



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE
FRACCIÓN EN EL MARCO DE UN PROYECTO
STEM CON ESTUDIANTES DE GRADO 3°, 4° y 5°
DEL C.E.R ESPERANZA EN EL CONTEXTO
ESCUELA NUEVA**

Autor(es)

Maryuris Rosa Yepes Reyes

Oscar David Bula Yáñez

Universidad de Antioquia

Facultad de educación

Departamento de educación avanzada

Medellín, Colombia

2019



**COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN EN EL MARCO DE UN
PROYECTO STEM CON ESTUDIANTES DE GRADO 3°, 4° y 5° DEL C.E.R
ESPERANZA EN EL CONTEXTO ESCUELA NUEVA**

Maryuris Rosa Yepes Reyes

Oscar David Bula Yáñez

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Educación

Asesores (a):

Dra. Luz Stella Mejía Aristizábal

Dr. Edison Sucerquia Vega

Línea de Investigación:

Educación matemática

Grupo de Investigación:

Educación Matemática e Historia –EDUMATH-

Universidad de Antioquia

Facultad de educación, Departamento de educación avanzada.

Medellín, Colombia

2019

DEDICATORIA

*“A Dios por darnos esta oportunidad
y a nuestra familia por apoyarnos”*

Maryuris yepes

Oscar bula

AGRADECIMIENTOS

Dar los agradecimientos al creador, por permitirnos cada día levantar la mirada hacia el horizonte y soñar con alcanzar las metas propuestas.

A nuestras familias que entendieron la importancia de la cualificación constante y la búsqueda del conocimiento aunque esto implique sacrificar tiempo valioso para compartir momentos familiares.

A nuestra hija, que a pesar de su corta edad ha demostrado fortaleza para soportar la ausencia de sus padres en momentos de dificultad y de triunfos.

A nuestros asesores Luz Stella Mejía Aristizabal y Édison Sucerquia Vega por desde un principio creer en nuestra ideas, valorando cada palabra expresada y corrigiendo con altura los errores cometidos por nosotros en este proceso investigativo.

Para Luz Stela Mejía Aristizábal, nuestra más sincera admiración y agradecimiento por dejarnos ver sus facetas de investigadora, docente, madre y esposa, dejando huellas imborrables en nuestras vidas, las cuales servirán de inspiración para futuros proyectos personales.

A los compañeros de maestría: Diana, Evelio, Gerson, Carmen, Jaime y Yuri porque de todos y cada uno aprendimos innumerables cosas, gracias por compartir todo este tiempo, esfuerzos, preocupaciones y consejos, de verdad que los valoramos mucho.

Al grupo de investigación Educación Matemática e Historia (EDUMATH) por cobijar nuestras investigaciones y tener un grupo de docentes con excelentes calidades humanas y profesionales.

Al doctor Carlos Mario Jaramillo por encarnar para nosotros la experiencia y rigurosidad, no solo en aspectos investigativos si también en la búsqueda de una vida contemplativa y reflexiva.

A nuestros padres por todo lo que representan e incondicionalmente brindan a nuestras vidas, decirles que son una inspiración para continuar en el camino de ser padres.

CONTENIDO

Dedicatoria	i
Agradecimientos.....	ii
Lista de tablas.....	vi
Lista de figuras.....	vii
Lista de Imágenes	viii
Lista de anexos	x
Resumen.....	xi
1. Planteamiento del Problema de Investigación	1
1.1. Descripción del Problema de Investigación	1
1.2. Antecedentes	5
1.3. Justificación.....	9
1.4. Objetivos	11
1.4.1. Objetivo General.	11
1.4.2. Objetivos Específicos.	11
2. Marco Referencial	14
2.1. La comprensión desde el Modelo de Pirie y Kieren	14
2.2. El concepto de fracción	25
2.3. Los proyectos STEM y la indagación como Metodología.....	28
3. Diseño Metodológico	31
3.1. Enfoque y Tipo de Estudio	31
3.2. Participantes y Criterios de Selección	34
3.3. Técnicas e Instrumentos para Recoger la Información	35
3.3.1. Cuestionario de indagación inicial y cuestionario final.	36
3.3.4. Observación Participante.	39
3.3.5. Entrevista Semiestructurada.	40
3.4. Técnicas y Procedimientos de Análisis	41
3.5. Compromiso ético y Criterios de credibilidad	45
4. Propuesta de Intervención	46
4.1 Contexto del Proyecto	47
Tabla 3. Propuesta STEM.....	47
4.2 Propósito del Proyecto	47
4.3 Metodología de la Propuesta	48

5. Hallazgos	56
5.1. Análisis de Actividad Diagnóstica Inicial	56
5.1.2. Representación gráfica y expresión verbal.....	57
5.1.3. Parte-todo: representación gráfica.	58
5.2 Análisis de las Actividades propuestas en el Proceso de Enseñanza de las Fracciones	61
5.4. Evolución de la Comprensión sobre las Fracciones	78
6. Conclusiones y Recomendaciones.....	113
7. Referencias.....	123

LISTA DE TABLAS**Pág.**

Tabla 1. Complementos de actuación y expresión identificados en modelo de comprensión de Pirie y Kieren	22
Tabla 2. Matriz de descriptores.....	41
Tabla 3. Propuesta STEM.....	47
Tabla 4. Contenidos y actividades del Proyecto STEM.....	51

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1 Representación del modelo para la evolución de la comprensión.....	17
Figura 2. Dinamismo de folding back.....	19
Figura 3. Adaptación del modelo de Pirie y Kieren	20
Figura 4. Modelo de comprensión de Pirie y Kieren	21
Figura 5. Propuesta para trabajar en educación primaria la orientación STEM.....	30
Figura 6. Fases o momentos de la metodología por Indagación.....	50
Figura 7. Evolución de comprensión caso 1.....	85
Figura 8. Evolución de comprensión caso 2.....	97
Figura 9. Evolución de comprensión caso 3.....	103
Figura 10. Evolución de comprensión caso 4.....	108
Figura 11. Comparación de representaciones de evolución de comprensión en los casos.....	109
Figura 12. Representación de fractalidad de modelo de comprensión según Pirie y Kieren.....	110
Figura 13. Esquema de relación de categorías.	111

LISTA DE IMÁGENES

	PAG.
Imagen 1 Representaciones de la fracción parte-todo.....	28
Imagen 2 Camino hacia la escuela	52
Imagen 3 Recorrido por la quebrada	53
Imagen 4 Exploración de características de materiales.....	53
Imagen 5 Reconocimiento de una estructura	55
Imagen 6 Implementación guía de matemáticas.....	59
Imagen 7 Desarrollo de actividades de matemáticas	55
Imagen 8 Elección del mejor diseño del puente.....	56
Imagen 9 Elaboración de prototipo de puente.....	55
Imagen 10 Uso de las fracciones en elaboración del puente.....	55
Imagen 11 Socialización de solución, estudiante E6.....	59
Imagen 12 Socialización de solución, estudiante E5.....	56
Imagen 13 Representación de la cuarta parte de una sandía. Estudiante E1.....	57
Imagen 14 Representación de la cuarta parte de una sandía. Estudiante E3, E5, E6.....	58
Imagen 15 Representación partes iguales del estudiante E5.....	58
Imagen 16 Representación de partes iguales, estudiante E8.....	58
Imagen 17 Respuesta de E3, E7, E2, E8 al cortar una hoja de block en varias partes iguales.....	61
Imagen 18 Respuesta E4, E5 al cortar imágenes u objetos por mitades iguales.....	61
Imagen 19 Fraccionar la unidad en partes iguales	63
Imagen 20 Identificando igualdad entre las partes.....	63

Imagen 21 Estudiantes en folding back 1.....	65
Imagen 22 Acción de cortar en folding back 1.....	65
Imagen 23 Proporcionalidad entre las partes.....	66
Imagen 24 Representación simbólica y grafica de fracción de E5.....	67
Imagen 25 Representación simbólica y grafica.....	68
Imagen 26 Imagen de la actividad los puentes de Camila.....	69
Imagen 27 Reconocimiento de la unidad y las partes.....	70
Imagen 28 Uso del símbolo en la representación de la fracción, respuesta de E7.....	71
Imagen 29 Representación simbólica de las fracciones	73
Imagen 30 Transición de lo simbólico a lo gráfico.....	73
Imagen 31 Transición de lo simbólico a lo gráfico, respuesta de E3.....	75
Imagen 32 Transición de la representación grafica a la expresión verbal.....	76
Imagen 33 Representación de fraccionamiento sucesivo.....	76
Imagen 34 Divisiones continuas de la unidad con material concreto.....	75
Imagen 35 Partes en las que se divide el todo.....	77
Imagen 36 Partiendo material en partes iguales.....	81
Imagen 37 Partes obtenidas al dividirla la guada.....	81
Imagen 38 Construcción del puente.....	86
Imagen 39 Conteo de partes del prototipo del puente	86
Imagen 40 Noción de mitad al dividir objetos e imágenes.....	87
Imagen 41 Dificultades de estudiantes en la noción fracción.....	89

Imagen 42 División de partes iguales del material concreto	90
Imagen 43 Actividad los puentes de Camila	91
Imagen 44 Representación del símbolo fraccionario de una representación gráfica.....	92
Imagen 45 Ubicación del símbolo fraccionario.....	94
Imagen 46 Representación simbólica y gráfica de la fracción.....	99
Imagen 47 Representación gráfica y expresión verbal de la fracción.....	95
Imagen 48 Comprensión de fracciones equivalentes	97
Imagen 49 Respuesta de estudiante en folding back.....	98
Imagen 50 Evidencia de la comprensión de imagen	99
Imagen 51 Reconocimiento de atributos de fracción.....	99
Imagen 52 Unión de piezas para el puente.....	101
Imagen 53 Representación simbólica de la fracción con el prototipo del puente.....	101
Imagen 54 Conteo de piezas para el folding back	103
Imagen 55 Uso de fracciones para pintar del puente.....	103
Imagen 56 Respuesta del estudiante para cuartos de sandía.....	104
Imagen 57 Evidencia de la dificultad en el nivel comprensión de la imagen.....	105
Imagen 58. Respuesta de E3 para la representación simbólica de fracción.....	106
Imagen 59. División de partes para respuesta a entrevista.....	107

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1	133
Anexo 2	134
Anexo 3	136
Anexo 4	139
Anexo 5	143
Anexo 6	146
Anexo 7	156
Anexo 8	157

RESUMEN

El presente estudio tiene como propósito analizar la comprensión del concepto de fracción de los estudiantes de grado 5° del CER Esperanza, en el marco de un Proyecto STE M, en el contexto Escuela Nueva. Los participantes serán estudiantes del grado 5° de la básica Primaria, con los que trabajará un proyecto STEM, que surgió de una situación problemática contextual: ¿cómo cruzamos las quebradas para llegar a la escuela en época de lluvias?

La investigación centró su atención en cómo el estudiante comprende el concepto de fracción (parte-todo), integrando el contenido matemático con otros áreas como la ingeniería, la tecnología y las ciencias. El proyecto STEM se implementó bajo la metodología de indagación y los estudiantes diseñaron un prototipo de puente lo que les implicó la toma de decisiones frente al tipo y diseño de la estructura, los materiales, las dimensiones del puente, entre otros. La investigación se inscribe en un enfoque cualitativo y utilizó el *método de estudios de casos*. La información se recogió en cuestionarios, guías de aprendizaje, observación participante y entrevista semiestructurada. Para dar cuenta del nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes sobre el concepto de fracción, se utilizó el análisis de contenido.

Los hallazgos dan cuenta que los estudiantes presentan nociones de unidad, partes e igualdad, se evidencia dificultades para el uso de símbolos, la expresión verbal y las reparticiones equitativas de la fracción, y se observó la evolución de la comprensión y los diferentes procesos mentales y físicos desarrollados por cada uno de los estudiantes para la creación de una imagen mental del concepto.

Palabras claves: Fracción, comprensión, escuela nueva, folding back, STEM.

ABSTRACT

The purpose of this study is to analyze the understanding of the concept of fraction of the 5th grade students of CER Esperanza, within the framework of a STE M Project, in the context of Escuela Nueva. The participants will be students of the 5th grade of the Primary school, with whom a STEM project will work, which arose from a problematic contextual situation: how do we cross the streams to arrive at the school in the rainy season?

The research focused on how the student understands the concept of fraction (part-whole), integrating mathematical content with other areas such as engineering, technology and science. The STEM project was implemented under the inquiry methodology and the students designed a prototype bridge which implied decision making regarding the type and design of the structure, the materials, the dimensions of the bridge, among others. The research is part of a qualitative approach and used the case study method. The information was collected in questionnaires, learning guides, participant observation and semi-structured interview. To account for the level of understanding reached by the students about the concept of fraction, content analysis was used.

The findings show that students have notions of unity, parts and equality, there are difficulties in the use of symbols, verbal expression and equitable distributions of the fraction, and the evolution of understanding and the different mental processes were observed. physicists developed by each student to create a mental image of the concept.

Keywords: Fraction, understanding, new school, folding back, STEM.

1. Planteamiento del Problema de Investigación

1.1. Descripción del Problema de Investigación

Las matemáticas, desde la antigüedad han tenido gran importancia en las diferentes esferas de la vida. Están presente en la mayoría de los momentos del día, tal y como se expresa en la entrevista que realizó M. Sc. Villafrades al profesor Prada (2016):

Solo basta con mirar a nuestro alrededor y observar números, por ejemplo, en las direcciones, en la forma como definimos el tiempo en años, meses, días, horas. Es tan evidenciable las matemáticas, que aunque no usemos fórmulas o ecuaciones algebraicas, somos capaces de representar modelos basados en los fenómenos con los cuales nos enfrentamos a diario (p.1).

A pesar del reconocimiento de las matemáticas en la vida de los seres humanos, se podría afirmar que es una de las áreas de mayor dificultad en el currículo. Específicamente, en el Centro Educativo Rural Esperanza del Municipio de Arboletes, que trabaja bajo el Modelo Educativo Escuela Nueva (en adelante E.N), en donde se presentan algunas preocupaciones que tienen relación con la comprensión de las matemáticas y su aplicabilidad para solucionar problemas del contexto, por parte de los estudiantes.

Esta institución se encuentra ubicada en la vereda Platas Arriba, en zona rural del Municipio de Arboletes-Antioquia, a 68 kilómetros de su cabecera municipal. Se caracteriza por

su condición de difícil acceso, pues las vías con las que cuenta no están pavimentadas y solo opera una ruta diaria de servicio de transporte.

La población proviene de comunidades pertenecientes a los departamentos de Córdoba, Antioquia y Choco, que se desempeñan en labores de ganadería y agricultura, su nivel educativo máximo es la Básica Primaria y el nivel socio económico de las familias está marcado en gran parte por las condiciones de pobreza, violencia y desplazamiento de algunos integrantes del núcleo familiar.

En el reporte de los resultados de matemáticas en Pruebas Saber la institución en el año 2017, específicamente en los grados tercero y quinto, (en los que se evalúa la habilidad que tienen los estudiantes para solucionar problemas, es decir, su capacidad de entender un enunciado, de realizar procedimientos y de solucionarlos), se encontró que: en el grado tercero un 33% de los estudiantes presenta un desempeño insuficiente; un 43% en mínimo, 15% en satisfactorio y, un 8% en avanzado. En cuanto al grado quinto, el 78% posee un desempeño insuficiente, 18% mínimo, 4% satisfactorio y 0% en avanzado. Estos porcentajes, muestran que en la institución, los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de situaciones problemas que involucran conocimientos relacionados en el grado, entre ellos con las fracciones.

En los estándares Básicos de Competencia en matemáticas para el grado 4° y 5°, se encuentra: “Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones e identifico y uso medidas relativas en distintos contextos” (p.82). Evidenciándose cómo desde las directrices del Ministerio de Educación Nacional se orientan desempeños en términos de las competencias matemáticas que se espera que los estudiantes desarrollen en su proceso educativo.

Desde nuestra experiencia docente, evidenciamos que efectivamente, algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en matemáticas, tienen que ver con la comprensión del concepto de fracción, pues para ellos, son números que carecen de significado. Ellos aprenden a realizar ejercicios de manera mecánica, de ahí que, les resulte difícil su interpretación y aplicación en situaciones del contexto. Igualmente, presentan confusión con respecto al concepto de fracción impropia, pues ellos piensan que la unidad no es suficiente para realizar la repartición, lo que genera dificultades a la hora de expresar la fracción matemáticamente.

Consideramos además, que el problema de la comprensión del concepto de fracción que se da en la básica primaria, incide en la posterior comprensión de otros conceptos matemáticos, por ejemplo, en la noción de números racionales que se trabaja en la básica secundaria, pues de acuerdo con Butto (2013):

La mayoría de los estudiantes ven las fracciones como “parte de un todo” y los procedimientos utilizados por ellos cuando trabajan con fracciones indican que prefieren tratar el denominador y el numerador como entidades separadas. Bajo esta concepción, evidentemente la comparación de fracciones es un problema, la equivalencia de fracciones, la magnitud, estimación y otras ideas importantes que determinan el sentido numérico de las fracciones (p. 3).

El tratamiento conceptual del concepto de fracción es también una dificultad a la hora de comprenderlo, pues se entiende solo desde un significado “parte-todo”, se deja de lado sus

diferentes formas de representarlo, es decir, en su relación de cociente, medida, porcentaje, entre otras, todas estas interpretaciones son de relevancia en grado quinto para el estudiante ya que deben ser alcanzadas en este grado.

Por otra parte en el contexto de Escuela Nueva en el que se trabaja, se presentan algunas dificultades propias de la ruralidad, pues nos toca enfrentarnos a diversas necesidades relacionadas con el nivel educativo, la edad del estudiante, y la motivación, factores que juegan en contra de la calidad educativa que se pretende. Además, las instituciones que trabajan bajo el Modelo Educativo Escuela Nueva, por lo general, se encuentran ubicadas en zonas de difícil de acceso, con problemáticas particulares como: “la formación docente, desarrollo curricular, de evaluación y de desarrollo de materiales, ignoran la realidad multigrado” (Fundación Escuela Nueva, 2009, p. 35).

Específicamente, en nuestro lugar de trabajo, el Centro Educativo Rural Esperanza, su condición de difícil acceso geográfico ocasiona ausentismo, ya que muchos niños no pueden llegar todos los días a la institución, en muchas ocasiones para llegar a la escuela deben superar una barrera natural (el pasar por dos quebradas, que carecen de puentes para poder cruzarlas), situación que se ha convertido en una dificultad para profesores y estudiantes, pues en época de invierno, no es posible llegar a la escuela. Esta problemática de movilidad repercute en el normal desarrollo del calendario académico y por ende incide en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En aras entonces de dar respuesta a una problemática del entorno, pero además con la finalidad de motivar el aprendizaje de las matemáticas, esta investigación se encamina hacia el

diseño de una propuesta de intervención en el marco de un proyecto STEM (por sus siglas en inglés: ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas), para que de esta manera se pueda convertir esta dificultad del contexto, en una oportunidad para crear un escenario de aprendizaje de las matemáticas, desde donde se pueda abordar el concepto de fracción y así lograr que los estudiantes lo comprendan.

Atendiendo entonces a las posibles dificultades en la comprensión que tienen los estudiantes del concepto de fracción y a las oportunidades que ofrece el contexto y el Modelo Escuela Nueva, se considera necesario realizar una investigación que desde un enfoque cualitativo posibilite analizar cómo a partir de la implementación de un Proyecto STEM, se pueda contribuir a minimizar dichas dificultades.

1.2. Antecedentes

La revisión de antecedentes sobre el objeto de estudio se llevó a cabo en diferentes bases de datos como: *Redalyc*, y *Google académico* y en el repositorio digital de biblioteca de la Universidad de Antioquia. Se seleccionaron investigaciones de índole nacional e internacional de los últimos cinco años. Específicamente, se encontraron artículos relacionados con las categorías: comprensión de fracciones, enseñanza de las fracciones, uso de materiales en la enseñanza de fracciones y propuestas de integración curricular desde los proyectos STEM.

Con respecto a la categoría *comprensión del concepto de fracción* se encontró la tesis doctoral de Castro (2015), que tiene como título “significados de las fracciones en las matemáticas

escolares y formación inicial de maestros” de la universidad de Granada, el estudio se realizó bajo la perspectiva teórica del análisis didáctico desarrollado en los trabajos de grupos de investigación de didáctica de la matemáticas en la universidad. El análisis se enfocó hacia: (a) un estudio teórico o conceptual de la relación parte-todo de las fracciones, con el propósito de fundamentarla y de establecer sus distintas interpretaciones, incluidas las escolares y (b) el conocimiento didáctico del contenido, centrándose en el diseño de tareas escolares, planteamiento de expectativas y detección de limitaciones en el aprendizaje, como componentes del análisis cognitivo. El estudio se esfuerza en detectar limitaciones en el aprendizaje de las fracciones, pero se deja de lado a los estudiantes, su contexto y sus interpretaciones. Se centra más en los maestros en formación, así como en el currículo.

