



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

**OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE  
PERPENDICULARIDAD EN FIGURAS Y CUERPOS  
GEOMÉTRICOS POR ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO**

**Jorge Alonso Cotera Guerra**

**Diana Victoria Jaramillo Quiceno**

**Universidad de Antioquia**

**Facultad de Educación**

**Medellín, Colombia**

**2020**



Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por  
estudiantes de quinto grado

**Jorge Alonso Cotera Guerra**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

**Magíster en Educación**

Asesores (a):

Diana Victoria Jaramillo Quiceno

Doctora

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Grupo de Investigación:

Matemática, Educación y Sociedad (MES)

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación.

Medillín, Colombia

2020

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

### Resumen

Con el presente trabajo de investigación me propuse responder a la pregunta ¿Cómo se movilizó el proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado? Con este propósito, centré mi interés en el análisis de dicho proceso, teniendo como referentes la Teoría de la Actividad de Leontiev (1984) y la Teoría Cultural de la Objetivación de Radford (2014a).

Esta investigación se llevó a cabo con los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Alianza para el Progreso en su sede Anastasio Sierra, ubicada al noroeste del municipio de Montelíbano, en el departamento de Córdoba. Institución oficial que para el momento de la investigación contaba con 1.120 estudiantes matriculados de los estratos 1 y 2 en los niveles de Preescolar, Básica primaria y secundaria, y Media.

El trabajo fue abordado desde el paradigma de investigación cualitativa y bajo un enfoque crítico-dialéctico. En la producción conjunta de registros y datos, opté por realizar un análisis de cuatro casos, para lo cual tuve en cuenta técnicas de la *investigación participante* como la observación directa y la observación participante, notas de campo, observación fotográfica y entrevista cara a cara. Para el análisis de los datos y la elaboración de unas categorías emergentes, tuve en cuenta el método materialista dialéctico de Marx (1857).

La organización del trabajo de campo, en tanto proceso de enseñanza en un aula de clases, estuvo situada desde la postura teórico-metodológica de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, y centrada en una actividad principal en torno a la cual se desarrollaron catorce encuentros en un período de dos meses, programados según el calendario y horario escolar

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

del 2015. Como actividad principal, tomé la práctica social que entraña la construcción de viviendas, ancorándome en dos criterios: las condiciones objetivas de la institución y su comunidad, el objetivo de la *Actividad Orientadora de Enseñanza*.

En esta comunidad educativa, dicha práctica asume una complejidad especial dada las problemáticas topográficas y climáticas a que las familias de este sector se ven enfrentadas: falta de territorios propicios para servir de asentamiento a sus viviendas y, con marcado recrudescimiento en la temporada invernal, ocurrencia permanente de inundaciones, tempestades y huracanes. Así, dispuse las tareas a ejecutar atendiendo a tal complejidad.

De otro lado, la enseñanza de un concepto como el de la relación de perpendicularidad denota tener en cuenta cierta “historia virtual” (Moura, 2010: 224) del mismo y la lógica de su producción. Con base en esta exigencia del propio tema, propuse un desarrollo de los encuentros fundado en ciertas necesidades, motivos e intencionalidades.

**Palabras clave:** Perspectiva histórico-cultural de la educación, educación matemática, teoría cultural de la objetivación, actividad orientadora de enseñanza, actividad sensible, perpendicularidad.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

### **Abstract**

With the present research work I set out to answer the question: How was the process of objectification of the concept of perpendicularity in figures and geometric bodies mobilized by fifth grade students? For this purpose, I focused my interest in the analysis of this process, having as references Leontiev's Theory of Activity (1984) and Radford's Cultural Theory of Objectification (2014a).

This research was carried out with the fifth grade students of the Educational Institution Alliance for Progress at its headquarters Anastasio Sierra, located northwest of the municipality of Montelíbano, in the department of Córdoba. Official institution that at the time of the research had 1,120 students enrolled in strata 1 and 2 at the levels of Preschool, Basic primary and secondary, and Middle.

The work was approached from the qualitative research paradigm and under a critical-dialectical approach. In the joint production of records and data, I opted to carry out an analysis of four cases, for which I took into account participant research techniques such as direct observation and participant observation, field notes, photographic observation and face-to-face interview. For the analysis of the data and the elaboration of some emerging categories, I took into account the dialectical materialist method of Marx (1857).

The organization of the field work, as a teaching process in a classroom, was located from the theoretical-methodological position of the Teaching Guidance Activities, and focused on a main activity around which fourteen meetings were developed in a two-month period, programmed according to the 2015 school calendar and schedule.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

As the main activity, I took the social practice involved in the construction of houses, anchoring myself in two criteria: the objective conditions of the institution and its community, the objective of the Activity Teaching Counselor.

In this educational community, said practice assumes a special complexity given the topographic and climatic problems that families in this sector face: lack of suitable territories to serve as a settlement for their homes and, with a marked upsurge in the winter season, occurrence permanent floods, storms and hurricanes. Thus, I arranged the tasks to be executed attending to such complexity.

On the other hand, the teaching of a concept such as that of the perpendicular relationship denotes taking into account a certain "virtual history" (Moura, 2010: 224) of it and the logic of its production. Based on this requirement of the topic itself, I proposed a development of the meetings based on certain needs, motives and intentions.

**Key words:** Historical and cultural perspective of education, mathematics education, cultural theory of objectification, guiding teaching activity, sensible activity, perpendicularity.

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos  
por estudiantes de quinto grado

**Contenido**

1.	<i>PRESENTACIÓN</i> .....	11
2.	<i>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</i> .....	20
2.1	Justificación .....	20
2.2	Tema .....	29
2.3	Pregunta de investigación .....	29
2.4	Objeto de investigación.....	29
2.5	Objetivo.....	29
3.	<i>HORIZONTE TEÓRICO</i> .....	30
3.1	Una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática.....	30
3.2	La Teoría Cultural de la Objetivación .....	31
3.3	Objetivación de la Perpendicularidad .....	33
3.4	Actividad Sensible (Visualización).....	36
3.5	Figuras geométricas y cuerpos geométricos .....	40
4.	<i>MARCO METODOLÓGICO</i> .....	43
4.1	Paradigma de investigación .....	43
4.2	Propuesta teórico-metodológica para la enseñanza: Las Actividades Orientadoras de Enseñanza.....	52
4.3	Institución educativa .....	54
4.4	Organización de las Actividades Orientadoras de Enseñanza como posibilitadoras del análisis sobre las producciones .....	57
4.5	Los estudiantes/sujetos de la investigación.....	58
5.	<i>ANÁLISIS DE LAS CATEGORÍAS</i> .....	73
5.1	La transformación material emancipadora de los estudiantes, en dialéctica con los sujetos otros que constituyen su colectivo .....	73
5.1.1	La actividad sensible en tanto actividad conjunta, y la necesaria transformación tanto de las relaciones sociales como de la materialidad del aula.....	74
5.1.2	La actividad sensible, en tanto actividad conjunta, es posibilitadora del proceso de subjetivación.....	86



Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos  
por estudiantes de quinto grado

5.1.3	La actividad sensible en tanto actividad conjunta, como posibilitadora de un <i>llegar a ser con los otros</i> .....	93
5.2	El lenguaje como constitutor de la objetivación del concepto de perpendicularidad, en dialéctica con conceptos como líneas, triángulos, ángulos y alturas .....	111
5.2.1	El uso del lenguaje como nominador, o de las representaciones caóticas como expresión de la naturaleza conceptual fenomenológica de las figuras y cuerpos geométricos .....	114
5.2.2	El uso del lenguaje como dinamizador, o de las determinaciones abstractas como expresión de la naturaleza dinámica intuitiva de las figuras y cuerpos geométricos ..	126
5.2.3	El uso de un lenguaje concreto como constitutor de la síntesis de las múltiples determinaciones del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos	155
5.3	La construcción de vivienda como práctica social que posibilita la objetivación del concepto de perpendicularidad, en dialéctica con la transformación material emancipadora de los estudiantes .....	170
5.3.1	La práctica cultural de la construcción de vivienda, en tanto labor conjunta, debe ser una actividad sensible.....	172
5.3.2	La práctica cultural de la construcción de vivienda, en tanto actividad sensible, es también una actividad emancipadora .....	186
5.3.3	La práctica cultural de la construcción de vivienda como posibilitadora de la producción de artefactos.....	192
6.	<i>A MANERA DE CIERRE</i> .....	217
7.	<i>Anexo</i> .....	223
7.1	Permisos.....	223
7.2	Reunión de socialización de la actividad con padres de familia de la sede .....	224



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

### Figuras

Figura 1. (Ideograma que orientó el Trabajo de Investigación.).....	38
Figura 2. (Nociones de Cuerpos Geométricos y Figuras Geométricas.) .....	42
Figura 3. (Sede Anastasio Sierra. Institución Educativa Alianza para el Progreso.) .....	55
Figura 4. (Rosa María Romero.) .....	60
Figura 5. (Carlos Andrés Valencia.).....	60
Figura 6. (Juliana Vergara.) .....	60
Figura 7. (Leidys Luz Domicó.).....	60
Figura 8. (Mi interpretación de la Estructura de una Actividad Orientadora de Enseñanza.) .....	67
Figura 9. Momentos del Método. ....	71
Figura 10. Programación de los Encuentros. ....	72
Figura 11. Encuentro I - 2015-05-28/1.....	75
Figura 12. Encuentro I - 2015-05-28/1.....	80
Figura 13. Encuentro I - 2015-05-28/3.....	83
Figura 14. Encuentro I - 2015-05-28/4.....	84
Figura 15. Encuentro IX - 2015-08-28/1 .....	86
Figura 16. Encuentro VII –2015-08-21 - Fragmento de Video. ....	94
Figura 17. Encuentro VI – 2015-08-10 - Fragmento de Video.....	97
Figura 18. Encuentro VI – 2015-08-10. ....	98
Figura 19. Encuentro XIV – 2015-10-16 - Foto de la Carta de Carlos Andrés. ....	102
Figura 20. Encuentro XIV – 2015-10-16.....	104
Figura 21. Encuentro XIV – 2015-10-16 - Foto de la Carta de Rosa María. ....	106
Figura 22. Encuentro XIV – 2015-10-16 - Foto de la Carta de Juliana. ....	108
Figura 23. Encuentro XIV – 2015-10-16 - Foto de la Carta de Leidys. ....	109
Figura 24. Encuentro I – 2015-05-28. ....	117
Figura 25. Encuentro I – 2015-05-28. ....	117
Figura 26. Triángulo Rectángulo. ....	119
Figura 27. Encuentro III – 11 de junio de 2015. ....	123
Figura 28. Encuentro III – 11 de junio de 2015. ....	123
Figura 29. Encuentro V – 09 de julio de 2015. ....	129
Figura 30. Encuentro V – 09 de julio de 2015. ....	131
Figura 31. Encuentro V – 09 de julio de 2015. ....	138
Figura 32. Encuentro V – 09 de julio de 2015. ....	138
Figura 33. Encuentro V – 09 de julio de 2015. ....	139
Figura 34. Encuentro VII – 2015-08-21. ....	150
Figura 35. Encuentro VII – 2015-08-21. ....	151
Figura 36. Encuentro VII – 2015-08-21. ....	152
Figura 37. Encuentro VII – 2015-08-21. ....	154
Figura 38. Encuentro VII – 2015-08-21. ....	154
Figura 39. Encuentro VIII – 2015-08-22.....	158
Figura 40. Encuentro VIII – 2015-08-22.....	158
Figura 41. Encuentro X – 2015-09-11.....	160
Figura 43. Encuentro XII – 2015-09-25 .....	162
Figura 43. Encuentro IX – 2015-08-28. ....	162
Figura 44. Encuentro IX – 2015-08-28. ....	163

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Figura 45. Encuentro IX – 2015-08-28. ....	164
Figura 46. Encuentro XI – 2015-09-17. ....	168
Figura 47. Encuentro XII – 2015-09-25. ....	169
Figura 48. Encuentro I – 2015-05-28. ....	174
Figura 49. Encuentro I – 2015-05-28. ....	178
Figura 50. Encuentro I - 2015-05-28. ....	180
Figura 51. Encuentro II – 2015-06-04. ....	187
Figura 52. Encuentro II – 2015-06-04. ....	189
Figura 53. Encuentro III – 2015-06-06. ....	194
Figura 54. Encuentro III – 2015-06-11. ....	196
Figura 55. Encuentro III – 2015-06-11. ....	197
Figura 56. Encuentro III – 2015-06-11. ....	199
Figura 57. Encuentro VI – 2015-08-10. ....	199
Figura 58. Encuentro XIII – 2015-06-11. ....	202
Figura 59. Encuentro IV – 2015-07-02. ....	205
Figura 60. Encuentro IV – 2015-07-02. ....	205
Figura 61. Encuentro IV – 2015-07-02. ....	206
Figura 62. Encuentro VIII – 2015-08-22. ....	212
Figura 63. Encuentro 11 - 2015-09-17. ....	212
Figura 64. Encuentro XII – 2015-08-22. ....	214
Figura 65. Encuentro XIV – 2015-08-22. ....	215

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

### 1. PRESENTACIÓN

Desde los primeros momentos de la relación del hombre con la naturaleza, este ha encontrado las formas de servirse de ella para satisfacer sus necesidades. Sean esas necesidades las que Malinowski (como se citó en Moura, 2011) llamó «básicas» (p.49) o las que el mismo Moura refiere como «creadas de manera artificial». Usando una expresión de Marx (trad. en 2010), sin importar que estas necesidades tengan su origen «en el estómago o en la fantasía» (p.43), en tanto han representado desde siempre una dificultad, se han constituido también, en palabras de Moura (2011), en el «combustible que mueve al hombre» (p.49).

Ahora bien, teniendo presente dos ángulos para entender al hombre, uno que mira al individuo y otro que mira al miembro de una colectividad, se advierte su humanidad como el proceso en el cual se van entrelazando aspectos individuales y biológicos con aspectos colectivos y socioculturales. En efecto, desde su historia ontogenética el individuo busca procurarse la supervivencia mediante la transformación de su mundo, pero este esfuerzo no se agota en la interacción con la materia sino que alcanza para dejar rastro de las luchas con ella, esto es, enseñar a otros hombres la forma como él encontró la solución a ciertas necesidades. Este esmero de perdurar, de facilitar a otros empresas que él ya conquistó, marca la transición de un sujeto individual a un sujeto colectivo.

En el intento de satisfacer ciertas necesidades, el hombre se ha provisto de herramientas, algunas de las cuales han sido producto de su actividad. En esta intervención del hombre en los materiales que le rodean se configura una instancia donde se amalgama su

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

pensamiento. Es así como al transformar la naturaleza el hombre se transforma a sí mismo (Marx & Engels, trad. en 1932).

Sin embargo, ante la inminencia de su desaparición ontogenética, el hombre se torna un sujeto colectivo, filogenético, bien sea por la preocupación en cuanto a la preservación de su prole, por la contribución al perfeccionamiento de las técnicas, o por un complejo deseo de perdurar en los otros en el que se conjugan los anteriores motivos, el hecho es que el hombre desde ese carácter colectivo busca la forma de facilitarles a otros la apropiación de esas formas particulares a través de las cuales él, como individuo, encontró solución a un problema específico. De no ser enseñadas, estas formas desaparecerían con él.

Por toscos que hubieran sido los primeros objetos, su producción había dejado tras de sí una serie de historias de necesaria consulta para aquellos que quisieran lograr los mismos o similares efectos. Un ejemplo de esto lo constituye la misma construcción de viviendas, las cuales en sus inicios fueron pensadas a partir de la necesidad material de protección ante las inclemencias del ambiente, pero que poco a poco fueron tornándose en espacios cada vez más espirituales y estéticos, sin embargo, para la construcción de una sinagoga tanto como para una casa en la piedra, el uso de maso que sirviera de martillo tuvo la misma utilidad material. La producción de nuevos artefactos requeriría la disposición propia para una «actividad de estudio», como lo observa Davidov (citado en Moura, 2011, p.55).

Ya anotaba Marx que «en la primera piedra que [el salvaje] arroja al animal que persigue [...] vemos la apropiación de un artículo con la mira de coadyuvar en la apropiación de otro» (2010: 223). Dicho en otras palabras, al abandonar el solipsismo con el que se suele abordar el nacimiento de la humanidad por parte de las corrientes egoístas, desde esta

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

perspectiva reconocemos que desde sus inicios, en dialéctica, el hombre siempre fue individuo y colectividad. Por tanto, nunca hubo para él un “estar solo”, y por prístino que fuera un artefacto, siempre hubo en su aprensión un “estar con otros”, puesto que los límites en que se agota la vida, son los que lo empujan a perpetuarse por medio de la colectividad, son esos límites los responsables de su deseo de apoyarse en los otros que le han antecedido en la praxis con el mundo. De ahí que para el materialismo dialéctico e histórico, la categoría de trabajo vivo sea la fuente primera de todo capital, y en particular, del conocimiento humano, pues aquellas necesidades «originalmente biológicas, se transforman [...] en necesidades histórico-culturales».

En particular, han sido las matemáticas una de esas necesidades histórico-culturales a las que el hombre en su filogenia se ha visto abocado, pues el recurso que ellas comportan en la tarea de procurar soluciones a demandas elementales ha surgido de procesos de reflexión y abstracción acaso no al alcance de todos los hombres o no, por lo menos, de todas las disposiciones de espíritu y de tiempo. El nivel reflexivo subyacente a las matemáticas como saber cultural ha hecho que su dominio se presente a posteriores generaciones como una imposición.

En tanto producto del trabajo humano, en un concepto matemático, por ejemplo, se cifra la propia historia del hombre, su cultura y la factualidad de su futuro, pues, en sintonía con Moura, se trata de «un objeto de la mente humana, producido al producir objetos y al reflexionar sobre formas naturales que puedan tener algún significado para la vida» (2011: 55).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

La educación escolar debe procurar la apropiación y la producción de la cultura por parte de las nuevas generaciones. En este sentido, una perspectiva histórico-cultural de la educación coloca su acento en los procesos de apropiación y producción mediante los cuales el hombre, a través de generaciones, ha perpetuado sus conocimientos, y en general, su cultura. En el caso de la educación matemática, las apuestas por una teoría histórico-cultural coinciden en asumir el trabajo, la labor o la actividad humana como la forma más apropiada de vivenciar el contexto en el cual tuvieron génesis los conceptos matemáticos y la exigencia intelectual que estos concitaron. En consecuencia, dichas apuestas diseñan metodologías que propician simultáneamente procesos de enseñanza y de aprendizaje en el escenario escolar.

Para un maestro en educación matemática como yo, interesado por la enseñanza de un concepto como la relación de perpendicularidad, este trabajo de investigación resultó, a más de pertinente, muy emocionante. El factor emotivo se gestaba en la situación de conocimiento: ver cómo estudiantes de quinto grado, a la manera de nuestros antepasados, objetivaban dicho concepto, pudiendo vivenciar (*revivir*) la experiencia dialéctica de encontrar solución a un problema, en este caso haciendo uso de la relación de perpendicularidad como herramienta y conocimiento que los guio a la producción de nuevos conceptos.

En la medida en que me propuse el reconocimiento histórico-lógico del concepto a través de una actividad que lo articulara, se me hizo indispensable considerar los aportes de las Actividades Orientadoras de Enseñanza. La actividad principal estaría representada por

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

la práctica social de la construcción de vivienda, en la cual lo onto y filogenético tuvieron oportunidad de expresarse a partir del interés concitado por objetos geométricos. Se trataba pues de reproducir las condiciones materiales y sociales en las que los pueblos primitivos recurrieron a la relación de perpendicularidad para resolver las dificultades presentadas una vez puestos a construir sus viviendas. Se trataba en últimas de que los estudiantes se apercibieran en una senda que ha configurado nuestra humanidad, y de que se dispusieran a transitarla.

Así, ante las dificultades deparadas por la construcción de sus viviendas o la de sus seres más inmediatos, mis discentes se vieron en la necesidad de volver a producir dicho objeto matemático. Esta fue la ruta que me condujo a la pregunta de investigación: ¿Cómo se movilizó el proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado? Procurando responder esta pregunta, me concentré en el análisis de dicha objetivación en el caso de estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Alianza para el Progreso en su sede Anastasio Sierra, ubicada al noroeste del municipio de Montelíbano, en el departamento de Córdoba ( $7^{\circ}58'$  Norte -  $75^{\circ}25'$  Oeste).

Los estudiantes de esta institución, establecimiento público con reconocimiento oficial por la Secretaría de Educación departamental y autorizada para la atención en los niveles de educación preescolar, básica y media académica (MEN, 2016), provienen en su mayoría de los estratos socioeconómicos 1 y 2. Tienen acceso a un currículo de educación matemática que intenta responder a los lineamientos curriculares y que apuesta por un plan de estudio organizado por pensamientos y sistemas; no obstante, en la práctica, la enseñanza



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

de la geometría aparece desarticulada de los otros conocimientos matemáticos, y marginada de las problemáticas sociales. Por ejemplo, en el ciclo de básica primaria, donde se prevé un mayor énfasis en los contenidos relacionados con la geometría y el pensamiento espacial, la enseñanza se reduce a prácticas expositivas, con el consiguiente estudio de las figuras geométricas y los cuerpos geométricos a través de dibujos en el tablero. De ahí que gran parte de las dificultades que presentan los estudiantes en este ámbito del conocimiento matemático suelen definirse en términos de un problema de visualización.

Movido a resolver esta problemática, fundé este trabajo de investigación en dos posturas teóricas, ambas fundamentadas en la Teoría de la Actividad de Leontiev (1984). Por una parte, centré mi interés en el proceso de producción del concepto matemático de perpendicularidad, apoyándome en la Teoría Cultural de la Objetivación de Radford (2014a), logrando con ello un soporte conceptual para analizar la forma en que tanto el conocimiento como los sujetos son producidos en el movimiento de la objetivación. Adicionalmente, encontré pertinente organizar dicho movimiento en función de la postura teórico-metodológica de las Actividades Orientadoras de Enseñanza de Moura (2010), procurando un mayor compromiso de tal movimiento con la dialéctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y con la estructuración de la actividad en torno a una necesidad vital.

En este orden, el presente trabajo de investigación ha sido organizado en cinco capítulos, en cada uno de los cuales he sistematizado mis elaboraciones sobre las reflexiones, discusiones y análisis que se generaron en una dinámica en la que yo como investigador me mantuve en diálogo con los otros sujetos participantes de la experiencia.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En el primer capítulo me concentro en exponer y delimitar el problema de investigación, justificándolo desde las formas en que la escuela tradicional (occidentalizada)<sup>1</sup> ha procurado la enseñanza de la relación de perpendicularidad en el ámbito de los llamados sistemas geométricos, casi siempre al margen de los sistemas culturales en que se encuentran los estudiantes. Con este precedente, mediante la exposición de las situaciones con que intenté explicar algunas dificultades de los estudiantes a la hora de aprender la relación referida, avanzo hacia la formulación de un objetivo y de una pregunta de investigación.

El segundo capítulo está dedicado a explicitar las diferentes posturas teóricas en las cuales fundamenté mi trabajo. Se trató en este caso de un marco teórico centrado fundamentalmente en la perspectiva histórico-cultural de la educación matemática, orientado por los aportes de la Teoría Cultural de la Objetivación de Radford (2014a), por la postura epistemológica del materialismo histórico dialéctico de Marx (como se citó en Candiotti, 2014), y por las concepciones que sobre los objetos geométricos han sido producidas por varios autores en esta misma perspectiva de la educación matemática.

En el tercer capítulo expongo las situaciones que me motivaron a optar por la postura teórico-metodológica de las Actividades Orientadoras de Enseñanza como forma de organizar las acciones con los estudiantes, partiendo de una actividad principal cuyo trabajo de campo proyectaba realizar en catorce encuentros de aproximadamente dos horas cada uno. Describo la manera en que se llevó a cabo el proceso de análisis, considerada la actividad en tanto unidad, pero respetando de igual forma, al interior de ella, la lógica de ciertos periodos de tiempo que facilitaron la producción conjunta de los registros y datos. Presento asimismo

---

<sup>1</sup> Dada su postura fundada en los discursos hegemónicos de Occidente.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

el método que orientó la investigación, mostrando los diferentes momentos y pasos (camino) que considera el materialismo histórico bajo el enfoque crítico-dialéctico.

El cuarto capítulo está dedicado al análisis de los registros y datos, y a la producción de tres categorías:

i) *Transformación material emancipadora de los estudiantes, en dialéctica con los sujetos otros que constituyen su colectivo.* Con esta categoría analizo cómo en el movimiento de objetivación se produce un sujeto-individuo, pero a su vez, en tanto praxis cogitans, su pensamiento se debe también a una relación con los otros, con quienes comparte una labor conjunta. Esta bidireccionalidad del pensamiento responde al modo conjunto en que es asumida la actividad sensible, lo cual demanda una serie de transformaciones tanto en las relaciones sociales como en la materialidad del aula; estas transformaciones determinarán el proceso de subjetivación, de suerte que pueda hablarse de un llegar a ser con los otros.<sup>2</sup>

ii) *El lenguaje, como constitutor de la objetivación del concepto de perpendicularidad, en dialéctica con conceptos como líneas, triángulos, ángulos y alturas.* En tanto medio de nominación de las cosas el lenguaje cumple un papel fundamental en la conceptualización fenomenológica de los objetos geométricos, pues con gran frecuencia las primeras representaciones que de ellos se hacen los estudiantes han cursado instancias de aproximación lingüística; en el lenguaje se dinamizan las múltiples determinaciones, lo cual imprime en los estudiantes una actitud dinámica en la intuición del concepto; en el lenguaje será la síntesis de las múltiples determinaciones del concepto forjado.

---

<sup>2</sup> Expresión a la que llego a partir de la síntesis de dos expresiones de Radford, «volviéndose» (2014a: 135) y «ser-con-otros» (2006: 116).

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

iii) *La construcción de vivienda como práctica social que posibilita la objetivación del concepto de perpendicularidad, en dialéctica con la transformación material emancipadora de los estudiantes.* En su condición de labor conjunta, la práctica cultural de construcción de vivienda es entendida en este trabajo como actividad sensible, asunción que me ha sido posible gracias a la lectura de Marx (citado por Candiotti, 2014). Como actividad sensible, esta práctica social alcanza a constituirse en actividad emancipadora, es decir, productora en sí misma de sujetos, objetos materiales (artefactos) y conceptuales.

El quinto capítulo presenta los hallazgos y la reflexión sobre los mismos presentada a modo de conclusiones. Estos hallazgos responden la pregunta de investigación.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 2.1 Justificación

Desde mi experiencia como maestro de educación matemática en el nivel de la básica primaria, específicamente en la praxis sobre la enseñanza de los objetos geométricos, surgió la necesidad de analizar la naturaleza ontológica y epistemológica de la perpendicularidad, entendida como relación entre dos líneas (segmentos) o entre dos planos (semiplanos) que al intersectarse forman ángulos de  $90^\circ$ . Esta relación se encuentra presente en la constitución misma de muchos figuras y cuerpos,<sup>3</sup> caracterizándolos en sí mismos y en sus relaciones con otros objetos geométricos.

Algunos de esos objetos geométricos han alcanzado, al interior del currículo de matemática, cierta preeminencia, bien por su utilidad a la hora de modelar situaciones de la vida real o por su necesidad en la enseñanza de otros objetos de la matemática. Entre estos objetos puedo mencionar el *triángulo rectángulo* que por ser lugar de la relación pitagórica, recibe una alta consideración en los tratamientos escolares, tanto en geometría como en trigonometría. Otro objeto geométrico priorizado en la enseñanza escolar es el de las alturas de los triángulos, dada su condición de requisito en el cálculo del área de estas figuras, de donde se volverá clave en el estudio de los llamados sólidos o cuerpos geométricos, donde también se requiere con frecuencia calcular áreas, volúmenes y establecer relaciones.

Para el estudio de estos objetos geométricos, resulta indispensable conocer la relación de perpendicularidad, tanto si se busca estudiar las propiedades del triángulo rectángulo, en donde ella sirve para expresar una de las relaciones posibles entre sus catetos, probablemente

---

<sup>3</sup> Mi comprensión de los términos figuras y cuerpos geométricos se hará explícita en el marco teórico.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

la más usada de todas, como si se quiere estudiar la altura de los triángulos. En este último caso, su necesidad obedece a la capacidad para identificar intercepciones que semejante relación entraña, lo cual abona el terreno para responder con el segmento correcto a la solicitud de representar la menor distancia entre una de las bases del triángulo (segmento de recta) y su vértice opuesto (punto).

Conocer la relación de perpendicularidad y hacer uso de ella en los procedimientos de análisis de otros objetos demanda, en muchas situaciones, del reconocimiento perceptual cuando se trata de figuras y cuerpos, e incluso del reconocimiento de su forma declarativa cuando estas figuras son representadas por medio de discursos.

En la enseñanza de la perpendicularidad se suele hacer mucho énfasis, por ejemplo, en el enunciado metafórico «la recta que cae sobre otra», con el fin de representar dicha relación. Otro modo insiste en presentarla como una definición formal o axiomática con el consiguiente paso a la representación figural. Sin embargo, en esta presentación, nuevamente, se limita la enseñanza a la exposición de un *caso trivial*, como lo es el de la intersección entre una línea vertical y otra horizontal con respecto al eje gravitacional de la tierra. Frente a esta trivialización a la hora de la enseñanza, dice Bachelard: «El pensamiento científico es entonces arrastrado hacia *construcciones* más metafóricas que reales, hacia *espacios de configuración* de los que el espacio sensible, en definitiva, no es sino un mísero ejemplo» (2004: 15).

Es posible que tal recurrencia en la enseñanza de la perpendicularidad guarde relación con lo que algunas investigaciones han registrado sobre la aparente dificultad de ciertos estudiantes para percibir (visualizar) esa perpendicularidad, sin tener en cuenta que se les

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

expone una situación donde las rectas están orientadas en otra dirección (rotación), o en la que tal relación se encuentra formando parte de una figura más compleja (Vasco, 2006: 62). En algunos casos estas constataciones han sido asociadas con habilidades perceptivas de carácter individual (Hederich, 2007: 29), sin embargo, esta posibilidad no será analizada en esta investigación.

Uno de los aspectos que me movilizó en este estudio fue elaborar una propuesta por fuera de la unicidad<sup>4</sup> de miradas, significados, sentidos, formas y medios con los cuales se viene abordando en algunos casos, en el nivel de básica primaria, la enseñanza y el aprendizaje de la perpendicularidad, por fuera en especial de una *forma idealizada* y desconectada de toda realidad histórica y cultural que subestima, en particular, el aspecto lógico-histórico del conocimiento matemático, aspecto que destaca Moura:

Lo que queremos decir es que al enseñar, el objeto de conocimiento debe ser visto en toda su dimensión histórica, pues su historia es la del desarrollo de un instrumento para la solución de problemas concretos y, al mismo tiempo, es la producción de significados sociales de forma lógica. Los aspectos histórico y lógico, como nos asegura Kopnin (1978), son interdependientes, ya que al tener que solucionar un problema es necesario el desarrollo de una forma lógica de resolverlo y comunicar la solución. (Moura, 2011: 54)

Cuando hablo de forma idealizada y desconectada de toda realidad histórica y cultural, me refiero a casos donde se expone la definición de perpendicularidad con la pretensión de que los estudiantes la identifiquen en cuantas situaciones la involucren —lo cual supone una condición en los estudiantes que atañe al maestro procurarla— y acto

---

<sup>4</sup> En el sentido de favorecer una sola forma de abordar la enseñanza.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

seguido usen la información presentada por ella en la toma de decisiones frente a un problema planteado o en un procedimiento algorítmico que así lo requiera.

Este modo frecuente de presentar la relación de perpendicularidad a los estudiantes suele ostentar dos variedades, bien desde la geometría euclidiana, que habla de «la relación entre líneas que al intersectarse forman cuatro ángulos rectos», bien desde otras *geometrías*, que la define como «la relación entre dos líneas que al intersectarse forman ángulos adyacentes congruentes». Esta manera de abordar y promover el estudio de los objetos en cuestión es lo que puede llamarse, en acuerdo con Tamayo (2012), *matemática occidental*.<sup>5</sup>

Un problema adicional en estos abordajes lo entraña la ejemplificación que ofrecen en la enseñanza de la perpendicularidad. Se usan ejemplos hechos de terminología y expresiones enmarcadas en ciertos géneros discursivos<sup>6</sup> cuyos significados y sentidos distan mucho de aquellos en que circulan los saberes cotidianos<sup>7</sup> de los estudiantes, sesgo en el cual residiría una desestimación de la capacidad conceptual subyacente a estos otros géneros discursivos *primarios o simples*.

Bajtín en cambio, al subrayar la obligatoriedad discursiva, aunque acepta que ciertos géneros son «más libres» (1982: 269), advierte que tal libertad depende de que se les domine bien.

En este orden, al hablar de objetos geométricos a estudiantes de la sabana cordobesa no se puede prescindir de justificación, de crear ciertas condiciones que permitan a los destinatarios la comprensión de los enunciados. Así, para estudiantes de la región del Alto San

---

<sup>5</sup> Lizcano (2003) también se refiere a estas matemáticas como relativas al «imaginario greco-occidental».

<sup>6</sup> En el sentido expuesto por Bajtín (1982).

<sup>7</sup> En el sentido expuesto por Jaramillo (2011).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Jorge, la explicación de la perpendicularidad en términos de objetos que caen, les plantea un sentido de arriba y abajo no necesariamente correspondiente con una posición dada en el plano horizontal. De modo similar, hablar de altura en este contexto cultural no necesariamente conlleva a evocar la imagen de una recta, de un punto y de una línea trazada entre estos —sin contar los cuidados del trazado de la línea—, a no ser, y ello precariamente, que se visibilicen estos elementos en el plano fronto-paralelo del niño constituido por el tablero escolar, la pantalla digital, una lámina, etc.

Estas explicaciones de la perpendicularidad han desviado la comprensión del concepto, lo cual se constata, por ejemplo, cuando un estudiante, en lugar de entenderlo como una relación de líneas mutuamente perpendiculares, lo entienden como una propiedad de una de las líneas, las más de las veces atribuida a la línea vertical. Este episodio de confusión tal vez se arraigue en la reutilización de la metáfora la recta que cae sobre la recta, forma de decir en la que el carácter activo de la recta que cae (está en movimiento, cayente, mientras la otra espera en reposo) se ha ganado un lugar protagónico en la mente de los oyentes. De las confusiones de un lenguaje que pretendía ser didáctico ya advertía la epistemología de Bachelard:

No es tan fácil, como se pretende, desterrar a las metáforas en el exclusivo reino de las expresiones. Quiérase o no, las metáforas seducen a la razón. [...] El peligro de las metáforas inmediatas en la formación del espíritu científico, es que ellas no son nunca imágenes pasajeras; ellas se dirigen a un pensamiento autónomo; tienden a completarse, a terminar en el reino de la imagen (Bachelard, 2004: 93-97).

Este influjo de la metáfora llega a constituir un obstáculo en la búsqueda del estudiante por resolver un problema, como ocurre en el caso de las denominadas

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

mostraciones, en el de las demostraciones mismas y, en general, en aquellas situaciones que demanden la conceptualización fenomenológica de una noción geométrica.

En ese sentido, nos recuerda Radford:

La primera de ellas corresponde a lo que llamamos la conceptualización fenomenológica. Es el caso de la Geometría, que es el caso que nos interesa aquí, tal conceptualización se caracteriza por el hecho que el aspecto conceptual de los objetos geométricos existe solo en términos del aspecto figurativo, el cual se restringe a la imagen concreta (Radford, 1994: 7).

Bastaría con estar atentos a los gestos y posturas corporales de los estudiantes al enfrentarse a ciertas situaciones geométricas para darnos cuenta de la dificultad que les representan ciertas tareas, en especial cuando se trata de figuras o cuerpos que involucran orientaciones distintas a las que se han hecho frecuentes en las exposiciones escolares. Este grado de dificultad denota una disposición mayor de tiempo para la identificación de esos objetos y sus relaciones.

Un estudio como el que propongo en este proyecto aportaría elementos para explicar ciertas tendencias en los estudiantes a la hora de analizar los objetos geométricos. En este sentido: cuando se utiliza el plano fronto-paralelo para representar un objeto que parecería rotado en comparación con su representación más usual en la escuela, se activa en los estudiantes cierto intento de comprensión viso-corporal consistente en el giro de sus cabezas como buscando ajustar la mirada a la perspectiva que les ofrece el objeto; desatendiendo así la introducción discursiva mediante definiciones formales o explicitaciones de la existencia de un ángulo recto formado entre dos líneas, segmentos de línea, planos o semiplanos. Esta desatención persiste en nuestro contexto, y no ha alcanzado para decir a los maestros que

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

dejen de insistir en definiciones para la perpendicularidad juzgadas indispensables solo por ellos mismos.

Este trabajo será, por lo menos para mí, una oportunidad de aprender sobre las posibles relaciones entre los artefactos propuestos por el maestro y los que provienen de *saberes cotidianos* que, *tan solo* amparados en gestos y posturas corporales de los estudiantes, entrañan un criterio viso-corporal como el mencionado. Una opción de artefactos para el maestro la constituyen los *softwares* especializados en tanto que ofrecen mayor facilidad para las transformaciones en el plano y en el espacio. Las virtudes de este artefacto podrían ser contrastadas con la naturaleza del particular movimiento de cabeza de los estudiantes (criterio viso-corporal) para efectos de estudio en geometría dinámica.

Con el acercamiento de los sistemas simbólicos<sup>8</sup> que propone la escuela y los de los saberes cotidianos pretendo evitar la incurrencia de las formas de enseñanza fundadas en posturas teóricas occidentalizadas: excluir o desestimar la oportunidad de conocer y aprender los conceptos en sus relaciones de materialidad e historicidad. Por más que ciertas prácticas de enseñanza digan estar sustentadas en enfoques epistemológicos que conciben el conocimiento como una construcción colectiva, sus abordajes continúan subestimando, en la dinámica propia de las clases, el papel que juegan los elementos histórico-culturales provenientes del medio social inmediato, en el cual, antes de ser propuestos en clase, ya tenían vida los conceptos.

Por ejemplo, las nociones de perpendicularidad, sin hacerse explícitas, han sido subsumidas por construcciones materiales (viviendas, cercas, pozos, techos, terrazas, etc.),

---

<sup>8</sup> Me refiero a esa «superestructura simbólica», a la que en otros textos Radford ha llamado «sistemas semióticos de significación cultural».

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

por instrumentos<sup>9</sup> (escuadras, plomadas, cuerdas de 13 nudos<sup>10</sup>), por usos del lenguaje (derecho, aplomado, aplomo) y, en general, por las labores (trabajo) en comunidad; pero estas manifestaciones del concepto, aunque actúen como expresión de unos «sistemas simbólicos de la cultura» (Radford, 2000), resultan poco relevantes para los enfoques que insisten en abordar la relación de perpendicularidad a través de la verificación del ángulo de noventa grados (recto), sin auscultar, aunque fuera, si esta noción de ángulo reside en los estudiantes con el mismo significado y los mismos sentidos que para la *matemática occidental*, o si el sistema sexagesimal del cual se deriva la medición del ángulo resulta operativo y afectivamente significativo para el lenguaje con el que estas comunidades han pensado el mundo.

Para algunos de estos enfoques, a la hora de explicar cierta conexión entre el mundo externo y la mente, queda invisibilizado el papel de lo ético y político en la producción de un objeto específico en un contexto particular. A consecuencia de ello, la concepción predominante sobre el aprendizaje, el conocimiento y la conceptualización lleva a considerar que la enseñanza de un objeto matemático no ofrece posibilidad para la producción de subjetividad en las comunidades, consideración entendible, pues están aprendiendo en un clima de individualidad y neutralidad ideológicas e incluso axiológicas. A propósito, Roth y Radford (2011) señalan la relación dicotómica entre cognición y emoción que predomina en estos enfoques:

Hace ochenta años, L.S Vygotsky se quejó de que la psicología se equivocó al estudiar el pensamiento independiente de la emoción. Esta situación no ha cambiado significativamente, ya que la mayoría de los

---

<sup>9</sup> En el sentido expuesto por Moura (2011).

<sup>10</sup> Herramienta construida mediante una cuerda a la que se le realizan trece nudos equidistantes, utilizados para mostrar la relación pitagórica.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

estudios científicos continúan estudiando la cognición independiente de la emoción (Roth y Radford, 2011: 8).

En consecuencia, ahondar en el análisis de la objetivación del concepto de perpendicularidad por parte de estudiantes de quinto grado en figuras y cuerpos geométricos, más que la oportunidad para desarrollar un proceso de investigación sobre la enseñanza de los sistemas geométricos, sobre la ejecución de las actividades necesarias para el desarrollo del pensamiento espacial en niños, o sobre la posibilidad de establecer relaciones entre los sistemas geométricos y otros sistemas matemáticos, representa para mí la oportunidad de responder a la necesidad de abordar la enseñanza de este objeto geométrico a partir de unas posturas ontológicas y epistemológicas ancoradas en una perspectiva histórico-cultural diferente a la que ha caracterizado los abordajes tradicionales de la matemática occidental.

En una referencia anticipada a mi tema de investigación, resalto mi intención de analizar el proceso mediante el cual los estudiantes asumen el concepto de perpendicularidad como su objeto de aprendizaje.

El análisis ha de posibilitar hacer de este proceso una praxis reflexiva, suscitada por actividades diseñadas intencionalmente por el maestro-investigador en las que los artefactos sirvan de mediadores entre los sujetos y el objeto que comienza a ser producido (concretizado).

Del análisis a la aprehensión del objeto de estudio se deriva el correlato de cómo estudiantes y maestro-investigador devienen a su vez objetos (en tanto *producidos*) a través de las relaciones dialógicas y dialécticas que asumen en tanto sujetos reflexivos, éticos y políticos.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Esta afección del sujeto en el acercamiento a un objeto es advertida por

Radford:

La teoría [de la objetivación] se basa en la idea fundamental según la cual aprender es tanto conocer como devenir. Considera la meta de la educación matemática como un esfuerzo dinámico político, social, histórico y cultural que busca la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas que se constituyen histórica y culturalmente y están en permanente evolución (Radford, 2013c: 1).

### **2.2 Tema**

La objetivación del concepto de perpendicularidad por estudiantes de quinto grado en figuras y cuerpos geométricos.

### **2.3 Pregunta de investigación**

¿Cómo se movilizó el proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado?

### **2.4 Objeto de investigación**

La objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos.

### **2.5 Objetivo**

Analizar la objetivación, por estudiantes de quinto grado, del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos.



### 3. HORIZONTE TEÓRICO

#### 3.1 Una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática

Abordar la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva histórico-cultural parte de ubicar a los sujetos, en este caso al maestro-investigador y a los estudiantes, en el centro de una concepción gnoseológica, epistemológica, ontológica y metodológica, que demanda, en primer lugar, una valoración del papel que juega la cultura (lenguaje, prácticas, artefactos, etc.) en el aprendizaje de los objetos de estudio, y, en segundo lugar, la reafirmación de la producción histórica de esos objetos, es decir, mostrar cómo cada generación fue modificándolos y, a su vez, cómo ella misma fue modificada por ellos, lo cual no significa, como dice Moura «rehacer la historia», sino «dar el significado social para que los sujetos se apropien del conocimiento, de tal manera que le atribuyan sentido personal» (2011: 51).

El lugar que ocupa la cultura en esta forma de mirar la educación matemática no es asumido en términos de un simple *axioma periférico*<sup>11</sup> sino como elemento constitutivo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, vistos en unidad dialéctica (enseñanza-aprendizaje) y con ánimo de apreciar su totalidad, punto de mira respecto al cual han sido las corrientes socioculturales las encargadas de pronunciarse y configurar de este modo un campo. Según Jaramillo (2011), para la perspectiva sociocultural, el conocimiento matemático es asumido como una actividad social, donde su producción y legitimación, más que tener un origen individual, derivan de la complejidad de las diversas prácticas sociales y de unos significados

---

<sup>11</sup> En el sentido expuesto por Radford (2013).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

y sentidos compartidos según sea el grupo sociocultural en que se inscriban dichas prácticas. También Valero comparte la idea de «una diversidad de conocimientos matemáticos asociados a diversas prácticas sociales y culturales» (2007: 2), y al cuestionar la definición de las prácticas de la educación matemática bajo posturas exclusivamente individualistas, defiende la posición con la cual se asume que lo válido y lo legítimo se debe a maneras colectivas de responder a los problemas.<sup>12</sup>

Dados los intereses de esta investigación, he encontrado pertinente la aclaración de Radford (2014a) en el sentido de reconocer dos aproximaciones diferentes en el marco de estos abordajes socioculturales: una pone su acento en el papel de lo discursivo, otra enfatiza en la categoría de labor, trabajo o actividad. Se ve pues que motivos teóricos y metodológicos comprometen más esta experiencia investigativa con la segunda forma de aproximación, que resalta el aporte de la actividad en tanto producción social.

### 3.2 La Teoría Cultural de la Objetivación

La presente experiencia de investigación se inscribe en el marco de la Teoría Cultural de la Objetivación de Radford (2014a), que a su vez produce sobre los aportes de la corriente dialéctico-materialista y de allí su profundo interés por la categoría hegeliana de labor o trabajo. Desde esta categoría se posibilita reconceptualizar la enseñanza y el aprendizaje en términos de actividad o labor conjunta entre estudiantes y maestros.

---

<sup>12</sup> Aquí vale la pena aclarar que esta autora considera necesaria la distinción entre la perspectiva sociocultural, «en la que el asunto del poder o está oculto o no tiene que ver explícitamente con la valorización de las prácticas y los significados dentro de sistemas semióticos» (2009: 316), y el llamado enfoque socio-político que privilegia el papel del poder en este tipo de constituciones.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Otro soporte de la teoría de la objetivación lo constituye la Teoría de la Actividad de Leontiev, que reporta la deuda de la personalidad y de la conciencia de los sujetos con la actividad colectiva, en desmedro de la deuda al mismo respecto con las acciones individuales:

Dicho de otro modo, a diferencia del individuo, la personalidad del hombre no es algo preexistente en ningún sentido con respecto a su actividad, lo mismo que su conciencia, su personalidad es engendrada por ella [...] La verdadera base de la personalidad es esa estructura particular de las actividades conjuntas del sujeto que surge en cierta etapa del desarrollo de sus vínculos humanos con el mundo (Leontiev, 1984: 135).

Esta concepción sobre la personalidad y la conciencia distancia a la Teoría Cultural de la Objetivación de las posturas aún dependientes de la clásica oposición individuo-sociedad. Más cercana al pensamiento de Freire (2013b), concibe la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como la posibilidad para la emancipación social, en donde a través de la producción conjunta de conocimientos, sean *producidos* también unos sujetos con una conciencia crítica y una personalidad libre.

En suma, la Teoría Cultural de la Objetivación, como teoría de la enseñanza y el aprendizaje, sugiere un giro epistemológico, antropológico, gnoseológico y ontológico al interior del campo de la educación matemática. El giro se instala en la asunción del *pensamiento* en dialéctica con la cultura, esto es, el pensamiento asumido en términos de algo cosustancial a la praxis reflexiva de la actividad misma; por tanto, requiere fundamentalmente del lenguaje, los signos, las herramientas (artefactos).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Esta teoría redefine, al interior de la educación matemática, los conceptos de saber y aprendizaje. Así, el saber es asumido como *patrones fijos* o *trabajo cristalizado*<sup>13</sup> de la praxis, y, por tanto, producto de un proceso de objetivación por parte de los sujetos que históricamente vivieron dicha praxis. A su vez, al revisar los conceptos de *pensamiento* y *objeto*, la Teoría Cultural de la Objetivación revisa también el concepto de *aprendizaje*, reconociéndolo más que nada como un proceso fundamentalmente social, un *aprender con los otros*, en lugar de un fenómeno individual o solipsista (Radford, 2006a).

