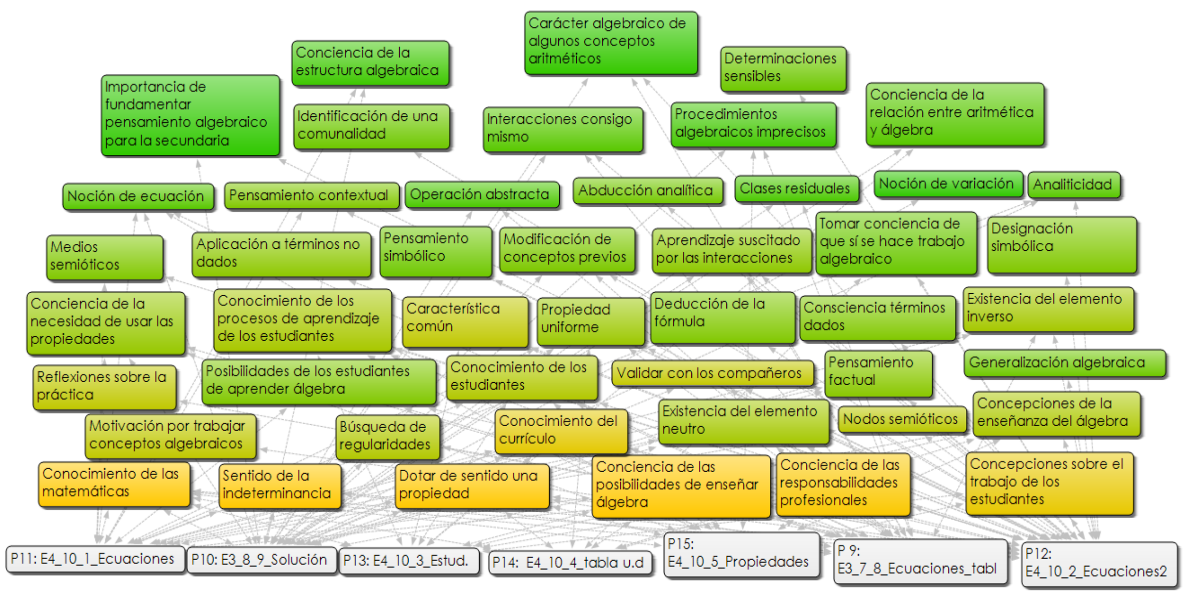


Figura 30. Categorías emergentes para el proceso de codificación abierta del desarrollo de la tarea de formación 3.

La variación en la fundamentación, es un hecho coherente con que a medida que se avanza en el trabajo de campo, algunos códigos dejan de tener la misma presencia, pues en las actividades ya no se vinculan de manera reiterada; este es el caso de las categorías: importancia de fundamentar el pensamiento algebraico para la secundaria, conciencia de la estructura algebraica, carácter algebraico de algunos conceptos aritméticos, procedimientos algebraicos imprecisos, conciencia de la relación entre aritmética y álgebra. Mientras que, los demás, permanecen y se consolidan. Este tipo de situaciones permiten avizorar que, aquellos elementos que se consolidan, aportan fundamentos para la determinación de la postura explicativa buscada en el estudio.

4.3.3.2. Proceso de codificación axial para la tarea de formación 3. El proceso de codificación axial inició buscando las relaciones existentes entre las categorías emergentes, durante el análisis del desarrollo de la tarea de aprendizaje. Al respeto, los participantes valoraron la posibilidad de llevar a cabo este tipo de actividades y exaltaron que, el componente enmarcado en el juego, posibilitó la motivación por parte de los estudiantes, quienes comprendieron las reglas para completar la tabla y las propiedades que se estudiaron a través del análisis de esta.

Un aspecto adicional, objeto de análisis, tuvo que ver con las respuestas aportadas por los estudiantes, las cuales evidenciaron estratos de pensamiento algebraico; este fue un hecho que se mencionó a los profesores y, aunque no se profundizó en el mismo, sí se hizo referencia a que hubo tanto expresiones (verbales y gestuales) como acciones, que ponían de manifiesto algunos tipos de pensamiento: como el factual (con las operaciones concretas) y el contextual (con el acercamiento a la búsqueda de formas generales para las propiedades); adicionalmente, se alcanzan a reconocer recursos semióticos como: el juego y la decodificación de las reglas propuestas en este, la tabla, y la verbalización de palabras clave; estos asuntos se observan en el apartado presentado en la figura 31.

Edier: c*uando la estudiante estaba construyendo la tabla, realizó las operaciones, o con los dedos o con el ábaco; ahí, por ejemplo, sacó cuatro y tres, ella ya sabía que tenía que restar cinco, y en la tabla puso el dos. La actividad se hizo con todos los grados, y las propiedades se estudiaron, pero con más profundidad con los de cuarto y quinto. Pero el juego les gustó, porque competían al que la llenara primero y sin equivocarse.*

Figura 31. Experiencia del profesor Edier en el desarrollo de la tarea de aprendizaje.

Algunas apreciaciones expuestas por los profesores, llamaron la atención acerca de la naturalidad con la cual los estudiantes lograron desarrollar las tareas de aprendizaje relacionadas con las propiedades y mediadas por el juego; además, exaltan que propiedades como la asociativa y conmutativa son de uso cotidiano, pero que la existencia de un elemento neutro e inverso, no se profundizan lo suficiente. Reflexiones sugeridas en esta línea se presentan en la figura 32, donde el conversatorio se desarrolla en torno a las posibilidades que tuvieron los estudiantes para comprender la operación indicada y las definiciones en cuestión.

Gina: c*uando hicimos el ensayo para ver si lograban entender cómo operar los números de las fichas, participaron casi todos, queriendo responder cuál era el resultado de las operaciones. Y en la tabla, todos los resultados quedaron bien, pero los niños de primero si no pudieron con la tabla, y la operación, ahí más o menos, ellos apenas están sumando bien. También hicimos una ronda, se movían a la derecha y se sentaban, luego a la izquierda y quedaban en el mismo puesto, eso era hacer, des-hacer y neutro. Y lo entendieron muy bien.*

Julieth: *sí, con mis estudiantes, yo siento que entendieron muy bien que en matemáticas existen elementos neutros, que no alteran ninguna operación y, así mismo, otros que anulan, dejando el elemento neutro. Hacer y des-hacer como dice la compañera.*

Maritza: *yo no sé a ustedes, pero una cosa que me parece importante, porque yo eso como que no lo reconocía, era que los elementos que se anulan, dependen del neutro; no, yo eso no lo reconocía como tal, pero a ellos les hice mucho énfasis en eso y no tuvieron problema para entender.*

Figura 32. Fragmento tomado del archivo de video m1_05_05_2018_min3_45.

Los profesores coincidieron en que la operación fue comprendida por la mayoría de los estudiantes, que la elaboración de la tabla les ayudó a reforzar el trabajo con el plano cartesiano, y que las propiedades se entendieron y afianzaron con el uso de la tabla. Uno de los asuntos que se destacaron en los diálogos que mediaron la observación de los videos, fue el reconocimiento de que cada conjunto y operación puede tener un elemento neutro y que los inversos dependen de este; aunque estos pudieran ser conceptos evidentes, en el caso de los profesores participantes de la investigación, no fue así, pues parece ser que comprendían y enseñaban estos conceptos de manera aislada y que, con este tipo de reflexiones, se empiezan a dotar de sentido las propiedades.

La categoría temática que se configuró a partir de los elementos de análisis de este momento de la tarea, se presenta en la figura 33, donde se puede apreciar el conocimiento de los estudiantes, como un elemento inherente en la transformación, toda vez que vincula asuntos referidos a: el conocimiento de las matemáticas, manifiesto en el pensamiento algebraico; las concepciones e interacciones de los profesores, reconocidas por ellos, debido a que su presencia ha sido objeto de discusión durante el trabajo de campo; y, las decisiones sobre la práctica, reflejadas en el currículo que opera en ella.

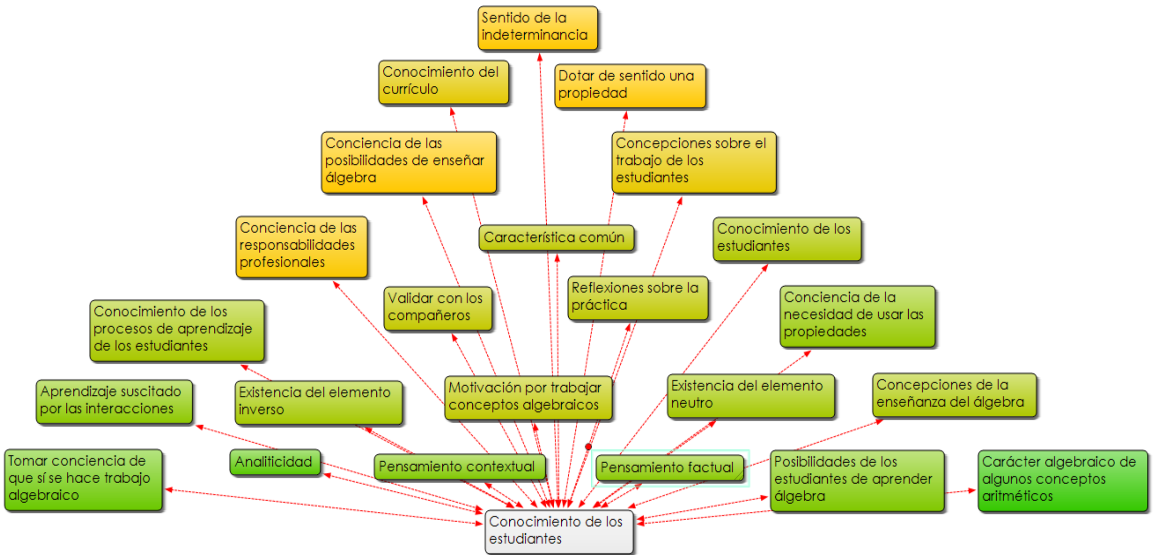
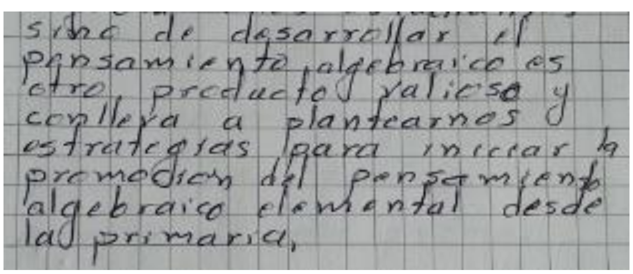


Figura 33. Categorías temáticas emergentes para el conocimiento de los estudiantes.

Conocer a los estudiantes implica para los profesores ser conscientes de cuáles son sus posibilidades para llevar a cabo una tarea; en ese sentido, tomar conciencia implica asumir decisiones frente a qué incluir en la planeación y qué adecuaciones hacer sobre el currículo; pero estas decisiones también se asocian con las concepciones que los profesores tienen, en relación con los conceptos algebraicos que se enseñan en la primaria, y la responsabilidad que tienen frente a ello. Por ejemplo, las propiedades estudiadas no eran entendidas como un concepto relacionado con el pensamiento algebraico, sino como uno propio del numérico; sin embargo, identificar en este tipo de tareas componentes analíticos, como el sentido de la indeterminancia y la analiticidad, confiere a estos conceptos un carácter algebraico (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2014, 2016a) reconocido por los profesores.

Adicionalmente, la responsabilidad que los profesores tienen frente al diseño de tareas de aprendizaje (Ponte et al., 2009), implica conocer el carácter algebraico de los conceptos estudiados y, en consecuencia, las características que subyacen en este pensamiento; en esta línea, durante el análisis del desarrollo de la tarea, se presentaron algunas intervenciones que hicieron énfasis en el sentido de la indeterminancia (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2014, 2016a), que podía subyacer en la actividad realizada por los estudiantes, quienes reconocían la presencia de valores no determinados, los cuales, para ellos, no podían ser representados directamente (Radford, 2010a; Vergel, 2014) hasta comprender el cómo operar los valores dados en el conjunto. Reconocer las características del pensamiento algebraico aportó a los profesores criterios para tomar decisiones frente al tipo de tareas propuestas.

Otro componentes característico del pensamiento algebraico, objeto de análisis durante el desarrollo de la tarea fue la analiticidad; esta última estuvo mediada por procesos de deducción a partir de premisas iniciales (Vergel, 2019), que permitieron a los estudiantes dotar de un carácter operatorio los objetos del conjunto dado; el reconocimiento de los componentes analíticos del pensamiento caracterizado por Radford (2010a), incidió en algunas concepciones de los profesores, frente al hecho de que pensar en álgebra implicaba pensar en letras y, en consecuencia, convocó a pensar en la promoción del pensamiento algebraico, como se muestra en la figura 34.

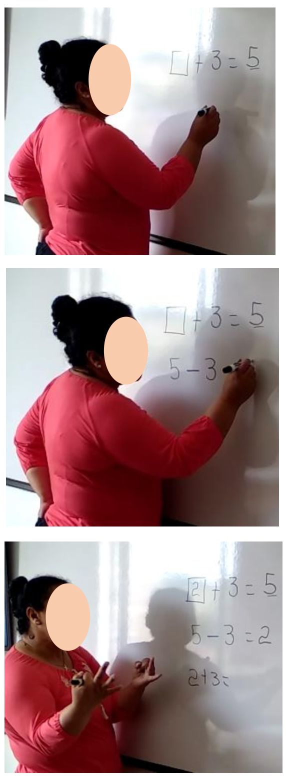


Investigadora: *gracias por sus aportes, ¿alguien quiere adicionar algo?*

Gina: *sí profe, eso del pensamiento algebraico me parece muy interesante, porque yo de verdad pensaba que se trataba de letras, y eso es muy difícil para los niños; ahora reconozco que no es así, que, por ejemplo, con lo de la indeterminación se puede desarrollar este pensamiento; en la bitácora anoté sobre lo valioso que es esto para desarrollar pensamiento algebraico.*

Figura 34. Fragmento tomado del archivo video M1_05_05_2018_min_23.

Obsérvese que los profesores empiezan a referir el pensamiento algebraico de manera natural; parece que se va consolidando un reconocimiento de sus componentes característicos, lo que les permite ampliar sus perspectivas acerca de lo que puede significar pensar algebraicamente y las estrategias que esto conlleva. Con este panorama y con la intención de continuar construyendo elementos para la reflexión, en torno a la disciplina, se dio inicio al desarrollo de una actividad que planteó encontrar la solución de una ecuación, inicialmente en una estructura aditiva, familiar para los profesores y, posteriormente, en $\langle Z_6, * \rangle$. Los profesores ejemplificaron el tipo de explicación que dan a los estudiantes cuando muestran el proceso de solución de una ecuación ($\square + 3 = 5$); este se presenta a continuación en la figura 35.



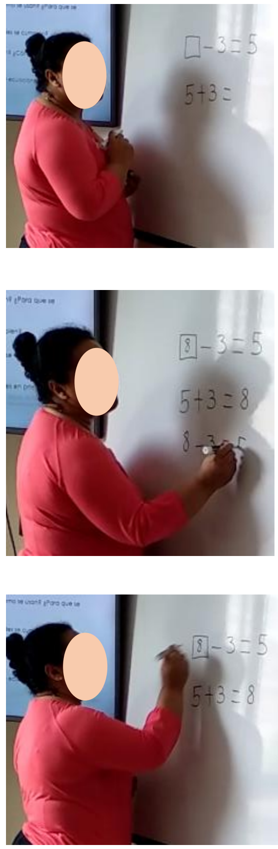
Para esta ecuación, ($\square$ + 3 = 5), tenemos este valor y tenemos este resultado.

Entonces, a este que es el mayor, le vamos a restar; vamos a cambiar este signo por la resta y le vamos a restar este más pequeño, porque siempre a este más grande le tenemos que restar lo pequeño; entonces, a cinco le quitamos tres ¿cuánto nos da? Dos.

Entonces, ese dos lo vamos a colocar aquí. Vamos a comprobar si de verdad estos dos nos van a dar este, entonces ya vamos a sumar, dos más tres, y contamos en los deditos, tenemos dos y le agregamos tres ¿cuánto nos da? Cinco. Pero eso es para los niños de segundo o de primero, al final, porque ya con los más grandecitos, se hace con números más grandes, ya no pasito a pasito así.

Figura 35. Fragmento tomado del archivo video M2_05_05_2018_min_3.

El proceso de solución descrito por la profesora evidenció un procedimiento que, para el resto de los participantes, era común y representaba lo que ellos hacían en sus clases, cuando enseñaban este tipo de conceptos; a partir de esta ejemplificación, se propiciaron las preguntas y reflexiones que se indican en la figura 36.



Investigadora: *y, ¿ese proceso aplica con todas las ecuaciones?*

[Los profesores coinciden con que siempre funciona, y realizan otro ejemplo]

Gina: *si la ecuación es* $\square - 3 = 5$, *entonces volvemos a invertir la operación, entonces ya no vamos a aplicar la resta, sino que vamos a aplicar la operación contraria, vamos a sumar, entonces, a cinco le vamos a cambiar ¿cuál es la operación contraria de la resta? Entonces vamos a sumar, a cinco le sumamos tres, ¿nos da? Ocho, listo, entonces, aquí nos va a dar ocho. Vamos a hacerle la prueba para saber si sí nos da, entonces, a ocho le quitamos tres ¿cuánto nos da? Cinco.*

Investigadora: *¿reconocen otros procesos para solucionar ecuaciones?*

[Los profesores aceptan que ese proceso es el que usan normalmente]

Investigadora: *¿qué propiedades utilizan para saber que ese procedimiento es el que deben hacer?*

Maritza: *propiedades, ahí como tal, no se usan, ni se necesitan.*

[Los profesores coinciden con esta afirmación]

Figura 36. Fragmento tomado del archivo video M2_05_05_2018_min_33.

Si bien, las ecuaciones propuestas tienen rasgos característicos del pensamiento algebraico a la luz de los elementos teóricos descritos por Radford (2010a), el tratamiento dado a estas es de carácter numérico; lo anterior se puede enmarcar en una solución que utiliza el ensayo – error que, en la línea de Vergel y Rojas (2018), “no la consideramos como algebraica. Incluso los estudiantes pueden movilizar signos alfanuméricos, pero esto no es lo que hace distintivo el pensamiento algebraico” (p. 50). Con este escenario, se propuso a los profesores otra ecuación, en una estructura estudiada previamente. Como se indica en la figura 37.

Investigadora: *vamos a retomar la tabla que construimos con la operación *, y en este conjunto vamos a resolver esta ecuación, 4*x = 3. ¿Cuál es el valor de la x?*

[Los profesores piensan por un tiempo, cómo relacionar esta ecuación con los procesos que acababan de describir]

Edier: *aquí no va a funcionar lo del signo contrario.*

Julieth: *aquí no, porque esa operación no se deja pasar a restar, ni a sumar. ¿Entonces?*

Gina: *ni idea.*

Maritza: *puede ser, cuatro, operado con otro, que me dé 3.*

Edier: *con asterisco (*). En la tabla lo podemos saber.*

Investigadora: *muy bien, ¿cuánto da?*

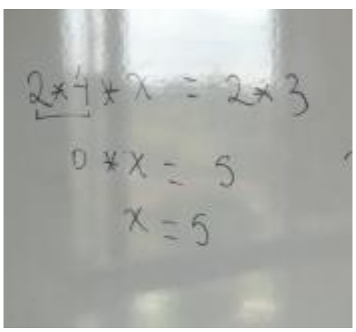
Julieth: *cinco, con la tabla.* [Los profesores se remiten a la tabla para rastrear el resultado de la ecuación].

Investigadora: *muy bien, ahora resolvamos la ecuación 4*x*5 = 2. ¿Cuál es el valor de la x?*

Figura 37. Fragmento tomado del archivo video M2_05_05_2018_min_23.

Un episodio como el presentado en la figura 37, confirma que el uso de las propiedades en el proceso de solución de una ecuación, no es considerado por los profesores como un mecanismo que fundamentaría dicho proceso. El tratamiento dado por ellos evidencia un pensamiento factual, con una naturaleza aparentemente concreta, donde los profesores asumen que deben operar dos números cuyo resultado sea tres; este proceso se desarrolló tomando como referente la tabla, donde medios semióticos como percepción y palabras, permitieron materializar la actividad de los profesores (Radford, 2012).

En el transcurso de la tarea, fue necesario plantear reflexiones asociadas con el sentido del signo igual, como un recurso para fundamentar el uso de la propiedad uniforme. La propiedad en cuestión fue reconocida por los profesores, quienes aceptaron que esta ayuda a preservar la igualdad, toda vez que se hagan las mismas operaciones a ambos lados del signo. Así, asociaron este concepto con el de la balanza que permanece en equilibrio. Este fue un recurso semiótico que medió el trabajo indicado para solucionar la ecuación propuesta en la estructura $<Z_6, *>$. En la figura 38 se ilustra lo mencionado en este apartado.



Investigadora: *vamos a retomar esta ecuación, $4*x = 3$. Si pensamos en preservar la igualdad, ¿qué podríamos hacer para despejar la x?*

Los profesores piensan por un rato.

Edier: *no podemos quitar el cuatro a ambos lados.*

Julieth: *pero eso es lo que debemos hacer.*

Investigadora: ¿cómo anulamos el cuatro?

Maritza: *con las propiedades que vimos.*

Edier: *ah sí.*

Investigadora: *muy bien, ¿cómo?*

Julieth: *con la tabla. El dos y el cuatro, dan el neutro o el módulo.*

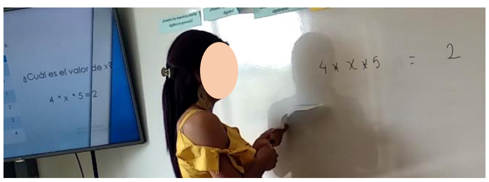
Investigadora: *muy bien, ¿qué hacer entonces?*

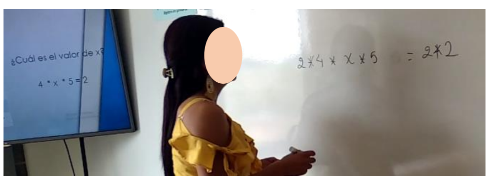
Gina: *poner dos, a este lado y a este* [señalando los lados del igual].

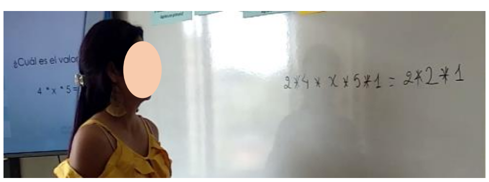
Edier: *y el resto de las operaciones, con los resultados de la tabla. Y da igual, que como lo hicimos antes.*

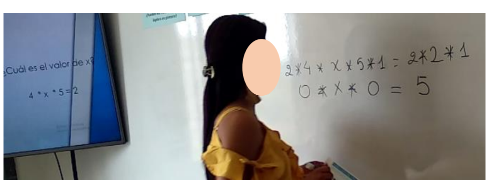
Figura 38. Fragmento tomado del archivo video M2_05_05_2018_min_34.

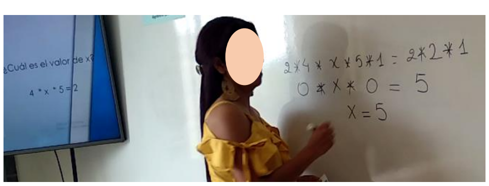
Empezar a dotar de sentido las propiedades estudiadas en encuentros pasados, fue un asunto que se materializó a través de actividades como las propuestas. Los profesores recuperan fácilmente los conceptos ya estudiados, y manipulan la tabla con familiaridad. Adicionalmente, empiezan a reconocer que los procedimientos utilizados por ellos (descritos en las figuras 35 y 36) sí tienen un fundamento que permite explicar, a la luz del uso de propiedades, los procedimientos que median el proceso de solución de una ecuación. En la figura 39, se ilustra lo mencionado, a través de las soluciones descritas por los profesores.











Julieth*: cuatro operado con equis operado con cinco es igual a dos; tenemos que hacer entonces la operación de la ecuación para poder realizar el proceso ¿cierto? Entonces, ¿quién anula al cuatro? El dos, ¿cierto? Entonces, dos operado con cuatro, y realizo lo mismo en la otra parte para poder que nos dé la igualdad, y ¿al cinco quién lo anula?, el uno, entonces cinco operado con uno y realizo lo mismo al otro lado, entonces dos operado con cuatro me da cero, operado con equis, operado con cinco, operado con uno, me da cero, esto es igual dos operado con dos, me da cuatro, bueno, y cuatro operado con uno me da cinco, como tenemos el cero ¿afecta a la equis?, no la afecta porque es un número neutro, entonces, me quedaría equis, lo mismo acá no la afecta porque es el número neutro, igual a cinco. Y si lo voy a comprobar, entonces teníamos: cuatro operado con cinco operado con cinco dice que es igual a dos, entonces, cuatro operado con cinco me da tres y tres operado con cinco y tres operado con cinco me da dos, efectivamente se cumple la igualdad de la ecuación.*

Investigadora: *Gina, ¿te gustaría aportar algo más?*

Gina*: profe, todo muy claro, entonces al cuatro lo anula el dos, agrego dos a ambos lados; bueno, y al cinco lo va a anular el uno, lo va a cancelar; bueno, entonces, igual tengo que igualar la otra cantidad que tengo, entonces aquí igualé con dos y aquí igualé con uno, a ambos lados, listo. Entonces cuatro y dos me da seis que me equivale al cero y cinco y uno, me da seis, que es equivalente al módulo, que es cero, y ahora sí, dos operado con dos, da cuatro, operado con uno, da cinco, donde equis es igual a cinco. Todo tiene sentido.*

Figura 39. Fragmento tomado del archivo video M2_05_05_2018_min_52.

Este momento de la tarea evidenció la esencia del pensamiento algebraico teorizado por Rarford (2010a, 2010b) y confirmado por Vergel (2014, 2016a), a través de la caracterización de sus componentes analíticos; así, el sentido de la indeterminancia permitió “repensar la forma en que las cantidades indeterminadas pueden ser significadas” (Vergel, 2014, p. 79); la analiticidad se manifestó mediante el manejo analítico de las cantidades indeterminadas y sus operaciones, mediado por el uso de las propiedades; y la designación simbólica permitió nombrar un objeto algebraico indeterminado, representado por construcciones basadas en signos (Radford, 2010a). Para este momento de la tarea, las categorías que emergen o se reafirman se agrupan en una categoría temática, en correspondencia con una dimensión referida por Ponte (2012): el conocimiento de las matemáticas. La figura 40 presenta el esquema respectivo.

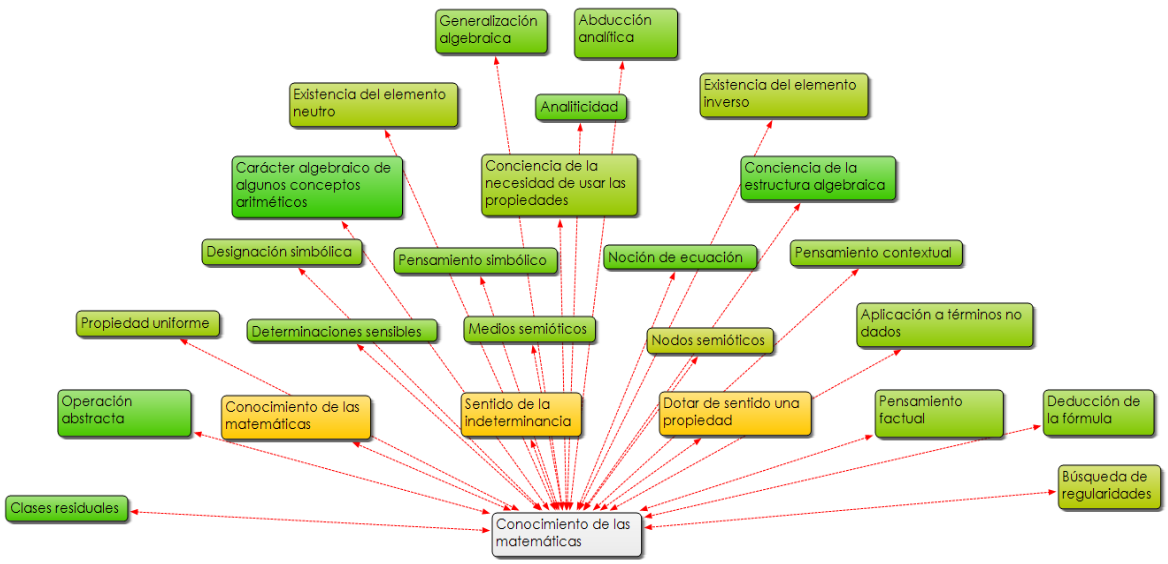
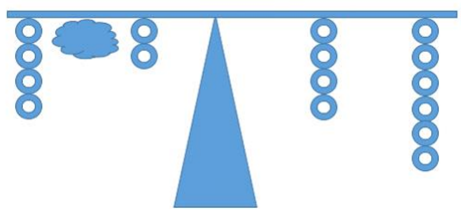


Figura 40. Categorías temáticas emergentes para el conocimiento de las matemáticas.

Evidenciar cambios en una dimensión de conocimiento profesional (Ponte, 2012), manifiestos en el carácter algebraico de los argumentos expuestos por los profesores, aporta un elemento al esquema explicativo, que parece ser consustancial a la transformación: el conocimiento de las matemáticas. En este contexto, dilucidar cómo el profesor transforma su conocimiento podría asociarse con la presencia de una progresión en las formas de pensamiento algebraico, esto es, el saber algebraico, como síntesis evolutiva y transformativa, también se transforma (Radford, 2010b; 2013b; Rojas y Vergel, 2018); por lo anterior, notar una evolución del pensamiento factual, donde a partir de acciones concretas sobre los números los profesores logran avanzar a un estado en el cual la indeterminancia se explicita, evidencia una forma de pensamiento contextual que, además, antecede al pensamiento simbólico, donde la designación permite dotar de significado las propiedades en un proceso de solución de ecuaciones.

El desarrollo de la tarea de formación prosiguió con el diseño de actividades para el aula; este momento, en la perspectiva de Ponte (2012), pudo enmarcar lo esencial al conocimiento del currículo, como la dimensión que primó; sin embargo, la presencia de la dimensión asociada con el conocimiento de la práctica y de los estudiantes también se destacó, pues fueron mediadoras en las decisiones que los profesores tomaron para diseñar las tareas de aprendizaje (Ponte et al., 2009). En este momento de la tarea, la intervención de la investigadora fue poca, pues los profesores hicieron sus propuestas y mostraron seguridad para diseñar actividades que, desde sus perspectivas, tenían un eminente carácter algebraico. Lo anterior se evidencia en los diálogos descritos en la figura 41.

Ilustración de la balanza



Maritza: *trabajemos ecuaciones con una balanza. Ese tema lo podemos ver en todos los grados, y lo asociamos con problemas y es algebraico por la indeterminación.*

Edier: *es que tienen que ser cosas en las que uno utilice las propiedades, o sea, algo tiene que pasar para que uno tenga que utilizar las propiedades, mire que en eso se fortalece el pensamiento algebraico.*

Gina: *si, es verdad; con la balanza hay que usarlas, les enseñamos que lo que hacen a un lado, lo hacen al otro, siempre, ellos entienden que eso es la propiedad uniforme, si se las mostramos así.*

Julieth: *sí, si lo entenderían, porque es un proceso muy lógico, no es como forzado, sino que se relaciona con la idea de la igualdad.*

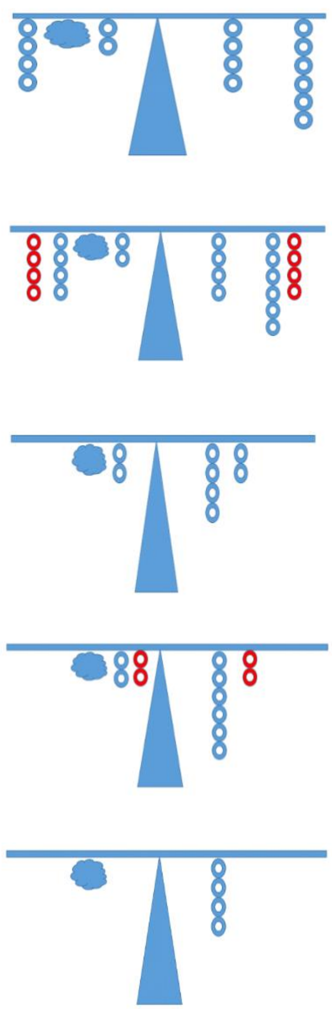
Maritza: *entonces, en la balanza ponemos una bolsita con una cantidad de fichas que ellos no conocen y que tienen que averiguar, y unas fichas que guarden el equilibrio* [Ver ilustración de la balanza].

Gina: *pero ahí es muy fácil, quitan las fichas y listo, no usaron las propiedades.*

Julieth: *sí, la uniforme sí. Si quitan las fichas a un lado y al otro también para, que no se desequilibre.*

Figura 41. Fragmento tomado del archivo de video m3_19_05_2018_min_4.

Con la propuesta diseñada, los profesores consideraron condiciones necesarias tales como: que los estudiantes estuvieran en condiciones de comprender la tarea, adicionalmente, que esta pudiera evidenciar el pensamiento algebraico y que hiciera parte de sus planes de área, como en el caso del algoritmo de la división y de las propiedades. Con estas condiciones, su intención fue plantear una ecuación que requiriera el uso de la propiedad uniforme, del inverso y del neutro; con una orientación al respecto, ofrecida por la investigadora, los profesores complementaron el diseño de su tarea de aprendizaje, la cual posibilitó el llevar a cabo la intención mencionada, tal como se muestra en la figura 42.