El trabajo de investigación de Arroyave, Ciro y Ocampo (2016): “Aproximación para la comprensión de las fracciones en los grados transición, primero y segundo”, tuvo como objetivo acercar a los estudiantes de transición, primero y segundo a la noción de fracción, por medio de actividades fundamentadas en la enseñanza para la comprensión, se llevó a cabo bajo el paradigma cualitativo con un enfoque de investigación-acción. En sus conclusiones, los autores proponen que se debe considerar como estrategia el uso de material concreto, que les permita a los estudiantes hacer la manipulación del mismo, con el fin de que puedan observar la representación de manera tangible y realizar los repartos y las particiones cuando sea necesario.

De este estudio se puede concluir que, es importante el uso de materiales sobre todo en los primeros grados de escolaridad, del mismo modo, se puede establecer que para efectos del desarrollo del objetivo de la investigación es necesario no centrarse solo en el uso de materiales,

sino por el contrario, involucrar otros elementos que doten de significado el concepto de fracción. De igual forma, el aporte de la anterior investigación también aborda elementos didácticos en la medida en que contribuye al diseño actividades en el marco de un proyecto STEM.

Con respecto a las categoría *enseñanza de las fracciones* a nivel local se encontró la tesis de Murillo (2014): “Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación en la solución de situaciones cotidianas con fracciones” el autor, realiza recomendaciones sobre cómo propiciar el uso de material concreto, al iniciar un tema. Los estudiantes puedan manipular objetos o elementos y realizar exploraciones seguidas de una serie de comparaciones para luego complementarlas con argumentaciones. Estudios como este, se convierte en un fundamento importante para la presente investigación, en la medida que evidencia la necesidad del material concreto en el proceso de aprendizaje, pues de acuerdo con los autores al incorporarlos, la comprensión del concepto de fracción se enriquece.

El artículo de investigación de Acevedo, López, Guerrero, y Morales (2013): “La fracción parte-todo a través de una mirada gráfica”, que se realizó con estudiantes de grado tercero del colegio Liceo Bet-el de Bogotá (Colombia) que evidencia algunas falencias de interpretación de las fracciones. En sus conclusiones: las fracciones como parte-todo y la representación gráfica, da paso a comprender su naturaleza, fortaleciendo la comprensión y la parte inductiva de las operaciones suma y resta.

Para la comprensión de fracciones y superar algunas dificultades Fazio y Siegler (2011) plantean que los “docentes deben enfocarse en desarrollar la comprensión conceptual junto con la

fluidez procedimental. Una forma de mejorar la comprensión conceptual es el uso de material didáctico manipulativo y la representación visual de las fracciones” (p. 12). De modo que al momento de tratar un concepto matemático se debe acompañar o apoyarse con material visual, para el caso de las fracciones es de suma importancia la parte gráfica. Así mismo, permiten tener referentes sobre la utilización de los materiales en el aprendizaje de las fracciones y muestra un camino importante para su enseñanza en el aula de clase.

También cabe resaltar que una de las dificultades en la enseñanza de las fracciones es su tratamiento didáctico, por lo que es relevante una mirada de ciertos investigadores como Streefland 1991 (citado por Valdemoros, 2010) quien plantea la didáctica de las fracciones mediante modelos bastantes originales, apoyados en situaciones reales y materiales concretos sencillos y cargados de sentido para el alumno. De esta manera, la situación que se presenta en el contexto del estudio que tiene relación con la dificultad de movilidad para llegar a la escuela proporciona un escenario para la reflexión en torno al significado de las fracciones.

Por último en cuanto a la *categoría relacionada con STEM* se encuentra la investigación de maestría de la Universidad de los Andes realizada por Laverde (2016), que tiene por título “diseño de un módulo didáctico con el enfoque STEM para la enseñanza/aprendizaje de los gases en la educación media”. Este estudio se enfoca en el proceso de enseñanza y aprendizaje del comportamiento de los gases para estudiantes de grado décimo a través del diseño de un módulo STEM el cual está dirigido a profesores integrando las cuatro disciplinas para dar solución a una situación problema, implementan la ingeniería didáctica para la construcción del módulo, hacen un análisis de contenido desde las ciencias, la matemática y la ingeniería.

Como se puede evidenciar las investigaciones en STEM se realizan tanto en campo de la educación secundaria como universitaria, lo que de alguna manera, justifica la realización del presente estudio en la educación primaria y, específicamente en el modelo de Escuela Nueva.

De acuerdo a lo anterior, las mencionadas investigaciones brindan herramientas conceptuales sobre la enseñanza de las fracciones, dificultades que se presentan en diferentes contextos y las diferentes formas de entender la fracción, sin embargo, no se reportan al momento estudios que involucren al mismo tiempo dificultades de comprensión de fracciones en la primaria abordadas desde un proyecto STEM en un contexto de escuela nueva.

1.3. Justificación

Ante los bajos desempeños en el área de matemáticas, que presentan los estudiantes del CER Esperanza en las pruebas saber, particularmente en la comprensión del concepto de fracción y además ante la carencia de materiales didácticos para la enseñanza de esta área, se hace necesario realizar una investigación que permita mejorar la comprensión con respecto a este concepto.

¿Cómo atender a esta necesidad? se propone orientar la enseñanza de las fracciones en el marco de los proyectos STEM (*Science, Technology, Engineering, Mathematics* en sus siglas en inglés), mediante el cual sea posible vincular las dificultades del contexto, con el diseño de materiales y los conocimientos matemáticos. De ahí entonces que la pertinencia del proyecto STEM en esta investigación, radica fundamentalmente en tres elementos que hacen parte de su naturaleza:

Por un lado, se encuentra que STEM requiere de la integración de varias disciplinas, lo que es una posibilidad para que el maestro investigador de Escuela Nueva, quien imparte todas las áreas, pueda desarrollar su labor apoyada en la aplicación de proyectos integradores de áreas del conocimiento. Como segundo elemento, encontramos que dichos proyectos se deben abordar y ejecutar siempre en función de la utilización de materiales concretos y diseño de actividades que estarán en relación con los objetos de estudios de las disciplinas que la integran. Por último y, como tercer elemento, se encuentra el contexto del estudiante, protagonista por así decirlo del proyecto, ya que la vinculación de las vivencias y elementos del entorno del sujeto son los que garantizan un grado de interés en el mismo.

Todo lo anterior abre el camino para justificar la pertinencia de la implementación del proyecto STEM, teniendo en cuenta que el modelo E.N es flexible, lo que permite involucrar otros modelos o metodologías que tiene como principio integrar varias áreas o disciplinas del conocimiento en la comprensión de un concepto o fenómeno.

Esta investigación puede además, ampliar la mirada sobre la enseñanza del concepto de fracción generando validez conceptual y vivencial en los estudiantes y de esta manera poder conocer procesos cognitivos que se deben abordar para el fortalecimiento de las habilidades que se desarrollan en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Con el estudio se pretende también aportar al respecto de la enseñanza de las matemáticas en el contexto rural, brindando la posibilidad de trabajar desde situaciones contextuales en las que

se pueda presentar como viable para la enseñanza en E.N, los proyectos STEM y la metodología por indagación.

Sumado a esto, es importante resaltar que la investigación es necesaria ya que no se reportan estudios que trabajen STEM a nivel de la primaria con estudiantes del modelo educativo de Escuela Nueva y en específico, sobre la comprensión de las fracciones en el contexto del CER Esperanza (Guadual Arriba, Arboletes), además puede ser la posibilidad para que otros colegas con situaciones similares pueda continuar con estas reflexiones.

Finalmente, la investigación pretende abordar la pregunta ¿cómo comprenden el concepto de fracción los estudiantes de grado 3°, 4° y 5° del CER Esperanza, en el marco de un Proyecto STEM en el contexto de escuela nueva?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General.

Analizar la comprensión del concepto de fracción que adquieren los estudiantes de grado 3°, 4° y 5° del CER Esperanza, en el marco de un proyecto STEM, en el contexto Escuela Nueva.

1.4.2. Objetivos Específicos.

- Indagar por las dificultades en la comprensión del concepto de fracción, que presentan los estudiantes del modelo Escuela Nueva.
- Describir la evolución de la comprensión del concepto de fracción, que adquieren los estudiantes del modelo Escuela Nueva, cuando desarrollan un Proyecto STEM.

- Identificar las posibilidades didácticas de los Proyectos STEM en la comprensión de conceptos matemáticos y para el modelo Escuela Nueva.

2. Marco Referencial

En el presente capítulo, se exponen los fundamentos teóricos del modelo de comprensión de Pirie y Kieren para el análisis de la comprensión del concepto de fracción, describiéndose las características que posee el modelo y cada uno de los niveles que lo conforman, del mismo modo se presentan planteamientos conceptuales en relación a la fracción y sus diferentes interpretaciones, por último se señalan los fundamentos esenciales de STEM y su pertinencia en el contexto de Escuela Nueva.

2.1. La comprensión desde el Modelo de Pirie y Kieren

La comprensión ha sido un tema que desde hace muchos años preocupa a los didáctas en matemáticas, específicamente en lo relacionado con su definición y caracterización. Específicamente, El término comprensión ha sido usado por muchos autores en diferentes épocas, es un concepto que evoluciona pero además depende, del punto de vista de cada autor, la comprensión antes de 1978 es considerada por Brownell y Sims (1946) citado por Meel como:

- (a) la capacidad de actuar, sentir o pensar de manera inteligente respecto a una situación
- (b) varia respecto al grado de exactitud e integridad;
- (c) varia respecto a la situación problemática que se presente;
- (d) necesite conectar las experiencias del mundo real y los símbolos inherentes;
- (e) necesita verbalizaciones a pesar de que puedan tener significados menores;
- (f) desarrolla varias experiencias, en vez de las mismas;
- (g) está influida por los métodos empleados por parte del maestro; y
- (h) es inferida por la observación de las acciones y verbalizaciones (p.225).

En este orden de ideas la comprensión después de 1978 fue clasificada en dos tipos de comprensión por Skemp (1796) citado por Meel en la cual “la comprensión relacional como saber qué hacer y por qué se debe hacer y la instrumental como tener reglas sin una razón” luego esa clasificación incluyó una tercera llamada “lógica organización de acuerdo con una prueba formal (1979) y una cuarta como simbólica una conexión de simbolismo y notación para las ideas asociadas (1982)” (p. 226).

En cuanto a los puntos de vistas más recientes de algunos autores en relación a la comprensión, Vinner (1991) citado por Meel “el estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto, la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto” (p.228).

Sumado a lo anterior Meel (2003) menciona que Glasersfeld percibe la comprensión como un proceso continuo para organizar las estructuras del conocimiento de una persona, por lo tanto esta definición es enriquecida por Pirie y Kieren y es entonces cuando desarrollan su modelo de comprensión, el cual es concebido como estable pero no es lineal, en otras palabras Pirie y Kieren (1992) expresan que:

Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentran restringido por los que están fueran de él (P. 508).

El modelo de Pirie y Kieren (1992) contiene ocho niveles de comprensión, *estrato de conocimiento primitivo, creación de imagen, estrato comprensión de la imagen, estrato observación de la propiedad, estrato formalización, estrato de la observación, estructuración y estrato de invención.*

Según Meel (2003), los niveles se describen, así:

Estrato de *conocimiento primitivo*, “punto inicial; no un bajo nivel de matemáticas. El contenido central es toda la información que él estudiante atrae a la situación de aprendizaje” (p. 236).

Estrato de *creación imagen*, “las acciones que se realizan en este estrato se relacionan con que el estudiante realice algo, mental o físico para obtener una idea sobre un concepto” (p. 237).

Estrato de *comprensión de la imagen* “desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicamente particulares” (p.237).

Estrato de *observación de la propiedad* el estudiante puede examinar una imagen mental y determinar los distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales (p. 237).

En cuanto al quinto estrato *formalización* el estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las propiedades comunes de las clases de imágenes. En este estrato el estudiante

tiene objetos mentales de clases similares contruidos a partir de propiedades observadas, la abstracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (p. 238).

Sucesivamente el sexto estrato de comprensión llamado *la observación*, el estudiante puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado (p. 238).

El séptimo estrato *estructuración* el estudiante puede explicar la interrelación de dichas observaciones mediante un sistema axiomático (p. 238).

El ultimo estrato llamado *invención* que en la forma como está concebido el modelo se encuentra ubicado por fuera de los otro siete niveles ya que “la comprensión matemática del estudiante es infinita, imaginativa y llega más allá de la estructura actual” (p. 239).

Ahora bien, la forma como Pirie y Kieren representan los niveles de comprensión, es la siguiente:

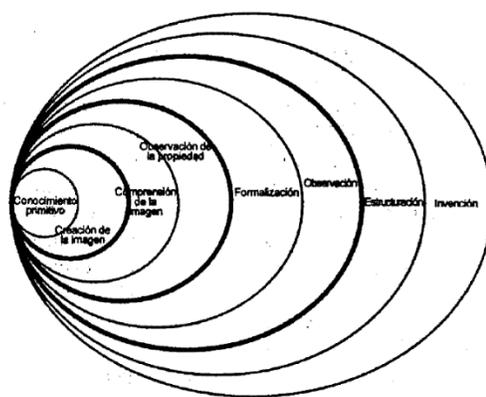


Figura 1. Representación del modelo para la evolución de la comprensión

Fuente: Pirie y Kieren (Citado por Meel. 2003, p.236)

Tal representación, da cuenta de la estructura del modelo de comprensión de Pirie y Kieren el cual está formado por anillos en donde cada uno se ubica un nivel de comprensión.

Dentro de las características fundamentales del modelo de comprensión de Pirie y Kieren, se encuentra que: *folding back*, *fractalidad*, *límites de falta de necesidad* y *complementariedad de la acción y la expresión*.

Una de las características más importante del modelo es el *folding back*, ya que el sujeto que se encuentra con un problema cuya solución no se puede encontrar de forma inmediata, debe observarse la necesidad de volver a doblar para llegar a un estrato más interno y para extender la comprensión actual e inadecuada de la persona (citado por Meel, 2003). De esta manera se puede considerar que esta característica permite una mayor comprensión en la medida de mayor uso de *folding back* porque le permite reexaminar los conocimientos usados previamente para alcanzar el nivel siguiente.

Queda claro que a pesar que el modelo cuenta con niveles jerárquicos y esquematizados se puede llevar a cabo la acción de volver a un nivel anterior sin que esto se considere como un fracaso, por el contrario una reorganización de la información contenida en el nivel inmediatamente anterior, esta relación de volver involucra la mediación del docente, otra característica que posee el modelo, ya que sin éste no podría ser evidente o verificable el grado de avance entre los niveles por lo que el estudiante puede avanzar, regresar y de nuevo regresar ya que el proceso de comprensión es dinámico como se observa en la siguiente figura planteada por Pirie y Kieren (1994).

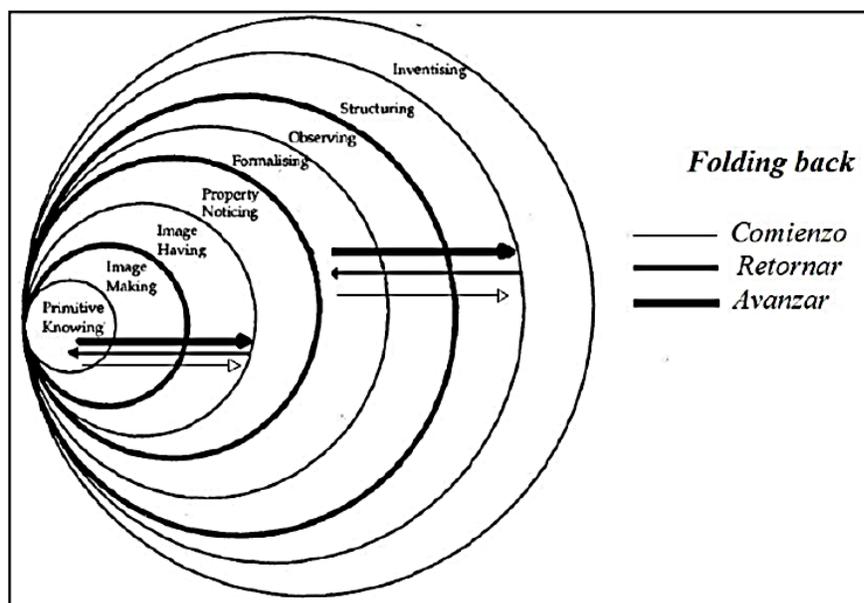


Figura 2. Dinamismo de folding back

Fuente: Pirie y Kieren (1994, p. 173)

La otra característica del modelo es la *fractalidad*, Pirie y Kieren citado por Meel expresa que: “los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel externo no permite, y de hecho retiene, los niveles interno. Los niveles externos se insertan y envuelven a los externos” (p.240).

Cada nivel del modelo de comprensión posee unos niveles internos, el estudiante para comprender requiere de recorrer internamente esos niveles, para alcanzar el nivel siguiente, lo cual sucede de igual forma en cada nivel del modelo como se representa en la siguiente figura:

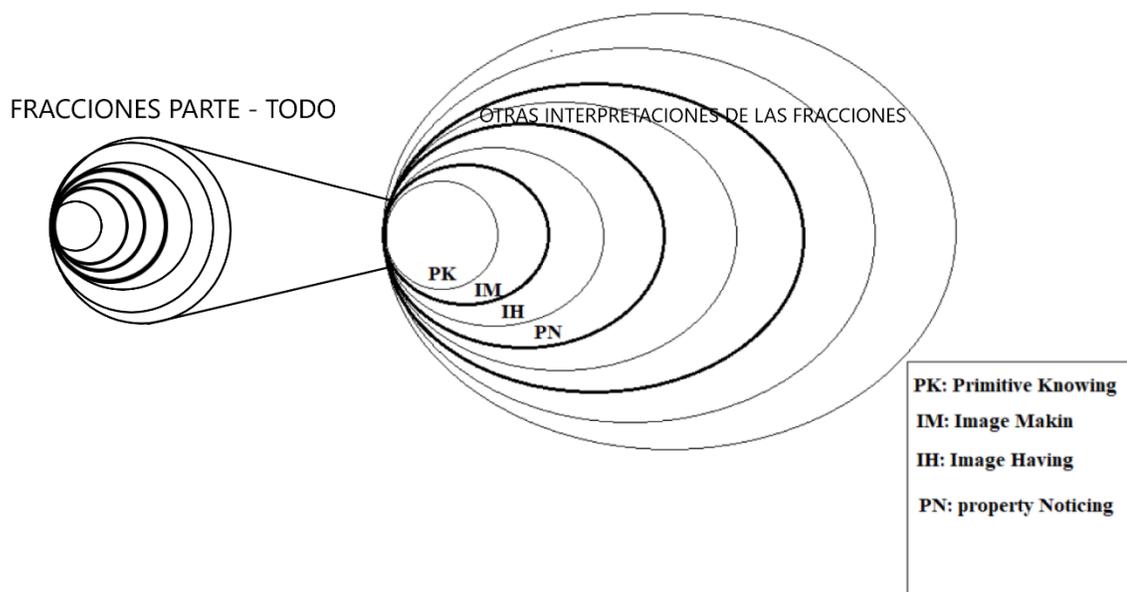


Figura 3. Adaptación del modelo de Pirie y Kieren (1994, p. 172)

En este sentido, se considera necesaria la fractalidad en la medida que para iniciar un proceso de comprensión de las fracciones en otras interpretaciones como razón o medida se debe iniciar por el nivel de conocimiento primitivo, este está conformado internamente por un proceso de comprensión previo y que dan origen a otras nociones.

En cuanto a la característica de límites de falta de necesidad Pirie y Kieren (1994) expresan:

Más allá de la frontera uno no necesita la comprensión interna específica que dio lugar al conocimiento externo. Uno puede trabajar a un nivel o abstracción sin la necesidad de referirse mental o físicamente a imágenes específicas. Esto no implica, por supuesto, que uno no pueda volver a la comprensión de antecedentes específicos si es necesario (p.173).

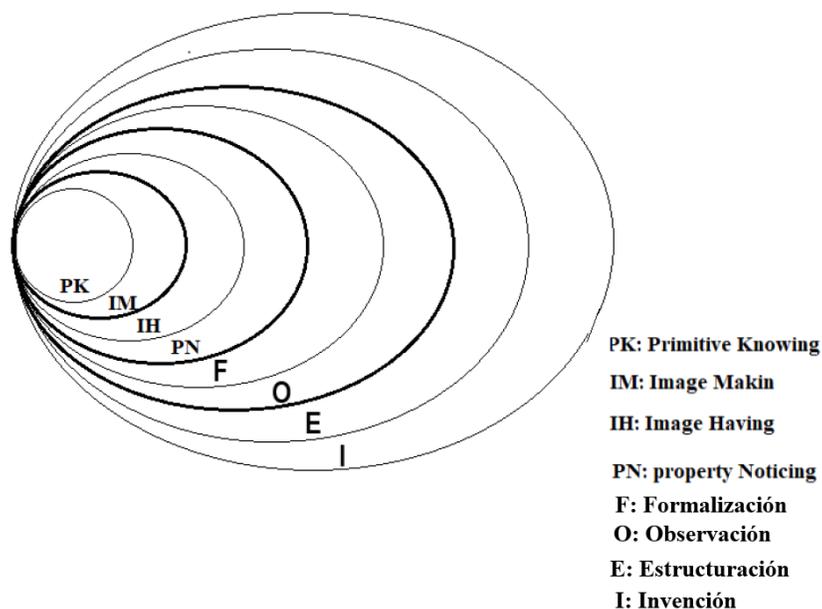


Figura 4. Modelo de comprensión de Pirie y Kieren (1994)

Los *límites de falta de necesidad* se presentan en fronteras con algunos de los niveles, están identificados por unos anillos que están en color más negro de la figura 4, se ubican entre los niveles de *creación de la imagen y comprensión de la imagen*, entre los niveles de *observación de la propiedad y formalización*, y entre los niveles de *observación y estructuración*. Cuando el estudiante se encuentra en estos límites posee una comprensión más estable sin embargo, no significa que no requiera de *folding back*.