### 3.3 Objetivación de la Perpendicularidad

De lo anterior se desprende que al proponerme dar cuenta de cómo se movilizó el proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad, en este caso por estudiantes de quinto grado de un contexto específico, adquiero un doble compromiso:

En primer lugar, la producción de un conocimiento, entendido este como *pura posibilidad*, es decir, no como un conocimiento que se posee sino como potencialidad, cuyo alumbramiento en la existencia tendrá que ser instanciado por la actividad cognoscente de los estudiantes en el seno de la actividad empírica. Al respecto, Moura señala que «conocer es la concretización de la superación de las necesidades generadas en la dinámica del desarrollo cultural de los pueblos» (2011: 50). Es así como ese conocimiento, aún en su condición abstracta, en tanto saber o trabajo cristalizado, o formas de hacer, pensar y reflexionar codificadas histórica y culturalmente, puede transformarse en *contenido*

---

<sup>13</sup> Entendido por Radford (2013c: 4) como una forma de entender el conocimiento, en la cual este se sitúa como «un conjunto de acciones codificado culturalmente» y, por tanto, es mucho más que «secuencias particulares de acciones coordinadas», mucho más que *instanciaciones* o determinaciones específicas.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

*conceptual concreto*, y solo así, en las mediaciones que demanda el conocer, ese conocimiento, dice Radford, «puede ser un objeto de pensamiento y como tal ser modificado y ampliado» (2013c: 7). Luego, al establecer un primer compromiso con el conocimiento en cuanto movimiento, es en su dinámica donde espero que los estudiantes objetiven (aprendan) el concepto de perpendicularidad, quiero decir, es en dicho proceso donde intento que el objeto muestre lo que es.

Así, *la perpendicularidad*, más que una definición, deviene de un proceso en el cual todo el trabajo histórico-cultural de muchas generaciones ha sido subsumido por un objeto. Objeto este que propongo objeto de mi actividad (enseñanza), respecto al cual, con reflexión y trabajo conjunto, espero se convierta en objeto de la actividad de los estudiantes (aprendizaje). En palabras de Radford:

En el concepto de trabajo de Hegel conceptualizamos la enseñanza y aprendizaje no como dos procesos distintos, sino como el trabajo conjunto sensible, material y conceptual de estudiantes y profesores encaminados a la creación de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas histórico-culturalmente constituidas (Radford, 2013b: 6).

En segundo lugar, asumo el compromiso de producir no solo saberes, sino también seres, como es sugerido por Roth y Radford (2011), puesto que objetivar un concepto como el de perpendicularidad, con estudiantes de quinto grado, implica la producción de un conjunto de relaciones afectivas, éticas y políticas que entrañan el lenguaje mismo de los acuerdos y desacuerdos en torno al objeto propuesto, en curso de lo cual se genera un entorno que impacta a su vez la producción de los sujetos. A propósito, Radford, citando a Marx y Engels, recuerda que «las circunstancias hacen a los hombres como los hombres a las circunstancias» (2000: 10).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Con el fin de justipreciar el papel de estas relaciones sociales en la producción tanto de los objetos como de los sujetos, es preciso recordar que la Teoría de la Actividad reconoce la importancia de estas relaciones en el marco de la dupla objeto-motivo, en el sentido de que es el motivo y no tanto el objeto lo que mueve la voluntad del estudiante hacia la apropiación del conocimiento. El despertar de esta suerte de necesidad responde a que el objeto es desconocido para el estudiante, o aunque medianamente conocido, no necesariamente concuerda con el que tiene en mente el maestro. En cambio, el motivo, el deseo de dialogar, controvertir, argumentar, *mirar con los otros*, es lo que orienta y moviliza el proceso de objetivación (tanto para el maestro-investigador como para el estudiante). Otra razón para resaltar la importancia de estas relaciones sociales en la aptitud frente al aprendizaje, tiene que ver con lo propuesto por Moura cuando sostiene:

[...] en la relación entre la enseñanza y el aprendizaje, la cultura aparece como algo que debe ser apropiado e interiorizado por los individuos. Según Davidov (1988), la internalización constituye la transformación de la actividad colectiva (experiencia social) en actividades individuales (experiencia individual). Esta transformación es posible a través de la comunicación entre las personas. Por lo tanto, se deduce que la relación entre la actividad colectiva y la actividad individual está relacionada con la tesis de Vygotsky según la cual el conocimiento ocurre en un primer momento en lo social (interpersonal) para transformarse en individual (intrapersonal). También en este sentido, contribuye significativamente Rubtsov (1996), al defender que la aptitud para el aprendizaje es el resultado de cierta interiorización originada esencialmente en situaciones de actividad colectiva (Moura, 2010: 107-108).

La objetivación del concepto de perpendicularidad por estudiantes de quinto grado se propone pues como *aprendizaje*, en tanto le preocupa la conciencia que puedan tener unos sujetos (estudiantes) respecto a cómo dicha relación ha sido concretizada de múltiples formas y subsumida en diferentes sistemas simbólicos, tanto en retrospectiva histórica como en el

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

ámbito de su propia cultura. Por tanto, será en el marco de un sistema de actividades, que impliquen la labor conjunta, donde espero analizar dicha objetivación a partir de un número de acciones intencionadas que movilicen los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, símbolos y significados, etc.) en calidad de mediadores de la actividad humana concreta. En esta dialéctica de la actividad se da la conciencia del objeto. Vygotsky, citado por Wertsch, al referirse a esta característica del método dialéctico insiste en que «es solamente en el movimiento que un cuerpo muestra lo que es» (2006: 35). A su vez, Radford, al referirse al carácter mediatizado del pensamiento o toma de conciencia como una actividad material que va más allá de la apreciación mentalista, destaca los efectos de tal mediación en el comportamiento del pensamiento y en las limitaciones de la mente:

Se piensa con y a través de los artefactos culturales, de manera que hay una región externa que, parafraseando a Voloshinov (1973), llamaremos el territorio del artefacto. Es en este territorio donde la subjetividad y la objetividad cultural se imbrican mutuamente y en el que el pensamiento encuentra su espacio de acción y la mente se extiende más allá de la piel (Radford, 2006a: 107).

### 3.4 Actividad Sensible (Visualización)

Al entender la perpendicularidad como el conocimiento *cristalizado*, cultural e históricamente producido a partir de las reflexiones y acciones sobre unas relaciones geométricas, comienzo por reconocer que un buen número de estas acciones y reflexiones llevadas a cabo por personas de pasadas generaciones, iniciaron con la percepción de ciertos fenómenos de la vida material en la que se reconocían tales relaciones geométricas. Dicho de otro modo, las diferentes comunidades a través de la historia tuvieron que enfrentarse a situaciones que involucraban la solución de ciertos problemas en los que la relación de



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

perpendicularidad constituía un conocimiento (como posibilidad) necesario. Pero debemos entender esta *percepción*, según Candiotti (2014: 4), como lo que Marx llamó una «actividad humana material, sensible, exterior, objetiva y... subjetiva», que no debe ser confundida con la contemplación de la realidad objetiva material (ontológica), pues esa actividad sensible implica superar<sup>14</sup> las capacidades sensoriales (propias de los sentidos), y, con base en ellas, tomar conciencia de unas imágenes o representaciones que, en tanto objetos sensibles, hacen parte de una realidad objetiva material (epistemológica).<sup>15</sup> Es esta última realidad la que les corresponde a los cuerpos geométricos, las figuras geométricas y las relaciones que se establecen entre ellos, puesto que solo al ser mediatizados por algunos elementos simbólicos de la cultura, el lenguaje, por ejemplo, pueden ser o no visibilizados (visualizados), nombrados, expresados, comunicados y objetados por la psique humana.

A propósito del carácter social de la percepción, Radford señala:

El papel fundamental que desempeña la palabra y el lenguaje en la formación y el funcionamiento de la psique humana según la escuela socio-histórica puede ejemplificarse rápidamente en el caso de la percepción, que dicha escuela no considera como contemplación sino como una actividad mediada por signos y palabras y en general por el lenguaje (Radford, 1999: 9).

Adicionalmente, en torno a las modificaciones que el lenguaje posibilita, sobre las estructuras naturales, Vygotsky, citado por Radford, sostiene:

Gracias a las palabras, los niños distinguen elementos separados, superando con ello la estructura natural del campo sensorial y formando nuevos (artificialmente introducidos y dinámicos) centros estructurales. El niño comienza a percibir el mundo no solo a través de sus ojos, sino también a través del lenguaje. En consecuencia, la inmediatez de la percepción «natural» queda substituida por un proceso mediato y complejo; como tal,

---

<sup>14</sup> No basta con el empleo de esas capacidades sensoriales.

<sup>15</sup> Recomiendo apreciar la posición que cada una de estas dos formas de *realidad objetiva* material ocupa al interior del mapa de esta investigación (véase la Figura 1).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

el lenguaje se convierte en una parte esencial del desarrollo cognoscitivo del niño (Radford, 2000: 8).

Se evidencia que es gracias a actividades humanas concretas que tales objetos sensibles comienzan a ser asumidos como «actividad sensiblemente humana», es decir, como *lo percibido* (lo captado a través de los sentidos), *lo que uno mira*. Como intenté mostrar en el ideograma de la Figura 1, los estudiantes que miran en dirección de la flecha *objetivación de la perpendicularidad*, situados desde la *terrenalidad* (realidad ontológica), requerirán de una actividad sensible que haga las veces de praxis para consumir dicha objetivación.



Figura 1. (Ideograma que orientó el Trabajo de Investigación.)

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En efecto, la actividad sensible es entendida como esa forma inicial de entrar en contacto con los objetos, mediante la cual las personas toman conciencia de las formas geométricas en tanto que objetos producidos históricamente por la praxis.

Ya desde el mundo griego se distinguía entre esta forma de asumir los objetos geométricos como formas sensibles, y su condición eterna como lo pensaba Sócrates, citado por Platón: «Por lo demás —continué yo—, no nos discutirán todos los que estén un poco versados en geometría que esa ciencia tiene un objeto enteramente diferente del que dicen de ella quienes la practican» (2003: 146).

Además, según Radford: «Homero, entre otros, utilizaba el término *eidos* en el sentido de algo externo, no mental, *lo que uno mira*, por ejemplo, la figura, la forma, la apariencia —para San Agustín *eidos* se refiere a algo que está dentro del individuo» (2006a: 4).

En lo que atañe a las relaciones geométricas percibidas como objetos sensibles, Marx y Engels (1974) parecen haber sintetizado las concepciones anteriores en una sentencia que recoge lo empírico, descarta lo inmutable y reconoce las ideas susceptibles de estar tanto adentro como afuera de los sujetos. En suma, para la presente investigación, siguiendo a Marx y Engels en su concepción sobre el mundo sensible, y con respecto a las relaciones geométricas percibidas en tanto que objetos sensibles en el mundo, es preciso considerar que:

No es algo directamente dado desde toda una eternidad y constantemente igual a sí mismo, sino el producto [...] del estado social, en el sentido de que es un producto histórico, el resultado de la actividad de toda una serie de generaciones, cada una de las cuales se encarama sobre los hombros de la anterior (Marx y Engels, 1974: 47).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Desde luego que al referirme a *lo que uno mira*, a imágenes o representaciones, tampoco pretendo colocar el peso en el otro extremo de la balanza, pues *lo percibido* no es el resultado del mero pensamiento (actividad mental), y así lo examina la perspectiva histórico-cultural que con Luria (citado por Radford, 1999: 9) expresa que «los procesos perceptivos también dependen de las formas socio-históricas de vida». De ahí que en la *Figura 1*, con la flecha que parte de los *Sistemas simbólicos de la cultura* dirigida hacia los procesos de *Conciencia*, pretenda representar precisamente la transformación de la *actividad sensorial* en *actividad sensible* a través de esas formas socio-históricas de vida.

Conforme a lo anterior, aquellas problemáticas en torno a la visualización como percepción de los objetos geométricos y/o sus representaciones, y que versan sobre las dificultades para *ver*, serán asumidas en la complejidad de una actividad humana sensible donde los sistemas simbólicos, que imbrican prácticas culturales, herramientas, palabras y signos, medien en la complejización (*alterar* la biología natural) de los procesos psíquicos de los sujetos dados a la tarea de objetivar el concepto de perpendicularidad en cuerpos geométricos y en figuras geométricas, lo cual implicará *culturizar* e *historizar* la mirada sobre las imágenes (Radford, 2000: 20), como aporte a las formas de conceptualización que según Radford (1994) son más frecuentes en los alumnos: la fenomenológica y la dinámica intuitiva.

### 3.5 Figuras geométricas y cuerpos geométricos

Para facilitar la comunicación y aumentar la precisión en el uso de las nociones, estimo conveniente establecer unos acuerdos en torno a lo que estoy entendiendo por figuras

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

geométricas y cuerpos geométricos. Por eso propongo de antemano reconocer que, lo que otorga el carácter de geométrico a cualquier objeto es la praxis a la que desde el conocimiento matemático (posibilidad), son sometidos dichos objetos por parte de los sujetos, cualquiera sea la naturaleza de los primeros. No obstante, entre autores como Larios (2006), Marmolejo (2010) y Torregrosa y Quesada (2006), que trabajan el tema de la *visualización* en matemáticas, puede notarse cierto consenso al asociar el término *figura* con el ejercicio epistemológico sobre las producciones (representación) que acerca de los objetos geométricos nos hacemos los sujetos.

Desde la normatividad del Ministerio de Educación Nacional (MEN), aparece clara la distinción entre las figuras como representación y los cuerpos en tanto objetos reales; así se evidencia en los siguientes estándares básicos de competencias en matemáticas:

Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas. [...] Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños. Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura. [...] Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas (MEN, 2006: 82-86).

En concordancia, como lo muestro en la Figura 2, solo me refiero a cuerpos geométricos cuando se trata de objetos del mundo real, naturales o producidos por las personas, bien sean estos sólidos o huecos. En cambio, asumo por figuras geométricas a todas aquellas representaciones en el plano (dibujos) de figuras tridimensionales y bidimensionales, bien sean estáticas o dinámicas, y en cualquier soporte en donde se les produzca (hojas de cuaderno, tablero, pantallas de computador, etc.).

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

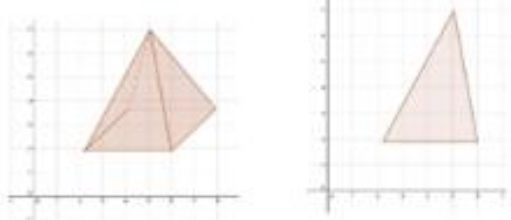
Clasificación	Definición	Ilustración
<b>Cuerpos Geométricos</b>	<b>Cuerpos Sólidos y Huecos del mundo real.</b>	
<b>Figuras Geométricas</b>	<b>Representaciones en el plano de figuras tri y bidimensionales.</b>	

Figura 2. Nociones de Cuerpos y Figuras Geométricas.

## 4. MARCO METODOLÓGICO

### 4.1 Paradigma de investigación

En mi apuesta por una producción tanto teórica como metodológica, han sido varios los momentos caracterizados por rupturas<sup>16</sup> y decisiones que poco a poco han ido concretando mi mirada sobre el objeto de estudio en cuestión.

Desde un primer momento, una postura claramente cualitativa fue clave para la orientación hacia la producción de un marco teórico fundamentado en concepciones como las de la Teoría Cultural de la Objetivación y la de Actividades Orientadoras de Enseñanza; estas dos corrientes, al interior de la perspectiva histórico-cultural de la educación matemática, han sido los pináculos en los que se ancora mi trabajo como investigador.

Desde ambas posturas he procurado dar cuenta de cómo emerge ante los estudiantes de quinto grado de una institución educativa oficial, y en relación dialógica conmigo como maestro e investigador, el concepto de perpendicularidad en figuras geométricas y cuerpos geométricos.

Una de esas rupturas a que me refiero, tuvo que ver con el hecho de centrar mi atención, precisamente, en una problemática que permitía un abordaje histórico y cultural, y este no necesariamente desde la perspectiva cognitivista, como ya lo había intentado anteriormente en mi experiencia personal (Cotera *et al*, 2011).<sup>17</sup>

---

<sup>16</sup> En el sentido expuesto por Bachelard (citado por Sánchez, 1998: 25).

<sup>17</sup> Me refiero aquí a mi trabajo de grado en el nivel de licenciatura, donde abordé las problemáticas de la aprehensión y de la comprensión de las figuras y cuerpos geométricos desde una perspectiva cognitivista y mediante un abordaje cuasi-experimental.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En este caso, ante un problema como el de las posibles dificultades que experimenta un niño de educación básica primaria al identificar y analizar figuras en las que esté involucrada la relación de perpendicularidad, opté por centrar mi atención en las formas en que dicho objeto emerge frente al estudiante como producto de su trabajo.

Se trató entonces de la sistematización y el análisis de las vivencias en torno a unas prácticas sociales que posibilitaran la emergencia del objeto, a través de momentos de encuentro y desencuentro con el conocimiento; o como dice Radford: «Para que surja a la existencia y se convierta en actualidad, el conocimiento tiene que instanciarse por medio de la actualización» (2013c: 7). Y fue de este tipo de instanciaciones y rupturas de lo que se compuso el movimiento hacia la objetivación. En otro momento, por el contrario, seguro habría estado más inclinado hacia explicaciones en términos deficitarios, es decir, como una limitación por parte del estudiante, de la posible dificultad para ver o visualizar dicha relación.

Por ejemplo, cuando en la investigación referida me concentré en una perspectiva cognitivista, mi interés y el de mis compañeros estuvo centrado en demostrar que, mediante la intervención con ciertas prácticas didácticas, los estudiantes mejorarían su desempeño en casos que implicaban destrezas conceptuales y de visualización respecto a los objetos geométricos trabajados en ese entonces. Es decir, en una investigación de semejantes intereses no había razones para dar cuenta del proceso mediante el cual los estudiantes se apropiaban de los conceptos involucrados en dichos procesos, tampoco interesaba la relación entre esos conceptos y los elementos o referentes culturales, asumidos en aquella experiencia como *contextos sociales complejos*.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En el presente abordaje, por el contrario, el elemento cultural fue asumido como parte fundamental de los sistemas simbólicos culturales, y en esa medida constituyeron auténticos referentes en la investigación, en la producción colectiva del conocimiento y en la de los sujetos. En este caso me alejé de las posturas que asumen dicho elemento en términos de simples *axiomas periféricos* (Radford, 2013a).

De ahí la decisión inicial de optar por una metodología cualitativa que, en correspondencia con la postura teórica en la que está sustentada mi concepción de la investigación, mantenga una *aptitud*, como dice Flick, «de apertura hacia las personas y al objeto que se estudia, de flexibilidad al aproximarse al campo e introducirse en él, de comprensión de la estructura de una materia o un campo en lugar de proyectar una estructura sobre lo que se estudia» (2015: 34).

Por otro lado, en la afirmación de la relación sujeto-objeto de conocimiento, fue mi decisión desde el principio optar por un enfoque crítico-dialéctico que brindara elementos emancipatorios frente a las posturas tradicionales de la escuela, que confrontase al sujeto con su realidad inmediata, desafiante para él en su condición ética y política. Esta posición del sujeto respecto al objeto y su entorno vendría dada en gran parte por la apertura que promueve la investigación cualitativa, por esa actitud de *dar paso* que advierten Denzin y Lincoln:

[...] a las nuevas corrientes de pensamiento, de conocimiento, de acción, y para qué, entonces, los límites que impone el conocimiento convencional, normalizado, no se traduzcan en límites a esa acción, y a la admisión del carácter innovador de las innumerables prácticas cotidianas con las que mujeres y hombres transforman su mundo y el mundo (Denzin y Lincoln, 2012: 12).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En este orden de ideas, gracias a los aportes de Lincoln y Guba (citados por Borba y Araújo, 2008), en lo relacionado con el llamado *emerging design* o diseño emergente, pude obtener mayor provecho de las bondades del paradigma cualitativo de la investigación en educación, puesto que desde el comienzo no solo estuvo abierta la posibilidad de elegir el objeto de investigación sino también la de las diversas formas de aproximarme a él.

Así surgió un primer interrogante que se tornó *pregunta directriz*, que no definitiva, sino más bien una *primera pregunta* o *pregunta primordial* en torno a una situación propia de mi práctica profesional que había decidido problematizar. La pregunta fue atraída por el tema de la objetivación y apropiación del concepto de perpendicularidad. Luego sabría que el análisis lo haría con estudiantes de quinto grado y en específico en cuerpos y figuras geométricos.

Es preciso señalar que formular una pregunta directriz no me comprometía con asumir una correspondiente metodología para su exploración, por ejemplo, una con la que yo me limitara a la recolección de datos para la comprobación de un supuesto. Por el contrario, mi elección consistió en apropiar una dialéctica entre el objeto y yo en la que la pregunta de investigación fue transformándose y a la vez transformándome, como si me condujera. En esta posibilidad de cambio la pregunta fue mediadora entre mi capacidad de asombro y el objeto.

Es en este sentido que la flexibilidad de la pregunta ha promovido un *diseño emergente*, pues me ha permitido agudizar la mirada sobre el objeto y cualificar el objetivo. Por momentos, dicha pregunta me parecía de poco interés frente a las necesidades planteadas

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

por el objeto, pero al mantenerla siempre delante de mí, a manera de la luz de una linterna de mano, me sirvió de orientadora en cada uno de mis pasos, justo mientras dilucidaba la red teórica que representó para mí, la revisión de la literatura, de las fuentes y, en consecuencia, las formas que adoptó el componente metodológico.

En suma, aunque el interrogante que me movía en un primer esmero investigativo, *¿cómo asume la comunidad de aprendizaje el problema de la baja capacidad de reestructuración cognitiva que se presenta en estos contextos?*, parece haber desaparecido por completo y, a primera vista no guarda mayor relación con la inquietud presente, *¿Cómo se movilizó el proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado?*, la importancia de esa primera pregunta puede plantearse en términos de algo que rescatan Borba y Araújo: «aun oculta, continúa funcionando, mostrándonos la ruta que al ser caminada, nos permite encontrar el mejor camino» (2008: 30).

Desde luego que en el tránsito de una pregunta a otra estuve inmerso en continuas discusiones tras la comprensión de la relación entre el objeto y la pregunta, sosteniendo con mi tutora y con el grupo de investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES) lo que Bajtín (1982) llama una *relación dialógica*. De ahí que al hablar de un diseño emergente pensara también en la posibilidad de un aprendizaje colectivo y ancorado, como dice este autor, en

La confianza hacia la palabra ajena, la aceptación piadosa (la palabra de la autoridad), el aprendizaje, la búsqueda y el encuentro forzado del sentido profundo, el consentimiento, con sus gradaciones y matices infinitos (pero no las limitaciones lógicas ni las correcciones puramente objetuales), las estratificaciones de los sentidos, de las voces, el reforzamiento mediante fusión (pero no mediante identificación), el conjunto de muchas voces

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

(corredor de voces) que completa la comprensión, la salida fuera de lo comprensible, etc. (Bajtín, 1982: 312).

Por otro lado, en cuanto al porqué de la elección del tema de investigación, como he señalado en la justificación, debo recordar que en un principio mi interés estuvo centrado en indagar acerca de las otras formas de enseñanza de la relación de perpendicularidad; formas que fueran más allá de la tradicional, procurando con ello responder a la pregunta por las condiciones en razón de las cuales, a ciertos estudiantes de la escuela primaria, se les dificulta dar cuenta de dicha relación, especialmente, cuando esta es constitutiva de una figura geométrica (bidimensional o tridimensional) o de un cuerpo geométrico (sólido o hueco).

Como era de mi conocimiento que se trataba de un problema que llegaba al punto de que estudiantes, en plena aula de clase, llegaran a afirmar que *no veían* dicha relación, llegué a considerar la posibilidad de incluir las nociones de *capacidad de reestructuración cognitiva* y *comunidad de aprendizaje* como referentes teóricos para esta investigación.

Implicó esta consideración una instancia de revisión bibliográfica, discusión y diálogos sobre la pertinencia o no de estas nociones para con la problemática a la que intentaba responder. En el momento no tenía mayor certidumbre sobre si la noción de *comunidad de aprendizaje* era eminentemente constitutiva de la Teoría Cultural de la Objetivación de Radford (2006), o si solo se trataba de una referencia tomada de otro discurso.

Así que la decisión estuvo supeditada a la posibilidad analítica que ofrece esta postura teórica para dar cuenta del papel protagónico que sobre los aprendizajes tienen las relaciones en el aula, sin tener que explicitar la noción de comunidad de aprendizaje. En este sentido, decidí retirar del tema la alusión a esta noción por considerar que, en sí mismo, el proceso de

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

objetivación en tanto análisis de las condiciones de producción, explicita el papel protagónico de unas relaciones laborales en la producción del conocimiento. Además, en diálogo con las Actividades Orientadoras de Enseñanza, la alusión a la objetivación de un concepto representa un mayor grado de coherencia y cohesión con las apropiaciones sobre los conocimientos relacionados con dicho concepto.

En cuanto a la noción de *capacidad de reestructuración cognitiva*, que guarda una estrecha relación con el tema de la visualización en el ámbito de lo geométrico y de lo espacial, también tomé la decisión de hacerlo a un lado. La razón que tuve para ello consistió en hallarlo por fuera de los posicionamientos ontológicos, antropológicos y epistemológicos de la teoría cultural de la objetivación.

De ese modo, a partir de esta ruptura y de las continuas revisiones de algunos trabajos de Luis Radford (2000, 2006), me fui centrando en el concepto de Objetivación del conocimiento, y fui incubándole desde mi subjetividad como el referente elegido para esta investigación sobre la conceptualización de los objetos geométricos, en particular sobre esa forma de conceptualización más interesada en lo fenomenológico y en lo dinámico intuitivo, de la que el propio Radford afirma que «se caracteriza por el hecho que el aspecto conceptual de los objetos geométricos existe solo en términos del aspecto figurativo, el cual se restringe a la imagen concreta» (1994: 7).

Este aspecto fue crucial en cuanto a la conexión entre el marco teórico y el planteamiento del problema, pues si bien el concepto de perpendicularidad puede alcanzar una dimensión analítica y deductiva, en el problema que se planteó se estableció un alcance en relación con lo figural, lo visual y lo sensible.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En resumen, lo que se identificó como problemático fue la dificultad para objetivar el concepto de relación de perpendicularidad cuando esta se presenta en contextos diferentes a los regularmente tratados por el discurso escolar tradicional.

Por otro lado, como el concepto de objetivación en el marco de la teoría cultural de la objetivación está planteado en dialéctica con el proceso de subjetivación, para mí como investigador fue fundamental la decisión de seleccionar el nivel educativo con el cual realizar el trabajo de campo. Es decir, en la medida en que para esta postura teórica, el objeto es entendido también como dice Radford, como «algo que me objeta, que con su presencia, me pone resistencia» (2014a: 10), al pensar en la complejidad con la cual será abordado el objeto, debo pensar también en los sujetos con los cuales será vivenciado el proceso.

En este sentido, pude también apreciar una ruptura con relación a otras experiencias del pasado, que estuvieron marcadas por ciertas posturas que hacen énfasis en la estratificación de los sujetos con base en supuestos estadios cognitivos.

En consecuencia, en diálogo con mi tutora y con el grupo de investigación Matemática Educación y Sociedad, opté por realizar el trabajo de campo con estudiantes de básica primaria, aprovechando una de las posibilidades que nos brinda la postura teórica elegida. Una de esas posibilidades fue precisamente el hecho de considerar que algunos procesos, como el de las conceptualizaciones fenomenológica y dinámico-intuitiva, en este caso de la relación de perpendicularidad, no necesariamente tenían que ser trabajados con estudiantes de secundaria, a quienes desde algunas posturas teóricas se les presume dispuestos para un tipo de pensamiento con cierto rigor. Por el contrario, desde estas

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

perspectivas, estos procesos están más ancorados en las complejidades de una labor en conjunto que en un pretendido desarrollo de las capacidades individuales.

Ahora bien, debo aclarar que no por ser una labor en conjunto, cada sujeto deje de vivir su propia objetivación; la cara del trabajo en conjunto que mostró esta óptica para los estudiantes de quinto grado que vivenciaron la consigna en cuestión, fue que no estuvieron solos (solipsismo) frente al saber matemático, pues al tratarse, como dice Radford (2014a), de una «constitución dinámica y recíproca entre ser y cultura (...) [en donde] los individuos crean la cultura y la cultura crea a sus individuos» (p.6). Resulta apenas natural que en este nivel pueda analizarse a cabalidad la manera en que cada sujeto, en medio de la labor conjunta, se apropia de unas prácticas culturales y en medio de ellas objetiva el concepto de perpendicularidad.

De ahí que también sea conveniente explicitar que este trabajo estuvo enfocado sobre la objetivación del concepto de perpendicularidad, y no sobre el concepto de perpendicularidad en sí mismo. Esto quiere decir que mi objeto de estudio no ha sido la posible complejidad o la naturaleza misma del concepto de perpendicularidad, sino la forma en que dicho concepto fue movilizado; en otras palabras, la manera en que dicho concepto emergió en medio de una actividad en la cual los estudiantes intentaron solucionar algunas problemáticas de su realidad.

Vale la pena recordar que al referirme a la objetivación estoy haciendo referencia a lo que Marx (2010) llama *trabajo objetivado*, categoría que se hace explícita mediante el trabajo a través del cual el sujeto produce un objeto, y que en esa producción del objeto el

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

trabajo mismo es objetivado. Para zanjar una posible confusión entre estas dos ideas, puesto que hay entre ellas una dialéctica, el mismo Marx aclara:

En el proceso laboral, pues, la actividad del hombre, a través del medio de trabajo, efectúa una modificación del objeto de trabajo procurada de antemano. El proceso se extingue en el producto. Su producto es un valor de uso, un material de la naturaleza adaptado a las necesidades humanas mediante un cambio de forma. El trabajo se ha amalgamado a su objeto. Se ha objetivado, y el objeto ha sido elaborado. Lo que en el trabajador aparecía bajo la forma de movimiento, aparece ahora en el producto como atributo en reposo, bajo la forma del ser (Marx, 2010: 219).

Entonces, si bien el objeto es trabajo objetivado, el objeto es quietud; mientras que la objetivación, es movimiento, es el proceso por el cual se objetiva el trabajo, en otras palabras, es actividad. De ahí que también en términos de lo teórico-metodológico, hayamos considerado pertinente pensar en unas acciones ancoradas en una postura comprometida con la apropiación del saber en tanto que proceso histórico-cultural.

### **4.2 Propuesta teórico-metodológica para la enseñanza: Las Actividades Orientadoras de Enseñanza**

Teniendo en cuenta los fundamentos que para la teoría cultural de la objetivación comportan las categorías de labor, trabajo o actividad —aquí se ve la influencia de la Teoría de la Actividad (Leontiev, 1984)—, opté por tomar como referente metodológico las Actividades Orientadoras de Enseñanza propuestas por Moura (2010) dada la apuesta que estas asumen por la actividad colectiva como escenario privilegiado para el desenvolvimiento de los procesos psicológicos superiores, y por tanto en dialéctica con la producción en el plano del individuo. Hacia el lado derecho de la Figura 8 muestro la relación de conceptos que entran en juego cuando hablamos de Actividades Orientadoras de Enseñanza.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Reconociendo que en mi caso, en un contexto en el que la cultura representa para los estudiantes una oferta rica en espacios y escenarios compartidos, resultaba indispensable asumir en el terreno de las acciones una metodología concebida desde la articulación entre el individuo y *su* cultura.

La pretensión de romper con la tradicional enseñanza de definiciones y propiciar aprendizajes menos individualistas, hizo necesaria la apuesta por un escenario de enseñanza donde lo colectivo fuera el detonante de las acciones más individuales y llegase a constituirse posibilitador de la apropiación de significados y sentidos culturales.

Es en este orden de ideas que las Actividades Orientadoras de Enseñanza han sido una favorable elección, dado que en ellas se asume que en la «coordinación de las acciones individuales en determinada situación-problema común a los individuos [se pasa] por la identificación de las características del objeto, por su transformación y por la creación de resultados en común» (Moura, 2010: 107).

Además, consecuente con nuestro objeto de investigación, esta postura concibe lo objetivado como producto de unos cambios en la conciencia del sujeto; en palabras de Moura: «es la transformación del psiquismo del sujeto que está en una actividad de aprendizaje» (2010: 97). En diálogo con la teoría cultural de la objetivación, en la medida en que los estudiantes vivencian el proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos, ellos mismos devienen objetos en la actividad de enseñanza propuesta por mí como maestro-investigador, quien entretanto observa cómo se moviliza el proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad,

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

cómo este evento conlleva la transformación de la conciencia y de la personalidad de esos sujetos. Moura agrega que:

En ese sentido, podemos comprender que el estudiante, al apropiarse de los conocimientos objetivados en el currículo escolar, es también objeto en la actividad de enseñanza del profesor (Kuzmina, 1987). En el concepto de actividad, el objeto es aquello que coincide con el motivo de la actividad y es objetivado en el proceso de trabajo, y el estudiante transformado es también producto del trabajo del profesor (2010: 97).

### 4.3 Institución educativa

Como lo acabé de señalar, dado el objeto de investigación y los sujetos con quienes vivenciaría el trabajo de campo, era también de esperarse que la elección de la comunidad, en tanto contexto cultural, no fuera algo fortuito —habiendo posibilidad para ello, dado que en el mismo municipio hay otras dos instituciones que atienden a comunidades muy similares en cuanto a las realidades socioeconómicas de las familias de donde provienen los estudiantes.

Por ejemplo, por lo menos en estas tres instituciones del municipio, algunos registros escolares muestran que a los estudiantes no les va muy bien en las evaluaciones en el área de matemáticas. Los estudiantes provienen en su gran mayoría de los estratos sociales 1 y 2, y en sus hogares predominan ciertas problemáticas de constitución familiar, como el *madresolterismo*, la extensión familiar, el hacinamiento, violencia intrafamiliar, etc.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado



Figura 3. (Sede Anastasio Sierra. Institución Educativa Alianza para el Progreso).

En la elección de la Institución Educativa Alianza para el Progreso, aunque hubiera otras instituciones del municipio con problemáticas parecidas, jugaron un papel decisivo algunos motivos de tipo personal con mucha importancia para mi subjetividad como maestro-investigador.

En primer lugar, como vecino de este sector del municipio, me cuento entre los integrantes de la Comunidad Educativa, algunas veces en calidad de acudiente o padre de familia, otras como representante de los exalumnos o del sector productivo. En mi calidad de estudiante pretérito de esta institución y de actual docente de la misma, conozco muy de cerca las problemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, alcanzo a recordar que fue precisamente en el quinto grado de educación básica primaria, donde a raíz de algunas experiencias para nada motivadoras, comencé a sospechar

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

que eso que llamaban «bajos rendimientos», «falta de comprensión», «dificultades de aprendizaje para las matemáticas» o mediante otras expresiones para el fracaso escolar en esta área, podía estar asociado a ciertos elementos en las maneras de enseñarla.

Adicionalmente, durante aproximadamente 4 años, debido a un trabajo que realicé con la Secretaría de Educación del municipio de Montelíbano, fui asignado en calidad de maestro-acompañante a esta institución. En ella, mi trabajo consistió en apoyar a los docentes en los procesos de ajuste curricular, particularmente en el área de Matemáticas.

Por este motivo, en repetidas ocasiones tuve la oportunidad de trabajar como docente de aula con algunos grupos de la institución, logrando percatarme de la *unicidad* en la forma de enseñanza de las matemáticas, especialmente en lo relacionado con el trabajo sobre lo geométrico, lo cual, hasta donde he podido constatar, permanece ausente del currículo de varios grados, y en otros, solo es expuesto de manera muy modesta, y casi siempre, como he señalado en el planteamiento del problema, desde las definiciones que luego deben ser memorizadas y consideradas a la hora de enfrentar las evaluaciones.

Finalmente, también aportó a la elección de la institución, el hecho de encontrarme, justo al iniciar el trabajo de campo, en espera de ser nombrado como docente de matemáticas en este establecimiento educativo. Cabe resaltar que en ese momento del trabajo de investigación, mi vinculación definitiva con la institución elegida era solo una posibilidad, pues sería nombrado en periodo de prueba, pero hoy, al finalizar el análisis y producción de la tesis, me encuentro vinculado oficialmente, y en esa medida, me asumo como un nuevo sujeto dentro de una realidad que ha venido diagnosticando e indagando, y que advierte la necesidad de seguir haciéndolo. Es por ello que mantuve siempre el interés por tomar como

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

escenario de investigación a esta institución, más particularmente, la sede Anastasio Sierra, como la más cercana a mi residencia y, además, ubicada geográficamente cerca de un contexto socioeconómico impactado por una problemática política, cultural y ambiental como es la relacionada con el tema de los asentamientos urbanos en situación de vulnerabilidad por factores ambientales.

### **4.4 Organización de las Actividades Orientadoras de Enseñanza como posibilitadoras del análisis sobre las producciones**

Asumir como tema de investigación la objetivación del concepto de perpendicularidad por estudiantes de quinto grado, en figuras y cuerpos geométricos, no compromete a la realización de este trabajo con las producciones de todos los estudiantes, pues en correspondencia con el paradigma cualitativo, en esta investigación no pretendo la producción de saberes generalizables o universales.

Más que ambiciones universalistas, a este trabajo le interesa encontrar, en el movimiento mismo de la Actividad Orientadora de Enseñanza, cómo logra cada estudiante, desde su personalidad que obra a la vez como «parcialidad de la conciencia humana» (Leontiev, 1984: 120), objetivar dicha perpendicularidad, *requiriendo* para ello de la apropiación de los significados inmersos en la cultura, y encontrando en estos significados los «motivos generadores de sentidos» personales (Leontiev, 1984: 157).

Es en esto, en lo que sustenté la validez de los datos obtenidos a partir de las producciones, tanto individuales como colectivas, de cuatro de los estudiantes que estuvieron conmigo durante el trabajo de campo. Es necesario mencionar que hubo el compromiso ético

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

con los padres de familia de estos menores, en cuanto a proteger su integridad, tanto para los que hicieron parte del trabajo de análisis, como para el resto del grupo, con quien se constituyó el trabajo de aula.

### **4.5 Los estudiantes/sujetos de la investigación**

En cuanto a los criterios para la selección de estos cuatro estudiantes, el de mayor relevancia fue la asistencia a las actividades programadas, pues más que reconocer cuánto más o cuánto menos un estudiante objetivaba el concepto, lo que nos interesaba era dar cuenta del proceso mediante el cual el estudiante, al tiempo que ejecutaba las acciones y operaciones de la Actividad Orientadora de Enseñanza, iba apropiándose de los conocimientos y objetivando la relación de perpendicularidad. La evolución de este proceso solo podía percatarse en un seguimiento a la regularidad de las sesiones.

Un segundo criterio fue la necesidad de trabajar con niños y niñas simultáneamente, aunque no necesariamente con el mismo número. Como en este caso se trató de una institución de carácter mixto, podía contarse con ambos; además, en la medida en que tampoco fue una investigación sobre un tema para el que fuera relevante el género de los estudiantes, fue suficiente contar con una representación de cada uno.

Finalmente, un último criterio utilizado en la selección de los estudiantes, tuvo que ver con la palabra del docente de aula, quien, al ser indagado sobre la experiencia de trabajo en el área de matemáticas con estos estudiantes, hizo especial énfasis en su preocupación por algunos estudiantes, que según su apreciación, venían presentando, con relación a sus compañeros, mayor resistencia a los procesos propuestos. El docente se refería con ello a los

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

comportamientos en el aula y al aprovechamiento en el área, pues algunos de estos estudiantes, a raíz de la particularidad de sus personalidades y de sus vivencias, se habían mostrado más distraídos y faltos de disciplina en el cumplimiento con las tareas y en cuanto a la atención mostrada para con el área. Esto hacía la circunstancia a la cual atribuía el docente los bajos resultados en las evaluaciones de estos estudiantes.

No obstante, el docente destacó, que aunque el comportamiento de estos estudiantes presentara dificultades para sus clases, en otras ocasiones habían mostrado tantas capacidades o habilidades como cualquiera de sus compañeros, solo que, manifestó el docente, tuvo que hacer un trabajo adicional, de control y seguimiento, para lograr que estos estudiantes mostraran rendimientos. En contraste, el docente aludió a estudiantes muy comprometidos con el área, líderes en los trabajos de grupo, actitud de donde derivaban un excelente rendimiento en las evaluaciones.

En mi conversación inicial con el docente, este, al referirse a esas particularidades de los estudiantes, mencionó inicialmente tres o cuatro nombres, y luego agregó una lista de diez, que según él, también pudieron ser incluidos, considerando el criterio del buen rendimiento. Por este motivo, después de discutir algunas precauciones con la tutora, decidí incluir en el grupo de análisis a cuatro estudiantes. El primero de ellos fue Carlos Andrés, uno de los niños que hizo parte del trabajo de acompañamiento del docente y que, según él, demandó mayor dedicación debido a su personalidad. La segunda estudiante fue Rosa María, una de las primeras en ser mencionadas por el docente cuando se refirió a los estudiantes que muestran mayor liderazgo.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado



Figura 5. Carlos Andrés Valencia



Figura 4. Rosa María Romero

Y finalmente, una pareja de niñas, Juliana y Leidys, quienes además de incluidas en la lista de diez que el docente agregó, conformaron, por su propia iniciativa, uno de los grupos de trabajo en el aula, y en el que tuve la oportunidad de observar un diálogo colaborativo entre ellas.



Figura 7. (Juliana Vergara.)



Figura 6. (Leidys Luz Domicó.)



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Fue así como, decidiéndome por un estudio de casos, en coherencia con el paradigma cualitativo, opté por trabajar bajo las condiciones reales de la escuela, es decir, a partir de sus problemáticas materiales e inmateriales, con sus tiempos, avenencias y desavenencias.

Por este motivo elegí la sede Anastasio Sierra de la Institución Educativa Alianza para el Progreso, que al encontrarse ubicada en uno de los sectores más deprimidos de la población, y al estar poblada por ciudadanos de estrato 1 y 2 principalmente, pudo brindarme un contexto rico en matices y necesidades de todo tipo, y en este sentido, ser el lugar apropiado para indagar la realidad en su presentación escueta.

Ingresar al aula de quinto grado en condición de maestro-investigador implicaba ajustarse al horario regular de clases, comprendido entre 12:30 p.m. y 6:00 p.m.

Inicialmente, el docente del aula me asignó los tiempos en que él desarrollaba las actividades propias del área de Matemáticas, pero las dinámicas propias de la escuela mostraron que este era solo un tiempo previsto, y el docente se vio movido a informarme que por diferentes eventualidades estos horarios estaban en permanente movimiento. Quedaron los viernes como una posibilidad medianamente estable, así que asumí la jornada completa de cada viernes con el fin de cumplir con todas las acciones programadas.

Estas condiciones me fueron adentrando en lo concerniente a un trabajo orientado según los criterios de la investigación participante, dada la participación activa en el contexto investigado, las tareas propias de la experiencia investigativa y el diálogo permanente con los sujetos que participaron de ella.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Dentro de este tipo de investigación, y en la condición de maestro-investigador, fui consciente de que con mi accionar estuve impactando permanentemente la realidad del objeto investigado, mi modo de aparecer fue decisivo también en las relaciones con los sujetos que me acompañaron durante el trabajo de campo. Mi intervención entrañaba una propuesta que le apuntaba a la transformación social de esos sujetos, con la abierta intención de que esa transformación ayudara a constituirlos como sujetos emancipados. Esta emancipación no era solo frente al saber matemático, sino también frente a sus instituciones, el maestro incluido en tanto sujeto que enseña. De ahí que Freire al referirse a esto, advierte que:

En verdad, lo que pretenden los opresores «es transformar la mentalidad de los oprimidos y no la situación que los oprime» [...] Su solución, pues, no está en el hecho de «integrarse», de «incorporarse» a esta estructura que los oprime, sino transformarla para que puedan convertirse en «seres para sí» (Freire, 2002: 54).

En suma, no asumir esta indagación con la intención de producir un conocimiento generalizable y absoluto, sino más bien local, contextual y explicativo, me compromete con una mirada muy subjetiva, es decir, no como quien observa y explica desde afuera, ajeno y neutral a toda la realidad, sino como alguien que al interior de esa realidad busca comprenderla y transformarla. En este sentido y a propósito de este tipo de investigación dice Sánchez:

La investigación participante y la investigación-acción presuponen que el conocimiento es esencialmente un producto social que se extiende o cambia continuamente, de la misma manera que cambia la realidad concreta y no está separado de la práctica; el objetivo último de la investigación es la transformación de la realidad social y el mejoramiento de la vida de la gente inmersa en dicha realidad (Sánchez, 1998: 26)

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

De lo anterior se desprende que como una forma de organizar la Actividad Orientadora de Enseñanza con el fin de mejorar la validez de los análisis, se requiera de una programación, en la que se consideren los diferentes momentos de la actividad, los tiempos, los responsables y las acciones en cada momento.

La Actividad Orientadora de Enseñanza requerirá pues de una organización con miras a garantizar la validez de sus análisis, de suerte que en una programación se consideren los diferentes momentos de la actividad, los tiempos, los responsables y las acciones en cada momento. Así, teniendo en cuenta la periodicidad del calendario escolar, fue programada una serie de encuentros coincidentes con los tiempos de la escuela. Estos encuentros con los estudiantes de quinto grado y con el docente del grupo, se acordaron inicialmente los martes de 12:30 m. a 1:30 p.m., y los jueves de 1:30 p.m. a 2:30 p.m.

La intención inicial fue trabajar jornadas de una hora por día, dos horas a la semana. Pero considerando las dificultades que existían en el entorno escolar para programar y facilitar el trabajo de campo, en común acuerdo con el docente del grupo, decidí ajustar una agenda para las dos primeras horas de cada jueves, a partir del 28 de mayo de 2015.

Los encuentros estarían centrados en las acciones planeadas desde el trabajo de investigación, en este caso en el marco de la Actividad Orientadora de Enseñanza. Debo recordar que estas acciones fueron discutidas con el docente del grupo, ya que las mismas debían ser desarrolladas como parte de la programación de educación matemática contemplada por el plan de estudio del colegio.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Sin embargo, durante el desarrollo de los encuentros tuve que sortear algunas modificaciones en las fechas, debido a eventualidades que impedían vivenciar los compromisos debidamente. En cada reprogramación, busqué garantizar que cada acción fuera realizada bajo las actuales y reales condiciones del ambiente escolar de la Institución Educativa Alianza para el Progreso.

Al final, parte de los encuentros fueron realizados los días jueves, y otra parte los días viernes, con alguna discontinuidad en medio de las fechas, motivadas por variadas situaciones, entre estas, un periodo de corte que generó modificaciones en el calendario escolar, a raíz de algunas actividades sindicales por parte del magisterio de Córdoba. Solo en una fecha, la del día 10 de agosto de 2015, como oportunidad para recuperar algún tiempo perdido, y aprovechando una ausencia programada del docente titular, coordiné con él para trabajar durante toda la tarde.