Investigadora: *tratemos de relacionar lo que hicieron con las ecuaciones que resolvimos y lo que quieren enseñar a sus estudiantes. ¿Qué es lo que hacían con la ecuación original?*

Edier: *anulamos los elementos que estaban con la incógnita.*

Investigadora: *si, muy bien. Y ¿qué más?, ¿cómo lo hacían?*

Julieth: *operando con el inverso.*

Investigadora: *exacto.*

Investigadora: *y si le proponemos a los niños que unas fichas anulen a otras y que cuando esto ocurra, las pueden retirar.* [esta idea se ilustra en la imagen de la izquierda, donde aparecen fichas rojas, como opuestas a las azules].

Julieth: *sí, ahí está la propiedad uniforme. El inverso también, los niños ya tienen la idea de que unos valores anulan a otros. Sí, esa idea serviría mucho.*

Maritza: *sí, así primero ponen las fichas opuestas, y quitan las fichas a un lado y al otro, para que no se desequilibre.*

Edier: *y que repitan el proceso hasta que la bolsa quede sola; en este ejemplo, sería agregar dos fichas rojas, porque ya se habían anulado de los dos lados, cuatro rojas y cuatro azules.*

Gina: *y apenas retiren dos rojas y las dos azules, a ambos lados, les va a quedar que en la bolsita hay cuatro fichas. Con esto afianzamos lo de las propiedades muy bien.*

Figura 42. Fragmento tomado del archivo de video m3_19_05_2018_min_14.

Aunque en este momento, los profesores solo alcanzan a esbozar la propuesta de la tarea de aprendizaje, son muchos los asuntos susceptibles de análisis que se generan a partir de sus reflexiones; por ejemplo, los objetos matemáticos del pensamiento algebraico se consideran como un elemento que motiva a reestructuraciones curriculares y a modificar la manera de percibir la práctica misma, pues en el cambio de la orientación de la explicación ya se evidencian condiciones para mejorar su práctica profesional. Adicionalmente, la toma de conciencia reflejada en la acción sobre la práctica, parece ser un elemento promotor de la transformación del conocimiento, esto es, un componente consustancial a la naturaleza de la transformación, materializado en el aula. Así, podrían consolidarse la toma de conciencia y la acción sobre la práctica, como factores que son inseparables, flexibles y esenciales en el esquema explicativo buscado en el estudio.

Entre los componentes que determinan la categoría temática para este momento de la tarea, se considera el conocimiento del currículo, como el elemento que enmarcó los procesos de desarrollo que mediaron el trabajo realizado; estos componentes se presentan en la figura 43, donde se puede apreciar el conocimiento de la disciplina, a través de las características del pensamiento algebraico y las formas de pensamiento algebraico (Radford, 2010a; 2010b; Vergel, 2014; Vergel y Rojas, 2018), y cuya presencia es indispensable para tomar decisiones sobre la práctica, dotar de sentido los conceptos y propiedades estudiados e identificar medios semióticos. Adicionalmente, la reflexión mediada por la manifestación de un estado de conciencia, en el cual las concepciones se modifican y también propician cambios, hace parte de las categorías emergentes en este apartado.

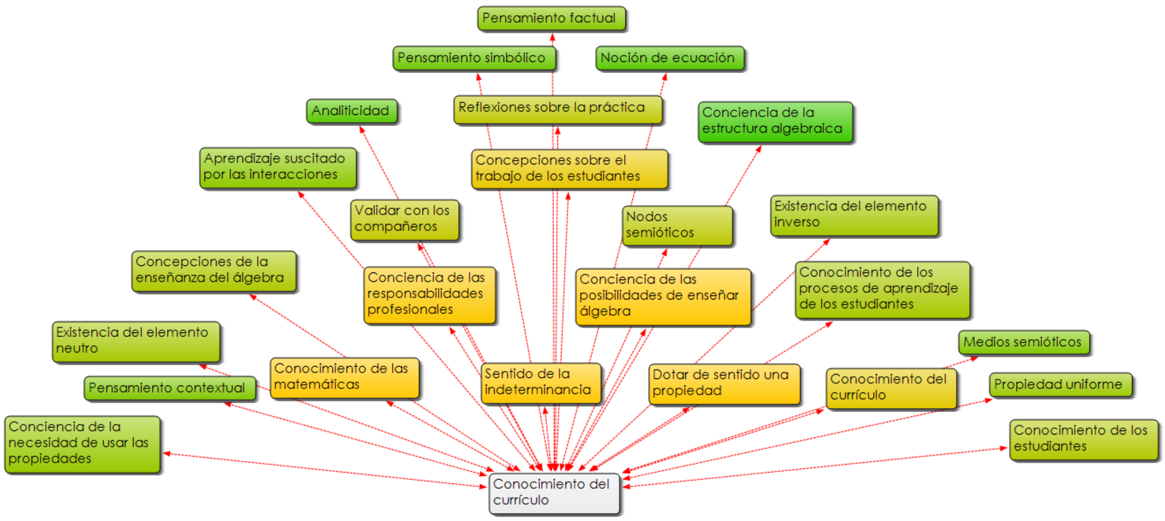


Figura 43. Categorías temáticas emergentes para conocimiento del currículo.

La tarea de formación cierra con las reflexiones de los profesores en términos de la valoración del trabajo realizado, los nuevos aprendizajes, y el posible impacto que esto pudiera tener en sus aulas. Un elemento fue destacado en este momento: la posibilidad de interactuar en estos contextos y contar con apoyos profesionales que permitieron ampliar sus perspectivas del conocimiento de las matemáticas. Sumado a lo anterior, cambios en las concepciones fueron asuntos que también se mencionaron, exaltando, por ejemplo, un aspecto particular analizado en el friso, que contrastó ideas iniciales y finales, en relación con la posibilidad de promover pensamiento algebraico en primaria; este último asunto se presenta en la figura 44.

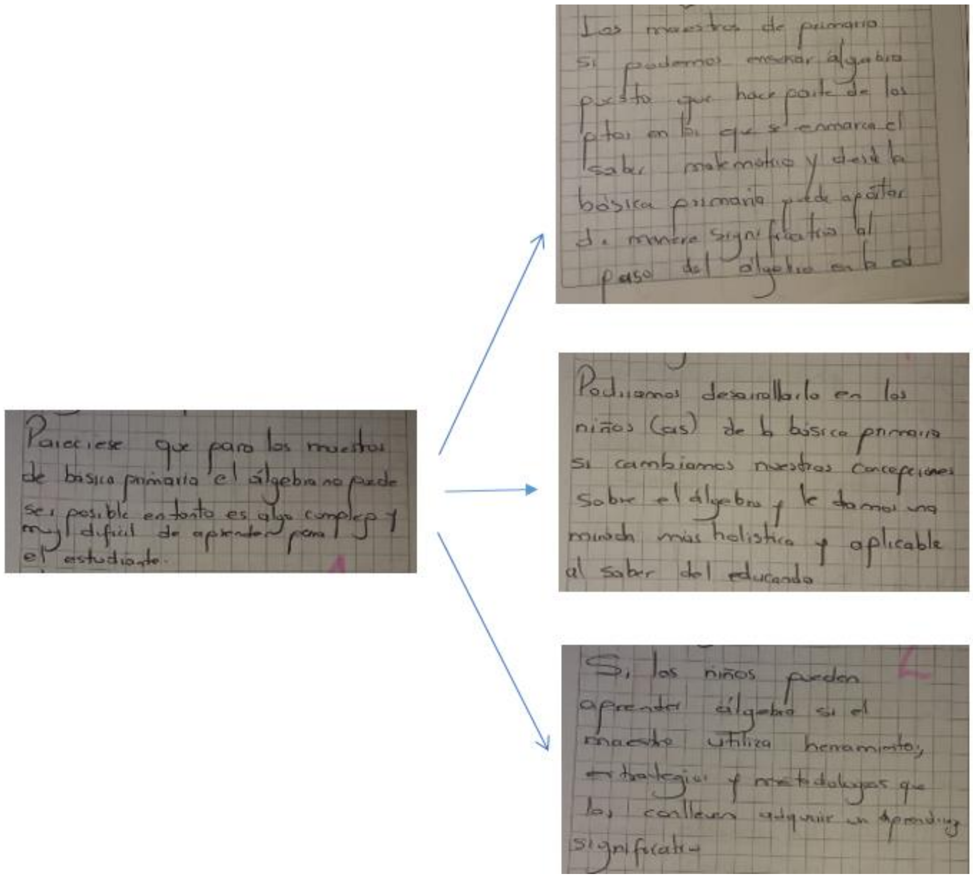


Figura 44. Apartados tomados del friso de la profesora Julieth.

El papel que los profesores confieren a las interacciones lo asocian con que, de no haber tenido la oportunidad de trabajar en estos espacios con sus compañeros, entonces los conceptos aprendidos, los diálogos sostenidos y las propuestas elaboradas para el aula, no se habrían refinado mediante un proceso de validación y confrontación, como ocurrió en el trabajo de campo; el anterior es un asunto apreciado y valorado por los profesores, quienes entienden que el conocimiento se convierte en un constructo social, mediado por la experiencia y susceptible de cambios (Radford, 2013b).

Particularmente, el saber algebraico se ha configurado en estos espacios como un componente que motiva la transformación misma del conocimiento profesional, en tanto, ha mostrado procesos evolutivos en el discurso de los profesores, pero la transformación de este saber, como un proceso social (Radford, 2013b; Vergel y Rojas, 2018; Vergel, 2019), se afinca en las interacciones descritas por los profesores, las cuales, en este momento de la tarea, definen la categoría temática descrita a continuación en la figura 45.

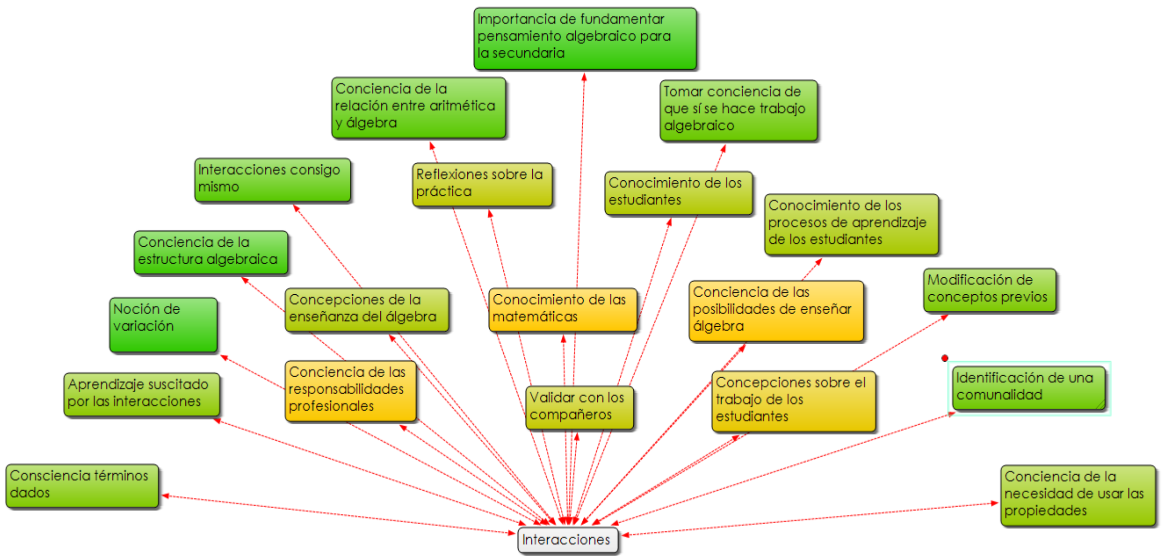


Figura 45. Categorías temáticas emergentes para las interacciones.

La transformación del conocimiento profesional podría vislumbrarse como un proceso paulatino y cíclico, en el cual, los cambios que se consolidan con el tiempo, se configuran como progresivos y, parece ser, circundan alrededor de las categorías temáticas que se han definido a lo largo del análisis; en coherencia con lo anterior, lograr una postura explicativa que dé cuenta de cómo el profesor de matemáticas transforma su conocimiento profesional, requiere concatenar todos los componentes que se comportan como catalizadores de dicha transformación, que son consustanciales a este proceso, y que han sido objeto de estudio a lo largo de este capítulo.

4.3.3.3. Inter – análisis para la tarea de formación 3. El desarrollo del inter – análisis referido a la tarea de formación 3, toma como referente todas las relaciones posibles que se pudieron establecer entre las categorías temáticas descritas a lo largo del proceso de codificación axial. Así, se ponen en consideración el conocimiento de las matemáticas, de los estudiantes, del currículo y las interacciones, como elementos consustanciales y componentes posiblemente estructurantes de una elaboración explicativa que pueda dar cuenta de cómo el profesor de matemáticas transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano. La figura 46 reúne las categorías que se relacionan en las tematizaciones objeto de análisis en este apartado.

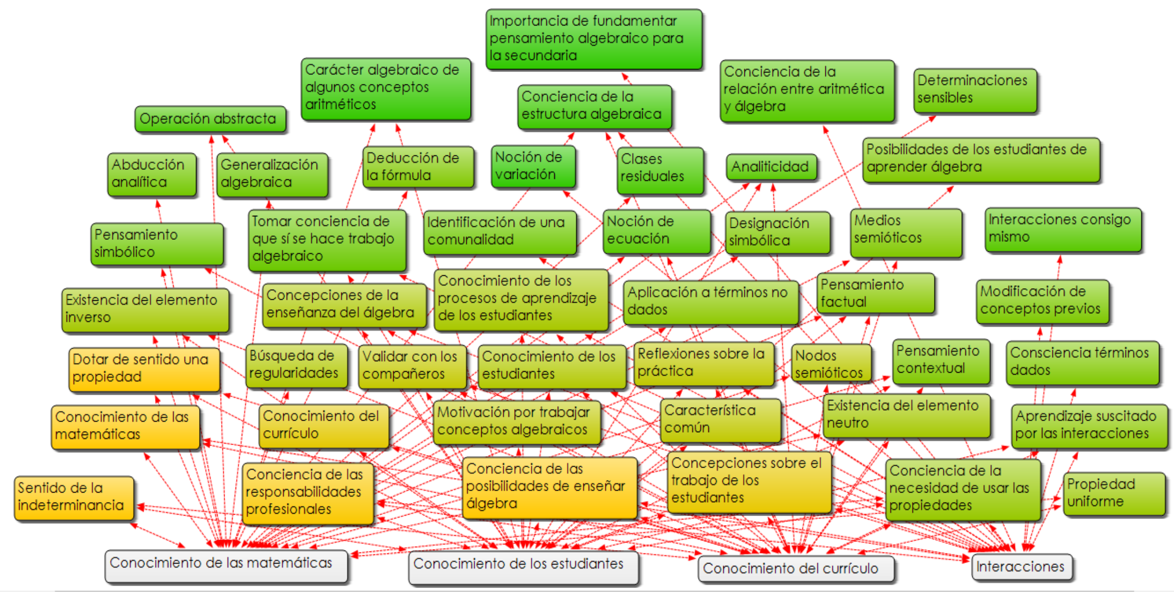


Figura 46. Inter – análisis del desarrollo de la tarea de formación 3.

En el marco de las ideas expuestas, la tarea de formación (TF$_3$), en la línea del conocimiento de las matemáticas, propició procesos de representación, abstracción y reconocimiento de una estructura, sus propiedades y la solución de ecuaciones, como elementos inspiradores para las prácticas y para la reflexión acerca del trabajo con y de los estudiantes. De manera complementaria, la toma de decisiones y ejecución de acciones materializadas en el currículo, también fueron objeto de análisis, como una manifestación de posibles cambios en el conocimiento profesional, junto con el reconocimiento de las interacciones, valoradas por los profesores como incentivadoras de aprendizajes. El mapa conceptual presentado en la figura 47, evidencia una interpretación de las posibles relaciones existentes entre los componentes descritos en este apartado.

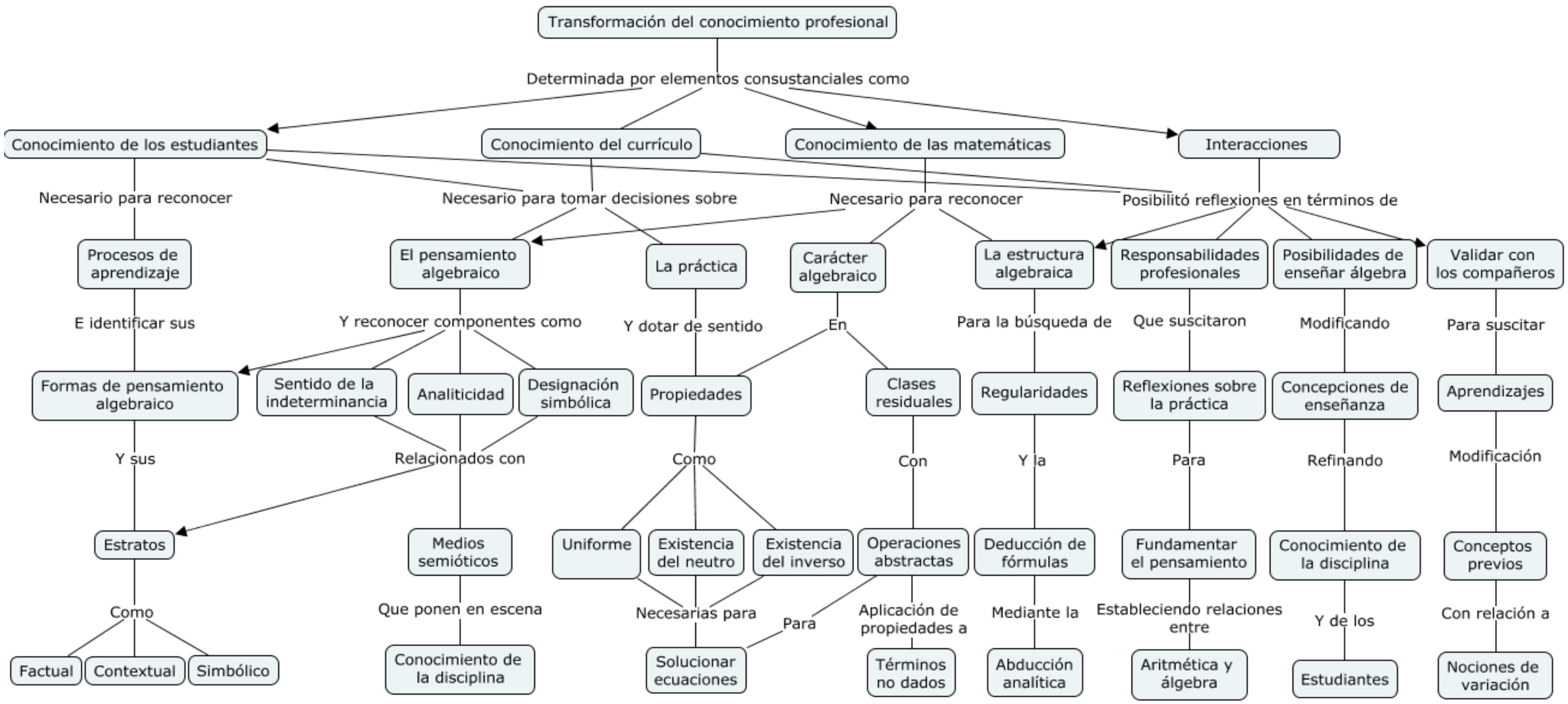


Figura 47. Elaboración propia. Mapa conceptual elaborado para el inter – análisis del desarrollo de la tarea de formación 3.

El desarrollo del análisis parece revelar la presencia de elementos estructurantes necesarios para dilucidar cómo el profesor transforma su conocimiento profesional; en consecuencia, emergen elementos que son inherentes a la transformación y que se materializaron en la actuación de los profesores, como un reflejo de su conocimiento de los estudiantes, de las matemáticas, del currículo y de sus interacciones en distintos escenarios. Las relaciones existentes entre los elementos mencionados se consolida mediante vínculos dialécticos, donde unos se integran con otros; así, por ejemplo, conocer a los estudiantes se revierte en la necesidad de decidir sobre el currículo, posibilitar reflexiones en términos de las interacciones y reconocer aquello que es característico del pensamiento algebraico. Igualmente, conocer y pensar sobre el currículo requiere de interacciones mediadas por el conocimiento de las matemáticas y la acción sobre la práctica.

Con relación al conocimiento de los estudiantes, parece ser que los profesores evidencian cambios tanto en la planificación para la enseñanza, como en el acto mismo de enseñar; lo anterior, también podría ser un indicio de cómo el profesor transforma su conocimiento de las matemáticas, pues una tarea como la propuesta, para resolver ecuaciones en una estructura algebraica no convencional, pone de manifiesto "[...] la capacidad de un maestro para transformar el conocimiento de los contenidos que posee en formas pedagógicamente poderosas" (Shulman,1986, p. 15). En consecuencia, se pudo observar que los profesores enfrentaron el reto de presentar nuevas ideas a sus estudiantes, lo cual implicó la elaboración de tareas de aprendizaje, la modificación de explicaciones y, la búsqueda de ejemplos e ilustraciones, con un enfoque diferente al que usualmente utilizaban. Este tipo de elaboraciones pudieron evidenciar cambios, manifiestos en la práctica, las decisiones sobre el currículo y, en consecuencia, en el conocimiento profesional de los profesores.

Adicionalmente, parece ser que los profesores pudieron modificar la atención puesta sobre las acciones realizadas por los estudiantes y la posible promoción de su pensamiento algebraico. Esto pudo conducir a que el conocimiento de los profesores acerca del trabajo que realizan sus estudiantes tenga un enfoque diferente; así, las interacciones en el aula pueden llegar a dar cuenta de las posibilidades que tienen los estudiantes para pensar en relaciones de variación, cambio y estructuras, siempre y cuando hubiera una tarea adecuada que posibilitara dichas manifestaciones, debido a que se "requiere una reforma mental de cómo se debe enseñar la aritmética, así como una mejor identificación de formas de desarrollar el pensamiento algebraico a partir de temas aritméticos tradicionales" (Cai y Knut, 2011, p. 3).

El tránsito por cada momento de la tarea de formación (TF_3), posibilitó que los profesores exhibieran procesos de representación, abstracción, visualización, clasificación y generalización, los cuales podrían vincularse, además, con formas y características del pensamiento algebraico (Radford, 2010a, 2011). La tarea, que en uno de sus momentos buscó que los profesores lograran resolver ecuaciones en una estructura no convencional $<Z_6, *>$, suscitó el desarrollo de procesos que exigían la manifestación del pensamiento algebraico de los participantes. Por lo tanto, resolver la ecuación implicó entender asuntos como:

- El carácter algebraico del algoritmo de la división para comprender el comportamiento de los residuos y definir un conjunto de elementos con clases residuales, específicamente para $[Z]_6$.
- La definición de la operación asterisco (*), que indicaba que el resultado de $a * b$, para a y b pertenecientes al conjunto $[Z]_6$, es r. Donde r es el residuo que resulta de la división $(\frac{a+b}{6})$.
- La construcción de una representación tabular para visualizar todos los resultados posibles al operar los elementos del conjunto.
- La definición de las propiedades que se cumplen en el conjunto $[Z]_6$ y que se logran visualizar en la representación tabular, existencia del elemento neutro y de los elementos inversos para cada a perteneciente a $[Z]_6$.

- La comprensión del comportamiento del elemento neutro (0) de la estructura y de los elementos inversos para cada *a* perteneciente a $[Z]_6$.
- La representación tabular para abstraer los resultados de las operaciones, identificar el elemento neutro y los inversos.
- El uso de las propiedades para resolver una ecuación, a través de la propiedad uniforme.

Las acciones anteriormente descritas fueron necesarias para lograr el alcance de la tarea en cuestión y propiciar posibles manifestaciones de cambios en el pensamiento algebraico, asociadas, no solo con la dimensión del conocimiento matemático de los profesores, sino también con el del currículo, toda vez que, implicó estudiar y leer el currículo que opera en las aulas de clase con una mirada global, lo que admitió nuevas formas de trabajo y reestructuraciones, con miras a llevar a los estudiantes a trascender técnicas de conteo, reconociendo que existe un potencial inherente en los estudiantes para comprender conceptos algebraicos (Vergel, 2015a; Aké, 2014).

4.3.4. Tarea de formación 4. El desarrollo de la tarea de formación consideró unas reflexiones iniciales que dieron cuenta de cómo se sintieron los profesores llevando a cabo la planeación propuesta en encuentros pasados. Con la proyección de los videos, donde se observó a los estudiantes resolver ecuaciones y hacer uso de las propiedades para ello, se propiciaron distintas reflexiones (M_1) en términos de las dimensiones que caracterizan el conocimiento profesional, en la línea de Ponte (2012).

Durante el desarrollo de la tarea, el momento previsto para la realización de una actividad de carácter algebraico (M_2), estuvo mediado por procesos de generalización. Para ello, se orientó la elaboración de un arreglo piramidal[2], en el cual, a través de dobleces de papel y cortes se generaron figuras que guardaban regularidades en su configuración. Las regularidades en mención se lograron mediante una construcción realizada con una hoja de block que se dobló, inicialmente en ocho partes iguales; posteriormente, se recortó por el centro, como se indica en la figura 48. Este proceso se reiteró dos veces más.

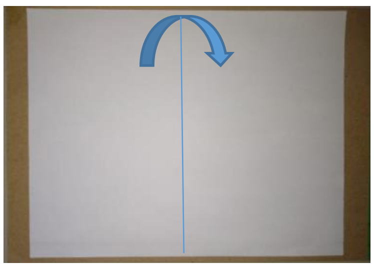
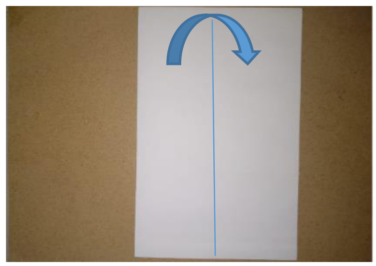
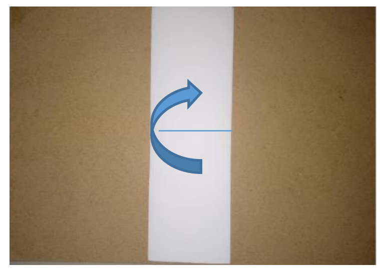


Figura inicial. Doblez 1.



Doblez 2.



Doblez 3.

Figura resultante después del doblez 3.

Líneas marcadas en la figura inicial, después de cada doblez.

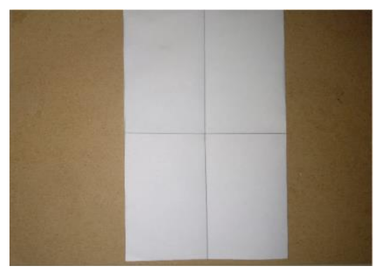
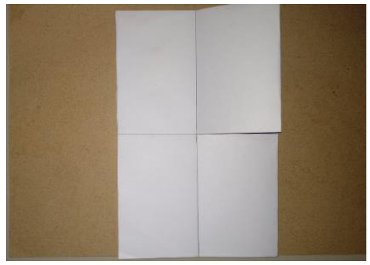


Figura inicial, doblada en la mitad.

[2] La construcción fue tomada y adaptada de http://divermates.es/blog/triangulo-sierpinski-kirigami/.

Corte en el centro de la figura inicial.



Doblez del área recortada.

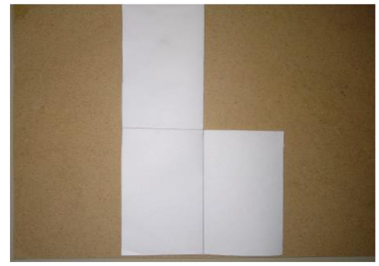
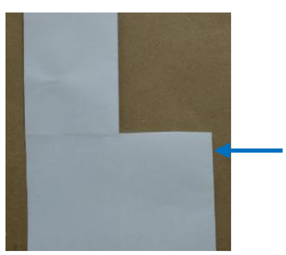
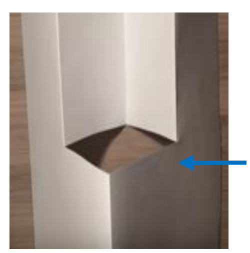
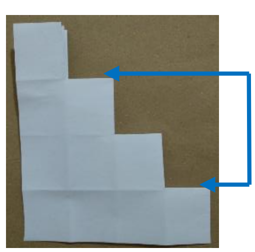
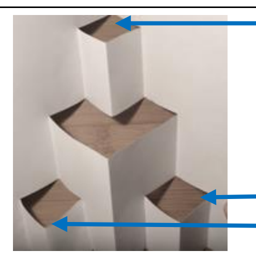


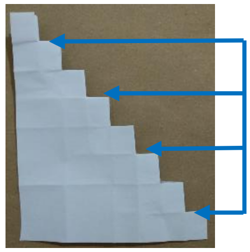
Figura resultante.

Figura 48. Ilustración del proceso de construcción del arreglo piramidal.

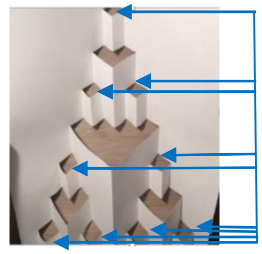
La actividad continuó con la observación de los prismas de base cuadrada, generados a partir de los cortes; posteriormente, se visualizaron unos escalones constituidos por estos, producidos en el arreglo; se finalizó con la medida de áreas de las caras laterales y volúmenes para los cuerpos en mención. Esta construcción se ilustra a continuación, en la figura 49.

Posición Figura	**Número de cortes**	**Número de prismas**
0	 **1**	 **1**
1	 **2**	 **3**

2



4



9

Figura 49. Ilustración de los cortes y cuadrados resultantes en la pirámide.

La búsqueda de patrones, a través de regularidades, se constituyó en el componente que orientó la planeación de los profesores (M_3). Para ellos, la construcción del arreglo piramidal podía ser llevada al aula como una estrategia que permitiría buscar patrones. Sin embargo, este no fue el único componente de la planeación, pues uno de los problemas planteados en los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016, p. 8), fue tomado como objeto de reflexión y referente de planeación. El problema sugiere que, a partir de la realización de la actividad propuesta (ver figura 50), se encuentren patrones que permitan inferir regularidades, las cuales fueron determinadas por los profesores. Se ilustra, a continuación, la situación mencionada en la figura 50.

- Si se presiona 5 + 2 = = = ¿Cuál sería el resultado?
- ¿Cuál sería el resultado si en la calculadora se presiona 4 + 3 = = = = = =?
- Describe las acciones que hace la calculadora. Si se digita el número 3 y luego se digita + 5 y se presiona la tecla *igual* diez veces, ¿cuáles números aparecerán en la calculadora cada vez que se digita un "*igual*"?

Figura 50. Apartado de una situación propuesta en los Derechos Básicos de Aprendizaje, p. 8.

Finalmente, el encuentro de formación cierra con unas reflexiones que enmarcan el desarrollo de la tarea (M_4), y el proceso formativo en general. Las líneas de reflexión propuestas se enfocaron en términos de cómo habían iniciado su proceso formativo y cómo lo finalizaban. Posteriormente, los diálogos se dieron en torno a las dimensiones del conocimiento profesional, al discutir acerca de los componentes que inciden en su labor profesional; a partir de esto, asuntos como: el conocimiento de las matemáticas, del currículo, de los estudiantes y de la práctica, fueron reconocidos por los profesores como objetos inherentes a su labor, que estuvieron presentes y fueron refinados durante el desarrollo del trabajo de campo.

4.3.4.1. Proceso de codificación abierta tarea de formación 4. Durante el proceso de codificación abierta, se identificaron en los diferentes registros (videos, entrevistas, producciones de los profesores), unidades de análisis; a cada una, se le asignó un código acorde con su naturaleza y lo que pudiera representar para analizar cómo el profesor transforma su conocimiento profesional. Posterior a este proceso, los códigos que guardaban relación, según sus propiedades y dimensiones, fueron adjudicados a una o varias categorías que enmarcaban lo esencial de las unidades de análisis. Para esta tarea de formación, el proceso de codificación, mediado por el uso del software Atlas.ti, generó las categorías que se presentan en la tabla 32.

Tabla 32. Categorías emergentes en el proceso de codificación abierta para la tarea de formación 4

Abducción analítica
Analiticidad
Aplicación a términos no dados
Aprendizaje suscitado por las interacciones
Búsqueda de regularidades
Característica común
Carácter algebraico de algunos conceptos aritméticos
Concepciones de la enseñanza del álgebra
Concepciones sobre el trabajo de los estudiantes
Conocimiento de las matemáticas
Conocimiento de los estudiantes

Conocimiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes
Conocimiento del currículo
Conciencia de la relación entre aritmética y álgebra
Conciencia de las posibilidades de enseñar álgebra
Conciencia de las responsabilidades profesionales
Conciencia términos dados
Deducción de la fórmula
Designación simbólica
Determinaciones sensibles
Dotar de sentido una propiedad
Generalización algebraica
Identificación de una comunalidad
Inferir n-ésima posición
Interacciones consigo mismo
Medios semióticos
Motivación por trabajar conceptos algebraicos
Noción de variación
Pensamiento contextual
Pensamiento factual
Pensamiento simbólico
Posibilidades de los estudiantes de aprender álgebra
Nodos semióticos
Reflexiones sobre la práctica
Sentido de la indeterminancia
Tomar conciencia de que sí se hace trabajo algebraico
Validar con los compañeros

Fuente. Elaboración propia. Categorías emergentes en la tarea de formación 4.