En este sentido los límites de falta de necesidad representan una comprensión sólida que en muchos casos no amerita el recurrir a niveles anteriores, ya que el individuo tiene una imagen mental o construcción de esa imagen refinada y ha creado un símbolo para referirse al concepto abordado, es decir se presenta una abstracción.

La otra característica que identifica el modelo es la complementariedad de un proceso y la acción orientada a la forma. Pirie y Kieren citado por Meel (2003), plantea que “estos límites se refieren al paso del estudiante hacia una comprensión más elaborada y estable que no requiere necesariamente los elementos de los estratos más bajos” (p. 243). Por lo que “cada uno de los estratos, más allá del estrato del conocimiento primitivo, contiene una complementariedad de forma y proceso” Meel (2003).

Por lo tanto, los estudiantes al tener comprensión de un concepto matemático deben realizar acciones y expresiones que demuestren que están en ese nivel, por lo que Pirie Kieren (1994) afirman citado por Meel (2003) que: “si los estudiantes realizan solo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasan al siguiente nivel” (p. 241).

De esta manera, el estudiante debe demostrar su comprensión y expresar, ya sea de forma escrita, verbal o pictórica en su respectivo nivel, exceptuando el nivel de conocimiento primitivo y el de invención, por lo que a continuación en la tabla 1 se muestran las complementariedades en cada nivel de comprensión:

Tabla 1.

Complementos de actuación y expresión identificados en modelo de comprensión de Pirie y Kieren. Elaboración propia

NIVEL DE COMPRENSIÓN	ACCIÓN	EXPRESIÓN
Creación de la imagen	Realización de la imagen	Análisis de la imagen
Comprensión de la imagen	Visualización de la imagen	Expresión de la imagen
Observación de la propiedad	Predicción de la propiedad	Registro de la propiedad
Formalización	Aplicación del método	Justificación del método

Observación	Identificación de las características	Descripciones de las características
Estructuración	Conjetura de un teorema	Demostración de un teorema

Al parecer, este tipo de complementariedades propias de la estructura del modelo teórico son elementos esenciales en el análisis de la comprensión de un estudiante cuando inicia un proceso de comprensión de conceptos matemáticos, ya que la característica de complementariedad representa las conexiones que puede crear el estudiante al relacionar imágenes mentales con acciones específicas que en ocasiones están vinculadas con expresiones de todo tipo y que buscan evidenciar que la comprensión de un concepto ha sido efectiva y duradera.

Un ejemplo claro de este tipo de complementariedad se da cuando en un nivel como el de *observación de la propiedad*, se tiene como elementos complementario la predicción de la propiedad y el registro de la propiedad. El estudiante al abordar el concepto de fracción en su interpretación como parte – todo es capaz de observar, que en la representación gráfica de las fracciones es necesario que exista una proporcionalidad entre las partes de una fracción, el hecho de identificar esta propiedad, indica que el estudiante está cumpliendo con esta característica del modelo pero también es necesario que el estudiante tenga la capacidad de expresar de manera verbal, escrita o pictórica que la fracción representada gráficamente cumple o no con la propiedad de igualdad o proporcionalidad observada inicialmente.

En el mismo sentido se reitera que las acciones asociadas a las imágenes mentales creadas deben estar vinculadas a expresiones en cada nivel de comprensión para que se desarrolle un proceso cognitivo efectivo alrededor de un concepto matemático.

Por otro lado, es necesario aclarar que en el presente estudio se tuvieron en cuenta las características de *folding back*, los límites de falta de necesidad y complementariedad de acción y expresión como elementos que aportaron al análisis de la comprensión y que características como la fractalidad se consideraron inherentes al modelo por lo que ayudan a comprender que las nociones de los estudiantes son el punto de partida del proceso de comprensión, ya que todo concepto antes de crearse debió pasar por un proceso previo de construcción en donde se integran las nociones más primitivas y las acciones para luego refinar y volver un nuevo proceso de construcción.

2.2. El concepto de fracción

El concepto de fracción posee varias concepciones cada una de diferentes autores, así mismo varía sus diferentes interpretaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los textos en la educación.

Algunos autores se han referido a las fracciones como por ejemplo, para Mancera (1992) “el concepto de fracción puede representarse como un cociente de enteros o una expresión decimal” (p.3). En Fandiño (2009), la “fracción deriva del término latino *fractio*, ese decir, “parte obtenida rompiendo”, es decir “romper” (p. 37). Mientras que para Freudenthal (1988), las “fracciones están ligadas a los números racionales desde una perspectiva fenomenológica, pues en este sentido la fuente de los números racionales surge de la noción de fracturador o fracción” (p.1). Se presenta además, una riqueza fenomenológica del término fracción en el lenguaje cotidiano cuyo significado da cuenta de una cantidad o magnitud, es decir: la mitad de, formador de múltiplos, medida, expresión de mezclas.

Son muchos los autores que expresan las diferentes interpretaciones y evolución que posee el concepto de fracción con el fin de dar argumentos sobre la dificultad de su aprendizaje, como lo es Streefland (1982), Behr, Lesh, post y Silver (1983), Freudenthal (1983) y Kieren (1981).

Específicamente, Freudenthal (1983), señala la importancia de las diferentes interpretaciones que posee las fracciones desde su riqueza fenomenológica, pues expresa:

- (a) “Las fracciones en el lenguaje cotidiano *la mitad de* (por analogía con igual de, el doble de...” (p. 3).

“compara cantidades y valores de magnitudes. Menos usual es *un tercio de, dos tercios de...*, largo, pesado, viejo...” (p.3).

“*dos y un tercio veces de...*, largo, pesado, viejo...” (p.3).

...como si fuera una extensión de... *el doble de...*, largo, pesado, viejo... (p.3).

Los anteriores ejemplos, propuestos por el autor, dejan ver las diversas nociones que puede tener una persona sobre las fracciones, desde lo que se considera el lenguaje común o cotidiano. Sumado a lo anterior Freudenthal (1983) también plantea un método para “fracturar”, es decir fraccionar o dividir el todo:

Irreversible, o reversible, o meramente simbólico. La igualdad de partes se estima a ojo o por tacto, o por métodos más sofisticados. Uno de ellos es doblarlo en dos para partirlo por la mitad, doblarlo en tres para dividirlo en tres partes iguales; doblarlo repetidamente en dos y tres conduce a más fracciones. Los objetos pesados se parten por la mitad pesando las partes en las manos o en una balanza, mientras se corrige repetidamente la falta de equilibrio similarmente comparar y corregir (p.8).

Todas estas formas de fraccionar ya sea un objeto o figura geométrica, demuestran que proviene intuitivamente del individuo de sus experiencias, en este caso particular de los estudiantes que tienen una relación directa con su contexto rural.

Otra interpretación de la fracción de este autor es (b) *todo y parte*: “Del modo más concreto las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado, en partes iguales, o si se experimenta, imagina, piensa” (p.9).

En este sentido Freudenthal (1983), señala desde un modo más concreto que las fracciones de un “todo y parte” en el cual el todo puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura, guardando relación con otros autores que abordan la interpretación de las fracciones de una manera más específica en lo que tiene que ver con la representación de manera discreta o continua de una fracción. De esta forma Mancera (1992), propone las siguientes ilustraciones:

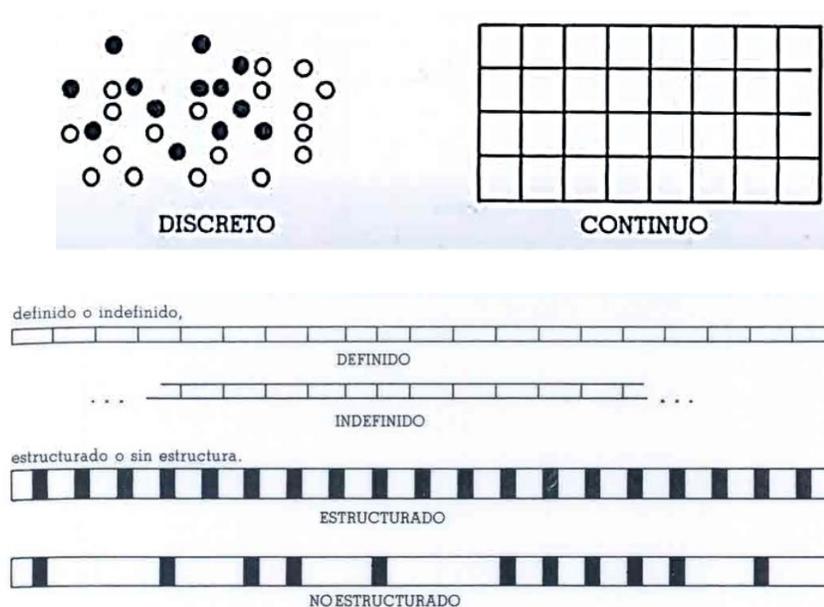


Imagen 1. Representaciones de la fracción parte-todo. Fuente: Mancera. (1992, p. 39)

En cuanto a la interpretación o relación de la fracción como (c) comparador Freudenthal plantea que al comparar objetos se experimenta, imaginan y piensan, ejemplificándolo así:

En esta habitación hay la mitad de mujeres que de hombres, el banco es la mitad de alto que la mesa, la calle es $2\frac{1}{2}$ veces más ancha que el sendero, Juan gana la mitad que Pedro, el cobre es la mitad de pesado que el oro (p. 15).

Así mismo otra interpretación, referida a fracción y magnitud, es la expresada por Freudenthal (1983), cuando plantea que “esta requiere una relación de equivalencia, que describe las condiciones para substituir objetos unos por otros, y que conduce a la igualdad dentro de una magnitud” (p. 16).

En este sentido el autor anterior plantea las múltiples interpretaciones que poseen el concepto de fracción y sus diferentes puntos de vista en el contexto real, los cuales son interesantes al momento de tratarlos con los estudiantes, para la presente investigación se tomará como referencia de estudio la interpretación “parte-todo” o el “todo y parte” del concepto de fracción, debido a la población involucrada en el estudio, los cuales son estudiantes de grado 3°, 4° y 5° de Escuela Nueva, niveles educativos en donde se debe procurar que el tratamiento de la fracción sea progresivo y abordando una o dos interpretaciones y no todas al mismo tiempo ya que algunas son prerrequisitos de otras con mayor grado de profundidad conceptual.

2.3. Los Proyectos STEM y la Indagación como Metodología

En este aparte se hace alusión a los proyectos STEM partiendo de una mirada epistemológica, para tratar de dar un contexto de lo que puede implicar este tipo de proyectos y finalmente, llegar a establecer la necesidad del uso de un proyecto STEM en la primaria y en el contexto Escuela Nueva.

Para iniciar este abordaje, es necesario identificar que los Proyectos STEM son referencia para muchos autores como por ejemplo Bybee (citado por Manzano, Gómez, Mozo, 2017), quienes lo plantean como: “*STEM Education*”, ya que los enfocan al desarrollo de proyectos educativos

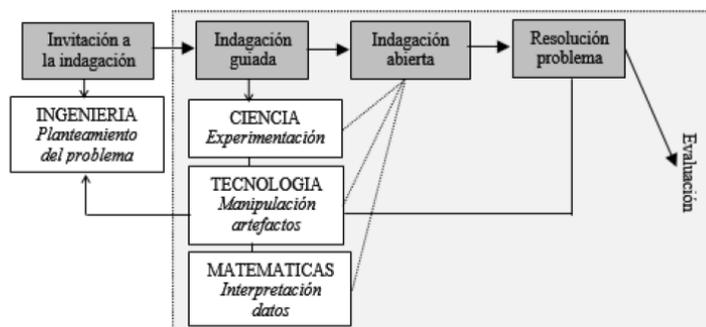
que incluyan las áreas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (*Science, Technology, Engineering, Mathematics* en sus siglas en inglés).

Es claro que tiene como principio básico la incorporación de diferentes áreas del conocimiento, esta afirmación se puede hacer desde lo epistemológico pero también desde la forma como está es concebida, como lo precisa Sanders (citado por Ocaña, Romero, Cuadra, Codina, 2015): “Educación STEM” se ha desarrollado como una nueva manera de enseñar conjuntamente, Ciencias y Tecnología” (p. 67).

Para el desarrollo del proyecto STEM, se optó por asumir *la indagación* tal y como lo plantea Toma y Greca (2016), quienes la consideran pertinente para el desarrollo de un modelo interdisciplinar como lo es la educación STEM. Según Toma y Greca (2016), la metodología de indagación plantea:

Cinco fases en las cuales se debe iniciar por plantear un problema de ingeniería el cual vincula las experiencias y el contexto del estudiante, luego se desarrolla una indagación guiada por el docente investigador en la que los sujetos de la investigación emplean instrumentos, luego de agotar esta fase y discutir los resultados obtenidos se plantean nuevas preguntas pero que no se desenfocan del problema inicial, aquí es pertinente diseñar planes y llevar anotaciones. En la cuarta fase se desarrolla una indagación abierta donde es posible revisar los temas centrales del proyecto e ir creando relaciones entre el concepto y la realidad (teoría - práctica) y finalmente se prosigue a la aplicación del producto desarrollado por los estudiante con lo que se da por terminado el proyecto y se verifica su eficiencia en la solución del problema (p.3).

A continuación se presenta de forma esquemática las fases o momentos de la metodología por indagación para el caso de un proyecto STEM:



Propuesta para trabajar en ed. Primaria la orientación STEM

Figura 5. Propuesta para trabajar en educación primaria la orientación STEM Fuente: Toma y Greca (2016, p. 4)

De esta manera, es pertinente resaltar que para el desarrollo del presente estudio se emplea la metodología de indagación por medio de la cual se desarrollan fases que guardan relación con los niveles de comprensión del modelo de Pirie y Kieren, es decir en la medida que se desarrolla el proyecto STEM se van agotando unas fases de indagación a través de guías con cada disciplina STEM y que abordan el tratamiento del concepto de fracción.

3. Diseño Metodológico

3.1. Enfoque y Tipo de Estudio

La presente investigación, se enmarca en un paradigma naturalista pues busca la comprensión de un fenómeno en su estado más particular y específico, donde se da valor a los significados que construyen los sujetos; bajo lo anterior, es pertinente destacar que “El naturalismo postula una realidad dependiente de los significados que los sujetos le atribuyen y que es construida a través de los significados” (Rodríguez, 2003, p.6). Del mismo modo el autor manifiesta que en el paradigma naturalista:

La tarea del investigador consiste en observar el proceso de interpretación que los actores hacen de “su realidad”, es decir, investigar el modo en que les asignan significado a sus propias acciones y a las cosas. Esto implica reconstruir el punto de vista de los actores y enfatizar el proceso de comprensión (p.6).

Bajo esta premisa, el estudio tuvo como pretensión valorar los diferentes significados que los estudiantes le atribuyen a la realidad en la cual se encuentran y que es única en cada participante del estudio, así mismo se valoraron las condiciones sociales, económicas, culturales, académicas y comportamentales que son propias de cada estudiante y que están asociadas a unas condiciones como los son la ruralidad y la modalidad de estudio como lo es el modelo educativo escuela nueva.

De manera particular, en la investigación se abordó la comprensión del concepto de fracción, para esto se tuvieron en cuenta las diferentes nociones de los participantes en relación al concepto

objeto de estudio, dichas nociones son el resultado de la construcción y asignación de significados que los estudiantes le atribuyen a las acciones y expresiones relacionadas con conceptos matemáticos, en este caso las fracciones.

El presente estudio se desarrolla bajo un *enfoque cualitativo*, ya que este permite enfocarse en las experiencias y significados del sujeto, del mismo modo se centra en el proceso de comprensión de los estudiantes cuando se someten a un proceso de enseñanza y aprendizaje, desde el que se genera un conjunto de unidades de análisis que se tendrán en cuenta bajo una visión dinámica y cíclica del proceso de comprensión. En este sentido, la investigación tuvo como finalidad el análisis de la comprensión del concepto de fracción en estudiantes de los grados 3°, 4° y 5° de básica primaria CER Esperanza, bajo el modelo de escuela nueva. Para el desarrollo del estudio se tuvo en cuenta el contexto socio educativo de los estudiantes. Por lo tanto, se pretendió analizar la comprensión de las fracciones involucradas en la construcción de un prototipo de puente, en el marco de un proyecto STEM para dar solución a la problemática de movilidad y acceso a la escuela.

El enfoque cualitativo aportó a la investigación la posibilidad de ir perfeccionando todo el constructo teórico y el planteamiento inicial en aras de ir construyendo una red de coherencia entre los objetivos que se persiguen, la realidad estudiada y la teoría. Por lo tanto “la acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien “circular” (Hernández, 2014, p. 7).

En concordancia con las consideraciones metodológicas expuestas anteriormente esta investigación se apoya en el *método de estudios de casos de tipo intrínseco*, de acuerdo con Stake (1999), quien expresa que:

A la hora de escoger un caso es frecuente que no sea posible "elección" alguna. A veces nos viene dada, incluso nos vemos obligados a tomarla como objeto de estudio. Así ocurre cuando un profesor decide estudiar a un alumno en dificultades, cuando sentimos curiosidad por unos determinados procedimientos, o cuando asumimos la responsabilidad de evaluar un programa. El caso viene dado. No nos interesa porque con su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema general, sino porque necesitamos aprender sobre ese caso particular. Tenemos un interés intrínseco en el caso, y podemos llamar a nuestro trabajo estudio intrínseco de casos (p.16).

Al respecto entonces, para la comprensión del concepto matemático, como es el caso que nos compete, se analizaron las acciones y expresiones de los participantes, cada uno de los cuales representan *casos diferentes* en la medida en que cada uno ilustra una forma de comprender el concepto.

Por otro lado se considera que la investigación no se apoya en un estudio de caso de tipo instrumental en la medida en que no es el interés del estudio el someter a prueba una teoría (modelo de comprensión de Pirie y Kieren) pues de acuerdo con Stake (citado por Muñiz, 2010), plantea que “Se puede estudiar un caso por dos razones básicas: estudiar el

caso en sí mismo (estudio de caso intrínseco) o para someter a prueba una teoría (estudio de caso instrumental)” (p.2).

3.2. Participantes y Criterios de Selección

Como se ha manifestado en apartados anteriores, los participantes, pertenecen al C.E.R Esperanza zona rural del municipio de Arboletes Antioquia, donde se trabaja bajo el Modelo de Escuela Nueva, la institución educativa se encuentra ubicada en un contexto rural donde predominan el desarrollo de actividades agrícolas y ganaderas por parte de los pobladores de esta zona, sumado a esto históricamente se ha tenido una presencia constante de grupos armados al margen de la ley y han sufrido sus habitantes desplazamiento forzado.

Los estudiantes, que participaron del estudio pertenecen a familias de campesinos que frecuentemente se desplazan de vereda en vereda, dependiendo de una fuente de empleo temporal marcada por la cosechas que se presenten durante el año. Es así como los estudiantes se involucran en actividades como la recolección de cosechas de plátano, arroz y maíz, así como también en labores como el ordeño, la pesca, la recolección de madera y agua para el consumo.

Se seleccionaron cinco estudiantes de grado tercero, dos estudiantes de cuarto y dos estudiantes de quinto, que se eligieron bajo el criterio de disponibilidad, pertinencia y oportunidad, es decir, los estudiantes se mostraron interesados en participar del estudio, sumado a esto por encontrarse cursando los grados 3°, 4° y 5°, lo que representa una oportunidad para valorar en este estudio las orientaciones contenidas en los lineamientos curriculares del área de matemáticas MEN

(1998). Además de otros documentos como son los referentes de calidad denominados Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y Estándares Básicos de Competencias los cuales sitúan el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones en los grados mencionados anteriormente.

Por otro lado, porque uno de los investigadores labora como docente en la escuela y permanece tiempo completo orientando el proceso de aprendizaje de los estudiantes, al igual que imparte todas las áreas (monodocente). Para la selección de los mismos se realizó el siguiente proceso:

En un primer momento se indagó con los estudiantes quienes estarían interesados en participar de la investigación explicándoles que las actividades del proyecto STEM se desarrollarían en jornadas extra clases, ante lo cual todos manifestaron estar dispuestos a participar, del total de 9 estudiantes de los grados involucrados en el estudio 4 se seleccionaron de acuerdo al trabajo de campo desarrollado en el marco del modelo de comprensión de Pirie y Kieren, estos estudiantes representan *casos diferentes* que fueron analizados en el desarrollo del proyecto STEM.