Adicionalmente se realizaron dos sesiones los días sábados, la primera de ellas, el 21 de agosto de 2015, con el fin de aprovechar la disponibilidad de la sala de informática, puesto que entre las actividades preparadas contábamos con una en la que se requería del apoyo del *software* libre Geogebra; la segunda, el día 26 de Septiembre, cuando se realizó la salida de campo a las afueras del municipio con la intención de conocer unas construcciones (viviendas) cuyos diseños especiales ostentan formas semejantes a las de algunos cuerpos platónicos como los dodecaedros e icosaedros.

Los encuentros se desarrollaron con una dinámica muy parecida entre ellos, aunque cada uno organizado en forma de acción en el marco de una Actividad Orientadora de Enseñanza.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Esto significa que, como totalidad, la Actividad Orientadora de Enseñanza estuvo comprendida por los catorce (14) encuentros asumidos como una unidad; solo que esta unidad fue estructurada en acciones y operaciones, de modo que al ser realizadas movilizan en el estudiante la solución de un problema o satisfagan una necesidad, y se constituyan así en actividades de aprendizaje y de apropiación de conocimientos.

A propósito, Moura aclara que «aisladamente, las acciones no garantizan la satisfacción de una necesidad, mas componen y estructuran una actividad y, de esa forma, adquieren sentido» (2010: 102). En todo caso, en vista de que la construcción de vivienda como actividad no constituye una necesidad natural en sí misma, es conveniente puntualizar que la asumo en acuerdo con el pensamiento de Marx, que al referirse a la vivienda como una de esas necesidades imprescindibles, explicitaba que se trataba de:

[...] un producto histórico y depende por tanto en gran parte del nivel cultural de un país, y esencialmente, entre otras cosas, también de las condiciones bajo las cuales se ha formado la clase de los trabajadores libres, y por tanto de sus hábitos y aspiraciones vitales [...] pues incluye los medios de subsistencia de los sustitutos, esto es, de los hijos de los obreros, de tal modo que pueda perpetuarse en el mercado esa raza de peculiares poseedores de mercancías (Marx, 2010: 208-209).

Esa necesidad a que me refiero es la condición del estudiante, que en tanto ser humano, requiere apropiarse de la cultura para resolver problemas de su entorno y para ocupar, según Leontiev (citado por Moura, 2010: 95): «diferentes lugares en el sistema de relaciones humanas relacionadas con una actividad principal —el juego, el estudio o el trabajo— por medio del cual se reorganizan los procesos psíquicos y ocurren los principales cambios psicológicos en la personalidad».

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Conforme a este punto de vista y mediante la actividad orientadora de enseñanza procuré analizar cómo se movilizó el proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad por los estudiantes; pero a su vez, y en concordancia con Radford y Moura, analizar cómo tal objetivación se encontraba en dialéctica con la producción de los estudiantes como sujetos, quienes, en el movimiento de la actividad, también transformaron su conciencia y su personalidad; esta última parte es representada en la Figura 8, que muestra la relación de la actividad principal con los sujetos, sus necesidades y sus procesos psicológicos principales.

Por otra parte, desde esta perspectiva teórica, al buscar la apropiación del conocimiento matemático por el camino del pensamiento teórico, es pertinente considerar que, como dice Kopnin (citado por Moura, 2010: 104): «para revelar la esencia del objeto es necesario reproducir el proceso histórico real de su desenvolvimiento, mas este es posible solamente si conocemos la esencia del objeto».

Por ello fue pertinente considerar un proceso histórico real, en este caso representado en forma de una situación desencadenadora de aprendizaje, cuya actividad principal<sup>18</sup> se asumió en términos de lo que Moura (2010) llama *el juego como recurso metodológico*. En este sentido, el *juego* escogido posibilitó a los estudiantes reconocer algunas «condiciones esenciales del concepto vivenciado históricamente por la humanidad» (Moura, 2010: 105); así, el juego en tanto actividad fue la construcción de

---

<sup>18</sup> Recordemos que Moura distingue entre actividad principal y actividad predominante. Resaltando que la importancia de la primera «no reside en el tiempo en que ellos pasan realizando esa actividad, sino en el hecho de que por medio de ella es que son producidas nuevas formas de comportamiento; y por medio de la actividad principal es que se da su desenvolvimiento histórico, y la formación de funciones psíquicas superiores» (2010: 123).



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Además, frente a cada necesidad específica, planteé un motivo específico, que al asumirlo como expresión parcial del objeto de la actividad, procuré buscar que estos posibilitaran al estudiante, en palabras de Moura, «establecer una relación entre el motivo objetivo de la actividad y la acción desarrollada para aprender» (2010: 100).

Finalmente, en las acciones propuestas para cada encuentro expresé una intencionalidad y un objetivo (en concordancia también con lo representado en la Figura 8), solo que este objetivo fue expresado en términos tanto de enseñanza como de aprendizaje, siendo coherente con mi concepción sobre la imposibilidad de pensar en una actividad de enseñanza sin actividad de aprendizaje, y en coherencia también con una observación de Moura:

No tiene sentido una actividad de enseñanza si en ella no se concretiza una actividad de aprendizaje; a su vez, no existe una actividad de aprendizaje intencional si él no se da de forma consciente y organizada por medio de actividades de enseñanza (Moura, 2010: 100).

Los catorce encuentros comprendidos entre el 28 de mayo de 2015 y el 16 de octubre de 2015, me propuse analizarlos en tres periodos sucesivos, separados por cuatro momentos específicos. Esta sistematización no quiere decir que haya producido una ruptura en los movimientos de apropiación y objetivación, sino que a la luz del método material dialéctico, tales procesos emergieron en la primera parte de un viaje de ida y retorno.

Dicho de otro modo, para el materialismo dialéctico de cuño marxista, el método científico correcto contempla un movimiento en dos sentidos relacionados dialécticamente; en el primero de ellos, se parte del mundo de lo real y lo concreto, en el



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

cual «el sujeto real mantiene, antes como después, su autonomía fuera de la mente» (Marx, 1857: 2).

Recordemos que Marx, a diferencia de Hegel, no concibe lo real concreto como resultado del pensamiento, y, por el contrario, asume que es el método, la manera como el pensamiento se apropia de lo concreto, hasta reproducirlo en la forma de un concepto, es decir, en un concreto espiritual. Desde luego, es en este tránsito hacia lo concreto espiritual en el que se conectan entre sí los tres últimos momentos a través del método o lo que el mismo Marx (1857) ha llamado camino.

En un primer período, cuyo punto de partida es lo real concreto (momento I en la Figura 9), es decir, el mundo concreto material, el sujeto real elabora intuitivamente una representación del mundo concreto, pero esta es aún una representación caótica del conjunto,<sup>19</sup> una representación confusa que requiere ser analizada por la vía del pensamiento (momento II en la Figura 9).

Este período corresponde en la presente investigación a los cuatro primeros encuentros comprendidos entre el 28 de mayo y el 2 de julio de 2015 (ver Figura 10), tiempo durante el cual estuve concentrado en analizar de qué forma los estudiantes se representaban ese mundo concreto, configurando en este caso no solo la construcción de vivienda en tanto que labor conjunta, sino también la relación de perpendicularidad, sus significados y sentidos, y otras nociones que como conocimiento matemático, en diálogos con Jaramillo (2011), es explicado por los sujetos involucrados en la práctica social.

---

<sup>19</sup> Marx (1857) nombra así a este tipo de representación en la que el mundo real concreto aún no ha sido analizado, volatilizado en determinaciones abstractas por vía del pensamiento.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

El segundo periodo es el de las abstracciones, donde a partir de esas prístinas representaciones (momento II en la Figura 9), se inicia un primer camino en la producción de conocimiento, y por consiguiente, en la producción de sujetos, quienes mediante estas abstracciones, o lo que es igual, mediante la producción de múltiples determinaciones, consiguen separar de la representación plena, ciertos momentos de la realidad o ciertos aspectos del objeto mismo, transformándolos ahora en conceptos que reproducen lo real (momento III en la Figura 9).

A propósito, en una interpretación a Marx, Enrique Dussel afirma que

El acto de la abstracción es analítico, en el sentido que separa de la *representación plena* uno a uno sus múltiples contenidos noéticos (momentos de la realidad de la cosa misma); separa una parte del todo y la considera como todo. El considerar una *parte* como *todo* por la capacidad conceptiva de la inteligencia, es la esencia de la abstracción. Como acto, la abstracción separa analíticamente; como objeto o contenido, la abstracción produce una *determinación abstracta*. La *determinación* —lo hemos visto más arriba— es un momento real de la cosa, pero en tanto ese momento se abstrae (se separa analíticamente) es ahora un concepto que *reproduce* lo real («reproducción [*Reproduktion*] de lo concreto»; 21,42; 22,5); es ahora un momento del pensamiento, un momento conceptuado (Dussel. 1985: 51).

Durante este periodo, correspondiente a los encuentros comprendidos entre el 9 de julio y el 11 de septiembre (ver Figura 10), siendo con ello el más largo de todos, los estudiantes estuvieron concentrados en la producción de conceptos (*momentos conceptuados*) como los de ángulo, altura, relación pitagórica, entre otros que, como parte de un todo, constituyeron determinaciones abstractas (momento III en la Figura 9) que luego fueron elaboradas en sus relaciones, hasta volver a constituirse en un nuevo todo (momento IV en la Figura 9).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Con esto llegamos al tercer y último período en el acenso hacia lo concreto por la vía del pensamiento. Este periodo corresponde en mi investigación a los encuentros comprendidos entre el 17 de septiembre y el 16 de octubre (Figura 10). Durante este periodo, y como síntesis de las múltiples determinaciones, los sujetos inmersos en la praxis objetivan un concepto (momento IV en la Figura 9), como una totalidad concreta, compleja, como unidad de lo diverso, en este caso, el concepto de perpendicularidad en figuras y en cuerpos geométricos (momento IV en la Figura 9). Este camino hacia lo concreto Moura lo enuncia como «la ascensión de lo concreto caótico a lo concreto pensado, mediado por abstracciones» (2010: 40).

En resumen, con el reconocimiento de estos tres periodos: el de las representaciones, el de las abstracciones y el de la totalidad concreta (objetivación), debo también reconocer, dos caminos o procesos: el de análisis y el de síntesis, con lo cual se cierra la primera parte del viaje (*de ida*) del método material dialéctico. En palabras de Marx: «En el primer camino, la representación plena es volatilizada en una determinación abstracta; en el segundo, las determinaciones abstractas conducen a la reproducción de lo concreto por el camino del pensamiento» (1857: 21).

		<b>MOMENTO IV</b>	Totalidad Concreta, Compleja	
	Tercer Periodo	"Síntesis de las múltiples determinaciones"	Los cuatro últimos encuentros. 17/09 - 16/10	Los sujetos expuestos a la praxis, objetivan el concepto de perpendicularidad en cuerpos y en figuras geométricas.
		<b>MOMENTO III</b>	Determinaciones abstractas. (Conceptos)	
	Segundo Periodo	"Producción de Abstracciones"	Seis encuentros. 09/07 - 11/09	La producción de conceptos (momentos conceptuados) como los de ángulo, alturas, relación pitagórica, entre otros.
		<b>MOMENTO II</b>	Representación Plena o Totalidad Caótica	
	Primer Periodo	"Producción de Representaciones"	Los cuatro primeros encuentros. 28/05 - 02/06	De qué forma, los estudiantes se representaban ese mundo concreto, en este caso, no solo la construcción de vivienda en tanto que labor conjunta, sino también la relación de perpendicularidad, sus significados y sentidos.
		<b>MOMENTO I</b>	Partida del Mundo Real Concreto/Sesorial	

Figura 9. Momentos del método.

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

ENCUENTROS	FECHA	ACCIONES
1	28 DE MAY	Relación entre las producciones materiales y las producciones simbólicas.
2	4 DE JUN	Reconocer la Bidimensionalidad y Tridimensionalidad - Videos de Vivienda, Caras y Vértices.
3	11 DE JUN	Manipulación de los Cuerpos Geométricos.
4	2 DE JUL	Identificar propiedades comunes entre figuras geométricas, semejanzas y congruencias.
5	9 DE JUL	Nuestra Región y Alturas Relativas.
6	10 DE AGO	Apropiar el Concepto de ángulo. - Inclinationes Relativas a la gravedad y al terreno.
7	21 DE AGO	Concepto de ángulo de Inclinación. - Yo inclinado y trabajos en Plastilina.
8	22 DE AGO	Concepto de ángulo - posición relativa de dichas líneas – Geogebra.
9	28 DE AGO	Alturas Relativas en fotografías de Casas inclinadas.
10	11 DE SEP	Taller escrito (Guía) sobre las alturas, las áreas, etc.
11	17 DE SEP	Trabajo con aplicación Home 3D en la construcción de Casas - Teorema de Pitágoras.
12	25 DE SEP	Hallar las tres alturas a unas figuras escogidas; y usar herramientas como la pita de 13 nudos.
13	26 DE SEP	Salida de Campo.
14	16 DE OCT	Siembra del Arbolito.

Figura 10. Programación de los encuentros.

## 5. ANÁLISIS DE LAS CATEGORÍAS

### 5.1 La transformación material emancipadora de los estudiantes, en dialéctica con los sujetos otros que constituyen su colectivo

La Actividad Orientadora de Enseñanza mediante la cual se organizó el trabajo de campo en la presente investigación, tuvo como actividad principal una práctica social cuya relevancia en el contexto inmediato movilizaba el conocimiento del concepto que nos propusimos objetivar.

Esa práctica social es la construcción de viviendas por parte de maestros-constructores, que como productos de una cultura particular, han sido a su vez productores de unas técnicas, herramientas y conocimientos que les han permitido satisfacer esta necesidad básica de la humanidad.

Tal práctica social fue asumida con los estudiantes desde la noción de juego<sup>20</sup> planteada por Moura (2010), esto es, propiciando que los estudiantes *jugaran* a ser los maestros-constructores de vivienda, y, una vez en la fluidez del juego, se vieran en la tarea de volver a pensar las problemáticas desde sus vivencias, tal como tuvieron que pensarlas los sujetos del pasado al enfrentarse a las dificultades de su momento histórico.

Por tanto, con lo que he nombrado *actividad sensible*,<sup>21</sup> me propuse una confrontación de los sujetos de aprendizaje con sus contextos más cercanos; asimismo la puesta en

---

<sup>20</sup> Con relación a una forma de organizar la actividad de tal manera que sea posible abordar la *historia virtual* del concepto.

<sup>21</sup> Como puede verse en el marco teórico, asumida como un concepto distinto al de actividad sensorial. La actividad sensible no es solo la impresión captada a través de nuestros sentidos, sino una puesta en común entre esa materialidad concreta del mundo y una primera actividad epistemológica del hombre en contacto con él.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

escena de contextos más ajenos, pero con los que se conservaran relación en cuanto a la necesidad de producciones materiales y simbólicas, en este caso, la de construcción de viviendas para las familias.

La actividad principal en tanto que proceso, posibilitó la ascensión desde esa actividad sensible hacia una totalidad concreta histórica explicada (actividad epistemológica), y en esta medida, se constituyó también en actividad colectiva.

Ahora bien, estas conexiones entre actividad principal, práctica social y actividad sensible serán analizadas con mayor detenimiento en las siguientes categorías. Por el momento, me dedicaré a mostrar cómo desde esta concepción de actividad sensible, con las primeras tareas, se generaron situaciones que podríamos considerar como rupturas con las formas tradicionales de disponer el aula de clases.

### **5.1.1 La actividad sensible en tanto actividad conjunta, y la necesaria transformación tanto de las relaciones sociales como de la materialidad del aula**

Tal como fue planteado en el problema de investigación, no solo la escuela en general, sino la enseñanza de las matemáticas en específico, han privilegiado y fomentado tradicionalmente ciertas prácticas de aprendizaje y de convivencia de corte bastante individualistas.

En su mayoría, estas prácticas están fundadas en una concepción antropológica y epistemológica mentalista, que asume el aprendizaje como un proceso que solo depende del individuo. Luego, la disposición material y simbólica de la escuela (y de sus aulas) articulada a estas concepciones, resultará necesariamente cuestionada por una forma de enseñanza-aprendizaje que, como la que vengo defendiendo, procura fundamentalmente la

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

emancipación del sujeto de esa forma de aislamiento al que lo condenan esas concepciones mentalistas e individualistas.

Por ejemplo, nuestra aula de clases suele organizarse en filas e hileras, en donde los estudiantes se acostumbran a estar sentados unos detrás de otros. En la mayor parte del tiempo su actividad se limita a transcribir del tablero a su cuaderno, y a tomar notas a partir de lo dictado por el profesor.

Este tipo de prácticas durante las clases, que exigen un compromiso individual, son consecuentes con las formas de evaluación y de calificaciones que también son individualistas. De ahí que cuando hablo de rupturas, me refiero a una transformación necesaria de las condiciones materiales, que por supuesto generan algunas transformaciones en las personalidades de los estudiantes.



Figura 11. Encuentro I - 2015-05-28/1

Como puede apreciarse en la Figura 11, los estudiantes organizados de la forma tradicional conviven con una dificultad material para asumir el conocimiento como una actividad social y colectiva. Esta manera de organizar el aula está pensada para garantizar cierta forma de trabajo individual y aislado del trabajo de los otros; por tanto,

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

una concepción diferente de la enseñanza en dialéctica con los aprendizajes, debe comenzar procurando un cambio en la materialidad de las condiciones *laborales*.

En este caso, se requiere un cambio en las condiciones del aula, de tal forma que sean coherentes también con este otro modo de concebir los aprendizajes como *praxis cogitans*, es decir, asumidos como una práctica social; así lo plantea Radford:

La teoría de la objetivación parte de una posición no mentalista del pensamiento y de la actividad mental. Dicha teoría sugiere que el pensamiento es una *praxis cogitans*, esto es, una práctica social (Radford, 2006a: 107).

Ahora bien, es tan marcada la relación que existe entre los modos de producción y las relaciones laborales, que desde las primeras tareas resultó fácil vivenciarlo.

Una de las tareas del Encuentro I, partió de analizar fotografías de viviendas que fueron construidas atendiendo a las necesidades físicas y sociales de las familias que las habitan, y que además, sus diseños y materiales de construcción, permitían hacer una lectura sobre el ambiente que los proporcionó. En este sentido, Marx aporta una valiosa herramienta de lectura:

La misma importancia que posee la estructura de los huesos fósiles para conocer la organización de especies animales extinguidas, la tienen los vestigios de medios de trabajo para formarse un juicio acerca de formaciones económico-sociales perimidas. Lo que diferencia unas épocas de otras no es lo que se hace, sino cómo, con qué medios de trabajo se hace. Los medios de trabajo no solo son escalas graduadas que señalan el desarrollo alcanzado por la fuerza de trabajo humana, sino también indicadores de las relaciones sociales bajo las cuales se efectúa ese trabajo (Marx, 2010: 218).



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Esta tarea despertó tanto interés en los estudiantes que los movilizó a proponerme que les permitiera compartir entre ellos sus imágenes y sus comentarios.

Es como si el mero hecho de que fuera una práctica cultural lo que les iba a servir para responder al compromiso, rompiera con esa forma de individualidad que niega al ser su constitución filogenética.

Las dinámicas suscitadas marcan una transformación en la infraestructura que cierre el curso de las prácticas individualistas y dé paso al trabajo colectivo.

Con respecto a la pregunta sobre por qué las actividades propuestas aquí como trabajo o labor conjunta rompen con esa noción de propiedad individual, creo que todo empieza cuando se empiezan a romper esas formas de solipsismos, en palabras de Marx, esas *robinsonadas* (2010: 93) en las cuales, sin que resulte muy claro para otras posturas, lo que realmente se asume es el hecho prácticamente imposible de un sujeto aislado, que solo produce bienes para su autoconsumo.

De esta manera cifra Marx el paso de una actitud solipsista a una de conciencia colectiva:

Todas las determinaciones del trabajo de Robinson se reiteran aquí, solo que de manera social, en vez de individual. Todos los productos de Robinson constituían su producto exclusivamente personal y, por tanto, directamente objetos de uso para sí mismo (Marx, 2010: 96).

Contraria a la promoción de un *robinsonismo*, una actividad de aula como la que me ocupó, la objetivación del concepto de perpendicularidad como producto de una práctica social, tuvo como fin la producción de una *mercancía*, es decir, la producción de un bien, tanto de uso como de consumo y servicio para la sociedad.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Adicionalmente, en dicha producción desde luego intervendrían otros medios de producción previamente elaborados por otros sujetos que participaron indirectamente, así como, en el caso de Robinson citado por Marx, «*el reloj, libro mayor, tinta y pluma*», sin ser producidos por él, sirvieron de medio de producción para los bienes que se proveyó.

Se ve que tanto la Teoría Cultural de la Objetivación como la de la Actividad Orientadora de Enseñanza, no están guiadas por un ideal individualista, que resulta contrario a lo que implica la vida en sociedad, contradictorio con la esencia del proceso de producción y, en últimas, con la condición filogenética del ser humano.

A propósito, comenta Radford:

De allí que como notaba Wartofsky, las actividades que realiza un individuo no son simplemente de él, pues dichas actividades han sido configuradas en el curso de un proceso filogenético (Wartofsky, 1979: 114). Ser es un concepto mucho más amplio y complejo que subsume el concepto de individualidad. Ser significa ser-en-la-cultura (Radford, 2004b: 7).

En consonancia con lo dicho, es decir, asumiendo los cambios en las condiciones laborales, propiciando un medio donde el aprendizaje fuera tomado como una práctica social y en dialéctica con la enseñanza, me fue posible asistir en estas primeras actividades a los análisis o volatilizaciones de las representaciones que sobre la concreción material sensorial se iban haciendo los estudiantes.

Sirva de ejemplo un hecho que registró el grupo de Juliana en una de sus primeras producciones (Figura 12).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Las niñas, al tratar de representar la vivienda que les correspondió, se dieron a la tarea de analizar la imagen y resaltar algunos de sus elementos; en dicho análisis no solo se vio involucrada la mirada de cada estudiante, sino también sus voces, los significados y los sentidos con los que ellas fueron abstrayendo esos primeros elementos.

En el primer texto de la página, aún es solo la voz de una de las niñas, dirigiéndose a alguien, posiblemente a mí como maestro, e intentando mostrar su percepción física y estética de las imágenes, la niña dice: «la matica me pareció muy bonita por su forma de ser y por muchas cosas más»; pero en el segundo texto, aunque todavía no se trata de una producción a dos manos, la voz que se expresa parece considerar la necesidad de contar con los otros miembros del grupo, es decir, como si comenzara a considerar la presencia del otro, en sus propias percepciones.

De hecho, en las representaciones que este grupo elaboró, se aprecian los dos tipos de vivienda (Figura 12).

Como se alcanza a apreciar hacia el medio de la Figura 12, las estudiantes muestran las figuras geométricas como parte de las representaciones de las dos viviendas, como si se tratara del mismo diálogo que aparece en palabras y con el que intentan una forma de contraste entre las viviendas sobre las que cada una trabaja.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

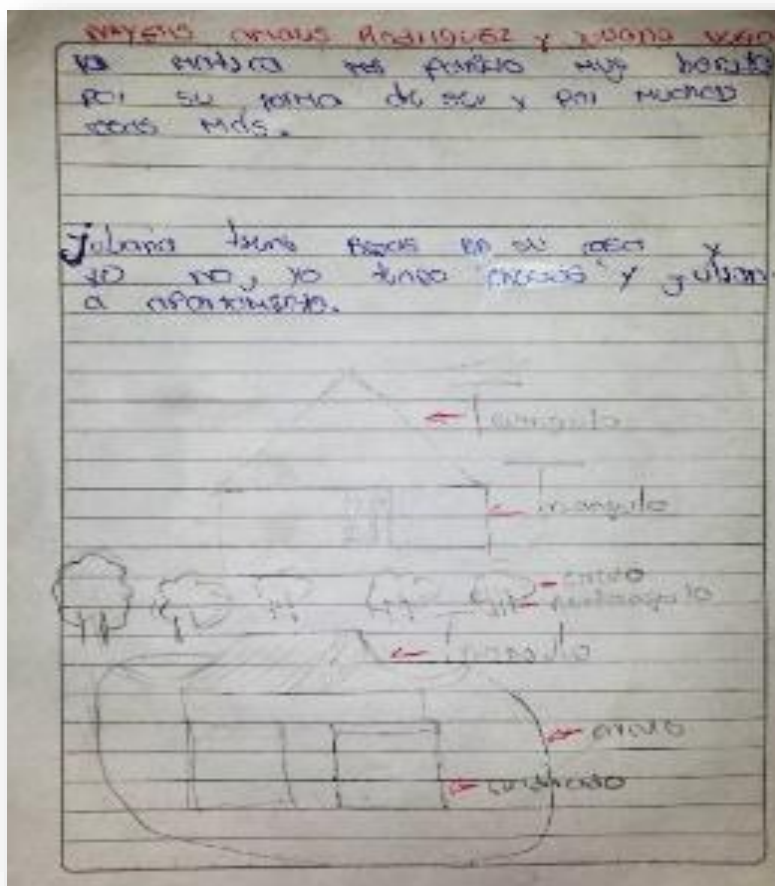


Figura 12. Encuentro I - 2015-05-28/1

A mi modo de ver, desde este análisis, los objetos matemáticos, en este caso, las figuras geométricas, comienzan a moverse en el proceso de objetivación por la vía del pensamiento; pero en tanto no se trata de un pensamiento en solitario, sino de un pensamiento, como dicen Miranda, Radford y Guzmán, donde «el individuo no cogita solo» (2007: 27), se trata entonces de un pensamiento mediado, en el que desempeñan un papel fundamental los signos, los artefactos, y por lo tanto, la presencia del otro.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

A propósito, estos mismos autores nos recuerdan que:

Para ello, la teoría distingue dos fuentes básicas de producción de significados: el uso de artefactos y la interacción social (Radford, 2006a). Esto significa que en la vía hacia el conocimiento, la relación sujeto-objeto está mediatizada no solo por los artefactos, sino también por la presencia del Otro. [...] Lo que es importante señalar es que esa objetivación no es el resultado de una simple asimilación de una práctica y de los significados que esta moviliza; no es tampoco el resultado del quehacer de un individuo que cogita solo, sino un proceso social, en el que nuestra voz y nuestros gestos se enredan en las voces y gestos de los otros (Miranda, Radford y Guzmán, 2007: 9, 27).

En este orden, entiendo que las abstracciones elaboradas a partir de la actividad sensible con las fotografías de las viviendas, comienzan a dar paso a determinaciones que constituyen las primeras formas de los conceptos, y estos, como productos de la actividad colectiva, no tienen por qué ser asumidos como una propiedad privada.

La forma en que estoy interpretando la producción de estas niñas, como producción conjunta, no debe ser confundida con otras formas de interacción que se presentan como solidarias pero tratan el conocimiento como una forma de mercancía, sujeto a la negociación de significados, a los intercambios, a los depósitos, las consignaciones, los créditos y a una clase de relaciones cambiarias en las que de antemano se asume un compromiso con la propiedad privada. Nótese que para estas posturas que han sido hegemónicas en la escuela, los objetos mismos o sus conceptos son construcciones individuales del sujeto, y por tanto, de su propiedad. Radford adquiere tono de denuncia cuando reporta que:

Como resultado, alumnos y maestros son conceptualizados, implícita o explícitamente, como propietarios privados: los alumnos construyen su propia riqueza (en este caso, su propio saber); alumnos y profesores intercambian sus ideas (como se intercambian mercaderías en el Mercado), alumnos y profesores negocian sus significados; los alumnos obtienen créditos por su trabajo, etc. (2013b: 5).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Por el contrario, bajo la premisa de *praxis cogitans* o praxis cognitiva me sitúo más solidario con la noción de mercancía de Marx, es decir, como un valor de uso, que habiendo subsumido el trabajo humano vivo del productor, no es suyo exclusivo, no es propiedad privada suya, pues en su producción han estado presentes, aunque de manera indirecta (a través de los medios, el lenguaje, los artefactos y otros elementos que forman parte de su cultura), otros sujetos. Esta praxis cognitiva que redundando en objetos tiene a su base un componente reflexivo que los piensa, pero a su vez estos objetos modifican ese aspecto cognitivo; este *modus operandi* o suerte de ciclo lo describe Radford:

La naturaleza reflexiva del saber debe entenderse en el sentido de Ilyenkov, esto es, como la componente distintiva que hace a la cognición una reflexión intelectual del mundo externo según las formas de la actividad de los individuos (Ilyenkov, 1977b: 252). De armonía con lo mencionado anteriormente, el carácter mediatizado del saber se refiere al papel que desempeñan los objetos, instrumentos y signos en la realización de la praxis cognitiva (2004b: 13).

Por consiguiente, dado que el proceso de enseñanza-aprendizaje que estoy tratando fue realizado bajo la forma de una actividad orientadora de enseñanza, esto es, que incorpora las nociones de *praxis cogitans* de Radford (2014a) y praxis pedagógica de Moura (2010), la misma apuesta epistemológica y ontológica demandó unas transformaciones en las relaciones sociales, que empezaban por unas transformaciones en las condiciones materiales del aula.

Esas transformaciones en las relaciones sociales de producción, apelaban por un encuentro con los otros, y aunque por supuesto existieron momentos individuales, la complejidad misma de la actividad orientada por el docente demandó la ruptura con la tendencia al trabajo individual. Por ejemplo, si bien les hice entrega de un par de páginas con

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

dos fotos cada una, algunas de esas imágenes eran compartidas con otros, y, por lo tanto, provocaron los encuentros y el diálogo.

Así mismo, la oportunidad para mostrar sus imágenes y compartir las voces de sus compañeros fue un momento decisivo para la apertura de estos encuentros entre los estudiantes y yo. Si en algún momento los estudiantes se sintieron algo prevenidos sobre la enseñanza de las matemáticas y su disposición en el aula, tal sentimiento comenzó a ser sustituido por una invitación a romper con la linealidad de las posiciones en el espacio del aula de clase, y, por el contrario, hacer de ella un escenario para «ser con los otros». Respecto a esto, asegura Radford:

Más importante es aprender a vivir en la comunidad que es el salón de clases (en un sentido amplio), aprender a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, en pocas palabras, a ser-con otros. (2006a: 117)



Figura 13. Encuentro I - 2015-05-28/3



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado



Figura 14. Encuentro I - 2015-05-28/4

En la Figura 13 y en la Figura 14 se observa a Juliana y a Leidys, respectivamente, compartiendo sus imágenes y apreciaciones con otros estudiantes.

No obstante, este *estar con otros* no fue solo en el aula, como alguien que asiste y participa porque está ahí sentado escuchando la cátedra del maestro, o porque se encuentra observando los destellos del objeto matemático representado en el tablero. Se trató, en cambio, de un *estar con otros* signado por una búsqueda, aquí expresada en el análisis y la reflexión sobre los tipos de vivienda como actividad sensible, que cruza la vida misma de los sujetos involucrados en dicha tarea.

Ahora, como no solo se trató de este *estar con otros*, sino de *ser con otros*, el cambio en las relaciones laborales del aula de clases involucró otras voces, ausentes físicamente, pero en diálogos con los sujetos que estábamos de antemano involucrados en la actividad.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Una de estas primeras voces, fue la de los padres de familias, amigos y vecinos, las consultadas primordialmente cuando se les solicitó a los estudiantes realizar una entrevista a un maestro constructor de vivienda.

Fue esta, otra forma de entender por qué, el aprendizaje de un concepto matemático como producto de una práctica social, no puede ser un conocimiento individual, puesto que en el diálogo con estas personas, los estudiantes pudieron conocer que la labor de un maestro constructor no es solo el producto de un saber que se posee, sino también de unas relaciones que se tejen con otros seres humanos en torno a esta práctica.

Algo que se resaltó en los registros fue cómo, para el maestro constructor, la construcción de viviendas permea varias dimensiones de su vida, y no solo la cognitiva.

En los registros de la tarea que presentó Carlos Andrés (Figura 15), puede apreciarse cómo este estudiante le dio importancia a los aspectos relacionados con los intereses, los motivos y las pasiones que llevan a un maestro constructor a hacer una vivienda bien hecha.

Uno de los textos registrados por Carlos Andrés dice: «Las razones por las cuales soy maestro o constructor es que es un oficio muy bien pagado y tengo muchos ya trabajando y me conocen mucho por la calidad de viviendas que hago [...] me gusta porque ya tengo experiencia en este oficio y al ver cuando termino una vivienda que está bien hecha y que a los dueños le gusta me motivo a seguir siendo el mejor y para seguir haciéndolas bien».

Una expresión como esta muestra cómo para un constructor de vivienda su labor no se limita a un saber, sino también a una experiencia ética y estética, en la que están involucrados los criterios y el aprecio de otras personas.

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

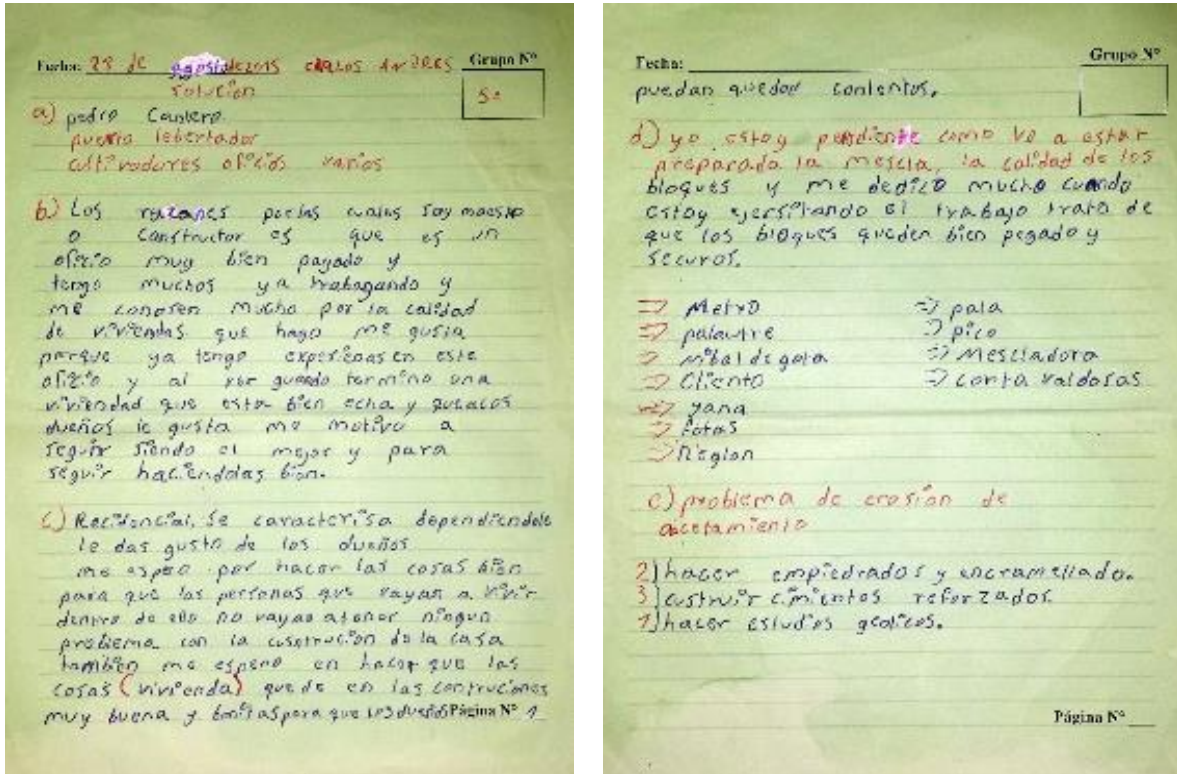


Figura 15. Encuentro IX - 2015-08-28/1

Adicionalmente, con la entrevista, los estudiantes pudieron conocer del maestro constructor un comentario que comporta toda la validez de sus conocimientos en el tema de las viviendas, como parte de un saber histórica y materialmente concretado.

### 5.1.2 La actividad sensible, en tanto actividad conjunta, es posibilitadora del proceso de subjetivación

En una de las preguntas que Carlos Andrés le plantea a su entrevistado, y que tuvo que ver con las tareas más inmediatas de su oficio, el constructor respondió haciendo alusión a dos ejemplos con los que se puede mostrar cómo el trabajo humano, subsumido en

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

un producto, es usado como materia prima, esto es, como parte de los medios de producción en un trabajo posterior. Estos aspectos comentados por el maestro constructor también son resaltados por Marx:

El mismo producto puede servir de medio de trabajo y materia prima en un mismo proceso de producción [...] Un producto que existe en una forma ya pronta para el consumo puede reconvertirse en materia prima de otro producto, como ocurre con la uva, materia prima del vino. O bien el trabajo puede suministrar su producto bajo una forma en la cual sólo es utilizable nuevamente como materia prima. Bajo ese estado, la materia prima se denomina producto semielaborado —sería mejor llamarla producto intermedio (Marx, 2010: 22).

Como producto de la entrevista, Carlos Andrés muestra la descripción que hace el constructor sobre los cuidados que él suele tener al momento de revisar los materiales necesarios en el proceso de construcción como tal; una revisión que coincide con verificar que la primera producción tenga las condiciones necesarias para servir de medios de producción en las siguientes tareas.

El otro ejemplo de cómo la práctica social de la construcción de vivienda muestra su historicidad como forma de producción, es con relación a los artefactos; es decir, dando cuenta de las herramientas con las cuales procurar un buen trabajo. Carlos Andrés muestra en sus registros un listado de herramientas, seguramente citadas por el constructor, dada la especificidad en algunas de ellas. A decir verdad, esta parte de la actividad me pareció de un nivel fundamental para los estudiantes en la medida en que favorecía en cierta forma la conexión entre lo filogenético y lo ontogenético, pues en el diálogo con el constructor los estudiantes tuvieron la oportunidad de acercarse a la *práctica laboral histórica real*.<sup>22</sup>

---

<sup>22</sup> En contraste con la *historia virtual* del concepto, esta práctica real se enmarca en lo que, apoyado en Moura (2010), es llamado *juego*.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Desde este momento de la actividad en adelante, se me posibilitó discutir con los estudiantes el papel de las herramientas y los artefactos en la labor, y para los mismos estudiantes resultó más significativo producir sus primeros artefactos.

Por ejemplo, en el Encuentro VI, los estudiantes hicieron uso de los sólidos en el análisis de los elementos que los constituyen, y es en ese mismo encuentro, donde Juliana y Leidys proponen un dibujo tridimensional con el que representan una de las ideas trabajadas en clase; estas ideas, que habían sido objeto de discusión entre ellas, finalmente les facilitaron el análisis de la situación crucial que ponía de manifiesto el concepto de perpendicularidad.

Así mismo, en el Encuentro VI, se le facilitó a los estudiantes el análisis de la misma situación crucial, esta vez mediante un modelo de la representación de Juliana y Leidys. Dicho modelo, elaborado por el docente, en cuanto cuerpo, tuvo como antecesora la figura tridimensional elaborada por las niñas. Este modelo, que podría tomarse como el trabajo objetivado de un sujeto, en este caso el docente, se presentó como el trabajo objetivado de unos sujetos, en este caso las estudiantes, que anticiparon y posibilitaron lo que el docente mismo pudo crear. Esta forma de proceder presentó de un modo diáfano el concepto a objetivar, a la vez que generó un ambiente de empatía con el mismo.

Como puede apreciarse en Figura 16, Figura 17 e Figura 18, Carlos, Juliana y Leidys estuvieron concentrados, discutiendo en grupo, los respectivos análisis sobre los objetos geométricos. Esta discusión, que tenía lugar *a posteriori* de la entrevista realizada por cada uno de ellos a su maestro constructor, le asignaba a mi aporte el papel

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

de ampliar la reflexión sobre el papel que juegan estos artefactos en las producciones sociales.

En este sentido, resulta evidente cuál es el papel de lo filogenético como referente para las producciones individuales, es decir, para lo ontogenético: en medio de la actividad orientadora de enseñanza, más cuando se ha partido de una práctica social en tanto que actividad sensible, ambos procesos vienen trenzados, pero en sí, si quisiéramos proponer un orden, lo haríamos en la misma dirección que indica la perspectiva histórico-social.

Quiero decir que lo que se puede interpretar hasta el momento, no solo desde las producciones mismas de los estudiantes sino desde la manera en que se van elaborando tales producciones, es que se trata de un proceso contrario a lo que aparentemente se ve. Y a este hecho me he referido anteriormente cuando he señalado que mientras los estudiantes han estado envueltos en un proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad, yo mismo en tanto maestro-investigador también he estado envuelto en la objetivación de este trabajo en tanto práctica pedagógica investigativa. En este orden de ideas el fenómeno que se aprecia en esta parte de la actividad orientadora, puede ser asumido a nivel de la concreción material sensorial del mundo real, pero las representaciones plenas que tienen lugar en esta instancia han tenido que pasar por la elaboración de algunas abstracciones.

Por eso quiero ser enfático en sostener que, en tanto representaciones caóticas de la realidad del aula, un docente en otra perspectiva podría pensar que el cambio en las relaciones sociales de producción determinado por la transformación en las condiciones materiales del aula imprimiría al proceso una única dirección, a saber, la que partiría de un sujeto que está acomodándose a las nuevas condiciones del trabajo en colectivo.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Sin embargo, desde mi óptica personal y en diálogos con la perspectiva histórico-cultural, se trata más bien de un proceso dialéctico que en cuanto tal contempla ambas direcciones, pero cuyo sentido me llega luego de elaborar mis propias abstracciones a partir de las vivencias registradas por los estudiantes.

Por ejemplo, al comenzar con las primeras tareas, me percaté de algunos roces entre los miembros de los grupos; esto pudo leerse como una dificultad para el trabajo en grupo, y de algún modo lo fue, pero esta situación no debía asumirse como una muestra de rivalidad entre individualidades que les legitimara para aportar solo desde la respectiva individualidad.

Por el contrario, la vivencia con los estudiantes me permitió comprender que parte de las dificultades iniciales en su relación obedecía a su poca familiaridad con las producciones colectivas, pues en la escuela, la mayoría de las prácticas estaban dirigidas al aprendizaje de productos abstractos, en el que resulta muy difícil ser sensible a la labor que fue necesaria para producirlo. Esta interpretación encontró sustento cuando tales dificultades empezaron a desaparecer en el mismo instante en que la práctica social comenzó a ser comprendida como tal, como social, esto es, cuando lograron aprestarse al curso dialéctico de lo que implica objetivar un motivo en común.

Un ejemplo sobre esto último tiene que ver con el diálogo que registré en los primeros párrafos de esta categoría, en donde al referirme a la producción de una de las niñas del grupo de Juliana, anoté que si bien esta voz parece tener en cuenta otras voces, aún no habla como refiriéndose a una producción auténticamente colectiva, sino a una producción en donde cada una está elaborando un producto e intenta *negociarlo* con los otros, obrando en ella de manera inconsciente una actitud respecto a ese producto como de su propiedad.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Nótese que en la expresión que aparece en la parte superior de la Figura 12, la niña utilizó la frase «me pareció», lo que indica que está aportando su punto de vista para, como se suele decir, *socializarlo* con el grupo. Un hecho parecido también podrá ser apreciado al analizar la producción de Carlos Andrés y Juliana que aparece en la segunda categoría (Figura 27), donde se registró una serie de aportes por parte de cada estudiante en torno a una situación, como si se quisiera elaborar un acuerdo al respecto. Adicionalmente, en esa parte del texto también mencioné que las niñas estuvieron trabajando cada una sobre su propia vivienda y no sobre una vivienda en común o sobre las dos viviendas en común.

Vale la pena recordar que esto también coincide con el nivel de transformación del concepto, es decir, con la conceptualización fenomenológica, pues aquí se aprecia que aún la práctica no ha sido abstraída, y que para las niñas es todavía relevante que se haga énfasis en cada casa en particular y no en una casa en abstracto.

Ahora bien, lo que a mi juicio aconteció en medio de las tareas de la actividad fue que a partir de las posibilidades que brinda la práctica social en tanto actividad sensible, la experiencia social, cruzada por esos sistemas simbólicos culturales de referencia, se fue transformando en una experiencia personal, lo cual no impidió que, en dicha transformación, cada sujeto como persona estuviera mediado por los diálogos con los otros.

En este sentido, el aprendizaje no fue tanto una experiencia en solitario ni inmediata, como lo contemplan otras posturas, sino un proceso relativamente largo en el cual esas vivencias colectivas, esas reflexiones, se fueron tornando en unas necesidades y en unas responsabilidades personales que debieron ser asumidas también desde unos sentidos personales, es decir, desde una conciencia personal.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Por tanto, mi abstracción de la actividad consiste en dar cuenta de las aparentes dificultades que presentaban los estudiantes para la realización del trabajo en grupo, mostrando que no estribaban en la construcción de unos acuerdos entre los participantes, sino en superar cierta alienación a la que se hallan instados los estudiantes cuando no se les ha posibilitado cierta sensibilidad respecto a la práctica y al conocimiento social.

Es decir, cuando en cierta forma de enseñanza se insiste, por ejemplo, en los diálogos, o en las concertaciones como formas de negociar las posturas individuales y construir acuerdos, no por ello se trata de prácticas colectivas de emancipación; en muchos casos, basta con hacer una abstracción de esos aparentes desplazamientos de poder para apreciar intactas las mismas relaciones capitalistas alienantes. Radford nos intenta prevenir frente a esto:

En efecto, las formas de producción y de interacción quedan intactas: se sigue pensando de la misma manera individualista que antes. Lo único que se ha logrado es un aparente desplazamiento del poder. Mientras que en las clases tradicionales el poder yacía en el maestro, en las clases reformadas el poder yace en el alumno. Pero en el fondo, la labor es la misma: una labor capitalista alienante (Radford, 2014a: 146-147).

Esta otra mirada sobre la actividad muestra que, en efecto, como lo contemplan Vygotsky, Davidov y Rubtsov (citados por Moura), la *doble*<sup>23</sup> experiencia comienza con lo que yo he optado por llamar *actividad sensible*, que en tanto actividad colectiva se transforma en una vivencia personal con significados y sentidos para los estudiantes:

Según Davidov (1988), la interiorización se constituye en una transformación de la actividad colectiva (experiencia social) en una actividad individual (experiencia del individuo). Esa transformación es posible por medio de la comunicación entre las personas. En ese sentido, se tiene que la relación entre la actividad colectiva y la individual es coherente con la tesis vigotskiana de que el conocimiento ocurre en un primer momento en lo social (interpersonal) para transformarse en individual

---

<sup>23</sup> Guardando cierta distancia como lo que Radford (2014a) considera una premisa dualista, entiendo esta noción de *doble* como *dos momentos de un mismo todo*.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

(intrapersonal). En ese mismo sentido, contribuye significativamente Rubtsov (1996), al defender que la aptitud para el aprendizaje es fruto de una determinada interiorización, originada esencialmente de situaciones de actividad colectiva. Esa transformación de lo social a lo individual, no es inmediata, al contrario, se constituye en un largo proceso de desenvolvimiento (Moura, 2010: 226)

Existe empero la otra parte, el retorno, es decir, el viaje de regreso durante el cual lo individual se transforma en colectivo. Con relación a esto me resulta grato indicar que, una vez la práctica social llegó a ser comprendida —a lo cual ayudó mucho el trabajo con los artefactos, lo cual mostraré más adelante—, la dificultad ahora para los estudiantes consistía en pensarse en un trabajo que los dejaría solos con su aporte, en lugar de un trabajo donde llegaran con su aporte, no ya para ser negociado para contribuir a una producción final, que no sería propiedad de nadie en particular sino que se trataría de una producción conjunta.