Las categorías que emergieron para esta tarea se reafirmaron, pues ya se habían evidenciado en tareas anteriores; la única categoría nueva fue inferir n-ésima posición; adicionalmente, con relación al desarrollo de otras tareas, el número de categorías fue menor y la información nueva que se propició reafirmó la postura que se viene elaborando a lo largo del presente análisis, para dar respuesta a la pregunta de investigación; lo anterior puede ser un indicador de que se ha alcanzado la saturación teórica y que, la presencia de nuevos datos no aporta información adicional (Vasilachis, 2006).

La fundamentación y densidad arrojada por el software Atlas.ti, da cuenta de que en la mayoría de las categorías se logra la fundamentación requerida para proponer una postura teórica explicativa (relacionada con color amarillo), y que las unidades de análisis que las componen, son suficientes para propiciar relaciones y elaboraciones teóricas entre ellas, como se muestra en la figura 51. A la luz de la teoría fundamentada, se alcanza una saturación teórica, y se confirma que los datos ya han aportado información suficiente para la elaboración de la postura buscada (Vasilachis, 2006); en coherencia con lo anterior, la figura 51 presenta las relaciones establecidas entre las categorías objeto de estudio en este apartado.

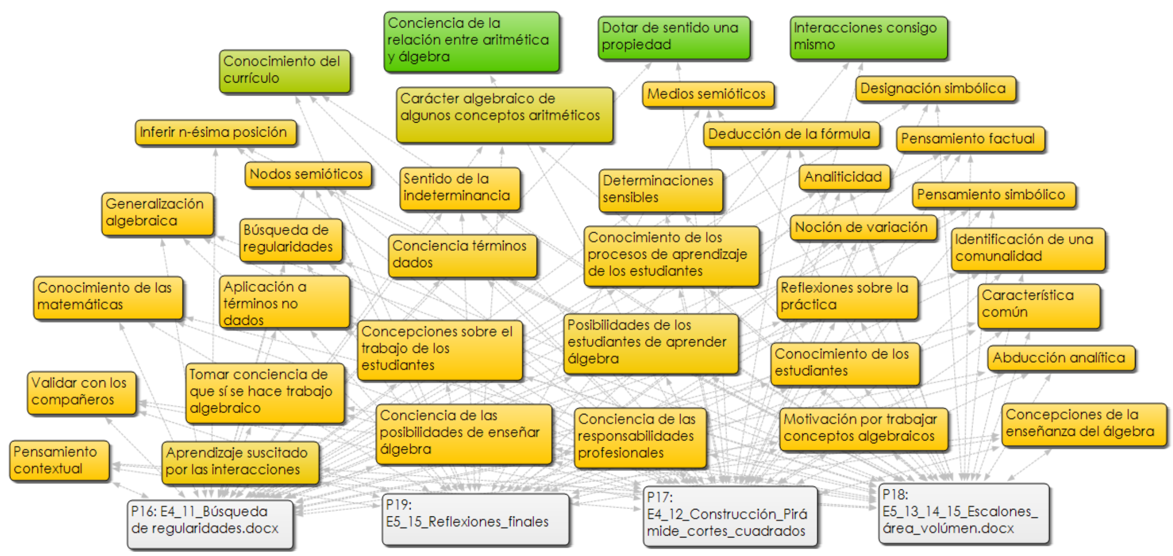


Figura 51. Categorías emergentes para el proceso de codificación abierta de la tarea de formación 4.

Con las categorías descritas, se observa que, asuntos como las características del pensamiento algebraico (Radford, 2010a, 2010b; Vergel 2014), evidenciadas a través del sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica, son reconocidos por los profesores. Adicionalmente, formas de pensamiento algebraico (Radford, 2010a, 2010b; Vergel 2014), como el contextual, factual, simbólico y las generalizaciones factuales y contextuales, que también se pusieron de manifiesto en las elaboraciones de los profesores, les permitió tener una de idea de cómo estratificar su pensamiento y el de sus estudiantes. A todos estos elementos se les suma la presencia de otros que ya se han descrito en tareas de formación previas, como los asociados con concepciones, toma de conciencia y las dimensiones del conocimiento profesional.

4.3.4.2. Proceso de codificación axial para la tarea de formación 4. El primer momento de la tarea se remitió a analizar el desarrollo de las clases grabadas por los profesores. La tarea de aprendizaje para los estudiantes planteó la solución de una ecuación, con uso de una balanza, a través de la cual se ilustró el comportamiento de la propiedad uniforme. En la figura 52 se ilustran apartados de lo ocurrido en una de las clases, durante el desarrollo de la tarea de aprendizaje para los estudiantes, con relación a la propiedad uniforme.

Maritza*: para que la balanza esté en equilibrio, estos dos lados tienen que ser iguales, es decir, esta parte es igual a esta parte. Ahora, si yo quito de aquí algo, ¿qué pasa? Le quito algo ¿entonces qué le pasa a la balanza?*

Estudiantes: *se desequilibra.*

Maritza*: se desequilibra, cierto. Pero entonces, ¿qué hago para equilibrarla? Si aquí quito algo, la desequilibro, ¿qué tengo que hacer para equilibrarla?*

Estudiantes*: quitar otros.*

Maritza*: ¿qué hago al otro lado? Tengo que hacer lo mismo, para equilibrarla tengo que hacer lo mismo a ambos lados, es decir, yo voy a quitar algo de este lado, esto se me va a desequilibrar, entonces, si lo quito acá, para que no se me desequilibre, ¿qué tengo que hacer?*

Estudiantes: *quitarle al otro lado.*

Maritza*: muy bien, exacto, y se conserva, entonces quito aquí y quito aquí y ahí no se me desestabiliza la balanza. Y pasa lo mismo si agrego fichas aquí, también tendría que hacerlo al otro lado. Esto que acabo de mostrar se llama propiedad uniforme, ¿cómo así que uniforme? Es para conservar la uniformidad, lo que hago aquí, también lo hago aquí, o sea uniforme, todo parejo, entonces aquí hago*

algo, y aquí hago algo ¿sí? Esta es la propiedad uniforme.

Miren que cuando yo hago ese proceso conservo el equilibrio de la balanza. Ahora, pongo acá fichas, y acá también, miren que no se está desequilibrando. Ya usamos una propiedad, que es la propiedad uniforme.

Figura 52. Fragmento tomado del archivo de video m3_16_06_2018_min_14.

Con relación a las reflexiones que suscitó la visualización de los videos, en los cuales los profesores llevaron a cabo su planeación, se alcanzan a destacar que: los profesores reconocen el carácter algebraico de la tarea propuesta, a través de sus componentes analíticos, donde la indeterminancia, propia de objetos algebraicos como incógnitas y variables (Radford, 2010a), queda expuesta mediante las posibilidades de significación que los estudiantes confieren a los signos. En esta línea, los distintos medios semióticos posibilitaron representaciones que se vinculan con "otros procesos como simbolizar, codificar, decodificar, visualizar, modelar, y no se presenta de manera aislada, sino que habitualmente aparece junto con los procesos de abstraer, clasificar, sintetizar, conjeturar y generalizar" (Luque, Jiménez y Ángel, 2009), poniendo de manifiesto estratos de pensamiento (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2014, 2015a, 2018). El desarrollo de la tarea continúo con el planteamiento de una situación, en la cual los estudiantes observaron una balanza en equilibrio; esta tenía en uno de sus brazos siete fichas y, en el otro una bolsa y tres fichas. Durante el desarrollo de la tarea de aprendizaje para los estudiantes, relacionada con la solución de una ecuación, los profesores plantearon un reto, como se muestra en los diálogos transcritos en la figura 53.

Maritza*: vamos a jugar con la balanza, gana el que adivine cuántas fichas tenemos en la bolsa; les voy a poner un ejemplo muy sencillo y van a estar muy atentos a las reglas del juego.*

¿Cuáles son las reglas? son las siguientes.

1) Si en alguno de los procesos, se desequilibra la balanza, perdemos.

2) Para retirar las fichas de la balanza, tenemos una condición, o sea que no podemos quitar fichas porque sí; vamos a imaginar que cada ficha se puede quitar si viene otra por ella, y la anula; ¿Cómo así? ¿Recuerdan cuando vimos que existen unos números que anulan otros? Eso va a pasar en este juego. Entonces, una ficha de estas (enseña una ficha roja) va a anular a una ficha café; ¿qué vamos a hacer entonces? Las fichas rojas las vamos a poner en la balanza para anular o quitar las que tengamos; repito, no podemos quitar fichas así nada más, no, solo quito una ficha café, cuando aparece una roja y se la lleva.

Estudiantes*: otra vez profe.*

Maritza*: Listo, en este juego vamos a poner condiciones, yo no puedo quitar una ficha simplemente, yo la tengo que anular, y para anularla voy a usar estas rojas; si pongo una roja aquí, también la pongo aquí, y como una roja, anula a una café, ahí sí las puedo quitar. ¿Entendimos? Hagamos el ejemplo.*

Maritza: *miren que, en este lado, tenemos una bolsa y tres fichas, y al otro lado, tenemos siete fichas. ¿cómo hago para saber cuántas fichas tengo en la bolsa?*

Estudiantes*: quitar otras fichas.*

Maritza*: sí, pero respetando las condiciones del juego, ¿qué hago en ambos lados? Tengo que hacer lo mismo.*

Estudiantes*: quitarle en los dos lados.*

Maritza*: ¿cómo dijimos que quitábamos las fichas?*

Estudiantes: *con las rojas.*

Maritza*: ¿cuántas fichas rojas necesitamos?*

Estudiantes: *tres rojas*

Maritza*: tres a ambos lados.*

Estudiantes: *sí.*

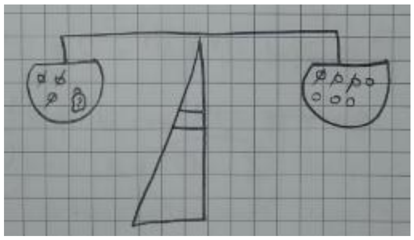
Producción de un estudiante	
	Maritza: *Vamos a ponerlas sin perder el equilibrio, colabórame tú. Muy bien, entonces quitemos las que se han anulado. Perfecto. ¿Qué nos quedó?* Estudiantes: *la bolsa sola. Y cuatro fichas.* Maritza: *entonces ¿Cuántas fichas hay en la bolsa?* Estudiantes: *¿cuatro?* Maritza: *voy a abrir la bolsa para verificar. Sí, muy bien, son cuatro; ahora, vamos a dibujar lo que entendimos.* [La profesora compartió la producción de uno de los estudiantes, la cual es presentada en esta figura].

Figura 53. Fragmento tomado del archivo de video m3_16_06_2018_min_14.

Las reflexiones que se propiciaron en torno a la observación de los videos, refleja componentes del conocimiento profesional, en el cual, el conocimiento de la disciplina, específicamente en la línea del pensamiento algebraico, se refina gracias a la toma de conciencia de la necesidad de dotar de sentido las propiedades que se estudian en la educación primaria; consecuentemente, otro de los componentes analíticos del pensamiento algebraico, la analiticidad, se manifestó como un "proceso en el cual las cantidades indeterminadas y sus operaciones se manejan de manera analítica y, aun cuando estas cantidades no son conocidas, se suman, restan, multiplican, dividen, etc., como si fueran conocidas" (Vergel, 2019, p. 4). En lo que se refiere a la designación simbólica, como una forma de nombrar objetos algebraicos (Vergel, 2014, 2016a), los profesores aceptaron que el simbolismo es solo una de las formas de expresar la idea de variable, y que los estudiantes pueden pensar algebraicamente en ausencia de este (Radford, 2010b).

Tanto la toma de conciencia, la presencia de las interacciones, los cambios en las concepciones, en el conocimiento de las matemáticas, del currículo y, en la motivación, configuraron las categorías que emergieron durante este espacio, y se enmarcaron en una categoría temática denominada reflexión-acción, pues lo que se evidencia es una toma de conciencia que se empieza a reflejar mediante la acción, materializada en el trabajo que se realiza con los estudiantes. En la figura 54 se presentan, de manera detallada, las categorías en mención.

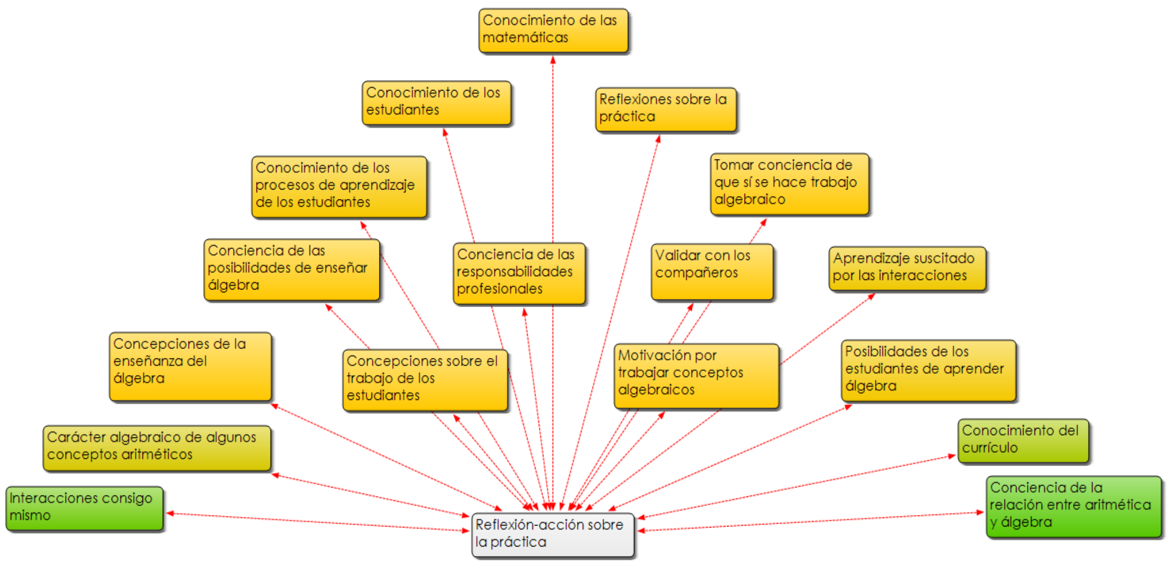
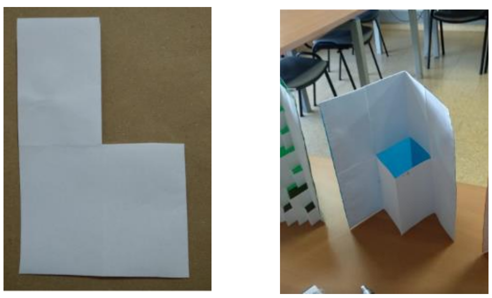


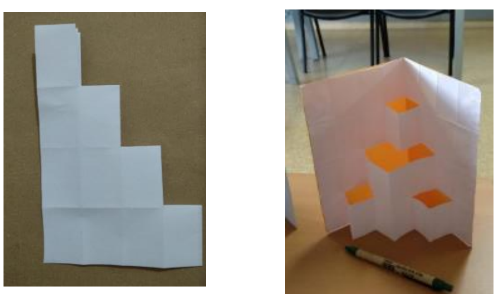
Figura 54. Categorías temáticas emergentes para la reflexión-acción sobre la práctica.

Considerar cómo el profesor transforma su conocimiento profesional, en correspondencia con la categoría temática denominada reflexión-acción, permitió vislumbrar que la transformación, objeto de análisis, debe estar materializada en la acción, y antecedida por la toma de conciencia como elemento mediador de las decisiones que repercuten en la labor docente. En esta línea, en la postura explicativa se perfila la incidencia de un profesor consciente de sus responsabilidades profesionales y todo lo que ello implica, de la necesidad de cambiar paradigmas y concepciones, de refinar su conocimiento de las matemáticas, de actuar a la luz del currículo, de los intereses de los estudiantes y la mejora de su práctica.

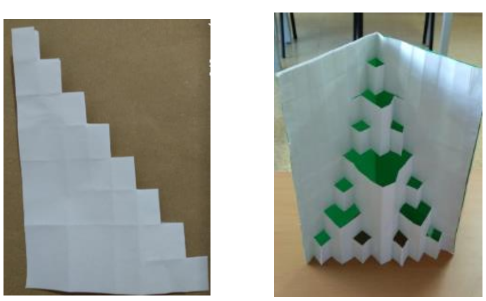
El desarrollo de la tarea de formación continuó con una actividad de carácter algebraico; en ella, los profesores hicieron un arreglo piramidal, en el cual empezaron a buscar regularidades. La intención de la actividad fue ofrecer un recurso concreto, de fácil construcción y en el cual se pudieran explorar distintas generalizaciones, inicialmente cercanas y, posteriormente, para términos n-ésimos. Los primeros patrones que se empezaron a explorar, fueron representaciones para 2^n y 3^n, que se utilizaron en otras deducciones. La figura 55 muestra las percepciones de los profesores durante el desarrollo inicial de la actividad, en la cual se sugirió encontrar las regularidades guardadas en los cortes y los prismas que estos generaban.



Edier: *yo hice un arreglo por cada instrucción y vi esto: en un corte, un prisma con base cuadrada.*

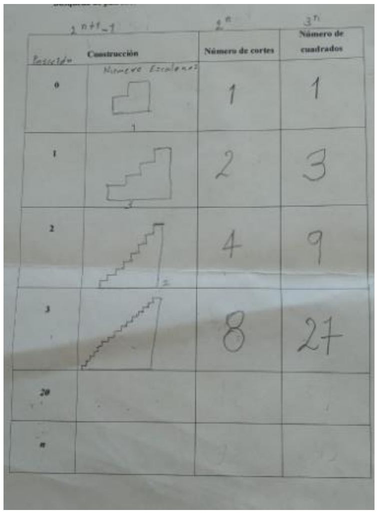


Maritza: *En el segundo arreglo, repetí el primer corte y luego hice dos cortes más, ahí ya fueron tres prismas.*



Gina: *y para el último, repetimos los anteriores procesos, e hicimos cuatro nuevos cortes, me aparecieron nueve primas.*

Investigadora: *muy bien, y cuando registraron en la tabla los valores indicados, ¿qué observaron?, especialmente con el valor 20, que les pedían allí, y qué pasa cuando les pedían hacer n cortes, ¿qué entendemos que hay que hacer en ese último caso? ¿Qué significa la n?*



Julieth: *completar la tabla fue fácil, era solo contar los cortes y los cuadrados, yo también lo dibujé, incluso hice una construcción más, y me resultaron ocho cortes y 27 prismas, pero de ahí en adelante no se podía seguir haciendo, el papel ya no se dejaba doblar, no cortar.*

Investigadora*: muy bien; y ¿con relación al valor 20 que hicieron?*

Gina: *ya no se podía hacer con la construcción.*

Edier: *pero encontramos que se duplicaba con el anterior, dos, cuatro, ocho; y los cuadrados se triplicaban, tres, nueve, 27, esa era como la tendencia.*

Investigadora: *es cierto lo que han inferido; según lo que dicen, entonces necesito saber el resultado anterior, es decir 19, para encontrar el número de cortes en la posición 20.*

Maritza: *sí, así es, siempre es dos por el anterior resultado.*

[Los profesores coincidieron con esta afirmación].

Investigadora: *eso es verdad, pero tener como referente ese valor anterior, ¿qué tan conveniente puede ser?*

Julieth: *nos toca hacerlos todos.*

Investigadora: *es cierto, y entonces ¿será posible encontrar una generalidad? Para que no tengamos que hacer todos los valores ¿qué piensan?*

Gina: *como una fórmula, yo creo que sí.*

Investigadora: *pensemos en lo que mencionaron acerca de duplicar y triplicar cada valor. Tienen un 2, luego un 4 que es 2x2, luego un 8, que es 2x2x2, ¿qué notan?*

Maritza: *que el dos siempre aparece, es recurrente.*

Investigadora: *muy bien. ¿Cómo quedaría con el tres?*

Edier: *3, 3x3, 3x3x3, 3x3x3x3, sí, sí da.*

Gina: *sí señor, pero entonces, con el 20, ¿cuántas veces?*

Investigadora: *esa pregunta es clave. ¿Ustedes qué piensan?*

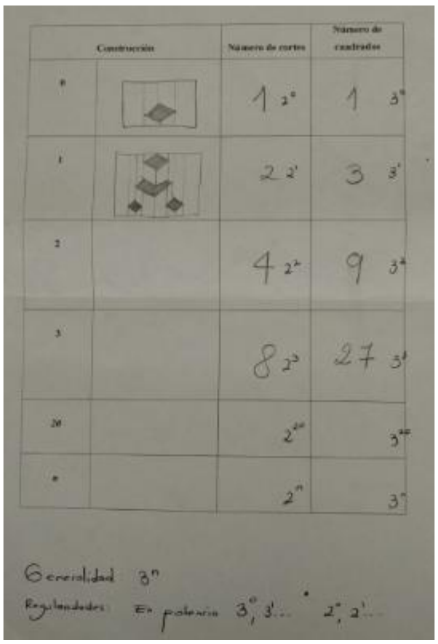
Gina: *que van en potencia; esto sería tres a la uno, esto sería tres a la dos, tenemos tres a la tres.*

Investigadora: *es correcto. Observen que empezamos a encontrar regularidades, si podemos llegar a un punto en el que fijemos una regularidad y a partir de esa abstraer lo que se cumple para todos, podríamos entender cuál es la tendencia, de la que hablaba Edier, ¿qué es lo que sigue pasando?*

Maritza*: parecen potencias, de dos y de tres.*

Investigadora: *muy bien, pero hay un elemento clave en esas potencias, pensemos en qué pasa con la posición, con relación a 0, 1, 2, 3, 20, y "ene" (n).*

[Los profesores piensan un rato y discuten al respecto hasta concluir ideas como las siguientes]



Julieth: *entonces, uno siempre va tener que encontrar una relación para que estos valores que encontramos acá tengan asociación con esa posición. Para este ejercicio, el exponente uno se relaciona esta posición uno, como dos elevado a uno, dos elevado a la tres, y así sucesivamente.*

Maritza: *¿cómo se genera ese uno en relación con esa posición cero?, ¿y en relación al dos, y al tres? ¿Uno a la cero? Pero entonces el dos sale de la fórmula.*

Investigadora: *¿Cuánto es uno elevado a la cero?, ¿dos elevado a la cero?, ¿tres elevado a la cero?*

Gina: *¿cero?*

Maritza: *uno. Y no se pierden ni el dos, ni el tres de la fórmula.*

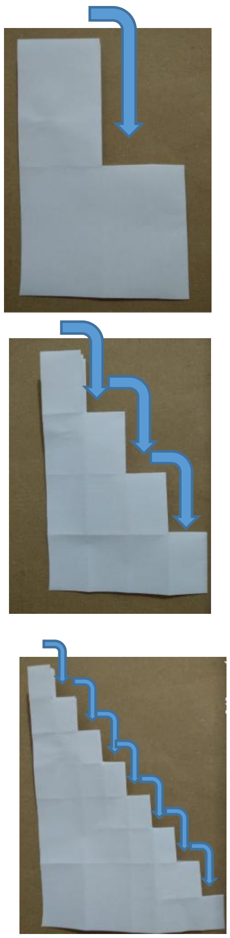
[La investigadora pide pensar en una conclusión acerca de la actividad realizada y da un tiempo para ello]

Julieth: *la posición es relevante e importante porque esto es lo que me va a definir la forma general, la posición n-ésima en la que va a ir cualquier figura. Tres a la cero, tres a la uno, tres a la dos, tres a la tres, y la generalidad sería, tres a la 20.*

Gina: *tres a la n* (3^n)*, y dos a la n* (2^n).

Figura 55. Fragmento tomado del archivo de video m2_07_07_2018_min_14.

Las conclusiones anteriormente obtenidas, fueron un referente en las formulaciones que se hicieron de manera posterior. Estas se enfocaron en buscar regularidades para los escalones que se contaban en cada construcción; la cantidad de escalones correspondía a los valores uno, tres, siete y quince, para las posiciones cero, uno, dos y tres, respectivamente. Para los profesores parecía ser claro que, al igual que en la actividad anterior, existía una forma de representar regularidades encontradas en la construcción, pues se indagaba por la posición 20 y n-ésima. Los diálogos presentados en la figura 56, exhiben las relaciones que los profesores encontraron en la actividad descrita en la figura 55.



Investigadora*: con relación al número de escalones, en la construcción inicial, para la posición cero, ¿cuántos escalones tenemos?*

Profesores: *uno.*

Investigadora: *muy bien; revisemos qué es lo que observamos allí. En la siguiente construcción, para la posición uno, se generan....*

Profesores: *tres.*

Investigadora: *correcto; ¿qué continúa en la posición dos?*

Profesores: *tres.*

Investigadora: *perfecto. ¿Y en la posición 20? ¿Y en la n-ésima posición?*

Edier: *¿cuál es la secuencia que vamos teniendo? ¿será 16?*

Investigadora: *¿por qué 16?*

Edier: *porque ahora era dos, cuatro, ocho, y aquí, es como si a esos se les restara uno.*

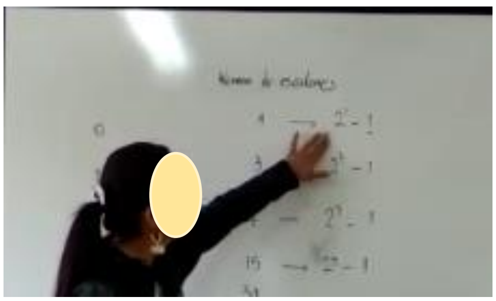
Investigadora: *y, ¿qué pasa con la posición inicial, si le restas uno?*

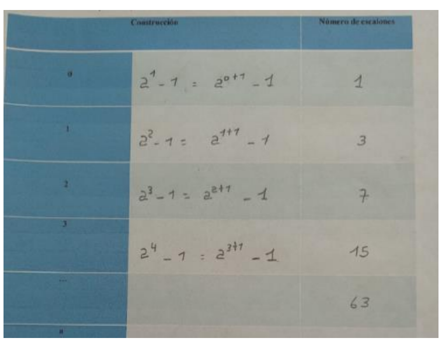
Maritza: *no da, uno menos uno, cero, y tenía que ser un escalón, no cero.*

Investigadora: *vamos a buscar la relación con la n-ésima construcción.*

Figura 56. Fragmento tomado del archivo audio M2_07_07_2018 min 12.

Lograr una relación entre los valores identificados por los profesores, uno, tres, siete, y las posiciones cero, uno y dos, no fue un asunto simple y tomó varias discusiones llegar a una conclusión; lo anterior, debido a que los profesores, aunque infirieron que se podía tratar de los valores encontrados en los cortes, estos no correspondían con la posición inicial cero y, la idea de tomar esos valores y restarles uno, no funcionó. A pesar de esto, los profesores valoraron haber identificado una regularidad y se apoyaron en ella para inferir la generalidad buscada. La figura 57 presenta la explicación brindada por la profesora Julieth, para mostrar las conclusiones a las cuales llegó el grupo de profesores.





Construcción		Número de escalones
0	$2^1 - 1 = 2^{0+1} - 1$	1
1	$2^2 - 1 = 2^{1+1} - 1$	3
2	$2^3 - 1 = 2^{2+1} - 1$	7
3	$2^4 - 1 = 2^{3+1} - 1$	15
...		63
n		

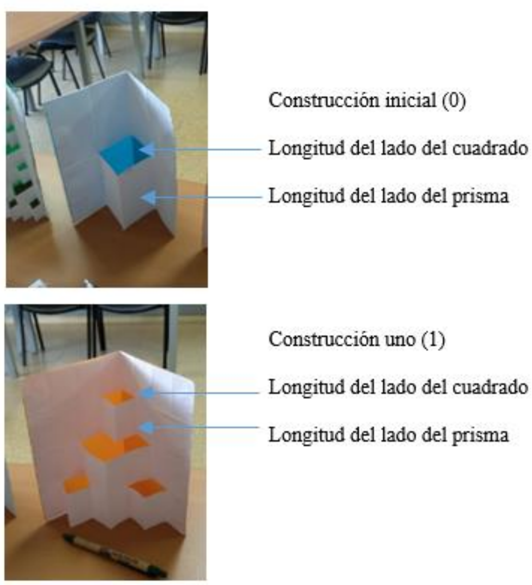
Julieth: *entonces, en este ejercicio encontramos una regularidad, porque tenemos el dos elevado a las potencias; sería dos a la uno; dos a la dos; dos a la tres; dos a la cuatro; ¿cierto? Pero entonces la potencia está basada en el número de la posición más uno. Entonces, en este caso, posición cero más uno, me daría dos a la uno; posición uno más uno, me daría dos a la dos; posición dos más uno me daría dos a las tres; y, posición tres más uno, me daría dos a la cuatro; entonces encontramos esta regularidad del uno, que se utiliza para la posición porque se le va sumando la potencia. Y, además, en todas se va restando uno. Entonces sería dos, a la posición cero más uno,* [en el exponente], *menos uno. La que sigue sería, dos a la posición uno más uno,* [en el exponente], *menos uno; si así sigue en todas, con n, quedaría, dos, elevando a la n más uno,* [en el exponente], *menos uno* [$2^{n+1} - 1$].

Investigadora: *gracias Julieth, ¿alguien quiere aportar una conclusión?*

Edier: *sí, ahora hablábamos que ahí estamos vinculando varias cosas, primero dejar lo que es fijo y cuando yo ya encuentro el número fijo encuentro esa regularidad, ya puedo afincar eso que encontré para buscar lo general. Es como un proceso, y llega el momento en el que dejo fijo algo y a partir de ahí empiezo a hacer abstracciones, ese sería como el proceso que se sigue. También comentamos que están muy exigentes y que nos tocó pensarle bastante, pero lo logramos porque no perdimos de vista que esa posición es referente y me da el norte de lo que estamos buscando. Y nos gustan mucho todos los retos que aquí surgen, y sobre todo superarlos, porque nos da mucha confianza en lo que hacemos*

Figura 57. Fragmento tomado del archivo de video M2_21_07_2018 min22.

Este momento de la tarea finaliza con la búsqueda de regularidades para las áreas de las caras laterales de los prismas y los volúmenes de estos, que se logran apreciar en cada construcción. Al parecer, los profesores perciben que las anteriores construcciones, además de ser un apoyo para dar continuidad a la tarea, también les da la seguridad de continuar infiriendo relaciones que pudieran dar cuenta de lo que ocurre en cualquier posición. Los elementos básicos para las construcciones siguientes tuvieron que ver con la medida de longitudes para los lados de los prismas que se generaron en cada construcción. Las medidas de las longitudes en cuestión guardaban regularidades que para los profesores eran familiares. La figura 58 muestra las reacciones que la actividad generó.



Investigadora: *entonces, observemos en la construcción inicial, ¿cuál es la longitud del lado del cuadrado, para la construcción inicial? Si consideramos que el largo de la hoja es l y el ancho es l´.*

Gina: *ele cuartos* $\left(\frac{l}{4}\right)$.

Investigadora*: ele cuartos, entonces lo anotamos en la tabla. Y ¿la altura o longitud del lado del prisma de la construcción inicial?*

Edier: *va a ser ele prima medios* $\left(\frac{l'}{2}\right)$*, para diferenciar. La primera es ele cuartos y la otra es ele prima medios. Esa es la construcción cero.*

Investigadora: *ahora, ¿cuál sería la longitud del lado del cuadrado de la construcción uno?*

Gina*: ele octavos* $\left(\frac{i}{8}\right)$.

Investigadora*: muy bien, ele octavos, y ¿la altura del prisma de la construcción uno?*

Maritza: *ele prima cuartos* $\left(\frac{l'}{4}\right)$ *porque es uno, dos, tres, cuartos.*

[Profesores analizan]

Investigadora*: vamos a ver, entonces ¿cómo quedaría la que sigue?*

[Profesores analizan]

Julieth: *dieciséis.*

Investigadora*: ele dieciseisavos* $\left(\frac{l}{16}\right)$*, y para la altura entonces sería…*

Edier*: ocho.*

Investigadora: ele prima octavos $\left(\frac{l'}{8}\right)$.

Maritza*: los numeradores siempre tienen que aparecer.*

Investigadora*: muy bien, con estos datos claros, es suficiente para encontrar áreas y volúmenes.*

[Fue necesario repasar los conceptos de área y volumen, junto con sus fórmulas respectivas]

Investigadora*: cómo nos queda entonces el área del cuadrado de la construcción inicial (cero).*

Edier*: esa relación es inmediata, ya cuando uno sabe que se tiene que desprender de eso y buscar la relación por otra parte, miren que todas esas relaciones ya se nos han estado presentando, ¿qué tenemos ahí? En los denominadores, un cuatro* $\left(\frac{1}{4}\right)$*, un ocho* $\left(\frac{1}{8}\right)$*, un dieciséis* $\left(\frac{1}{16}\right)$.

Investigadora*: sí, esos son los lados, ¿cómo quedan los lados, en relación con las posiciones o construcciones?, ¿cómo quedarían las áreas? Les voy a dar un rato para que lo piensen y lo discutan.*

Figura 58. Fragmento tomado del archivo video M2_21_07_2018 min 12.