3.3. Técnicas e Instrumentos para Recoger la Información

Las técnicas que se seleccionaron permitieron la exploración de los significados manifestados por los estudiantes en relación a los conceptos matemáticos abordados en algunas fases o estratos de la comprensión, por ejemplo las nociones de igualdad, parte y unidad que afloraron en el momento de la exploración de los conocimientos primitivos acerca de la fracción según el nivel de inicio en el modelo de P.K. A continuación se presentan las técnicas e instrumentos que se utilizaron:

3.3.1. Cuestionario de indagación inicial y cuestionario final.

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos del estudio apunta hacia identificar las dificultades de comprensión en relación al concepto de fracción, se propone la aplicación de un cuestionario inicial (ver anexo 5), el cual está ligado al primer estrato del marco de Pirie Kieren (conocimiento primitivo) acompañado dicho cuestionario de la técnica de observación ya que permite al docente investigador comprender las experiencias y vínculos entre los sujetos además de conocer acciones en el aula con respecto a procedimientos o prácticas que pueden estar representando obstáculos en la comprensión de los estudiantes.

Dicho cuestionario, fue diseñado de tal forma que en el momento de su aplicación el estudiante experimentará el estar jugando “cruemos el puente” , una situación de aprendizaje donde se requería realizar cinco acciones con sus respectivas expresiones, que de ser desarrolladas le permitían al estudiantes ir avanzando y poder cruzar el puente (ver anexo 5).

El cuestionario final, se elaboró atendiendo a lo planteado en el objetivo general del estudio el cual apunta hacia el análisis de la comprensión del concepto de fracción y guardando una coherencia con la aplicación de un cuestionario inicial de indagaciones de nociones asociadas al concepto de fracción, se diseñó un cuestionario de indagación final el cual recoge elementos esenciales de algunas actividades planteadas en la propuesta de intervención. El cuestionario de indagación final tiene como propósito conocer la evolución de las nociones relacionadas a la evolución del concepto de fracción.

Así mismo, se incorporaron al cuestionario situaciones que requerían del estudiante la realización de acciones y expresiones que dieran cuenta de la evolución en su comprensión, dichas situaciones se diseñaron en coherencia con los niveles o estratos de conocimiento del modelo de Pirie y Kieren en donde se cuestionaba a los estudiantes sobre las nociones de mitad, partes y unidad. De igual forma se indagó sobre el uso del símbolo fraccionario y las representaciones utilizadas por los estudiantes para expresar una fracción.

Las mencionadas preguntas, apuntaban a requerir acciones físicas y mentales por parte de los estudiantes para poder observar sus nociones, se aplicaron cuestionarios a todos los 9 participantes de la investigación.

3.3.2. Guías de aprendizaje.

Fueron situaciones de aprendizaje que se diseñaron en todas las disciplinas STEM (ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas) que se involucraron en el desarrollo del proyecto de creación de un prototipo de puente para dar solución a una problemática de movilidad y difícil acceso que viven a diario los estudiantes que participaron de este estudio.

Solo se utilizaron las guías de matemáticas para analizar la información, lo cual no quiere decir que estas no puedan contener un alto componente de integración interdisciplinar, se tomó esta decisión ya que el objetivo general la investigación giraba alrededor de la comprensión del concepto matemático de fracción.

Cada guía fue diseñada para mantener una coherencia con los niveles de comprensión del modelo teórico de Pirie y Kieren, al tiempo que se desarrollaban las fases de indagación según el esquema propuesto por Toma y Greca (propuesta para trabajar STEM en educación primaria) esquema que fue adaptado para la realización de las situaciones de aprendizaje durante el proyecto STEM. Así mismo las guías consistían en plantear de manera intuitiva situaciones que involucraban las fracciones en la creación de un puente y que sirvieron para identificar en que niveles de comprensión se encontraban los estudiantes y hasta donde fueron capaces de llegar con la evolución de su comprensión durante la realización de las guías.

Por otro lado, se podría realizar un ejercicio de enumerar la utilidad de las guías para el desarrollo de este estudio, pero por el momento nos limitamos a resaltar las más pertinentes a la hora de abordar un concepto matemático.

En primer lugar la utilidad metodológica es destacable, por darle al tratamiento de las fracciones un sentido menos artificial, más intuitivo y natural para los estudiantes, por ende permitiendo que en la recolección de la información los estudiantes fueran un poco más espontáneos en sus expresiones y acciones, en segundo lugar, la obtención de información escrita suministrada por los mismo estudiantes, producto de la interpretación de las situaciones de aprendizajes planteadas en las guías. Por último el poder presentar información de manera gráfica y pertinente para la comprensión del concepto matemático a través de piezas comunicativas que ilustraban la teoría sobre las fracciones, para luego poder establecer descriptores por cada guía que guardaron relación

con los niveles de comprensión mencionados anteriormente, convirtiéndose esto en insumo fundamental para el análisis de la información.

3.3.3. Bitácora, diario de Campo, registro de audio y video.

La bitácora, la grabación de audio y video así como el diario de campo fueron instrumentos en los cuales se registró información valiosa para el posterior análisis, la ventaja de utilizar la bitácora en esta investigación fue la posibilidad de obtener información genuina de parte del mismo participante, donde la información que anotaba el participante, posibilitó el conocimiento de las dudas, los aciertos, las dificultades, por ejemplo, a la hora de graficar una fracción y la manera como simbolizaba el concepto matemático.

En el caso de las grabaciones de audio y video, un ejemplo claro de su utilidad para la investigación fue en el desarrollo de la actividad 7 sobre la indagación de los conocimientos primitivos, donde se pudo registrar las diferentes nociones expresadas por los estudiantes cuando se enfrentaban a la situación de aprendizaje planteada.

El diario del docente permitió registrar algunas de las reacciones o respuesta de los estudiantes que quizás no se registraban en los audios pero que ayudaron a comprender las respuestas de los participantes ante las situaciones de aprendizajes propuestas.

3.3.4. Observación Participante.

La observación según Stake (1998): “conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso” (p. 57), además proporcionan al investigador una mejor interpretación y descripción detallada de esos acontecimientos para su posterior análisis. Esta técnica consiste en disponer de todos los sentidos cuando se está en presencia de las acciones de los sujetos a la hora de desarrollar el proyecto STEM, registrando de manera sistemática las acciones de los individuos. Las observaciones se registrarán en el diario de campo, pero también se llevó a cabo un registro fotográfico y de video el cual fue útil para ilustrar el análisis y para el registro de acciones y expresiones de los estudiantes como se dijo en una anterior ocasión.

De igual forma, respecto a la observación, es pertinente mencionar que se observaron las acciones y expresiones simbólicas, verbales y escritas de los estuantes durante la realización de todas las guías, específicamente sobre el concepto de fracción involucrado en el diseño de un puente.

3.3.5. Entrevista Semiestructurada.

El uso de la entrevista semiestructurada (ver anexo 7) permite conocer de manera fiel y veraz información, manteniendo un contacto con el participante en la medida en que el lenguaje se puede adaptar al vocabulario de los entrevistados. Stake (1998), expresa que es “el cauce principal para llegar a las realidades múltiples” (p.60), de igual forma, se pudo realizar modificaciones a las preguntas para clarificar la información, permitiendo obtener muchos más datos o información que contribuyó con un mayor y mejor análisis de la situación estudiada. El propósito de esta técnica en la investigación, apuntó hacia la posibilidad de indagar sobre los elementos o aspectos que

podieron representar un obstáculo o por el contrario fueron un paso más en la comprensión y que posibilitaron el análisis en torno al posible *folding back*.

La entrevista, para esta investigación representó la posibilidad de explorar y registrar las expresiones de los estudiantes, se realizó de manera semiestructurada, permitiendo una reacomodación del lenguaje a la hora de realizar las preguntas pero sin perder el foco del análisis de la comprensión matemática, es por esto que se plantearon durante las entrevistas preguntas como: *¿De las partes obtenidas cuantas se toman? ¿Cuántas partes quedaron? ¿Son iguales las partes? nuevamente parte las piezas que obtuviste por mitad. Responde ¿Cuántas mitades obtuviste?* Las cuales siempre buscaron indagar por la comprensión de los estudiantes entorno al concepto de fracción.

3.4. Técnicas y Procedimientos de Análisis

Se utilizó como técnica el análisis de contenido, específicamente, este tipo de técnica, permitió relacionar las respuestas producto del cuestionario de indagación inicial las guías y la entrevista semiestructurada con los diferentes niveles de comprensión propuestos por el modelo de Pirie y Kieren, con el fin de representar unos posibles trazos o recorridos que describen movimientos en el esquema planteado por el modelo, pues de acuerdo con Stake (1998) “el análisis e interpretación consisten en dar sentido a todo esto” (p.64). En este sentido surgieron unas unidades de análisis en relación a los niveles de comprensión del modelo de Pirie y Kieren, las cuales emergieron de la matriz de descriptores.

Tabla 2. Matriz de descriptores

Niveles de comprensión	Descriptor	Acción	Expresión
Nivel 1: conocimiento primitivo	Al enfrentarse a situaciones de aprendizaje relacionadas con partir unidades los estudiantes expresan las nociones de partición que tienen.	Partir la mitad de una vara de guadua u otros objetos. Cortar una imagen en partes iguales.	Puede ser verbal como: mochar, partir, separar, unir, tomar piezas puede ser gráfico como: trazar líneas rectas puede ser simbólico: números fraccionarios o enteros
Nivel 2: creación de la imagen	Construcción de una imagen a través de una acción mental o físico para obtener una idea sobre la igualdad entre las partes de una fracción.	Identificar las partes de una unidad fraccionada. Calcular las veces que cabe una longitud determinada en una magnitud dada. Cortar piezas de igual tamaño.	Simbólico: representa las partes y el todo de una fracción Verbal: manifiesta el resultado de partir una unidad en dos partes o más, ejemplo: mitad, tercios, cuartos, quintos... Gráfica: traza líneas que dividen una figura geométrica o un objeto en partes iguales, ejemplos pitillos.
Nivel 3: comprensión de la imagen	Las imágenes mentales asociadas a las ideas de mitad, igual, unidad o el todo se remplazan por una imagen mental en relación al concepto de fracción. Al momento de partir un objeto o doblar un papel en partes iguales el estudiante relaciona la acción con el concepto de fracción. Al observar una imagen, contar las partes que la conforman y clasificar algunas de ellas el estudiante puede imaginar el concepto de unidad y partes de una fracción.	Observar, contar, comparar y discriminar ejemplo, compara las formas de las piezas de una unidad fraccionada El paso de la representación gráfica a la simbólica. Colorea, sombrea las partes que se toman de una unidad.	Simbólica: representar una imagen a través del símbolo matemático de fracción. Gráfico: dibuja imágenes para representar un símbolo fraccionario. Verbal: expresa atributos asociados a las fracciones, ejemplo: “partes iguales”
Nivel 4: observación de la propiedad	Examinar una imagen mental y determinar los distintos atributos asociados con dicha imagen. Observa las diferencias y similitudes que pueden tener las imágenes	Analizar las combinaciones conexiones y distinciones que hacen parte de la construcción mental de la fracción en su relación parte todo. Identifica en diferentes.	Verbal: dar cuenta de los atributos y propiedades de las imágenes, da cuenta del todo en una fracción como también, nombrar un medio, un cuarto ...

	<p>mentales asociadas al concepto de fracción.</p> <p>El estudiante es capaz de identificar en diferentes representaciones pictóricas de fracciones la unidad y sus partes determinando que todas contienen atributos que las relacionan y las ubican en la imagen mental de fracción.</p> <p>El estudiante combina características de imágenes para construir una definición o imagen mental más elaborada y definir características propias del concepto de fracción en su relación parte todo.</p>	<p>Fracciones la posición del numerador y el denominador.</p> <p>Divide secuencialmente la unidad.</p> <p>Reconoce que las fracciones pueden ser divididas infinitas veces.</p> <p>Reconoce que el todo puede ser dividido en parte y que las partes conforman el todo.</p> <p>Argumenta la verificación de las conexiones entre las fracciones.</p>	<p>Simbólico: muestra a través de un símbolo fraccionario el denominador y el numerado de una fracción</p> <p>Gráfico: interpreta imagen que representan piezas de fracciones.</p>
--	---	--	--

El procedimiento para realizar el análisis inicial de la información, fue el siguiente: primero, se revisaron las respuestas del cuestionario de indagación identificando las dificultades de los estudiantes sobre el concepto de fracción e identificando las diferentes nociones que los estudiantes atraían o evocaban para el abordaje de este cuestionario.

Inicialmente se realizó una descripción de las acciones y expresiones que los estudiantes evidenciaron durante la realización de las guías del proyecto STEM y que dichas evidencias de las acciones y expresiones quedaron registradas en audio y video pero que también se registraron en las bitácoras de los propios estudiantes, así como en el diario de campo. Se revisaron las guías desarrolladas por los participantes y se redactó un informe descriptivo de las acciones y expresiones utilizadas para resolver cada situación de aprendizaje contenida en las guías.

Cabe aclarar que para desarrollar tanto el informe descriptivo como el capítulo de análisis del cual nos ocuparemos renglón seguido fue necesaria la construcción de una tabla de descriptores por niveles que permitiera verificar según el nivel de comprensión del modelo de P.K. ¿Cuáles expresiones y acciones debía evidenciar el estudiante? permitiendo así un análisis más riguroso y que permitiera establecer el nivel de comprensión final en que cada estudiante se situó.

Posteriormente se analizaron las respuestas de los estudiantes a las guías de matemáticas Y se transcribieron, organizaron y codificaron las repuestas de la entrevista semiestructurada, con el fin de tener una lectura completa de las situaciones que se pueden presentar en las secciones de trabajo y que en ocasiones se escapan a la mirada inicial del investigador, pues para alcanzar los significados Stake (1998), considera necesaria “la interpretación directa de los ejemplos individuales, y la suma de ejemplos hasta que se pueda decir algo sobre ellos como conjunto o clase” (p. 66).

Así mismo, se empleó la categorización en harás de organizar la información por segmentos de características del modelo teórico y propiedades de las fracciones que tienen un hilo conductor y que al jerarquizarlas permitió construir un informe que responde a las categorías de análisis. Igualmente, se llevó a cabo la triangulación ya que en la medida en que la categorización permitió realizar acciones de segmentación de la información por unidades de contenidos, las cuales aportaron elementos, que posteriormente fueron insumo para la elaboración del informe final. La pertinencia de la triangulación radica en que permitió contener las diferentes categorías en un análisis más generalizado del fenómeno, sin perder sus características particulares, es decir, con un nivel de coherencia y relación dado por conexiones entre la teoría y la práctica.

3.5. Compromiso ético y Criterios de credibilidad

Para dar credibilidad a la investigación, específicamente en lo concerniente a la recolección de la información, se diseñó un consentimiento informado (ver anexo 1), para los padres de aquellos estudiantes que participaron y fueron entrevistados o que participaron en la investigación de manera parcial, del mismo modo se diseñó un consentimiento informado para el rector de la institución.

De igual forma se utilizaron seudónimos y nomenclaturas para hacer referencia a los participantes de este estudio, en ningún caso la información recolectada de los participantes será utilizada para otros fines que se alejen de los objetivos que se trazaron en el presente estudio. Es de resaltar que los estudiantes que participaron de la investigación se les protegieron sus identidades, utilizando ayudas tecnológicas para la edición de las fotografías donde aparecían, al igual que se procuró en todo momento que las actividades, situaciones o acciones realizadas durante la investigación no pusieran en riesgo la integridad física y psicológica de todos y cada uno de los participantes.

Para darle credibilidad a la investigación se procedió a la triangulación entre investigadores: “hacemos que otros investigadores observen la misma escena o el mismo fenómeno” (Stake, 1998, p. 98). Igualmente, se procuró la participación en eventos como “El primer seminario internacional de innovación en educación y didáctica de las ciencias” (ver anexo 9) donde se socializó parte de la investigación y se recibieron observaciones de investigadores en áreas y temas afines.

Igualmente se trianguló entre instrumentos, pues este mismo autor expresa que para “afianzar nuestra confianza en nuestra interpretación, podemos completar la observación directa con la revisión de registros anteriores que permita clarificar y anular algunas influencias externas, la triangulación nos obliga una y otra vez a la revisión” (p.99). Finalmente la investigación fue sometida a juicio de expertos para validar los instrumentos y demás elementos propios del estudio.

4. Propuesta de Intervención

En este capítulo se presenta una propuesta de enseñanza en marcada en un Proyecto STEM, que gira en torno a la solución de un problema contextual. El Proyecto se lleva a cabo con estudiantes de los grados tercero, cuarto y quinto de una escuela rural en la que se trabaja bajo el Modelo Escuela Nueva. En la propuesta de enseñanza se destaca la importancia de partir de una problemática contextual y de la integración de las áreas STEM (ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas), como una estrategia que pertinente para el trabajo bajo el Modelo Escuela Nueva. Para su aplicación en el aula, se utilizó la metodología por indagación propuesta por Toma y Greca, (2006).

Las actividades que se plantean desde cada una de las áreas STEM tienen como propósito que los estudiantes comprendan los conceptos, procedimientos y actitudes necesarias para dar solución al problema.

A continuación se describe el contexto en el que fue realizada la experiencia y se presentan las actividades que se implementaron no sólo para que los estudiantes resolvieran el problema,

sino para que desde las matemáticas construyeran el concepto de fracción. Particularmente, se presentan las actividades por cada una de las áreas STEM, organizadas por fases o momentos de acuerdo a lo que proponen Toma y Greca (2006), en la metodología por indagación: fase de invitación a la indagación, indagación guiada, indagación abierta, resolución del problema y evaluación.

Ahora bien, en el diseño de las actividades sobre el concepto de fracción (área de matemáticas), se tuvo en cuenta los niveles de comprensión propuestos por Pirie y Kieren.

4.1 Contexto del Proyecto

El proyecto STEM, en el que se integran las áreas de ciencias naturales, ingeniería, tecnología y matemáticas para la solución de una problemática contextual, se realizó con estudiantes con edades comprendidas entre los nueve y diez años, que pertenecen al Centro Educativo Esperanza.

Tabla 3. Propuesta STEM

Nombre del proyecto STEM	¡Vamos a construir un puente!		
Número de estudiantes	9		
Nivel	Primaria		
Número de sesiones	8	Número de horas	16
Materiales	Lápiz, colores, madera, papel, tijeras, metro, regla.		
Metodología	Indagación		

4.2 Propósito del Proyecto

Comprender los conceptos, procedimientos y actitudes que desde cada una de las áreas STEM, contribuyan con la solución de una problemática contextual, como lo es la construcción de un puente que permita pasar la quebrada para llegar a la escuela.

4.3 Metodología de la Propuesta

El proyecto se realizó con estudiantes de Escuela Nueva, modelo educativo flexible propuesto por el Ministerio de Educación Nacional para zonas rurales en su mayoría de difícil acceso, en el CER Esperanza el proceso de aprendizaje en todas las áreas es orientado por un docente multigrado que tiene a su cargo grados desde preescolar hasta quinto de primaria. El trabajo con los estudiantes se realiza con guías de aprendizajes las cuales son textos por áreas apoyadas en centros de recursos de aprendizajes (CRA) que requieren materiales didácticos dotados por el estado o elaborados por estudiantes. Por lo tanto Escuela Nueva permite la articulación al proyecto STEM, pues este integra disciplinas, fomenta el trabajo cooperativo e incorpora el contexto, pilares esenciales de Escuela Nueva.

El proyecto STEM se aborda desde la metodología de indagación, la cual según Toma y Greca (2016) “procura facilitar la construcción del aprendizaje a partir de la interacción del alumnado con los objetos del medio ambiente que le estimulan, despiertan su curiosidad, y fomentan el desarrollo de pensamientos de orden superior y la resolución de problemas” (p.4)

4.4. Fases o momentos del Proyecto STEM

En el primer momento, la metodología por indagación propone que para desarrollar un Proyecto STEM en el aula de clase, se hace necesario, de acuerdo a como lo proponen Toma y Greca (2006), organizar las actividades atendiendo a las siguientes fases o momentos:

Fase I. Planeamiento del problema (ingeniería), en dicha fase se procura acercar a los estudiantes al contexto real y a la vez plantear la situación problema la cual es analizada y debatida por los estudiantes, a fin de encontrar la posible solución, exponiendo sus ideas o conocimientos básicos.

Fase II. Indagación Guiada: Para esta fase se diseñaron algunas guías con actividades en cada una de las áreas STEM, con el fin de que comprendan los conceptos y procedimientos necesarios para resolver la situación problema. Por ejemplo, en el área de *ciencias naturales*, se pretende que el estudiante identifique el mejor material que puede conseguir en el entorno para la construcción del puente, así como las diferentes características de dichos materiales. En *tecnología*, igualmente estudiarán las diferentes estructuras y seleccionaran las apropiadas para el diseño del puente. Para el caso de las *matemáticas* se proponen algunas guías que tienen como que los estudiantes comprendan el concepto de fracción para que lo apliquen en la construcción del puente.