Es esto lo que quiero mostrar en el siguiente apartado: de qué manera el trabajo individual no es un trabajo en solitario sino un trabajo personal, que como retorno a esa *interiorización*, a esa objetivación de su trabajo, él mismo llega a ser, mas ahora no consigo mismo y para sí mismo, sino con los otros, para los otros.

### **5.1.3 La actividad sensible en tanto actividad conjunta, como posibilitadora de un *llegar a ser con los otros***

Los diversos registros audiovisuales del encuentro VI (Figura 17) captan la dinámica de los grupos, distinguida por la distribución de responsabilidades, aspecto importante y constitutivo de la labor colectiva que adopta la forma de cierta división social del trabajo. A propósito, Moura señala:

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Más específicamente, podemos entender como acciones del profesor en la actividad de enseñanza elegir y estudiar los conceptos a ser apropiados por los estudiantes; organizarlos y recrearlos para que puedan ser apropiados; organizar el grupo de estudiantes de modo que las acciones individuales sean provistas de significado social y sentido personal en la división del trabajo colectivo; y reflexionar sobre la eficacia de las acciones, si realmente conducen a los resultados originalmente concebidos (Moura, 2010: 222).



Figura 16. Encuentro VII –2015-08-21 - Fragmento de Video.

Por ejemplo, en el Video 7-10, (Figura 16) puede apreciarse que, mientras Carlos Andrés se ocupa de realizar las pruebas o manipulaciones sobre el artefacto usado como modelo, uno de sus compañeros toma nota de las reflexiones y de las producciones. Como puede verse desde el comienzo del video, no se trata de la suma de trabajo individual, es decir, de que cada uno se encuentre cumpliendo con una tarea de exclusivo valor para sus propias necesidades (valor de autoconsumo), sino de que cada uno realice una producción, que en tanto empieza a movilizarse en el proceso de objetivación, empieza también a ser enajenada, es decir, a ser una producción con los otros y para los otros.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

La producción de mercancías entraña la paradoja de que el trabajo colectivo termina sirviendo a fines individuales; en este caso el conocimiento matemático, en el rol de mercancía, deviene producto colectivo de la relación dialéctica entre producción individual y producción colectiva. En la producción de este conocimiento-*mercancía* la producción individual encarna un trabajo objetivado, a saber, el trabajo del estudiante en particular en relación con los otros. El trabajo del estudiante genera un producto social en tanto el acontecimiento que este entraña puede ser usado por los otros.

De ahí se desprende que la división social del trabajo, en este caso, la delegación de responsabilidades en cada uno de los integrantes del grupo, sea apenas una condición para la objetivación del concepto de perpendicularidad, pues este concepto constituye una producción individual y colectiva simultáneamente: individual en tanto comprometió de un modo fundamental los sentidos personales, y colectiva en cuanto su importancia social está sujeta al sistema de significados sociales, de donde también deriva su valor de uso social (ser mercancía). Al respecto, dice Marx:

A través del cúmulo de los diversos valores de uso o cuerpos de las mercancías se pone de manifiesto un conjunto de trabajos útiles igualmente disímiles, diferenciados por su tipo, género, familia, especie, variedad: una división social del trabajo. Esta constituye una condición para la existencia misma de la producción de mercancías, si bien la producción de mercancías no es, a la inversa, condición para la existencia misma de la división social del trabajo (Marx, 2010: 52).

En este orden de ideas, debo advertir que la distribución de las tareas entre los estudiantes, como un hecho más evidente a partir del Encuentro VI, no fue en este caso una propuesta premeditada, sino asumida en el curso de la investigación al reconocerla en el juego planteado por la Actividad Orientadora de Enseñanza en el sentido de revivir el proceso

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

histórico-lógico del concepto. Dada esta espontaneidad, dicha distribución (división social del trabajo) puede tomarse como consecuencia de las dinámicas de trabajo y en cuanto tal precursora de una producción en colectivo. Así, la notoria necesidad de distribuirse las tareas obedece a que los grupos estaban asumiendo la necesidad de producir un conocimiento en colectivo, un conocimiento que no tendría el rótulo de propiedad privada, pues en tanto producción colectiva, del mismo podrían participar todos en tanto cada uno había realizado su aporte desde sus propias facultades y en diálogo con otras voces.

Ahora bien, como lo he referido, esta división social del trabajo en el marco de una labor conjunta se hizo más evidente en la medida en que comenzamos a utilizar las herramientas propias del oficio. Esos *fósiles de las formaciones económico-sociales perimidas*, guardan, por un lado, una relación con el pensamiento y la corporalidad del sujeto que los usa como medios de producción y lo convierten a él mismo, en términos de Radford (2006a), en *territorio del artefacto*; por otro lado, guardan relación con el proceso de objetivación en tanto ellos subsumen cierta *inteligencia histórica* en torno a la producción. El uso de estas herramientas comprueba lo afirmado por Miranda, Radford y Guzmán en términos de que además de inducir una división del trabajo, «insinúan al alumno líneas posibles de desarrollo conceptual» (2007: 9).

En resumen, la razón por la cual esta tendencia a la asignación de tareas como forma de división social del trabajo se intensificó con el uso de herramientas, obedece a que estas en sí mismas inducen a tal división por la vía de ser ellas mismas trabajo objetivado, circunstancia favorable para que el estudiante transite líneas de desarrollo conceptual. En

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

otras palabras, cada una de estas herramientas constituye una síntesis diferente de las abstracciones en que fueron sublimadas las primeras representaciones.

A esta altura de la actividad, la forma en que cada sujeto está objetivando el concepto le permite reconocer cierta síntesis del mismo en la herramienta, de suerte que el uso de la herramienta, con plena participación de sus sentidos, se torna en la vivencia de la concreción del concepto de perpendicularidad.

Es importante recordar aquí que la importancia que representó para Carlos, Leidys y Juliana el uso de sólidos, tuvo mucho que ver con la manera en que cada uno fue analizando los conceptos que lograban discernir en ellos. De igual forma, cuando a partir de la representación de Juliana y Leidys, decido construir el modelo del sujeto y la tabla, a pesar de haber sido un artefacto usado por todos los grupos, fue posible constatar que el grupo de las dos jóvenes usó dicho modelo para continuar con el análisis que ya venían realizando sobre su construcción tridimensional. Esto lo interpreto como el seguimiento por parte de los sujetos de líneas afines a su propia percepción a partir de *líneas posibles* sugeridas por los artefactos.



Figura 17. Encuentro VI – 2015-08-10 - Fragmento de Video.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado



Figura 18. Encuentro VI – 2015-08-10

Uno de los aspectos más importantes que sale a relucir con estas reflexiones, tiene que ver con la cualidad de las producciones en el marco de una actividad emancipadora, pues si bien las mercancías llegan al mundo a ser *consumidas* dado su valor de uso social, las *mercancías* de este caso se diferencian en algo con las producciones propias de las relaciones capitalistas. Una de estas diferencias atañe al hecho de que al ser reconocidas en su trayectoria histórica-lógica y su concreción como síntesis (no única) de múltiples instanciaciones, su materialidad posibilita la deconstrucción de las relaciones sociales que constituyeron el marco en el cual fueron producidas; posibilita también el hallazgo de elementos como los artefactos o herramientas con que fueron producidas, en los cuales puedan reconocerse los sentidos personales que vieron la luz en medio de esas relaciones específicas de producción.

En cambio, en el marco de una relación de producción capitalista, la mercancía, en tanto es fetichizada, no permite saber prácticamente nada de sus condiciones de producción. Ahondar en este contraste podría responder, en parte, a la pregunta sobre la preferencia de

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

unas actividades emancipadoras respecto a unas prácticas alienantes, teniendo en cuenta que los conceptos producidos en las primeras pueden ser menos o por lo menos tan *encantadores* (fetichizados) como los de las segundas. La respuesta a esta pregunta mostrará si el interés está puesto en la producción en sí misma o en el trabajo objetivado en dicha producción. Marx deja ver esta suerte de olvido del ser en una instancia de producción:

Del mismo modo que por el sabor del trigo no sabemos quién lo ha cultivado, ese proceso no nos revela bajo qué condiciones transcurre, si bajo el látigo brutal del capataz de esclavos o bajo la mirada ansiosa del capitalista, si lo ha ejecutado Cincinato cultivando su par de iugera [yugadas] o el salvaje que voltea una bestia de una pedrada (Marx, 2010: 223).

Otra diferencia entre las producciones en medio de unas relaciones laborales emancipadoras y las producciones en medio de unas relaciones laborales alienantes, es que en las primeras, en tanto se resalta la importancia de la labor conjunta, las transformaciones en las relaciones laborales no pretenden solo la redistribución de las riquezas, al mejor estilo de ciertas prácticas que insisten en solo «ceder la palabra» a los estudiantes; lo que las constituye en prácticas liberadoras, es la transformación misma de los modos y medios de producción, y no una disminución en la cuota de poder que el maestro accede a ceder al estudiante. Radford advierte la considerable repercusión de un *simple* cambio en la manera de hacer las cosas, cuando la atención en los fines se concentra en los medios:

Lo que se pierde de vista en esta concepción es que los mecanismos de producción de riquezas y las estructuras de poder quedan prácticamente intactas. Se olvida que en las formas de producción capitalistas no es solamente el obrero el que está alienado. El patrón está igualmente alienado. El problema, pues, no consiste en la redistribución de las riquezas, sino en la transformación del trabajo y de sus modos y relaciones de producción (Radford, 2013b: 6).



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

De ahí la importancia del proceso de enseñanza-aprendizaje concebido como actividad conjunta y posibilitadora de un *llegar a ser con los otros*, pues en medio de ella se libera tanto el maestro como el estudiante, esto es, ambos sujetos llegan a ser, el uno con el otro. Este prospecto queda evidenciado en el trabajo con los artefactos, pues en el caso de la representación del sujeto y la tabla elaborada por Juliana y Leidys, no se trataba simplemente de que el maestro se mantuviera al margen de la producción, sino, como en efecto sucedió, de que la voz de las estudiantes en torno a su producción tuviera eco en las transformaciones que el maestro propuso sobre el modelo. De ahí que tratándose de un diálogo en el que el maestro intentó responder a los sentidos personales de las estudiantes, la subsunción del modelo fue validada por la interpretación que de este hicieron ellas.

A manera de resumen, retomo la relación entre lo filogenético y lo ontogenético, dado que toda mercancía como producto u objetivación del trabajo de un individuo (experiencia personal) encuentra su Otro en una producción colectiva u objetivación del trabajo de muchos hombres en la historia, y esta producción le antecede y a la vez le acontece.

Quiero decir con esto que objetivar el concepto de perpendicularidad, en este caso, ha sido atender a ambas objetivaciones, como diría Hegel (citado por Radford, 2014b: 140): «como dos momentos de un mismo todo»: uno en el que la práctica laboral histórica real movilizó unas producciones personales con la consecuente subjetivación de los estudiantes, otro en el que en medio de una práctica laboral histórica virtual, los estudiantes objetivaron su trabajo y produjeron un objeto para ser compartido con los sujetos Otros de su sistema social. En este punto encuentro preciso el paralelismo trazado por Marx entre mercancías y



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

sujetos a nivel de la reciprocidad en la relación de otredad<sup>24</sup> que se cumple en estas

dos categorías:

En cierto modo, con el hombre sucede lo mismo que con la mercancía. Como no viene al mundo con un espejo en la mano, ni tampoco afirmando, como el filósofo fichtiano, «yo soy yo», el hombre se ve reflejado primero solo en otro hombre. Tan solo a través de la relación con el hombre Pablo como igual suyo, el hombre Pedro se relaciona consigo mismo como hombre. Pero con ello también el hombre Pablo, de pies a cabeza, en su corporeidad paulina, cuenta para Pedro como la forma en que se manifiesta el *genus* (género) hombre (Marx, 2010: 65).

De esta manera, los estudiantes que participaron del proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad en el marco de la práctica social de construcción de viviendas, aceptaron con agrado mi propuesta de compartir sus vivencias con estudiantes de quinto grado de la clase de Matemáticas de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, de Medellín. En esta búsqueda de producción de un concepto y de reconocimiento propio en el otro, planteé el encuentro a partir de una carta, en la cual cada uno le contara sus apreciaciones en torno al proceso a uno de sus pares en la otra institución y, que producto de esta misiva, recibieran otra como respuesta del par respectivo.

A pesar que las cartas fueron elaboradas, por razones de premura en el calendario escolar, no fue posible enviar dicha correspondencia al destino previsto; pero al tratarse de elaboraciones que los estudiantes compartieron en la clase, me permito analizar algunas de ellas como un ejemplo más de la manera como se produjo este proceso de objetivación conjunta.

---

<sup>24</sup> En el sentido de Iliénkov, como «algo diferente de nosotros mismos» (1984: 6), asimismo en el sentido de Bajtín, citado por Radford (2015: 44), como *conciencia dialógica e intersubjetiva*.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En su carta (Figura 19), Carlos Andrés alude a una actividad en la que centró su interés: la práctica de campo o visita a la granja demostrativa en la que buscamos observar las casas cuyos diseños guardaban un parecido con algunos de los modelos elaborados en clase menos conocidos. Como podrá leerse en la siguiente categoría, esta tarea, en la que se reflexionó sobre la posibilidad de construir casas siguiendo otros modelos, constituyó para buena parte del grupo cierta forma de situación problema, y, por tanto, es factible que haya movilizado muchos más significados que otras actividades.

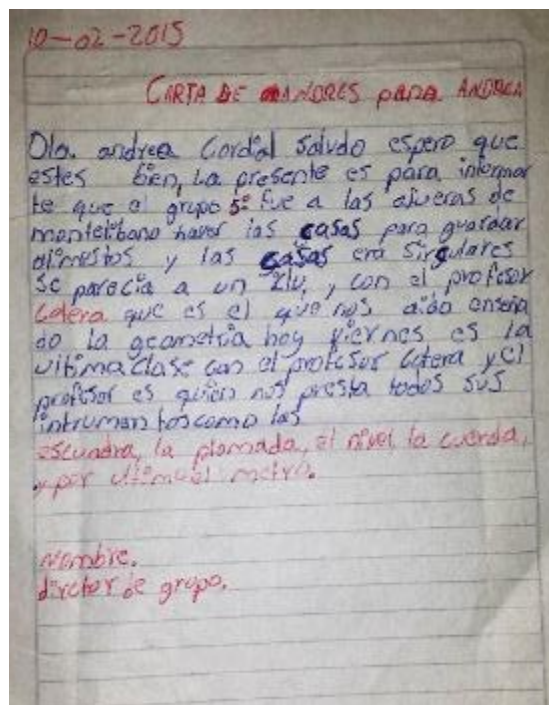


Figura 19. Encuentro XIV – 2015-10-16 - Foto de la Carta de Carlos Andrés.

Me parece importante resaltar que Carlos haya terminado su carta con una lista de los instrumentos empleados en la salida de campo, previa alusión a un tiempo en el que ha ido aprendiendo geometría con la ayuda de un profesor que además les presta sus instrumentos.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Alcanza a mencionar que el día en que escribió la carta, viernes 2 de octubre de 2015, era la última clase.

Como maestro e investigador, esta carta de Carlos Andrés resultó ser muy interesante por cuanto consumaba un caso atípico en la escuela y en su propia formación: que el estudiante *problema*, dada su personalidad y las dificultades para la convivencia, mostrara especial interés por una actividad, en este caso la Actividad Orientadora de Enseñanza, que según el maestro titular, debió de representar una vivencia muy grata para Carlos Andrés toda vez que para este tipo de estudiantes, según él, la enseñanza tradicional de las matemáticas representa no solo un evento monótono sino una amenaza para su permanencia en la escuela. Así, la recordancia que en él había del campo semántico geométrico apuntaba una ganancia atribuible a la transformación de las dinámicas de clase en una dirección que especialmente reconocía el trabajo colectivo, donde incluso él, que no era muy reconocido en esta área, tuvo una voz en ella, y sus producciones fueron analizadas con toda la detención que ameritaban.

Cuando hacia el undécimo reglón de su carta Carlos expresa «el profesor es quien nos presta todos sus instrumentos», empieza a mostrar cuan emancipadora fue para él la vivencia; esta sugerencia luego se hará explícita (Entrevista Video 14-01, min. 6, seg. 25) cuando respecto a la valoración de la última tarea, consistente en la siembra de un árbol, destaca especialmente que se le permitiera hacer uso de herramientas, dedicando mención especial a una de ellas, el taladro.

Vale la pena acotar que como parte de las prácticas de crianza en esta región del país, los padres no son prestos a permitir que sus hijos accedan a manipular las herramientas que los adultos usan en sus labores, menos aun cuando se trata de una herramienta que represente

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

algún riesgo para los estudiantes. Este aspecto en las relaciones sociales y familiares puede guardar mucha relación con las normas de nuestras escuelas, donde muchos de los materiales adquiridos con el fin de servir de medios en el trabajo de los docentes, se deterioran por falta de uso, guardados en las bodegas y fuera por tanto del alcance de los estudiantes.

Por tanto, toda esta experiencia previa, contrastó con lo experimentado durante los diferentes encuentros de la actividad. Por ejemplo, hacia el Encuentro III, a Carlos se le permitió llevar a su casa parte de los materiales con los que se modelaron algunos sólidos. Al final de la actividad, durante el Encuentro XIV (Figura 20), en compañía del docente titular y de la mía propia como docente-investigador, se le permitió a Carlos liderar parte del trabajo, en particular durante tareas en las que se utilizaron algunas herramientas. Nótese que en la Figura 20, Carlos aparece con una *porra* o *mona* (herramienta de trabajo pesado) en la mano.



Figura 20. Encuentro XIV – 2015-10-16.

Así, la carta puede tomarse como un ejemplo claro de aquellos hechos que, dada la importancia que tienen para una persona, son seleccionados por ella entre un número mayor

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

de hechos, esta vez con el fin de ser compartidos con alguien a quien se ha considerado digno de hacer partícipe. La carta no podría interpretarse como una síntesis de la manera en que Carlos objetivó el concepto de perpendicularidad, puesto que en la entrevista se pudo apreciar que en sus elaboraciones personales se cuentan muchos otros aspectos al respecto que no fueron tenidos en cuenta en la carta.

Por ejemplo, Carlos hizo mención de las condiciones de inclinación de algunos terrenos y del problema que representaban para un constructor que quisiera levantar una vivienda en esos sitios. Reconoció la pertinencia de algunas herramientas a la hora de cumplir con tareas específicas en el campo de la construcción, señalando resueltamente que era la plomada el instrumento por excelencia para verificar que una pared se encuentra en perpendicular con la horizontal —esta sentencia la acompañó del gesto propio de un constructor a la hora de verificar que la pared se encuentra a plomo o de levantar una hilera de bloque—, y acotando que debe hacerse uso también del *nivel de burbuja*.

Aunque Carlos Andrés no tenga facilidad para el diálogo oral y escrito, sus capacidades comunicativas le alcanzaron para exponer su concepto de perpendicularidad, sin recurrir a definiciones o quedarse con la representación estática y fenomenológica. Fue claro a la hora de presentarla, no como un objeto aislado, sino como una *relación entre*, o dicho en sus propias palabras, «una casa que está perpendicular a la otra o al plano».

Tuve acceso además a la carta de Rosa (Figura 21), producción en la cual la niña realiza, a manera de resumen, comentarios para varios de los conceptos que estuvimos trabajando. En este caso, creo que sí es posible que la estudiante intentara expresarle a su par académico cuánto había aprendido en el despliegue de la actividad. Sin pretender ser

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

exhaustiva, Rosa mostró muchas habilidades a la hora de comunicar una idea, siendo una de estas la capacidad de síntesis, en virtud de la cual consigue representar mediante figuras algunos de los conceptos y de las herramientas utilizadas. Un ejemplo al respecto lo constituye su título «los hangulos» para la consiguiente descripción: «Un angulo está formado por 2 líneas que se unen en un punto yamado vértice»; recurso discursivo este que es complementado con las respectivas figuraciones.

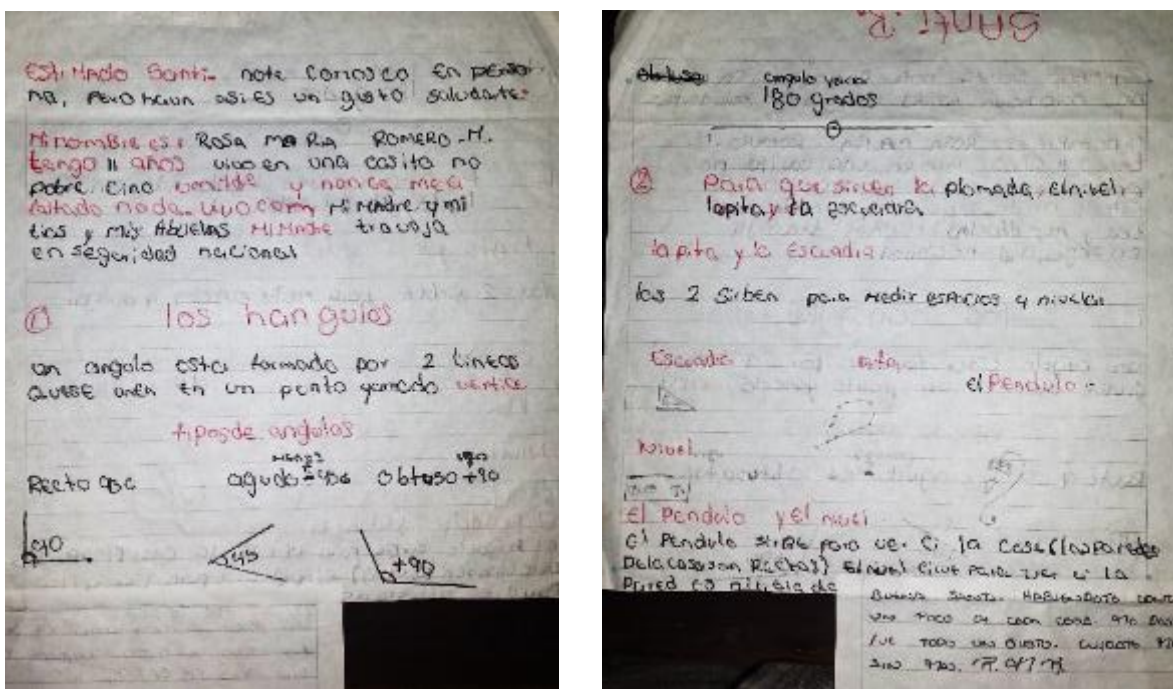


Figura 21. Encuentro XIV – 2015-10-16 - Foto de la Carta de Rosa María.

Rosa también fue entrevistada, y entre sus aportes quiero resaltar algo que será ampliado en la categoría II y que tiene que ver con un análisis del trasfondo político de la actividad, ya que para Rosa, el tema de las condiciones sociales y económicas son una buena forma de explicar por qué existen variados tipos de vivienda, y en algunas, por qué se



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

encuentran en mejores condiciones que otras. Rosa también mencionó las condiciones que debe tener una vivienda que será construida en un terreno inclinado, que debe considerar adicionalmente el tema de las inundaciones.

Desde luego que considerando lo dicho hasta el momento sobre la personalidad de Rosa, su análisis tiene mucho que ver con las condiciones reales de su barrio, pues ella es uno de los habitantes vecinos de la institución educativa en la que realizamos la actividad.

La carta preparada por Juliana (Figura 22) es muy parecida a la de Rosa. Esta estudiante también organizó un resumen en el que intentó mostrar cuánto y de qué forma logró objetivar esa relación de perpendicularidad. Es más, en el caso de Juliana, sí se hizo explícito que el concepto de perpendicularidad fuera el concepto principal durante la actividad; así lo anotó hacia el segundo título, que aparece en rojo en la primera hoja del material (Figura 22); sin embargo, el texto consignado es muy fiel a la manera como se define la perpendicularidad desde los libros de texto.

Pero esto, tratándose de esta estudiante, fue para mí algo corriente, pues su facilidad con el lenguaje le permitió durante la actividad expresar sus ideas con sus propias palabras. Además pude ver que se le facilitaba aprender las definiciones que iba consignando en su cuaderno. De ahí que me sienta muy inclinado a asumir como decisión de la niña esta segunda forma de elaborar su comunicación, de hacer referencia a los objetos y herramientas con que se trabajó. Es decir, para ella fue más importante que su par académico reconociera en sus palabras tales definiciones, en lugar de que *viera* su forma particular de entender el concepto.

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

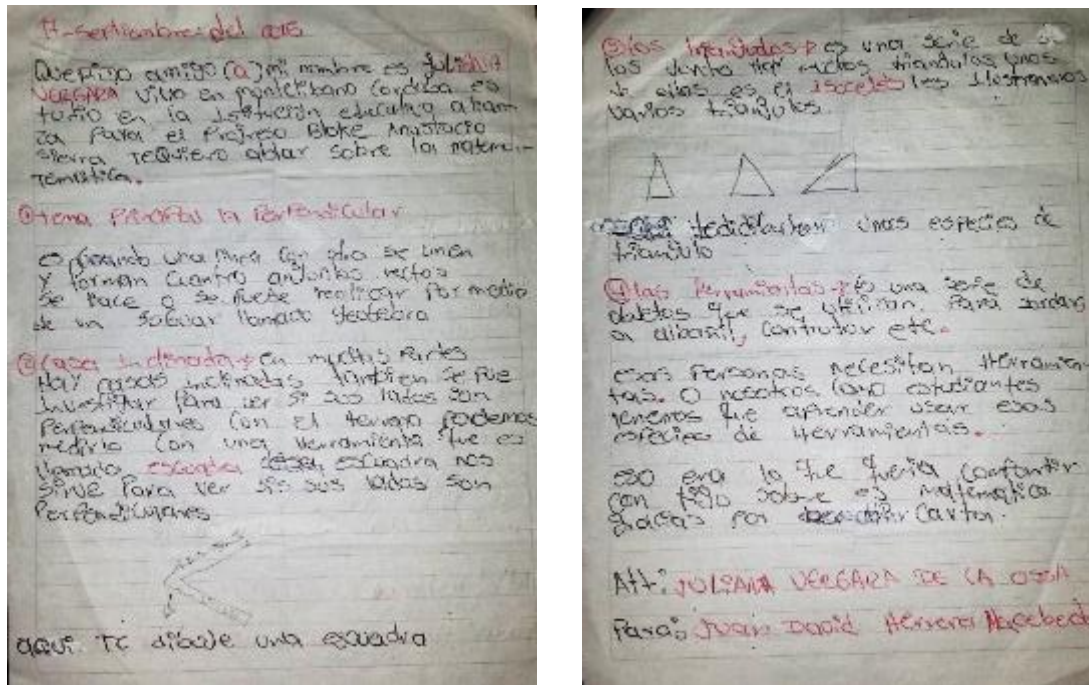


Figura 22. Encuentro XIV – 2015-10-16 - Foto de la Carta de Juliana.

Ahora, esta actitud permite reconocer el papel de Juliana en la tarea conjunta, más orientado a la apropiación de los significados socialmente establecidos que hacia la elaboración propia de sentidos. Aunque no todo en la carta de Juliana fueron definiciones, pues en lo concerniente a contar sobre el papel de las herramientas, propicia un fragmento que da cuenta de sus propias interpretaciones, texto en sintonía con lo expresado en la entrevista: establece relaciones entre los tipos de vivienda, los materiales para la construcción y las condiciones físicas y medioambientales del medio en el que se construye.

Me queda una incógnita que no alcanzo a despejar por completo; tiene que ver con la razón que tuvo Juliana para no incluir en su carta un elemento tan importante en su análisis particular como la representación del sujeto y la tabla, pues incluso durante la entrevista volvió a hacer referencia a él. Es posible que, como ya lo señalé, la estudiante haya optado





## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Durante prácticamente toda la actividad Leidys trabajó en grupo con Juliana, no incluyó en su carta definiciones de los conceptos elaborados sino que más bien se dedicó a redactar una nota muy descriptiva en donde se resaltan aspectos de la actividad sensible que fueron relevantes para ella. El primero de esos aspectos tuvo que ver con las casas construidas sobre terrenos inclinados, y en medio de ese comentario, aprovechó para mencionar el tema de los ángulos.

Otro elemento a resaltar en la producción de Leidys lo constituye que haya sido la única en mencionar el compromiso final con la construcción de una vivienda, en este caso para las palomas, como se había acordado inicialmente. Al aludir a este objetivo mencionó el papel que habían jugado las herramientas. Aunque Leidys no realizó dibujos ni hizo explícita la representación del sujeto y la tabla, su compromiso con este tipo de manifestaciones expresas puede considerarse tangencial, por ejemplo en la referencia que hace en su carta al tema de las inclinaciones.

En conclusión, al cierre de la actividad y casi de manera independiente a como cada uno movilizó sus conocimientos, cuando se trata de comunicarlos, lo que se puede apreciar es que no se hace mayor énfasis en lo que fue apropiado como ganancia personal, o en lo que cada uno aportó para configurar una ganancia social; es decir, no fue tan relevante el tema de la distribución de las ganancias. En cambio, en términos generales, el contenido de tales cartas, evidencia una preocupación por compartir los aspectos que despertaron mayor interés para cada uno de los sujetos.

## 5.2 El lenguaje como constitutor de la objetivación del concepto de perpendicularidad, en dialéctica con conceptos como líneas, triángulos, ángulos y alturas

*El lenguaje aparece como el instrumento de objetivación por excelencia.*

Luis Radford

Con la presente categoría me propongo mostrar la forma en que el lenguaje movilizó las relaciones de los estudiantes y se constituyó en uno de los elementos claves del propio proceso de objetivación. Recordemos que para Vygotsky (1995), la dialéctica entre lenguaje y pensamiento es innegable. Pero eso no significa que enseñar un concepto sea solo transmitirlo a través de las palabras con que se lo representa en el lenguaje natural o en el lenguaje simbólico de la ciencia, como algo acabado, sino que, por el contrario, este autor subraya que la imposibilidad de enseñar directamente un concepto a un niño, deviene de la necesaria mediatización del lenguaje en tanto que instrumento social en la constitución del pensamiento. A propósito del tema, este autor sostiene:

La experiencia práctica también demuestra que la enseñanza directa de los conceptos es imposible y estéril. Un maestro que intente hacer esto generalmente no logra nada más que un verbalismo hueco, una repetición de palabras por parte del niño, que simulan un conocimiento de los conceptos correspondientes, pero que, en realidad, solo encubren un vacío (Vygotsky, 1995: 120).

Con lo anterior espero no generar la idea de un menosprecio a la palabra oral o escrita, es decir, con una expresión como la de *verbalismo hueco*, ni el autor referido ni yo estamos intentando negar la importancia del lenguaje a la hora de representar los conceptos, ni su gran

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

papel de medio en otros ámbitos y en especial cuando se trata de conceptos matemáticos, cuyo nivel de abstracción entra en perfecta sintonía con las abstracciones que posibilita el lenguaje. La cuestión es que el uso de los términos, orales u escritos, más que estar proscritos en mi investigación, reciben un trato especial al interior de esta categoría, puesto que constituyen un punto de partida en el análisis del lenguaje, no por ser considerados como productos más sencillos o más elementales, sino por el contrario, por ser asumidos como abstracciones del pensamiento de la humanidad. Luego, no basta con lograr que el estudiante exprese ciertas palabras, pues en muchos casos, al tratarse de *trabajo cristalizado*, se tornarían «síntesis de múltiples determinaciones», además, no tendríamos por qué esperar que un niño tan solo con repetirlas pueda dar cuenta de todo su contenido histórico material.

Pero precisamente si las asumimos como abstracciones o *trabajo cristalizado*, se convierten en un buen referente para ascender hacia formas más concretas, cuya transición esté marcada por la dialéctica entre los significados universales y los significados y sentidos individuales. Roth y Radford hacen referencia a ello:

La significación es la generalización de una experiencia colectiva de la realidad, cristalizada y fijada en los vehículos semióticos sensoriales utilizados como parte de la comunicación. Es decir, «la significación no reside en la palabra o en la mente del hablante o en la mente del interlocutor. La significación es el efecto de la interacción del altavoz y el receptor, que se impone sobre el material de un complejo sonoro» (Bakhtine [Volochinov] 1977: 146-147, énfasis en el original) (Roth y Radford, 2011: 11).

De esta manera, cuando hablo del proceso de objetivación, estoy asumiendo la postura ontológica y epistemológica que, en diálogo con Radford (2004b: 13), reconoce que «dada la idealidad de dichos objetos, la única manera de hacer referencia a estos es a través de signos», pero signos que no son entendidos como simples palabras para repetir o consignar.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Por el contrario, en tanto producción cultural de la humanidad, dichas palabras son abstracciones altamente sofisticadas, por lo que demandan por parte del estudiante toda una posesión en sentidos personales para ser encarnadas. El mismo Radford hace un aporte más en este sentido cuando advierte:

En vez de encontrarse con un entorno simplemente facilitador, el alumno se encuentra con un sistema de ideas y signos culturalmente sancionados al cual tiene acceso indirecto, mediado, que trasciende el entorno social de la sala de clase y cuyo *modo de empleo* se encuentra inmerso en relaciones sociales y prácticas culturales propias y a las que el niño accede a través de su implicación en diferentes actividades (Radford, 2000: 19).

Luego, lo que me propongo mostrar también es que partiendo de esas abstracciones, es decir, de ese uso oral y escrito de las palabras, ese lenguaje se fue transformando en la medida en que el objeto matemático se fue constituyendo; pasando del citado modo de *interacción de altavoz y receptor*, a otras formas del lenguaje, como las de las imágenes, los gestos y las posturas corporales. Ahora bien, a mi juicio y desde lo que me han mostrado los datos, estas otras formas de lenguaje encarnan mayores niveles de apropiación de los significados y de los sentidos personales por parte de los estudiantes, porque más allá de esa interacción altavoz-receptor, estaría la corporificación o subsunción del concepto en el cuerpo mismo del estudiante, expresado a través de dichos gestos y posturas.

Esta posición mía se articula sin problemas con lo propuesto por la teoría cultural de la objetivación, en la medida en que para esta el lenguaje, más que ubicarse como un *facilitador* del aprendizaje de conceptos, se posiciona como uno de los signos o artefactos culturales que dan cuenta de la producción misma del objeto matemático. Para esta postura teórica, el lenguaje a la vez que subsume la historia material y lógica del concepto, en virtud

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

de su carácter semiótico altera nuestro funcionamiento cognitivo, es decir, es determinante en la producción de nuestra conciencia. Nótese que aquí el uso del término *cognitivo* es tomado en el mismo sentido con el que lo plantea Radford cuando afirma:

La importancia de la mediación semiótica reside no solamente en el hecho que las significaciones culturales proveen a los individuos con vías de desarrollo conceptual, sino que, además, el recurso a signos e instrumentos (es decir, el recurso a herramientas psicológicas) altera nuestro funcionamiento cognitivo (Radford, 2004b: 10).

En una especie de síntesis, lo que he dicho hasta aquí es que esa presencia transformadora del lenguaje, por lo menos en el marco de esta investigación, no parece ser tan homogénea ni estática; por el contrario, a la luz de las producciones y los registros producidos con los estudiantes, emerge la necesidad de dar cuenta sobre los distintos roles del lenguaje en cada uno de los momentos del proceso de objetivación, y adicionalmente, narrar la manera como se trenzaron esas distintas formas del lenguaje oral, escrito, pictórico, gestual, etc., hasta posibilitar la objetivación del concepto de perpendicularidad.

### **5.2.1 El uso del lenguaje como nominador, o de las representaciones caóticas como expresión de la naturaleza conceptual fenomenológica de las figuras y cuerpos geométricos**

Durante los primeros tres encuentros, los estudiantes estuvieron involucrados, por un lado, en tareas que demandaban la identificación y el reconocimiento de imágenes, fotografías y situaciones de la vida real; por otro, en tareas que requerían de ciertas percepciones o vistas sobre las figuras y los cuerpos geométricos estudiados en la escuela tradicional.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Sin embargo, esto de trabajar con figuras geométricas clásicas,<sup>25</sup> como construcciones bidimensionales o tridimensionales representadas en el plano, fue propuesto al comienzo como la posibilidad de reconocer, por un lado, los saberes previos aportados por la escuela, y por el otro, los *géneros primarios*,<sup>26</sup> que son con los que los estudiantes afrontan en muchas ocasiones sus retos y compromisos escolares.

Desde luego, el estudio de dichos objetos geométricos no fue asumido aquí, punto en el cual se cifra parte de mi ruptura con la mirada de una matemática muy occidentalizada, razón por la cual constituyen en este caso una temática aislada.

Por el contrario, estas figuras y cuerpos que la escuela tradicional pretende que los niños aprendan espontáneamente, fueron considerados *a priori* para ser estudiados en el marco de unos fines ulteriores.

Por eso es imprescindible pensar en este tipo de prácticas, que podríamos llamar aún en ciernes, entender como un momento inicial y no como una acción aislada con una finalidad particular, pues constituyen una unidad con la Actividad Orientadora de Enseñanza.

Consciente como estoy que en esta corriente sociocultural de la educación matemática, la enseñanza de un concepto no se limita a enseñar la repetición de palabras y conectarlas con los objetos, quiero recalcar que tanto aquí como más adelante, me voy a referir a este momento de la actividad principal guardando el mismo cuidado de no confundirlo con la enseñanza memorística, puesto que en diálogo con Vygotsky reconozco que:

---

<sup>25</sup> Entendidas como esos contenidos que han sido hegemónicos en el currículo propuesto por la matemática occidental, referido anteriormente como *unicidad*.

<sup>26</sup> Esta expresión es usada por Bajtín para referirse a esos usos de la lengua elaborados en la comunicación discursiva inmediata. (1982: 250).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

El memorizar las palabras y conectarlas con objetos, no conduce en sí mismo a la formación del concepto; para que el proceso se ponga en marcha debe surgir un problema que no pueda solucionarse más que a través de la formación de nuevos conceptos (Vygotsky, 1995: 45).

Aclarado lo anterior, puedo iniciar con el análisis de los registros durante esos primeros encuentros.

En esta primera parte de la actividad me fue posible observar qué representaba para los estudiantes parte de esa noosfera de figuras y cuerpos que a mi llegada ya tenían consignados en el cuaderno, representados a partir de figuras bidimensionales y de nombres.

Por ejemplo, en el Encuentro I, la tarea consistió en tomar uno de los tipos de vivienda que aparecía en las fotografías que les fueron entregadas, e intentar reconocer en ellas las figuras y cuerpos geométricos conocidos.

Así, en algunos registros es posible apreciar cómo los estudiantes utilizan nombres que de antemano tenían consignados en su cuaderno para identificar algunas figuras que les resultan familiares o componentes al interior de la imagen que intentaban examinar.

Algunos de esos registros son los siguientes:



Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado



Figura 25. Encuentro I – 2015-05-28.

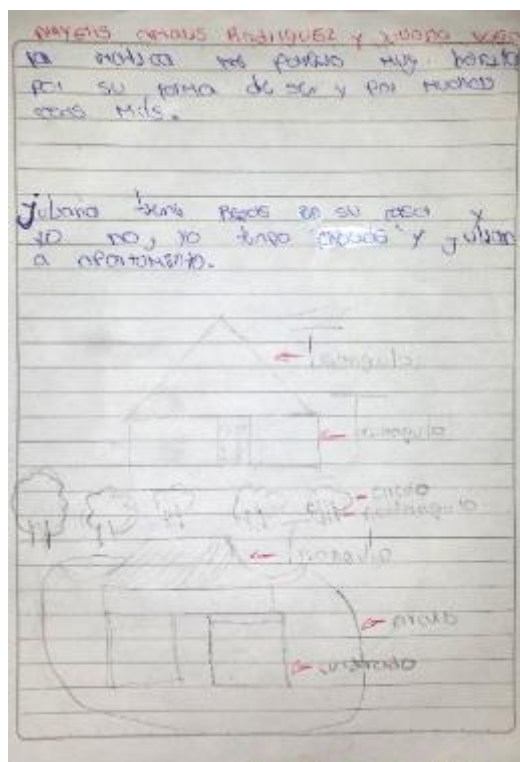


Figura 25. Encuentro I – 2015-05-28.

Como puede apreciarse en las producciones de Leidys (Figura 25) y Juliana (Figura 24), ambas utilizaron expresiones propias del contexto escolar, como *círculos*, *rectángulos* y *cuadrados*, con la intención de nombrar ciertos objetos que alcanzan a identificar al interior de su producción. En la producción de Leidys se puede leer que dichas figuras componen la estructura de la imagen observada o están mezcladas en esta; aunque no señala ningún objeto específico, establece, al estilo de etiquetas, relaciones uno a uno que permiten conectar un nombre con una figura en la imagen.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Juliana, por el contrario, se detiene a etiquetar algunos de los elementos de la figura, conectándolos con lo que ella considera su nombre correcto. Puede apreciarse lo que serían algunas correspondencias conocidas, por ejemplo, la figura que circunscribe el techo de la casa en conexión con el nombre de *triángulo*, asimismo las figuras que circunscriben algunas de las ventanas de la vivienda representada, conectadas con el nombre *rectángulos*; pero también notamos inusuales relaciones, por ejemplo, algunas paredes de la casa conectadas con el nombre *triángulo*. Esto último podría tratarse de un llano error de escritura y de atención, lo cual es común a esta edad. Una razón más para creer que se trata de un error de este tipo es que, cuando en el dibujo inmediato, la estudiante intenta nuevamente etiquetar las figuras correspondientes al techo y las paredes, esta vez sí lo hace de la manera convencional, incluso, etiqueta con *círculo* lo que parece ser un cerco de agua o de hierva alrededor de la casa.

Por supuesto, lo interesante para mí no ha estado en señalar si estos son o no errores de los estudiantes, puesto que desde lo que he asumido como géneros discursivos, más allá de si son correctos o no, o de si pueden ser tomados como enunciados con carácter conclusivos ante los que me vea obligado a responder, está la importancia los sentidos y la intencionalidad con que cada estudiante en una cultura y en un momento determinado hace uso de esas formas del lenguaje. Este constituye un cuidado especial a observar cuando a estos diálogos se les asume como géneros discursivos, en los cuales el propio Bajtín advierte un carácter relativo en los sentidos:

En las esferas de creación (sobre todo científica), por el contrario, sólo es posible un grado muy relativo de agotamiento del sentido; en estas esferas tan sólo se puede hablar sobre un cierto mínimo de conclusividad que permite adoptar una postura de respuesta. (Bajtín, 1982: 266).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Pero el mismo autor señala cierta actitud de precaución que debemos tener, puesto que la interpretación de esos enunciados no debe llevarnos a un relativismo en el que cualquier expresión es significativamente válida, sin importar el sistema de reglas o de acuerdos colectivos en el cual se instituya. Para estos casos es necesario reconocer la posibilidad de enunciados que en virtud del propósito y la intencionalidad del autor puedan exponerse a una respuesta excluyente dentro de cierta esfera de la actividad humana. Con respecto a tal límite advierte Bajtín:

«Objetivamente, el objeto es inagotable, pero cuando se convierte en el tema de un enunciado (por ejemplo, de un trabajo científico), adquiere un carácter relativamente concluido en determinadas condiciones, en un determinado enfoque del problema, en un material dado, en los propósitos que busca lograr el autor, es decir, dentro de los límites de la intención del autor.» (1982: 266).

Considérese como ejemplo los aspectos del triángulo.

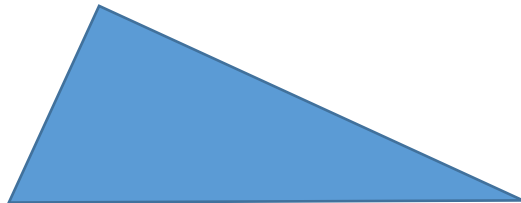


Figura 26. Triángulo Rectángulo

El triángulo de la Figura 26, puede verse como agujero triangular, como cuerpo, como dibujo geométrico; apoyado en la base, colgado de su punta; como montaña, como cuña, como flecha o aguja; como cuerpo caído, que (por ejemplo) debería estar apoyado sobre el cateto más corto, como medio paralelogramo, y una serie de posibles enunciaciones.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Por esta razón, para la presente categoría, estas primeras representaciones son asumidas como enunciados dentro de un género discursivo primario ante los que aún no debo manifestar una respuesta de cierre, en la medida en que interpreto que lo comunicado no alcanza cierto grado de conclusión, como el que caracteriza los enunciados más típicos de la esfera escolar; lo que sería razón insuficiente para ser despreciado. Pero no pretendo desconocer que el saber matemático escolar hace parte de otro género, mucho más simbólico, más sofisticado, pero quizás aún ajeno.

La propia teoría cultural de la objetivación también asume una posición muy clara con respecto a la pertinencia de ciertas formaciones o producciones individuales, y a la relación dialéctica que estas establecen con los sistemas simbólicos culturales como formaciones o producciones colectivas; al respecto Radford sostiene:

En las aproximaciones culturales, el punto de partida es el entorno, visto no como la arena donde se juega la adaptación del individuo sino el foco de una diversidad de sistemas históricamente constituidos, —sistemas sociales, económicos, materiales, conceptuales y simbólicos— cuyo entendimiento el individuo va adquiriendo como resultado de su participación en dichos sistemas (Radford, 2000: 19).

A mi modo de ver, un ejemplo más claro de todo esto es lo que aconteció con Juliana, cuando establece una relación entre las figuras que circunscriben las copas de los árboles y la palabra círculo. Desde mi interpretación, es esta quizás una típica escena en la que cierto lenguaje cotidiano, enmarcado en unas reglas entendidas por el niño en su experiencia de vida, elabora una de las llamadas representaciones falsas, cuya falsedad se sanciona al ser contrastada con el sistema simbólico escolar. Quiero anotar que a mi manera de entender esto, aquí se trata del tipo de representación a las que Marx se refiere como caótica o plena;

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

pues en este caso, el mundo real material, atrapa sensualmente la cognición de la niña.

Lo que apreciamos en este caso es que Juliana, al tratar de responder a la necesidad de representar la realidad, encuentra en el *círculo* la forma curva que mejor da cuenta de las formas curvas en las copas de los árboles, al parecer sin importarle los cuestionamientos que desde la cultura puedan recibir esas primeras representaciones. Nótese que algo parecido ya había sido descrito cuando resaltamos su representación de lo que parece ser el cerco de agua alrededor de la casa, nombrado por ella también como *círculo*.

Una situación parecida se observa en el encuentro IV, donde Carlos Andrés y Rosa intentan dar cuenta de las principales características de un cuerpo geométrico. Como punto de partida, realicé con ellos lo que Radford llamaría una demostración por visualización, en la que se asume el riesgo de una concepción ingenua «de un mundo matemático en el que los objetos se asimilan a sus representaciones y se estructuran en relaciones imposibles de cambiar de un dibujo a otro» (1994: 23). No obstante, a estas demostraciones se le reconoce un potencial didáctico cuando se trata de incursionar paulatinamente al terreno de la demostración deductiva.

Para el presente trabajo, iniciar con este tipo de demostraciones tuvo un valor adicional radicado en mostrar la transformación, desde lo que el mismo Radford (1994) llama *concepción fenomenológica* de las figuras geométricas y los cuerpos geométricos, a la *concepción dinámico-intuitiva* de los mismos. Con la primera, haciendo referencia a los aspectos figurativos, es decir, a las imágenes concretas e inmóviles; con la segunda, a aspectos que implican movilidad en las figuras y los cuerpos, algo así como lo llamado en otras corrientes *geometría dinámica*.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Ahora bien, en un primer momento tal demostración por visualización implicó por mi parte el uso de un género discursivo primario en donde de acuerdo a la intencionalidad y a la voluntad discursiva no debe asumirse como una explicación o una definición del objeto.