Previo a la determinación del área de la cara del prisma, los profesores buscan las regularidades que subyacen en los términos encontrados en relación con las posiciones; aunque logran encontrar una expresión, el proceso requirió de tiempo y del establecimiento de relaciones con las actividades ya realizadas, para las cuales las potencias de dos fueron un elemento fijo en el cual los exponentes variaban como tres, cinco, siete, para las posiciones cero, uno y dos, respectivamente. Las inferencias logradas por los profesores, se alcanzan a apreciar en los diálogos de la figura 59.

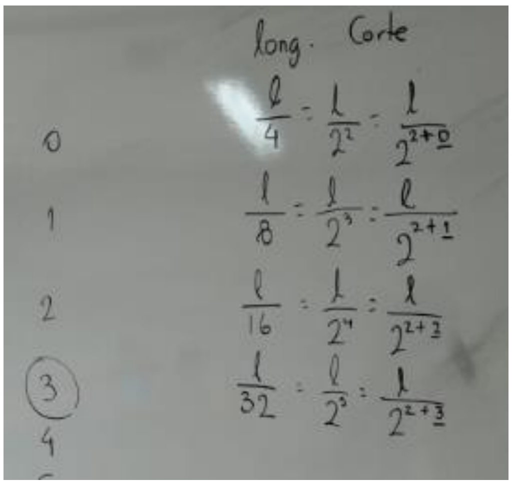
Investigadora*: vamos a trabajarlo por separado; primero, analicemos lo que pasa con la longitud del corte o lado del cuadrado; y, luego, lo que pasa con la longitud de la altura del prisma. Para el primero, ele cuartos ¿cómo queda?*

Gina: *dos a la dos* (2^2).

Investigadora: *dos a la dos, esta es una opción, ¿qué continúa?*

Julieth: *después dos a la tres, después dos a la cuatro, después dos a la cinco. Hasta ahí vamos bien.*

Investigadora: *Ahora vamos a tratar de encontrar relaciones con la posición.*



Maritza: *yo pongo acá este dos elevado a la dos… miremos que tienen en común los otros, el que sigue podría ser dos a la dos más uno; luego, dos a la dos más dos; después, dos a la dos más tres, por decir algo, ¿ahí está pasando algo cuando vinculo acá el cero, el uno, el dos, el tres?*

Julieth: *la posición.*

Investigadora*: la posición, entonces ¿cómo quedaría?*

[Los profesores piensan y revisan sus construcciones, finalmente, presentan una conclusión]

Maritza*: estamos haciendo un ejercicio difícil, porque hay que inferir un valor extra, el del área de la cara, por eso lo estamos comprendiendo de una manera más compleja. Tuvimos que comprender ¿cómo relacionar este cuatro, este ocho, este dieciséis con potencias?*

Edier: *sí, para poder mirar una tendencia, para poder mirar un patrón.*

Julieth: *la tendencia es dos elevado a la posición.*

Investigadora*: ¿dos elevado a la posición? Le falta algo, revisa.*

Gina*: dos elevado a la dos, menos la posición.*

Investigadora*: ¿cómo? Miren, este asunto que es clave: cuando tenemos dos así escrito, se observan regularidades, cuando lo escribimos como dos a la dos, dos a la tres, dos a la cuatro, ¿qué está pasando?*

Maritza: *la regularidad. Entonces digamos que ahí ya tengo algo fijo.*

[Profesores analizan]

Edier*: pero entonces si buscamos cosas en común entre el dos y el tres* [el profesor procura buscar regularidades en los exponentes de las construcciones cero y uno] *¿ellos qué tienen en común?*

Julieth*: uno*

Edier*: uno. Entonces, si dejamos dos a la dos menos, Gina, ¿hiciste menos la potencia o más la potencia?*

Gina*: menos.*

Investigadora*: ¿menos o más? Revisen las dos opciones. ¿cómo se puede hacer, teniendo en cuenta esto?*

Maritza*: si es con menos, para la construcción cero no hay inconveniente, pero en la uno, sí, ya no da. Si es con sumas, dos más cero, queda igual; y, el del tres, sería dos más uno y el del cuatro sería dos más dos.*

Investigadora*: ¿y la que sigue?*

Julieth*: dos más tres*

Gina*: entonces sería más la posición y ahí si queda correcta. Entonces revisemos…*

[Profesores analizan]

Investigadora*: ¿qué es lo que tienen todos en común?*

Profesores*: el dos…*

Construcción	Longitud del corte (Base)	Longitud altura	Área de la cara del prisma
0	$\frac{1l}{4}=\frac{1l}{2^2}=\frac{1l}{2^{2+0}}$	$\frac{1l'}{2}=\frac{1l}{2^1}=\frac{1l'}{2^{0+1}}$	$\frac{1ll'}{8}=\frac{1ll'}{2^3}$
1	$\frac{1l}{8}=\frac{1l}{2^3}=\frac{1l}{2^{2+1}}$	$\frac{1l'}{4}=\frac{1l}{2^2}=\frac{1l'}{2^{1+1}}$	$\frac{1ll'}{32}=\frac{1ll'}{2^5}$
2	$\frac{1l}{16}=\frac{1l}{2^4}=\frac{1l}{2^{2+2}}$	$\frac{1l'}{8}=\frac{1l'}{2^3}=\frac{1l}{2^{2+1}}$	$\frac{1ll'}{128}=\frac{1ll'}{2^7}$
3	$\frac{1l}{32}=\frac{1l}{2^5}=\frac{1l}{2^{2+3}}$	$\frac{1l'}{2}=\frac{1l'}{2^4}=\frac{1l}{2^{3+1}}$	$\frac{1ll'}{512}=\frac{1ll'}{2^9}$
…			
n	$\frac{1l}{2^{2+n}}$	$\frac{1l}{2^{n+1}}$	$\frac{1l}{2^{2n+3}}$

Maritza*: sigo buscando que todo me vaya quedando igual, voy logrando que todo me vaya quedando con un dos en la base; luego todo con dos en el exponente, ahí los voy unificando, pero al final le agrego la posición y me da este resultado que es el que estoy buscando. Esa posición es la que me da la forma general, ¿cierto?*

Profesores*: si…*

Investigadora*: entonces ¿qué pasa con la longitud de la altura?*

[Profesores analizan]

Gina: *y para la longitud de la altura, dos en la base, y en el exponente, la posición más uno.*

[A continuación, se ilustran las conclusiones de los profesores; cabe anotar que fue necesario recordar las propiedades de la potenciación para deducir el área de la cara del prisma]

Construcción	Área de la base	Longitud altura	Volumen del prisma
0	$\frac{1ll'}{2^3}$	$\frac{1l'}{2^1}$	$\frac{1ll'l'}{2^4}$
1	$\frac{1ll'}{2^5}$	$\frac{1l'}{2^2}$	$\frac{1ll'l'}{2^7}$
2	$\frac{1ll'}{2^7}$	$\frac{1l'}{2^3}$	$\frac{1ll'l'}{2^{10}}$
3	$\frac{1ll'}{2^9}$	$\frac{1l'}{2^4}$	$\frac{1ll'l'}{2^{13}}$
n	$\frac{1ll'}{2^{3+2n}}$	$\frac{1l'}{2^{1+n}}$	$\frac{1ll'l'}{2^{3n+4}}$

Investigadora: *muy bien, entonces ¿el volumen cómo queda?*

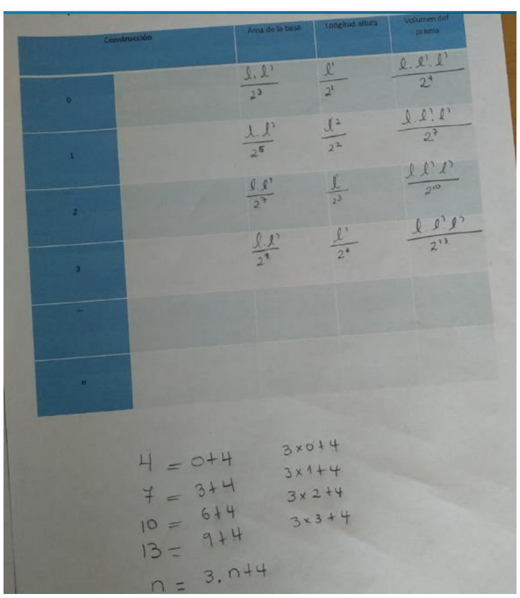
Julieth: *ahí multiplicamos el área de la base por la altura. Ah, la cara del prisma y la altura, ¿cierto?*

Investigadora: *muy bien.*

Maritza: *nos queda, dos con exponente cuatro, después siete, después diez.*

Gina: *multiplicar esas dos columnas, queda dos en la base y en el exponente sumamos 2n y n, y por otro lado, 3 y 1.*

Maritza: *y ahí notamos algo profe, muy bonito, componiendo y descomponiendo números, y con todos los otros también se pueden hacer, y es que el exponente se escribe como la suma de dos números, donde el cuatro siempre queda fijo, y el otro, es múltiplo de tres, mire qué bonito.*



Edier: *sí, siempre se cumple, entonces los fijos son tres y cuatro y la posición varía con cero, uno, dos y tres. Es como descomponer el 4 = 0 + 4; el otro queda, 7 = 3 + 4; luego, 10 = 6 + 4; miren que el cuatro siempre aparece, y los otros, 0, 3, 6 son múltiplos de 3. Eso se le puede mostrar a los niños, ellos no hacen fórmulas, pero esto lo entienden. Si no lo hacemos como exponentes sino como números que van aumentando de tres en tres.*

[Los profesores consideran que esta modificación sobre la tarea puede ser una adecuación para llevar al aula]

Figura 59. Fragmento tomado del archivo video M2_11_08_2018 min 32.

El trabajo desarrollado en el marco de la actividad de carácter algebraico, pudo recoger elementos propios de la generalización. Esta es considerada como un mecanismo catalizador para consolidar el pensamiento algebraico en la educación básica primaria (Radford, 2010b). El tratamiento dado a la actividad, en términos de reconocer situaciones de variación, favoreció la fundamentación de una de las dimensiones del conocimiento profesional, el conocimiento de las matemáticas. Gracias a los procesos realizados por los profesores, fue posible evidenciar cómo se comporta el proceso de generalización de secuencias figurales (Radford, 2013b) descrito en el capítulo 2. Mediante este, los profesores notaron "una comunalidad" o característica común de los elementos dados en las secuencias; así, por ejemplo, para los valores $1, 2, 4, 8 \ldots$, los profesores notaron que cada valor era múltiplo de 2, y se duplicaba (a partir de la construcción 1). Sin embargo, el hecho de que no se cumpliera con 1, indicaba que, posiblemente, era necesario buscar otras relaciones.

Determinar esa propiedad común en la secuencia, se convirtió en una herramienta para la búsqueda de regularidades, que fue posible gracias a la toma de conciencia del comportamiento de los términos particulares. Así, inferir que la característica común estaba dada en términos de las potencias: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$, ..., fue un proceso que se indujo a través de la representación en factores de cada término, siento el valor 2^0 tratado de manera diferente en relación con esta inferencia. Otro asunto que se destacó, en el reconocimiento de la característica común, tuvo que ver con que cada exponente correspondía a una construcción que empezó en 0, para indicar la construcción inicial (ver figura 57) y continuó con $1, 2, 3 \ldots$, hasta *n*.

El ciclo de la generalización, descrito por Radford (2013b), y evidenciado en el trabajo realizado por los profesores, continuó con la aplicación de la característica común a los siguientes términos de la secuencia. En la línea del ejemplo en desarrollo, los términos para las posiciones $4, 5$ y 6, eran $16, 32$ y 64, los cuales se determinaron, inicialmente, multiplicando por 2 el último término encontrado y, posteriormente, mediante la representación de las potencias $2^4, 2^5$ y 2^6. Este mecanismo utilizado para calcular valores correspondientes a posiciones cercanas, podía ser funcional, sin embargo, los profesores reconocieron la necesidad de proveer una estrategia para encontrar posiciones no cercanas a los términos iniciales.

Frente a la necesidad mencionada, los profesores debieron desarrollar cierta sensibilidad en relación con el comportamiento de los términos dados, como referente para los términos no dados. En la estructura de la generalización algebraica, presentada por Radford (2013b), generalizar la característica común, es una manifestación de la presencia de una abducción analítica, donde dicha característica se asume, no solo como posibilidad, sino como principio que antecede la deducción de la fórmula, esto es, la característica se convierte en una hipótesis que permite encontrar la forma general. Para el caso del ejemplo en cuestión, la forma general estuvo determinada por la expresión 2^n, donde *n* indicaba la posición de la construcción realizada.

En coherencia con los estudios teóricos propuestos por Radford (2003), la generalización de patrones puede tipificarse como factual y contextual. En el desarrollo de la tarea se evidenciaron ambos tipos. Mediante el esquema de la secuencia $1, 2, 4, 8$, ..., que permaneció ligado a un nivel concreto y, donde lo indeterminado quedó sin nombrar, se puso de manifiesto una generalización factual. Y, a través de las secuencias $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$, ..., que sugieren un nivel más avanzado y tratan con objetos genéricos (Vergel, 2014) sin alcanzar una generalización simbólica, se percibió una generalización contextual.

En los casos de generalización descritos en este apartado, tanto los componentes analíticos, como los estratos de pensamiento (Radford, 2010a) y la estructura de generalización algebraica (Radford, 2013b), se evidenciaron en el desarrollo de cada una de las secuencias propuestas en este momento de la tarea, para el cual, las distintas categorías se agruparon en la categoría temática denominada: formas de pensamiento algebraico, que recogió los elementos expuestos en este apartado y que es presentada en la figura 60.

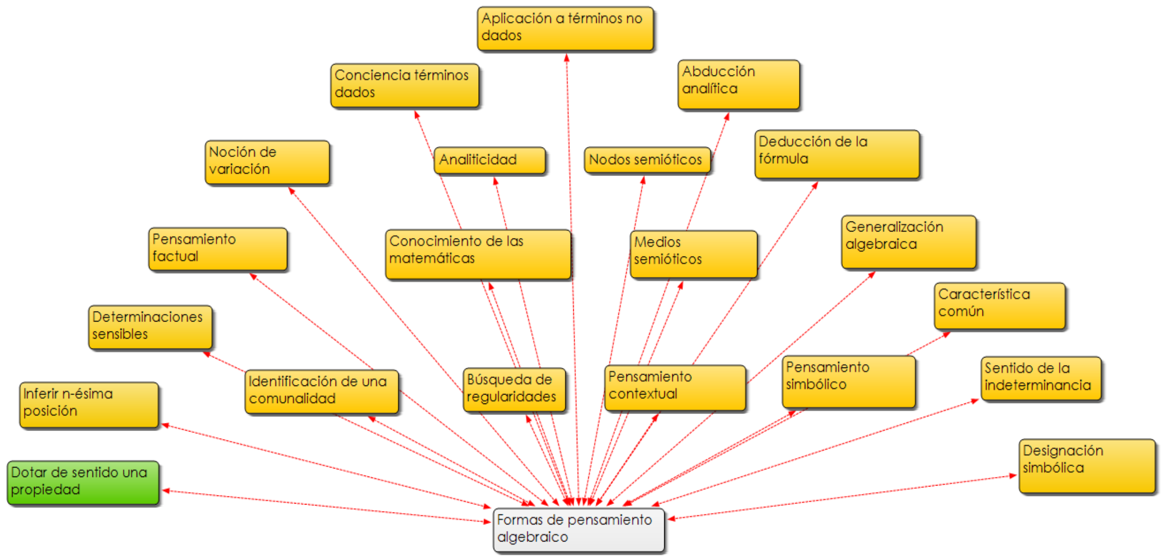


Figura 60. Categorías temáticas emergentes para formas de pensamiento algebraico.

El momento destinado para el diseño de una tarea de enseñanza para los estudiantes, tuvo como elemento inspirador una actividad enunciada en los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) y que fue modificada en el marco de esta propuesta. Los profesores hicieron adecuaciones y decidieron desarrollar la actividad para validar con sus compañeros la viabilidad de llevarla al aula. Considerando que el tipo de actividad que ellos acostumbran proponer para buscar variaciones no se enmarca en la línea de la búsqueda de generalizaciones, llamó la atención de los profesores, a modo de reflexión, que no se hubieran explorado este tipo de situaciones antes. La situación, con las variaciones indicadas, se presenta en la figura 61.

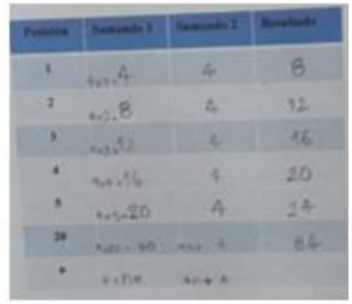
Posición	Sumando 1	Sumando 2	Resultado
1			
2			
3			
4			
5			
…			
20			
n			

Registra en la calculadora la suma de dos números enteros a + b, luego presiona =, ¿qué obtienes? Registra este valor en la tabla. Presiona igual por segunda vez, tercera, cuarta, quinta y registra los resultados. ¿Qué obtienes en la posición 20? ¿En la posición n?

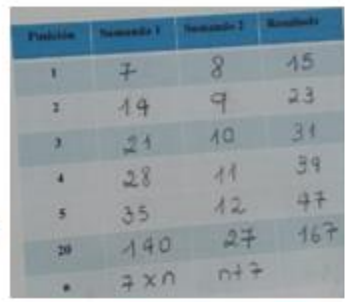
Figura 61. Tarea de formación propuesta para los estudiantes para la búsqueda de patrones.

Las respuestas obtenidas por los profesores variaron, dependiendo de los números propuestos, sin embargo, la regularidad encontrada fue común para todos, aunque lo hicieron con diferentes estrategias. Las opciones de respuestas se presentan en la figura 62, junto con la explicación ofrecida por la profesora Maritza, donde se puede apreciar, además del procedimiento elaborado, una reflexión sobre la pertinencia y necesidad de este tipo de actividades en el aula y su presencia en referentes curriculares, que aportan ideas susceptibles de ser exploradas, modificadas y potencializadas.

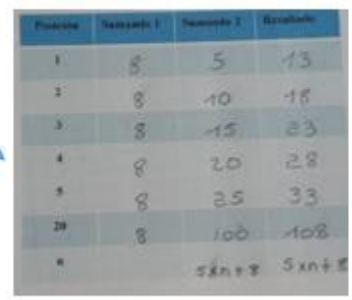
Registra en la calculadora la suma de dos números enteros a + b, luego presiona =, ¿Qué obtienes? Registra este valor en la tabla. Presiona igual por segunda vez, tercera, cuarta, quinta y registra los resultados. ¿Qué obtienes en la posición 20? ¿En la posición n?



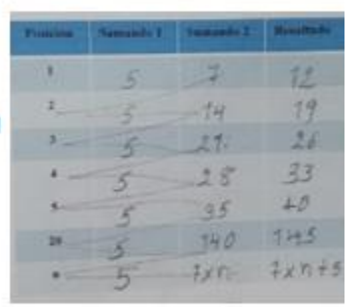
Posición	Sumando 1	Sumando 2	Resultado
1	[illegible] 4	4	8
2	[illegible] 8	4	12
3	[illegible] 12	4	16
4	[illegible] 16	4	20
5	[illegible] 20	4	24
20	[illegible] 80	[illegible] 4	84
n	[illegible]	[illegible]	



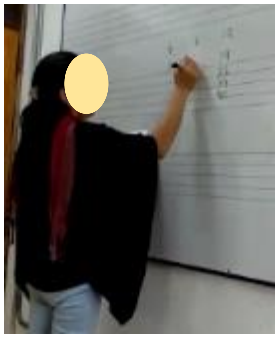
Posición	Sumando 1	Sumando 2	Resultado
1	7	8	15
2	14	9	23
3	21	10	31
4	28	11	39
5	35	12	47
20	140	27	167
n	7xn	n+7	



Posición	Sumando 1	Sumando 2	Resultado
1	8	5	13
2	8	10	18
3	8	15	23
4	8	20	28
5	8	25	33
20	8	100	108
n		5xn+8	5xn+8

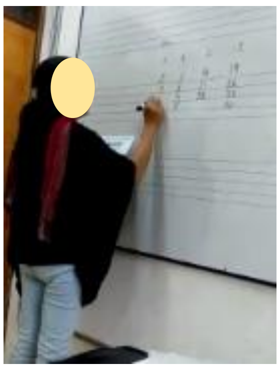


Posición	Sumando 1	Sumando 2	Resultado
1	5	7	12
2	5	14	19
3	5	21	26
4	5	28	33
5	5	35	40
20	5	140	145
n	5	7xn	7xn+5



Investigadora: *bueno, vamos a escuchar a Maritza que quiere compartir cómo resolvió la situación.*

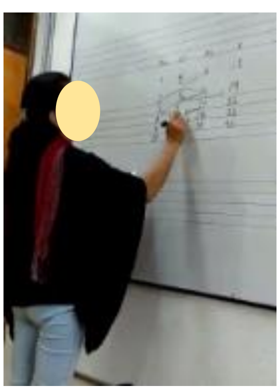
Maritza: *mi sumando uno era cinco, y mi sumando dos, siete; entonces los resultados que obtuve fueron, 12, 19, 26, 33 y 40. Yo dejé fijo el sumando uno, y fui encontrando que estaba duplicado el sumando dos; aquí, entonces, serían los múltiplos de ese sumando dos; entonces siete por uno, siete por dos, siete por tres, siete por cuatro.*



Julieth*: por favor, anota las posiciones, las posiciones son indispensables.*

Maritza: *Ah sí, posición uno, posición dos, posición tres, posición cuatro, posición cinco, sumando uno, sumando dos y el resultado, listo. Entonces aquí sería siete por cinco y aquí estaba ya la posición veinte, entonces yo la relación que encontré fue esta, para mí, yo lo que veía era, siete por la posición y me daba entonces este, cierto, y al sumarlo con este entonces me iba a dar el de allá, si, entonces yo hice este recorrido así y me iba dando este de acá, otra vez, siete por tres y me daba entonces el veintiuno , le sumaba el cinco y me daba el veintiséis, siete por cuatro veintiocho más cinco me daba el treinta y tres, y siete por cinco, o sea, multiplicaba el primer sumando por la posición, le agregaba el sumando uno y me daba el resultado, entonces siendo así, aquí sería siete por veinte y siete por veinte me daría ciento cuarenta y más cinco me daría ciento cuarenta y cinco*

Investigadora: *¿y para la n?*



Maritza: *sería siete por n más cinco.*

Edier: *porque cinco es una constante.*

Maritza: *si, y sobre ese verificamos cada uno de esos resultados, ¿se cumple? Es decir, si n vale uno, dos, tres…*

Gina: *claro, ahí da, siete por tres más cinco igual a veintiséis, siete por cuatro veintiocho y cinco, treinta y tres.*

Investigadora: *¿los niños lograrían abstraer este tipo de relaciones?, ¿los niños lo lograrían abstraer?*

Gina: *algunos niños sí. Yo he notado, con las actividades que hemos hecho, que ellos son muy hábiles y que todo depende de nosotros los maestros, del tipo de actividad que uno les ponga, ellos son capaces si uno les pone retos.*

Maritza*: yo noté lo mismo. Ahí el papel de nosotros y las tareas que pongamos es clave.*

Julieth: *yo creo que sí lo hacen, porque lo que queremos es que nos digan qué va cuánto en cuánto; ellos pueden notar que un sumando es múltiplo y el otro fijo. Entonces lo que vamos a hacer con esta planeación, es explorar cuáles son esas regularidades y que ellos hagan abstracciones.*

Edier*: y para empezar les damos los mismos sumandos para que traten de buscar relaciones entre ellos, es decir, que sean sumandos que puedan estar acá vinculados, para que puedan notar que puedan tener algunas regularidades.*

Figura 62. Fragmento tomado del archivo video M3_25_08_2018 min31.

Acciones tales como: pensar en función de la práctica y la promoción del pensamiento algebraico, considerar las posibilidades que tienen los estudiantes para aprender conceptos con este carácter, mostrar motivación por estudiar y reestructurar el currículo para consolidar este tipo de pensamiento, son consecuentes con la actuación de los profesores, durante el desarrollo de la tarea de formación. En coherencia con lo anterior, las dimensiones descritas por Ponte (2012), en sus distintas manifestaciones, se evidenciaron a través del conocimiento de las matemáticas, de los estudiantes, del currículo y de la práctica misma.

Particularmente, la dimensión del conocimiento de las matemáticas da cuenta que, a través del tratamiento que los profesores hacen del trabajo propuesto para los estudiantes, procuran una interpretación de la matemática escolar, en la cual, las formas de representación de conceptos y procedimientos deben ser coherentes con el pensamiento a promover, atendiendo al carácter escolar del mismo (Ponte, 2012). En consecuencia, los profesores enfocan su atención en la promoción del pensamiento algebraico, a través de conceptos caracterizados por el sentido de la indeterminancia, analiticidad, y la designación simbólica, que evidencien formas de pensamiento algebraico temprano.

Adicionalmente, se alcanza a observar en el desarrollo de la tarea, que los profesores constantemente están pensando en sus estudiantes, en sus modos de aprendizaje, en las dinámicas de trabajo y los recursos con los que cuentan (Ponte, 2012); los anteriores aspectos determinan decisiones sobre la práctica, toda vez que los profesores sienten que la línea de trabajo propuesta es diferente a lo que habitualmente hacían y ofrece otros panoramas, donde se ha refinado el conocimiento de las matemáticas y, en consecuencia, el tipo de tareas de aprendizaje propuestas. Específicamente, los profesores reconocen que la promoción del pensamiento algebraico ha generado cambios en este tipo de tareas, pues para ellos, se ha ampliado la perspectiva que tenían con relación a la idea de considerar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en primaria.

La categoría temática propuesta para este momento de la tarea de formación fue denominada conocimiento profesional y enmarca las dimensiones del mismo; estas, se pueden vincular mediante diferentes relaciones; por ejemplo, el conocimiento referido al pensamiento algebraico, ofrece posibilidades en cuanto a reflexionar sobre el currículo y la promoción de este pensamiento; también, favorece el diseño de actividades de carácter algebraico pensadas para los estudiantes, conociendo y reconociendo sus posibilidades de aprendizaje, intereses y necesidades. Adicionalmente, incide sobre: la práctica y las decisiones que los profesores pueden tomar sobre ella, las concepciones de lo que puede significar pensar algebraicamente, las posibilidades que tienen los estudiantes de hacerlo y las responsabilidades de los profesores frente a ello. La figura 63 presenta los elementos referenciados en este apartado.

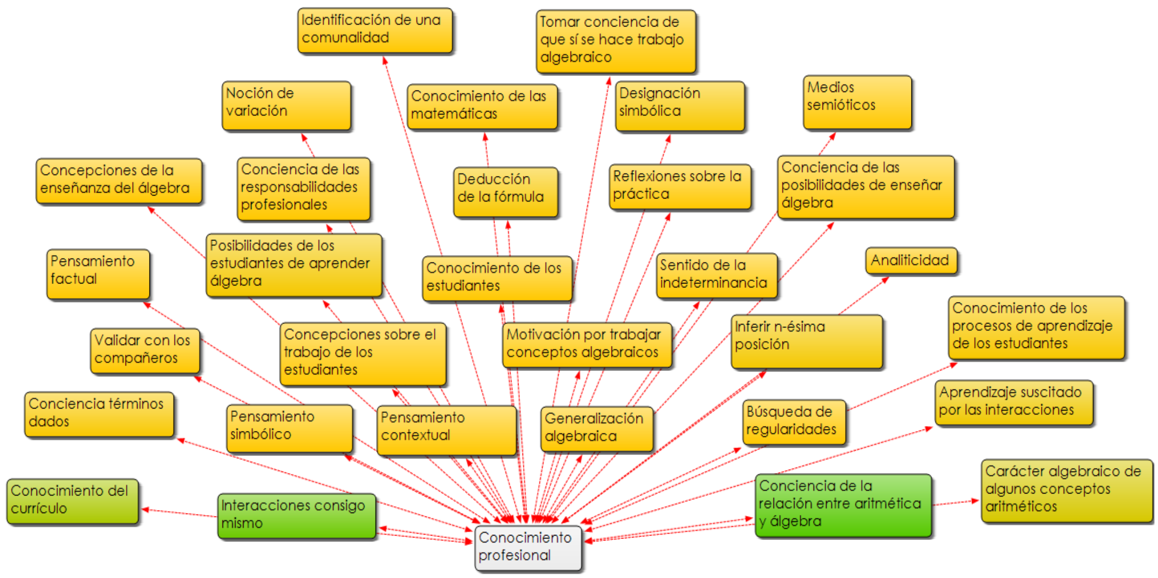


Figura 63. Categorías temáticas emergentes para el conocimiento profesional.

El encuentro y el trabajo de campo cierran con un reconocimiento a la labor de los profesores, a su compromiso y disposición para hacer parte de la investigación y ser protagonistas de la misma. Fueron sus voces, sus experiencias, reflexiones y acciones las que inspiraron el deseo de documentar cómo el profesor de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano, el cual era poco reconocido por ellos. Por esto, en este momento de la tarea se muestran algunas de las reflexiones compartidas por los profesores con respecto a sus percepciones del trabajo realizado. La figura 64 presenta un apartado de las ideas expresadas por los profesores.

Julieth*: nosotros llegamos acá con unas condiciones y nos vamos con otras, reafirmamos que "el que se forma se transforma", es decir, si nosotros entramos a un aula de clase, o a un recinto, donde recibimos algún tipo de información o conocimiento y salimos de ahí sin nada, si no hubo un cambio por mínimo que sea en nosotros, entonces no hicimos mucho, no hicimos nada. Si yo me pongo a pensar en cómo nos vamos, en términos de mi reflexión como maestro, es decir, desde mi ser como maestro, me voy muy satisfecha, feliz de haber hecho parte de este proceso, aprendí mucho, me confronté mucho, fue muy retador y gratificante, evolucioné, crecí y todo esto se está reflejando en el trabajo con los niños. Le agradezco el estar aquí, su disposición para formarnos, y también porque piensan en nosotros, porque usted profe pudo hacer su trabajo en la ciudad y evitarse todos estos viajes hasta aquí, pero nos eligió* *a nosotros para hacer su investigación, confió y creyó en nosotros, así como nosotros confiamos en que esta experiencia engrandecería nuestra labor y así fue; nos vamos sabiendo y entendiendo mucho más de lo que pensábamos, con una gran motivación por seguir creciendo y aprendiendo, gracias a usted porque su trabajo muestra que le importa la educación, que le apuesta al trabajo realizado en condiciones no favorables, que cree en el maestro rural.*

Edier: *completamente de acuerdo con la compañera; yo adicionaría que, con relación a mi conocimiento, digamos que la matemática tiene niveles, la matemática que yo como profesor debo saber y la matemática que voy a enseñar a mis niños; eso va a tener repercusión con relación a lo que yo conozco de ellos, de las practicas, del currículo. Por ejemplo, en mis clases lo numérico o aritmético era muy marcado, pero yo empecé a ver posibilidades para el álgebra, entonces ya ese conocimiento que tengo hace que el currículo sea distinto, y que lo que yo hago en el aula, también.*

Maritza: *yo tengo ideas muy puntuales de cómo llegué y cómo me voy. Me voy con mucha motivación para seguir trabajando con los niños en relación a patrones, en relación a secuencias, generalizaciones, operaciones y propiedades. Ya nos toca solos, pero aquí aprendimos mucho de usted profe y de los compañeros, entonces llevamos herramientas para seguir explorando ese mundo del álgebra, que para mí era desconocido, porque no era consciente de lo que es pensar algebraicamente, y que no es tan complejo como pensar en letras, pues existen otras formas y manifestaciones de este pensamiento.*

Gina: *yo me voy con toda la disposición de seguir poniendo en práctica, vincular cosas que he aprendido aquí de todos y hasta de mi misma, porque a veces yo sí hacía cosas, pero no era consciente del porqué y para qué hacerlo; por ejemplo, el uso de todos esos recursos que nos compartió, ya no podemos decir que vamos a trabajar igual, ya miramos distinto lo que los niños están haciendo, esta parte del trabajo que tiene que ver con propiedades, secuencias y patrones ya no volveremos a trabajarlas como lo hacíamos, o por lo menos, yo no, después de todo lo que entendí aquí y pensé aquí.*

Figura 64. Fragmento de archivo audio M4_25_08_2018 min35; apartado del friso.

En correspondencia con las reflexiones expuestas por los profesores, se reconoce que el proceso de interacción, como mediador en el desarrollo de las tareas de formación, se materializa en las acciones que los profesores están dispuestos a continuar ejerciendo en sus prácticas. Ellos aluden motivación y compromiso frente a sus responsabilidades profesionales, se reconocen como los principales actores y promotores de cualquier cambio o transformación, valoran el impacto de factores externos, como la formación, y la posibilidad de que estos complementen la labor profesional y enriquezcan los desempeños laborales. La categoría temática de este momento de la tarea, se denominó interacción-acción y se presenta en la figura 65.