Cabe resaltar que una de las actividades que se proponen es el uso de las piezas comunicativas, que son herramientas visuales, tipo carteles, que ofrecen información al estudiante para presentarle la nueva información y fortalecer las ideas sobre los diferentes conceptos.

Fase III. Indagación abierta: en esta fase los estudiantes exponen los resultados o deducciones de los análisis hechos después de realizar la fase anterior. Para ello se les propone que diseñen una cartelera en la que representen el puente que pretenden construir. Cabe resaltar que este es un momento en que los estudiantes deben expresar los resultados pero también puede servir para la retroalimentación, es decir para replantear las decisiones que tomaron frente al diseño del puente.

Fase IV. Resolución del problema, con los resultados de la indagación guiada y abierta y utilizando los materiales seleccionados previamente del entorno los estudiantes elaboran el prototipo del puente.

Fase V. Evaluación, los estudiantes exponen sus diseños y reflexionan en cuanto a cada una de las decisiones que tomaron para la construcción del puente, por ejemplo: frente al uso de las fracciones en su elaboración, los materiales que seleccionaron, la estructura que consideraron adecuada, entre otros. Es importante que en esta última fase se tenga en cuenta la verbalización de las diferentes decisiones, con respecto los conceptos matemáticos y de las demás disciplinas ya que en la medida en que se evidencie la apropiación de estos conocimientos se podrá valorar la comprensión de los mismos. A continuación se presenta un gráfico que da cuenta de las fases anteriormente descritas:

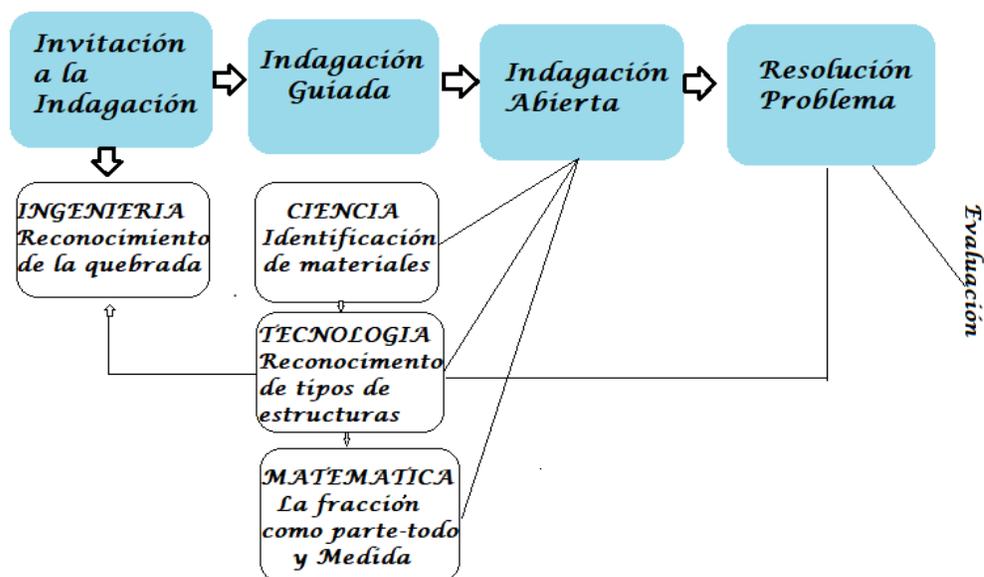


Figura 6. Fases o momentos de la metodología por Indagación. Adaptado de Toma y Greca (2016)

4.5. Contenidos y Actividades

Tabla 4. Contenidos y actividades del Proyecto STEM. Elaboración propia.

AREA	CONTENIDOS	ACTIVIDADES
Ingeniería	Observación del entorno Identificación de problemática del contexto. Planteamiento de posibles soluciones	1. Planteamiento del problema de movilidad, actividad. 2. De paseo por la Quebrada.
Ciencias Naturales	Materiales, tipos de materiales.	3. Eligiendo el mejor material para construir el puente.
Tecnología	¿Qué es una estructura? Tipos de estructuras, tipos de puentes, tipos de herramientas, instrumentos de medición.	4. Eligiendo el mejor diseño del puente
Matemáticas	¿Qué es una fracción? Representación gráfica de fracción La fracción como Parte-todo y Medida	5. Cruzando el puente. 6. Cortemos partes para el puente. 7. Conozcamos las fracciones. 8. Los puentes de Camila. 9. Ayudemos al guardián repara su muro

4.6. Desarrollo del Proyecto STEM

A continuación se presenta el desarrollo de todo el proyecto, atendiendo a cada uno de los momentos o fases propuestos en la metodología y el diseño de las guías de aprendizaje para cada una de las áreas STEM:

4.6.1. Fase I. Invitación a la Indagación.

En esta primera fase se planteó a los estudiantes la problemática de movilidad y difícil acceso que existe en la zona, debido a que el relieve a formado quebradas que se ubican cerca de CER Esperanza, para esto se diseña una guía N° 1 que se enmarca en la disciplina STEM – ingeniería, ver anexo 1.

De acuerdo a lo anterior esta guía permite el desarrollo de la sesión de aprendizaje de paseo por la quebradas donde los estudiantes pudieron observar de forma más detallada la problemática que existe a diario en su entorno, como se observa en las imágenes.



Imagen 2. Camino hacia la escuela.



Imagen 3. Recorrido por la quebrada

4.6.2. Fase II. Invitación guiada.

En esta segunda fase de indagación guiada la cual es orientada por el docente, se proponen el desarrollo guías, la primera de ellas de ciencia guía N° 2 (ver anexo 3) la cual los estudiantes pudieron identificar los materiales de su entorno útiles para la construcción del prototipo de puente, así mismo se identificaron las distintas propiedades de los materiales del entorno como madera, barro, y cuerdas. La guía N° 3 hace referencia a la disciplina de tecnología, la cual se enfocaba en el uso de herramientas, reconocimientos de los distintos tipos de estructuras para el diseño del prototipo de puente, y por último la guía N° 4, la cual abordaba la disciplina de matemáticas y se centraba en el concepto de fracción, iniciando con una actividades en relación al primer nivel del modelo de comprensión de Pirie y Kieren, hasta el cuarto nivel de comprensión del modelo que es

observación de la propiedad. A continuación se exponen imágenes que ilustran algunos momentos de la fase II en las diferentes disciplinas STEM.

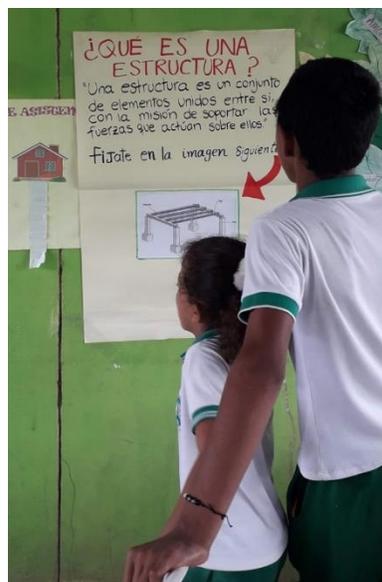


Imagen 4. Exploración de características de materiales. Imagen 5. Reconocimiento de una estructura.

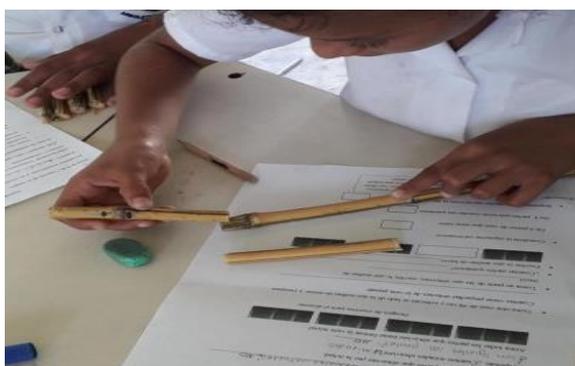


Imagen 6. Implementación guía de matemáticas

Imagen 7. Desarrollo de actividades de matemáticas.

4.6.3. Fase III. Indagación abierta.

Los estudiantes socializan ante sus compañeros los resultados derivados de los análisis realizados en cada una de las actividades propuesta por cada área STEM, identificando, el tipo de

material, tipo de estructura, tamaño del puente, y dimensiones. Los estudiantes escogen el diseño del puente y el material para construirlo en la fase IV, como se observan en la imagen 8.



Imagen 8. Elección del mejor diseño del puente.

4.6.4. Fase IV: Resolución del problema Inicial

Con los resultados producto de las indagaciones guiada, abierta y utilizando el material que seleccionaron, los estudiantes en parejas diseñan y construyen el prototipo de puente, y responden algunas preguntas de la entrevista que gira en torno al concepto de fracción, como se puede evidenciar en las imágenes 9 y 10.



Imagen 9. Elaboración de prototipo de puente. *Imagen 10.* Uso de las fracciones en elaboración del puente.

4.6.5. Fase V: Evaluación.

Los estudiantes presentarán a sus compañeros los puentes que construyeron, socializan el porqué de sus decisiones y los inconvenientes que tuvieron en el proceso, también responden a algunas preguntas de entrevista que hacen referencia a uso de las fracciones en la construcción del prototipo del puente, como se muestran en la imagen 11 y 12.



Imagen 11. Socialización de solución, estudiante E6



Imagen 12. Socialización de solución, estudiante E5

5. Hallazgos

En este apartado se revela inicialmente las nociones que manifestaron los estudiantes al iniciar el proceso de comprensión de las fracciones, dichas nociones contribuyeron identificar las dificultades que poseen los estudiantes a la hora de entender el concepto, luego se analiza como lo diferentes instrumentos de recolección de la información permitieron evidenciar la evolución de la comprensión de cada caso ilustrados mediante algunos esquemas que representan el recorrido en cada uno de los niveles del modelo de Pirie y Kieren.

5.1. Análisis de Actividad Diagnóstica Inicial

Con la actividad diagnóstica se identificaron algunas dificultades en la comprensión de los conceptos relacionados con las fracciones que presentan los estudiantes de primaria en cuanto a representación gráfica y verbal, parte-todo en su representación gráfica y simbólica e idea de mitad. A partir de la problemática del proyecto STEM, se diseñó una actividad sobre una situación hipotética en la que se les pedía que respondieran algunas preguntas para poder cruzar un puente protegido por un guardián.

Cabe resaltar que el análisis estuvo mediado por el nivel de conocimiento primitivo del modelo de comprensión de Pirie y Kieren, que da inicio a un proceso de análisis por niveles de comprensión, a partir de una serie de descriptores y con la posibilidad de que pueda realizarse el *folding back*, para que el estudiante pueda movilizarse entre los niveles, es decir, sin mantener una dirección lineal, sino que por el contrario pueda presentar una regresión y posterior avance entre los niveles de comprensión. A continuación se presentan los hallazgos de la actividad diagnóstica

inicial atendiendo a las siguientes categorías: Representación gráfica y verbal, parte-todo (representación gráfica), parte-todo (representación simbólica), noción de mitad.

5.1.2. Representación gráfica y expresión verbal.

Para dar cuenta de la forma como los estudiantes representan gráficamente las fracciones y su expresión verbal, se encontró que, al observar las respuestas a la actividad relacionada con el guardián y la sandía se puede evidenciar que los estudiantes en términos generales comprendieron y ejecutaron la acción de fraccionar la sandía en partes, se observa un intento de los estudiantes por encontrar la cuarta parte de cada sandía como es el caso del estudiante (E1) que como se observa en la imagen 13, presenta cuatro partes las cuales cada una representa un cuarto de cada sandía.

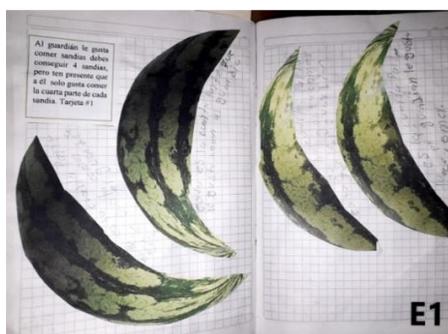


Imagen 13. Representación de la cuarta parte de una sandía. Estudiante E1.

Podemos decir que los estudiantes evidencian una noción o conocimiento de la unidad y sus partes, esta noción carece de una comprensión formal de las características propias de una fracción en su relación parte-todo, muestra de ello son las reparticiones que hacen los estudiantes E3, E6 y E5 los cuales realizaron la repartición de la unidad en partes, pero las partes no son iguales y no guardan relación con los algoritmos fraccionario de $\frac{1}{4}$ de sandía (símbolo), en conclusión la

actividad permitió que los estudiantes pudieran mostrar conocimientos primitivos al establecer que la unidad se divide, pero no consideraron porciones congruentes y equivalentes.

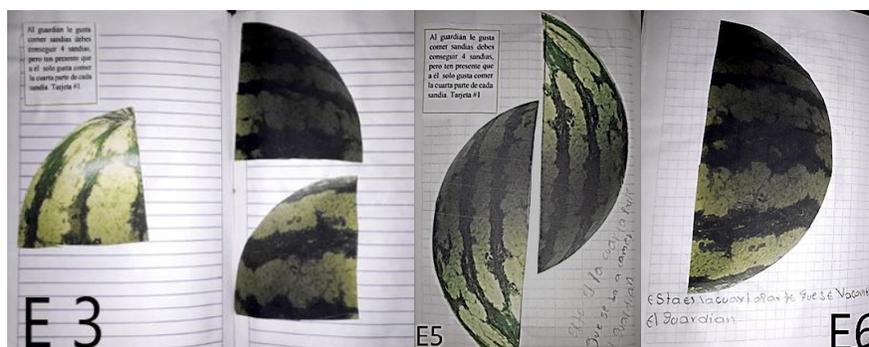


Imagen 14. Representación de la cuarta parte de una sandía. Estudiante E3, E5, E6.

5.1.3. Parte-todo: representación gráfica.

Para dar cuenta de las dificultades relacionadas con esta categoría se les pidió que observaran una figura (rectángulo) y que trazaran tres líneas rectas de tal manera que la figura se partiera en 3 partes iguales. En las respuestas se evidencia que uno de los estudiantes (E5) al parecer muestra nociones de igualdad entre las partes trazando líneas rectas que le permitieron repartir la unidad en tres partes iguales, lo que guarda relación y responde a las exigencias de la pregunta.

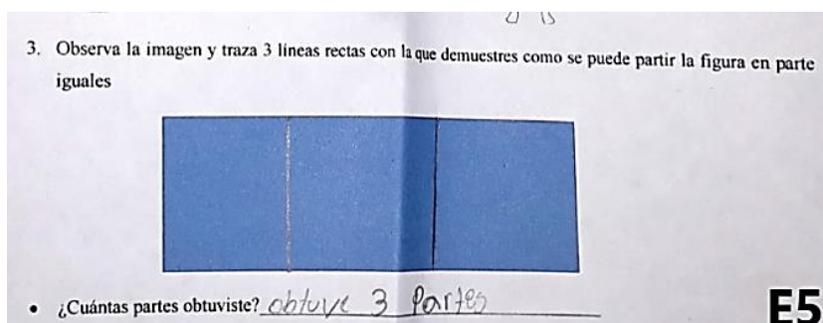


Imagen 15. Representación partes iguales del estudiante E5

Por el contrario el estudiante E8, a pesar de trazar líneas rectas sobre la unidad no logra obtener partes iguales después de la repartición, evidenciándose un conocimiento de repartición intuitiva, nociones de unidad y partes, pero poco conocimiento de los requisitos o características de las fracciones en relación con la condición de igualdad entre las partes, como lo plantea Llinares y Sánchez (1998), el cual se considera como un atributo de la fracción: las partes tienen que ser del mismo tamaño (congruentes), en este sentido es esencial que el estudiante tenga claro estos atributos para avanzar en las otras representaciones de la fracción.

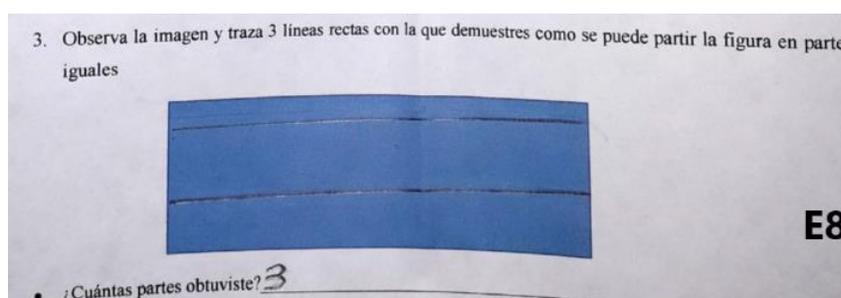


Imagen 16. Representación de partes iguales, estudiante E8

5.1.4. Parte-todo: representación simbólica.

Para conocer si los estudiantes pueden representar simbólicamente una fracción se les pide que corten la hoja de block varias veces hasta obtener cuatro partes, y colorear tres partes y representarlo matemáticamente. En estas repuestas se evidencia que los estudiantes se le dificulta identificar la unidad o el todo que está constituida por las cuatro piezas de las hojas y las partes que son tomadas al colorearlas.

Pregunta #1 toma una hoja de block y córtala por la mitad, luego vuelve a cortar por la mitad, luego abre la hoja y escribe.

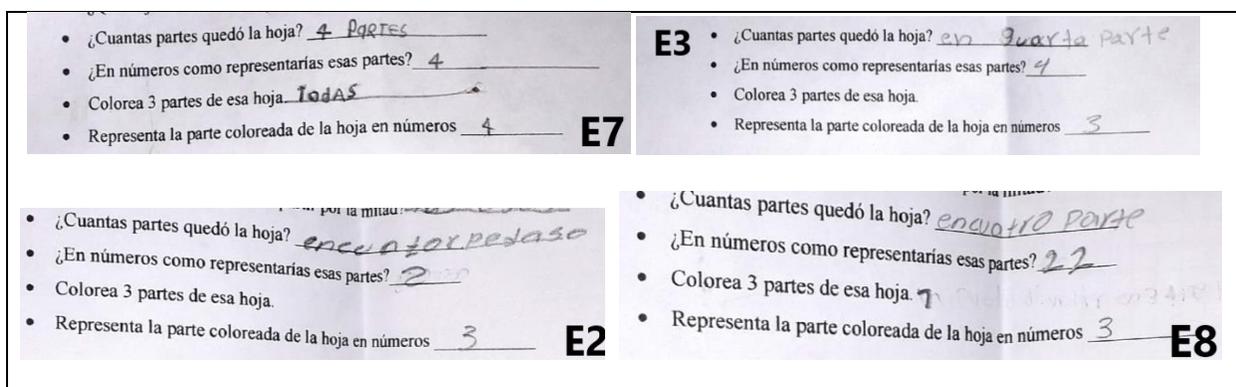


Imagen 17. Respuesta de E3, E7, E2, E8 al cortar una hoja de block en varias partes iguales

Evidenciamos que 3 de los estudiantes tienen nociones de partición, pues realizan lo solicitado en la pregunta, sin embargo, de igual forma se evidencia que los estudiantes no manejan adecuadamente el algoritmo fraccionario, pues no establecen relaciones de conexión entre las representaciones algorítmicas fraccionarias con la actividad de fraccionar el papel en partes iguales. Así mismo no asignan un algoritmo fraccionario a cada parte, pero por el contrario, sí le asigna un número entero positivo para representar las partes coloreadas, evidenciándose que tienen nociones de otros sistemas numéricos y poca información relacionada con las fracciones y sus formas de representación.

5.1.5 Noción de mitad.

En esta categoría el estudiante se le dificulta cortar en mitades iguales los objetos dados, en la imagen, por ejemplo se puede ver que el estudiante E4 al trazar líneas en cualquier espacio de cada objeto lo está cortando, sin tener en cuenta que debe ser iguales ambas partes.

Traza una línea que corte por la mitad igual cada una de las siguientes imágenes

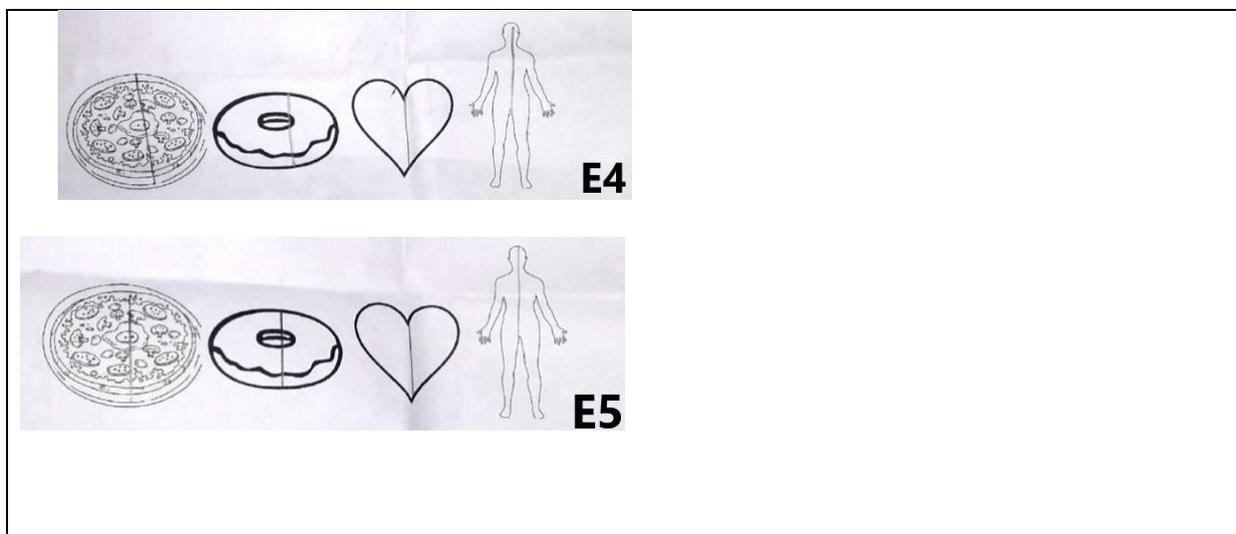


Imagen 18. Respuesta E4, E5 al cortar imágenes u objetos por mitades iguales.