Desde los aportes de la teoría cultural de la objetivación, también resulta claro que con un tipo de enseñanza como esta no se puede pretender la transmisión de un significado o el aprendizaje de un concepto; en este sentido Radford, citando a Vygotsky, dice que

el lenguaje del medio ambiente, con sus significaciones estables y constantes, señala la dirección que seguirá la generalización del niño. [...] El adulto no puede transmitir al niño su modo de pensar, solo puede suministrarle el significado ya hecho de una palabra alrededor de la cual «este piensa según el modo las peculiaridades estructurales, funcionales y genéticas propias a su estadio de desarrollo conceptual» (Radford, 2004b: 7).

Pero esto ya fue aclarado, es decir, ya había señalado con anterioridad que este tipo de prácticas ostensivas no se realizaron con la intención de transmitir los conceptos como quien enseña palabras, sino como el momento inicial de un proceso más complejo. Como resultado, tal demostración *por ejemplo único*<sup>27</sup> estuvo centrada en mostrar algunas características de varios de los sólidos platónicos, entre las cuales las más enfatizadas fueron la de caras, vértices, aristas o lados, etc. Todo como parte de un proceso que apenas estaba iniciando.

Por lo tanto, como era de esperarse, ante las tareas que demandaba encontrar en estas imágenes algunas de las figuras geométricas conocidas, el empleo de palabras por parte de las dos niñas tuvo, en general, un carácter nominal; es decir, dichas palabras solo fueron

---

<sup>27</sup> Expresión que también utiliza Radford (1994) para referirse a este tipo de demostración por visualización en donde hay poco compromiso con el movimiento o un aspecto dinámico de las figuras.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

usadas con el fin de nombrar o identificar al objeto. Es como si en esa circunstancia las palabras tuvieran utilidad para nombrar solo cosas conocidas, pero aún no brindarían la posibilidad de pensar lo desconocido.

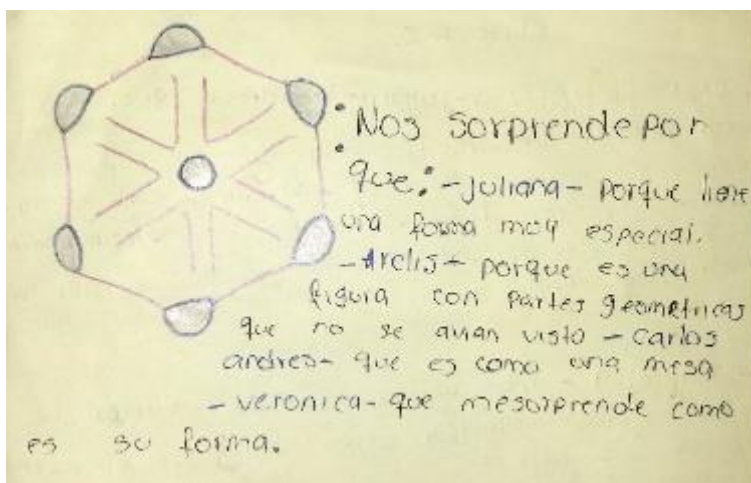


Figura 27. Encuentro III – 11 de junio de 2015



Figura 28. Encuentro III – 11 de junio de 2015

En un diálogo que quedó consignado en las producciones del encuentro III, Juliana se refiere a una «forma muy especial» para hacer alusión a un artefacto construido por ellos



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

a partir de cuerpos geométricos. Ante el comentario de otra compañera, quien dice que se trata de una «figura con partes geométricas que no se han visto», Carlos Andrés comenta que su forma «es como una mesa». Aquí es más fácil apreciar lo que he dicho anteriormente en cuanto a que el lenguaje oral y el escrito, en un primer momento del proceso, facilitan la identificación del mundo conocido, o sea, permiten la producción de una *representación plena* o una *representación caótica* del mundo real-concreto, es decir, una representación significativa para el lenguaje de su propia vida.

Marx y Engels citados por Radford (2000: 9), también se refieren a este tipo de producción cuando señalan que «la producción de ideas, de concepciones, de la conciencia, es, en primera instancia, directamente entremezclada con la actividad material y la relación material de los hombres, el lenguaje de la vida real».

Recordemos que en la corriente histórico-cultural, el signo es planteado por Vygotsky, citado por Radford, como herramienta psicológica que media entre el hombre y su entorno; pero este signo como mediador es también producto de la dialéctica entre la conciencia y el entorno, que en esta perspectiva no se sitúa de manera pasiva u ornamental, sino que «se trata de un entorno que los individuos modifican y que a su vez modifican a los hombres» (Radford, 2000: 10).

Hasta aquí resulta claro que el surgimiento y reconocimiento de este tipo de representaciones plenas o caóticas reporta algo muy especial en mi investigación, y es que muestra cómo inicialmente y enmarcados en esos géneros discursivos primarios, los niños que participaron en el estudio, tienden a hacer lo que podríamos llamar un uso nominal del lenguaje, es decir, usar el lenguaje para nombrar objetos conocidos y para representarlos



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

desde las complejidades de sus propias esferas. Al respecto Bajtín precisa: «El uso de la lengua se lleva a cabo en forma de enunciados (orales y escritos) concretos y singulares que pertenecen a los participantes de una u otra esfera de la praxis humana» (1982: 248).

Ahora, lo cierto es que esta idea de que la forma del lenguaje en este primer momento es de carácter nominal, parece contrastar con lo señalado por Vygotsky, citado por Radford, en lo relacionado con el papel analítico de la palabra:

Gracias a las palabras, los niños distinguen elementos separados, superando con ello la estructura natural del campo sensorial y formando nuevos (artificialmente introducidos y dinámicos) centros estructurales. El niño comienza a percibir el mundo no solo a través de sus ojos, sino también a través del lenguaje. En consecuencia, la inmediatez de la percepción *natural* queda substituida por un proceso mediato y complejo; como tal, el lenguaje se convierte en una parte esencial del desarrollo cognoscitivo del niño (Radford, 2000: 8).

Pero a mi juicio, desde lo que he podido observar en el trabajo con los estudiantes, es que tal episodio donde el lenguaje empieza a ser mediador entre el mundo y la conciencia, de tal modo que se convierte para el niño en un tipo de alterador de la percepción, debe aguardar mientras se propicia un primer encuentro con la realidad. Cuando llegue este momento, tal apertura vendría provocada por la dialéctica entre el mundo concreto que lo objeta, y su conciencia que comienza a representárselo y a producirlo por medio del pensamiento. Pero aun en el encuentro III, noté que al continuar detallando algunos cuerpos geométricos más propios del mundo de la escuela que de ese otro mundo real que le rodea, los estudiantes continuaban en una tarea nominadora, y al parecer sin mucho compromiso semiótico; y aun cuando algunos optaron por producir nuevos cuerpos geométricos, ese *género primario* que les había sido suficiente para representarse el mundo hasta ahora,

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

comenzó a quedarse corto, como si la producción material y su transformación en tanto que objetivación comenzara a demandar nuevas determinaciones, en este caso, una nueva forma de lenguaje.

### **5.2.2 El uso del lenguaje como dinamizador, o de las determinaciones abstractas como expresión de la naturaleza dinámica intuitiva de las figuras y cuerpos geométricos**

Hay hasta ahora una idea que emerge también de los datos y que se encuentra inmersa en el presente análisis: se alcanza a apreciar una forma de imbricación paulatina pero heterogénea entre los tipos de actividades, las formas de lenguaje y la transformación del pensamiento. Por ejemplo, durante los encuentros anteriores, donde el análisis de los cuerpos geométricos no guardaba mucho compromiso con la actividad principal, los cambios o variaciones en estas formas del lenguaje no fueron muy evidentes, pues como ya he señalado, prácticamente este se mantuvo en lo que he llamado su forma nominal; pero hacia el encuentro V, cuando empezó a requerirse el análisis de una situación mucho más comprometida con la práctica social asociada a la esencia del concepto de perpendicularidad, empezó a ser más notoria la transformación que fue experimentando el lenguaje, no solo en su papel mediador sino también en la calidad de su empleo.

En ese encuentro V, los estudiantes tuvieron que realizar una inspección de sus propias viviendas, y dar cuenta de los elementos más característicos de ellas. Por ejemplo,

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

desde la discusión en clase, se propuso analizar la situación por la cual algunas casas (viviendas) tuvieron que ser construidas en terrenos inclinados.

Toda esta situación real, en la cual están involucrados los seres *de carne y hueso*, exige del estudiante un mayor compromiso ético y político, en la medida en que no solo se trata de auto-analizarse, es decir, de reflexionar y hacerse una idea de sí mismo, sino también de exponerse al examen de los otros, de ser analizado por los otros. Pero además de esto, se seguía demandando el reconocimiento de ciertas figuras y cuerpos en la tarea de configuración de las viviendas. En consecuencia, me resultará muy interesante contrastar el uso del lenguaje, entre las formas hasta ahora protagónicas, y quizá las variaciones que pudieran darse, ahora que la tarea involucraba un mayor compromiso con los sistemas culturales locales.

Al detenerme en trabajos como los del grupo de Leidys y Juliana, me llama la atención cierta variación en el lenguaje escrito: aun cuando empiezan por un análisis en el que identifican algunos elementos de las viviendas con las figuras conocidas, aparece en los enunciados lo que denomino unos *marcadores de relaciones*. Estos marcadores son términos o expresiones que relativizan el lenguaje, es decir, que lo desconectan de unas formas absolutas o universales y lo circunscriben a casos más concretos o singulares. Por ejemplo, aquí me refiero a la expresión «tiene forma de» con la que los estudiantes establecen la conexión entre los elementos de las viviendas y las figuras geométricas conocidas. Ya no está limitada solo a esa forma *ostensiva* con la que se establece una conexión asociativa entre la palabra y la cosa, sino que marca una distinción en la relación, tal como lo depara el empleo

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

del vocablo *forma*. Es decir, ya no se está diciendo que una ventana sea un rectángulo, sino que las ventanas presentan la forma de rectángulos.

Bien se podría argumentar que dicho cambio se debe a que en esta actividad se les ha permitido ser más precisos en el uso del lenguaje, y no a que producto de un cambio en la concepción del objeto, el lenguaje haya tenido que cambiar. Con este trabajo no he querido defender la idea de un cambio evolutivo, es decir, de un cambio en los estadios del sujeto, sino, por el contrario, partiendo del reconocimiento de los estudiantes como sujetos inmersos en una cultura, tener en cuenta que poseen unos sistemas de referencia que fungen de medidores entre sus conciencias y el mundo que les rodea.

Por tanto, lo que he mostrado más bien es que cuando se trata de actividades que desconocen o no le dan la debida importancia a la cultura de los sujetos, esas prácticas terminan limitando la producción de herramientas, artefactos y signos, de gran valor en la producción de nuevos conocimientos.

Pero cuando, por el contrario, la cultura, bien sea a través de la reflexión en torno a prácticas sociales o mediante alguna otra manifestación, es tomada como punto de partida, es decir, se ubica en el centro de las problematizaciones, entonces todos aquellos procesos simbólicos con los que la humanidad ha producido y ha sido producida, entran en una dialéctica que transforma no solo las prácticas mismas, sino también los elementos mediadores, entre ellos el lenguaje, incluidos los sujetos.

Por ejemplo, pude notar que la transformación en la forma del lenguaje que aprecié en las producciones de Leidys y Juliana (Figura 29), estuvo sujeta a los cambios en las relaciones de producción, en la medida en que frente a un mayor compromiso material e

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

histórico, como lo fue la revisión de la propia historia de sus vidas, las estudiantes recurrieron a un uso del lenguaje más colectivo, menos limitado a los significados personales, abierto a unas posturas más compartidas y a unas formas en que esos significados personales se relacionaron con significados de los otros miembro del grupo.

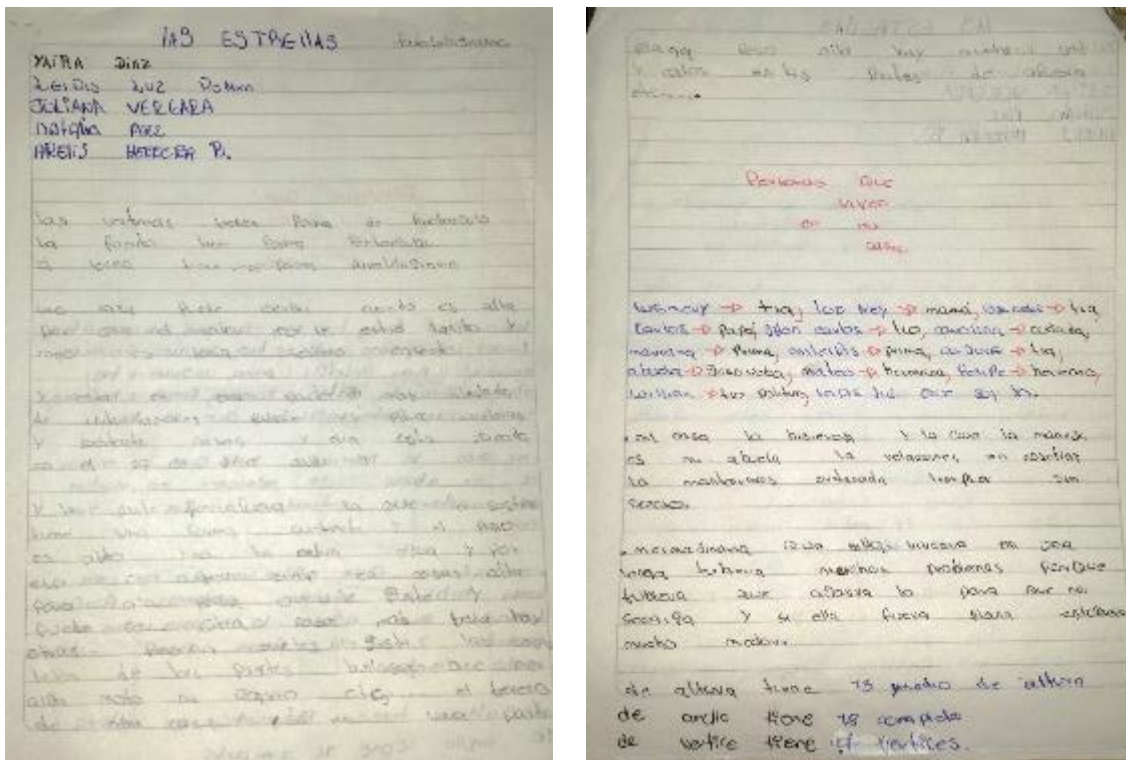


Figura 29. Encuentro V – 09 de julio de 2015

Para el caso de los textos que se registraron en esta producción (Figura 29), escritos a mano, según la caligrafía, por una sola niña: según la estructura y el contenido, se trató de la vivencia de Leidys, quien además de los textos, describe en la segunda página a los miembros de su familia.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Sin embargo, quiero resaltar que a pesar de que el grupo decidió registrar las vivencias de una sola niña, gracias a la transformación en las relaciones, es decir, a que se trataba de un trabajo en colectivo, aquí los significados y sentidos de las expresiones también se han transformado.

Por lo menos, el texto «Las ventanas tienen forma de Rectángulo (sic) [...] la puerta tiene forma Rectangular [...] el techo tiene una forma paralelogramos», tiene implícita la aprobación de los demás miembros del grupo, quienes, al acceder a que Leidys se pronuncie sobre su propia vivienda, ponen de por medio un diálogo con ella, apareciendo una especie de acuerdo entre ellos, que puede ser confirmado al revisar la frase siguiente: «Sí, la casa de Leidys es así», es decir, como si con dicha expresión quisieran dejar en claro que la voz de Leidys es en ese momento una voz colectiva.

Otro aspecto que vale la pena resaltar, es la posibilidad de usar el lenguaje escrito para narrar unas problemáticas identificadas con los interrogantes que genera una vivienda. En esta tarea, las estudiantes dieron cuenta también de las dimensiones de la casa y quizá de las razones para tales dimensiones, en la medida en que señalaron la cantidad de personas que conviven en ella.

También señalaron otras razones de tipo más político, por ejemplo la ubicación geográfica y las características sociales del sector en el que se encuentra ubicada la vivienda.

Como vemos, la necesidad de dar cuenta de todo este complejo social, que involucra tensiones, pasiones, encuentros y desencuentros, demanda de un lenguaje por un lado más colectivo, es decir, más ajustado a unos discursos mayormente compartidos, y a la vez, demanda un mayor compromiso individual con estos discursos, puesto que quien escribe los

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

usa con cierta propiedad, pero reconociendo que quien lee o a quien se le escribe, debe estar en condiciones de comprender la idea.

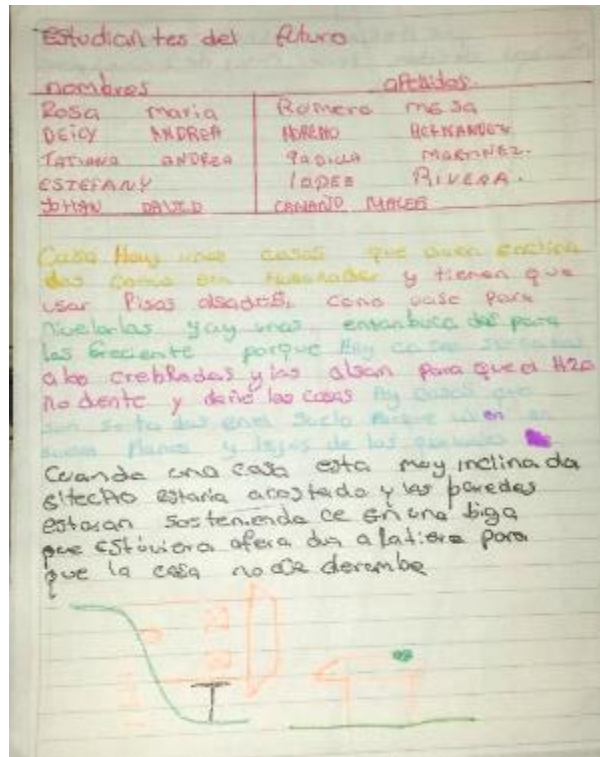


Figura 30. Encuentro V – 09 de julio de 2015

En la producción de Rosa (Figura 30) también se encuentran de manera explícita algunas alusiones a la problemática socio-política; incluso en su caso, aborda directamente uno de los elementos fundamentales de la actividad principal, como es el caso del manejo de las construcciones sobre terrenos inclinados. Rosa sitúa la problemática en el contexto de unos sectores particulares, como los sectores cercanos a las quebradas, cuyos moradores, frente al peligro que representan las inundaciones, han tenido que buscar soluciones desde las mismas técnicas para construir dichas viviendas.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Rosa alcanza a señalar tanto estas razones como las eventuales soluciones para el problema de las inundaciones, que según ella, amenazan estas construcciones.

Notamos que en su caso, el lenguaje se torna mucho más descriptivo, como tratando de convertirse en una gran representación que dé cuenta de las condiciones materiales que determinan la problemática de la construcción de vivienda en estos contextos. Incluso, al finalizar la página, y en otro color de tinta, aborda el análisis desde otro ángulo, tratando de justificar una de las estrategias para la construcción de viviendas, de tal manera que se pueda superar el tema de las inundaciones; pero con ello, alcanza a señalar el desafío que implica mantener una casa de pie cuando se construye en terreno inclinado.

Como intérprete, encuentro de gran valor conceptual el hecho de que al pie de este último párrafo, Rosa use un dibujo para mostrar las dos situaciones a las que acaba de referirse: la de una casa construida en terreno plano, que aparece inmóvil, y la de una casa que ha sido construida en terreno inclinado, y que si bien por los aspectos estáticos del dibujo no presentan movimiento, basta con comparar la situación con lo descrito en el texto para comprender que se trata de una situación que implica cierta dinámica.

Se aprecia que este dibujo muestra lo que parece ser un soporte para la casa que se encuentra inclinada, de tal manera que este pudiera evitar la caída de algunas de sus paredes. Sin duda en este dibujo, ya reconozco una primera manifestación que rompe con esa naturaleza conceptual fenomenológica de las figuras y los cuerpos a la que se refiere Radford, por cuanto aquí el lenguaje, en este caso el dibujo, no se limita al uso como nominador, bajo una primera representación plena o caótica, sino que, por el contrario, tal representación



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

comienza a explotar en una nueva determinación que le imprime dinámica a la situación, pues implica lo que en lenguaje oral o escrito proferiríamos como un *qué tal si*.

Como lo podremos constatar más adelante, Rosa parece estar familiarizada con el tema de paredes que se caen debido a falta de soportes, y por esto quizás ahonda en la problemática; sin embargo, lo que me parece imprescindible resaltar, es cómo en su caso el lenguaje tiene la necesidad de tornarse diferente, y acudir a otro tipo de juego, en el que al ser más visual, recobra la posibilidad que se había perdido con el lenguaje oral o escrito.

Si bien es mediante la palabra en tanto forma de lenguaje como el «niño comienza a percibir el mundo no solo a través de sus ojos», como lo señala Vygotsky (citado por Radford, 2000), esas *palabras* no están inicialmente en forma de palabras.

Hasta aquí, lo que he mostrado es que tales palabras iniciales se encontraban enmarcadas en un juego destinado a nombrar lo desconocido, lo enseñado; entretanto, para abordar lo desconocido, para lo cual aún la cultura no ha proporcionado nuevas palabras, se hace necesario volver a representaciones visuales, como formas icónicas de mostrar la realidad que se aprecia mediante los sentidos, pero que ahora ha sido transformada por una nueva necesidad, cual es la de señalar la problemática y las posibles soluciones.

De esta manera, esta nueva representación parece no ser ya la inicial y caótica, pues en esta, a diferencia de aquella, hay una transformación realizada por el pensamiento del sujeto subsumido ahora en esta nueva forma de lenguaje; esta representación empieza a constituir lo que parece una nueva determinación cruzada por la reflexión de la situación real que enmarca el problema.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Como si se tratara de una nueva forma de ver la realidad, una forma que no es nueva por algún artificio de la mente, sino por los giros que comienza a dar el lenguaje en tanto que apropiación y producción mediata de la realidad.

En este sentido Radford sostiene:

El aprendizaje no es, pues, solamente reorganización conceptual, es sobre todo la adquisición de sistemas de ideas y de signos que llevan consigo las estructuras sociales, simbólicas, históricas y otras que, para decirlo en un tono vigotskiano, vienen a *alterar* la biología natural de los procesos síquicos del individuo, culturizándolos e historizándolos (Radford, 2000: 20).

Me pregunto, ¿por qué siendo el lenguaje escrito una forma privilegiada hasta ahora para mostrar, señalar e identificar objetos y situaciones de la vida real, se torna insuficiente cuando se trata de nombrar lo desconocido, o cuando se trata de describir una situación de la vida real, pero que demanda de una solución a un problema material, como es el tema de las inundaciones?

Una respuesta temporal a esta pregunta es, que en virtud de lo prematuro de este lenguaje, en tanto acceso a los sistemas simbólicos culturales, no cuenta aún con los matices que permitan el análisis de las situaciones; es decir, se trata de un lenguaje todavía muy fijado a la concreción del mundo material-sensorio, y que para efecto de la necesaria detonación de estas primeras representaciones, debe tornarse más plástico,<sup>28</sup> más maleable; es decir, debe facilitar la representación de situaciones relacionadas con la naturaleza dinámico-intuitiva de las figuras y los cuerpos geométricos, situaciones que a partir de su posibilidad para evaluar

---

<sup>28</sup> En el sentido dado por Vygotsky (1931) cuando se refiere a cierta capacidad de un atributo para modificarse por el influjo de estímulos externos y conservar la predisposición a que estos se repitan.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

situaciones cruciales,<sup>29</sup> viabilizan las primeras abstracciones, es decir, situaciones hipotéticas consideradas en posibles análisis, como es el caso de la vivienda que «pudiera caerse» de no ser por los soportes que Rosa representa en su dibujo.

En este instante me parece necesaria una revisión de lo que Radford entiende por conceptualización dinámico-intuitiva, y para ello considero pertinente recordar algunas apreciaciones al respecto hechas por este autor:

Esta se caracteriza por el hecho que el aspecto conceptual del objeto geométrico se distancia de su aspecto figurativo, haciendo posible la aparición de representaciones del objeto. La figura se convierte en una representación simbólica del concepto. Una propiedad enunciada, como la perpendicularidad del diámetro y la tangente, no puede ser demostrada a la luz de un dibujo. Es aquí que caben las demostraciones que se basan no en un ejemplo sino en varios, o la demostración basada en la experiencia crucial (lo que ocurre cuando el alumno intenta poner a prueba la validez de la proposición en estudio o a través de un caso extremo) (Radford, 1994: 28).

Es de notar que cuando Radford señala la necesidad de una segunda (varias) representación, lo que intenta decir es que ante la estaticidad de un (único) dibujo, se procede a la construcción de otros que permitan representar el movimiento, el cambio y, en especial, la circunstancia que escapa al «único ejemplo» y se sitúa como experiencia crucial. Los dos dibujos de Rosa, el de la casa en horizontal, junto al de la casa inclinada, expresan la necesidad de romper con la unicidad de una figura y tratar de considerar una segunda figura, que en cierto sentido es la misma, pero en una circunstancia diferente (rotada), y que de hecho representa una situación hipotética, mucho más abstracta y simbólica, pues en ella el signo expresa una situación que puede ir más allá de la realidad material sensorial.

---

<sup>29</sup> En adelante asumo estas situaciones cruciales con base en lo que Radford llama *experiencias cruciales*, que define como «lo que ocurre cuando el alumno intenta poner a prueba la validez de la proposición en estudio o a través de un caso extremo» (1994:28).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Este tipo de situaciones, en las que el lenguaje se torna un poco más pictórico, pero acudiendo a representar situaciones más dinámicas, va siendo cada vez más frecuente entre más se comprometen los estudiantes con la actividad principal.

La explicación que elaboro para este hecho es que al tratarse de la perpendicularidad como relación entre elementos constitutivos de cuerpos geométricos y figuras geométricas, los estudiantes necesitarían, en palabras de Marx, que esa primera representación plena sea «volatilizada en una determinación abstracta», es decir, que esas figuras y esos cuerpos comiencen a ser fragmentados, analizados, inicialmente, abstrayendo de ellos múltiples determinaciones.

En la enseñanza tradicional de la perpendicularidad, como ocurre también con otros conceptos asociados al estudio de las figuras geométricas y los cuerpos geométricos, aunque se insiste en las definiciones y en las expresiones formales, parece que no se hace mayor énfasis en subrayar, desde los aspectos del lenguaje, que dichos conceptos están más constituidos por las relaciones entre algunos elementos que constituyen dichas figuras, que por los elementos mismos.

Por ejemplo, una altura de un triángulo A, está constituida por una relación entre dos líneas perpendiculares entre sí, en la cual una de dichas líneas contiene al segmento que representa a una de las bases (lados) B del triángulo, y la otra línea, pasa justo por el vértice opuesto a la mencionada base.

De modo que entre el vértice señalado y el punto de corte de las dos líneas, queda comprendido un segmento que se constituye como la menor distancia entre el vértice y la

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

base; es a este segmento, al que llamamos altura del triángulo A con relación a la base B; y esto se cumple para los tres lados (bases) del triángulo.

Todo esto implica que hablar de altura sea tanto como referenciar, es decir, expresarla con referencia a una de sus bases. También había señalado con anterioridad que la perpendicularidad, más que una propiedad de una línea, es una relación común o compartida entre dos líneas, que al intersecarse forman cuatro ángulos adyacentes y congruentes.

No obstante, en la práctica, y como una forma de metonimia, el lenguaje se torna más abreviado, y se usa el concepto de altura y el de perpendicularidad como términos absolutos, abriendo con ello la posibilidad de que quien los aprende no objetive tales relaciones, e ignore aspectos tan importantes para los conceptos.

Es por esta razón que me interesa que los estudiantes, al exponerse a ciertas *situaciones cruciales* como las que comienzan a plantearse en la medida en que nos involucramos con la actividad principal, recurran a ciertas formas del lenguaje que les permitan tener en cuenta estas relaciones tan fundamentales para los conceptos.

Esto se aprecia claramente hacia el Encuentro VI, donde nuevamente volvemos sobre el análisis de fotografías de algunas viviendas; pero esta vez se trata de viviendas construidas sobre laderas o sobre terrenos inclinados, que demandan más de un marco de referencia para dar cuenta de sus elementos.

Por esta razón, las fotos analizadas resultaban algo extrañas: sus elementos constitutivos no eran fácilmente identificable desde lo sensorial, pues por la forma en que se tomaron las fotos, se rompió con el marco de referencia socialmente significativo, y, por tanto, se restringió la posibilidad de *lectura sencilla* por parte de los estudiantes.

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

A continuación, expongo algunas de esas fotografías a las que me refiero.



Figura 31. Encuentro V – 09 de julio de 2015



Figura 32. Encuentro V – 09 de julio de 2015



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

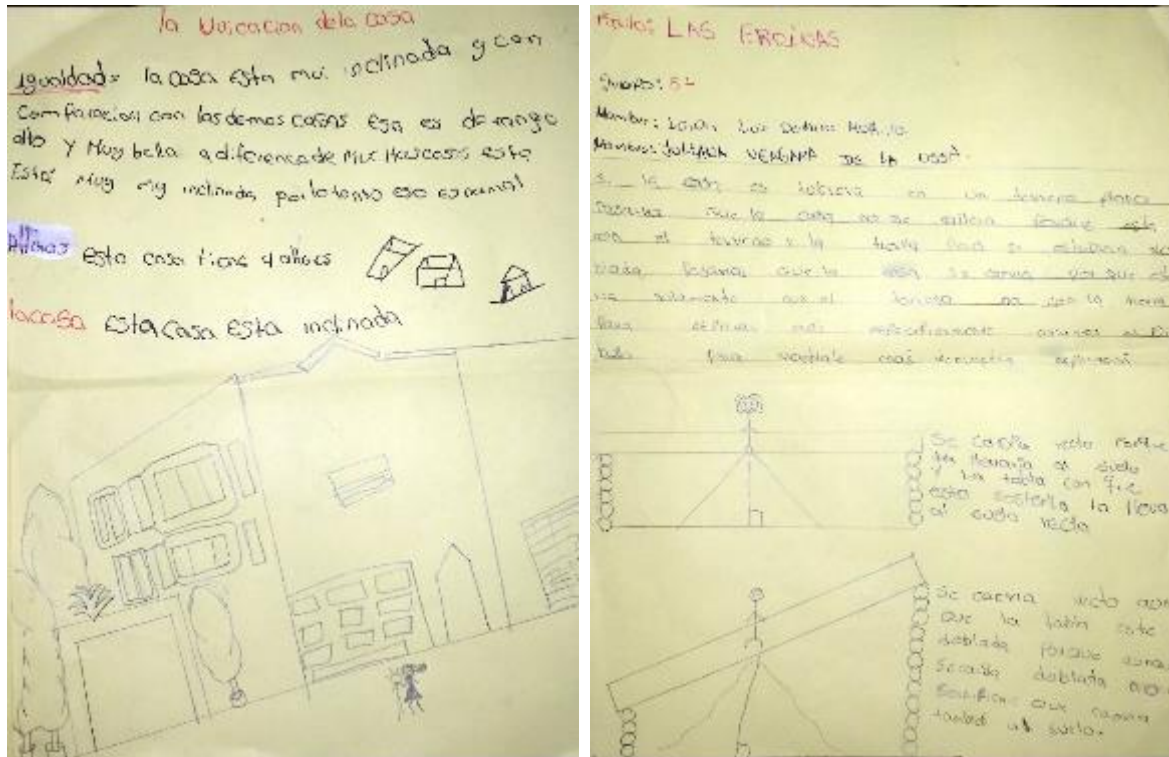


Figura 33. Encuentro V – 09 de julio de 2015

Desde luego que mi interés no es solo enfrentar a los estudiantes a una situación que les demande superar cierta ruptura con el aspecto sensorial, sino, más bien, tener la posibilidad de observar si ellos, al tratar de superar dicha situación, o simplemente al enfrentarse a ella, alcanzan a percatarse de las relaciones a las que he hecho alusión. Dicho de otra manera, solo percatándose de las relaciones entre la posición de la vivienda y la superficie, y entre estas y los sujetos que caminan sobre esa misma superficie, dado que ambos, vivienda y sujetos, están sometidos al mismo campo gravitatorio de la tierra, será posible explicar las fotografías de la Figura 31 y de la Figura 32.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En consecuencia, mi interés estuvo puesto en poder apreciar de qué forma los estudiantes, no solo explicaron las fotografías, sino también cómo pudieron considerar dichas relaciones en la producción de sus propios signos, con los cuales las representaron (Figura 33).

En el texto de Juliana y Leidys, se aprecia el interés por justificar las razones por las que quien construyó la vivienda, tuvo que haberla colocado en esa posición. Noto un esfuerzo por explicar la complejidad del asunto, y de alguna forma, creo que existe mucha claridad en algunos aspectos; por ejemplo, las niñas identifican la circunstancia política y social que condiciona la situación, como es la imposibilidad de contar con un terreno plano, pues en caso de que hubiese sido posible esto, no habría sido necesario pensar en una posición diferente para la vivienda. Además, todavía haciendo uso del lenguaje escrito, logran explicar el contraste con la situación contraria, es decir, cuando por no contar con un terreno plano, se hace necesaria la construcción de las viviendas en terrenos inclinados, con lo cual, usando las palabras de las niñas, las viviendas estarían (serían construidas) «dobladadas».

El sentido con el que las estudiantes usan estas expresiones deja abierta una posibilidad que me cuesta explicar, porque mientras el verbo *doblar* en una acepción occidentalizada<sup>30</sup> significa básicamente «hacer algo doble», el término *doblado*, según la misma fuente, es usado para referirse a «un terreno [...] desigual o quebrado». Pero muy subjetivamente, y por la circunstancia de ser también un hablante del contexto social en el que investigo, zanjó la discusión a favor de un uso casi inapropiado del término, pues en nuestro contexto, la expresión *doblado* es prácticamente inusual para referirse a un terreno

---

<sup>30</sup> Por *acepción occidentalizada* entiendo la forma en que un diccionario como el de la Real Academia de la Lengua define *doblar*.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

quebrado, pero sí para referirse a algo torcido, es decir que no está recto, y en este caso, como sabemos, los terrenos inclinados pueden estar tan torcidos o rectos, como los terrenos planos.

Aquí más que nada lo que determina la inclinación no es tanto la forma de la superficie sino la altitud en los extremos de un terreno.

En todo esto, me parece importante subrayar, que ante estas tareas en las que se hace necesario describir y argumentar, las estudiantes responden positivamente, y a pesar de disponer de un número limitado de términos, pueden construir un número mayor de expresiones. Entonces, intuyo que con el uso del término *doblado*, quieren expresar la condición de inclinación de un terreno, en comparación con otro que no lo está y al que han llamado *plano*.

Adicionalmente, quiero señalar que el uso de este término aquí, también resulta interesante para ejemplificar algo en lo que he venido insistiendo: cómo el lenguaje del niño inicialmente no posee una suficiente referencialidad; es decir, los signos de los que se sirve para expresarse y comunicar el mundo, aún son muy limitados para dar cuenta de circunstancias más cruciales. Es un poco esto, lo que señala Vygotsky con su ley de doble vía, insistiendo en que debe existir un movimiento, que primero es, de afuera hacia adentro, y luego, al contrario. Sin embargo, es preciso aclarar, que en comunión con Radford, para mí, si bien este movimiento existe, existe en tanto es dialéctico, o sea, sin necesidad de asumir a cada momento de estos como algo separado, o como dice el mismo Radford, sin asumir la posición *dualista*, típica del sistema cartesiano. En un comentario al respecto Luis Radford dice:

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

El mismo Vygotsky habló de internalización, esto es, la «reconstrucción interna de operaciones externas» (Vygotsky, 1978: 56), esto es, «una operación que representa inicialmente una actividad externa y que luego empieza a ocurrir internamente» (pp. 56-67) a través del uso de signos. [...] Por su propio lado, el concepto de internalización, como la definición de Vygotsky lo deja claro, está basado en la distinción entre lo externo y lo interno, distinción que, como sabemos, es característica de los sistemas psicológicos dualistas cuya mejor expresión se encuentra quizás en la obra de Descartes (1651). Nos parece que es en el interés de una teoría histórico-cultural del sujeto de partir no de premisas dualistas, sino de premisas monistas. Esto es, de pensar el sujeto y su cultura no como dos entidades distintas, sino como expresiones de una misma formación histórico-conceptual, o, como diría Hegel, como dos momentos de un mismo todo (Radford, 2014: 139-140).

En el mismo diálogo, más adelante, hay un texto con un enunciado muy interesante para la idea que vengo defendiendo, y es que cuando las niñas insisten en aclarar las razones para que una casa construida en un terreno inclinado se encuentre en riesgo, ellas señalan que «para explicar más específicamente aviamos el dibujo para mostrarle más de nuestra explicación». A mi modo de ver, esta es una voz muy fuerte, porque con ella, las estudiantes estarían indicando que pese a su esfuerzo por describir la situación crucial, necesitan recurrir a esa otra forma del lenguaje, que como representación dinámica, les permite mostrar los dos estados simultáneamente, para hacer visible la comparación entre las circunstancias en un terreno inclinado y en un terreno plano. Que sean ellas mismas las que sugieran el paso a otro tipo de representación, es muy sonoro para este ejercicio interpretativo, porque se trata de una recomendación de un sujeto que está intentando apropiarse de una situación, para conocerla y a la vez ayudar a otro (comunicándola) a conocerla.

En la otra producción mostrada anteriormente, la de Rosa, también encontramos un lenguaje descriptivo, que permite por un lado percibir una posición política y estética por parte de esta estudiante, pues desde mi juicio, cuando ella afirma que la casa «es de rango

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

alto y muy bella», interpreto que se trata del reconocimiento de un aspecto político, referido a la conexión entre las clases sociales y la materialidad de las viviendas. Debo recordar que este tipo de comentarios ya ha sido observado en Rosa, y citado anteriormente, por lo que puedo reconocer su capacidad para poner este aspecto en evidencia, además de reconocer su propensión a hacerlo, como una forma muy particular para dar cuenta de un conjunto de otros aspectos que para ella influyen o determinan la construcción de las viviendas.

Hay otros aspectos que finalmente quiero resaltar en los enunciados de Rosa, y es que estos permiten mostrar cómo la estudiante registra la idea de altura(s), ya no desde un absoluto, sino como una relación entre un extremo de la casa y una línea que es usada como referencia. Y es que durante este encuentro, algunas de las discusiones que sostuvimos tenían como finalidad señalar el cuidado a la hora de referirnos a la noción de alturas, para no dejar de lado la relación de referencia a una de las bases.

De ahí, tratándose de una casa que fue construida sobre un terreno inclinado, era de esperarse que los estudiantes tuvieran en cuenta este aspecto crucial como parte de su análisis, más aún cuando como parte del encuentro estuvimos visitando un grupo de viviendas construidas en laderas, y en las que nos detuvimos para apreciar los detalles de lo que podrían ser alturas relativas. Sin embargo, ante una foto de una vivienda en esta circunstancia, los estudiantes podrían experimentar una mayor dificultad para identificar la línea tomada como base y para luego apreciar una altura con respecto a la base de cada uno de los puntos más al extremo.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Por eso, a la hora de analizar el texto de Rosa, noto que ella, reconoció cuatro alturas; es decir, según lo expresado por sus palabras, no solo tuvo en cuenta esta noción de altura, sino que la usó para tomar una posición frente a lo observado. Vale la pena señalar que el video identificado como «Clase 6 09», grabado durante el Encuentro VI, muestra al final cómo Rosa da cuenta de la línea que toma como referencia para la base de la Vivienda. En este registro se puede evidenciar, que después de constatar la posición real de la vivienda, a la estudiante no le queda mayor duda de cuál debe ser el referente para definir las alturas relativas de las viviendas.

En una de las fotografías suministradas al grupo de Rosa (Figura 31), puede llegar a evidenciarse como si la vivienda estuviera inclinada hacia la izquierda; es decir, la línea correspondiente a la superficie de la calle coincide con el borde inferior de la foto, dando la impresión que la casa se encuentra inclinada. Para los estudiantes, que ya habían estado conmigo recorriendo algunas viviendas del sector, era fácil aceptar que una casa se encontrara inclinada, pues como se puede apreciar en los registros del grupo de Rosa (Figura 33), en la parte superior de la imagen anterior, ella registró tres dibujos a mano alzada y sin regla, en los que se aprecian distintas posiciones de unas casas. En una de las imágenes puede verse una situación antes registrada, me refiero a la casa inclinada que se apoya sobre un puntal (madero) que la sostiene y evita que se caiga hacia el lado de su inclinación. Este registro vuelve hacer énfasis en la forma particular que toma el lenguaje, que como ya he señalado, recurre a múltiples representaciones con el fin de comparar, o como ya he dicho, señalar la dinámica de un objeto geométrico, que sometido a ciertas situaciones, no puede comprenderse desde una sola representación. Por este motivo, creo que la estudiante tiene

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

la necesidad de recurrir a una representación de esta situación crucial, que escapa a la estaticidad o al absoluto desde el que se venían tratando los cuerpos mediante la anterior forma del lenguaje (nominal) analizada.

Con base en lo anterior, considero que una fotografía como la antes mencionada (Figura 31) resulta propicia para el análisis de una estudiante como Rosa, que ha mostrado reconocer situaciones en las que las viviendas pueden ser construidas sobre terreno plano y aún quedar inclinadas. La fotografía amerita un análisis que recomponga la figura; por su parte, a la hora de poner todo esto en palabras, Rosa probablemente tendrá que recurrir también a esta forma de lenguaje en la que he venido insistiendo, que muestra necesaria la representación visual de la situación crucial.

Por otro lado, cuando en un diálogo con sus compañeros, registrado en el video identificado como «Clase 6 09», Rosa comenta que «Por la postura del cuerpo —si una mujer va bajando; una mujer cuando baja, su cuerpo se inclina agachado, y si va es normal, su cuerpo es recto». En esto observo que la estudiante se centra en la posición de un de las personas que se mueve por la calle. De lo anterior deduzco que es este detalle lo que les permite a los estudiantes romper con el campo estrictamente material y sensorio de la imagen, es decir, que en medio de la composición de la fotografía, este elemento es la esencia de la situación crucial, lo que les ayuda a comprender que no es la casa la inclinada, sino que tiene que ser la fotografía, pues de ser la casa la inclinada, las personas tendrían que estar también caminando en una posición inusual y muy improbable.

Además, para mí tiene todo el sentido, que mientras hablaba, Rosa usara sus manos para mostrar la posición corporal de la mujer de la fotografía, pues al recurrir a estos gestos

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

con las manos, me permitió empezar a entender lo significativo que podría llegar a ser el estudio de la postura en la interpretación de la imagen. Dicho esto, creo que tiene mucha relevancia la transformación que hasta ahora ha tenido el lenguaje, que sin abandonar su forma escrita y hablada, se ha ido trenzando con unas formas más visuales y gestuales, con el fin de ser más enfático en situaciones excepcionales que, de otra forma, serían más difíciles de pensar y comunicar.

Si hasta aquí he apelado a la noción de géneros discursivos, es reconociendo en ella cierta producción material y cultural, donde los enunciados (orales y escritos), en tanto usos colectivos de la lengua, son producto de diversas prácticas sociales en las que intervienen distintas formas de lenguaje.

En consecuencia, no hallo en mi caso, una evolución propiamente dicha entre las diferentes formas del lenguaje hasta ahora expresadas, como si unos géneros o unas formas fueran más sencillas que otras; más bien, lo que he notado en la producción de los estudiantes con los que he realizado el análisis, es cómo distintas formas del lenguaje se van apoyando mutuamente, siendo unas más apropiadas que otras a la hora de objetivar ciertos aspectos de la realidad, y por tanto, manteniéndose en un movimiento en el que unas veces se imponen como privilegiadas, y otras veces, ceden el protagonismo a otras formas del lenguaje más apropiadas para el momento de la objetivación.

Quiero hacer notar que es este el sentido en que he venido insistiendo en una transformación del lenguaje, como pasos en distintas direcciones, de una forma de lenguaje a otras, en correspondencia con el momento de la objetivación.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

De manera que al referirme a estas formas de representaciones producidas por el estudiante, cuando se trata de mostrar con ellas esas situaciones cruciales a las que se refiere Radford, como un momento de la objetivación del concepto cuando este adquiere una dimensión dinámico-intuitiva, lo hago asumiéndolas como enunciados elaborados en una esfera comunicativa, o bajo ciertos pasos de una forma de lenguaje a otra, pero asumiendo al enunciado desde su papel en el proceso de la objetivación.

El materialismo dialectico de corte Marxista también parece tenerlo claro, cuando recuerda que en términos de la dialéctica entre el mundo material sensorio y el pensamiento, tanto los medios como las relaciones de producción se constituyen como componentes esenciales; pero señalando que el segundo posee una dinámica más social, muy cercana a lo que serían las reglas de juego o normas, y que es ahí donde prima el lenguaje. Al respecto Radford comenta:

La reflexión marxista tomará dos componentes esenciales para explicar los procesos materiales e intelectuales: los medios de producción, por un lado, y las relaciones de orden social, por el otro (Markus 1982, Eagleton 1976, 1997, Bloch 1985). La primera componente pertenece a la esfera de la *técnica*, es el encuentro del hombre con la naturaleza; la segunda pertenece a la esfera *social*, esto es, a la esfera de normatividad y reglamentación entre individuos, es el encuentro del hombre con el hombre. Mientras que en la primera prima el artefacto o la herramienta, en la segunda prima el lenguaje (Radford, 2000: 9).

Volviendo sobre el análisis de las producciones, hay un elemento que me parece muy relevante, especialmente si se trata de mostrar una razón para un nuevo paso a otra forma de lenguaje. Puesto que ya he comentado, en términos de producción del objeto, sobre los aportes del lenguaje gestual al que recurrió Rosa cuando trató de dar cuenta del aspecto relacionado con la posición corporal, ahora quiero indicar cómo desde este encuentro



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

(Encuentro VI) se fortalecerá una nueva representación en la otra forma del lenguaje que venía siendo protagónica. Dicho en otras palabras, ese hallazgo respecto de la importancia de la posición corporal para determinar la posición de las viviendas, les ha dado relevancia a las representaciones pictóricas o graficas en las que se mostraban diferentes versiones de objeto, entre ellas, una que mostraba la situación crucial.

Me permito recordar que en los registros de Leidys y Juliana, se observaban dos dibujos realizados por ellas; en el primero, un sujeto posando de pie sobre una tabla que yacía horizontal sobre un par de soporte; en el segundo, otro sujeto también en posición vertical sobre una tabla, pero ahora esta se encontraba inclinada, ya que uno de los soportes sobre los que se apoyaba era de mayor altura que el otro.