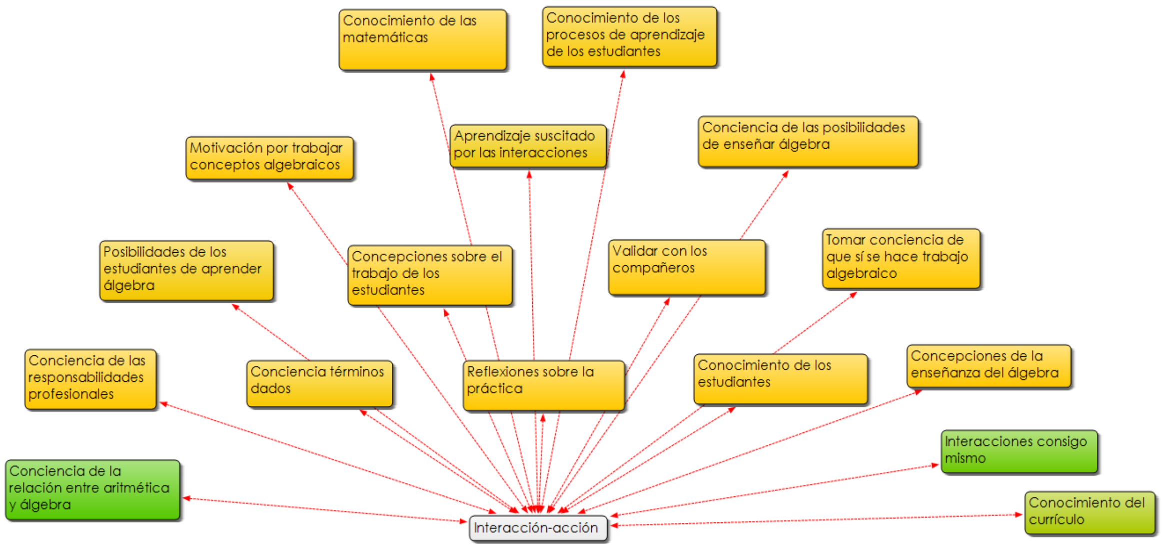


Figura 65. Categorías temáticas emergentes para la interacción-acción.

A lo largo del trabajo de campo, las interacciones se destacaron como un componente que estuvo presente en todas las actividades y, gracias a ellas, se pudieron generar espacios para la reflexión, la validación, la manifestación de concepciones, motivaciones, retos y necesidades. Esas interacciones, reconocidas por los profesores como un elemento indispensable para el aprendizaje tienen una responsabilidad asociada, la acción como un reflejo de que lo que se aprendió, y que incidirá sobre los contextos educativos, evidenciando que es a través de acciones mediadas por la toma de conciencia que el profesor transforma su conocimiento profesional.

4.3.4.3. Inter – análisis para la tarea de formación 4. El inter – análisis de la tarea de formación 4, se desarrolló mediante las relaciones establecidas entre las distintas categorías temáticas propuestas en este apartado: reflexión-acción sobre la práctica, formas de pensamiento algebraico, conocimiento profesional e, interacción-acción. Los vínculos evidenciados entre las categorías, dieron cuenta de que se logró una fundamentación para cada una de ellas, producto del desarrollo de la tarea de formación en cuestión; adicionalmente, los componentes de la tematización fueron determinantes en la postura explicativa propuesta en el estudio. En consecuencia, el mapa conceptual elaborado en este apartado (ver figura 67), fue estructurado mediante la interpretación de las relaciones provistas en la figura 66.

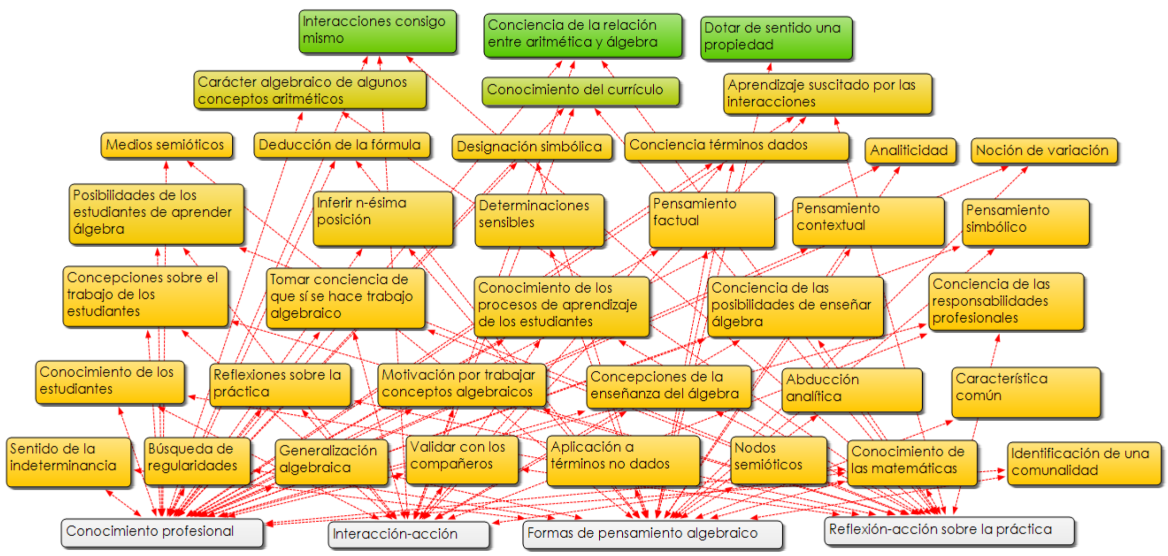


Figura 66. Inter – análisis del desarrollo de la tarea de formación 4.

En este momento del trabajo de campo, uno de los elementos que pudo evidenciar mayor presencia en las reflexiones e interacciones de los profesores, estuvo determinado por la acción, en distintas dimensiones; por ejemplo, en la práctica, donde las modificaciones sobre el currículo mostraron que la promoción del pensamiento algebraico se constituyó en un objeto de análisis que trascendió hasta el diseño de actividades caracterizadas por la indeterminancia, la analiticidad, y la designación simbólica. En la figura 67, se puede apreciar el mapa conceptual que muestra cuáles relaciones se establecieron para este momento de la tarea.

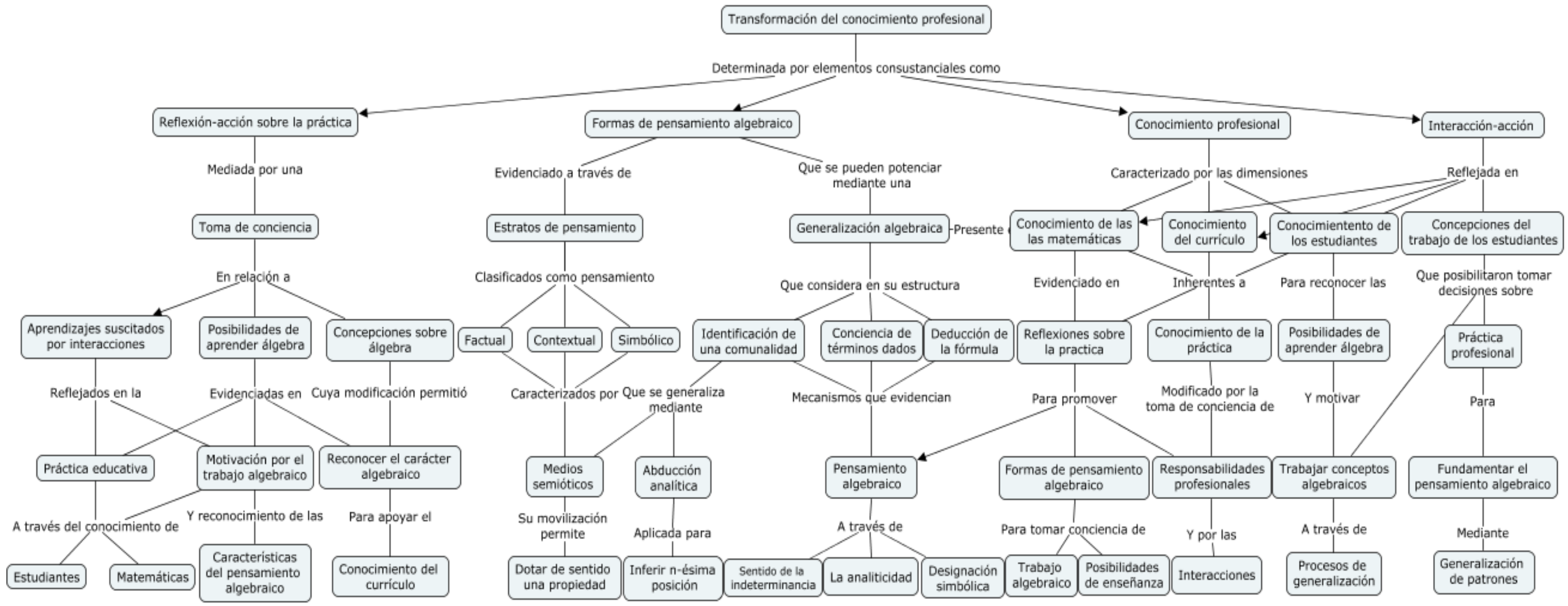


Figura 67. Elaboración propia. Mapa conceptual para el inter – análisis del desarrollo de la tarea de formación 4.

La reflexión que trasciende a la acción, se consolida como una manifestación de la toma de conciencia, la cual se vislumbra como inherente a la transformación, a la luz de las elaboraciones documentadas hasta el momento. Que los profesores hayan modificado sus concepciones en relación con la enseñanza del álgebra, trascendió hasta una toma de conciencia, que posibilitó la exploración del pensamiento algebraico en ausencia de símbolos alfanuméricos (Radford, 2010b).

En coherencia con la anterior idea, se alcanza a reconocer que los profesores lograron identificar formas de pensamiento factual, contextual y simbólico a través del estudio de estructuras y de la generalización de patrones; adicionalmente, el diseño de tareas de aprendizaje también evidenció este asunto, junto con el reconocimiento del sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica como componentes que son inherentes al pensamiento algebraico. En esta línea, cabe aclarar que hubo una identificación incipiente de algunos de los planteamientos teóricos referidos por Radford (2003, 2010a, 2010b, 2013b), que les permitió aceptar que pensar algebraicamente trasciende el trabajo con símbolos y que los estudiantes en los niveles de la educación básica primaria pueden hacerlo.

Otros de los asuntos que parecen ser una consecuencia de la toma de conciencia, referida a la necesidad de enseñar álgebra, de las posibilidades de aprenderla, de lo que puede significar pensar algebraicamente y de cómo se puede manifestar este pensamiento, se pudieron observar en las modificaciones que hubo en relación con el conocimiento de la práctica. En coherencia con lo anterior, las aulas de los profesores se convirtieron en uno de los escenarios en los cuales se materializó su conocimiento de las matemáticas, pues, a través del desarrollo de las actividades propuestas, ellos lograron refinar algunos conceptos, precisar y aprender otros (relacionados con estructuras y patrones). Consecuentemente, el modo de gestionar el currículo evidenció una modificación en las finalidades y objetivos de la enseñanza, a través de la organización de los contenidos, de la definición de los asuntos a priorizar, y de las formas de orientar estos procesos (Ponte, 2012).

Adicionalmente, cabe anotar que, a la luz del análisis documentado, el papel de las diferentes clases de interacciones pudo ser determinante; para los profesores, estas se generaron consigo mismos, con sus pares, con los estudiantes y con el conocimiento, lo cual propició un paso a la acción, por los cambios que motivaron y que pudieron reflejarse en las dimensiones del conocimiento profesional; así, conocer y reconocer conceptos algebraicos, diseñar tareas que los vincularon, convertirlos en un objetivo curricular y poner en consideración los modos de aprender de los estudiantes, fueron asuntos en los cuales la incidencia de las interacciones fue tanto implícita como explícita, pues el reconocimiento, la valoración del otro, y la validación con el otro, estuvieron presentes a lo largo del trabajo de campo, mediados por la interacción.

4.4. Intra – análisis para los momentos de las tareas de formación

La naturaleza de cada momento de las tareas fue determinada por el carácter de las reflexiones y, respectivamente pudieron relacionarse con las dimensiones del conocimiento profesional, donde algunas veces primaron unas sin que esto implicara la ausencia de las otras, pues, tal como lo afirma Ponte (2012), hacen parte de un sistema en el que no es concebible una separación. Tomando como referente las dimensiones en cuestión y la idea que se ha venido elaborando en relación con que la transformación es un proceso progresivo, fue necesario analizar cómo evolucionó el desarrollo de cada momento, cuya naturaleza guardó relación con las dimensiones: conocimiento de las matemáticas, conocimiento de los estudiantes, conocimiento del currículo y conocimiento de la práctica educativa.

4.4.1. Intra – análisis momento 1. El momento 1, previsto en cada una de las tareas de formación, estuvo en correspondencia con la dimensión del conocimiento sobre la práctica, la cual tuvo una notable presencia y protagonismo en ese momento (M_1), mientras, las otras dimensiones, manifestaron una incidencia menor. Una posible interpretación, de cómo se desarrolló de manera progresiva la dimensión referida a la práctica, a lo largo de la realización de las tareas, se puede observar en el mapa conceptual de la figura 68.

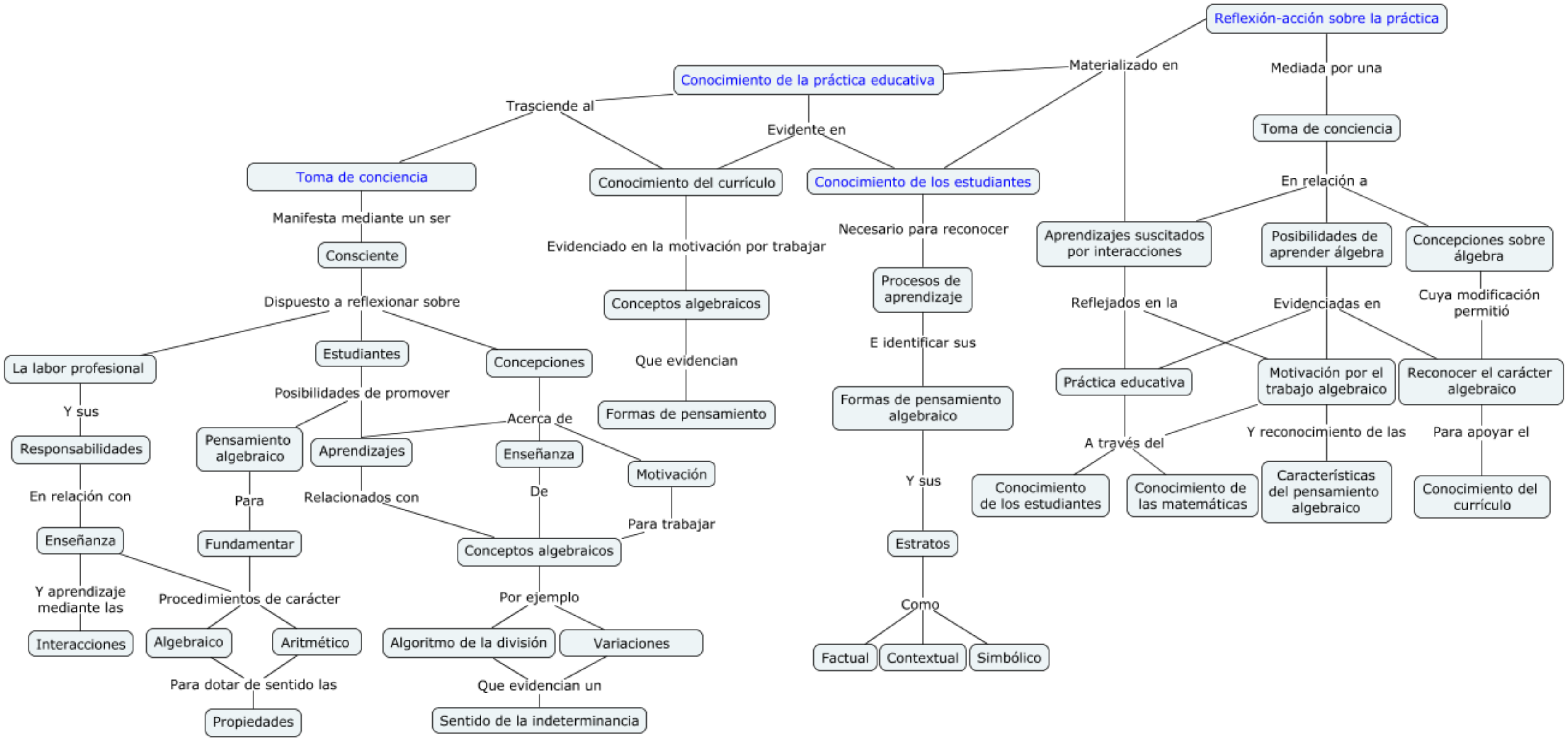


Figura 68. Elaboración propia. Mapa conceptual para el Intra – análisis del momento 1.

El mapa conceptual de la figura 68 es producto del análisis detallado llevado a cabo para los momentos (M_1) contemplados en cada tarea. A partir del análisis hasta ahora expuesto, donde los momentos en mención fueron descritos y estudiados, se rastreó, en las tareas, lo que ocurrió en cada uno de estos momentos (M_1). Así, se consideró inicialmente (TF_1), una caracterización de las prácticas, en la cual se destacó que los profesores no concebían la promoción del pensamiento algebraico como posible, pues podía ser complejo para los estudiantes trabajar con letras y símbolos asociados a este. A partir de la segunda tarea (TF_2) se empezaron a analizar los videos, que finalmente fueron la materialización de las planeaciones propuestas, del desarrollo de las tareas de aprendizaje, la conducción de la actividad, la organización del trabajo, la evaluación de los aprendizajes y de la enseñanza, es decir, el conocimiento de la práctica (Ponte, 2012).

En el escenario anteriormente descrito, se alcanza a apreciar que, para el caso del conocimiento de la práctica, hubo un progreso manifiesto, inicialmente en una toma de conciencia que empezó a perfilar al profesor como un sujeto de acción, que asume unas responsabilidades profesionales cuando reconoce que sus concepciones son susceptibles de ser modificadas, en relación con la necesidad, posibilidad y motivación por promover pensamiento algebraico. En esta línea, se observa cómo la toma de conciencia trasciende hasta la práctica, donde se empezó a evidenciar la presencia de conceptos algebraicos en el currículo, que, además, propendió por la manifestación de formas de pensamiento, inicialmente factual y posteriormente contextual y simbólico.

Se puede interpretar que, además, el conocimiento de los estudiantes evidenció cambios que favorecieron el diseño de actividades, los profesores reconocieron en ellos posibilidades de aprender y manifestar pensamiento algebraico, toda vez que las tareas de aprendizaje propuestas contaran con los componentes analíticos del pensamiento algebraico (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2014, 2016a); en consecuencia, podría leerse un progreso tanto en el tipo de tareas diseñadas como en el impacto que estas tuvieron en el aula. Por lo tanto, el tránsito por cada tarea, con las manifestaciones de progresión hasta ahora descritas, es mediado por la reflexión materializada en la acción; los profesores no solo reflexionan y toman conciencia, sino que también actúan en consecuencia, consolidando sus prácticas en los compontes ya descritos, a través del fortalecimiento del pensamiento algebraico.

4.4.2. Intra – análisis momento 2. La naturaleza de las reflexiones referidas para el momento 2 de cada una de las tareas de formación, tuvo relación directa con la dimensión del conocimiento de las matemáticas. Las demás dimensiones estuvieron presentes pero su protagonismo no fue tan evidente, pues cada una de las actividades de carácter algebraico pusieron de manifiesto, principalmente este pensamiento, a través de sus componentes analíticos: sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica, y de las formas de pensamiento algebraico: factual, contextual, simbólico. El mapa conceptual de la figura 69 muestra cómo se relacionaron los momentos (M_2) de cada tarea y la posible progresión que hubo en cada uno de ellos a lo largo del desarrollo de las tareas de formación.

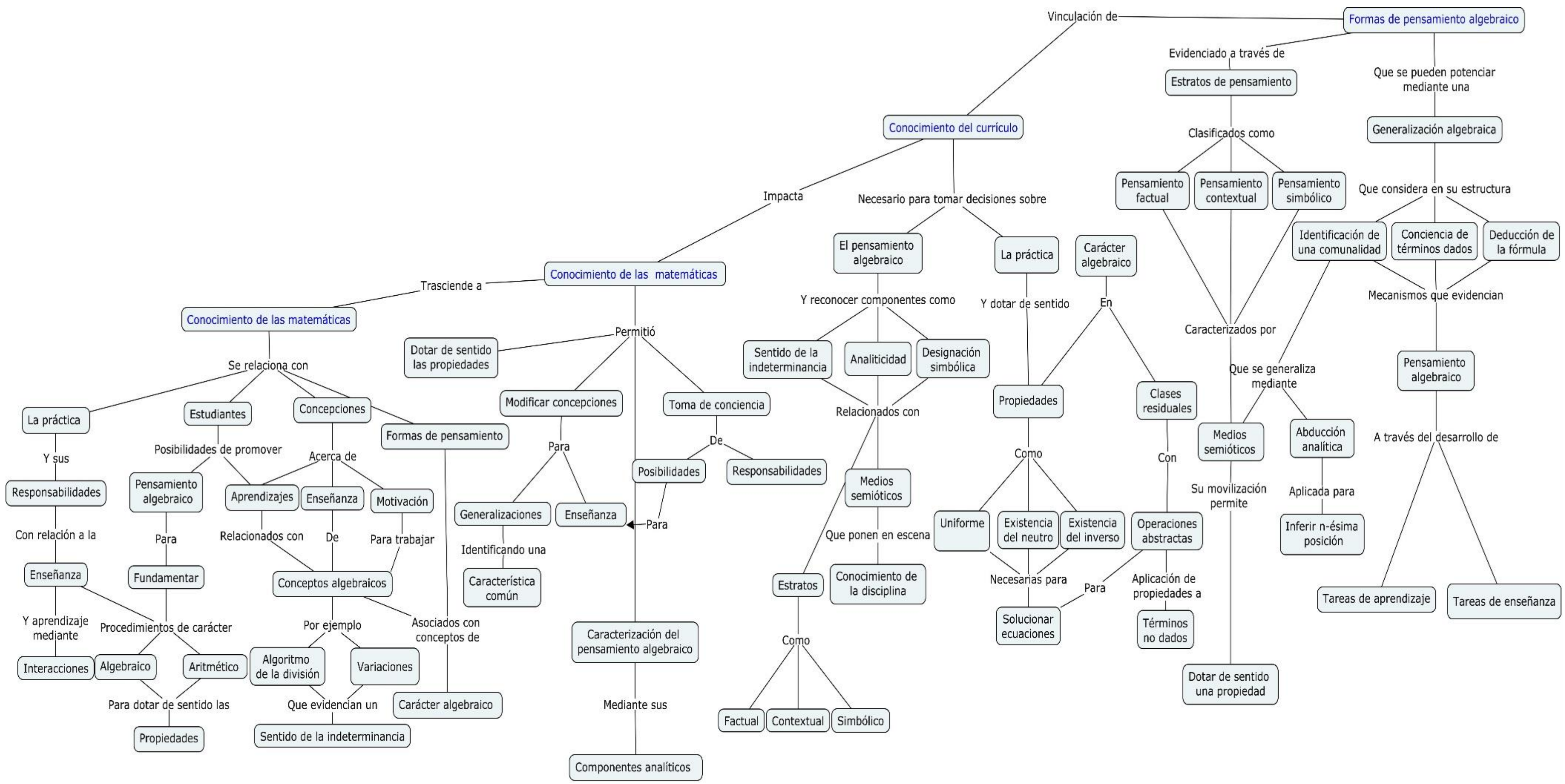


Figura 69. Mapa conceptual para el intra – análisis del momento 2.

La dimensión referida al conocimiento de las matemáticas, empezó poniéndose de manifiesto en relación con la práctica y el tipo de pensamiento matemático que en ella se potenciaba; en este componente se evidenció la ausencia del pensamiento algebraico, posiblemente porque no existía un reconocimiento de la posibilidad que tenían los estudiantes y profesores de fundamentar y consolidar formas de pensamiento algebraico; adicionalmente, tampoco existía claridad frente a lo que podía significar realizar tareas de carácter algebraico en la perspectiva de Radford (2010a, 2010b) o una caracterización para este pensamiento.

El conocimiento de las matemáticas, en la línea del pensamiento algebraico temprano, empezó a evidenciar cambios a través de la consolidación de conceptos en este campo; las actividades caracterizadas por el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica, posibilitaron distintas manifestaciones de formas de pensamiento algebraico, donde los medios semióticos fueron referente para comprender qué podía significar pensar algebraicamente y cómo refinar este proceso. En este sentido, los profesores continuaron fortaleciendo sus reflexiones y la toma de conciencia, en relación con las actividades algebraicas que hicieron, las cuales se revirtieron en acciones encaminadas a modificar sus prácticas y a vincular los nuevos conceptos que estaban construyendo y que querían que sus estudiantes también aprendieran.

Se observa una progresión en el conocimiento de las matemáticas cuando los profesores sintieron que estaban aprendiendo conceptos algebraicos desconocidos para ellos, que les permitían fundamentar este pensamiento; incluso, lograron la confianza suficiente para poner de manifiesto su conocimiento en el diseño de planeaciones y en la modificación y organización de los objetivos de enseñanza; de esta manera, el pensamiento algebraico empezó a tener un papel protagónico en el currículo y en el modo de gestionarlo (Ponte, 2012).

Finalizando el trabajo de campo, la documentación lograda aportó evidencias para mencionar que las formas de pensamiento algebraico se volvieron inherentes al trabajo que los profesores realizaron durante la investigación, en términos de su conocimiento y del de sus estudiantes; entender el carácter algebraico de las tareas, una caracterización y estratificación propia de este pensamiento (Radford, 2010a), el comportamiento de una estructura, mediado por la comprensión de propiedades para resolver ecuaciones, un proceso de generalización de patrones, fueron algunas de las evidencias que respaldaron la consideración de un progreso en la dimensión del conocimiento de las matemáticas.

4.4.3. Intra – análisis momento 3. El momento 3 de cada tarea de formación, estuvo destinado a diseñar tareas de aprendizaje para los estudiantes; esta fue una actividad que requirió del reconocimiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus intereses y necesidades; adicionalmente, fue necesario que los profesores estuvieran conscientes de cuál era el currículo que operaba en sus aulas, para poder tomar decisiones sobre él; en este sentido, las dimensiones para el conocimiento del currículo y para el conocimiento de los estudiantes, primaron en los momentos 3 de cada tarea, aunque se debe anotar que las otras también estuvieron presentes. El mapa conceptual de la figura 70 muestra cómo se evidenciaron cambios en las dimensiones mencionadas.

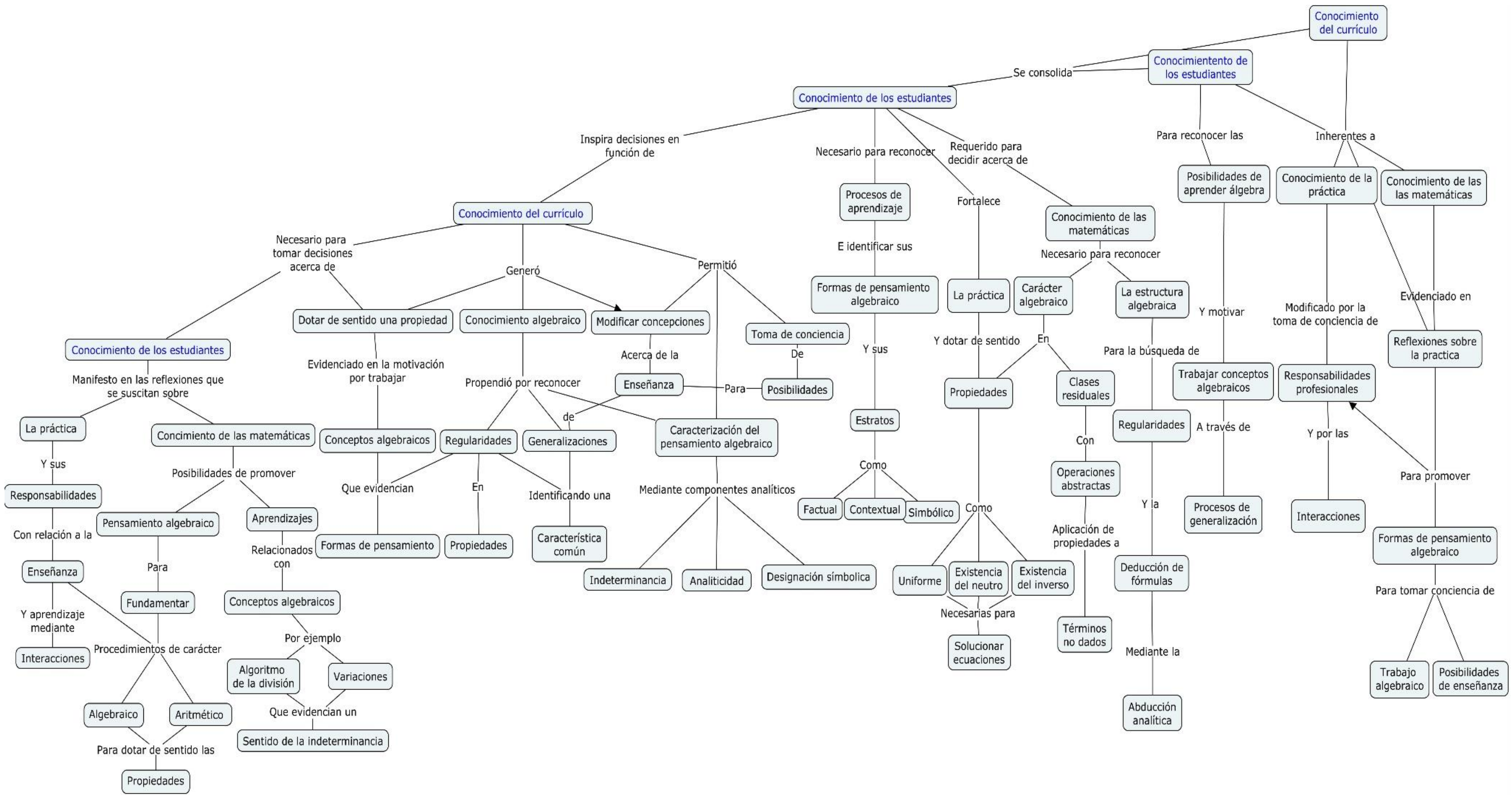


Figura 70. Mapa conceptual para el intra – análisis del momento 3.

El diseño de tareas de aprendizaje fue un proceso que, paulatinamente se refinó y que empezó progresivamente a vincular componentes del pensamiento algebraico. Las reflexiones que mediaron estas elaboraciones, generalmente estuvieron en función de pensar en los estudiantes, en que ellos pudieran aprender y potenciar su pensamiento algebraico y en que el currículo que operaba en sus aulas fuera coherente con este propósito. En consecuencia, se observó cómo los profesores descubrieron que fue posible promover pensamiento algebraico en sus estudiantes, y perdieron el temor a hacer propuestas de actividades con carácter abstracto y modificaciones curriculares.

Un elemento que se logró destacar en relación con el conocimiento de los estudiantes y cómo este fue progresivo desde la perspectiva de los profesores, tuvo que ver con la modificación de la concepción de que los estudiantes podían no estar en condiciones de pensar algebraicamente; en este caso, los profesores terminaron reconociendo que existían estratos de pensamiento que los estudiantes evidenciaron en sus prácticas y que, en consecuencia, la promoción del pensamiento algebraico fue viable y se materializó tanto en el trabajo de los estudiantes como en el currículo.

4.4.4. Intra – análisis momento 4. El momento 4 de cada tarea fue propio de las reflexiones de cierre, la valoración de cada encuentro y la revisión de logros y retos. Por lo tanto, lo que se logró observar en el rastreo realizado en los cuatro momentos, fue que, en este espacio, el papel conferido a las interacciones fue privilegiado. Las interacciones consigo mismo, con los pares, con los estudiantes y con el conocimiento, pudieron evidenciar cambios progresivos, pues empezaron con una modificación en las concepciones y trascendieron hasta propiciar acciones concretas sobre distintas dimensiones del conocimiento profesional. El mapa conceptual de la figura 71 muestra cuáles componentes mediaron las interacciones mencionadas.