Algunos repartos del estudiante (E4) no corresponden con lo indicado, el estudiante 5 (E5) evidencia mayor proximidad a lo solicitado en la actividad. Podría decirse que a la luz de las anteriores respuestas los estudiantes, presentan dificultades en la comprensión que tienen de las fracciones, pues no logran comprender la fracción como un todo fraccionado en partes iguales, así mismo presentan dificultad para representar simbólicamente una fracción y las nociones de mitad producto de la repartición es básica en donde se evidencia la acción de cortar objetos pero que carecen de proporcionalidad en la mayoría de casos. En este sentido Fandiño (2009), considera que una de las dificultades del concepto de fracción radica en las diferentes interpretaciones que poseen las fracciones.

5.2 Análisis de las Actividades propuestas en el Proceso de Enseñanza de las Fracciones

La intención en este apartado es develar los hallazgos producto de la posible evolución en la comprensión de los estudiantes sobre las fracciones, a partir del análisis de las actividades que se

proponen en el proceso de enseñanza del tema y en el marco del Proyecto STEM, para dar cuenta de lo anterior, se utilizó no sólo para el diseño de la secuencia de actividades las fases del Modelo de Pirie y Kieren, sino que igualmente se analizaron a la luz de descriptores propuestos desde dicho marco teórico.

A continuación se presenta entonces el análisis de algunas de las actividades que se llevaron a cabo durante el proceso de enseñanza, como: Conozcamos las fracciones, actividad de *folding back* 1entre otras.

5.2.1. Conozcamos las fracciones.

Con respecto a la categoría relacionada con *noción de mitad*, en las respuestas a la actividad número siete, que requiere hacer repartos, se evidencia que los nueve estudiantes, realizaron la partición de una vara de guadua que tenía una medida de 40 centímetros. Las partes obtenidas no fueron iguales en 7 de los nueve estudiantes, pues al parecer no realizaron la repartición de manera equitativa y proporcional, debido a que no reconocen que las partes deben ser del mismo tamaño.



Imagen 19. Fraccionar la unidad en partes iguales

Del mismo modo cuando se planteó la situación del cuarto punto de la actividad: Nuevamente, corta las partes que obtuviste por la mitad ¿Cuántas mitades obtuviste?, se evidenció que los estudiante continúan presentando dificultad para comprender que, la proporcionalidad

entre las partes es un *atributo de las fracciones en su interpretación parte – todo*, muestra de ello son las respuestas donde, ocho de nueve de los estudiantes, manifiestan que las cuatro partes obtenidas no son proporcionales, cabe destacar que parecería que los estudiantes reconocen que la unidad se puede dividir en partes, al parecer es el único atributo que asocian a las fracciones contenidas en las situaciones que se le plantean en el proyecto de intervención.

Para dar mayor ilustración a lo expresado anteriormente se considera pertinente presentar algunas evidencias del proceso de comparación de las partes realizado por los estudiantes.



Imagen 20. Identificando igualdad entre las partes

En la imagen 20 se puede observar dos métodos de comparación y medición de las partes que conforman una unidad, dichos métodos le permitieron a algunos estudiantes establecer si las partes, resultado del proceso anterior de partición eran proporcionales o no.

Con respecto al atributo: *la reunión de todas las partes forman la unidad*, se plantea a los estudiantes resolver la siguiente situación: toma otra vara de 40 cm y coloca al lado de la que acabas de armar y compara ¿Cuántas varas pequeñas obtienes de la vara grande? Se observa en ocho de los nueve estudiantes que su respuesta es cuatro lo que deja en evidencia el reconocimiento del atributo antes mencionado, por el contrario, uno de los estudiantes no logra reconocer este atributo al realizar la actividad y dar como respuesta el número cinco.

Por otro lado se puede afirmar que con respecto al todo y sus partes los estudiantes reconocen este atributo al momento de realizar la actividad ya que logran partir la unidad y luego con las partes obtenidas integran nuevamente las parte para forma un todo. Se pueden entonces evidenciar que, los estudiantes realizan estos procesos aunque persiste la dificultad para obtener partes equitativas al momento de hacer las particiones, al parecer existen dificultades de medida. Sin embargo se hace necesario mencionar que en esta actividad, el material en este caso madera de guadua, fue un obstáculo en la realización de la actividad. De ahí que se contempló la necesidad de realizar una actividad de *folding back*, donde se integra la utilización de un nuevo material con menor dureza y más moldeable para que los estudiantes lograrán cortarlo de acuerdo a las indicaciones de la actividad, al respecto se incorporaron pitillos plásticos como material para que lo estudiantes los pudieran fragmentar.

Se puede concluir de esta actividad que al analizar las diferentes respuestas presentadas por los estudiantes, sobre las fracciones en su interpretación como relación parte todo, se observa que hasta este punto la mayoría de los estudiantes hacen mención de “partes” y en otros se observa que recurren a los números enteros como único medio de expresión matemática. En términos generales, se puede considerar que la mayoría de los estudiantes llegan a complementar la expresión utilizando la palabra “partes” y algunos números enteros “4 partes” o “cuatro partes” lo que deja en evidencia que todavía no se ha consolidado una aproximación a la expresión algorítmica de las fracciones.

5.2.2. Análisis descriptivo de *folding back* 1.

Antes de iniciar el proceso descriptivo propio de esta parte del estudio, es pertinente resaltar aspectos que se consideran relevante y que aportan a la discusión sobre la importancia del material concreto en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, es por esto que en una actividad anterior a esta se estableció la guadua (madera) como material manipulativo con el cual se pretendió hacer las reparticiones pero que al parecer dificultaban la realización de la actividad, por tal motivo para el *folding back* se optó por pitillos plásticos los cuales son la representación o abstracción del material de guadua y el cual debía ser partido por los estudiantes.



Imagen 21. Estudiantes en folding back 1



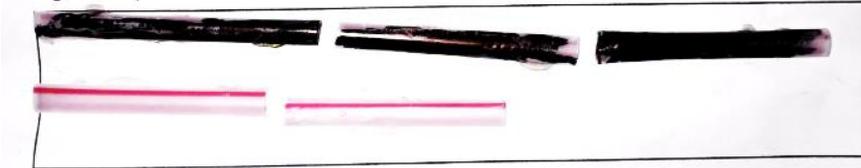
Imagen 22. Acción de cortar en folding back 1

Al contrastar las dos actividades y ver los resultados relacionados con las mismas preguntas se pudo evidenciar que el material utilizado al final favoreció la comprensión de la idea de mitad y proporcionalidad en los estudiantes ya que las respuestas a las preguntas en la actividad de *folding back* se aproximan a los descriptores establecidos para cada nivel de comprensión de modelo de análisis de la comprensión de Pirie y Kieren.

4. colorea con marcador 3 partes de ese pitillo

• ¿Cuántas partes quedaron sin colorear? _____

Pega todo aquí:



Observa la ficha comunicativa #1 y responde:

5. Escribe con una fracción lo que está representado en el rectángulo anterior

3
5

Imagen 23. Proporcionalidad entre las partes

En la imagen 23, se observa un ejercicio realizado por un estudiante, en el cual se solicita que la unidad sea partida en cinco partes iguales y que luego se represente de manera algorítmica las fracciones de la unidad que fueron pintadas con marcador.

Se pudo evidenciar en la actividad de *folding back* que la mayoría de los estudiantes al parecer superaron la dificultad inicial de partir mitades iguales, pero al mismo tiempo la actividad dejó en evidencia que para los estudiantes resulta más fácil realizar reparticiones cuando se les solicitan mitades o cuartos y por el contrario, cuando se le solicita partir unidades en cinco partes iguales solo dos de los nueve estudiantes logran establecer estas mitades con los atributos de proporcionalidad, comprendiendo que las partes obtenidas conforman la unidad inicial.

A continuación, se presenta otro ejercicio de esta actividad, en el que a los estudiantes se les muestran figuras que ellos deben partir en partes iguales, dichos ejercicios tienen como propósito indagar sobre posibles nuevas relaciones conceptuales establecidas entre la representación gráfica de una fracción, la representación algorítmica y la acción de cortar una unidad en partes que sean iguales, es decir que conserven el atributo de proporcionalidad.

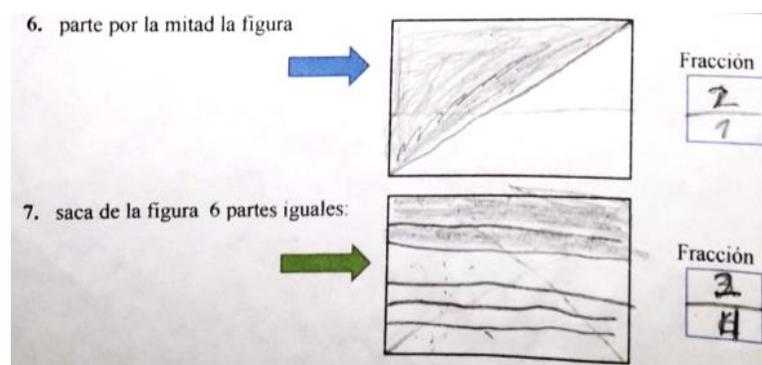


Imagen 24. Representación simbólica y gráfica de fracción de E5

Se evidencia en el ejercicio de la imagen 24 realizado por el estudiante que existen nociones de partición las cuales a la luz de la teoría sobre los procedimientos para obtener fracciones no corresponde con lo representado en la parte algorítmica de la fracción escrita por el estudiante. Es decir, no existe relación entre lo expresado en números y la gráfica, de igual forma se puede evidenciar que existen dificultades para establecer igualdades entre las partes fraccionadas ya que la imagen muestra que las partes obtenidas después de la partición no son proporcionales entre ellas.

Con respecto al punto 6 y 7 de la actividad se pudo evidenciar que los estudiantes en su mayoría pudieron establecer la mitad de la figura que le fue asignada. En las respuestas a la pregunta 6, sobre el proceso de partición de la unidad, 8 de nueve estudiantes dan muestra de reconocimiento del atributo de proporcionalidad entre las partes de una unidad, solo un estudiante no evidencia o hace alusión a la congruencia entre las partes de la unidad dada, en este caso una figura de un rectángulo como se muestra en la siguiente imagen. Así mismo, este estudiante no logra escribir un algoritmo fraccionario que represente lo que se observa en la gráfica, pudiéndose establecer una posible desconexión entre la representación gráfica, la representación algorítmica y la comprensión global de la actividad en lo relacionado con los requerimientos de la pregunta.

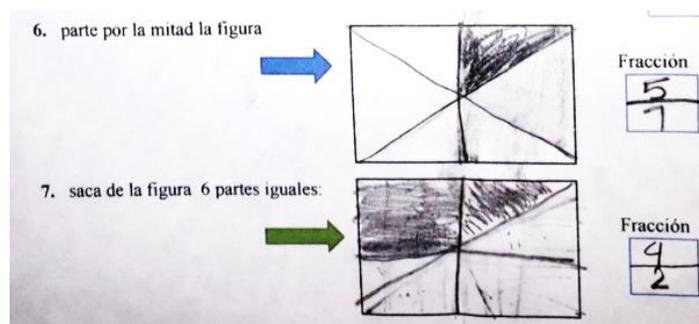


Imagen 25. Representación simbólica y gráfica

Por otro lado al revisar lo planteado en la teoría de Pirie y Kieren sobre sus características como es el *folding back* y la complementariedad de la acción y la expresión, se evidencia como los estudiantes logran crear una imagen de la idea de mitad, relacionando la acción de cortar con la representación gráfica, al parecer la dificultad que persiste se encuentra en el momento de la expresión, en este caso es una expresión de tipo algorítmica.

5.2.3. Análisis de la actividad: los puentes de Camila.

Para el desarrollo de esta actividad, se plantearon a los estudiantes acciones que debían realizar con el propósito de identificar *la unidad y sus partes*, por tal motivo se solicitó a los estudiantes que armaran un rompecabeza, que corresponde a una imagen de niños cruzando un puente, tal y como se muestra en la imagen 26.



Imagen 26. Imagen de la actividad los puentes de Camila.

Luego de armar el rompecabezas se preguntó sobre el número de partes que conforman el rompecabezas, la respuesta de todos los estudiantes fue doce y al preguntarles ¿todas las piezas del rompecabezas son iguales? La respuesta fue afirmativa, acompañada del argumento de que las piezas eran iguales porque son cuadradas todas, al igual que manifiestan que, son iguales porque al juntar las doce piezas o partes la imagen se completa. Posteriormente cuando se les indaga por ¿Cuántas partes están pintadas de rosado? Todos manifiestan que las partes rosadas son cuatro en total.

Cabe resaltar que esta actividad corresponde con la categoría *unidad y sus partes*, sin embargo, se aprovechó la situación planteada a los estudiantes para abordar la categoría de *símbolo*, pues se les solicitó que escribieran o representaran numéricamente lo expresado en el rompecabezas, adicionalmente ellos deben señalar en la fracción escrita ¿Cuál es el todo? Y ¿Cuáles son las partes?

¡Armemos el siguiente rompecabezas para dar inicio a esta aventura!



Tomado de <https://www.topsimages.com>


 Listo. Si ya armaste el rompecabezas, responde:

- ¿Cuántas partes en total posee el rompecabezas? 12
- ¿Todas las partes son iguales? Si ¿Porque? todas son iguales
- ¿Cuántas partes están pintadas de rosado? 4
 - Escribe la fracción $\frac{4}{12}$ → parte
 - Señala el todo y las partes $\frac{4}{12}$ → todo

Imagen 27. Reconocimiento de la unidad y las partes.

Atendiendo entonces a los criterios del nivel llamado comprensión de la imagen de P.K citado por Meel (2003) que expresa: “la libertad para imaginar un concepto irrestricto por medio de los procesos físicos, los cuales provocan que la imagen sea exitosa en relación a la evolución del conocimiento matemático debido a que el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas” (p.237), se pudo evidenciar que cuatro estudiantes: E3, E2, E5 y E1 son capaces de identificar propiedades globales obvias de la imagen matemática que tienen sobre el concepto de fracción, ejemplo de ello cuando los estudiantes en la actividad 8 reconocen la parte y el todo de una fracción que ellos mismo elaboraron para representar matemáticamente una imagen de una pintura.

Cabe resaltar que los estudiantes logran demostrar por medio de la escritura y de las expresiones verbales los elementos de la fracción, dando cuenta de una de las características fundamentales de la teoría del modelo de comprensión de Pirie y Kieren relacionada con la *complementariedad entre la acción y la expresión*.

También se pudo evidenciar que existe otro grupo de estudiantes que realizaron esta actividad que muestran un nivel de comprensión diferente, pues en muchos casos los estudiantes hacen uso del lenguaje verbal y escrito, pero lo expresado no guarda relación con las representaciones matemáticas y la imagen. Es decir, los estudiantes invierten la posición del numerador con la del denominador, lo que puede interpretarse como la creación de una imagen mental alejada de las características fundamentales del concepto de fracción y que posiblemente puede dificultar la comprensión de situaciones, imágenes y representaciones gráficas que busquen exponer información con contenido matemático en este caso de fracciones.

A continuación se presentan algunas de las respuestas de estudiantes que dan cuenta de las dificultades que persisten en este nivel de comprensión:

¡Armemos el siguiente rompecabezas para dar inicio a esta aventura!



Tomado de <https://www.topsimages.com>

Listo. Si ya armaste el rompecabezas, responde:

1. ¿Cuántas partes en total posee el rompecabezas? 12.
2. ¿Todas las partes son iguales? si ¿Porque? son iguales todas
3. ¿Cuántas partes están pintadas de rosado? 4

• Escribe la fracción $\frac{4}{12}$ todo
 • Señala el todo y las partes $\frac{4}{12}$ parte

Camila es una niña que le gustan mucho los nubes. Tanto así que en su habitación tiene colgado el siguiente

Imagen 28. Uso del símbolo en la representación de la fracción, respuesta de E7

Un aspecto a resaltar es lo realizado por el estudiante E7 como se puede ver en la imagen 28, alcanza a utilizar un símbolo para representar matemáticamente la fracción, pero se le dificulta reconocer que las cuatro partes que el señaló anteriormente como coloreadas constituyen el numerador de la fracción.

5.2.4. Análisis del *folding back 2*.

Para dar inicio al análisis del *folding back 2*, es preciso indicar que hace referencia a la actividad “los puentes de Camila” como se observa en la imagen 26, que corresponde con el nivel de comprensión de la imagen.

Para el desarrollo de esta actividad se propone una situación de aprendizaje relacionada con pizzas, donde el estudiante debe identificar la cantidad de porciones que come mateo por medio de tres imágenes, para luego representar simbólicamente las partes, como se muestra en la imagen 29.

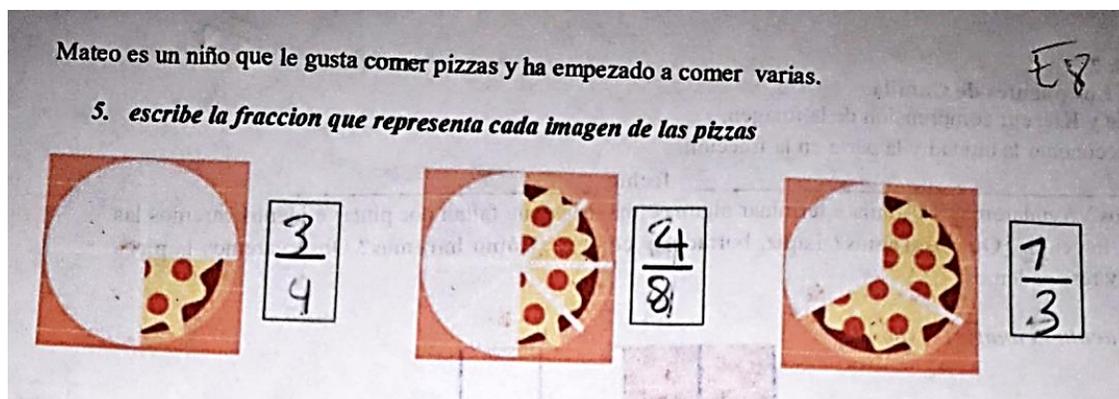


Imagen 29. Representación simbólica de las fracciones.

La imagen 29 es una de las evidencias de lo desarrollado por algunos estudiantes como E8, y E6, E1, E5, quienes alcanzan a reconocer las partes que mateo come de cada una de las pizzas, representándolas por los símbolos $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{8}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente y que muestran en este caso al numerador de cada fracción y su correspondiente denominador, lo que permite afirmar que los estudiantes reconocen los elementos y atributos de la fracción para cada ejemplo. Es decir, se evidencia que existe una comprensión de que en las fracciones, la unidad puede ser dividida en partes, que las partes tienen un atributo de proporcionalidad y que las partes integradas pueden conformar una unidad.

Por otro lado se puede decir que este grupo de estudiantes es capaz de utilizar la estructura de las fracciones, es decir denominador, numerador y vírgula para representar simbólicamente una fracción que está representada gráficamente y que además esta verbalizada a través de una situación de aprendizaje adaptada a un contexto cotidiano para una mejor comprensión del procedimiento requerido al dar solución a la situación.

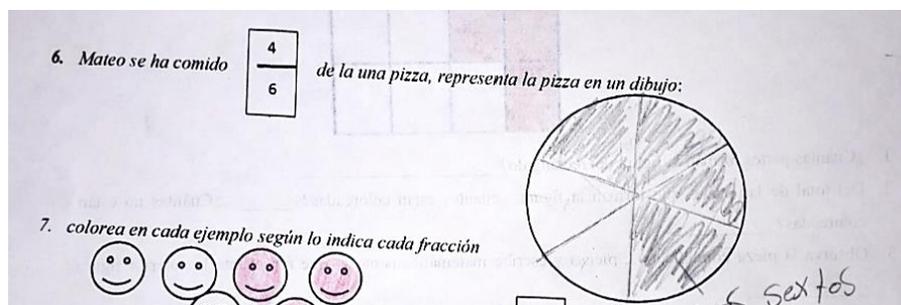


Imagen 30. Transición de lo simbólico a lo gráfico.