Las estudiantes dibujaron, para ambos sujetos, unas líneas que se extendían desde los pies de cada sujeto hasta la superficie de la tierra, y en un par de ellas, una para cada sujeto, se observa lo que parece ser una representación de un ángulo recto. Esta construcción la interpreto como una manera de señalar algo que había sido discutido en clases, y que por supuesto, es una situación muy cercana al concepto de perpendicularidad. Más aun, yo podría pensar que se trata de una primera concreción del concepto de perpendicularidad, aquí pensado y comunicado mediante un juego de representaciones pictóricas. En una, donde existe la relación de perpendicularidad, tanto entre el sujeto y la tabla como entre el sujeto y la superficie terrestre; en la otra, donde existe la relación de perpendicularidad entre el sujeto y la superficie terrestre, pero no entre el sujeto y la tabla. Esto, a mi juicio, constituye una auténtica situación crucial, y, por tanto, una manifestación de una conceptualización dinámico-intuitiva.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Conviene aclarar: si bien como Maestro de aula realicé cuestionamientos sobre la eventualidad de cada situación, no tuve intención de intervenir en la producción de las representaciones, ni de señalar con cuál de ellas comunicaban algo en particular, ni de sugerir la complejidad de las mismas. De ahí que además de interesarme por los significados colectivos de estas representaciones, mi mayor interés ha estado del lado de los sentidos que para las niñas tiene cada uno de los elementos que componen el dibujo, en tanto este como signo es un constituyente fundamental del objeto que comienza a ser producido.

En adelante, fueron cada vez más protagónicas las representaciones gestuales, y en casi todas ellas se llegó también a la producción de artefactos que, como ya he señalado a la luz de autores como Marx y Radford, juegan junto a los signos lingüísticos un papel mediador y constitutivo en la producción del concepto. Por ejemplo, para el Encuentro VII, fomenté la reflexión en torno a la relación en sí misma, buscando enfatizar en ella y en el papel que juega en la formación del concepto de perpendicularidad; por ello propicié la producción de un cuerpo geométrico a escala de la representación tridimensional del sujeto y la tabla que había elaborado Leidys y Juliana. Así que en plastilina, y sobre un soporte de madera, les solicité a los estudiantes intentaran representar la misma idea sobre la que habían estado trabajando.

La importancia de esta tarea radicó en que mediante el modelo, en tanto artefacto que subsume las reflexiones anteriores de los estudiantes, especialmente respecto al paso de una conceptualización fenomenológica, atrapada en la estaticidad de las figuras y cuerpos geométricos, a una conceptualización dinámico-intuitiva en la que el movimiento permite dar cuenta de situaciones cruciales que resultan esenciales en la producción del concepto.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Una de estas situaciones tiene que ver con la necesidad de dar cuenta de la perpendicularidad como una relación entre dos elementos, bien sean líneas o planos; de donde se deriva la necesidad de un lenguaje que exprese tal relatividad. En el video identificado como «Clase 7 01», a partir del segundo 27, puede apreciarse a Rosa intentando dar cuenta de la situación representada en los cuerpos geométricos del sujeto y la tabla. En el video se aprecia cómo la niña, mostrando con sus manos la situación hipotética, dice: «Si usted está así, está inclinado con relación a la gravedad y a la tabla; pero si usted está así... usted estaría inclinado con relación al piso, pero no a la gravedad».



Figura 34. Encuentro VII – 2015-08-21

De este diálogo, lo que me interesa resaltar es el uso de la expresión *con relación a*, en la medida en que ella muestra tal transformación del lenguaje oral, el cual al principio de la actividad se limitaba a nombrar objetos y posiciones, pero ahora comenzaba a reconocer relaciones entre objetos y relaciones con respecto a sus posiciones, pasando también de unas expresiones en términos absolutos a unas expresiones relativas de acuerdo a cada situación.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En el video identificado como «Clase 7 02», hacia el segundo 24, se puede apreciar a Carlos Andrés explicando la situación representada en los cuerpos geométricos del sujeto y la tabla; mientras muestra las diferentes posiciones, el estudiante dice: «La explicación de este muñeco, es que está recto con respecto al plano; si estuviera así respecto al plano, si estuviera así se caería».



Figura 35. Encuentro VII – 2015-08-21

Durante toda su intervención, fue reiterativo en decir *con respecto a*, expresión que constituye otro buen ejemplo de estas representaciones del lenguaje oral que denotan avance en una objetivación, expresión con la que además se da cuenta de un aspecto tan importante para el concepto de perpendicularidad, como lo es reconocer que se trata de una relación, una relación particular, y que por tanto, la alusión a ese hecho amerita cierto cuidado a la hora de enunciarlo. Además, resalto también con ello la imbricación entre estas formas del lenguaje, especialmente la del lenguaje gestual, que de una conexión con las representaciones

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

pictóricas tridimensionales de una situación crucial ha pasado a una conexión con un cuerpo geométrico elaborado a escala, a partir de la representación pictórica.

Esta conexión es para mí una clara consecuencia de toda la actividad; es decir, las mismas tareas que estaban previstas para ser ejecutadas como parte de la actividad orientadora de enseñanza, fueron promoviendo uno y otro tipo de lenguaje a medida que avanzábamos hacia la abstracción de algunas determinaciones y entrábamos a estudiar unos y otros conceptos. Por ejemplo, el protagonismo que comenzó a ganar el lenguaje gestual a partir del Encuentro VI se explica desde la emergencia de la situación crucial en la que piensan Juliana y Leidys, que aunque no estaba inicialmente propuesta como una acción dentro de la actividad, como maestro la consideré oportuna para discutir el tema de la relatividad de las posiciones; y ya vimos cómo su discusión demandó todas las gesticulaciones, ademanes y posturas corporales, en conexión con un lenguaje oral que se tornó más cuidadoso y relativo.

Pero en ese momento, una nueva tarea, esta sí propuesta desde el comienzo, llegó a reforzar la necesidad de vincular el tema de las posturas corporales y la proxemia al análisis de la relación de perpendicularidad entre un sujeto y la superficie sobre la que está parado.

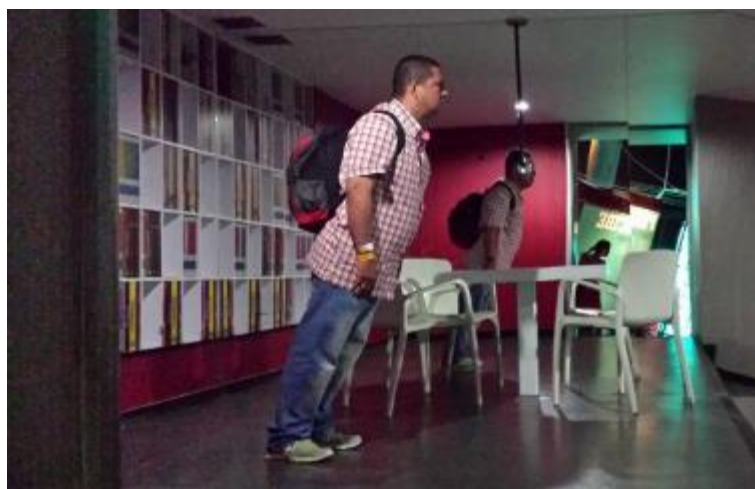


Figura 36. Encuentro VII – 2015-08-21

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

La tarea consistía en analizar y explicar la situación que se aprecia en una fotografía (Figura 36), en la que me encuentro posando como sujeto que está de pie, ligeramente inclinado hacia adelante y en medio de una habitación que es aparentemente normal. Esta discusión propició todo tipo de comentarios explicativos, desde los más ingenuos hasta algunos que consideraban la posibilidad de lograr la posición fotográfica mediante el uso de contrapeso en el bolso que se ve que llevo sobre mi espalda.

Lo cierto es que en este momento de la actividad dejaron traslucir lo que sabían de la fuerza de gravedad, seguramente aprendido en otras clases o contextos, y a partir de esto y de su propia intuición del fenómeno gravitatorio lo asociaron al concepto de perpendicularidad y a la experiencia de la tarea con el muñeco de plastilina.

Entiendo que ha sido en este orden como estuvieron intentado explicar la situación de mi posición en la fotografía; pero lo que más me interesa resaltar es cómo esto motivó la necesidad de experimentar con su propio cuerpo, impulso que encuentro natural y casi reflejo en los seres humanos: el mero hecho de encarnar una situación y proponerla en el cuerpo, parece obrar una suerte de movimiento verificadorio en los otros, que en el dial de la empatía, acceden a encarnar lo que Bajtín (1982: 61) llama «vivencia compartida [o] participada». En suma, la discusión en torno a la fotografía no solo posibilitó la puesta en escena de argumentos en palabras, relacionados con el concepto de perpendicularidad sino que también promovió otras expresiones en términos de actos y de gestos, pues quizá por simple imitación, los estudiantes se vieron movidos a intentar con sus propios cuerpos la adopción de esa posición.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Asumo que en una lectura de mi posición corporal, Carlos Andrés (Figura 37 y Figura 38), se motiva a asumir, como una vivencia compartida, la postura desde su propia corporalidad, pero al someterse a esta situación, no solo intenta comunicármelo a mí y a sus compañeros, motivándolos a su vez a compartir la vivencia, sino que está también intentando explicarse a sí mismo el fenómeno, o dicho de otra manera, está objetivando la relación de perpendicularidad como una relación, en este caso concreta, entre su propio cuerpo y la superficie de la tierra.



Figura 37. Encuentro VII – 2015-08-21



Figura 38. Encuentro VII – 2015-08-21

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En definitiva, en este momento de la actividad el lenguaje se ha tornado en su forma gestual, como una subsunción del objeto mismo, es decir, el gesto no solo comunica la manera en que estoy objetivando la relación de perpendicularidad, sino que como gesto de mi propio cuerpo, constituye un caso concreto del concepto.

### **5.2.3 El uso de un lenguaje concreto como constitutor de la síntesis de las múltiples determinaciones del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos**

Hasta aquí he referido solo dos situaciones en las que he encontrado los primeros casos de concreción del concepto de perpendicularidad. Aunque disperso, este concepto empieza a manifestarse mediante una serie de determinaciones abstractas, o a partir del acercamiento a otros conceptos que le están muy emparentados.

La primera de estas situaciones fue la representación inicial del sujeto y la tabla, con la que Juliana y Leidys analizaron la relación de perpendicularidad a partir de un caso concreto que apelaba al campo gravitatorio de la tierra. En la segunda, derivada de la primera, Carlos Andrés, motivado por una fotografía, ubica su corporalidad de tal forma que se establezca entre él y la superficie a sus pies una relación de perpendicularidad.

Hasta el surgimiento de estas dos situaciones, habíamos presenciado la transformación del lenguaje de los estudiantes conforme iba emergiendo el concepto de perpendicularidad. Un momento I, caracterizado por un lenguaje eminentemente nominal, cuando solo se señalaba a los objetos inmóviles como totalidad caótica, procedimiento en el



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

cual operaba una forma de conceptualización fenomenológica. Un momento II, en el que el lenguaje se tornó más pictórico, en la medida en que las representaciones plenas eran *volatilizadas* para dar paso a representaciones de situaciones cruciales o excepcionales, en las que la conceptualización comenzaba a realizarse a nivel de lo dinámico intuitivo. Y un momento III concerniente a las dos situaciones recién descritas, en las que las representaciones, en tanto determinaciones más abstractas y como producto del análisis de los estudiantes, comienzan a adquirir una forma más cercana al lenguaje gestual y corporal, tanto en términos de la corporalidad de los estudiantes como de la *corporalidad* de los artefactos elaborados en el proyecto de objetivación.

He querido hacer el mayor énfasis en que el sujeto y la tabla constituyen cuerpos geométricos presentados como materiales concreto-sensorios que, en cuanto tal, asumen el papel de artefactos que encarnan en sí mismos una interpretación del concepto de perpendicularidad; pero otra interpretación del concepto la constituye la inclinación a que se dispusieron los estudiantes con respecto a la superficie de la tierra. Ambas interpretaciones resultan de la conexión entre las representaciones que emergen respecto a esas condiciones cruciales.

Se trata de una situación en la que el trabajo puede llegar a confundirse con su objeto, puesto que producto de la actividad, de la labor, el trabajo se objetiva, es decir, se hace objeto, en este caso se hace concepto de perpendicularidad; pero al hacerse objeto, produce un objeto material, un artefacto, que ha sido elaborado en medio de la actividad y que la subsume. Esta relación objetivación-objeto es descrita por Marx:

En el proceso laboral, pues, la actividad del hombre, a través del medio de trabajo, efectúa una modificación del objeto de trabajo procurada

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

de antemano. El proceso se extingue en el producto. Su producto es un valor de uso, un material de la naturaleza adaptado a las necesidades humanas mediante un cambio de forma. El trabajo se ha amalgamado a su objeto. Se ha objetivado, y el objeto ha sido elaborado. Lo que en el trabajador aparecía bajo la forma de movimiento, aparece ahora en el producto como atributo en reposo, bajo la forma del ser. El obrero hiló, y su producto es un hilado (Marx, 2010: 219).

Cierro esta categoría mostrando cómo el lenguaje, en su forma más comprometida con lo gestual, lo corporal, incluyendo el artefacto como extensión del propio cuerpo y del pensamiento de los estudiantes (*territorio del artefacto*),<sup>31</sup> es constitutor del concepto de perpendicularidad en tanto «unidad en lo diverso»; y que por tanto, también lo es de esos diversos conceptos en que fueron fragmentadas las representaciones iniciales. En esta vía, y en comunión con la reciente cita de Marx, Radford también se refiere al lenguaje como constitutor del objeto conceptual:

La actividad humana produce el objeto. El signo y la forma en que este es usado (esto es, su sintaxis) —forma necesariamente cultural en tanto que inmersa en Sistemas Semióticos Culturales de significación— son considerados como constitutivos del objeto conceptual: estos objetivan al objeto (Radford, 2004b: 14).

En complemento de lo dicho, es preciso mostrar cómo hacia el final de la Actividad Orientadora de Enseñanza, más exactamente en el Encuentro VIII, cuando los estudiantes estuvieron trabajando con la aplicación Geogebra, empezó a ser más nítida la emergencia de los conceptos que venían siendo abstraídos.

La situación consistió, una vez más, en trabajar con la comparación entre dos situaciones que ellos mismos habían llegado a formular en sus producciones pasadas; la

---

<sup>31</sup> En el sentido expresado por Voloshinov, citado por Radford (2006: 6).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

primera, referente a la vivienda construida sobre un terreno plano; la segunda, una vivienda construida sobre un terreno inclinado.

Pero esta vez, gracias a la virtualidad del *software*, esta segunda situación (*crucial*) tenía la posibilidad de ser transformada en tiempo real; es decir, la versatilidad del *software* permitía dotar a la representación de una dinámica (movimiento) que hasta el momento los estudiantes habían pretendido mostrar mediante la comparación entre las dos representaciones pictóricas sobre papel.



Figura 39. Encuentro VIII – 2015-08-22



Figura 40. Encuentro VIII – 2015-08-22.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En la Figura 39 y en la Figura 40, respectivamente, se aprecia a Carlos Andrés y Leidys en el momento en que estuvieron frente a la situación crucial representada por el *software* Geogebra; durante esta tarea, ambos contaban con la posibilidad de manipular la inclinación del plano sobre el cual se encontraban asentadas las casas. Es a esto a lo que me refiero cuando digo que el uso del *software* como otro artefacto que subsume las formas del lenguaje pictórico y gestual, les permitió a estos estudiantes llevar al límite dicha situación crucial, y gracias a ese nivel de abstracción, comenzar a producir los conceptos como esas formas más simples a las que se refiere Marx: «tendría una representación caótica del conjunto y, precisando cada vez más, llegaría analíticamente a conceptos cada vez más simples» (1857: 21).

A partir de la tarea con el *software*, en la que los estudiantes se encontraron involucrados con los conceptos de alturas, bases, ángulos, pendientes, inclinaciones, y por supuesto, perpendicularidad, comenzó a ser más notoria la apropiación y referencia a los mismos en las producciones de las siguientes tareas. En algunas tareas de encuentros posteriores, se puede observar cómo los participantes en la experiencia, que luego discutirían conmigo la materialidad de estos conceptos en su relación con la actividad principal, pueden también, con mayor facilidad, cumplir con tareas que demandan analizar ciertas figuras geométricas y dar cuenta de su altura —entendida como relación de perpendicularidad con respecto a una de las bases.

En la Figura 41 aparece la producción de las tres alturas a partir del análisis de las figuras, en este caso de triángulos. En estas tareas también emerge claramente una concreción del concepto de perpendicularidad, entendido como la relación entre dos líneas, una de las

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

cuales condensa la respectiva base del triángulo, mientras la otra línea constituye el segmento que une al vértice opuesto con la mencionada base. Se alcanza a apreciar el cuidado con el que Juliana y Leidys (trabajo de la derecha) dibujan el ángulo recto al pie de las alturas, justo en el punto de intersección.

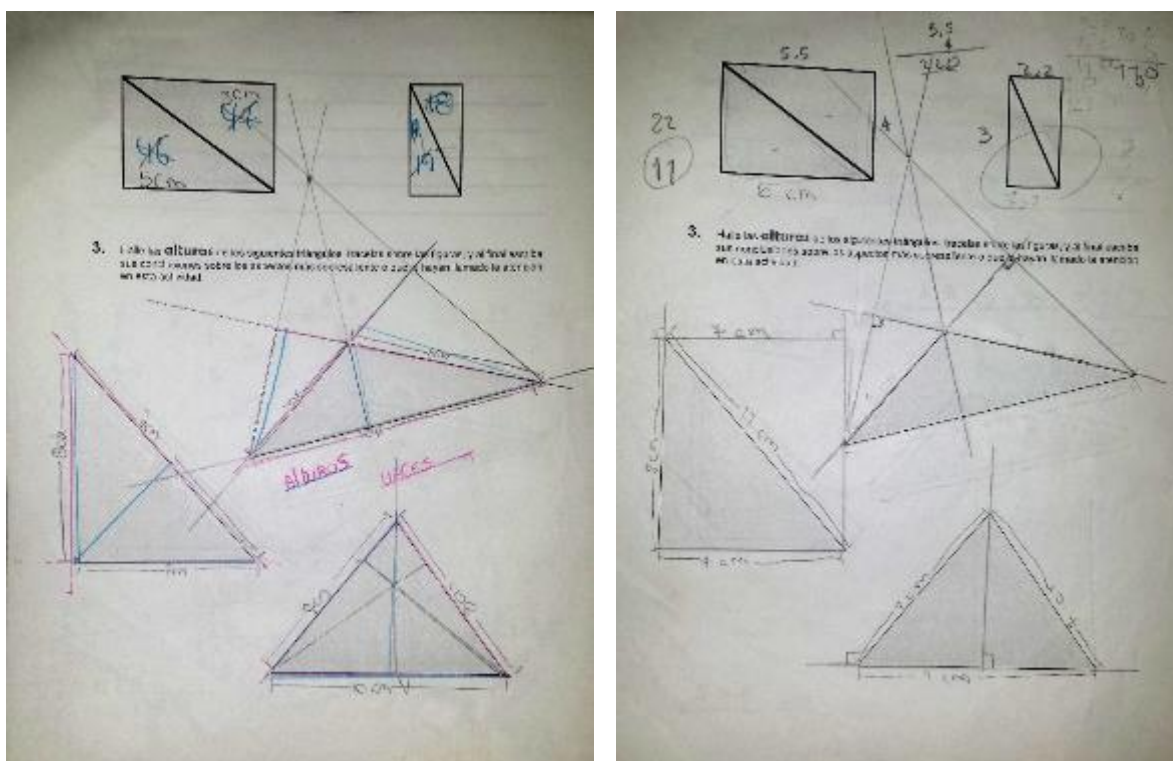


Figura 41. Encuentro X – 2015-09-11

Encuentro oportuno señalar algunas diferencias con el fin de cualificar la manera en que los estudiantes objetivan estos conceptos, lo que en coherencia con la pregunta de investigación, muestra que además del trabajo colectivo, hay una producción personal, es decir, una producción de sentidos personales a través de los cuales el sujeto conoce y objetiva el concepto. En este caso, algunos de los estudiantes que no hicieron parte de mi grupo de

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

estudio, alcanzaron mayor explicitud en este tipo de análisis; no obstante, aunque en este tipo de tarea un poco más abstracta los estudiantes del grupo de estudio no fueron tan explícitos, sí lo fueron en otras tareas que guardaban mayor conexión con la actividad principal y en la que la concretud se dio de forma más material.

Esto también resulta ser muy coherente con las razones que tuve para elegir el grupo de estudio, puesto que según el docente de grupo, se trataba de «algunos estudiantes que han presentado, con relación a sus compañeros, mayor resistencia a los procesos propuestos», lo cual, sin ser una descalificación, denota una particularidad en la personalidad que debe tenerse en cuenta a la hora de valorar sus producciones. De ahí que entre las razones para su elección destacara que «algunos de estos niños a raíz de las particularidades en su personalidad y en sus vivencias se han mostrado más distraídos y faltos de disciplina en cuanto a las tareas», y que «en repetidas ocasiones han presentado bajos resultados en las evaluaciones».

Una escuela que no está preparada epistemológicamente para entender estas diferencias, tiende a clasificarlas entre positivas y negativas. Desde mi postura epistemológica, no veo más que diferencias en las maneras como cada sujeto, en dialéctica con los otros, objetiva los conceptos, en este caso, los de altura, base, vértice y perpendicularidad.

Como puede apreciarse en la Figura 43, para Leidys ahora es mucho más intuitivo elaborar una representación de un triángulo y analizar el tema de sus alturas. Además, como en este caso la finalidad no recae solo en configurar un contenido más de la matemática escolar, sino que se trata de presentar un elemento relevante en el estudio de una problemática



Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

social que los afecta directamente, como es el tema de la construcción de viviendas en terrenos inclinados, estas reflexiones y análisis sustentan la producción de unos signos (lenguaje) y unos objetos en los que se subsume toda la práctica social. A propósito, podemos leer las notas con las que en el Encuentro XII (Figura 43), Leidys sustenta el análisis de un triángulo, cerrando dichas notas con la expresión: «tiene que aprender a utilizarlo muy bien para que aprendamos a analizar las casualidades de un desarrollo más bien y seamos unos buenos constructores en su carrera».



Figura 43. Encuentro IX – 2015-08-28

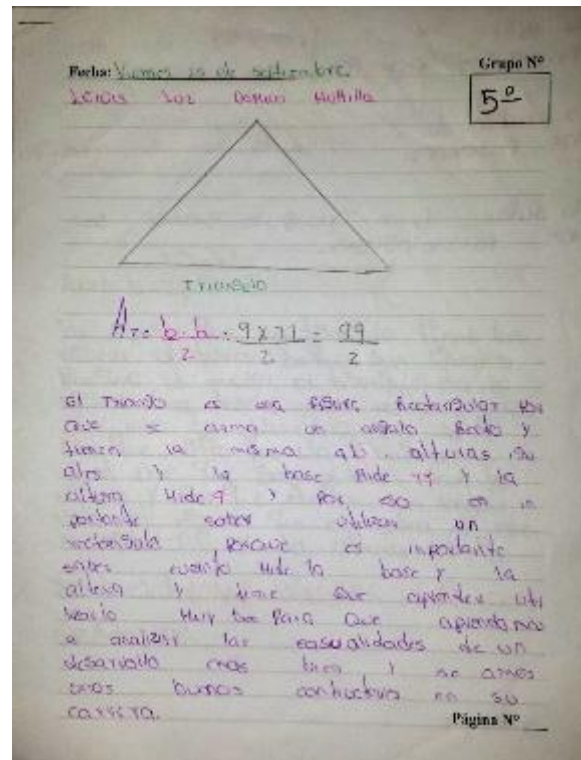


Figura 43. Encuentro XII – 2015-09-25

En esta tónica, en el Encuentro IX (Figura 44) Carlos Andrés, Leidys, Rosa y Juliana trabajaron sobre unas producciones que exigían un mayor rigor analítico, y en las cuales se



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

pueden reconocer con mayor facilidad cómo se movilizó el proceso de la objetivación, en cada uno de ellos, de los respectivos conceptos.



Figura 44. Encuentro IX – 2015-08-28

Más aun, con el fin de ahondar en las particularidades con las que cada estudiante va objetivando los conceptos en juego, quiero referirme específicamente a la elaboración de Rosa, quien en su producción del Encuentro IX, recurre a diferentes formas de lenguaje, que aunque representadas todas en el papel, consolidan una combinación de lenguaje escrito, pictórico, gestual y corporal, conjunción a partir de la cual muestra nivel de análisis mucho mayor y más precisión en los conceptos cercanos al concepto de perpendicularidad. Uno de los aspectos que merece ser resaltado en el análisis de Rosa tiene que ver con su lectura de la situación crucial.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

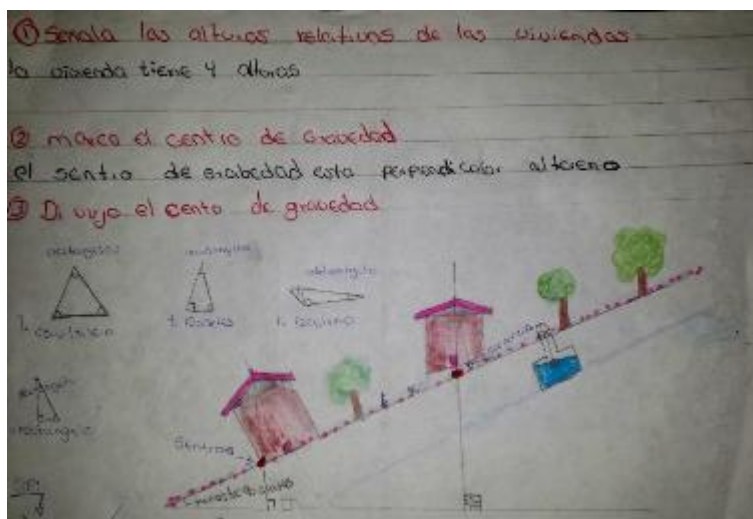


Figura 45. Encuentro IX – 2015-08-28

En el dibujo de Rosa (Figura 45), es bastante claro el nivel de abstracción (separación) que ella realiza del tema de la gravedad (eje de gravedad) como factor determinante. En su producción es posible identificar la situación en la que la vivienda estaría en alto riesgo de caerse, producto de un desacuerdo con las leyes físicas, esto es, cuando a pesar de confirmarse una perpendicularidad entre las paredes de la vivienda y el terreno, no se confirma la otra: entre las paredes de la vivienda y *una horizontal*<sup>32</sup> con respecto al eje de gravedad. Además, Rosa fue muy enfática a la hora de colorear de rojo el punto límite de la situación, correspondiente a la intercepción del eje de gravedad de la vivienda con la línea (plano) del terreno, estrictamente en el borde de la base de la vivienda. Esto muestra cómo, de manera indirecta, la niña está considerando el papel determinante que juega el ángulo de inclinación

<sup>32</sup> Identificaré con mayúscula a una de las posibles líneas imaginarias perpendiculares al eje de gravedad de la tierra.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

de la vivienda con respecto a la Horizontal, explicitando ese ángulo mediante una combinación de palabras y números: «Menos de 90 grados».

Aunque en el análisis de Rosa algunos apuntes me generaron confusión, como cuando en la Figura anterior dice que «el centro de gravedad está perpendicular al terreno», le doy mayor crédito a toda la producción pictórica y a su combinación con leyendas y números, puesto que la aparente inexactitud puede ser producto de pérdidas de referencia, es decir, que Rosa puede estar tomando como «terreno» la Horizontal y no el plano sobre el que están construidas las viviendas. Ahora, de tratarse de una confusión en el sentido con que la niña está usando los términos, ello más bien mostraría cómo se movilizó en ella el proceso de la objetivación del concepto, en este caso, la perpendicularidad. Vale la pena recordar que como proceso, la objetivación es el reconocimiento de lo que nos objeta, de lo que se nos opone, y, en consecuencia, debemos tener en cuenta que el conocimiento como algo completo es pura posibilidad a la cual se llegaría a través de sus diferentes instanciaciones. Al respecto, Radford afirma:

Para comprender esos tres aspectos interrelacionados del conocimiento y el conocer, debemos tener en cuenta que afirmar que el conocimiento es algo general que no puede identificarse con ninguna de sus instanciaciones o actualizaciones es afirmar que el conocimiento es pura posibilidad.

[...] Si concebimos el conocimiento como movimiento tal como lo sugerí anteriormente —o mejor como una secuencia de acciones codificadas histórica y culturalmente que se instancian continuamente en la práctica social— el conocimiento no puede ser algo que *se posee* o *se alcanza*. El conocimiento es más bien algo diferente de nosotros, algo que encontramos, que nos objetiva (es decir, se nos opone). La objetivación es precisamente el proceso de reconocimiento de lo que nos objetiva —sistemas de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, etc. (Radford, 2013c: 6, 11).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Según esto, existen otros elementos en la producción de Rosa que muestran cómo esa forma de lenguaje pictórico y gestual puede llegar a ser, a la hora de apreciar las instanciaciones o el nivel de objetivación, mucho más explícita que el mismo lenguaje escrito u oral, dado que en este nivel, el conocimiento, en tanto práctica social, está tan asido a la corporalidad del mundo y las personas que puede ser más fácil expresarlo con imágenes o gestos que con palabras u oraciones, formas estas de sabida predilección en la escuela para verificar que alguien sabe algo.

Retomo una vez más ciertos elementos del dibujo de Rosa que denotan la conciencia que en ese momento tenía de la relación de perpendicularidad.

Quiero resaltar en su producción la presencia de árboles y de lo que parecen ser siluetas humanas, que aunque no estaban en la representación elaborada en el *software*, la niña sí las consideró en la suya.

Nótese que la posición de los árboles plantados sobre el terreno inclinado, así como la postura corporal de las siluetas, todos estos elementos guardan una postura en perpendicularidad con la Horizontal y no con la línea del terreno, como es natural.

De manera análoga, a la hora de dibujar lo que parece ser un pozo (cisterna), la niña estuvo considerando la línea que marca el nivel del agua, también en relación con la Horizontal.

Es decir, en este dibujo hay un nivel de análisis tal que los conceptos que están subsumidos comienzan a constituir una de las instanciaciones, o sea una concreción del concepto de perpendicularidad como relación entre el eje de gravedad de los objetos y la Horizontal. En palabras de Marx:

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

[...] la totalidad concreta, como totalidad del pensamiento, como un concreto del pensamiento, es *in fact* un producto del pensamiento y de la concepción, pero de ninguna manera es un producto del concepto que piensa y se engendra a sí mismo, desde fuera y por encima de la intuición y de la representación, sino que, por el contrario, es un producto del trabajo de elaboración que transforma intuiciones o representaciones en conceptos (Marx, 1857: 22).

En consecuencia, como cada estudiante objetiva los conceptos de diferente manera, también el uso del lenguaje como constitutor de estos objetos que emergen presenta múltiples variaciones de uno a otro estudiante; sin embargo, algo que cualifica a este grupo de estudio es que, a la hora de objetivar el concepto de perpendicularidad, venía acudiendo a un lenguaje eminentemente gestual y corporal, que hace resaltar el papel de los artefactos en tanto recurso expresivo y extensivo del propio cuerpo de los estudiantes.

Así, durante el Encuentro XI, mientras Rosa manipulaba el Software Home 3D, en el que intenta elaborar las paredes de una vivienda, se le interroga por una posible manera de rectificar que dicha construcción no comporta una forma rectangular.

Como se puede apreciar hacia el segundo 30 del video llamado «Case 11 02», la niña titubea en la respuesta, y se nota cierta dificultad para recordar el término *ángulo recto* y articular una respuesta coherente; pero luego se observa que en un instante la niña echa mano de la escuadra para ayudarse, y recurriendo a una combinación de lenguaje oral, gestual y corporal (movimiento corporal) con apoyo en la herramienta, logra demostrar por qué la construcción no posee una forma rectangular.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado



Figura 46. Encuentro XI – 2015-09-17

A la luz de mi interpretación, la demostración de Rosa es una demostración indirecta, pero igualmente válida a cualquier otra demostración, puesto que en su caso, pese a la dificultad que presenta para plantear esa solución en un lenguaje oral y moderno —en oposición al lenguaje más cotidiano—, la niña recurre a un hecho hasta ahora evidente, y es que en tanto herramienta, la escuadra subsume un ángulo recto, y por tanto al comparar con el ángulo de la construcción, basta un movimiento de mano y la observación «queda espacio» para indicar que se trata de un ángulo mayor al ángulo recto, y que por lo tanto la figura no tiene forma rectangular.

Algo muy parecido se observa cuando Carlos Andrés interactúa con sus compañeros e intenta articular algunas soluciones a las necesidades que se le presentan en los últimos encuentros. En el video llamado «Case 12 01» se puede apreciar el papel que juegan las herramientas, en este caso el nivel de burbuja, en la tarea que Carlos y algunos compañeros intentan resolver. En el video se aprecia la mirada de Carlos fija en la burbuja; cuando se da



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

lo que está buscando, esto es, que la burbuja se encuentre en el centro del tubo, sentencia satisfecho: «recto».

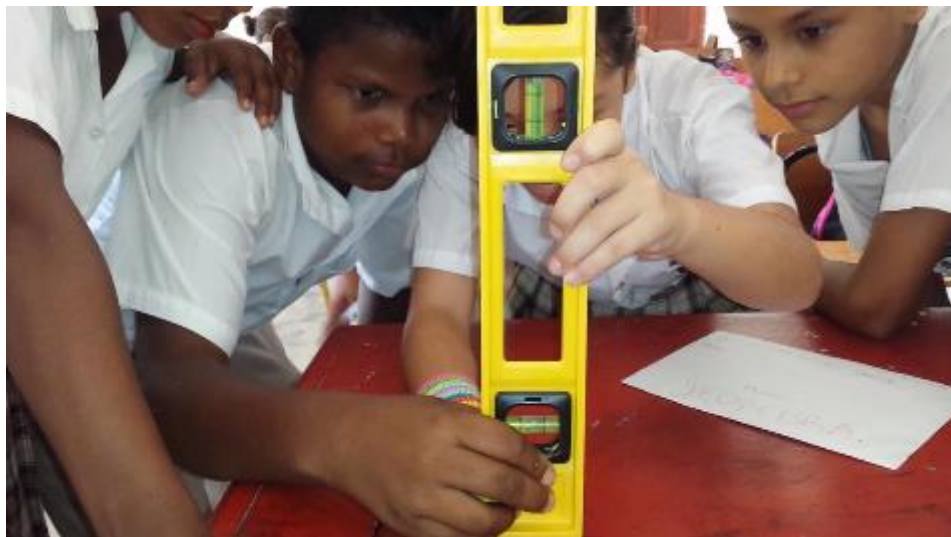


Figura 47. Encuentro XII – 2015-09-25

La explicación que encuentro para esto es que producto de la práctica los estudiantes han llegado a reconocer que los artefactos subsumen los conceptos, es decir, que de alguna manera *contienen en sí* las relaciones geométricas, a su vez movilizadas por ellos. Así, cuando se sienten limitados para expresar esas relaciones mediante el lenguaje oral o escrito, encuentran en el lenguaje gestual y corporal, particularmente en el uso de herramientas, una forma de expresar las relaciones, incluso como si solo con hacer alusión a las cualidades de la herramienta bastara para responder a los interrogantes sobre los conceptos en juego.

Es esta la forma prevalente de lenguaje durante la última tarea en la que se siembran los árboles, un lenguaje que como constitutor de la objetivación del concepto de perpendicularidad se ha transformado, desde una forma muy abstracta, donde se limitaba a



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

ser nominal, para convertirse en un producto que involucra múltiples formas del lenguaje oral, escrito y gestual, con particular acento en lo corporal, lo cual incluye el uso de la herramienta como extensión del propio cuerpo.

### **5.3 La construcción de vivienda como práctica social que posibilita la objetivación del concepto de perpendicularidad, en dialéctica con la transformación material emancipadora de los estudiantes**

En el marco de lo que Moura (2010) entiende por Actividad Orientadora de Enseñanza, decidí centrarme en una actividad principal<sup>33</sup> en la que resultara lo más claro posible el énfasis en el concepto de labor propuesto por Radford (2014a). La Teoría de la Actividad de Leontiev es un fundamento que tienen en común ambas posturas; sin embargo, es posible apreciar ciertas variaciones en las connotaciones y en los énfasis con los que dicha actividad es asumida. Por ejemplo, Moura (2010) citando a Leontiev, nos recuerda la importancia de «analizar el desenvolvimiento del sujeto por medio de la actividad principal», la cual puede estar concentrada en el juego, el estudio o el trabajo.

Por su parte, Radford (2014b), especialmente en sus últimas publicaciones, enfatiza en el concepto de actividad o labor como lo que está precisamente en el centro de su teorización sobre la enseñanza y el aprendizaje.<sup>34</sup>

En otros términos, la relación enseñanza-aprendizaje es entendida por Radford como «una labor conjunta que ocurre en un espacio socio-político al interior del cual tienen lugar

---

<sup>33</sup> Como ya indiqué, esta expresión la asumo en el sentido de Moura (2010), cuando distingue entre actividad principal y actividad predominante.

<sup>34</sup> Para Radford, «el término elaborar debe ser entendido en su sentido etimológico medieval, como *-labMrtus* (*de ex-labMrre*), es decir de labor o trabajo sensual conjunto» (2006a: 116).

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

el conociendo (*knowing*), y el volviéndose (*becoming*)» (2014a: 138), por lo cual asume un compromiso emancipador en donde ambos procesos se constituyen mutuamente conforme a las demandas de una labor.

A su vez, es preciso señalar que el concepto de labor (proceso laboral) se acentúa en aquellas actividades del hombre que tienen por finalidad la transformación de los objetos, es decir, la producción de un valor de uso; pero como ya he anotado, en dicha transformación no solo se produce el objeto, sino también el sujeto, en la medida en que en ese *metabolismo entre el hombre y la naturaleza*, el hombre ha tomado una parte de ella, y mediatamente, su *fuerza creadora del valor* se ha transformado en producto, de tal modo que *el trabajo se ha amalgamado a su objeto*. De ahí que Marx vea en la labor un «proceso específicamente humano» (Marx, 2010: 218-223).

Sin embargo, como en muchos casos no se asume explícitamente el proceso de enseñanza-aprendizaje como una labor, tampoco resulta muy claro que los estudiantes y el maestro sean asumidos como productores de conocimientos y herramientas; es decir, como suele suceder en una forma de relación laboral capitalista, en muchos casos en la relación de enseñanza-aprendizaje, se enajena al estudiante tanto como al maestro, de los modos de producción, de los medios y hasta de su propia actividad productora. Radford alude a esto:

Y como las organizaciones políticas liberales transponen o exportan sus relaciones y modos de producción capitalistas a la escuela (Bourdieu y Passeron, 1990), no es sorprendente que los modos de producción del saber en aula sean conceptualizados a través de los lentes utilitaristas del mercado y del negocio (Lave y McDermont, 2002: 5) (Radford, 2013b: 5).

En síntesis, más allá de un simple cambio en las rutinas del aula, en tanto actividad humana sensible, la construcción de vivienda representa un cambio en los modos de

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

producción y en las relaciones de producción del conocimiento matemático escolar; luego, bajo esta manera particular de concebir y movilizar la enseñanza y los aprendizajes en dialéctica, me propuse con esta categoría analizar cómo una práctica social como la construcción de vivienda, al ser asumida como labor conjunta, posibilita la producción del concepto de perpendicularidad, al tiempo que posibilita la producción de unos sujetos ética y políticamente emancipados.

### **5.3.1 La práctica cultural de la construcción de vivienda, en tanto labor conjunta, debe ser una actividad sensible**

Cuando hablo de ver emerger el objeto, de objetar o de ser objetado por este, desde luego que me posiciono en un discurso distante del idealismo, del racionalismo y del realismo. Esto en la medida en que para la teoría cultural de la objetivación, la actividad sensorial concreta no solo es indisoluble de la actividad cognitiva sino que, en dialéctica con la práctica social, proporciona los referentes simbólicos para dicha actividad cognitiva. Al respecto, señala Radford: «La lógica de las significaciones culturales se construye de manera dialéctica entre las formas de actividad que realizan los individuos concretos y la dimensión histórico-cultural de la práctica social» (2004b: 13).

De modo que ante la preocupación por la aparente dificultad que experimentan los estudiantes, para *ver* la relación de perpendicularidad en una figura geométrica y/o un cuerpo geométrico, me queda decir que no es de mi interés el problema de lo estrictamente perceptivo a nivel sensorial. Para efectos de este análisis, no me interesa pues abordar la relación de perpendicularidad como si solo se tratara de un objeto material o mental, y bastase con dar cuenta, al menos sensorialmente, de sus representaciones gráficas o simbólicas.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En este sentido, también la mencionada preocupación por el *movimiento de cabezas*<sup>35</sup> sobrepasa la pregunta por la predominancia de una u otra forma de discurso, fuera este figural o conceptual por ejemplo. En cambio, sí fue de mi resorte dar cuenta de la emergencia de este tipo de gestos en medio del proceso de objetivación del concepto como tal.

De lo anterior se desprende que para este caso la pregunta por la perpendicularidad no se haya agotado en una simple búsqueda de un objeto, aislado de otros, en desconexión con un contexto cultural y político, carente de motivos para ser buscado.

Aun cuando fue una búsqueda indirecta, al estar mediada por la práctica cultural de la construcción de viviendas, las actividades humanas salieron a relucir y a ocupar un espacio fundamental en las tareas de los estudiantes.

Un ejemplo de ello pudo ser apreciado en una tarea que consistió en detallar las características de las viviendas y en tratar de apreciar en estas las figuras y cuerpos geométricos conocidos, asimismo en resaltar los aspectos naturales y sociales que determinan las producciones materiales.

En esta tarea se registró la postura epistemológica y ontológica de Carlos Andrés. Su producción (Figura 48) muestra con cierta nitidez el papel que juega la reflexión en torno a una actividad humana como la producción de una vivienda, aun cuando sea de manera simbólica.

---

<sup>35</sup> Esta expresión la usé anteriormente para referirme al hecho de que los estudiantes suelen mostrar la tendencia a girar sus cabezas cuando intentan reconocer un objeto, que puesto ante ellos en el plano froto paralelo, parece rotado con respecto a su representación más regular.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En este caso, la importancia de la actividad humana no estuvo solo en el hecho de posibilitar la producción de algunos objetos geométricos, como los que Carlos explicitó en el diseño del techo, en las paredes y en la entrada de su casa, sino también en que movilizó el compromiso con la naturaleza y con la familia como forma básica de sociedad.



Figura 48. Encuentro I – 2015-05-28

La producción de Carlos Andrés sirve de ejemplo también para resaltar que en esta perspectiva teórica, el saber matemático, en diálogo con Radford (2013a), no es un mero dato desde su *lógica interna*, como tampoco el contexto en el que es producido se asume aquí como un mero *axioma periférico*, del cual puede prescindirse si se quiere.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Por el contrario, en dicha producción se puede constatar que el saber matemático no está siendo asumido como algo «depurado de sus relaciones y determinaciones externas», sino como un saber ancorado en un contexto social y cultural específico.

Esto es puesto de relieve cuando Carlos se permite toda una exotividad en su producción, pues su construcción (vivienda indígena) está rodeada por algunos elementos naturales como animales y plantas, y es muy clara la presencia y la prioridad que la figura humana ocupa en el dibujo.

Está claro que en este momento se trata solo de las primeras representaciones, que Carlos Andrés está partiendo del mundo real concreto en el cual, lo que él ha podido percibir, que no es en algún momento puro, libre de los referentes simbólicos de la cultura, es representado a través de estas figuras o imágenes, que a nivel de íconos, solo alcanzan a establecer semejanzas con lo que para él está ante sus ojos.

Las fotografías entregadas constituyeron para él algo así como aquellos mapas de Martín Alonso en su viaje a las Indias, que en un comentario de Radford (2004) aparecen como símbolos que deben ser contrastados con el paisaje que se coloca ante los ojos del colonizador.

En aquel caso, la realidad percibida resultaba determinada por lo simbólico, mientras que para Carlos Andrés, en este caso, lo simbólico (la fotografía) es percibido de acuerdo a lo que previamente, y también mediante la cultura, ha hecho parte de la realidad percibida por él.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Vemos que es un juego en el que el mundo material concreto, y el mundo pensado y mediado por la cultura, no pueden ser disgregados el uno del otro, y por tanto a este nivel toda representación es, en palabras de Marx, plena o caótica, esto es, «una representación caótica de un conjunto» (1857: 21) en la cual el pensamiento analítico aún no ha comenzado su producción, pero que en tanto representación, ya es producto de una actividad cognitiva, en el sentido de que comienza a objetivar el pensar como trabajo humano. Un autor como Dussel es enfático al señalar que esas primeras representaciones ya son producciones del pensamiento:

El punto de partida es lo real y lo concreto (*Realen und Konkreten*) (21,3; 21, 9-10), lo supuesto en toda investigación. De ese concreto real (el sistema colonial latinoamericano, por ejemplo) tengo una representación plena (*volle Vorstellung*) (21,40; 22,3), o, de otra manera, una representación caótica (21,14; 21,20), inicialmente confusa, que, de todas maneras, se sitúa ya en el mundo conceptuado (*begriffne Welt*) (22,16; 22,21) (Dussel, 1985: 49).

Con ello creo puntualizar por qué en el camino hacia la objetivación del concepto de perpendicularidad, las percepciones, en este caso el dibujo de la choza de Carlos Andrés, no son solo actividad sensorial (exclusiva de los sentidos), sino, como lo he venido subrayando, una auténtica actividad sensible.

Es decir, que antes de emprender el camino de ascensión hacia lo concreto, la propia práctica social posibilita ya una primera producción, en donde lo percibido no es mero estímulo sensorial, ni lo cognitivo mero acto intelectual, pues ese carácter de actividad sensible es un primer ejemplo de la dialéctica entre la naturaleza y el hombre, entre el mundo y su cabeza.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

No obstante, como el motivo que nos lleva a emprender el camino hacia una concreción explicada es el hecho de que estas primeras representaciones no sean exhaustivas, esas primeras representaciones deben ser analizadas, buscando detallar en ellas aquellos que sean rasgos accidentales de la representación, y aquellos que constituyan elementos esenciales de los objetos. Radford deja ver su preocupación al respecto:

Pero, ¿cómo concluir que representación y objeto no corresponden? Toda divergencia ofrece, sin duda, un índice. Pero, dado que toda representación no es exhaustiva, ¿cómo se puede asegurar que el índice es simplemente el efecto de la discrepancia entre accidentes y no entre esencias? (Radford, 2004: 3).

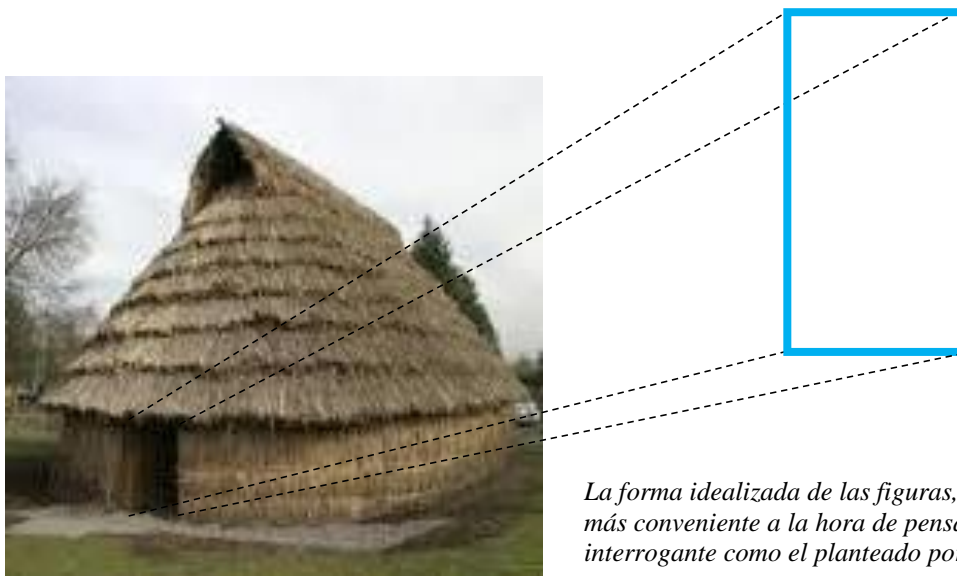
En este sentido, asumir el compromiso con una práctica social como actividad principal podría considerarse como una posibilidad para dispersarse en cuanto a la atención frente los objetos, pero en este caso, los registros y el análisis parecen indicar lo contrario.