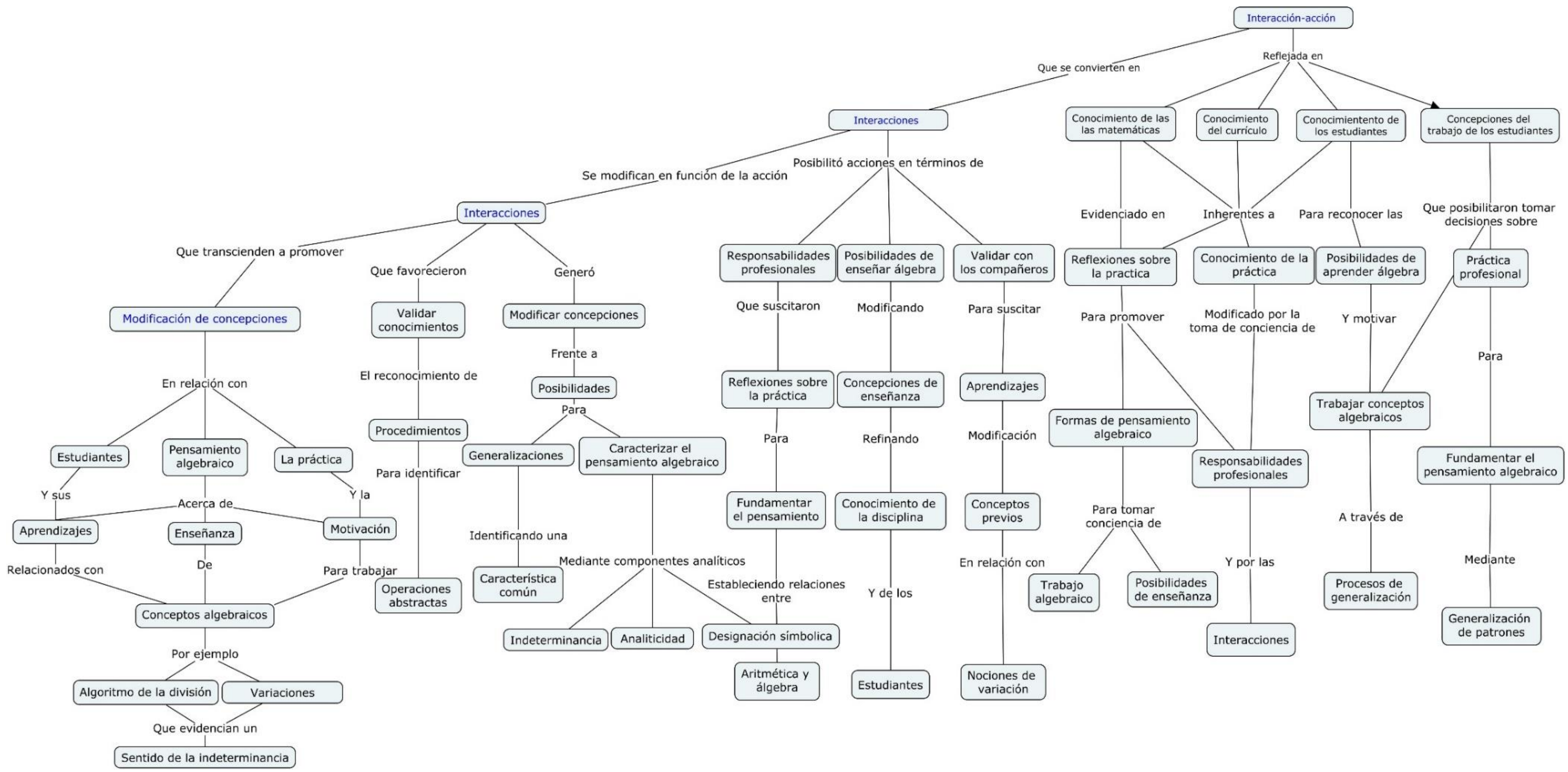


Figura 71. Mapa conceptual para el intra – análisis del momento 4.

La presencia reiterada de las interacciones en cada espacio de formación, lo constituyó como un elemento consustancial a la transformación del conocimiento profesional; esto se sustenta con la documentación lograda en el análisis en cuestión, que da cuenta de la incidencia de las interacciones sobre: lo que los profesores estaban aprendiendo, mediado por el apoyo profesional de los pares e investigadora; lo que decidieron en relación con la práctica, toda vez que fueron decisiones conjuntas y consensuadas; el conocimiento que tenían de sus estudiantes, pues mediante las interacciones con ellos, este fue modificado; sobre sus propias concepciones, pues las reflexiones se revirtieron en sí mismos, en lo que hacían y pensaban, y fueron complementadas con los aportes de sus compañeros, las discusiones, los debates y la integración de saberes y perspectivas.

Las interacciones con el conocimiento de las matemáticas pudieron progresar en la medida que evolucionó el pensamiento algebraico de los profesores; así, en este contexto, esos aprendizajes fueron mediados por interacciones con los pares, los estudiantes y consigo mismos. De manera similar, las interacciones se manifestaron en el conocimiento del currículo y de la práctica, propiciando aprendizajes y validaciones que dieron cuenta de cómo se consolidaron y confluyeron en la materialización de la acción, reafirmando cambios en las dimensiones del conocimiento profesional.

4.5. Consideraciones para la elaboración de una postura explicativa: codificación selectiva

Concatenar todos los componentes del análisis, descritos en este apartado, en un esquema que refleje la síntesis interpretativa de cómo el profesor transforma su conocimiento profesional, resultó notablemente complejo, por la densidad y fundamentación de la documentación realizada; sin embargo, asumiendo un criterio de jerarquización fue posible tomar una decisión para determinar qué elementos se pondrían en primera instancia. Así, todos aquellos que fueron recurrentes se consideraron como posibles componentes del esquema, mientas que los que se referían a particularidades y no tuvieron mucha presencia pudieron ser obviados en la postura explicativa.

4.5.1. Postura explicativa para la transformación del conocimiento profesional. En el marco de la elaboración de una postura explicativa que, a la luz de la teoría fundamentada diera cuenta de cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano, se elaboró un esquema explicativo (figura 72) que procuró sintetizar la postura elaborada a lo largo del análisis. El esquema completo se presenta en el anexo B, y en este apartado se detallan sus componentes.

La figura 72, correspondiente al esquema explicativo, presenta los elementos que se configuraron como estructurantes, para dar cuenta de cómo el profesor de matemáticas transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano; poniendo en consideración que se trata de un asunto, inicialmente asociado con la toma de conciencia, entonces el esquema debe leerse de adentro hacia afuera, partiendo de *"configurándose como un ser consciente"*, pues este fue el modo cómo se interpretó la transformación, que empezó a vincular cada vez más componentes en distintas dimensiones. Cabe mencionar que, el esquema explicativo es complejo, dada la abundancia de relaciones construidas en el desarrollo del análisis realizado; por lo tanto, para efectos de aportar claridad al respecto, se fraccionó en cinco componentes, que fundamentan la postura explicativa que pretende aportar este estudio doctoral.

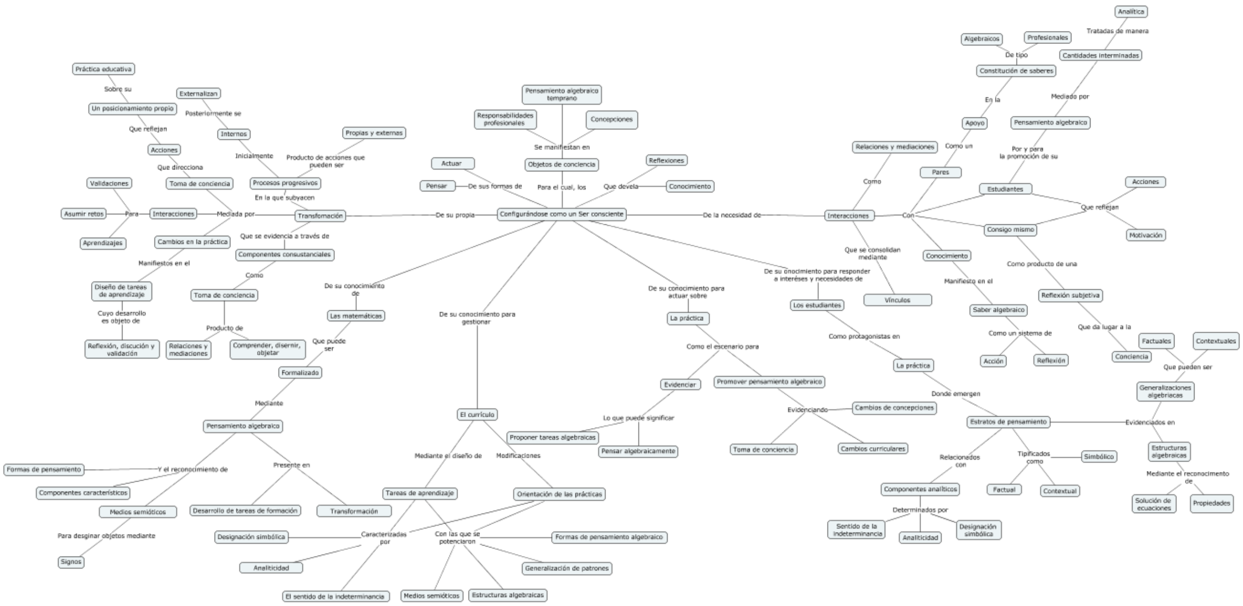


Figura 72. Elaboración propia. Esquema explicativo.

La figura 73 presenta, en la esquina superior derecha, la estructura del esquema explicativo (figura 72), en ella se señala con un recuadro azul, el apartado sobre el cual se hace énfasis en la presente descripción. El análisis de los datos que aportaron información para la elaboración de una postura explicativa, dio cuenta de que el profesor transforma su conocimiento profesional cuando se configura como un ser consciente (ver figura 73). Si entendemos, en la perspectiva de Radford (2017), la conciencia como una reflexión del sujeto que se posiciona, que no es contemplativa, sino más bien una reflexión sobre realidades para comprender, refutar, debatir, disentir y sentir a otros, a nosotros mismos y al mundo, entonces, ser consciente ha de implicar que el profesor tome conciencia de sus formas de pensar y de actuar, en contextos académicos y profesionales, donde se ponen de manifiesto objetos de conciencia, como las responsabilidades profesionales, el pensamiento algebraico temprano y las concepciones, que suscitan reflexiones y acciones sobre la labor docente, donde el conocimiento es susceptible de modificaciones, producto de la conciencia.

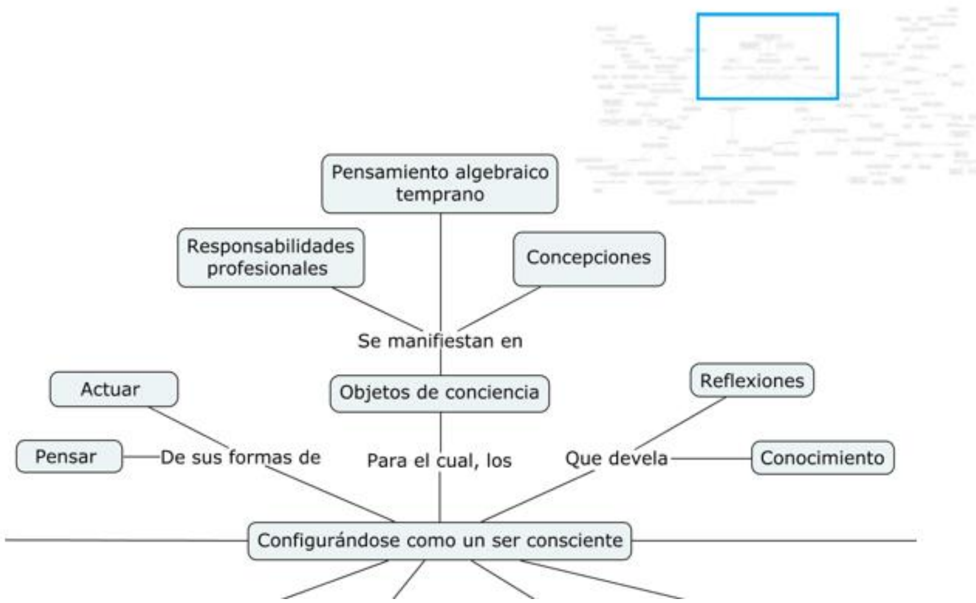


Figura 73. Componente 1 del esquema explicativo.

Considerar el profesor un ser consciente, también implica que reconozca, en su propia transformación (ver figura 74), un proceso progresivo que empieza a nivel interno con una toma de conciencia, producto de las distintas interacciones, de la participación en procesos formativos, de la reflexión sobre la práctica y que, posteriormente, se externaliza mediante acciones que dan cuenta de un posicionamiento frente a la labor profesional. En este sentido, en el marco del desarrollo del estudio, la naturaleza de la transformación se definió en términos de componentes consustanciales; uno de ellos fue la toma de conciencia, que permitió comprender, discernir y objetar (Radford, 2017) en relación con la necesidad de cambios sobre la práctica y cómo lograrlo.

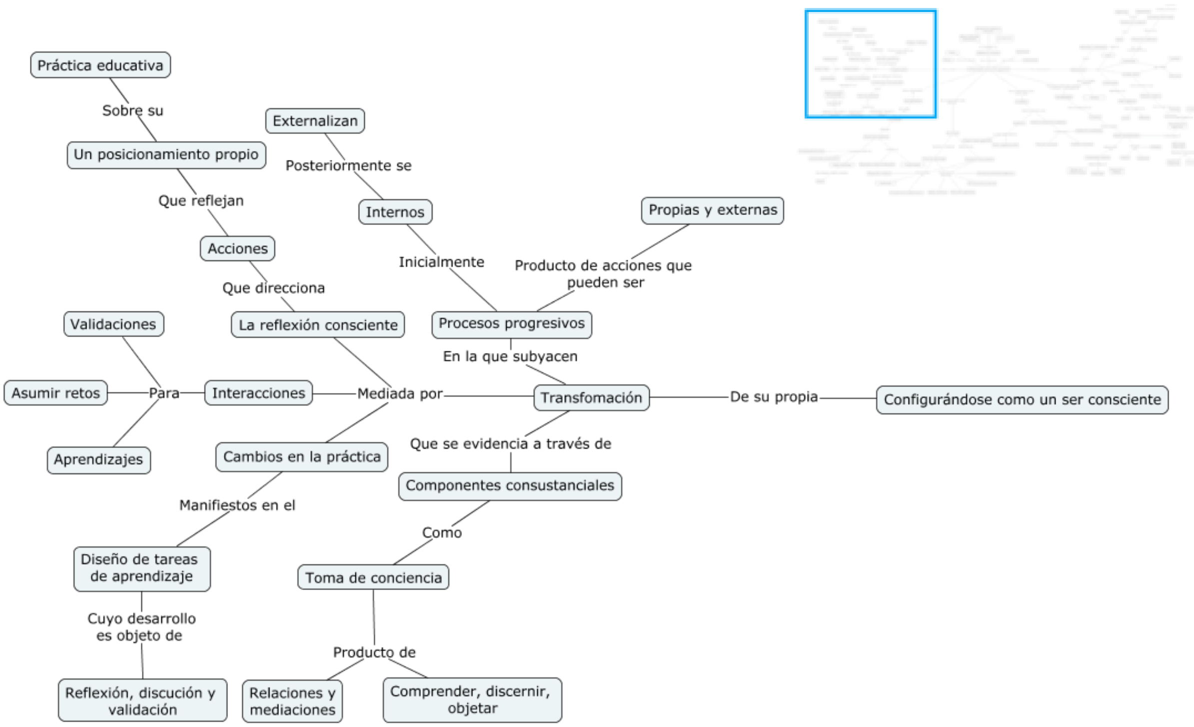


Figura 74. Componente 2 del esquema explicativo.

En la figura 74 se puede apreciar que las interacciones, para propiciar aprendizajes, asumir retos y validar conocimientos, no solo permiten crear vínculos profesionales con los compañeros, sino que, también, se constituyen como otro componente que subyace a la naturaleza de la transformación, materializada en cambios sobre la práctica; para efectos del estudio, estos cambios se evidenciaron en el diseño de tareas de aprendizaje para los estudiantes, inspiradas en las tareas de formación. Pero este diseño trascendió a la aplicación, donde el desarrollo de las planeaciones fue objeto de reflexión, discusión y validación de las propuestas, pertinencia y aprendizajes profesionales, mediado por interacciones. En la figura 75 se observa el papel de las interacciones como un componente natural al ejercicio docente, a la luz de la conciencia de los profesores.

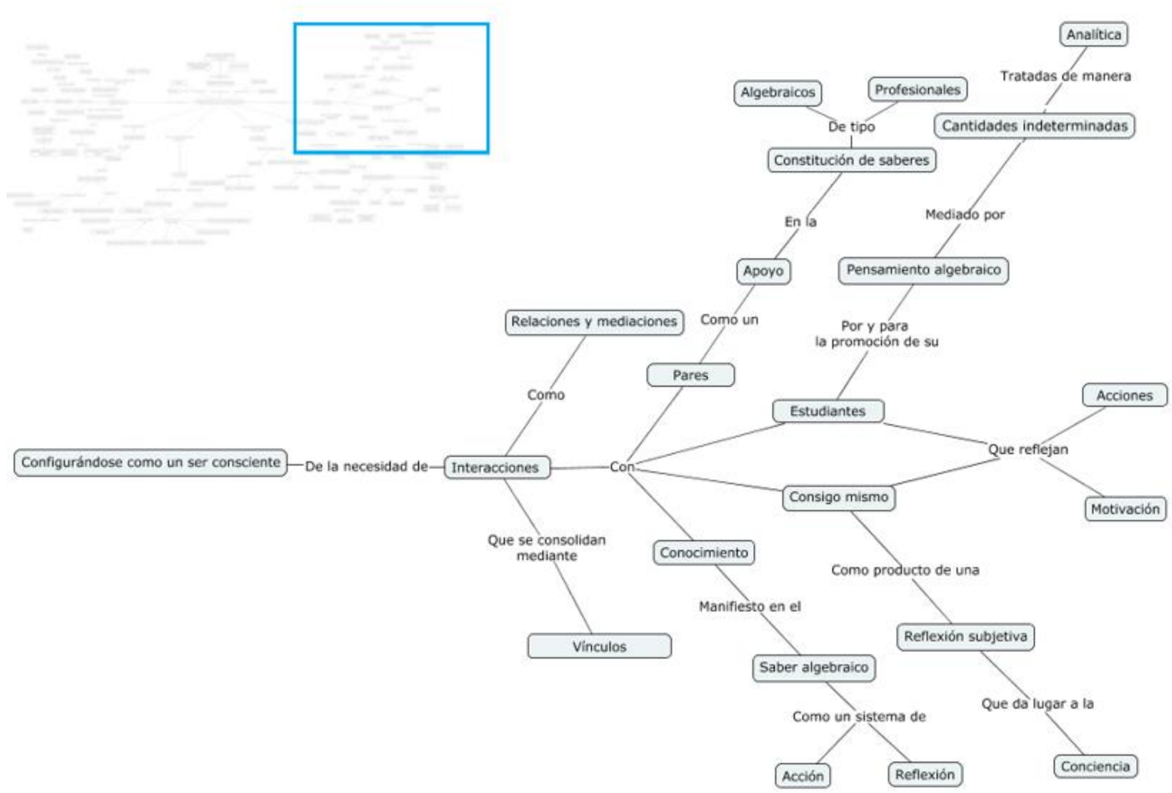


Figura 75. Componente 3 del esquema explicativo.

El papel de las interacciones trascendió al establecimiento de vínculos mediados por las relaciones entre los profesores. Así, reconocer en los pares un apoyo profesional, se constituyó en una oportunidad para consolidar saberes de tipo algebraico y profesional. En este contexto, se propiciaron también interacciones con el conocimiento que, en el marco del desarrollo de la investigación, se configuraron en términos de la reflexión que hicieron los profesores con relación al saber algebraico, el cual, en coherencia con Vergel y Rojas (2018), "es una síntesis evolutiva (sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa) y culturalmente codificada (como patrones de acción) de hacer y reflexionar en términos analíticos" (p. 26).

Para el caso de las interacciones consigo mismo, estas fueron designadas como una toma de conciencia que se manifestó mediante una reflexión subjetiva, que fue reflejo de las acciones y de la motivación por el trabajo algebraico realizado por los profesores y con los estudiantes. En esta línea, el trabajo con los estudiantes también propició interacciones, donde la necesidad de promover pensamiento algebraico favoreció el estudio y el reconocimiento de una caracterización (Radford, 2010a) para este, a través de cantidades indeterminadas tratadas de manera analítica. Este último, es un asunto que también se pone en consideración para referir cómo el profesor transforma su conocimiento profesional, en términos de la conciencia del conocimiento de las matemáticas y de la gestión del currículo, como se ilustra en la figura 76.

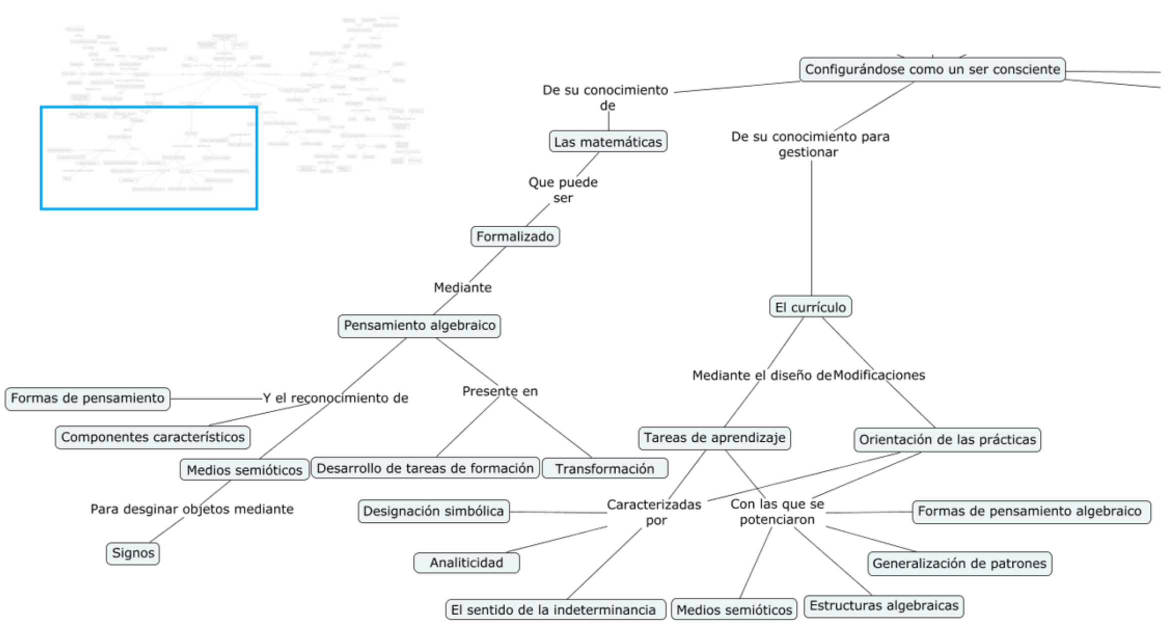


Figura 76. Componente 4 del esquema explicativo.

Dar cuenta de cómo el profesor transforma su conocimiento profesional, implicó en el estudio una manifestación consciente de su conocimiento de las matemáticas y de la manera de gestionar el currículo. Uno de los posibles criterios que permitió esto, tuvo que ver con los componentes analíticos que caracterizan el pensamiento algebraico, asumidos en el estudio en la perspectiva de Radford (2010a, 2010b) y de Vergel (2014, 2015a, 2018): sentido de indeterminancia, analiticidad y designación simbólica o expresión semiótica de los objetos. El reconocimiento de estos últimos amplió la perspectiva de los profesores de lo que puede significar pensar algebraicamente, en el marco del desarrollo de las tareas de formación.

Otro posible criterio se asoció con las formas de pensamiento (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2014, 2015a, 2018) caracterizadas por medios semióticos que, en coherencia con Vergel (2015a), se consolidan como herramientas mediadoras que posibilitan manipular el medio y direccionar nuestros actos, dado que son portadores de una conciencia construida históricamente. La construcción histórica referida por Vergel (2015a) pudo leerse en el estudio como el devenir del desarrollo del trabajo de campo y de las tareas de formación, gracias a las cuales fue posible propiciar y evidenciar actos conscientes de una posible transformación.

Los actos conscientes, referidos en el párrafo anterior, dan cuenta de una actuación mediada por una toma de conciencia; al respecto, el diseño de tareas de aprendizaje dio cuenta de ello, toda vez que propició reflexiones y acciones en el aula, pues estas fueron elaboradas de manera conjunta, desarrolladas, validadas en la práctica misma y en la puesta en común realizada con los compañeros. El tránsito por estos procesos exteriorizó manifestaciones de la conciencia, referidas no solo al desarrollo de actividades algebraicas, como lo fue el trabajo con estructuras y generalización de patrones, sino también a un acercamiento de lo que puede significar pensar algebraicamente, en la perspectiva de Radford (2010a, 2010b) y de Vergel (2014, 2015a, 2018).

En coherencia con la idea expuesta en el párrafo anterior, una manifestación de la toma de conciencia propició acciones sobre el currículo que operaba en las aulas de clase de los profesores participantes, dando cuenta de una práctica orientada a promover pensamiento algebraico, a reconocer la presencia de posibles medios semióticos (gestos, palabras, representaciones tabulares, icónicas, concretas, simbólicas) que pudieran evidenciar formas de pensamiento algebraico factual, contextual o simbólico. Las modificaciones curriculares que incidieron en una actuación sobre la práctica y el conocimiento de los estudiantes, para responder a sus intereses y saberes, dan cuenta de cómo el profesor transforma su conocimiento profesional. En la figura 77 se alcanzan a apreciar los asuntos aquí referidos.

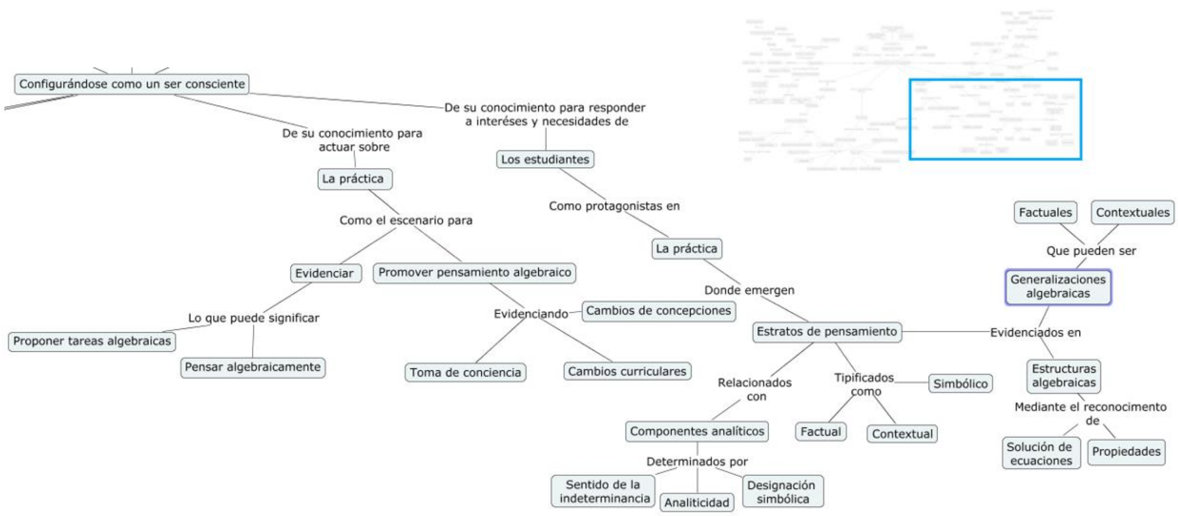


Figura 77. Componente 5 del esquema explicativo.

La postura explicativa elaborada en el estudio, a lo largo de los respectivos análisis presentados, da cuenta de cómo el profesor transforma su conocimiento profesional; esta postura es propia de los participantes de la investigación, pues su trabajo conjunto, elaboraciones y aportes, constituyeron los insumos para lograr esta documentación teórica. Sin embargo, aunque la postura explicativa es común para los profesores, hubo algunas particularidades que definieron rasgos distintivos propios de la trasformación de cada uno; algunos de estos fueron identificados en el trabajo de campo, otros reconocidos por ellos mismos y exaltados en sus bitácoras (ver anexo C: bitácoras de cierre).

Con el propósito de resaltar los rasgos particulares acerca de cómo el profesor transforma su conocimiento profesional, se diseñó la tabla presentada en la figura 78, que recogió ideas relevantes manifiestas por los profesores a lo largo del trabajo de campo; en esta se cotejan los elementos de las actividades algebraicas (fila principal) y las dimensiones del conocimiento profesional (columna principal) para determinar las respectivas reflexiones y posturas construidas por los profesores. Específicamente, la intersección de filas y columnas da cuenta de *ideas iniciales* expresadas por los profesores (en formato cursiva sin negrilla), e *ideas finales* (en formato cursiva con negrilla) referidas por algunos de ellos. Este proceso se realizó con ayuda del software Atlas.ti, rastreando los diálogos de cada profesor e identificando sus posturas en relación a cada idea presentada en la tabla. Así, en cada celda aparecen los profesores que, en algún momento, se pronunciaron respecto a una idea inicial.

Actividades de carácter algebraico / **Dimensiones del CPD**	**Algoritmo de la división**	**Abstracción de leyes de formación (operación)**	**Reconocimiento de las propiedades y solución de ecuaciones**	**Reconocimiento de secuencias – generalización de patrones**
Conocimiento de la matemática	*Lo entendemos y usamos de manera mecánica.* ***Se pueden explorar actividades algebraicas con él, búsqueda de regularidades, y de cantidades indeterminadas.*** ***(Julieht, Maritza, Edier)***	*Las abstracciones son muy elevadas.* ***Estamos en condiciones de hacer abstracciones que nos permitan fortalecer el pensamiento algebraico*** ***(Julieht, Maritza, Gloria, Edier)***	*Se reconocen las principales. No todas son útiles.* ***Las propiedades son indispensables para comprender el proceso de solución de una ecuación.*** ***(Julieht, Maritza, Gloria, Edier)***	*Muchas son fáciles de reconocer, se trata de seguir la secuencia de una suma, o repetir lo que se ve en una figura.* ***Las secuencias que trabajabamos buscaban generalización cercanas, dos o tres términos, pero no nos habíamos acercado a inferir una fórmula,***

				como ocurrió con la tarea. ***(Julieht, Maritza, Gloria)***
Conocimiento del currículo	*Es indispensable enseñarlo.* ***En enfoque puede ser diferente, explorando el carácter concreto, y otras relaciones existentes en él.*** ***(Julieht, Maritza, Gloria)***	*No se incluye en las planeaciones.* ***Pueden ser tomadas en cuenta en el currículo, los estudiantes sí son capaces de entender cómo hacer una operación cuando se le establecen condiciones.*** ***(Julieht, Maritza)***	*Sí se consideran en el plan de aula.* ***Se pueden proponer actividades para lograr un uso consciente de las propiedades, hacer, desahacer, propiedad uniforme.*** ***(Julieht, Maritza, Gloria, Edier)***	*Se deben trabajar según los estándares.* ***Se pueden trabajar con una perspectiva diferente, no solo completando una secuencia, sino analizando cómo son las relaciones entre los términos.*** ***(Julieht, Maritza, Gloria, Edier)***
Conocimiento de los estudiantes	*Dividir les cuesta mucho a los estudiantes.* ***Los estudiantes pueden hacer divisiones con material concreto (base 10) para comprender el algoritmo.*** ***(Julieht, Maritza, Gloria, Edier)***	*No son familiares para ellos.* ***Los estudiantes son capaces de abstraer relaciones y representarlas.*** ***(Julieth, Edier, Martiza)***	*No se las aprenden todas.* ***Se pueden aprender y usar con sentido, cuando se reconoce su utilidad en la solución de una ecuación.*** ***(Julieht, Maritza, Gloria)***	*Logran reconocer qué sigue en una secuencia, casi siempre.* ***Podrían hacer generalizaciones con múltiplos, con potencias, con el siguiente, el anterior.*** ***(Martiza, Edier)***
Conocimiento de los procesos de trabajo en el aula	*No se enseña con material concreto.* ***El uso del material base 10 permite***	*No se trabaja mucho en el aula; sería muy elevado para los estudiantes.*	*Se enseñan, para simplificar cálculos.* ***En la práctica permiten resolver***	*Es apropiado para llevar al aula.* ***Se deben continuar trabajando, procurando que los***

	dinamizar la práctica. ***(Julieht, Maritza, Edier)***	***En el aula se pueden proponer actividades que propicien abstracciones, nosotros podemos reconocer que estas permiten procesos de deducción.*** ***(Julieht, Gloria, Edier)***	***una ecuación, entendiendo el porqué de cada proceso.*** ***(Julieht, Maritza, Gloria, Edier)***	***estudiantes se acerquen a comprender un comportamiento general.*** ***(Julieht, Maritza, Gloria, Edier)***

Figura 78. Tabla diseñada para presentar algunas posturas de los profesores antes y después del proceso.

Los anteriores posicionamientos, expresos por los profesores en la figura 78, muestran particularidades en sus ideas y se adscriben a la postura explicativa que permitió analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano. Es de exaltar que cada posicionamiento de los profesores, presentado en la figura 78, develó indicios de una trasformación en las dimensiones del conocimiento profesional, con relación a las actividades de carácter algebraico que propendieron por la promoción de este pensamiento en las aulas de clase.

En coherencia con los planteamientos hasta ahora expuestos, en el estudio se diseñó un modelo (figura 79) para sintetizar el esquema explicativo; este modelo, además, ofrece una posible lectura de las relaciones que podrían tener la toma de conciencia, referida al profesor como un ser consciente, las interacciones, las dimensiones del conocimiento profesional (Ponte, 2012) y el pensamiento algebraico (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2014); en la figura 79 se expone el modelo en mención, en el cual se integran componentes estructurantes de la postura explicativa elaborada en el proceso de análisis.