Para la pregunta 6, se evidencia la transición de lo simbólico a la representación gráfica de la fracción, en estudiantes como E8, E9, E4, E1, logrando establecer la correspondencia entre la unidad y el número de partes tomadas al realizar la gráfica de la fracción. Se evidencia las partes que mateo se comió y al mismo tiempo el que sean proporcionales. Por otro lado el estudiante E3 se aproximó a la representación gráfica de la fracción dada, ya que inicialmente logró identificar las partes en que se divide la unidad y las partes que se toman de la unidad, es decir el numerador y el denominador, pero al momento de la representación gráfica no se tienen en cuenta por los estudiantes el *atributo de proporcionalidad entre las partes de la fracción*, pues se obtiene una gráfica que tiene partes con áreas totalmente desiguales, cabe resaltar que, si bien los estudiantes logran establecer todo un proceso cognitivo (comprensión de la imagen), presentan dificultad en la representación gráfica ya que al parecer desconocen o no les parece importante que las partes obtenidas producto de la distribución de la pizza deban ser iguales.

Para mayor ilustración del proceso realizado por los estudiantes se presenta la imagen 31 correspondiente al análisis anterior.

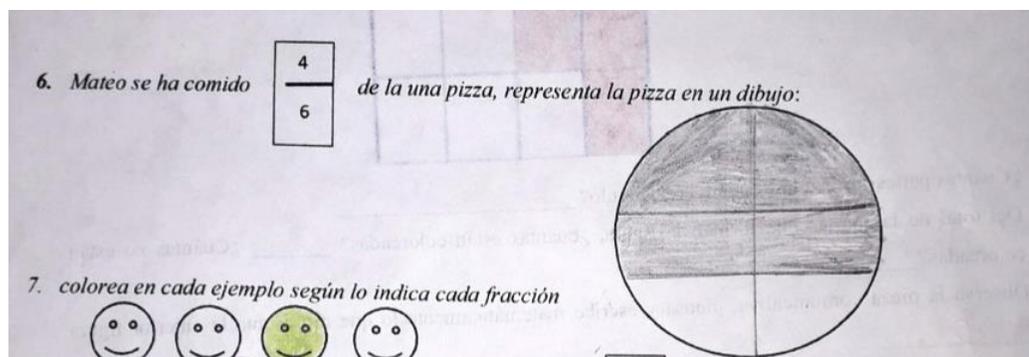


Imagen 31. Transición de lo simbólico a lo gráfico, repuesta de E3

En cuanto a la pregunta 7, los estudiantes logran la transición de su representación gráfica a la escrita y verbal en su relación parte- todo estableciendo el nombre que se le otorga a cada fracción al momento de escribir tres octavos, cinco séptimos, un cuarto, dos cuartos y su respectiva representación gráfica. También cabe resaltar que se alcanza a reconocer la fracción en un contexto discreto y continuo al establecer la parte numérica de la fracción con el conjunto de corazones y caritas que se muestran en la pregunta cuando son capaces de observar y comprender una fracción dada y a partir de esta completar una representación gráfica al relacionar la fracción con la imagen y logran decir en un lenguaje escrito lo que quieren expresar verbalmente cuando dan la lectura correspondiente a cada fracción.

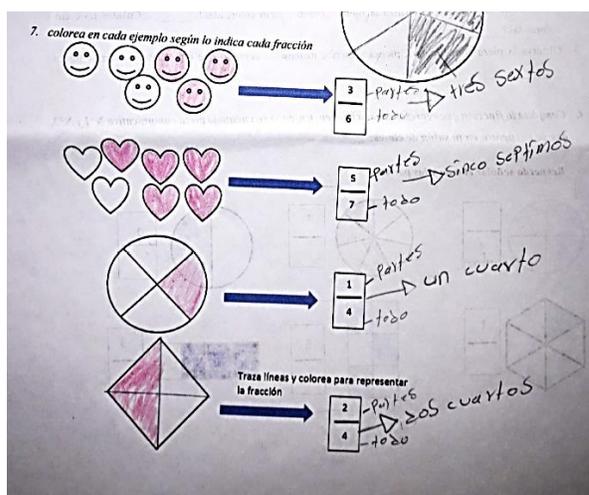


Imagen 32. Transición de la representación gráfica a la expresión verbal

5.3. Análisis de la Actividad: ayudemos al guardián repara su muro

Para el desarrollo de esta actividad, se diseña una situación en donde el estudiante debe reparar el muro de la casa del guardián, manipular material concreto, cortar partes iguales y escribir la fracción.

Cabe resaltar que en un momento inicial se planteó la actividad con material de guadua, pero al evidenciar dificultades en la manipulación de este material en algunos estudiantes se consideró el pitillo como material flexible y fácil de manipular. En esta actividad se le solicita al estudiante cortar pitillos que van desde la unidad hasta un noveno, pegar y escribir la fracción que corresponde a cada parte obtenida de manera sucesiva. De modo que, se evidencia la transición de la forma concreta a la escrita al momento de escribir la fracción que se representa cada parte del dibujo del muro que se debe reparar del guardián, la partición de cantidades continuas de la fracción y la representación gráfica.

A continuación se muestra algunas de las evidencias de la imagen 33 y 34 realizadas por los estudiantes de la actividad. Para describir el proceso realizado por los estudiantes se tendrá en cuenta el nivel de comprensión de observación de la propiedad de Pirie y Kieren, por tal motivo el análisis seguirá criterios relacionados con este nivel.



Imagen 33. Representación de fraccionamiento sucesivo



Imagen 34. Divisiones continuas de la unidad con material concreto

Al momento de solicitarle al estudiante reparar el muro y representar con fracciones las partes cortadas de la unidad alcanza a realizarlo de manera satisfactoria, reconociendo las partes en que se puede dividir el todo y estableciendo la fracción que corresponde sucesivamente a cada parte, que es producto de las divisiones continuas a la unidad.

• La primera parte del muro, la cual corresponden a la unidad, coloréala de rojo.
 • Colorea de verde las partes que corresponden a $\frac{1}{2}$
 • Colorea de azul las partes que corresponden a $\frac{1}{5}$
 • Escribe la fracción que corresponde a la parte que esta de color amarillo. $\frac{1}{7}$
 • Escribe la fracción de cada parte que no está nombrada.
 • ¿Cuántas piezas de un $\frac{1}{5}$ caben en la parte que corresponde a la unidad? 5
 • ¿Qué fracción representa la parte coloreada de morado? $\frac{2}{4}$

Imagen 35. Partes en las que se divide el todo

En la imagen 35, se puede observar los diferentes procesos matemáticos que el estudiante E8 realiza, caracterizados por la identificación de la unidad, cuando este es capaz de pintarlo de rojo para diferenciarlo de los otros elementos, por otro lado se observa que el estudiante de manera intuitiva y en la medida que realiza la actividad, va estableciendo una progresiva división de la unidad inicial en partes cada vez más pequeñas. Al llegar al punto donde se le solicita que escriba la fracción que corresponde a la parte coloreada de amarillo el estudiante escribe un séptimo lo cual es correcto permitiendo afirmar que las respuestas ofrecidas son un argumento a favor de la comprensión que la estudiante ha desarrollado sobre algunos atributos de las fracciones en su

interpretación parte todo, como es la de poder dividir la unidad en infinitas partes. Sumado a esto la estudiante es capaz de predecir cuál es la representación simbólica que corresponde a cada espacio o partes del muro que se encuentra en blanco, escribiendo el símbolo guardando relación con la estructura y posición adecuada del numerador y el denominador.

Finalmente, el estudiante evidencia una aproximación hacia la comprensión de la equivalencia entre las fracciones representadas gráficamente en las diferentes partes del muro presentado en la actividad y que no son más que una división repetida y ampliada de la unidad inicial, esto se logra evidenciar en las dos últimas preguntas de la situación de aprendizaje en donde se pide al estudiante que responda cuantas piezas de $1/5$ caben en la unidad inicial, cabe resaltar que aunque el estudiante no da cuenta del concepto de equivalencia entre las fracciones, pero sí logra desarrollar un ejercicio de identificación de fracciones equivalentes de manera intuitiva, es posible que la estudiante sin darse cuenta este interactuando con fracciones equivalentes aunque desconozca la teoría sobre los criterios que deben cumplir la equivalencia entre las fracciones.

5.4. Evolución de la Comprensión sobre las Fracciones

En este apartado, se presentan aspectos relacionados con el análisis del proceso de comprensión de los estudiantes cuando enfrentan situaciones de aprendizaje que involucran las fracciones. Durante la implementación de las actividades propias del área de matemáticas, se identificaron 4 casos, que muy bien podrían representar las formas de comprender las fracciones de otros estudiantes con características y contextos similares.

En este apartado se analizan los casos por separados, en aras de presentar la evolución que cada uno de ellos logra con respecto a la comprensión de las fracciones. De acuerdo al

compromiso ético asumido por los investigadores, no se utilizan los nombres de los estudiantes, sino que se utilizaron los códigos: E4, E5, E6, E8, para designar cada uno de los estudiantes inmersos en los casos.

Los hallazgos que se presentan a continuación son producto de la triangulación entre las diferentes técnicas: tareas de formación (evidencia escrita de las actividades desarrolladas por los estudiantes), la observación participante y la entrevista semiestructurada. Los resultados de este análisis se interpretan a la luz de los cuatro niveles de comprensión del modelo PK y, para ello se usaron los descriptores de niveles (ver tabla 2. Matriz de descriptores).

5.4.1. El caso 1: E6.

El estudiante E6 comienza leyendo detenidamente los enunciados de las situaciones propuestas en la actividad, cuyo objetivo era explorar la noción del concepto de fracción. Su proceso de comprensión inicia desde el nivel de conocimiento primitivo, desde lo propuesto por la teoría de Pirie y Kieren citado por Meel (2003) que considera que este nivel “se refiere al punto inicial, no a un bajo nivel de matemáticas. El contenido central es toda la información que el estudiante atrae a la situación de aprendizaje” (p. 236).

En este sentido se observa que, el estudiante demuestra tener algunas nociones sobre el concepto de unidad, ya que cuando se le propuso una situación de aprendizaje en la que se le solicita tomar una pieza grande y cortarla en cuatro partes, para luego organizarla. Sus respuestas fueron las siguientes:

-profesor: ¿sigue siendo la misma pieza? ¿Porque?

-E6: siguen siendo la misma pieza porque las unimos

Se puede interpretar entonces que el estudiante ha adquirido o desarrollado manera intuitiva, es decir, producto de su experiencia una noción de que la unión de las partes conforma la unidad. En otras palabras al dividir el todo, la unión de las partes conforman nuevamente el todo, así mismo, se pudo evidenciar que también reconoce nociones sobre mitad y medida, pues es capaz de decir cuántas piezas de las pequeñas caben en una grande. Sin embargo, se evidencia que el estudiante carece de nociones del uso del símbolo matemático para representar situaciones de aprendizaje relacionadas con las fracciones y de algunos atributos como proporcionalidad e igualdad.

En el análisis de las actividades de las tareas de formación (evidencia escrita), se pudo comprobar las diferentes nociones que E6 tiene sobre las fracciones, pues la respuesta que ofrece a algunas de las situaciones, por ejemplo, cuando se le pide que “parta cada sandía por mitad”, lo que se espera es que represente la cuarta parte de cada sandía, sin embargo, la forma como lo realiza no da cuenta de lo solicitado en la actividad.

Por otro lado, el estudiante manifiesta reconocer que en la actividad se le está solicitando fraccionar uno o varios objetos en este caso sandías, pero desconoce el concepto de $\frac{1}{4}$ de sandía por el que también se le pregunta, de la misma forma el estudiante demuestra reconocer aspectos relacionados con la mitad de un objeto (unidad).

Es importante mencionar que las nociones de E6 frente a las fracciones corresponden a situaciones cotidianas de partir objetos, es decir, el estudiante de manera intuitiva ha desarrollado ideas de lo que implica fraccionar una unidad, pero que desconoce la relación matemática que la acción de partir guarda con el concepto de fracción, esto se logra ver cuando al estudiante se le dificulta comprender, ¿cuáles son las partes de la sandía ($\frac{1}{4}$ de cada sandia) que el guardián del puente necesita?

Al momento resolver la actividad 7, el estudiante evidencia poder partir el material dado en partes, como lo orienta la guía en relación a la habilidad de fraccionar una unidad en piezas.



Imagen 36. Partiendo material en partes iguales



Imagen 37. Partes obtenidas al dividirla la guadua

Así mismo el estudiante reconoce que no existe una igualdad entre las partes fraccionadas de la guadua dada, ya que manifiesta obtener dos partes pero al momento de comparar el tamaño de cada parte fraccionada, el estudiante evidencia y reconoce la desigualdad. Como se muestra en su respuesta a la pregunta:

-Profesor: ¿Cuántas mitades obtuviste?

-E6: dos

-Profesor: ¿Son iguales las partes obtenidas?

-E6: No

Si bien el estudiante, presenta dificultad para fraccionar el material dado (unidad) obedeciendo al criterio de igualdad, y atributo, que Piaget (1960), Payne (1976) citado por Pabón y Acero (2001) consideran como: “las subdivisiones cubren el todo, los trozos “partes” son iguales. Las partes tiene que ser del mismo tamaño” (p. 1) y, que son indispensable para la comprensión de la representación gráfica de la fracción, se puede contemplar la posibilidad de pensar que el

estudiante se aproxima al nivel de *creación de la imagen* del concepto de igualdad entre las partes de la fracción, aunque E6 al momento de fraccionar no logra obtener parte iguales, si logra reflexionar sobre la necesidad de que las partes cumplan con este criterio de igualdad, al momento de expresar: “*esos pedazos tienen que mocharse iguales para unirlos, para armar una vara entera*” .

Todo lo anterior, permite evidenciar que E6, se encuentra en el *nivel de creación de la imagen*, a partir del cual puede sentar las bases para el inicio de la construcción y creación de una imagen mental del concepto (igualdad), que posiblemente en un nivel más avanzado de comprensión se puede adherir a otras imágenes mentales que guardan relación con el concepto matemático de fracción, el cual puede ser entendido como un macro concepto, pues de acuerdo con Meel (2003), este nivel de *creación de la imagen*, “las acciones que se realizan en este estrato involucran desarrollar las conexiones entre los referentes y los símbolos” (p.237).

Así mismo Meel (2003) menciona que: “Las acciones que se realizan en este estrato se relacionan con que el estudiante realice algo, mental o físico, para obtener una idea sobre un concepto” (p.237). Por ejemplo mientras el estudiante está realizando actividades de doblado o cortado puede desarrollar una imagen de fracciones como cosas que obtuvo a partir de cortar algo en piezas igual y más pequeñas.

A pesar que el estudiante se encuentra el nivel de creación de la imagen, cuando se analizan las características relacionadas con la *complementariedad de la acción y expresión*, emergen elementos que permite decir que el estudiante en este punto no tiene un manejo correcto de la representación simbólica pues la utilización que hace de la forma escrita no corresponde con la fracción que debe representar. De igual forma, en su lenguaje se pueden notar algunos rasgos de la expresión verbal, cuando se le pregunta:

- *Profesor: ¿De las partes obtenidas cuantas se toman?*
- *E6: tomo una parte*
- *Profesor: ¿Cuántas partes quedaron?*
- *E6: Tres*

De modo que se puede observar el uso de los símbolos pero estos no son fraccionarios, el estudiante manifiesta *la complementariedad de la acción y expresión* al preguntarle

- *Profesor: ¿Que acabas de hacer?*
- *E6: mochar guaduas*

Lo manifestado en su respuesta corresponde a la acción que debe realizarse en este nivel, ya que según la teoría de PK citado por Meel (2003) “el estudiante emplea el lenguaje de fracción para analizar y registrar las acciones” (p.237), en este caso E6 debe verbalmente manifestar el resultado de partir una unidad en dos o más partes, y en cuanto en la acción cortar piezas de igual tamaño.

Teniendo en cuenta que el estudiante presentó dificultades al llegar al nivel de *creación de la imagen*, se consideró necesario realizar el proceso de *folding back* que le posibilitara la reconstrucción o reacomodación de imágenes mentales establecidas según Meel (2003): “la reexaminación de la comprensión” (p. 240)

En este sentido y al aplicar el *folding back*, se observaron los resultados relacionados con las preguntas de actividades anteriores, pudiéndose evidenciar que el material utilizado al final favoreció la comprensión de la idea de mitad y proporcionalidad ya que, las respuestas a las preguntas de la actividad de *folding back* se aproximaron a los descriptores establecidos en cada nivel de comprensión.

Igualmente, fue posible evidenciar en este proceso de *folding back* que el estudiante supero la dificultad inicial de partir mitades iguales, pero al mismo tiempo la actividad dejó en evidencia que para el estudiante resulta más fácil realizar reparticiones cuando se le solicitan mitades o cuartos y que por el contrario cuando se le solicita partir unidades en cinco partes iguales no logra hacerlo con las propiedades de la proporcionalidad, comprendiendo que las partes obtenidas hacen conforman una unidad inicial.

Por último, es pertinente mencionar que el proceso de análisis realizado para la observación de la comprensión del concepto de fracción desarrollado por el estudiante E6, permitió describir la movilización del estudiante en la estructura por niveles del modelo de comprensión de P.K, caracterizada por las acciones y expresiones que este afloró durante la realización del proyecto STEM y que permitió identificar, que inicio el proceso en el *nivel de conocimiento primitivo* y que posteriormente fue avanzando hacia la *creación de una imagen mental* de diferentes conceptos como son: mitad, proporcionalidad, unidad y partes pero en dicho proceso de construcción de estas imágenes se presentaron dificultades algunas en las acciones físicas realizadas por el estudiante y otras en las expresiones empleadas, cabe señalar que dichas expresiones en ocasiones fueron escritas y otras veces fueron verbales.

Del mismo modo se analizó la representación simbólica utilizada por el estudiante lo que permitió determinar si cumplía con los descriptores establecidos en el nivel de *comprensión de la imagen*, nivel al que el estudiante no pudo llegar, debido a que luego de pasar por una acción de redoblamiento no avanzo hacia el nivel inmediatamente siguiente, como lo muestra la ilustración.

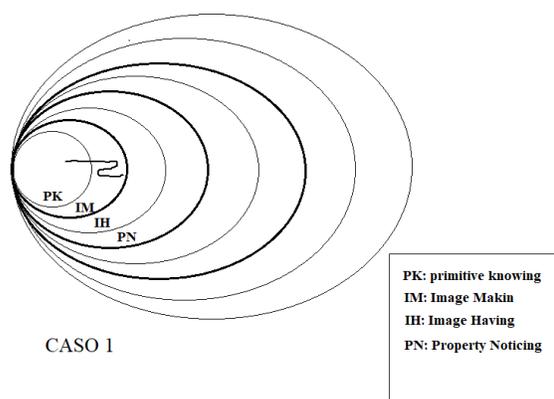


Figura 7. Evolución de comprensión caso 1. Elaboración propia

El hecho de no avanzar hacia este nivel está representado en la imposibilidad por parte del estudiante de dar cuenta de la relación existente entre el símbolo matemático y la representación gráfica de una fracción, así mismo el estudiante muy pocas veces fue capaz de identificar en las acciones de *partir* y en las representaciones gráficas la presencia de las fracciones, desconociendo ciertas propiedades del concepto entorno al cual está enfocado este estudio. Cabe resaltar que el estudiante E6 aunque logró llegar hasta el nivel de creación de la imagen, se vinculó al trabajo del proyecto STEM al realizar el prototipo del puente como se observa en las siguientes imágenes:

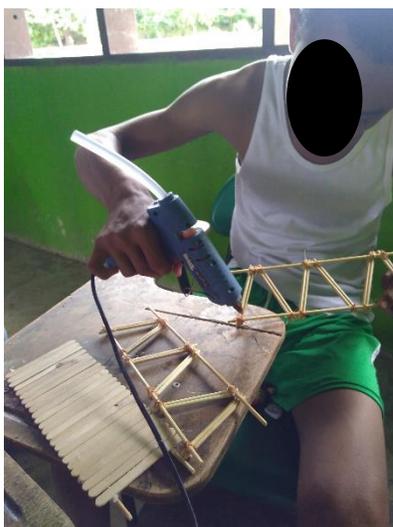


Imagen 38. Construcción del puente



Imagen 39. Conteo de partes del prototipo del puente

5.4.2. El caso 2: E4.

Del mismo modo en el análisis se tuvieron en cuenta las mismas actividades que se plantearon para el caso 1 y el proceso inicia desde un *nivel de conocimiento primitivo* en el cual el estudiante realiza las acciones solicitadas: como la lectura de la situación y el diligenciamiento de la guía.

Producto de este proceso se pudieron consolidar nociones que el estudiante expresa de manera escrita sobre mitad, parte de una unidad y partición de unidades en partes iguales, cabe destacar que las nociones presentadas por el estudiante son producto de la interacción con situaciones cotidianas de la vida escolar, y que al parecer nada tienen que ver con un proceso de planeación ligado a una estrategia pedagógica por parte de la escuela, por el contrario, en las expresiones y respuestas del estudiante se puede observar el uso de un lenguaje coloquial y evocaciones de situaciones que E4 utiliza para responder a las preguntas de la guía y que permiten identificar que tiene algunas nociones de la acción de cortar un objeto en partes iguales, al igual que asocia esta acción a otras actividades que puede realizar en la escuela y que involucra otros objetos que se pueden partir en partes.