Cuando los estudiantes se enfrentaron a las fotografías de algunos tipos de viviendas algo desconocidas para ellos, su percepción no se situó fría e imparcial ante las figuras, a pesar que al parecer ya habían sido trabajadas en la escuela; por el contrario, al tiempo que cada uno trató de explicarlas a la luz de los significados locales, también se dieron a la tarea de analizarlas, intentando superar algunas posibles contradicciones entre lo percibido y lo esperado (referente simbólico). Por ejemplo, a Carlos Andrés le llamó mucho la atención que la casa indígena a la que dedicó su atención solo presentaba la entrada a la vivienda, pero no se veía el soporte físico con que suele cubrirse dicha entrada (Figura 49). En sus palabras, «la casa no tenía puerta» y «solo la entrada era el marco» (minuto 18 del video 101).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En este episodio también resultó revelador cómo las problemáticas materiales y simbólicas se fueron constituyendo en aspectos fundamentales de los objetos matemáticos, pues como se trataba del conocimiento de una práctica cultural, el sujeto se fue apropiando de ciertas representaciones, cada vez más concretas. Es decir, en este caso la práctica cultural posibilitó un interrogante de nivel más analítico que si solo se tratara de identificar o reconocer una figura geométrica en su forma ideal, como regularmente es presentada en el tablero, en un libro o en el cuaderno.

En el interrogante de Carlos Andrés, sobre lo que entendemos por puerta, específicamente respecto a si es la entrada a la vivienda o lo que cubre a dicha entrada, se expone también una problemática en cuanto a la figura geométrica. Cabe resaltar que en la enseñanza de la geometría, y quizás en la geometría misma, existe cierto nivel de imprecisión respecto a si lo que llamamos figura geométrica es la línea que la delimita o la superficie circunscrita por dicha línea.



*La forma idealizada de las figuras, quizá no sea la más conveniente a la hora de pensar en un interrogante como el planteado por Carlos Andrés.*

Figura 49. Encuentro I – 2015-05-28

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Por tanto, si en esta forma de enseñanza se demanda y se permite cierta sensibilidad frente a la materialidad de la puerta y frente a las formas de nombrarla, con un significado y un sentido concreto, es evidente que no me encuentro ante una práctica escolar que privilegie un aprendizaje mecánico de los nombres o de las representaciones (signos), fundado en una epistemología idealista o realista.

En este sentido Radford sostiene:

En pocas palabras, en las diferentes escuelas de pensamiento que adoptan una perspectiva trascendental respecto a los objetos matemáticos (que sea el caso del idealismo o del realismo), los signos constituyen el puente de acceso a esos objetos conceptuales vistos como situados más allá de las peripecias de la acción humana y la cultura (Radford, 2004b: 14).

En cambio, se trata de la búsqueda del objeto matemático, que como en el caso de Carlos Andrés, al estar mediada por la práctica cultural, permite dotar a dichos objetos de significados y sentidos.

Siguiendo al mismo Radford (2004b: 11): «Para la teoría de la objetivación, el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura».

Entonces, más que dispersarse o distraerse con tareas ajenas, como podría pensar alguien que, situado en perspectiva trascendental, quiera insistir en presentar el objeto depurado, la práctica social conlleva a la elaboración de una primera forma de los objetos, la cual a su vez se constituye en un medio de producción para una segunda forma más analítica.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

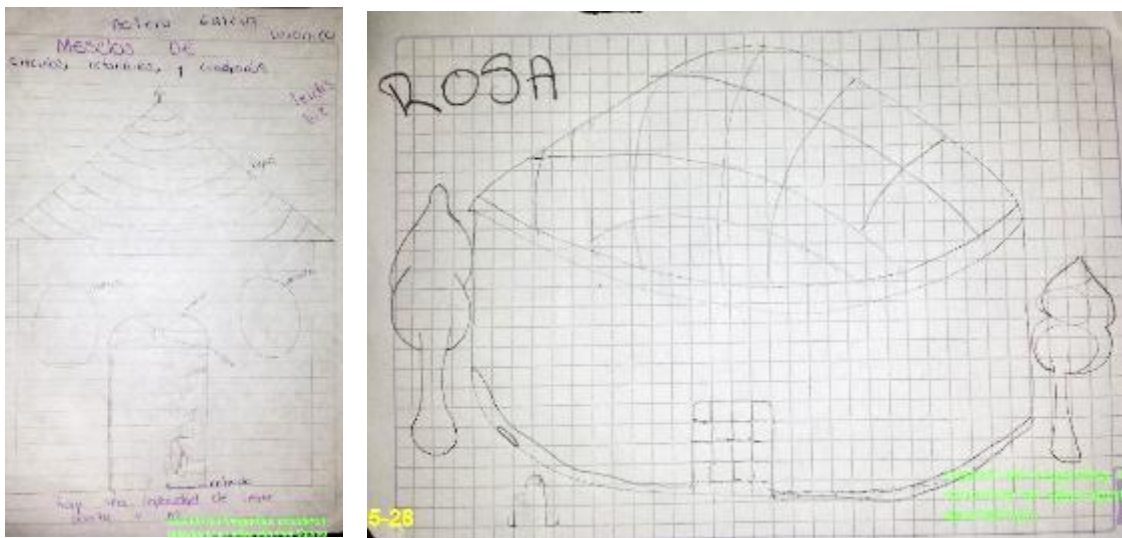


Figura 50. Encuentro I - 2015-05-28

Como se aprecia en las producciones de Juliana y Leidys (Figura 50), no fue necesario presentarlos en sus formas ideales, pues a estas alturas ya habían tenido experiencias con estos objetos en algunas tareas escolares. Esta vez, las figuras y cuerpos geométricos fueron reconocidos como partes constitutivas de los objetos materiales de las viviendas, es decir, sus representaciones esta vez pudieron emerger desde el centro de la práctica como producto de la actividad sensible de las estudiantes, ya no como formas *puras* sino como lo dice Leidys, como si la representación fuera «una mezcla de círculos, rectángulos y cuadrados».

Pero aquí surge la necesidad de explicitar la noción de actividad sensible, pues con ella he intentado referirme no solo a ese primer momento de producción de los objetos, sino hacerlo precisamente con cierta connotación crítica, ante la eventual enajenación a la que pueden ser sometidos los sujetos productores, en medio de una práctica social o labor alienante.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Con esto quiero advertir que no es la labor por la labor, porque incluso como práctica social, en tanto está sujeta a unos sistemas semióticos de significación cultural, ella misma no opera de manera autónoma.

Como dice Radford, «la labor puede ser fuente de realización personal y social, pero puede ser también alienante» (2014a: 138). Y es porque precisamente esos sistemas semióticos de significación cultural, además de validar y legitimar algunas formas de conocer, las naturaliza, es decir, las presenta como las únicas o las más viables de todas las formas de conocer y explicar la realidad.

Esta naturalización de ciertas formas de conocer es, a mi juicio, una forma de fetichizar el conocimiento que ha sido producto de una práctica social, tendencia muy propia de las matemáticas occidentalizadas, en particular de la geometría griega, que mediante la *naturalización de la acción*, como lo apunta Radford (2013a), terminó imponiendo sobre el estudio de las figuras y los cuerpos un discurso deductivo por encima de unos procedimientos basados en la visualización de las propiedades.

De esta manera, los productos de estas prácticas sociales manipuladas terminaron siendo exclusivos del dominio de cierta clase social, en este caso la aristocracia ateniense, en detrimento de otra, en la que se encontraban los responsables de la actividad puramente laboral, es decir mujeres, esclavos y campesinos. Respecto a esto, comenta Radford:

Es a este nivel que los sistemas semióticos de significación cultural vienen a recubrir el funcionamiento de las fuerzas productivas y de las relaciones de producción, es a este nivel que, a causa de dicho recubrimiento, entra la dimensión política y sus formas diferenciales de poder (Radford, 2013a: 66).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Con base en lo anterior, sostengo que si se hubiese tratado de una actividad didáctica en la que se solicitara el reconocimiento de las figuras y los cuerpos geométricos, o la explicación de sus relaciones solo a partir de sus representaciones ideales, la recreación que tendría lugar sería la de una práctica social cuyo referente simbólico cultural más conocido es la geometría occidentalizada.

De ello deviene también que sosteniendo una postura política intente dar cuenta de la conexión ética y moral entre apropiación y objetivación, puesto que si bien los conocimientos vistos como valores de cambio están sujetos a la circulación, en lo que quiero insistir es en no dejar de lado la actividad sensible que permite que sea reconocida histórica y materialmente la producción a manos de un sujeto, y su producción misma como sujeto.

Al respecto, Radford, citando a Marx, advierte:

Lo que hacemos con nuestras manos (el producto de nuestra labor), notaba Marx, hace ineluctablemente parte de un sistema de producción que en su enajenación inevitable, encierra todas las contradicciones que subtienden la relación entre el producto como mercancía y el trabajo del sujeto: como producto, el producto es el (y del) sujeto; como mercancía, el producto debe producir un efecto social (una institucionalización mercantilista) y «manifestarse en su inmediato opuesto, el trabajo general abstracto» (Marx, 1859: 22). Es por eso que ese producto ya no es nuestro, incluso antes de empezar a producirlo (Radford, 2013b: 3).

En otras palabras, si bien un triángulo, un cuadrado o la perpendicularidad misma, como valores de cambio de la sociedad occidentalizada griega pueden ser apropiados por los estudiantes, esto no significa que debamos pasar por alto el momento de la producción de estos objetos por parte de los estudiantes en medio de una actividad sensible, ni que estos otros objetos, aun cuando también estén llamados a circular como producto social, no sean reconocidos como producciones suyas.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

De modo que lo que intento resaltar es que en el marco de la práctica social se requiere una revisión de los diferentes momentos del proceso de objetivación, en especial para explicitar ese primer episodio en donde el sujeto, en contacto con la naturaleza, produce un primer valor de uso, pero que en tanto lo hace en el marco de unas relaciones sociales, está condenado a cederlo, a compartirlo o a perderlo dependiendo del tono de dichas relaciones de producción, y por tanto es necesario que en medio de la propia práctica social se le reconozca como productos suyos y se les permita usarlos como medios para futuras producciones.

Por eso he insistido en que la noción de práctica social, en tanto actividad sensible, es una apuesta por unas relaciones sociales de producción emancipadoras, dado que lo más frecuente —como incluso lo reconocen los discursos de la educación y la economía— es que ese valor de uso, al transformarse en valor de cambio acabe, por una parte, invisibilizando a su productor, y por otra, dando lugar a un mero objeto, enajenado de la labor, fetichizado, que será luego impuesto como mercancía para el consumo.

En este orden de ideas, las chozas dibujadas con sus propias manos, constituyeron para Juliana, Leidys y Carlos una primera producción, que en cuanto a valor de uso, respondieron a la necesidad de representar la realidad de esas viviendas, pero que posteriormente, en tanto representaciones plenas, debieron ser analizadas, es decir, transformadas en conceptos por la vía del pensamiento. Se ve pues el papel de las representaciones como medio para la producción para conceptos.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Ahora bien, recordemos que para Radford (1994), como ya fue comentado en la categoría anterior, a este nivel se trata de una conceptualización fenomenológica muy restringida a los aspectos figurativos y a las imágenes concretas. Al respecto, Fraser, como se citó en Dias-Moretti y Radford recuerda:

En una perspectiva histórica y cultural, apoyada en las producciones de Vygotsky (2000, 2002), Leontiev (1983, 2001), Moura (2007), Radford (2006, 2011, 2013a, 2013b), entre otros, los conceptos matemáticos son entendidos como producciones humanas que objetivan respuestas a las necesidades (Fraser, 1998) de los sujetos en un determinado lugar y tiempo histórico (Dias-Moretti y Radford, 2015: 4).

Negar esta parte de la producción, invisibilizarla, no reconocerla, no explicitarla, constituiría entonces una primera alienación de los sujetos, en la medida en que serían desarticulados de su producción, más cuando al ser expuestos ante productos ya elaborados (idealizados), lo que se conseguiría sería situarlos en calidad de simples consumidores de unos medios de producción.

Es en este sentido que bajo la forma de una Actividad Orientadora de Enseñanza, como maestro, he procurado resaltar el papel de la actividad sensible, pues de lo contrario, pese a existir una labor o una práctica social de por medio, ambos sujetos, estudiantes y maestro, corren el riesgo de ser enajenados, alienados como resultado de una forma particular de la escuela que reproduce las relaciones capitalistas, y que a consecuencia de ello, los estudiantes tendrían sobradas razones para manifestar dificultades, especialmente emocionales ante esas formas de enseñanza. Así lo detecta Radford:

Evidentemente, de la misma manera en que el trabajador y el empleador aparecen alienados en las formaciones capitalistas, el alumno que reproduce la escuela moldeada a las formas de interactuar y de hacer capitalistas no puede escapar del destino de la alienación. No debería pues

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

sorprendernos que los alumnos encuentren aburrida la escuela en general y las matemáticas en particular. ¿Cómo podría ser de otra forma? (Radford, 2014a: 145).

Como parece indicar este contraste entre la realidad escolar<sup>36</sup> y la teoría, ignorar la importancia de esta actividad sensible como momento fundamental de la práctica social, constituiría un auténtico acto de alienación, y en parte, podría ser la explicación para las aparentes dificultades que presentan los estudiantes a la hora de *ver* o *visualizar* las figuras geométricas, los objetos geométricos y sus relaciones.

En otras palabras, el resultado de una escuela que comercializa productos elaborados sin dar lugar al momento de la producción es un estudiante que al haber sido enajenado de un proceso en el que entran en contacto hombre y naturaleza, puede estar perceptiva y discursivamente limitado para reconocer el objeto, no ya como producto sino como mercancía a ser consumida, es un estudiante cuya voz y cuya conciencia está limitada. Radford lo dice de la siguiente manera: «El resultado es que el sujeto se torna en un sujeto alienado, es decir desposeído de voz y conciencia propia» (2013b: 6).

En lugar de una práctica social alienante, en este caso, en virtud de un cambio en las relaciones laborales, a los estudiantes se les permitió asumirse como productores de sus primeras representaciones.

---

<sup>36</sup> A propósito, Radford observa: «Desafortunadamente, lo que vemos, lo que constatamos, son aulas alienadas que producen sujetos alienados» (2014b: 37).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Resultó evidente que a la hora de encontrar en las fotografías de las viviendas algunas figuras geométricas familiares, los estudiantes se permitieron la elaboración de reflexiones e interrogantes, algo muy lejos de la repetición de definiciones o sentencias formales.

### **5.3.2 La práctica cultural de la construcción de vivienda, en tanto actividad sensible, es también una actividad emancipadora**

Reconocer la producción de los estudiantes a través de una actividad sensible es reconocer su voz y su conciencia. De ahí que a partir del Encuentro II, al continuar con la tarea de detallar las construcciones materiales elaboradas por diversas culturas, ahora a través de unos videos, pude evidenciar mayor participación y espontaneidad para tomar la palabra y expresar sus opiniones al respecto.

Por ejemplo, en medio de los análisis de las formas más relevantes o características de dichas viviendas, Carlos Andrés y Rosa se dispusieron a salir al frente para subrayar en el tablero los límites de las figuras geométricas que identificaron. En este momento, no tuve la menor duda de que las representaciones que los estudiantes estaban realizando estaban medidas por algunos elementos apropiados de clases anteriores, en las que su maestro de aula les había enseñado las formas tradicionales de esos objetos.

Pero también pude evidenciar que la actividad sensible a la que estuvieron dedicados los estudiantes en el Encuentro I, les permitió un abordaje mucho más libre de los objetos, en el cual estos entraban a hacer parte de sus primeras producciones, de un modo familiar, logrando unas representaciones no propiamente iguales a las que se derivan de la escuela occidental, donde dichos objetos son presentados de una forma trascendental.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En las fotografías (Figura 51) puede observarse cómo la preocupación de los niños no estuvo en la perfección de las figuras, sino en su reconocimiento como constituyentes de una totalidad concreta, en este caso las viviendas. Carlos, Rosa y otra estudiante corren al tablero y entablan algunos diálogos en torno al tipo de figura que reconocían, pues en este caso se trataba más de exponer sus producciones previas, es decir, lo que cada uno había representado anteriormente.

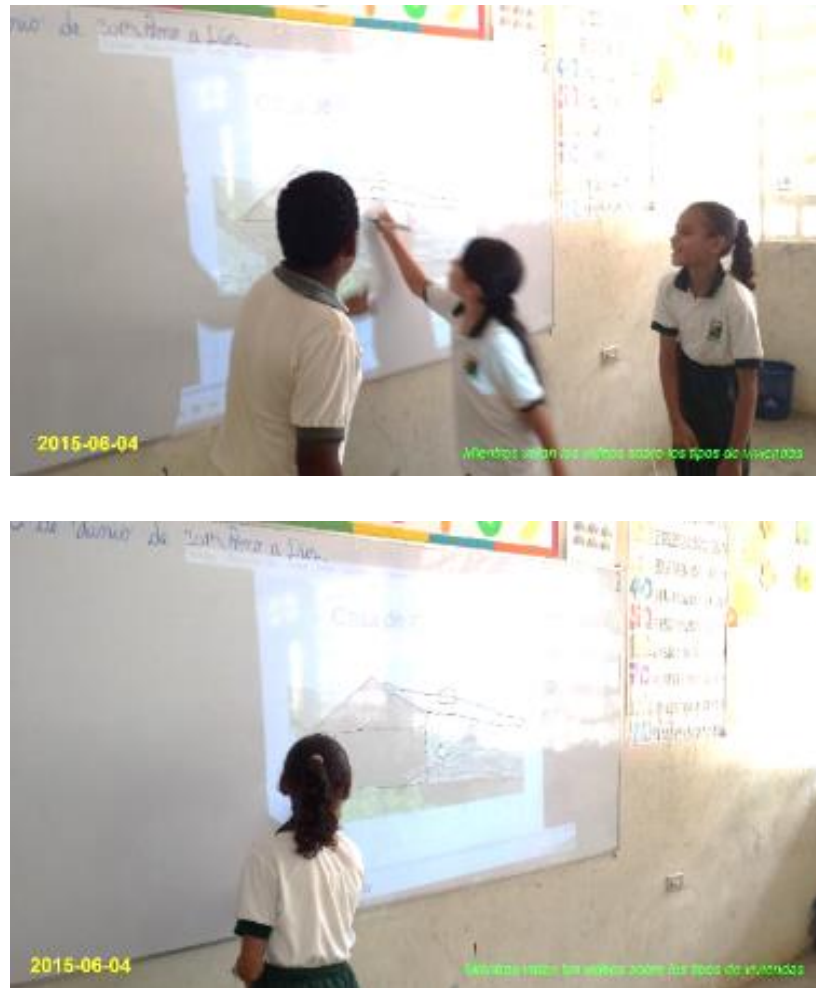


Figura 51. Encuentro II – 2015-06-04

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

La discusión estuvo fuertemente motivada por ciertas posturas éticas y políticas que habían asumido los estudiantes desde las primeras producciones, posturas que obedecían más a reflexiones durante el proceso que a lo que ostensivamente pudieran haber ofrecido las fotografías de las viviendas.

Este tipo de reflexiones se había propiciado en los encuentros previos, como en una tarea que propuse antes de finalizar el Encuentro II, que consistió en generar un espacio de discusión colectiva, en el que a manera de evaluación, los estudiantes y yo pudiéramos dialogar en torno a las anteriores acciones, pero también en torno a todas las condiciones sociales y políticas que habíamos ido discutiendo mientras observábamos las imágenes y los videos.

En medio de este diálogo, algunos estudiantes tomaron la iniciativa de formular interrogantes a sus compañeros, permitiéndose la elaboración de sus propios enunciados en torno a los objetos matemáticos que se estaban discutiendo. Iniciativa de especial relevancia, pues evidencia cómo la actividad orientadora de enseñanza propuesta, en su empeño por favorecer la apropiación de conocimientos matemáticos, en este caso en torno a las figuras geométricas, logró que los estudiantes, en tanto sujetos de aprendizaje, no estuvieran en calidad de meros receptores o consumidores de conocimiento. Al respecto, Moura sostiene:

Es necesario, por lo tanto, dar condiciones para que los aprendices se involucren en una dinámica de producción global de lo que se produce en la Tierra, para que no se sientan meros consumidores. [...] Combinar las razones para aprender matemáticas para el sujeto, con las necesidades del desarrollo social, debe ser el gran motivo de la existencia de la escuela (Moura, 2011: 8-9).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Por ejemplo, Rosa, quien en varias ocasiones intervino durante este encuentro, se mostró muy segura de su posición frente a los interrogantes de sus compañeros. En una ocasión, mientras uno de sus compañeros preguntó por el tema de las viviendas tipo castillos, Rosa señaló la conexión entre esta forma de vivienda y el poder social y económico de las personas que los habitaban.<sup>37</sup> Así mismo, cuando otra compañera preguntó, «¿Cuál de las viviendas que hemos visto tiene más figuras geométricas?», Rosa fue muy espontánea en su respuesta y señaló: «La favela porque hay muchas distintas formas... y entre esquina y esquina hay muchas formas» (Segundo 30, Video 2 01).



Figura 52. Encuentro II – 2015-06-04.

El comentario de Rosa pudo haber respondido a la impresión que le generó la imagen de tantas casas en tan poco espacio, como se aprecia en la Figura 52, donde producto del collage y la densidad de viviendas, lo que pudo percibir Rosa, según observo, fue una multitud de figuras geométricas. De ver tantas viviendas, unas encima de otras, en diferentes

---

<sup>37</sup> Este dato también puede ser corroborado hacia el minuto 3:32 del video de la entrevista que se le realizó a Rosa al final del trabajo.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

posiciones y de diversas formas la niña derivaba con toda naturalidad que a este tipo de vivienda estaba asociado un mayor número de figuras geométricas.

Reitero que la discusión de los estudiantes partía de un video en el que se caracterizan los tipos de vivienda, y en el cual se usaba el término *favela* para referirse al tipo de viviendas propias del asentamiento urbano que recibe este nombre, caracterizado por la alta densidad poblacional y las condiciones precarias o informales de las viviendas, algo diametralmente opuesto a lo que Rosa ya había comentado con respecto a las viviendas tipo castillo.

Yo no podría precisar lo que significa para Rosa la expresión *cantidad de figuras*, pero baso mi presunción en lo impactante que puede resultar a un espectador ver tantas viviendas juntas. Si bien al observar la fotografía anterior yo hubiera dicho que se imponen los rectángulos, Rosa por su parte reconoce «muchas formas», con lo cual creo que apunta a la complejidad que cifra esta forma habitacional en cuanto a las posiciones de las viviendas y a la cercanía entre ellas.

De aquí se desprende que, si para Rosa las formas, los materiales y los diseños de las viviendas tipo castillo sugerían unas condiciones de poder y dominio propias de cierta clase social, el tipo de vivienda que ahora le proporciona la actividad sensible, la casa de las favelas, le permitirá reconocer en esa complejidad de figuras rectangulares ciertas condiciones de hacinamiento y precariedad en la que viven familias de otra clase social.

En consecuencia, se hace evidente cómo la actividad sensible, al tiempo que posibilita la producción de los objetos, en dialéctica con la objetivación de la actividad misma (labor), posibilita también la producción de un sujeto que va emancipándose al hacerse consciente de las dimensiones éticas y políticas que circulan en torno a este tipo de conocimientos.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En síntesis, cuando examinamos una situación como la anterior asumida desde la noción de labor, lo que la constituye en una actividad emancipadora es su condición de ser, desde un primer momento, una actividad sensible, es decir, una actividad donde la relación entre el hombre y la naturaleza es reconocida como un escenario en el que los sujetos, en tanto productores, tienen también voz y conciencia propias. Candiotti se refiere a lo decisivo de ese primer momento en los siguientes términos:

Solo a partir de ese primer momento en que el conocimiento comprueba empíricamente el poder de la práctica y su propia dependencia respecto de ella —comprobación que Feuerbach no logró hacer—, solo entonces el conocimiento puede intentar convertirse a su vez en una guía consciente de esa práctica en un sentido revolucionario (Candiotti, 2014: 52).

A manera de resumen puedo decir que, cuando el proceso de enseñanza-aprendizaje es asumido como *labor conjunta*, la explicitación de una actividad sensible como punto de partida debe ancorarse por tanto en una *praxis cogitans*, es decir, en la posibilidad de un pensamiento o reflexión cultural que a su vez debe ser transformador y emancipador. Este enfoque traza un compromiso al que Candiotti, al resaltar el distanciamiento con el teoricismo que puede presentarse incluso al interior del materialismo, se refiere así:

Ya no se trata solo de superar el idealismo con el materialismo, sino de superar todo el teoricismo filosófico tradicional con un inédito materialismo centrado en la práctica, esto es, un pensamiento que se reconoce condicionado por la actividad humana exterior y que, en consecuencia, se pone al servicio de una transformación material emancipadora (Candiotti, 2014: 52).

Entonces no se trata de confundir estos espacios de *reflexión* con el mínimo hecho de ceder la palabra (el poder) al estudiante como un intento de liberarlo de la alienación, como se da en otros casos. En palabras de Radford, ello sería como pretender una «redistribución

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

de las riquezas [sin la necesaria] transformación del trabajo y de sus modos y relaciones de producción» (2013b: 6). Por eso la importancia y la relevancia de la actividad sensible viene dada en términos de la transformación de las relaciones laborales. Al respecto Radford también advierte: «Notemos que lo que abre una posibilidad hacia la desalienación no es que los modos de producción del saber hayan sido devueltos al alumno (recordemos la metáfora del bombón) y que el alumno construye dicho saber» (2013b: 9).

Así lo mostró el momento de producción colectiva al que hago referencia, en el que se trató de promover las condiciones para que los estudiantes, al hacer suya la problemática, encontraran en ella sus propios motivos, los cuales les condujeran a adoptar una posición ética y política tanto en su discurso como en la práctica misma de este. Es decir, en este momento de la actividad, el hecho de compartir las voces entre docente y estudiantes no fue visto como un *ceder la palabra*, sino algo más en el sentido de Radford: «como el trabajo conjunto sensible, material y conceptual de estudiantes y profesores encaminado a la creación de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas histórico-culturalmente constituidas» (2013b: 6).

### **5.3.3 La práctica cultural de la construcción de vivienda como posibilitadora de la producción de artefactos**

Hasta aquí he sido enfático en reconocer la importancia fundamental de explicitar el momento de la producción de las primeras representaciones, al cual me he referido como actividad sensible, para hacer hincapié en que no se trata de una práctica social o labor

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

alienante en la que a través de unas relaciones laborales atrapadas en las concepciones capitalistas se enajenan tanto medios como producto. He enfatizado también en que cuando se logra un cambio en esas relaciones laborales y se comienza por reconocer las primeras producciones como medios para las producciones posteriores, se posibilita la subjetivación, es decir, la producción de un sujeto cuyo conocimiento (mercancía) como valor de uso, sin ser exclusivamente individual, le posibilita una voz y una conciencia en medio de sus relaciones sociales.

Todo esto me parece necesario en tanto se trata de mostrar cómo una actividad desencadenadora (Moura et al., 2010) posibilita el reconocimiento de la esencia del concepto, y cómo una actividad principal posibilita seguir el movimiento histórico-lógico del concepto. Puesto que la actividad sensible, en tanto momento primero, posibilita la producción de las primeras representaciones, aun caóticas o plenas, resulta pues fundamental para mostrar la conexión entre lo filogenético y lo ontogenético.

Es decir, el estudio de la actividad sensible me permite mostrar cómo desde el principio de la actividad orientadora el sujeto produce a nivel ontogenético, algo que subsume su trabajo, pero que no le pertenece como propiedad privada sino como trabajo suyo objetivado. A la vez, en virtud de la práctica social, a nivel filogenético este trabajo subsume las determinaciones de los sistemas semióticos de significación cultural; por tanto, sus reflexiones son más una *praxis cogitan* dado que el individuo no *cogita* solo.

Dicho esto, y una vez superado el primer momento, me dedico ahora a mostrar cómo esas primeras representaciones plenas, en relación con la propia producción de artefactos y

### Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

el uso de otros no producidos por ellos, serán constituyentes fundamentales en la producción de determinaciones abstractas.

Durante el Encuentro III, el compromiso estuvo dado en términos de analizar unos cuerpos geométricos, de tal forma que los estudiantes pudieran relacionar este análisis con sus anteriores trabajos. Las producciones obtenidas en esta instancia evidencian la sensibilidad hacia la actividad principal, puesto que en ningún momento les solicité que se dedicaran a la construcción de modelos de vivienda sino que, en la composición de dichos cuerpos, intentaran reconocer las figuras que ya habían reconocido en las viviendas sobre las que habían trabajado. No obstante, como puede apreciarse en las fotografías (Figura 53), casi todos los grupos se inclinaron a la elaboración de modelos de viviendas.



Figura 53. Encuentro III – 2015-06-06

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

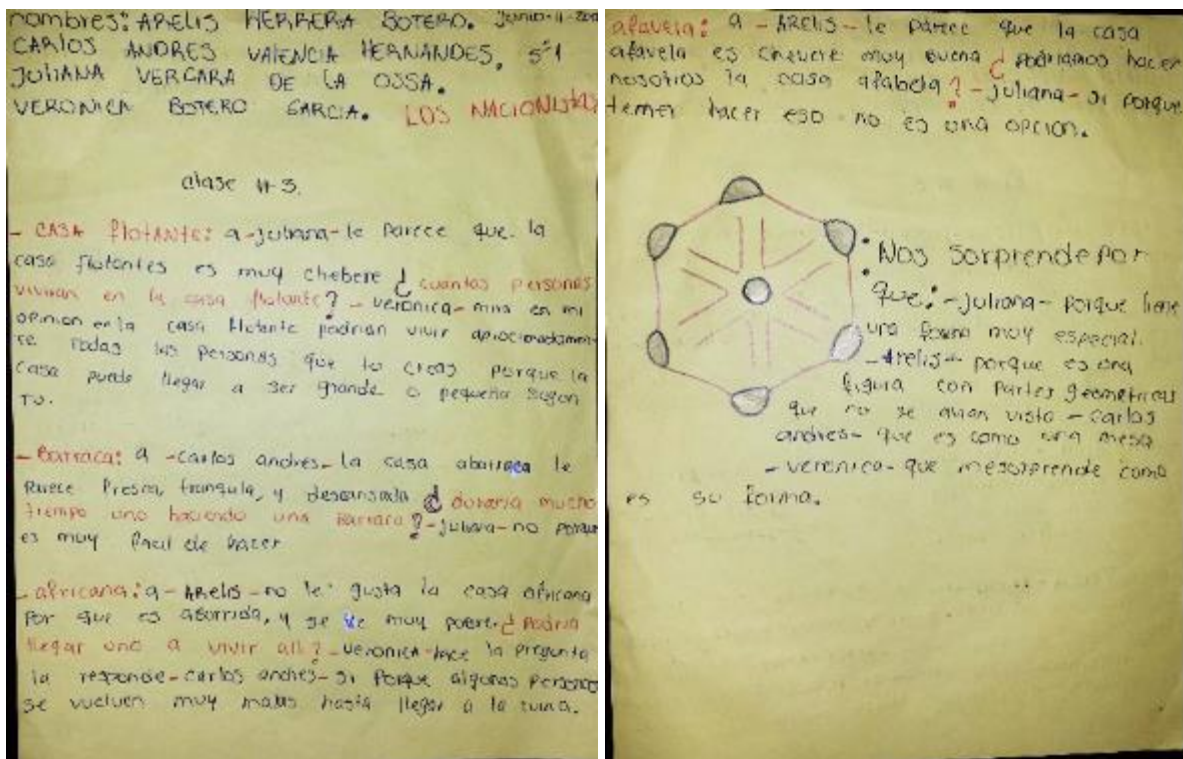
Adicionalmente, otro hecho que interpreto desde la emancipación de los sujetos tiene que ver con que ellos mismos quisieran apostarle a diseños innovadores. Bien pudieron estar tentados a repetir los modelos de las viviendas que habían representado mediante las imágenes durante el Encuentro I, o las viviendas que alcanzaron a apreciar en los videos del Encuentro II, pero se dieron a la tarea de probar los suyos propios —aunque lo más probable es que hayan partido de los análisis anteriores de las viviendas—, pues como mostraré enseguida, en los textos consignados en las producciones se habla de cierto tipo de viviendas que guardan relación con los modelos que aparecen en las imágenes (Figura 53).

Sin embargo, esto sería muy compatible con lo que esperaba, y como observa Kopnin (como se citó en Dias-Moretti y Radford 2005: 6), en esa «correlación entre el pensamiento individual y social, en su desarrollo intelectual individual el hombre repite en forma resumida toda la historia del pensamiento humano»; aunque en este proceso no todo está llamado a ser repetición, y de serlo, en acuerdo con estos autores considero *repetir* es más un *pensarlo* inherente al proceso de realización. Así, considero que en este juego, entendido en el sentido asumido por Moura (2010), es decir, como la posibilidad de una *historia virtual* del concepto, lo que se conserva son las necesidades que justifican las acciones en medio de la práctica social, pero es apenas normal que la manera en que estas acciones se desenvuelvan, dependa de los sujetos y de la manera como ellos interpreten su realidad. Así que por el momento, luego de las primeras representaciones pictóricas, los estudiantes prefirieron innovar un poco en la construcción de modelos, pero es fácil detectar que algunas necesidades que habían sido identificadas en el análisis de las fotografías, continúan presentes en sus diálogos. Por ejemplo, ya había mencionado el impacto que generó el análisis de viviendas de las favelas:

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

sucedió algo parecido con los palafitos y las chozas. En las producciones aparecen diálogos críticos que me permiten concluir que se vieron reflejados en este tipo de viviendas.

Es preciso recordar que buena parte de los estudiantes provienen de localidades del municipio con problemáticas de inundaciones, hacinamientos y viviendas irregulares. De hecho, el sector en el que se encuentra el colegio hace parte de una zona que sufre fuertes inundaciones y en la cual muchas de las casas deben ser construidas sobre una estructura que permita soportar la presión de las aguas. Además, uno de los barrios contiguos al sector de la escuela fue formado a partir de un proceso de invasión de tierras, y el poblamiento se dio en condiciones de subnormalidad. De lo anterior se pueden deducir las razones para que las reflexiones de los estudiantes se concentraran en cierto tipo de vivienda, más aún cuando la actividad sensible les permitió apropiarse de la problemática sin que nadie se los impusiera.



nombres: APHELIS HERRERA BOSTERO. Junio-11-2015  
CARLOS ANDRES VALENCIA HERNANDEZ, S<sup>ta</sup>  
JULIANA VERGARA DE LA OSSA.  
VERONICA BOSTERO GARCIA. LOS MACIONISTAS

clase 4-3.

- Casa flotante: a-Juliana-le parece que la casa flotante es muy chévere ¿cuántas personas viven en la casa flotante? - Verónica- más en mi opinión en la casa flotante podrían vivir aproximadamente todas las personas que lo creas porque la casa puede llegar a ser grande o pequeña según tu.

- Extranea: a-Carlos andres- la casa abarrea le parece Presa, triángulo, y desensada ¿dotaría mucho tiempo uno haciendo una barrera? - Juliana- no para es muy fácil de hacer.

- Africana: a-Arelis- no le gusta la casa africana por que es aborrida, y se ve muy pobre. ¿Podría llegar uno a vivir allí? - Verónica- hace la pregunta la responde- Carlos andres- si porque algunas personas se vuelven muy malos hasta llegar a la muerte.

a-favela: a-Arelis- le parece que la casa afavela es chévere muy buena ¿podríamos hacer nosotros la casa afavela? - Juliana- si porque tener hacer eso no es una opción.

Nos sorprende por que: - Juliana- porque tiene una forma muy especial.  
- Arelis- porque es una figura con partes geométricas que no se dan vista - Carlos andres- que es como una mesa  
- Verónica- que me sorprende como es su forma.

Figura 54. Encuentro III – 2015-06-11.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En la *Figura 54* podemos apreciar que el grupo de Juliana y Carlos se detuvo a trabajar sobre la casa flotante, la barraca, la casa africana y la favela.

Como lo podemos apreciar en la *Figura 55*, el grupo de Leydis trabajó sobre la barraca, la casa flotante, la casa de alta montaña y los castillos. En general, buena parte de los grupos se inclinó por estos tipos de vivienda. A mi juicio, el interés por los castillos y la barraca responde precisamente a la necesidad de reflexionar frente a una realidad muy distinta a la vivida, en el sentido de ostentar cierta postura antagónica en términos de opulencia y poder; puesto que no pasó lo mismo con muchos otros tipos de vivienda observados, con los que tal vez no se sintieron cuestionados en su realidad misma.

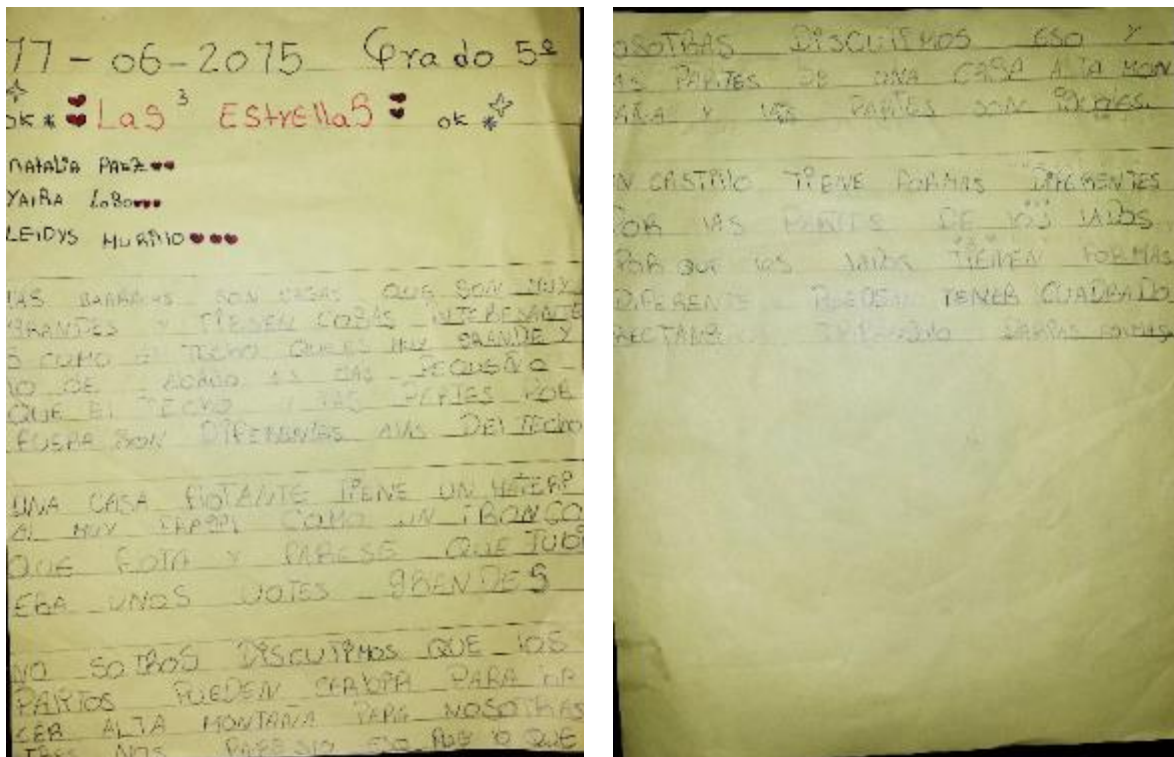


Figura 55. Encuentro III – 2015-06-11.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Entre los diálogos que quiero resaltar para apoyar las ideas anteriores, está una discusión que se generó en el grupo de Juliana y Carlos, cuando analizaban la casa africana, que como puede apreciarse en la Figura 4, guarda mucho parecido con la Choza indígena, muy frecuente en nuestro medio. En la producción del mencionado grupo (*Figura 54*) se lee la apreciación de Arelis al respecto: no le gusta la casa africana «porque es aburrida y se muy pobre»; frente a lo cual se pregunta Verónica: «¿Podría uno llegar a vivir allí?», y Carlos Andrés responde: «Sí porque algunas personas se vuelven muy malas hasta llegar a la ruina».

En este diálogo se aprecia que parte de la discusión está impregnada de un grueso análisis social, político y moral; es decir, los estudiantes, no solo se detuvieron a estudiar los aspectos relacionados con las formas y la materialidad de las viviendas sino que, como he venido señalando, las reflexiones estuvieron también en el orden de lo personal.

Por ejemplo, Carlos, más que fijarse en las particularidades físicas de la casa africana, relacionó esta vivienda con una condición de confinamiento social, en lo que intuyo tuvo mucho que ver su propia percepción respecto a las viviendas locales y sus moradores, que guardan mucho parecido con aquellas y sus posibles moradores. Caso contrario cuando Carlos se refiere a la barraca: se detiene a apreciar algunos aspectos físicos como forma, diseño y tipo de materiales, aunque también le merece ciertas apreciaciones sobre lo que imagina es la habitabilidad en ese lugar: le parece «fresca, tranquila y descansada» (*Figura 54*).

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En resumen, durante el Encuentro III los estudiantes se concentraron en la producción de los primeros modelos de vivienda, usando para ello algunos cuerpos geométricos. Aunque el factor común de todos los modelos fuera la innovación, las propuestas de diseño no perdían de vista las necesidades que cualquier tipo de vivienda intenta resolver. Esta atención a las necesidades se hizo presente, por ejemplo, en la representación recurrente de palafitos, de cierto parecido en su funcionalidad a un tipo de casa frecuente en el sector (*Figura 56*).

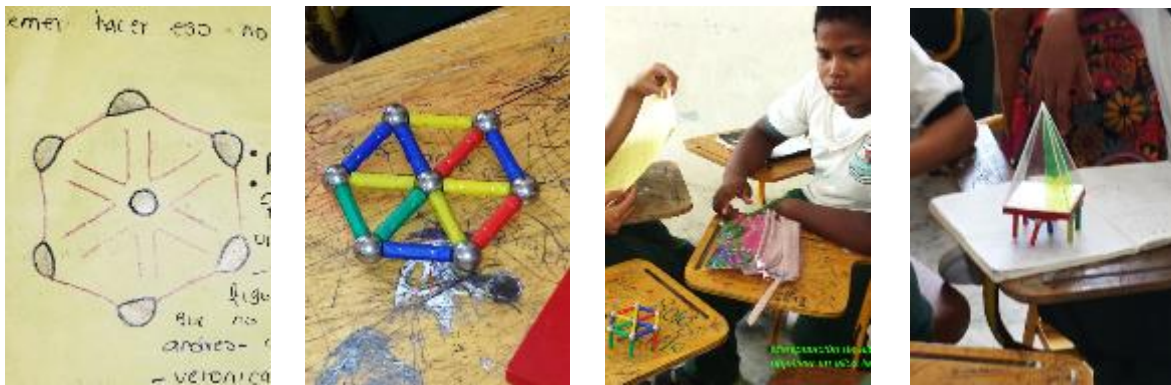


Figura 56. Encuentro III – 2015-06-11.



Figura 57. Encuentro VI – 2015-08-10.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Es evidente entonces cómo a partir de la producción de este tipo de herramientas, los estudiantes comienzan a descomponer esas primeras representaciones, no solo en el aspecto estrictamente geométrico, sino en lo estético y ético. Ya desde aquí, con la elaboración de estos artefactos, surgen las preguntas por la posibilidad de encontrar casas reales construidas bajo las variaciones que ellos impusieron a dichos modelos; es decir, los artefactos, en tanto segundas producciones, comenzaron a cumplir con ese segundo momento de la conceptualización nombrado por Radford (1994) dinámico-intuitivo, en el que a partir de situaciones cruciales el sujeto lleva el concepto al límite.

Desde este momento de la actividad orientadora de enseñanza, el uso de herramientas se vislumbra fundamental en el proceso de objetivación del concepto, puesto que tras la pregunta por las formas en las viviendas, esos artefactos o modelos producidos por los estudiantes son la posibilidad que tienen estos para *repetir o pensar nuevamente* lo que pensó la humanidad. La elaboración de representaciones pictóricas y de modelos tridimensionales, elaborados a partir de materiales suministrados por la naturaleza, fueron algunas de las primeras prácticas que la humanidad empleó en torno a la tarea de hacerse viviendas. En *La historia del hombre contada por sus casas*, José Martí (2003) nos recuerda lo que ha significado para la humanidad la elaboración de estas primeras representaciones:

[...] entonces es cuando ya se ven casas de piedra y de madera, con patios y cuartos, imitando siempre los casucos de rocas puestas unas sobre otras sin mezcla ninguna, o las tiendas de pieles de sus desiertos y llanos: lo que sí se ve es que desde que vino al mundo le gustó al hombre copiar en dibujo las cosas que veía, porque hasta las cavernas más oscuras donde habitaron las familias salvajes están llenas de figuras talladas o pintadas en la roca, y por los montes y las orillas de los ríos se ven manos, y signos raros, y pinturas de animales, que ya estaban allí desde hacía muchos siglos cuando vinieron a vivir en el país los pueblos de ahora. (p. 4)

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En esa condición de *animal que fabrica herramientas*, el hombre, al apropiarse de los materiales que le provee la naturaleza, se da a la tarea de producir un valor de uso en la concreción de una herramienta o de un artefacto, y estas mismas herramientas serán sus medios para la producción de nuevos valores. Es por eso que cuando queremos recorrer ese camino transitado por la humanidad, son sus propias herramientas un medio para conocer ese trasegar. Marx (trad. en 2010) destaca la importancia de esta forma de genealogía:

El uso y la creación de medios de trabajo, aunque en germen se presenten en ciertas especies animales, caracterizan el proceso específicamente humano de trabajo, y de ahí que Franklin defina al hombre como *a toolmaking animal*, un animal que fabrica herramientas. La misma importancia que posee la estructura de los huesos fósiles para conocer la organización de especies animales extinguidas, la tienen los vestigios de medios de trabajo para formarse un juicio acerca de formaciones económico-sociales perimidas. (p. 218)

Así mismo, una interrogación a los modelos y a los instrumentos producidos en el aula puede ayudarnos a entender la manera como los estudiantes están pensando la construcción de vivienda. Este hecho quedó evidenciado cuando en medio de la clase (Encuentro III) uno de los grupos (*El grupo de las reinas*),<sup>38</sup> que había quebrado accidentalmente uno de los sólidos analizados, tuvo la habilidad de utilizar las partes del sólido para generar un modelo a partir de estas. Mientras producían dicho artefacto, una de las estudiantes se me acercó y me interrogó sobre la posibilidad de encontrar en la vida real alguna vivienda con dicha forma. Esta primera inquietud venía acompañada de otra pregunta: ¿Por qué todas las casas que ellos conocían tenían forma rectangular —o más precisamente, forma de paralelepípedo?