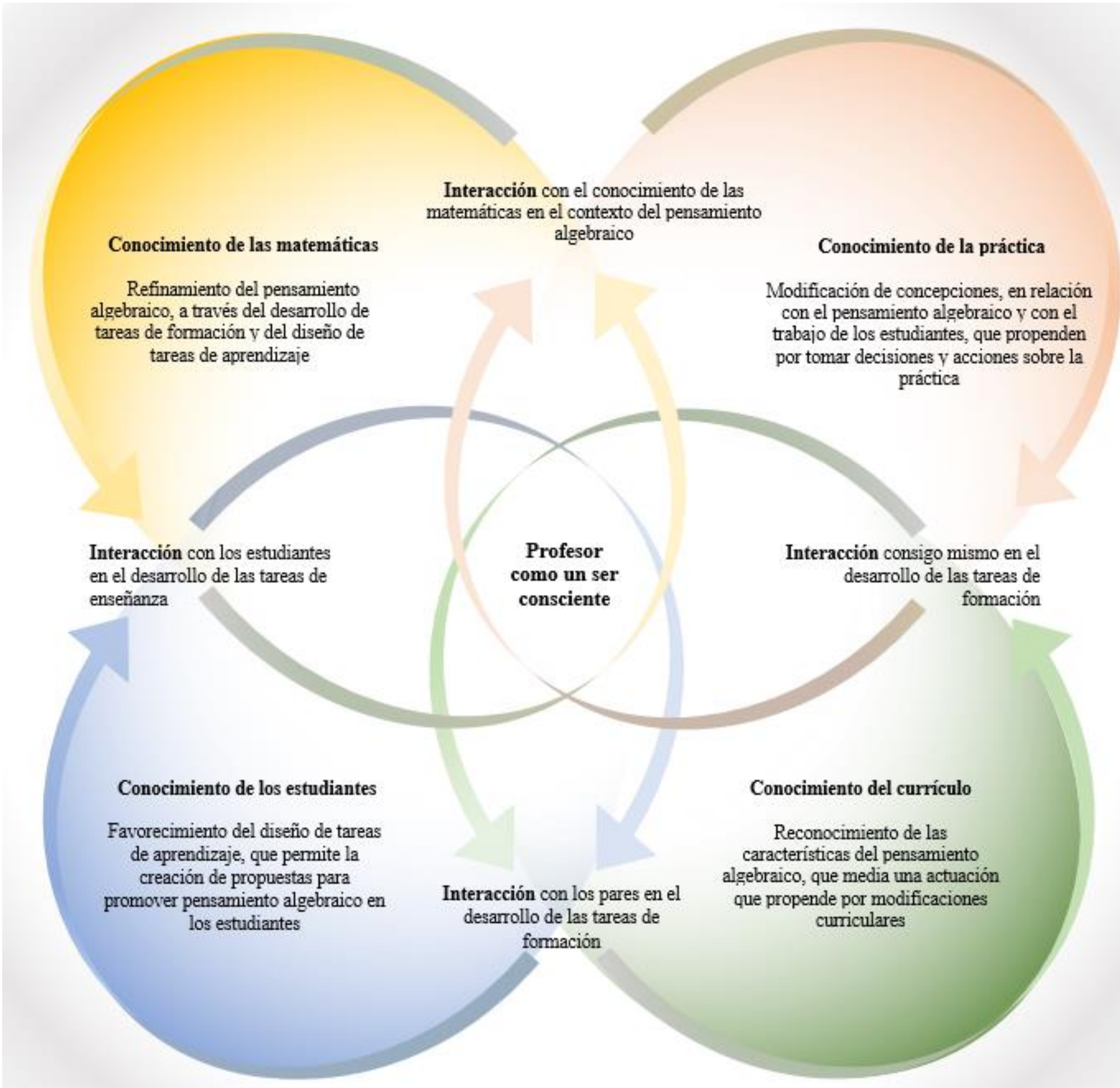


Figura 79. Elaboración propia. Modelo para la postura explicativa.

En el modelo presentado en la figura 79, el profesor, como un ser consciente, se ubica en el centro y, a su alrededor, circundan las dimensiones del conocimiento profesional (Ponte, 2012) y las distintas interacciones referidas en el proceso de análisis. Adicionalmente, en el modelo se aprecian vínculos entre las interacciones, establecidos a través de flechas que indican un proceso cíclico en el cual una interacción lleva a la otra. La relación cíclica, entre dos interacciones, define una manifestación de las dimensiones del conocimiento profesional, en términos de actividades de carácter algebraico.

Cabe mencionar que, cada relación cíclica definida entre interacciones, permite distinguir en el modelo un área con un color específico, en la cual confluyen: el profesor como ser consciente, dos interacciones y una dimensión del conocimiento profesional, manifiesta en una actividad de carácter algebraico. Es necesario, además, precisar que el modelo elaborado para sintetizar el esquema explicativo, conserva las convenciones de los colores utilizados en el modelo de Ponte (2012) (figura 1); en este último, se aprecia cómo los colores se integran (rosa para el conocimiento sobre la práctica, naranja para el conocimiento de las matemáticas, azul para el conocimiento de los estudiantes y verde para el conocimiento del currículo) para indicar que no es posible definir límites entre una y otra dimensión y, por lo tanto, no se concibe una separación entre ellas.

En la interpretación aportada por el estudio, en relación con la pregunta ¿cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano?, se observa que el modelo de la figura 79 presenta al profesor como un ser consciente, que interactúa consigo mismo, entendiendo esta última en términos de las reflexiones logradas y manifiestas en una toma de conciencia; adicionalmente, la interacción consigo mismo se vincula con una interacción con el conocimiento, en la cual, el profesor realiza y diseña tareas de carácter algebraico, pero, además, reconoce los componentes característicos de este pensamiento. Así, en la relación cíclica y bidireccional, que se observa entre ambas interacciones, subyace una modificación de concepciones, relacionada con la promoción del pensamiento algebraico y que propende por la toma de decisiones y acciones sobre la práctica (Ponte, 2012).

Continuando en la línea de la idea presentada en el párrafo anterior, la interacción consigo mismo también se relaciona con la interacción con los pares, entendiendo esta última en términos de la creación de vínculos profesionales que propenden por diálogos académicos, disciplinares y por la consolidación de apoyos mutuos. Reconociendo la relación cíclica presentada en el modelo, interactuar con los pares repercute en la reflexión y toma de conciencia, como una forma de interacción consigo mismo. Así, en estas dos interacciones, se manifiesta una construcción conjunta que evidencia un reconocimiento del pensamiento algebraico y de sus características, y que, además, es mediadora en la toma de decisiones acerca de modificaciones curriculares, que develan un conocimiento del currículo (Ponte, 2012).

Otra relación que se logra observar en el modelo, es la establecida entre la interacción con el conocimiento de las matemáticas y con los estudiantes; en esta relación, se percibe que refinar el conocimiento disciplinar contribuye al diseño de tareas de aprendizaje y, adicionalmente, interactuar con los estudiantes y reconocer sus intereses y necesidades, inciden en el tipo de conceptos algebraicos estudiados y aprendidos por los profesores. De esta manera, entre ambas interacciones se presenta la posibilidad de promover el pensamiento algebraico, a través del desarrollo de tareas de aprendizaje diseñadas por los profesores, el cual devela un conocimiento de las matemáticas (Ponte, 2012).

El vínculo bidireccional que se observa entre la interacción con los estudiantes y la interacción con los pares, se puede definir en términos de un diálogo disciplinar entre los profesores, en el cual se estiman las demandas y requerimientos de los estudiantes; en este sentido, conocerlos y considerar sus posibles necesidades, son elementos objeto de reflexión entre pares; de esta manera, los apoyos mutuos propenden por el diseño y creación conjunta de tareas de aprendizaje, que buscan promover el pensamiento algebraico y, en ese sentido, la promoción de dicho pensamiento también se convierte en foco de atención en el trabajo desarrollado por los pares, inspirado en el conocimiento de los estudiantes (Ponte, 2012).

En el modelo en cuestión, no es posible separar unas interacciones de otras, pues existen vínculos que, aunque no se observan de manera directa, se pueden inferir de una relación transitiva; así, que la interacción consigo mismo se relacione con la interacción con el conocimiento y, esta, a su vez, con la interacción con los estudiantes, implica una relación entre la interacción consigo y con los estudiantes que, además, es bidireccional. En consecuencia, las reflexiones y toma de conciencia suscitadas en los profesores, propenden por la promoción del pensamiento algebraico en sus aulas de clase y, de manera similar, las necesidades evidenciadas en ese espacio motivan la reflexión de los profesores.

Una situación similar a la descrita en el párrafo anterior, se observa entre la interacción con el conocimiento y con los pares; en ambas, se evidencia una relación bidireccional, en la cual refinar el conocimiento de las matemáticas fue un proceso que contó con el apoyo de los pares, toda vez que las constantes disertaciones y validaciones conjuntas favorecieron nuevos aprendizajes y el reconocimiento de otras perspectivas para concebir el pensamiento algebraico. En este sentido, el refinamiento del conocimiento disciplinar se logró, entre otros, gracias a la interacción con los pares y, esta última, a su vez, favoreció la validación y construcción de conceptos de carácter algebraico.

Finalmente, cabe reiterar que, configurarse como un ser consciente implicó en la investigación una transformación que empezó como un proceso interno, suscitado por agentes externos, como lo fueron la participación en un proceso formativo, el desarrollo de actividades de carácter algebraico, el diseño de tareas que propendieron por promover el pensamiento algebraico y las interacciones que suscitaron aprendizajes y cambios en las concepciones; consecuentemente, el proceso interno se externalizó a través de acciones reflejadas en el conocimiento profesional, con el encuentro de componentes consustanciales que estuvieron presentes, de manera continua y progresiva durante el desarrollo del trabajo de campo.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El presente capítulo pone en consideración las respectivas conclusiones del estudio llevado a cabo, en relación directa con la pregunta de investigación y la consecución del objetivo inicialmente planteado. Estas están fundamentadas en el proceso de análisis desarrollado en el capítulo 4 y en la postura explicativa derivada del mismo. Esta postura es un fundamento teórico que pretende dar cuenta de cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano. Adicionalmente, se mencionan los aportes al campo de la Educación Matemática, y algunas dificultades manifiestas en el estudio; finalmente, se plantean posibles líneas investigativas y recomendaciones.

5.1. Respuesta a la pregunta de investigación y consecución del objetivo propuesto

La investigación se enfocó en la pregunta: ¿cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano? Para dar respuesta a esta, además de una indagación y un análisis refinado de la respectiva literatura, que permitieron establecer unos referentes teóricos, también fue necesario precisar varios asuntos: una postura para el conocimiento profesional y para el pensamiento algebraico temprano, la conformación de un grupo de profesores participantes, la estructura de las tareas de formación a desarrollar y el criterio con el cual fueron analizados los datos. Los anteriores elementos se integraron para configurar una postura explicativa que posibilitó responder a la pregunta del estudio en cuestión.

Investigar en lo referido a cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano, implicó definir en el horizonte teórico una postura pertinente para el conocimiento profesional; específicamente, para efectos del desarrollo del estudio, se asumió la propuesta de Ponte (2012), quien reconoce cuatro dimensiones para referirse a este, en términos de un conocimiento didáctico. Así, analizar los datos permitió definir unidades de análisis codificadas, que se agruparon en categorías relacionadas, entre otras, con dichas dimensiones: el conocimiento de las matemáticas, de los estudiantes, del currículo y de la práctica; en la definición de la postura explicativa, el agrupamiento de las categorías posibilitó proponer categorías temáticas, las cuales indicaron cambios progresivos en el conocimiento profesional de los profesores. De esta manera, las dimensiones mencionadas fueron objeto de análisis y foco de atención para la elaboración de la postura, y se consolidaron como parte estructurante de la misma.

No solo las dimensiones anteriormente mencionadas hicieron parte de la estructuración de la postura explicativa, también se reconoció la toma de conciencia, como un criterio para referirse al profesor como un ´ser consciente´, cuyo auto-reconocimiento, mediado por agentes internos y externos, le permitió posicionarse frente a su labor docente y actuar sobre ella en distintas dimensiones: tomando decisiones sobre la práctica, pensando y re-estructurando el currículo, reconociendo en los estudiantes posibilidades para pensar algebraicamente, refinando en él y en sus estudiantes el pensamiento algebraico, y acercándose al reconocimiento de una postura para este último como la descrita por Radford (2010a, 2010b).

En consonancia con la idea expuesta en el párrafo anterior y, tomando como referente el álgebra temprana para la cual se decidió una postura teórica en este campo, la del pensamiento algebraico temprano propuesta por Radford (2010a, 2010b) y reafirmada por Vergel (2014), cabe mencionar que hubo un acercamiento y aceptación por parte de los profesores, frente a la idea de que el pensamiento algebraico se enmarca en componentes analíticos, como: el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica; y que, además, responde a unos estratos: factual, contextual y simbólico. Lo anterior, se logró reflejar en las intervenciones de los profesores, en las modificaciones de sus concepciones con relación al pensamiento algebraico, a las posibilidades de promover el mismo y de que los estudiantes aprendan conceptos de carácter algebraico en los niveles de primaria.

Aunque lo referido a los componentes y estratos no fue objeto de interés inicial en el estudio, sí se reconoce que estos elementos permitieron aportar coherencia y consistencia a las afirmaciones sobre la transformación de los profesores y, por lo tanto, se propició la posibilidad de que ellos, en el desarrollo de las tareas de formación, también pudieran reconocer otra forma de entender lo que puede significar pensar algebraicamente; este es un asunto que incidió en el cambio de concepciones y en la toma de conciencia, los cuales son aspectos asociados con la promoción del álgebra en los niveles de la educación básica primaria.

Las interacciones que se suscitaron en el desarrollo de las tareas de formación, también hicieron parte de la postura explicativa; de hecho, fueron reconocidas en el estudio como un componente que estructuró su elaboración; así, para efectos de la investigación, el papel de las interacciones consigo mismo, con los pares, con los estudiantes y con el conocimiento de las matemáticas, específicamente en lo referido al pensamiento algebraico, no solo incidieron sobre las dimensiones del conocimiento profesional, sino que convocaron a una reflexión sobre la práctica y a una actuación sobre la misma, mediada por el desarrollo de tareas de carácter algebraico y el diseño de otras para llevar al aula.

Los procesos, hasta ahora descritos, develaron evidencias de transformación que dieron cuenta de qué estaba ocurriendo con el profesor durante estas manifestaciones; de esta manera y, en coherencia con la postura explicativa elaborada a lo largo del proceso de análisis presentado en el capítulo 4, el profesor transforma su conocimiento profesional cuando se configura como un ser consciente de sus necesidades y responsabilidades, frente a la promoción del pensamiento algebraico, y actúa en consecuencia, reconociendo que es susceptible de comprender la naturaleza de los cambios que develan sus acciones, en interacción consigo mismo, sus pares, sus estudiantes y el conocimiento; adicionalmente, en la toma de conciencia del profesor, que transcendió a la acción sobre la práctica, subyacen elementos consustanciales a la transformación, manifiestos en cada dimensión del conocimiento profesional (Ponte, 2012) en el contexto del pensamiento algebraico temprano (Radford, 2010a, 2010b; Vergel, 2014).

En coherencia con las ideas hasta ahora expuestas, y con la documentación teórica fundamentada en los registros que permitieron la tematización de las categorías presentada en el análisis, es posible afirmar que el estudio logró dar respuesta a la pregunta de investigación, a través de la postura explicativa elaborada durante los procesos de codificación abierta, axial y selectiva; en este sentido, la postura explicativa logró concluir cuáles fueron los componentes que incidieron en lo referido a cómo el profesor transforma su conocimiento profesional, a través de un esquema explicativo (figura 72) que procuró mostrar la estructura general del análisis detallado a lo largo del capítulo 4.

Con relación a la consecución del objetivo general: analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano, se alcanza a dilucidar que este fue logrado, en tanto se consiguió la realización de un análisis que permitió documentar los aspectos referidos en el objetivo y, de igual manera, fundamentar su consecución. El análisis consideró distintas fases, en las cuales se tuvo en cuenta la presencia de indicios de transformaciones a lo largo del desarrollo de las tareas, pero, también, en lo concerniente al desarrollo de los momentos, con el fin de observar, en distintas perspectivas, qué ocurrió con el profesor en términos de la trasformación de su conocimiento profesional.

En términos del objetivo general, cabe mencionar que, adicionalmente, hubo un análisis de lo que sucedió desde lo particular, para dar cuenta de cómo cada profesor transformó su conocimiento profesional, en el contexto del pensamiento algebraico temprano. Aunque estas particularidades pudieron ser sutiles y no se alejaron significativamente de la postura explicativa general, sí permitieron perfilar rasgos característicos y propios de cada profesor, en las dimensiones descritas por Ponte (2012), tal como se muestra en la figura 78.

5.2. Aportes al campo de la Educación Matemática

La postura explicativa expuesta en el capítulo 4, que permitió responder la pregunta de investigación y dar cuenta de la consecución del objetivo, representa un aporte al campo de la Educación Matemática, en tanto permite dilucidar qué ocurre con el profesor de primaria y cuál es la posible naturaleza de la transformación que manifiesta. En este sentido, se puede apreciar un aporte teórico, al campo de la educación, para referenciar una caracterización de la transformación del profesor de matemáticas de primaria, en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Adicionalmente, a la luz de la interpretación de los datos analizados en el estudio, fue posible una articulación del modelo del conocimiento didáctico presentado por Ponte (2012), con el contexto particular propuesto en la investigación, el pensamiento algebraico temprano (Radford, 2010a, 2010b; Vergel y Rojas, 2018). Este último, ofreció un recurso potente para propiciar indicios de una transformación, en tanto fue mediador en: la toma de conciencia de la necesidad de promover pensamiento algebraico, cambios de concepciones, la motivación para el desarrollo de tareas de formación y el diseño de tareas de aprendizaje, y la decisión de actuar sobre la práctica.

Un aporte adicional, se puede enmarcar en el modelo presentado en la figura 79, que pone en diálogo dos posturas teóricas, la de Ponte (2012), en lo referido al conocimiento profesional, y la de Radford (2010a, 2010b), en lo relacionado con el pensamiento algebraico temprano; así, el modelo sintetiza y reafirma los resultados descritos en el análisis y permite una posible interpretación de cómo se vinculan ambas teorías, para dar cuenta de la respuesta a la pregunta de investigación y a la consecución del objetivo propuesto. En este sentido, las interacciones descritas en el esquema en cuestión, aparecen como un elemento estructurante de la transformación, que vincula el conocimiento profesional y el pensamiento algebraico temprano, generando un posible aporte al campo de la Educación Matemática.

En coherencia con la anterior idea, para efectos del presente estudio, la definición de una postura explicativa dio lugar a la elaboración de un modelo, el cual ofrece una interpretación de dicha postura; en el modelo, se reconoce al profesor como un ser consciente, cuya labor profesional está mediada por interacciones estrechamente relacionadas que permiten poner de manifiesto las dimensiones del conocimiento profesional, en el contexto del desarrollo de tareas de formación enmarcadas en el pensamiento algebraico temprano.

Las tareas de formación desarrolladas en el estudio, pueden ofrecer un recurso para apoyar procesos de planeación de clases y orientar el diseño de nuevas actividades. Específicamente, las actividades de carácter algebraico, referidas a estructuras y generalización de patrones, podrían constituir un referente para ilustrar otras formas de trabajar en el aula, con miras a la promoción del pensamiento algebraico temprano en el marco de la caracterización ofrecida por Radford (2008, 2010a, 2010b, 2013) y Vergel (2014, 2016c, 2019).

Finalmente, se reconoce un aporte adicional, en términos de apoyar procesos de formación para profesores de áreas rurales, quienes tienen pocas posibilidades de interactuar con sus pares debido a las características del modelo de Escuela Nueva. Así, el trabajo conjunto y los apoyos mutuos, permitieron estrechar vínculos laborales y académicos entre pares, generar confianza en sí mismos y en los estudiantes, para vincular el pensamiento algebraico en el currículo que opera en sus aulas de clase.

5.3. Dificultades del estudio

En el desarrollo de un estudio cualitativo, pueden emerger dificultades que impliquen modificaciones en las generalidades de la investigación o en el transcurrir del trabajo de campo. Algunas de las dificultades que se presentaron en el estudio, se exponen a continuación, dando cuenta de las decisiones que implicaron en el mismo.

- Debido a la amplia cantidad de información recolectada en el desarrollo del trabajo de campo, fue un reto decidir cuáles episodios o apartados deberían aparecer en el documento final, para sustentar las elaboraciones teóricas construidas. En ocasiones, los datos mostraban información relevante para el proceso de todos los profesores, pero no era posible presentarlos en su totalidad, y decidir cuál privilegiar, implicó definir criterios de selección; uno de ellos, por ejemplo, fue la coherencia entre el episodio y el momento de la tarea, sin perder de vista la pregunta de investigación, las dimensiones del conocimiento profesional y el contexto del pensamiento algebraico temprano.

- La construcción del esquema explicativo, presentado en el proceso de codificación selectiva, consideró entre los insumos para su elaboración, los mapas conceptuales diseñados en los procesos de inter – análisis e intra – análisis; pero estos tenían información amplia y detallada para cada situación, por lo que decidir qué elementos privilegiar de cada mapa no fue fácil, pues en ocasiones parecía riesgoso obviar información o sintetizar la misma. En consecuencia, uno de los criterios para seleccionar la información, tuvo que ver con que esta debía dar indicios de transformaciones y que, preferiblemente, debía ser recurrente en todos los momentos.

- Decidir qué criterios o establecer cómo orientar el análisis, de manera que no se descuidaran aspectos que pudieran aportar información para responder la pregunta de investigación, implicó discernir entre asuntos como: la conveniencia de detallar lo que ocurría con cada profesor y, luego, lo ocurrido de manera general, o documentar las generalidades y, posteriormente, las particularidades. Al respecto, durante el desarrollo del análisis, se observó que primó la presencia de datos que remitían a aspectos generales que dieron cuenta de cómo el profesor transforma su conocimiento profesional, por encima de las particularidades, por lo cual se decidió este enfoque en el proceso de análisis.

- En la línea de la anterior idea, hacer un rastreo de lo que ocurrió con cada profesor, que aportara información diferente a la descrita en la postura explicativa general, también implicó un reto, pues, en muchos casos, no se encontró información relevante o significativamente distinta a la expuesta en la postura general; sin embargo, con la ayuda del software Atlas.ti, fue posible rastrear los diálogos de cada profesor, para hacer una caracterización de sus percepciones iniciales y finales, y así, reafirmar lo descrito en el esquema de la postura explicativa e identificar particularidades en cada uno de ellos. En consecuencia, percibir la transformación individual de cada participante, fue un asunto que requirió poner el foco sobre cada caso particular a lo largo de trabajo y, aunque esto se realizó, no hubo rasgos significativamente distintivos en el proceso individual.

- La codificación realizada con el software Atlas.ti, tomó más tiempo del presupuestado, debido al elevado volumen de documentos transcritos y a la necesidad de organizar y clasificar los datos según las tareas desarrolladas y sus respectivos momentos. En este sentido, el software permitió hacer una agrupación de cada tarea, para la elaboración del respectivo análisis, pero el rastreo de cada momento en todas las tareas, exigió un procedimiento distinto y la creación de documentos adicionales en los cuales se pudieran registrar los momentos mencionados. Este proceso demandó mayor tiempo del previsto, sin embargo, su desarrollo favoreció el proceso de análisis y la observación de cambios progresivos en el conocimiento profesional.

- Las actividades de carácter algebraico, definidas en el campo de las estructuras algebraicas no convencionales, parecían, inicialmente un contexto arriesgado debido a que no todos los profesores tienen formación específica en matemáticas y, para ellos, podían ser complejas las actividades diseñadas. No obstante, la propuesta fue pertinente, toda vez que, para la solución de una ecuación, por ejemplo, se exigía el uso con sentido de las propiedades y el reconocimiento de su pertinencia en la práctica educativa.

- El contexto definido en el estudio: el pensamiento algebraico temprano, en la perspectiva de Radford (201a, 2010b) y Vergel (2014, 2016a, 2016b), está asociado con componentes teóricos que han sido objeto de investigación y ha sido estudiado en el marco de la teoría de la objetivación, aportando una postura para caracterizar este pensamiento. En el presente estudio y, tomando en cuenta el objetivo del mismo, pudo no ser pertinente considerar todos los elementos aportados en la perspectiva de la teoría de la objetivación, por lo cual, se decidió focalizar los componentes analíticos y formas de pensamiento algebraico como contexto para el desarrollo de la investigación.

5.4. Posibles líneas de investigación

Una investigación como la desarrollada puede posibilitar la recomendación de futuras líneas de trabajo, en las cuales se propenda por:

- La exploración del pensamiento algebraico temprano, en el campo de las estructuras algebraicas con operaciones no convencionales, que permita consolidar formas de pensamiento algebraico y una caracterización del mismo.

- El estudio de conceptos asociados con aritmética modular, como un mediador en la promoción del pensamiento algebraico, que puede generar aportes teóricos en términos de una caracterización del pensamiento manifiesto en el desarrollo de tareas asociadas con este tipo de aritmética.

- Otra posible línea de investigación, puede definir su foco de atención en los medios semióticos de objetivación, que se privilegian en las aulas, identificando las posibilidades que tienen los profesores para el reconocimiento y exploración de los mismos, con el fin de documentar su incidencia en la promoción del pensamiento algebraico.

- Adicionalmente, en el presente estudio, se reconoce que el desarrollo profesional pudiera ser un objeto de interés investigativo, en tanto pueda determinarse cómo se configura en la actuación de los profesores, para un contexto como el descrito en la investigación desarrollada.

- El uso del esquema explicativo, sintetizado en el modelo presentado en el estudio, podría ser referenciado en otros estudios, en términos de su posible aplicabilidad a otros conceptos de las matemáticas.

- Las tareas de formación propuestas pueden ofrecer una estructura pertinente para orientar investigaciones sobre la práctica, en las cuales se pongan en consideración diferentes dimensiones asociadas con: las matemáticas, los estudiantes y el currículo.

- Considerando que, en las acciones de los profesores hubo una manifestación continua de "desarrollo de potencialidades" referida por Ponte (2012) en términos del desarrollo profesional, puede ser viable explorar relaciones entre conocimiento y desarrollo profesional.

- Otro aporte, pudiera darse en términos de documentar la incidencia de los procesos de formación en asuntos como: el diseño de tareas de aprendizaje, como una manifestación del conocimiento y desarrollo profesional de los profesores, en el contexto particular de escuela nueva y, la creación de comunidades de profesores, que sean multiplicadoras del conocimiento construido en los espacios de formación y, cuyas interacciones podrían develar una transformación que no solo se refleja en el aula, sino también en la formación de sus pares.

5.5. Recomendaciones generales

Finalmente, a la luz del estudio desarrollado y poniendo en consideración la experiencia que este propició, se considera pertinente presentar las siguientes recomendaciones:

- El uso del software Atlas.ti para facilitar el proceso de organización y sistematización de los datos. Esta herramienta permitió hacer una clasificación de la información, y en el caso del estudio en cuestión, facilitó el agrupamiento de unidades de análisis codificadas para la elaboración de los mapas conceptuales.

- El uso de los mapas conceptuales como una herramienta para presentar la información de manera precisa. En el estudio se recurrió a la herramienta CmapTools como un mecanismo que posibilitó la elaboración de los mapas conceptuales, que fueron producto de las relaciones establecidas entre las categorías temáticas definidas. Adicionalmente, la elaboración de los mapas favoreció la generación del esquema explicativo, en el cual se vincularon los elementos estructurantes de cada mapa.

- Otro aspecto que en el estudio resultó favorable fue trabajar con pocos profesores, pues esto permitió mayor cercanía con ellos, y posibilidades para identificar indicios de una posible transformación.

- La estructura de las tareas de formación, en la cual se consideró propiciar espacios para la reflexión permanente, para el refinamiento de conceptos algebraicos y para el diseño de planeaciones para el aula, en este sentido, el desarrollo de las actividades de carácter algebraico trascendió al aula, a través del diseño de tareas de enseñanza.

- El juego como un recurso para la enseñanza y el aprendizaje; en el estudio, este favoreció que los profesores propusieran retos a sus estudiantes y pudieran presentar nociones de conceptos algebraicos. Tal fue el caso de adivinar la cantidad de fichas contenidas en una bolsa, o hacer giros y deshacerlos para permanecer en una posición (neutra) y entender el comportamiento de un elemento inverso. Es así como, el uso del juego como excusa para enseñar conceptos, se constituye en una recomendación del estudio.

- Finalmente, cabe mencionar que, en esta investigación fue conveniente elegir conceptos algebraicos que han sido trabajados en el aula, en muchos casos, de manera superficial, por lo cual, lograr una profundización conceptual propició confianza en los profesores para diseñar tareas de aprendizaje y para llevarlas al aula.

6. REFERENCIAS

Agudelo, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos(as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza del álgebra escolar. *Revista EMA, 10*(2 y 3), 375-412.

Agudelo, C. (2007). *Promoción de una enseñanza para la comprensión en el Inicio del trabajo algebraico escolar.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Aké, L. (2014). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Avalos, B., & Matus, C. (2010). *La Formación Inicial Docente en Chile desde una Perspectiva Internacional. (Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS M).* Santiago : Ministerio de Educación de Chile.

Badia, A., & Monereo, C. (2004). La construcción de conocimiento profesional docente. Análisis de un curso de formación sobre la enseñanza estratégica. *Anuario de Psicología, 35*(1), 47-70.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Blanton, M., & Kaput, J. (2002). Design principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classrooms. En D. Cockburn , & E. Nardi, *Proceedings of the 26th PME International Conference* (p. 105-112).

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai , & E. Knuth, *Early algebraization, advances in mathematics education* (p. 5-23). York, NY: Springer.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39–87.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2006). *Investigação cualitativa em educação. Traducción: Santos y Batista.* Portugal : Porto Editora LDA.

Borba, M., & Araújo, J. (2008). Construyendo investigaciones colectivamente en educación matemática. En M. Borba, J. Araújo, D. Fiorentini, A. Marafioti, & M. Viggiani, *Investigación cualitativa en educación matemática* (p. 110). México: Limusa.

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational researcher, 3*(15), 3-15.

Bornrne, R. y. (1995). Fusing experience and theory: The structure of professional knowledge. *Learning and Instruction*, 261-267.

Branco, N., & Ponte, J. (2012). Developing algebraic and didactical knowlendge in pre-service primary teacher education. En T. Tso, *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 75-82). Taipei, Taiwan: PME.

Branco, N., & Ponte, J. (2013). Analysis of teaching and learning situations in algebra in prospective teacher education. *SISYPHUS Revista de educación, 1*(3), 182-213.

Britt, M., & Irwin, K. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In *Early Algebraization* (p. 137-159). Berlin: Springer.

Brizuela, B., Martinez , M., & Cayton-Hodges, G. (2013). The impact of early algebra: Results from a longitudinal intervention. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 209-241.

Butto, C., & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16*(1), 113-148.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* London New York: Springer Science & Business Media.

Cañadas, M. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *UNO REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*(73), 7-13.

Cañadas, M., & Molina , M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, , E. Castro, J. Lupiáñez, J. Ruíz , & M. Torralbo, *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (p. 209-218). Granada, España:: Comares.

Carpenter, T., Frankle , M., & Levi , L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., & Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 53-59.

Carraher, D., & Schlieman, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. L. Jr., *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, p. 669-706). NCTM, NC. Recuperado el Abril de 2017, de https://goo.gl/cf1G4u

Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores.* Recuperado el 13 de abril de 2017, de Teoría y metodología de investigación en educación matemática: http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf

Castro, W. (2014). Razonamiento algebraico elemental: propuestas para el aula. *Revista científica, 3*(20), 138-147. Obtenido de https://revistas.udistrita

Castro, W., & Godino, J. (2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: Un estudio exploratorio. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. Blanco, *Investigación en Educación Matemática. XII Simposio de la SEIEM* (p. 273-282). Badajoz.

Castro, W., Godino, J., & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un desafío para la formación de maestros. En G. García, *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (p. 92-99). Armenia: Gaia.

Derry, S., Wilsman, M., & Hackbarth, A. (2007). Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 305-329.

Fernández, C., & Ivars, P. (2016). Pensamiento relacional en primaria: el papel del maestro. *UNO REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*(73), 14-22.

Fiorentini, D. (2008). ¿Investigar prácticas colaborativas o investigar colaborativamente? En M. Borba, & J. Araújo, *Investigación Cualitativa en Educación Matemática* (p. 43-72). Balderas: Limusa.

Fraleigh, J. (2002). *First course in abstract algebra* (7th ed.). Reading: Addison-Wesley.

García, G., & Manzano, J. (2010). Procedimientos metodológicos básicos y habilidades del investigador en el contexto de la teoría fundamentada. *Revista de ciencias sociales y humanidades*, 17-39.

Glaser, B., & Strauss, A. (1967). *Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* New York: Aldine de Gruyter.

Glaser, B., & Strauss, A. (2017). *Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* New York: Routledge.

Godino, J., Aké, L., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T., . . . Wilhelmi, M. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las ciencias, 1*(33), 127-150. Recuperado el 4 de Abril de 2017, de http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 1*(32), 199-219.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *26*(42B), 483-511.

Guacaneme, E., Obando, G., Garzón, D., & Villa-Ochoa, J. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11-49.

Guacaneme-Suárez , E., Obando-Zapata, G., Garzón, D., & Villa-Ochoa, J. (2017). Colombia: Mathematics Education and the Preparation of Teachers. Consolidating a Professional and Scientific Field. En A. Ruiz , *Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean: The Cases of Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela* (p. 19-37). Switzerland: Springer International Publishing.

Guimarães, F., Arcavi, A., Gómez, B., Ponte, J., & Silva, J. (2006). O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios. *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*, 361-379.

Hernández, B., & Pérez, L. (2017). Conocimiento profesional de profesores en ejercicio al abordar cuestiones sociocientíficas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*.

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*, 231–257.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. .

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton, *Algebra in the early grades* (p. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner , & C. Kieran, *Research agenda for mathematics education: Vol. 4. Research issues in the learning and teaching of algebra* (p. 33-56). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of research on the* *psychology of mathematics* (p. 23-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. En F. L. Jr, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte NC: New Age Publishing; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Roberts, S., & Schneider, C. (2011). Professional development to support students' algebraic reasoning: An example from the Problem-Solving Cycle Model. *Early Algebraization*, 429-452.

Krause, M. (1995). La investigación cualitativa: un campo de desafios y posibilidades. *Revista temas de educación matemática*, 19-39.

Lin, F., & Rowland, T. (2016). Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. (G. C. Á. Gutiérrez, Ed.) *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues*, 483-520.

Llinares, S. (2009a). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. *Colección Digital Eudoxus, (15)*.

Llinares, S. (2009b). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51*, 92-101.

Luque, C., Jiménez, H., & Ángel, J. (2009). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras algebraicas finitas y enumerables.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

MacGregor, M. (1996). Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas*, 65-70.

Martínez, M., Rodríguez, I., & Gómez, P. (2017). La resolución de problemas profesionales como referente para la formación inicial del profesorado de física y química. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 14*(1).

Mason, J. (2008). Making use of children's power to produce algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton , *Algebra in the Early Grades* (p. 57–94). New York: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matematicas. Lineamientos Curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mochón, S. (2010). La relación del comportamiento del profesor con el avance cognitivo de los estudiantes al introducir un software educativo en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 13* (4), 355-371.

Mochón, S., & Morales Flores,, M. (2010). En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática, 22* (1), 87-113.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tesis doctoral.* Granada: Universidad de Granada.

Molina, M. (2007). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores, & M. Bolea, *Investigación en educación matemática* (p. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 135-156.

Montero, L. (2001). *La construcción del conocimiento profesional docente.* Rosario (Argentina): Homo Sapiens.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

-NCTM-, N. C. (1998). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, United States: National Council of Teachers of Mathematics.

Novak, J., & Gowin, B. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

Ponte, J. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. *Educação matemática: Temas de investigação*, 185-239.

Ponte, J. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge (plenary conference). (P. Ponte, & F. Matos, Edits.) *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathe-matics Education (PME), I*, 195-210.

Ponte, J. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. *IV Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação*, 59-72.

Ponte, J. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos, & J. Ponte, *La actividad matemática en el aula* (p. 25-34). Barcelona: Graó.

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas, *Crítica y Práctica de la Educación Matemática* (p. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. (2013). The professional practice and professional development. (J. Ponte, Ed.) *Sisyphus Journal of Education, 1*, 7-14.

Ponte, J. (2014). Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra. En N. Branco, & J. Ponte, *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (p. 377).

Ponte, J., & Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge and Practice. En A. Gutierrez , & P. Boero, *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (p. 461–494)). Rótterdam The Netherlands: Sense.

Ponte, J., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. English, *Handbook of international research in mathematics education* (p. 225- 236).

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., & Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in. (R. Even, & D. Ball , Edits.) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, 185 - 209. doi:10.1007/978-0-387-09601-8 17

Potari, D., & Ponte, J. (2017). Current Research on Prospective Secondary Mathematics Teachers' Knowledge. (Strutchens, E., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Ponte, J., de Costa, M., . . . Zbiek, R., Edits.) *The Mathematics Education of Prospective Secondary Teachers Around the Worl*, 3-15.

Prieto, M., & Contreras, G. (2008). Las concepciones que orientan las prácticas evaluativas de los profesores: un problema a develar. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 34*(2), 245-262.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Studens´ Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2010b). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. C. Knuth, *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (p. 303-322). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmentalopmental issues . En S. J. Cho, *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12)* (p. 675-694). Seúl, Korea: National University of Education.

Radford, L. (2013a). Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez, & M. Molina (Edits.). Granada, España: Comares.

Radford, L. (2013b). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore, & L. Radford, *Enseñanza y aprendizaje de as matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos.* Bogotá: Editorial UD.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran, *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3–25). New York: Springer.

Richit, A., & Ponte, J. (2017). Teachers 'perspectives about lesson study. *Acta Scientiae, 19*(1), 20-30.

Rivero, A. (2003). Proyecto docente. *Globalización e nvestigación del medio*.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. (2018). Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. *Bolema, 32*(61), 398-418.

Rojas, P., & Vergel, R. (2018). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, 3*(1), 19-30.

Rowland, T., & Ruthven, K. (2011). Introduction: Mathematical knowledge in teaching. En T. Rowland , & K. Ruthven, *Mathematical knowledge in teaching* (p. 1-5). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

San Martín, D. (2014). Teoría fundamentada y Atlas.ti: recursos metodológicos para la investigación educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 16*(1), 104-122.

Santa, Z. (2016). Producción de conocimiento geométrico escolar de un colectivo de profesores–con–doblado-de-papel. *(Tesis Doctoral no publicada).* Colombia: Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: from children's ideas to classroom practice.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., & Lara-Roth, S. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman , B. Dougherty , & J. Zilliox, *Proceedings of the 27th PME International Conference* (p. 127–134).

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Shulman, L. (1999). Foreword. En J. Gess-Newsome , & N. Lederman, *Examining pedagogical content knowledge: the construct and its implications for science teaching* (p. ix-xii). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Silva, W. (2013). Investigación y práctica reflexiva como categorías epistemológicas del desarrollo profesional docente. *Espiral, Revista de Docencia e Investigación, 3*(2), 53-64.

Solar, H. (2016). Orientaciones para el desarrollo de patrones. *UNO REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*, 45-52.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: grounded theory - procedures and techniques.* California: Sage Publication.

Strauss, A., & Corbin, J. (2012). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* (2da Edición ed.). Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Strutchens, M. (2017). Current Research on Prospective Secondary Mathematics Teachers' Field Experiences. En M. Strutchens, R. Huang, L. Losano, D. Potari, J. Ponte, M. de Costa, & R. Zbiek, *The Mathematics Education of Prospective Secondary Teachers Around the World* (p. 33-44). Switzerland: Springer International Publishing.

Tardif, M. (2004). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional.* Narcea Ediciones.

Torres, M., Cañadas, M., & Moreno, A. (2018). Estucturas, generalización y significado de letras en un contexto uncional por estudiantes de 2º de Primaria. *Investigación en Educación Matemática XX*, 11.

Tzur, R. (2007). What and how might teachers learn via teaching: Contributions to closing an unspoken gap. *Proceedings of PME 31, 1*, 142–150.

Vaillant, D., & Marcelo, C. (2015). *El A, B, C, D de la Formación Docente.* Narcea: Madrid.

Vasilachis de Gialdino, I., Ameigeiras, A., Chernobilsky, L., Giménez, V., Mallimaci, F., Mendizábal, N., . . . Soneira, A. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* Barcelona: Gedisa.

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular early-algebra como posibilidad para desarollar el pensamiento algebraico en escolares de educación primaria: una mirada al proceso matemático de generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 69-81.

Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) En: Gallego P. (Ed.) (2013). *Revista Científica, Edición especial,* 234-240.

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años*).* (*Tesis doctoral).* Colombia: Universidad Distrital.

Vergel, R. (2015a). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2015b). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 68*, 9-17.

Vergel, R. (2016a). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. (2016b). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. *UNO REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*(73), 23-31.

Vergel, R. (2016c). Algunas notas acerca del desarrollo del pensamiento algebraico temprano. En M. Iori, *La Matematica e la sua Didattica/Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore* (p. 509-512). Bologna: Pit.

Vergel, R. (2019). *Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico.* Minicurso, Memorias de XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, XV CIAEM, Medellín.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula.* Bogotá: UD.

Viète, F. (1983). *The analytic art.* New York: Dover.

Vygotsky, L. (1995). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores (L. Kuper, Trad.). En L. Vygotski, *Obras escogidas.* Madrid: Machado Libros (original publicado en 1931).

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidós.

Zapata, L., & González, D. (2017). Imágenes de los profesores sobre la estadística y su enseñanza. *Educación Matemática*, *29*(1), 61-89.

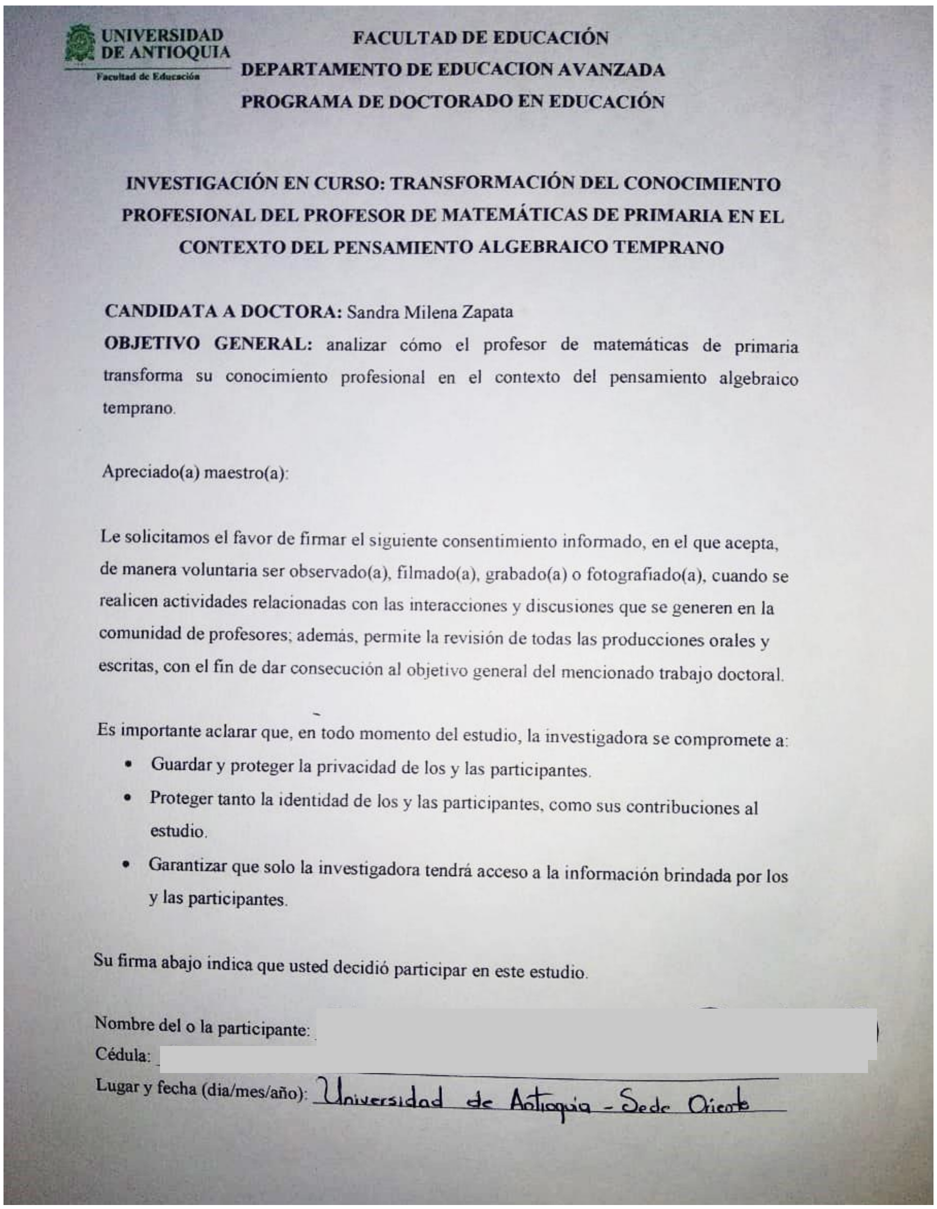
Zapata, S. M., Santa Ramírez, Z. M., & Jaramillo López, C. M. (2018). El profesor de primaria: una reflexión sobre su papel en la inclusión del álgebra temprana en el currículo escolar. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*(55), 192 – 209.

Zapatera, A. (2016). Cómo desarrollar pensamiento algebraico. *UNO REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*, 32-37.

Zaslavsky, O., Chapman, O., & Leikin, R. (2003). Professional development in mathematics education: Trends and tasks. (A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & F. Leung, Edits.) *Second international handbook of mathematics education*, 877–917.

ANEXOS

Anexo A. Consentimientos informados



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACION AVANZADA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

INVESTIGACIÓN EN CURSO: TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA EN EL CONTEXTO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

CANDIDATA A DOCTORA: Sandra Milena Zapata

OBJETIVO GENERAL: analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en la comunidad de profesores; además, permite la revisión de todas las producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo doctoral.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del o la participante:
Cédula:
Lugar y fecha (dia/mes/año): Universidad de Antioquia - Sede Oriente

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACION AVANZADA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

INVESTIGACIÓN EN CURSO: TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA EN EL CONTEXTO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

CANDIDATA A DOCTORA: Sandra Milena Zapata
OBJETIVO GENERAL: analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en la comunidad de profesores; además, permite la revisión de todas las producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo doctoral.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del o la participante [redacted]
Cédula: [redacted]
Lugar y fecha (dia/mes/año): 17-02-2018

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACION AVANZADA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

INVESTIGACIÓN EN CURSO: TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA EN EL CONTEXTO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

CANDIDATA A DOCTORA: Sandra Milena Zapata
OBJETIVO GENERAL: analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en la comunidad de profesores; además, permite la revisión de todas las producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo doctoral.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del o la participante: [redacted]
Cédula: [redacted]
Lugar y fecha (día/mes/año): Universidad de Antioquia

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACION AVANZADA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

INVESTIGACIÓN EN CURSO: TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA EN EL CONTEXTO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

CANDIDATA A DOCTORA: Sandra Milena Zapata

OBJETIVO GENERAL: analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en la comunidad de profesores; además, permite la revisión de todas las producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo doctoral.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

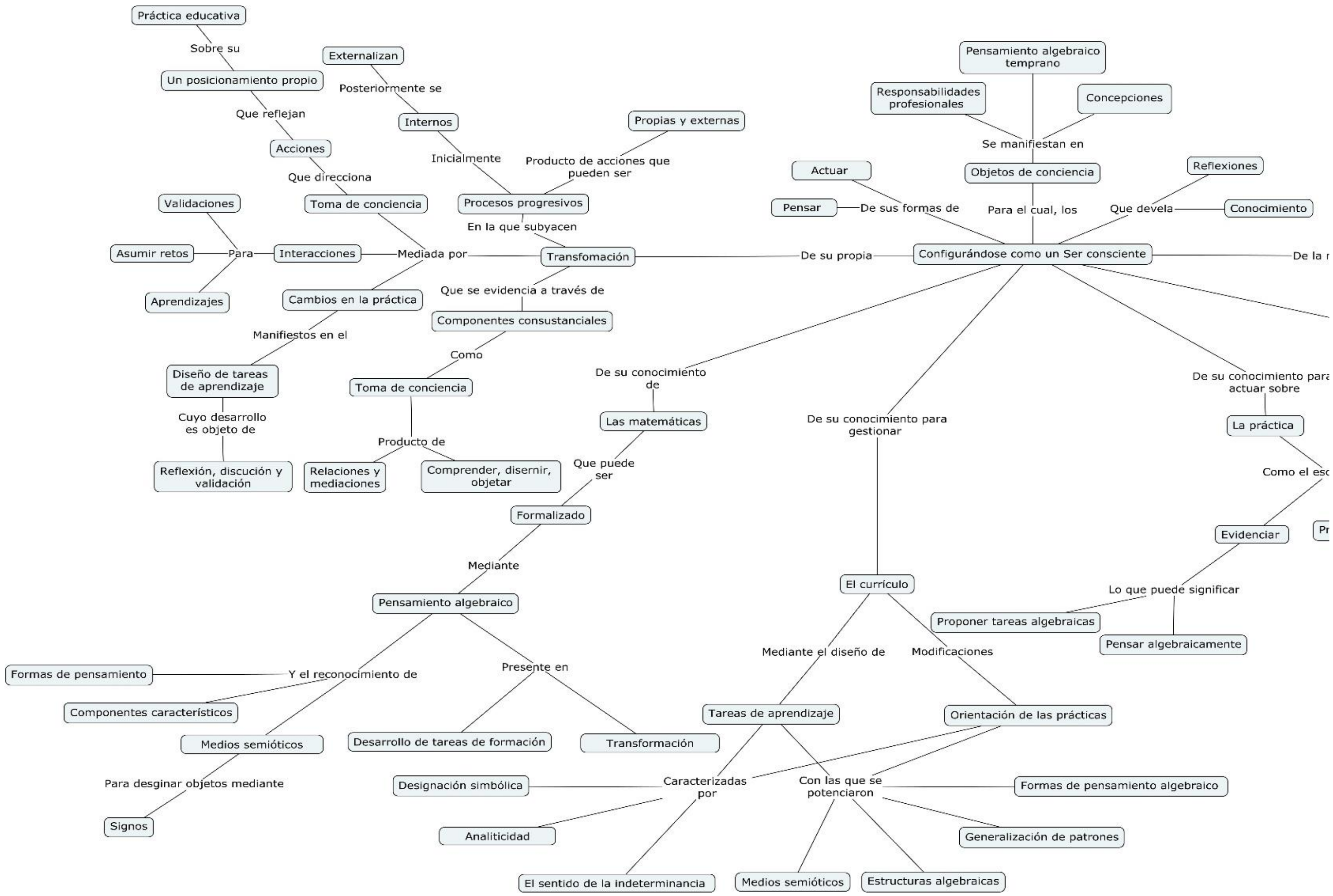
Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

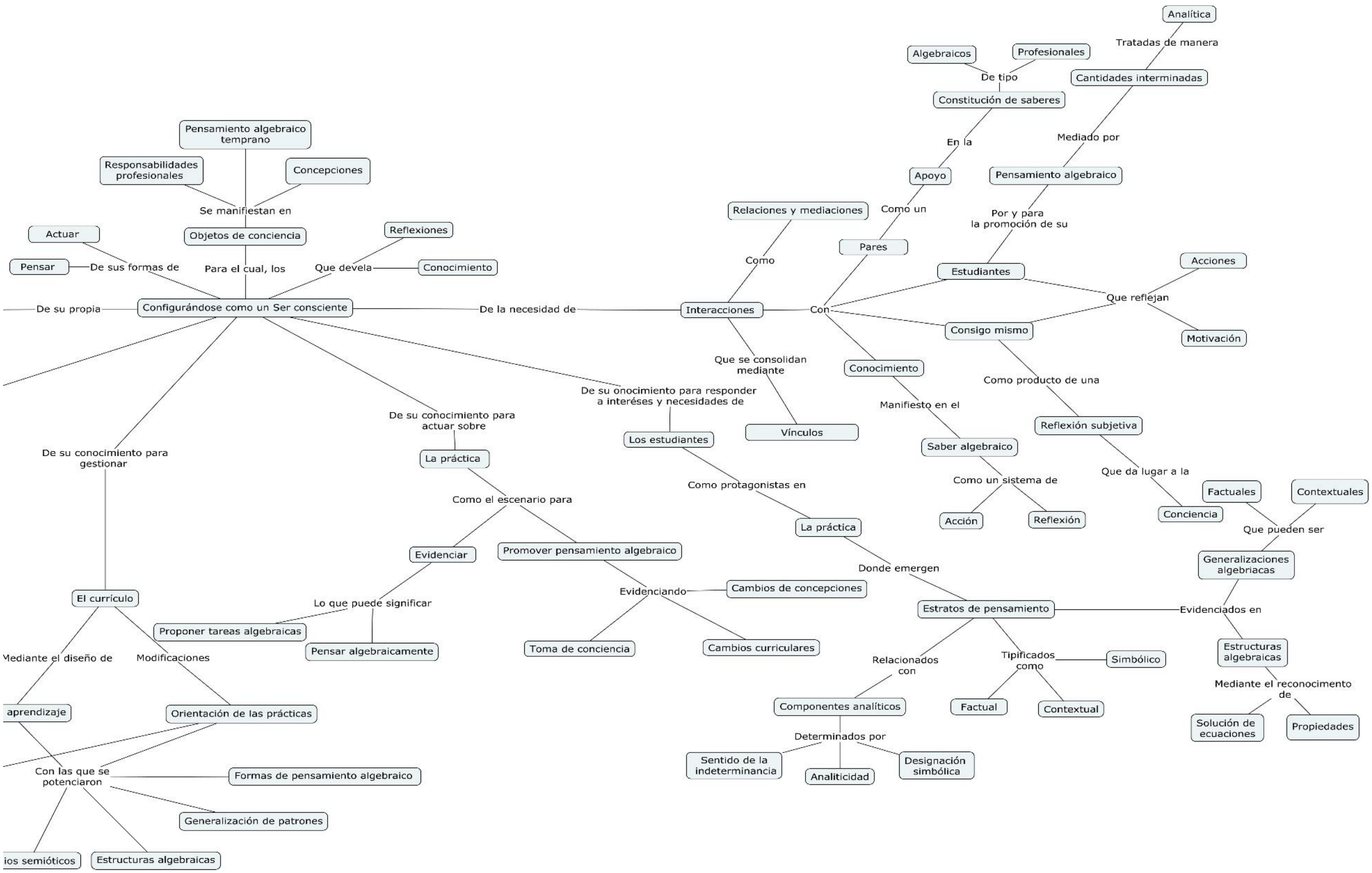
Nombre del o la participante:

Cédula:

Lugar y fecha (día/mes/año): Universidad de Antioquia

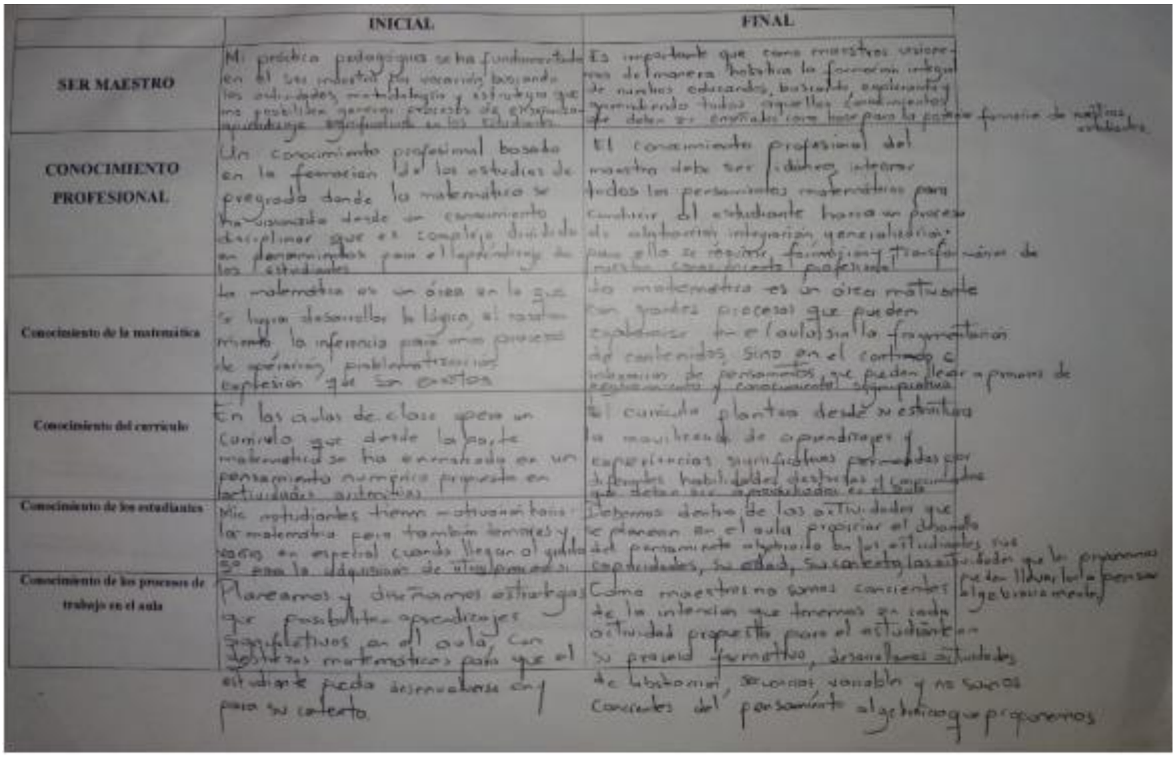
Anexo B. Esquema explicativo





Analítica
Tratadas de manera
Algebraicos
Profesionales
De tipo
Cantidades interminadas
Constitución de saberes
En la
Mediado por
Pensamiento algebraico temprano
Responsabilidades profesionales
Concepciones
Apoyo
Pensamiento algebraico
Se manifiestan en
Relaciones y mediaciones
Como un
Por y para la promoción de su
Actuar
Objetos de conciencia
Reflexiones
Pares
Como
Pensar
De sus formas de
Para el cual, los
Que devela
Conocimiento
Estudiantes
Acciones
De su propia
Configurándose como un Ser consciente
De la necesidad de
Interacciones
Con
Que reflejan
Consigo mismo
Motivación
Que se consolidan mediante
Conocimiento
De su onocimiento para responder a interéses y necesidades de
Como producto de una
Manifiesto en el
De su conocimiento para actuar sobre
Reflexión subjetiva
Los estudiantes
Vínculos
De su conocimiento para gestionar
Saber algebraico
La práctica
Como protagonistas en
Que da lugar a la
Como un sistema de
Como el escenario para
Factuales
Contextuales
Acción
Reflexión
Conciencia
La práctica
Que pueden ser
Evidenciar
Promover pensamiento algebraico
Generalizaciones algebriacas
Donde emergen
Cambios de concepciones
El currículo
Lo que puede significar
Evidenciando
Estratos de pensamiento
Evidenciados en
Proponer tareas algebraicas
Pensar algebraicamente
Toma de conciencia
Cambios curriculares
Estructuras algebraicas
Mediante el diseño de
Modificaciones
Relacionados con
Tipificados como
Simbólico
Mediante el reconocimento de
aprendizaje
Orientación de las prácticas
Componentes analíticos
Factual
Contextual
Solución de ecuaciones
Propiedades
Determinados por
Con las que se potenciaron
Formas de pensamiento algebraico
Sentido de la indeterminancia
Analiticidad
Designación simbólica
Generalización de patrones
ios semióticos
Estructuras algebraicas

Anexo C. Reflexiones bitácoras de cierre



	INICIAL	FINAL
SER MAESTRO	Mi práctica pedagógica se ha fundamentado en el ser [illegible] por vocación buscando las actividades, metodologías y estrategias que me posibiliten generar procesos de enseñanza aprendizaje significativos en los estudiantes.	Es importante que como maestros [illegible] de manera holística la formación integral de nuestros educandos, buscando explicando y [illegible] todos aquellos conocimientos que deben ser enseñados como base para la posible formación de nuestros estudiantes
CONOCIMIENTO PROFESIONAL	Un conocimiento profesional basado en la formación de los estudios de pregrado donde la matemática se ha [illegible] desde un conocimiento disciplinar que es complejo dividido en [illegible] para el aprendizaje de los estudiantes	El conocimiento profesional del maestro debe ser idóneo, integrar todos los pensamientos matemáticos para conducir al estudiante hacia un proceso de elaboración, integración, generalización; para ello se requiere formación y transformación de nuestro conocimiento profesional
Conocimiento de la matemática	La matemática es un área en la que se logra desarrollar la lógica, el razonamiento, la inferencia para unos procesos de operación, problematización, expresión que son [illegible]	La matemática es un área motivante con grandes procesos que pueden elaborarse en el aula sin la fragmentación de contenidos sino en el continuo e integración de pensamientos que pueden llevar a procesos de [illegible] y conocimiento significativo
Conocimiento del currículo	En las aulas de clase opera un currículo que desde la parte matemática se ha enmarcado en un pensamiento numérico propuesto en actividades aritméticas	El currículo plantea desde su estructura la movilización de aprendizajes y experiencias significativas permeadas por diferentes habilidades, destrezas y capacidades que deben ser [illegible] en el aula
Conocimiento de los estudiantes	Mis estudiantes tienen motivación hacia las matemáticas pero también temores y vacíos en especial cuando llegan al grado 5° para la adquisición de [illegible]	Debemos dentro de las actividades que se planean en el aula propiciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes sus capacidades, su edad, su contexto, las actividades que les proponemos pueden llevarlos a pensar algebraicamente
Conocimiento de los procesos de trabajo en el aula	Planeamos y diseñamos estrategias que posibiliten aprendizajes significativos en el aula, con destrezas matemáticas para que el estudiante pueda desenvolverse en y para su contexto.	Como maestros no somos conscientes de la intención que tenemos en cada actividad propuesta para el estudiante en su proceso formativo, desarrollamos actividades de [illegible], secuencias, variables y no somos conscientes del pensamiento algebraico que proponemos

	INICIAL	FINAL
SER MAESTRO	Ser maestro requería conocer las temáticas a trabajar y llevarlas al aula esperando que los estudiantes se apropiaran de ellas	Ahora siento que es una labor que día a día exige pensar en cómo y hasta donde podemos llegar a transformar mi pedagogía.
CONOCIMIENTO PROFESIONAL	En un inicio es una gran expectativa para participar en este espacio y conocer otras experiencias para llevar al aula	La satisfacción de haber participado en este espacio es inmensa. Llevo en mi mente y en el corazón la gran tarea de continuar generando espacios para construir conocimiento
Conocimiento de la matemática	-Los conocimientos han posibilitado laborar de forma general en mi aula llevando las matemáticas de forma sencilla a mis estudiantes.	-Participar en este espacio posibilitó ampliar y profundizar los conocimientos matemáticos, descubriendo otros alcances al compartir.
Conocimiento del currículo	-Se concebían algunas generalidades, incluso con diferencias en la forma de desarrollarlo en las aulas.	Ahora veo indispensable una reflexión sobre como se pueden mejorar las prácticas en el aula y llegar a mayor apropiación de las temáticas
Conocimiento de los estudiantes	-Se tiene encuenta aspectos muy básicos en sus procesos de pensamiento matemático	. Es necesario generar espacios para que los estudiantes construyan sus propios conceptos
Conocimiento de los procesos de trabajo en el aula	-Cada grado se concibe en sus tareas específicas y con los materiales pertinentes para ello.	- Es evidente que un proceso puede permitir explorar diversas temáticas, habilidades y destrezas según el grado, edad y nivel de complejidad

	INICIAL	FINAL
SER MAESTRO	Trabajaba el área de una manera básica, sin prestarle hallar la profundidad requerida	Al momento lo realizo de una manera más profunda y encontrándole la funcionalidad a cada una de las temáticas.
CONOCIMIENTO PROFESIONAL	Hasta determinado momento trabajé el área sin pensar que podía desarrollar pensamiento algebraico en mis estudiantes.	Ahora encuentro que sin necesidad de que los chicos aprendan fórmulas específicas les estoy despertando éste a través de las diferentes actividades que desarrollo.
Conocimiento de la matemática	Mis conocimientos en el área a pesar de que me apasiona eran muy básicos, ligados a impartir y repetir los mismos procesos dentro del aula.	Hoy le encuentro nuevos rumbos y veo muy importante la utilización del material concreto existente, Hago las cosas con mayor conciencia y sobretodo de corazón.
Conocimiento del currículo	Conocía algunas generalidades pero con diferencias al momento de ejecutarlo dentro del aula.	Se hace necesario realizar una reflexión pedagógica sobre la manera como puedo mejorar mi práctica.
Conocimiento de los estudiantes	Se valoran sus trabajos y todos sus procesos de aprendizaje y pensamiento matemático.	Necesidad de permitir espacios donde los estudiantes puedan construir su pensamiento algebraico
Conocimiento de los procesos de trabajo en el aula	Se concibe cada uno de los grados desarrollando sus tareas específicas, con materiales concretos.	Es evidente y claro que se presentan procesos que me llevan a explorar diferentes temáticas, habilidades y destrezas, según el nivel de complejidad.

	INICIAL	FINAL
SER MAESTRO	Receptivo, Un poco ansioso ante el proceso a iniciar.	llegar a tener conceptos claros y precisos de un dato o resultado final respecto a una operación
CONOCIMIENTO PROFESIONAL	Con gran disposición y motivación para dar lo que pudiera.	Intentar llevar al aula conceptos que lleven al estudiante a sacar conclusiones precisas
Conocimiento de la matemática	Con una serie de conceptos, procesos y metodos un poco aleatorios algo enredados	Que existen gran variedad de actividades de los cuales podemos llevar al estudiante a conceptos y conocimientos mas concretos
Conocimiento del currículo	Comprendido y alterado desde algun tipo de estrategia, pero con gran temor a lo nuevo	Adaptando ideas, estrategias nuevas que busquen mayor interes y desarrollo de competencias en los estudiantes.
Conocimiento de los estudiantes	Con grandes espectativas e incognitas del porque de algunos ejercicios y trabajos en el aula	Siempre dispuesto a asumir retos y actividades que los llevan a crear y reflexionar.
Conocimiento de los procesos de trabajo en el aula	Fundamentados desde lo práctico y didactico pero un poco confuso en la parte teorica.	Mucho mas afianzados y claros respecto al concepto de aprendizaje del álgebra en edades tempranas.