---

<sup>38</sup> Cada uno de los grupos, desde su conformación, se comprometió a mantener la estabilidad de sus miembros y a elegir un nombre que los identificara.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Inicialmente mi respuesta se inclinó hacia nuestra manera de ver el mundo, es decir, quise señalarle que las razones para que algunos diseños fueran más comunes, dependían de nuestras necesidades y de nuestras ideas de belleza y bienestar. Justo cuando respondía esto, recordé que conocía un lugar en el que la necesidad de mostrarlo atractivo había hecho concebir a sus fundadores diseños en forma de domos. Opté pues por modificar un poco la actividad orientadora de enseñanza e incluir un encuentro adicional, que consistiría en una visita a ese lugar. Aunque esta visita se realizó hacia el Encuentro XIII, la encuentro muy pertinente para el análisis que estoy realizando, pues se trata en últimas de establecer una conexión entre un encuentro y otro, sin importar el tiempo transcurrido, pues lo que intento mostrar es la conexión entre la producción de artefactos y nuevas (otras) producciones, como parte esencial de nuestra historia como seres humanos.

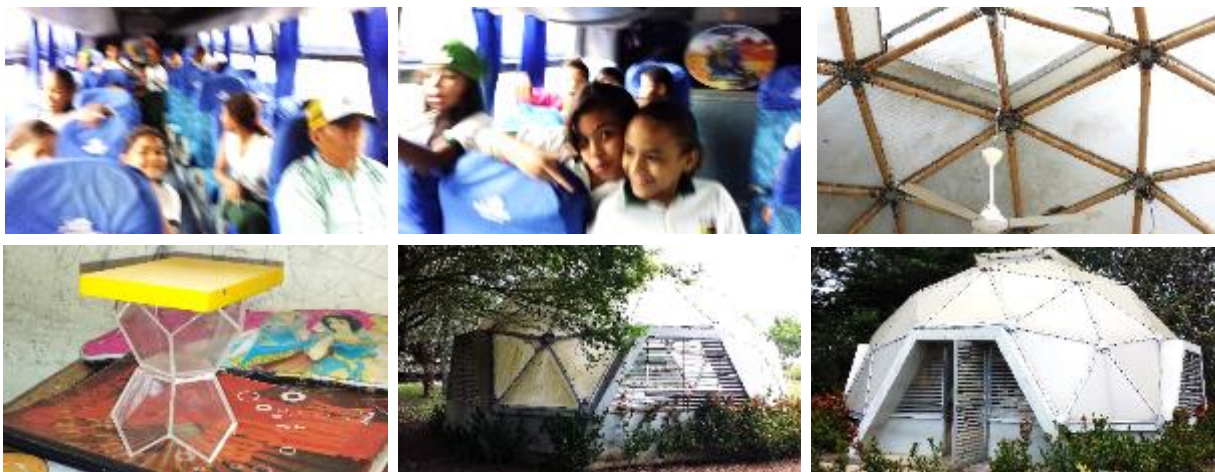


Figura 58. Encuentro XIII – 2015-06-11.

El trabajo con sólidos para diseñar modelos de vivienda se volvió una oportunidad para adentrar a los estudiantes en el análisis de las formas geométricas, especialmente de aquellas en las que la relación de perpendicularidad es parte constitutiva de las figuras



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

geométricas y de los cuerpos geométricos. El estudio de los triángulos rectángulos, de las alturas de un triángulo o un rectángulo, el rectángulo y el cuadrado mismo son los objetos hasta ahora apropiados y movilizados paulatinamente.

Reitero que antes de comenzar con mi trabajo de campo los estudiantes habían trabajado con el maestro de aula varias clases sobre figuras geométricas. Con seguridad, pues lo pude apreciar en el aula, estos conocimientos estuvieron presentes en las discusiones que se generaron a partir de la actividad orientadora. Resalto especialmente que esas figuras aparecen ahora transformadas por la actividad sensible, por la *praxis cogitan* de los estudiantes; luego, como objetos han vuelto a ser producidos, ahora bajo una concepción ontológica y epistemológica en la que lo antropológico juega también un papel fundamental.

De esta manera, al hablar ahora de las caras, los vértices y las aristas de un cuerpo, no se trata simplemente de remitir a los estudiantes a una definición formal. Esto porque, en parte, ahora está de por medio un instrumento, el sólido que funge de modelo en lo filogenético, pero además porque ese sólido, en tanto artefacto, ya es una producción, en este caso convertida en medio de producción, y en este sentido, ha subsumido el trabajo humano vivo de los estudiantes.

Esto significa que el artefacto, además de ser un signo, en este caso una representación de la vivienda, da cuenta de la propia historia del sujeto que lo produjo, y que al producirlo también se transformó. Este es el sentido de los aprendizajes como objetivación cultural del saber. Radford (2006) los recuerda:

Además —y este es un elemento fundamental de la cognición humana— al contrario de los animales, el ser humano es afectado profundamente por el artefacto: al contacto con este, el ser humano reestructura sus movimientos (Baudrillard, 1968) y forma capacidades

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

motrices e intelectuales nuevas, como la anticipación, la memoria, la percepción (Vygotsky y Luria, 1994). (p. 113)

Moura también lo hace explícito cuando, citando a Marx, dice:

Es una relación del sujeto con el medio físico y social, mediada por instrumentos y signos (entre ellos el lenguaje), lo que procesa el desenvolvimiento cognitivo. O sea, de acuerdo con el concepto de trabajo de Marx y Engels (1977), al transformar la naturaleza el hombre también se transforma. (Moura, 2010). (p. 83)

Entonces, el papel de estos sólidos en tanto artefactos es viabilizar dentro del aula acciones con las que el maestro, en virtud de su experiencia cultural con los objetos que trata, pueda ayudar a leer, por un lado, la historia de la humanidad subsumida en el cuerpo geométrico, asumido desde la práctica social en un modelo de vivienda, y, por otro lado, leer la historia personal de los sujetos también subsumida en el artefacto en tanto producción suya.

De modo que los reconocimientos realizados por los estudiantes sobre el número de vértices, caras y aristas al trabajar con algunos sólidos, entre ellos la propia vivienda, se constituyeron en un análisis de esas primeras representaciones. Este análisis posibilitó la producción de las primeras determinaciones abstractas por la vía del pensamiento.

Ahora, este pensamiento no lo debemos tomar como una mera manifestación del intelecto, pues, aunque hay un proceso de abstracción, «es un proceso que no es puramente intelectual: este incluye el cuerpo (gestos, acciones, etc.) y la cultura material (signos, artefactos, etc.)». (Radford, 2014b, pág. 37)



Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado



Figura 59. Encuentro IV – 2015-07-02.

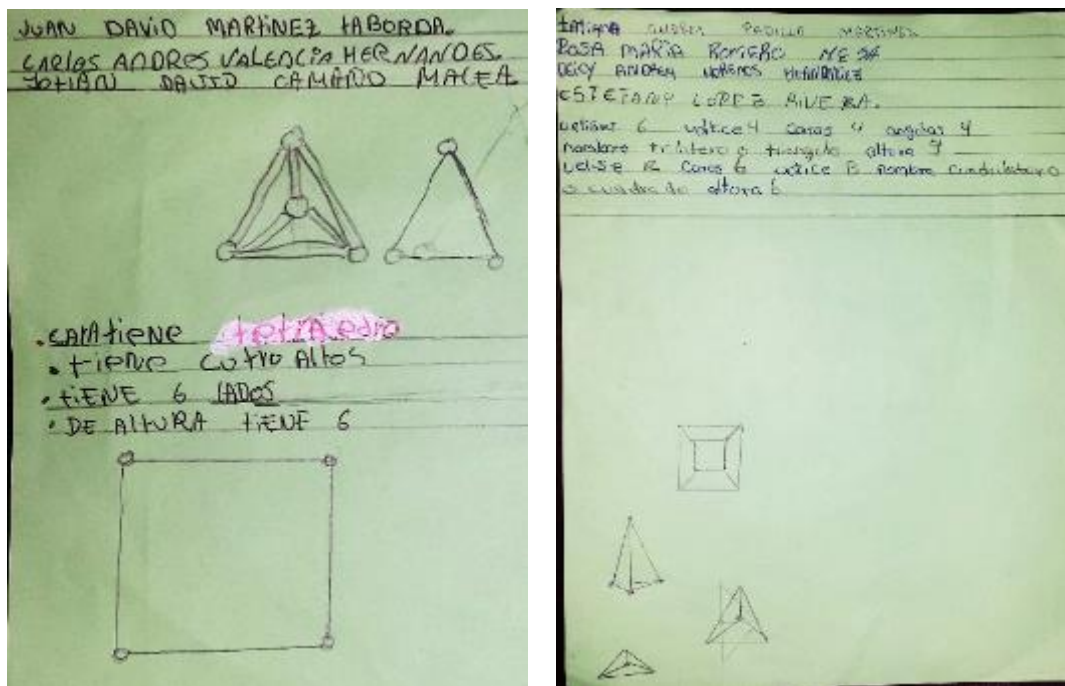


Figura 60. Encuentro IV – 2015-07-02

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Los archivos de las producciones del Encuentro IV me permiten analizar con más detenimiento la manera como se relacionan estos dos aspectos de la actividad, es decir, tanto las abstracciones como los aspectos materiales, sin que se confunda el uno con el otro.

Resulta muy interesante notar cómo, a pesar de que Rosa y Carlos no hayan mostrado mayor elaboración en sus análisis, no obstante tuvieron un desempeño protagónico en la elaboración de sus primeras representaciones y en la elaboración de sus modelos, lo cual puede notarse en la *Figura 59*, concretizado por ejemplo en el manejo de las representaciones, especialmente de la tridimensionalidad de los cuerpos.

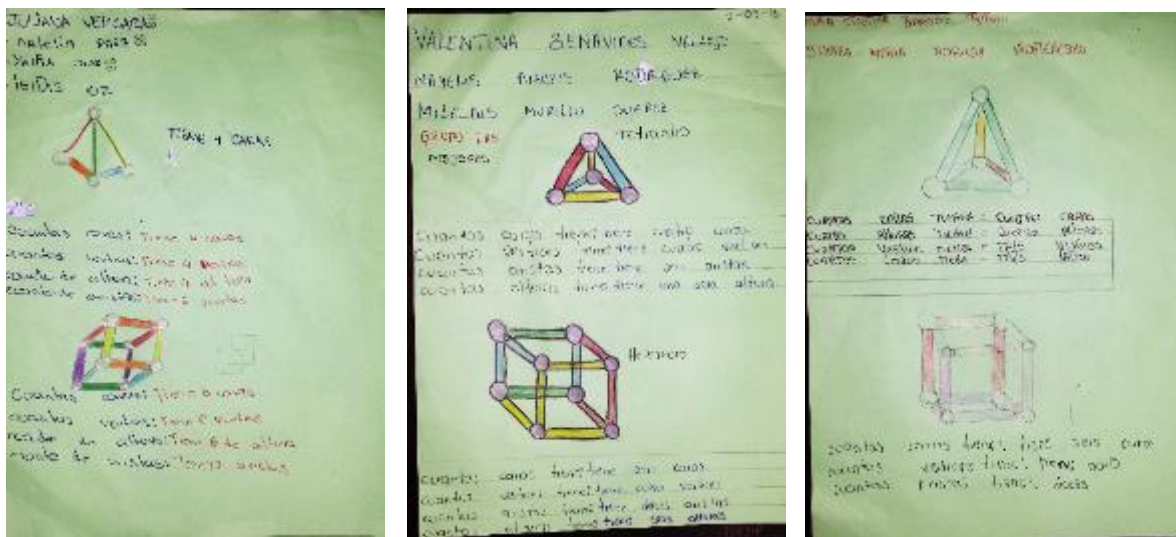


Figura 61. Encuentro IV – 2015-07-02.

No es que sus representaciones carezcan de validez como conocimiento matemático, sino que gracias a la misma materialidad de las producciones, quiero decir, teniendo en cuenta los trazos, las correcciones, la correspondencia figural y, en general, la dimensión estética del trabajo, puede inferirse en los dibujos que tales representaciones exigieron por

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

parte de ellos un mayor reto para su elaboración que lo que al parecer les exigieron las suyas a los otros grupos (*Figura 60*).

Por ejemplo, la producción de Leidys y Juliana deja ver mayor tranquilidad y organización a la hora de presentar los resultados del análisis realizado. Pero esto, sin duda, no indica mayor o menor nivel de objetivación, y puede ser solo muestra de la manera como sujetos diferentes siguen un proceso marcado por etapas similares y bajo la mediación del mismo sistema cultural, es decir, regidos por significados locales, aunque cada sujeto lo vaya viviendo desde sus producciones personales y mediante la atribución de sentidos también personales.

Me llamó también la atención el trabajo de Rosa y Carlos, que si bien no estuvo tan organizado —por ejemplo en cuanto a las tablas que realizaron los otros grupos—, tuvieron la precaución de elaborar una representación aparte para mostrar cómo estaba siendo analizada la bidimensionalidad de las caras a partir de la tridimensionalidad de los cuerpos.

Con esto se evidencia que la abstracción en tanto producto del pensamiento está en dialéctica con la materialidad de la práctica, lo cual no implica que sean un mismo fenómeno o que uno dependa enteramente del otro, pues eso nos llevaría a la conclusión, que creo sesgada, de que garantizando el cumplimiento de ciertas prácticas materiales en el aula, se garantizan también ciertos procesos mentales.

Lo que noté en este caso fue que en tanto cada sujeto tiene una vivencia desde su corporalidad, es decir, en la cual su actividad sensible está ancorada a sus sentidos personales, estas acciones materiales con y sobre los artefactos afectan profundamente el contenido semántico de esas producciones abstractas y por tanto la conceptualización. A propósito de

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

pensar en otra forma de enseñar y aprender matemáticas, Radford (2009) justificaría

la relevancia de este tipo de actividad sensible fundándose en que:

Vittorio Gallese y George Lakoff sugieren que el saber conceptual (matemático y otro) es virtualmente encarnado (*embodied*); es decir, un saber unido de manera íntima al funcionamiento de nuestro sistema sensorio-motor (Gallese y Lakoff, 2005). Desde tal perspectiva, el sistema sensorio-motor no ofrece solamente la base o la infraestructura al contenido conceptual que el alumno desarrollaría más tarde, como supone la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget. El sistema sensorio-motor caracteriza de manera profunda el contenido semántico de los conceptos, «en términos de la manera en que funcionamos con nuestro cuerpo en el mundo» (Gallese y Lakoff, 2005, p.456). (p.244)

De suerte que aun cuando a nivel filogenético se trate del mismo concepto matemático, a nivel ontogenético cada sujeto vive su propio proceso de objetivación. De ahí que en diálogos con el grupo de investigación que ha acompañado este trabajo,<sup>39</sup> puedo concluir en este punto que «el concepto que cada uno objetivó [...] no fue único; como no pueden serlo el proceso de objetivación ni el concepto mismo» (Cadavid y Quintero, 2011: 7).

En términos generales, el papel que jugaron los artefactos en la objetivación del concepto de perpendicularidad fue crucial, no solo por posibilitar unos sentidos personales, sino por hacerlo en dialéctica con significados y sentidos más sociales. Por ejemplo, artefactos propuestos por los estudiantes, como la representación tridimensional del sujeto y la tabla, fueron fundamentales en la volatilización de las primeras representaciones, y les permitieron a ellos mismos retrotraerse a la pregunta por la forma en que caen los cuerpos

---

<sup>39</sup> Grupo de Investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES), Universidad de Antioquia, 2016.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

sometidos a la gravedad, en cuya dirección se enclava una relación muy profunda con la historia material del concepto de perpendicularidad.

La palabra perpendicularidad está compuesta por partículas griegas y latinas, en su etimología puede identificarse el prefijo *per*, que significa «perfecto, completo», luego encontramos el verbo *pendere*, que significa «colgar, pender, pesar, medir y pagar», a este lo sigue el sufijo *culus*, que significa «instrumento», y finalmente el sufijo *ar*, «relativo a».

De esta manera, la palabra completa vendría a significar *lo relativo al uso de un instrumento que pende o cuelga perfectamente recto*. Históricamente, hace referencia a la pita o cuerda usada por algunas civilizaciones antiguas para tomar la posición de un cuerpo que pende de una cuerda como referencia para ubicar a otros cuerpos.

Dada la formación de la palabra, lo perpendicular hace referencia a un instrumento, es decir, a una herramienta que subsume la esencia del concepto. Dicha herramienta, en la historia y en el oficio de los maestros-constructores es conocida como *la plomada*, y al uso de ella para garantizar la posición en vertical de un cuerpo con respecto a la horizontal gravitacional<sup>40</sup> de la tierra se le llama *poner a plomo*.

En el campo laboral de la construcción se reconoce a la plomada entre los primeros instrumentos usados por la humanidad para la edificación de muros. Textos históricos confirman tales usos, además de mostrar el uso extensivo del término con cierta connotación moral. La Biblia, por ejemplo, comenta en Amós 7:7-8:

Me enseñó así: He aquí el Señor estaba sobre un muro hecho a plomo, y en su mano una plomada de albañil. Jehová entonces me dijo: ¿Qué

---

<sup>40</sup> Por cierto, dado un punto ubicado en una posición sobre la masa de todo cuerpo que se encuentre sometido al campo gravitacional de la tierra, por el cual pasa una línea recta E que se orienta justo en la dirección en la que se ejerce la fuerza de gravedad, toda línea recta que se intercepte con E, formando cuatro ángulos adyacentes y rectos, la denominaré *horizontal gravitacional*.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

ves, Amós? Y dije: Una plomada de albañil. Y el Señor dijo: He aquí, yo pongo plomada de albañil en medio de mi pueblo Israel; no lo toleraré más.

Aquí se puede ver que para cierta tradición occidental, la plomada representa la exactitud, la rectitud y lo correcto, como una manera de hacer referencia a la posición completamente vertical con que caen los cuerpos atraídos por la gravedad. Hablar de un movimiento de caída susceptible de ser percibido por el hombre a través de sus sentidos y susceptible a la vez de ser sometido a reflexión, comportan aristas de la complejidad del concepto subsumido en la palabra perpendicularidad. Sobre este carácter multimodal de los conceptos, Radford (2009) aporta:

A primera vista, el lenguaje puede parecer una construcción conceptual alejada de los sentidos; sin embargo, como dicen Gallese y Lakoff, el lenguaje es multimodal porque integra varias modalidades: la vista, el sonido, el tacto, las acciones motrices, etc. Términos matemáticos como *número par* guardan, en su etimología, este aspecto sensorial que consiste en poder disponer manualmente del número en dos hileras iguales. (p. 244)

En este sentido, el artefacto que propongo construir partiendo de la representación que hacen Leidys y Juliana, es un buen ejemplo para mostrar cómo un término matemático como el de perpendicularidad, que desde su etimología guarda una relación muy cercana con el aspecto sensorial de la caída de los cuerpos, coincide con la esencia de la representación que ellas producen en tanto intenta señalar la forma en que cae un cuerpo, en este caso un sujeto que se mueve, bien sobre una superficie plana, bien sobre una superficie inclinada. Por tanto, el movimiento captado sensorialmente es integrado por el lenguaje a través de una abstracción, en este caso la situación crucial, es decir, mostrar que incluso moviéndose en un



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

plano inclinado, el sujeto que cae lo haría en la misma dirección que quien se moviera en una superficie paralela al horizonte gravitacional.

Algo parecido sucede con el análisis de otros conceptos muy cercanos como el de la relación pitagórica, donde precisamente la relación entre catetos e hipotenusa está en función del alguno recto que debe haber entre los catetos. En otros términos, si tomamos por *cateto* aquello *que cae* recto, dicha expresión guarda estrecha relación con el hecho de que los catetos son segmentos contenidos en rectas perpendiculares entre sí.

Adicionalmente, la línea subtendida entre los extremos de los catetos lleva el nombre de hipotenusa, que significa *tensar la cuerda*. Nuevamente es bastante claro cómo la producción del concepto está ancorada en una integración que realiza el lenguaje, en la que los movimientos corporales, los gestos y otras percepciones juegan un rol importante. De ahí que un instrumento o herramienta como la llamada *cuerda de los trece nudos* sea una clara extensión del propio cuerpo humano o de sus movimientos.

En las prácticas con los estudiantes, esta última parte puede ser más claramente analizada al considerar lo sucedido con el uso de las herramientas digitales (*software* libre) y la incorporación de otras herramientas para la construcción artesanal de viviendas.

Por ejemplo, como fue descrito en la segunda categoría, el papel del *software* Geogebra como posibilitador de la virtualidad, fue precisamente evaluar aquellas situaciones en las que el concepto de perpendicularidad en la práctica social de la construcción de vivienda era llevado al extremo. No obstante, la situación virtual no entrañaba otra cosa que la misma situación que evaluaba el artefacto del sujeto y la tabla, solo que gracias a dicha



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

virtualidad el estudiante podía percibir en tiempo real la situación, objetivando en unos casos la permanencia y en otros la transformación de dicha relación.



Figura 62. Encuentro VIII – 2015-08-22.

En esta tarea con el *software*, lo que se encontraba en el centro de la reflexión era la esencia del concepto de perpendicularidad, patente en la relación entre el eje de gravedad de los cuerpos y la horizontal gravitatoria de la tierra. De hecho, en medio de la representación virtual del *software*, se representó el papel de la plomada (*Imagen 3 de Figura 62*), que como artefacto subsume también la esencia del concepto.



Figura 63. Encuentro 11 - 2015-09-17.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Con el uso del *software* Home 3D los estudiantes tuvieron la oportunidad de recrear (historia virtual) la construcción de unas paredes para una vivienda. Algunos estudiantes fueron sensibles al tema de la perpendicularidad entre paredes; Rosa, por ejemplo, alcanzó a objetivar la perpendicularidad como una subsunción en la escuadra, que de hecho utilizó para dar cuenta de que no se cumplía la relación entre las paredes que había construido. (*Figura 46 - Categoría II*).

Una vez más, es bastante evidente cómo el artefacto (herramienta), al ser una especie de portador pasivo del concepto, al corporificarlo, en ese espacio heterotópico que Radford (2006, pág. 125) denomina *territorio del artefacto*, facilita, insinúa al estudiante la posible vía hacia la objetivación. Miranda, Radford y Guzmán (2007) amplían la concepción de artefactos que se tiene al interior de la teoría cultural de la objetivación y el papel que estos juegan en el proceso del desarrollo conceptual; al respecto, estos autores sostienen:

La teoría de la objetivación sostiene que los artefactos son portadores de una inteligencia histórica, producida por la actividad cognitiva de generaciones anteriores. El artefacto (una calculadora, por ejemplo) no solo induce una división de trabajo en la cual parte de la actividad es realizada por este, sino que insinúa al alumno, a través de la inteligencia histórica de la que es portador, líneas posibles de desarrollo conceptual. (p. 9)

De modo que buena parte, por así decirlo, de esa dispersión de abstracciones que promovieron las representaciones y los modelos, fueron complementadas por el uso de los *softwares* en la medida en que le aportaron dinamicidad a los modelos y/o artefactos ya construidos, promoviendo con ello la producción de múltiples determinaciones, entre las que aparecieron, como se anotó en la segunda categoría, las nociones de alturas y bases de un triángulo, ángulos, pendientes, inclinación, etc.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Si en efecto, como lo contempla el método dialéctico-materialista, en la ascensión de lo abstracto a lo concreto, las múltiples determinaciones son expresiones del pensamiento conceptual, mi postura indica que desde esta vivencia, en las producciones donde los *softwares* fungieron como mediadores o simuladores del uso de otros artefactos, el pensamiento conceptual se movilizó a nivel de lo que Radford (1994) llama una conceptualización dinámico-intuitiva.

Ahora bien, es posible que los estudiantes no hayan alcanzado un nivel significativo de abstracción que les permitiera deducir las propiedades de los conceptos en juegos, pero no significa que dichas abstracciones, elaboradas por la vía de la intuición, no les permitiera deducir algunas propiedades para unas situaciones concretas, sentido este en el cual las herramientas jugaron un papel trascendental.

En consecuencia, a la altura de los encuentros X, XI y XII, mediante el uso de las herramientas los estudiantes pasan a realizar sus tareas al espacio del patio de la escuela, aprestándose a percibir lo que los artefactos les insinúan. El concepto de perpendicularidad se objetiva pues al concretar una medición, en este caso medición de la posición de una pared o de una superficie con respecto al referente señalado por una de las cuatro herramientas utilizadas (escuadra, plomada, nivel, pita de 13 nudos).



Figura 64. Encuentro XII – 2015-08-22.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Es posible que el nivel de abstracción y deducción de los estudiantes no fuera suficiente para explicar desde el lenguaje, oral o escrito, la generalidad (totalidad explicada) que ofrece una herramienta cuando se trata de verificar la perpendicularidad entre dos superficies planas que tienen una arista en común, sin embargo, su nivel de abstracción fue suficiente para que a nivel intuitivo hicieran uso correcto del artefacto para intentar la verificación de la relación de perpendicularidad.

Tuvo cierta complejidad explicar desde el lenguaje oral o escrito la generalidad (totalidad explicada) que ofrece una herramienta como el nivel de burbuja para verificar que una superficie está en perpendicular o en la misma dirección con el eje gravitacional de la tierra. Más complejo resultó explicar la forma en que esas dos totalidades podían combinarse, pero en estos casos, fueron los gestos de los estudiantes los encargados de mostrar la objetivación que se estaba haciendo del concepto, instancia en la cual jugaban nuevamente un papel crucial los sentidos personales.

De ahí que hacia la tarea final, al construir la vivienda o el cerco para los árboles plantados, fue posible apreciar cómo cada uno de los estudiantes, cada uno a su manera, intuía el papel de los artefactos en la solución de las problemáticas presentadas. Esto no era más que una forma fáctica de explicar la importancia de un concepto, tenido en cuenta aquí por ellos y utilizado, en retrospectiva y actualmente, por la humanidad.



Figura 65. Encuentro XIV – 2015-08-22.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

Semejante a como Leidys y Juliana usaron la pita de 13 nudos para ubicar el lugar de los puntales del cerco y garantizar que su forma final fuera rectangular, o así como usaron la plomada para garantizar que el puntal quedara completamente vertical respecto a la superficie de la tierra, de modo semejante desde la antigüedad habían *echado mano* de la relación pitagórica y de la perpendicularidad, al punto de notar tal utilidad en estas relaciones que las abstraieron y conceptuaron para ponerlas al servicio de la humanidad (*Figura 65*).

En definitiva, esta es la manera como los estudiantes de quinto grado de una institución pública de estrato uno (1) alcanzan la objetivación de un concepto como el de perpendicularidad, presente en figuras y cuerpos geométricos. Esta objetivación ocurre en medio y/o estando ellos mediados por una práctica social como la construcción de vivienda, práctica cuyas necesidades permiten vivenciar la historia virtual del concepto y de-construir el camino lógico-histórico que perfila su esencia.

En este caso, la objetivación de un concepto matemático como el de perpendicularidad, trabajo de investigación elaborado desde la perspectiva socio-histórica de la educación matemática, ayuda a entender la matemática no es un discurso cuya importancia radica en sí mismo, sino que es el hombre en tanto ser social e histórico quien produce la importancia de la matemática, la cual constata cuando se hace sensible ante sus propias necesidades y realidades. Por tanto, al producir un saber matemático como respuesta a esas necesidades y en medio de unas relaciones laborales éticas, el sujeto se emancipa doblemente, ante su realidad y ante los discursos hegemónicos que imponen otras formas de hacer matemáticas —por ejemplo como un saber idealizado y libre (aparentemente) de las pasiones humanas.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

### 6. A MANERA DE CIERRE

El proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos, que tuvo lugar en la sede Anastasio Sierra de la Institución Educativa Alianza para el Progreso por parte de estudiantes de quinto grado, estuvo centrado en el desarrollo de una Actividad Orientadora de Enseñanza. Actividad mediante la cual, dadas las condiciones sociales y físicas en que se encuentran inmersas las poblaciones de este lugar de nuestra geografía, pretendí responder a una necesidad para la cual los sujetos involucrados requieren de la apropiación de unos conocimientos específicos, tanto en el campo de las matemáticas occidentales como en el ámbito de una práctica social en particular.

Considerando las condiciones objetivas de la institución educativa y de las familias de los estudiantes con quienes decidí trabajar, escogí como actividad principal la práctica social de la construcción de viviendas, pues se trata de un tema con tal presencia en sus vidas cotidianas y de tal importancia en el orden de sus necesidades materiales que hace parte del imaginario cultural de los niños y se manifiesta en muchos de sus juegos.

El otro motivo que tuve como maestro-investigador para seleccionar dicha práctica, tuvo que ver con el objetivo de la actividad, en este caso, la apropiación del concepto de perpendicularidad por parte de los estudiantes. Sin embargo, como para esta postura metodológica el aprendizaje es concebido como un proceso en dialéctica con la enseñanza, este objetivo también demandó la pregunta por *cómo ser enseñando*. De ahí que en correspondencia con la perspectiva histórico-social de la educación matemática, me propuse en este trabajo una apuesta por la historicidad del concepto y por el reconocimiento de lógicas en su producción.



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

En este orden, me resultó muy pertinente una práctica social como la construcción de viviendas, pues ya desde una revisión etimológica del término perpendicularidad saltan a la vista conceptos fundamentales asociados a necesidades básicas del ser humano como procurarse una vivienda para su familia o proteger sus cultivos y ganado, y, en especial, a encontrar solución a los problemas relacionados con levantar construcciones en dirección contraria a la de la gravedad.

De esta manera, haber dispuesto la práctica social como una actividad sensible fue lo que posibilitó las producciones de las primeras representaciones de los estudiantes. Fue en esos primeros contactos donde la práctica social, al demandar una labor conjunta, rompió o transformó necesariamente las prácticas individualistas frecuentes en la escuela, tanto aquellas de naturaleza simbólica, como las normas en las relaciones y el tipo de lenguaje, como otras de naturaleza más material, como los escenarios, las herramientas, entre otros.

Una actividad de aprendizaje en la que los sujetos parten de un compromiso colectivo, mostró ser una actividad que también fomenta la producción de una forma de individualidad. Una individualidad ahora no solipsista propia de las prácticas capitalistas, sino una individualidad en dialéctica con lo colectivo, en la cual la producción realizada por un sujeto, en tanto no le es enajenada, ni lo enajena, también lo produce, pues su trabajo, su fuerza viva, fue objetivada y se hizo producto, un producto además reconocido por los demás miembros del grupo.

Desde luego, como se trató de un trabajo en el que tanto el lenguaje como el pensamiento jugaron un papel fundamental, siempre en el marco de los sistemas simbólicos de la cultura,



## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

el sujeto productor no produjo solo; por el contrario, en tanto *praxis cogitans*, su producto es a la vez un producto social y colectivo.

Esta transición de lo individual a lo colectivo no se dio de manera inmediata ni en una sola dirección, sino que fueron necesarios los catorce (14) encuentros, cada uno con sus propias tareas pero sin perder la unidad de la actividad. Era preciso superar la contradicción que entraña la producción de las mercancías con el fin de que el movimiento entre los aportes colectivos y los aportes individuales hiciera emerger el concepto de perpendicularidad, tanto como una apropiación de los conocimientos de la humanidad como un producto del trabajo de los estudiantes de quinto grado. Así, en esa dialéctica entre lo individual y lo colectivo en torno a la construcción de la vivienda se crearon condiciones para que los sujetos también llegaran a *ser con los otros*.

Una forma de apreciar ese movimiento al que me refiero fue precisamente acercando mi atención a la transformación del lenguaje, el cual no solo movilizó las relaciones de los estudiantes sino que se constituyó en uno de los elementos claves del propio proceso de objetivación. Como lo expresé en el análisis, esta transformación del lenguaje se vio reflejada en producciones de los estudiantes en las que pude apreciar los distintos roles que tomó ese lenguaje en cada uno de los momentos del proceso.

En un primer momento, el lenguaje jugó un rol como nominador de las cosas, por lo que fue fundamental en la tarea de producir las primeras representaciones como producciones de tipo más individual, pero sin caer en extremos, pues el mero compromiso con unas colectividades traduce cierto nivel de significación cultural en esas producciones. Este es un buen ejemplo de cómo el lenguaje, en tanto mediador entre la práctica social y los sujetos, se

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

torna posibilitador, por un lado, de la producción del objeto, y por el otro, de la producción de un sujeto colectivo.

Con esto quiero indicar que las primeras producciones, en tanto representaciones caóticas, hicieron parte de ese uso del lenguaje en su rol como nominador, llegando a posibilitar lo que la teoría cultural de la objetivación reconoce como el nivel de la conceptualización fenomenológica, es decir, lo que el estudiante miró, lo que visualizó, y que en razón de la condición social del lenguaje, no se limitó a lo que cruzó por sus sentidos, es decir, no se redujo a una mera actividad sensorial sino que alcanzó el nivel de una actividad sensible, toda vez que fue producto de una *praxis cogitans*.

No obstante, a medida que se avanzó en los encuentros y que la misma actividad fue demandando mayores compromisos colectivos, el lenguaje fue adquiriendo un rol más descriptivo, asumiendo con ello su papel comunicador y posibilitador de otras relaciones, por ejemplo relaciones de producción, que exigen un especial cuidado, en las que quien habla o escribe comienza a considerar la presencia de los otros. El lenguaje de las representaciones toma también un carácter crítico y de cierta sutileza, pues aparece, de alguna manera, en situaciones cruciales, sobrellevadas con enunciados que, sin dejar de apostarle a una definición, se proponen de la forma *qué tal si*.

Este comportamiento del lenguaje fue clave para la producción de una conceptualización dinámico-intuitiva, esto es, a partir de determinaciones abstractas del concepto de perpendicularidad.

Nótese que en este momento de la actividad, la conciencia del sujeto se había modificado hasta el punto de poder diferenciar entre la situación real material del objeto y la situación

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

crucial con la que se lo problematiza, solo que gracias al papel de la actividad sensible, esta situación crucial fue de su entera autoría, es decir, fue una auténtica producción suya en dialéctica con su proximidad colectiva.

Precisamente, en este momento de la investigación, se registró lo que a mi juicio es uno de los hallazgos de esta investigación: la emergencia de una forma de referirse a la perpendicularidad que no identifica esta propiedad solo en una de las líneas sino que registra el acontecimiento como una relación entre líneas o, a lo sumo, como una propiedad de una línea, sí, pero con relación a, gracias a otra línea. Es decir, es en este momento de la actividad cuando toma sentido para los estudiantes la expresión: *es perpendicular con relación a*.

La estructuración de la actividad fue posibilitando la transformación de las relaciones y la subsecuente transformación de los sujetos. Una de las transformaciones en las relaciones laborales tuvo que ver con cierta forma de historicidad de las tareas, esto es, disponer de tal modo las cosas que los estudiantes pudieran superar cierta forma de división del trabajo, siendo conscientes del uso de las producciones anteriores como insumo para las nuevas. Fue esta la intencionalidad concedida al uso de herramientas propias de la práctica de construcción de viviendas, pues ellas configuraron una serie de antecedentes que sirvieron para que los estudiantes recurrieran a objetos materiales o a gestos con su propio cuerpo para representarse ciertas situaciones cruciales.

No parece mera coincidencia que la transformación hacia un lenguaje más cuidadoso en la forma de expresar cierta relatividad en las cosas, haya emergido justo en el momento en que propicié la incorporación de las herramientas físicas e intangibles (*software*) en la actividad. Encuentro pues que la forma como estas herramientas y gestos subsumen la

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

relación de perpendicularidad, exige el paso a un lenguaje más cuidadoso y a la vez más concreto.

Sirva como ejemplo recordar que una escuadra no es otra cosa que una herramienta que incorpora la relación de perpendicularidad entre dos objetos, bien se trate de líneas o superficies (reales o imaginarias); por tanto, si colocáramos un lado de la escuadra sobre la superficie de una pared, no tendría sentido decir que dicha pared es perpendicular, a menos que se diga que lo es con relación al objeto que se apoya sobre el otro lado de la escuadra. Algo parecido sucede si en lugar de la escuadra, este análisis lo hace un estudiante valiéndose de gestos con sus manos.

En consecuencia, ante la pregunta, ¿Cómo se movilizó el proceso de objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado? formulo mi respuesta concibiendo tal proceso de objetivación, ante todo, como un trabajo en colectivo en el cual, producto de las voces de los compañeros, de los docentes, de los padres y de los vecinos, los estudiantes que participaron de la actividad, fueron apropiándose de unos significados culturales que posibilitaron transformar su propia voz, y que hicieron posible el uso de otras formas de lenguaje, oral, escrito y corporal para representarse las situaciones y las transformaciones a que fueron sometidos los objetos producto de su labor. De esta manera, puedo resumir que la objetivación del concepto de perpendicularidad tuvo lugar en la incorporación de la correspondiente relación, tanto a nivel de productos materiales concretos como una vivienda, como a nivel de su conciencia, incorporación aquí reflejada en la transformación de su lenguaje, movilizado desde su forma nominal y abstracta a su forma gestual concreta.

## Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado


### 7. Anexo

#### 7.1 Permisos

  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ALIANZA PARA EL PROGRESO  
CALLE 12345678  
CALLE 12345678  
CALLE 12345678


Consentimiento de Participación

Yo José Luis Muñoz identificado con cédula de ciudadanía n° 908877049 de Medellán padre, madre o tutor legal del estudiante Leidy Luz Bonilla Mejía estoy de acuerdo que mi hijo/a pueda participar en la investigación titulada "Objetivación del (de los) concepto(s) de perpendicularidad, por estudiantes de grado quinto, en cuerpos geométricos y en figuras geométricas" que es dirigida por el docente Jorge Alonso Cobera Guerra quien realizará las prácticas respectivas en calidad de estudiante de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Antioquia, y quien será acompañado por el docente Orlando Rafael Coronado Díaz, identificado con cédula de ciudadanía N° 78260737 y quien será como docente de la materia de grado 5° de la Institución Educativa Alianza para el Progreso.

  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ALIANZA PARA EL PROGRESO  
CALLE 12345678  
CALLE 12345678  
CALLE 12345678

Consentimiento de Participación

Yo María Judith Valencia de la Ossa identificada con cédula de ciudadanía n° 50949887 de Medellán madre o tutor legal del estudiante Verónica de Jesús Valencia estoy de acuerdo que mi hijo/a pueda participar en la investigación titulada "Objetivación del (de los) concepto(s) de perpendicularidad, por estudiantes de grado quinto, en cuerpos geométricos y en figuras geométricas" que es dirigida por el docente Jorge Alonso Cobera Guerra quien realizará las prácticas respectivas en calidad de estudiante de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Antioquia, y quien será acompañado por el docente Orlando Rafael Coronado Díaz, identificado con cédula de ciudadanía N° 78260737 y quien será como docente de la materia de grado 5° de la Institución Educativa Alianza para el Progreso.

  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ALIANZA PARA EL PROGRESO  
CALLE 12345678  
CALLE 12345678  
CALLE 12345678

Consentimiento de Participación

Yo Escuela Primaria Heródica Baranda identificada con cédula de ciudadanía n° 100300000 de Medellán padre, madre o tutor legal del estudiante Sebastián Víctor Valencia Hernández estoy de acuerdo que mi hijo/a pueda participar en la investigación titulada "Objetivación del (de los) concepto(s) de perpendicularidad, por estudiantes de grado quinto, en cuerpos geométricos y en figuras geométricas" que es dirigida por el docente Jorge Alonso Cobera Guerra quien realizará las prácticas respectivas en calidad de estudiante de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Antioquia, y quien será acompañado por el docente Orlando Rafael Coronado Díaz, identificado con cédula de ciudadanía N° 78260737 y quien será como docente de la materia de grado 5° de la Institución Educativa Alianza para el Progreso.

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

**7.2 Reunión de socialización de la actividad con padres de familia de la sede**





Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos  
por estudiantes de quinto grado

*Referencias bibliográficas*

- Bachelard, G. (2004). *La formación del Espíritu Científico*. Buenos Aires: Siglo XXI.
- Bajtín, M. (1982). *Estética de la Creación Verbal*. Madrid: Siglo XXI.
- Borba, M., & Araújo, J. (2008). *Investigación Cualitativa en Educación Matemática*. México: Limusa.
- Cadavid, L. A., & Quintero, C. (2011). *EL PROCESO DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA DESDE EL USO DE ARTEFACTOS*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Candioti, M. (2014). El carácter enigmático de las Tesis sobre Feuerbach y su secreto. *ISEGORÍA. Revista de Filosofía Moral y Política*, 45 - 70. Obtenido de El carácter enigmático de las tesis sobre feuerbach y su secreto.
- Candiotti, M. (2014). marxismocritico.com. *ISEGORÍA. Revista de Filosofía Moral y Política*, 45. Obtenido de El carácter enigmático de las tesis sobre feuerbach y su secreto.
- Cotera, J., Hernández, J., Roche, L., & Vergara, J. (2011). *LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA APREHENSIÓN Y COMPRENSIÓN DE LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS*. Montelíbano: Udea.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2012). *Manual de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa, S.A.
- Dias-Moretti, V., & Radford, L. (2015). História do Conceito culturalmente significada e a Organização da Atividade de Ensino de Matemática. *VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*.
- Dussel, E. (1985). *La producción teórica de Marx - Un comentario a los Grundrisse*. México: Siglo XXI.
- Flick, U. (2015). *El diseño de investigación Cualitativa*. Madrid: Morata.
- Freire, P. (2002). *Pedagogía del Oprimido*. Buenos Aires: Siglo XXI.



Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

- Hederich, C. (2007). *Estilo cognitivo en la dimensión de dependencia-independencia de campo*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Iliénkon, E. (1984). *LA DIALECTICA DE LO IDEAL - Traducción de Eduardo Albert Santos y corregido por Rubén Zardoya Loureda. La versión original, titulada "Dialéctica idealnovo"*. Obtenido de <https://marxismocritico.files.wordpress.com/2014/01/ilienkov-la-dialectica-de-lo-ideal.pdf>
- Jaramillo, D. (Abril de 2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones utopías, futuros posibles. *Revista Educación y Pedagogía*, vol. 23, núm. 59, 13.
- Larios, V. (2006). *LA RIGIDEZ GEOMÉTRICA Y LA PREFERENCIA DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN EL NIVEL MEDIO*. México: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.
- Leontiev, A. (1984). *Actividad, Conciencia y Personalidad*. México: Cartago.
- Lizcano, E. (6 de Mayo de 2003). *IMAGINARIO COLECTIVO Y ANÁLISIS METAFÓRICO*. Obtenido de [http://www.unavarra.es/puresoc/pdfs/c\\_salaconfe/SC-Lizcano-2.pdf](http://www.unavarra.es/puresoc/pdfs/c_salaconfe/SC-Lizcano-2.pdf)
- Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. *Revista Sigma*, 14.
- Martí, J. (2003). La historia del hombre, contada por sus casas. *Biblioteca Virtual universal*.
- Marx, C. (9 de Febrero de 1857). *ELEMENTOS FUNDAMENTALES PARA LA CRITICA DE LA ECONOMIA POLITICA*. Buenos Aires - Argentina: Siglo XXI. Obtenido de <https://creandopueblo.files.wordpress.com/2011/09/marx-elmetododelaeconomiapolitica.pdf>
- Marx, C. (trad. en 2010). *El Capital - Crítica de la Economía Política*. México: Siglo XXI Editores.
- Marx, C., & Engel, F. (1974). *La Ideología Alemana*. Montevideo: Pueblos Unidos.
- Marx, C., & Engels, F. (trad. en 1932). *MANUSCRITOS ECONOMICOS Y FILOSOFICOS DE 1844*.

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (6 de Marzo de 2016). *Buscando Colegios*. Obtenido de Ministerio de Educación Nacional:  
[http://sineb.mineducacion.gov.co/bcol/app?service=direct/0/Home/\\$DirectLink&sp=IDest=14597](http://sineb.mineducacion.gov.co/bcol/app?service=direct/0/Home/$DirectLink&sp=IDest=14597)
- Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, 5 - 30.
- Moura et al., M. O. (2010). *A actividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasilia: Liber Livro.
- Moura, M. O. (2011). *Educar con las matemáticas: saber específico y saber pedagógico*. Bogotá: Revista Educación y Pedagogía, vol. 23, núm. 59.
- Platón. (2003). *La república*. Obtenido de Biblioteca Virtual universal:  
<https://www.biblioteca.org.ar/libros/8207.pdf>
- Radford, L. (Diciembre de 1994). La Enseñanza de la Demostración: Aspectos Teóricos y Prácticos. *Revista de Educación Matemática*. Vol 6, 21.
- Radford, L. (1999). LA RAZÓN DESNATURALIZADA - ENSAYO DE EPISTEMOLOGÍA ANTROPOLÓGICA. *Redalyc Vol 2.*, 47.
- Radford, L. (2000). *Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento*. Canada: Educación Matemática.
- Radford, L. (2004). Del símbolo y de su objeto: Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 7(2), , 157-170.
- Radford, L. (2004b). Semiótica cultural y cognición. En *Conferencia plenaria dada en la Decimotava Reunión Latinoamericana de Matemática* (pág. 18). México: Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, 103.
- Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, 103.

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos por estudiantes de quinto grado

- Radford, L. (2009). Cerebro, Cognición y Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 215-250.
- Radford, L. (2013a). *Cultura e historia: dos conceptos difíciles y controversiales en las aproximaciones contemporáneas en la educación matemática*. São Paulo: Livraria da Física.
- Radford, L. (13 de Noviembre de 2013b). *Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas*. Obtenido de <http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20-%20Dominicana.pdf>
- Radford, L. (2013c). Tres conceptos clave de la Teoría de la Objetivación: Conocimiento, Conocer, Aprendizaje. *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (REDIMAT)*, 15 - 16.
- Radford, L. (2014a). *De la teoría de la objetivación*. Bogotá: Revista Latinoamericana de Etnomatemática.
- Radford, L. (2014b). La Teoría de la Objetivación. *Santillana - Revista Ruta Maestra*, 9, 33-37., 33.
- Radford, L. (2015). Of Love, Frustration, and Mathematics: A Cultural-Historical Approach to Emotions in Mathematics Teaching and Learning. *Springer International Publishing Switzerland*, 25 - 49.
- Roth, W., & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*. Rotherdam: SENSE PUBLISHERS.
- Sanchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa - Presupuestos Epistemológicos que orientan al investigador*. Santa Fe de Bogotá: Magisterio.
- Tamayo, C. (2012). *(Re)significación del currículo escolar indígena, relativo al Conocimiento [matemático], desde y para las prácticas Sociales: el caso de los maestros indígenas dule de la Comunidad de alto caimán*. Medellín: Udea.
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (28 de Noviembre de 2006). COORDINACIÓN DE PROCESOS COGNITIVOS EN GEOMETRÍA. *Relime. Vol 10.*, 275.
- Valero, P. (2007). *Investigación socio-política en educación matemática: Raíces, tendencias y perspectivas*. Dinamarca: Universidad de Aalborg.

Objetivación del concepto de perpendicularidad en figuras y cuerpos geométricos  
por estudiantes de quinto grado

- Valero, P. (2009). *LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO UNA RED DE PRÁCTICAS SOCIALES*. Lyon: CERME 6.
- Vasco, C. (2006). *Didáctica de las Matemáticas. Artículos Selectos*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Vygotsky, L. (1931). CAPÍTULO 10 Desarrollo de las funciones. En L. Vygotsky, *Obras Escogidas* (pág. 43 y 44).
- Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Psicolibros.
- Wertsch, J. (2006). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Editorial Paidós.