Por otro lado, E4 al igual que el estudiante del E6 no evidencia tener nociones de utilización de símbolo fraccionario lo que se puede observar en el momento en que se limita a representar las partes obtenidas en la actividad diagnóstica con la utilización de números enteros positivos.

Otro aspecto que se considera destacable en este punto, es el hecho de que el estudiante presenta dificultad para representar gráficamente una fracción planteada en una situación de aprendizaje, ya que al momento de realizar el dibujo (representación gráfica) las partes no son proporcionales, es decir no cumple con el criterio de igualdad entre las partes lo que se considera

como un atributo fundamental de la representación gráfica de las fracciones y que es un elemento primordial en el proceso de comprensión de la fracción en su relación como parte de un todo.

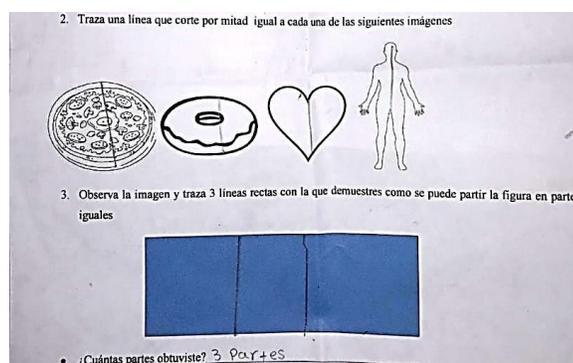


Imagen 40. Noción de mitad al dividir objetos e imágenes

Para algunos autores la representación gráfica podría considerarse como un primer paso para la comprensión de las otras interpretaciones de la fracción es por eso que, para la comprensión de fracciones y superar algunas dificultades Fazio y Siegler (2011) plantean que los “docentes deben enfocarse en desarrollar la comprensión conceptual junto con la fluidez procedimental. Una forma de mejorar la comprensión conceptual es el uso de material didáctico manipulativo y la representación visual de las fracciones” (p. 12).

De igual forma también ubican la dificultad para realizar representaciones gráficas de las fracciones como la base fundamental de las dificultades de comprensión de otras formas de entender las fracciones.

Hasta este punto se puede establecer que los aspectos presentados anteriormente constituyen una forma de caracterizar las diferentes nociones que el estudiante E4 tiene sobre las fracciones en su relación parte todo, teniendo como base de análisis de estas nociones el nivel de conocimiento primitivo del modelo de PK.

En concordancia con los niveles de comprensión del modelo de PK a continuación se ponen en discusión los diferentes elementos que permitieron el contraste de las acciones y expresiones del estudiante con el modelo. Es así como, al momento de desarrollar la actividad 7 sobre el *nivel de creación de la imagen* de fracción y al plantearle la situación de tomar una vara de 40 centímetros de longitud y partirla en mitades iguales, se evidencia que el estudiante decide partir en dos partes como lo expresa también en su respuesta.

-Profesor: ¿Cuántas partes obtuviste?

-E4: Dos

-Profesor: ¿son iguales las partes?

-E4: No

-Profesor: nuevamente parte las piezas que obtuviste por mitad. Responde ¿Cuántas mitades obtuviste?

-E4: Cuatro mitades

-profesor: ¿son iguales las partes?

-E4: No

Posteriormente en otras situaciones de aprendizaje de la misma guía y al igual que la presentada anteriormente el estudiante continua evidenciando dificultad para crear una imagen sobre el concepto de fracción por medio de las acciones que se solicitan en la actividad 7, estas dificultades están representadas en la imposibilidad de utilizar un símbolo fraccionario que represente de manera fiel la siguiente situación.

• Toma un parte de las que obtuviste, escribe lo que acabas de hacer 1 parte
 • ¿Cuántas partes quedaron? 3 partes
 • Escribe lo que acabas de hacer _____


• Completa la siguiente información
 De 4 partes de vara que tenía tome
 De 4 partes que tenía cuantas me quedaron

• Representa lo anterior escribiendo la fracción correspondiente: $\frac{1}{3}$

¡Recuerda!


Que mientras realizas este ejercicio, puedes aprender y contrastar tus ideas con la pieza comunicativa que estará presente en tu salón.

Imagen 41. Dificultades de estudiantes en la noción fracción.

Como se evidencia en la imagen el símbolo $\frac{1}{3}$ no da cuenta de la fracción que se presenta en la situación, cabe destacar que a pesar que el estudiante incurre en un error al momento de utilizar el símbolo, no debe olvidarse el hecho de que logra evidenciar una creación mental en relación a la estructura del símbolo fraccionario, aunque el estudiante no manifieste referirse al denominador, numerador y raya fraccionaria, si es consciente de la posición que ocupa cada elemento a la hora de realizar el símbolo.

Frente a la situación presentada por el estudiante entorno a la comprensión en este *nivel de creación de la imagen* se hizo necesaria la característica de una acción de *folding back* que permitiera al estudiante la reacomodación de estructuras mentales anteriores que ayudara a generar una nueva y mejorada creación de la imagen de fracción. En este sentido se adaptó la actividad 7 con otro tipo de material manipulativo que permitiera una mejor motricidad para el estudiante, de igual forma se refinaron algunas preguntas y acciones que el estudiante debía realizar.

En la creación de la imagen a través de una acción de *folding back* el estudiante E4 desarrolla la habilidad de cortar una unidad por mitades iguales en su tamaño y cuando se le solicita volver

acortar las partes obtenidas por mitades, realiza nuevamente la acción y obtiene nuevas mitades iguales como se observa en la imagen 42.

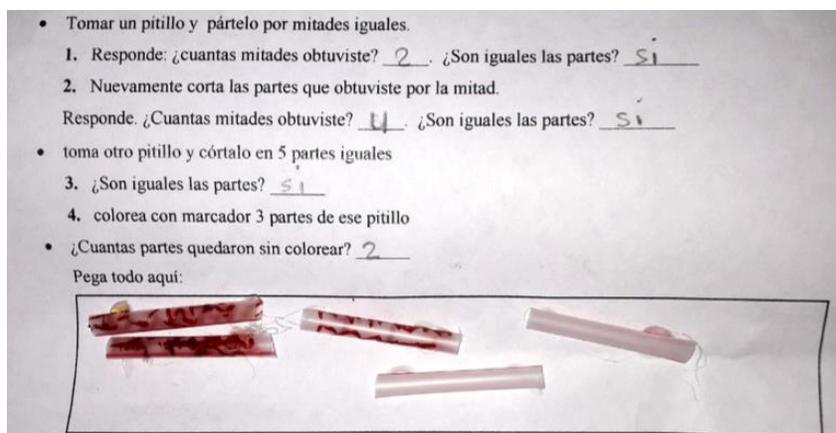


Imagen 42. División de partes iguales del material concreto

Dicha acción posibilita la creación de una imagen mental de la fracción en la cual es necesario que la unidad sea fraccionada en partes proporcionales en tamaño, del mismo modo el estudiante evidencia mediante *la complementariedad de la acción y la expresión* que tiene una imagen mental de las partes que son tomadas de la fracción (numerador) y las partes totales que conforman la unidad (denominador). Puede considerarse este proceso como una aproximación en la creación de una imagen mental matemática que también puede entenderse como la construcción inicial del concepto de numerador y denominador que todavía no tiene un carácter formal en el significado matemático que el estudiante le asigna.

Por otro lado, cuando el estudiante aborda la realización de actividades sobre el reconocimiento de la unidad y las partes de una fracción, se puede observar en la siguiente ilustración, que es capaz de identificar las partes que conforman una fracción, mediante el conteo de sus piezas, así mismo E4 hace uso del símbolo 12 para manifestar el número total de piezas,

en este sentido el estudiante deja ver en una de sus respuestas un aspecto que carga de significado la idea de *las partes* (imagen mental) al manifestar:



Imagen 43. Actividad los puentes de Camila

-Profesor: *¿Cuántas partes en total posee el rompecabezas?*

-E4: 12

-Profesor: *¿todas son iguales?*

-E4: si

-Profesor: *¿Por qué?*

-E4: *porque eran todas cuadradas.*

-Profesor: *¿Cuántas partes están pintadas de rosado?*

-E4: 4

Posteriormente se le solicita que escriba en símbolo fraccionario lo que representa el dibujo o representación gráfica y esto es lo que el estudiante expresa:

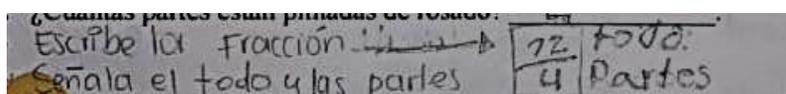


Imagen 44. Representación del símbolo fraccionario de una representación gráfica

Para el estudiante existe una imagen mental construida que le permite pensar y comprender las partes de la fracción como elementos que con forman un todo y que dichos elementos deben ser iguales en su forma. Con esta respuesta puede evidenciarse que existe una comprensión de la imagen creada sobre las fracciones, en la medida en que para él, las partes de una fracción contienen unas características que les son inherentes, y le son útiles para identificarlas de forma fácil; en este sentido es pertinente resaltar que las mencionadas características las hemos llamado anteriormente en este estudio *atributo*.

Guardando relación con el análisis por nivel que se viene tratando de desarrollar en este apartado, es necesario destacar que en relación con la teoría sobre el *nivel de comprensión de la imagen*, es indispensable tener en cuenta que según Meel (2003):

La libertad para imaginar un concepto irrestricto por medio de los procesos físicos, los cuales provocan que la imagen sea exitosa en relación a la evolución del conocimiento matemático debido a que el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas (p.237).

Es decir que la unidad está compuesta por partes, las partes tienen el mismo tamaño, la unidad se puede dividir en partes, así mismo, es importante destacar que cuando existe una comprensión de la imagen, según PK citado por Meel (2003): “el estudiante desarrolla una nueva imagen mental, liberando las matemáticas y las relaciona con acciones concretas” (p.237).

Como se observa a continuación el estudiante inicia una liberación de las matemáticas, utilizando la representación simbólica, pero en el momento de hacerlo incurre en un error, representando de manera errada el numerador y denominador teniendo en cuenta la estructura ya establecida para representar simbólicamente una fracción. Cabe destacar que aunque el estudiante

comete un error en la estructura, es capaz de identificar el todo y las partes de una manera correcta; la presencia de este error en la representación simbólica en términos del proceso de comprensión de la imagen mental, posibilitó el planteamiento de una acción de *folding back* que permitiera al estudiante una reacomodación de algunas imágenes mentales y por qué no la creación de otras nuevas que permitieran relacionar la correcta posición de los símbolos con otras imágenes mentales sobre el concepto de fracción, igualdad entre las partes, unidad o todo y acciones realizadas.

Es por esto que, cuando al estudiante se le plantea una situación, como lo pretende mostrar la imagen siguiente, el estudiante logra completar la información solicitada en la actividad.

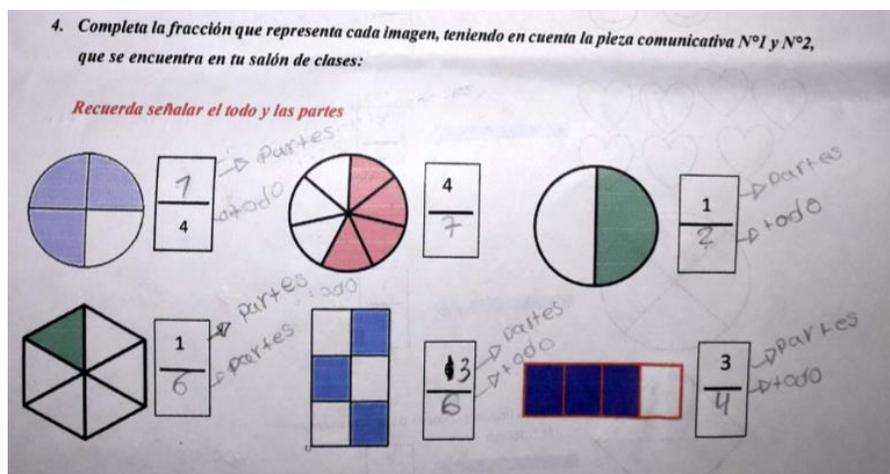


Imagen 45. Ubicación del símbolo fraccionario

Evidenciándose la comprensión de la imagen mental del todo y sus partes, al igual que existe una comprensión de la ubicación del símbolo fraccionario obedeciendo a los criterios establecidos por Fandiño (2009) sobre la posición del numerador y el denominador en relación a la raya fraccionaria, cuando plantea “el símbolo $\frac{m}{n}$, tiene un origen incierto, y la rayita horizontal puesta entre numerador y denominador es llamada vírgula es decir bastoncillo” (p. 38).

Es visible que el estudiante logra una comprensión por medio de la interpretación de representaciones gráficas de las fracciones en donde la unidad es fraccionada en diferentes partes, pero siempre en contextos continuos. Es en este momento donde cobra importancia los planteamientos en relación a las diferentes interpretaciones que posee las fracciones, expresados por Freudenthal (1983), el cual plantea:

Quebrado o fracturador, desde un modo más concreto de las fracciones de un “todo y parte” en el cual el todo puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura. Comparador, en este sentido las fracciones sirven también para comparar objetos que se separan uno de otro o que se experimenta, imagina, piensa como si se separaran (p. 8).

Es pertinente decir que a partir de este momento en la *comprensión de la imagen* el estudiante E4 en adelante, logra desarrollar las actividades de manera más precisa y apegado a los requerimientos de las guías, como se muestra en las siguientes imágenes.

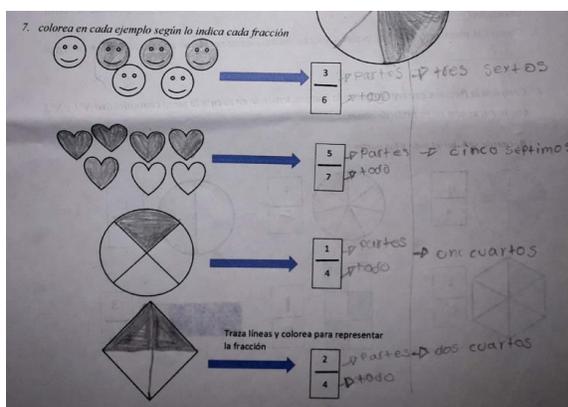


Imagen 46. Representación simbólica y gráfica de la fracción

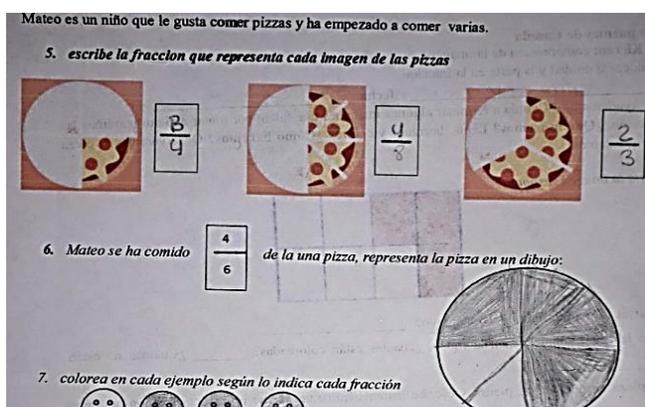


Imagen 47. Representación gráfica y expresión verbal de la fracción

En concordancia con lo anterior, se pudo establecer que E4 en la actividad de “ayudemos al guardián a reparar el muro”, la cual corresponde al nivel de observación de la propiedad, continua en la comprensión de las matemáticas, producto (consecuencia) de actividades y acciones que realiza, pero esta vez lo hace de manera más fluida y con mayor seguridad que en otras ocasiones.

Al mismo tiempo, cuando responde a las dos últimas preguntas de la actividad, deja ver la comprensión con respecto al concepto de fracción en su interpretación como medida, pues al plantearle las siguientes preguntas el responde:

-Profesor: ¿Cuántas piezas de $1/5$ caben en la parte correspondiente a la unidad?

-E4: 5

-Profesor: ¿Qué fracción representa la parte coloreada de morado?

-E4: $\frac{2}{4}$

Vemos en estas respuestas, una utilización de un lenguaje matemático o simbólico pero también la interpretación de las representaciones gráficas de las fracciones cuando estas son presentadas en situaciones de aprendizaje relacionadas con los gustos e intereses del estudiante. Así mismo, se evidencia en el estudiante una aproximación a lo que podría llamarse la comprensión del concepto de fracciones equivalentes, toda vez que da cuenta de cuántas partes de $\frac{1}{4}$ conforman la mitad de la unidad fraccionada como lo muestra la imagen para mayor ilustración.

¡Felicitaciones!
Ya eres todo un conocedor del tema, realiza el siguiente ejercicio que te ayudará a ser un experto.

La primera parte del muro, la cual corresponden a la unidad, coloréala de rojo.
 Colorea de verde las partes que corresponden a $\frac{1}{2}$
 Colorea de azul las partes que corresponden a $\frac{1}{5}$
 Escribe la fracción que corresponde a la parte que esta de color amarillo. $\frac{1}{7}$
 Escribe la fracción de cada parte que no está nombrada.
 ¿Cuántas piezas de un $\frac{1}{5}$ caben en la parte que corresponde a la unidad? -5
 ¿Qué fracción representa la parte coloreada de morado? $\frac{2}{4}$

Imagen 48. Comprensión de fracciones equivalentes

Teniendo en cuenta entonces, la forma como evoluciona la comprensión del estudiante E4 se propone la siguiente representación:

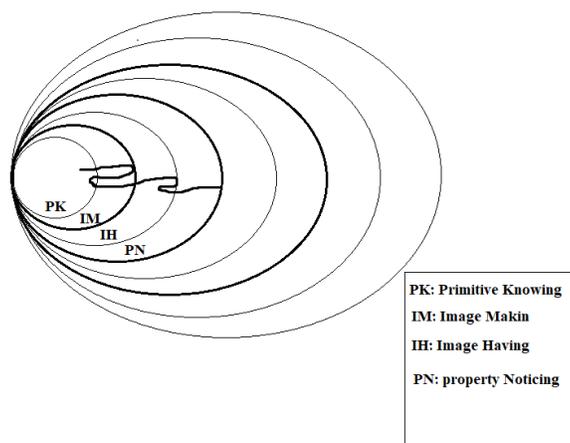


Figura 8. Evolución de comprensión caso 2. Elaboración propia

5.4.3. El caso 3: E5.

El estudiante E5 comienza leyendo en voz alta la situación de aprendizaje que tiene como objetivo indagar por las nociones de partición, realiza la división de $\frac{1}{4}$ de cada una de las sandías sin tener en cuenta que las partes sean iguales ya que lo hace de manera intuitiva transfiriendo a esta acción de alguna experiencia, del mismo modo queda evidenciada la falta de reconocimiento numérico o simbólica de la fracción cuando describe “*esta es la cuarta parte que se va a comer el guardián*” y a la vez da cuenta de no reconocer la idea de mitad, pues cree que al trazar una línea arbitraria es mitad.

Esta primera actividad el E5 se sitúa en el nivel de conocimiento primitivo, pues realiza acciones de reparto aunque no proporcionales, condición básica para este concepto.

En otro momento del proyecto STEM el estudiante E5 requiere del proceso de *folding back* cuando está desarrollando la actividad concerniente al *nivel de creación de la imagen* y no logra cortar piezas de iguales tamaños y mitades por lo que se requiere cambiar el material de guadua por pitillos plásticos y afinar cierto vocabulario para crear la idea de mitad. De modo que se le solicita tomar un pitillo y cortarlo primero en 2 mitades iguales, luego 4 y por último en 5 partes iguales y colorear 3 partes, luego se le pide:

-Profesor: Escribe con una fracción lo que está representado

-E5: $\frac{3}{5}$

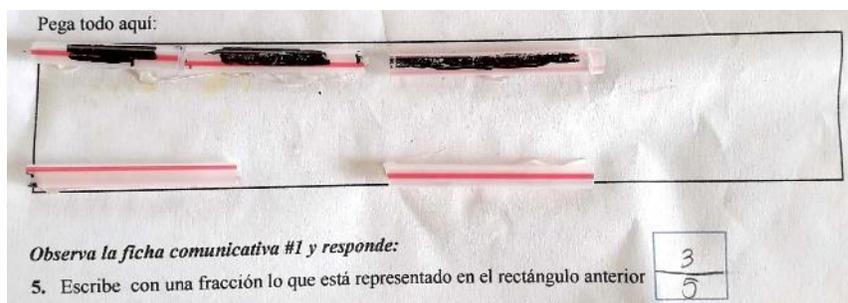


Imagen 49. Respuesta de estudiante en folding back

Con esta acción de *folding back* el estudiante da cuenta de que las partes deben ser iguales o proporcionales para poder realizar la partición condición que debe cumplirse en cuanto a la fracción en su representación parte-todo, si bien lo expresa Kieren citado por Pabón y Acero (2001): “El tratamiento de la relación parte - todo depende de la habilidad que se tenga para dividir o partir una cantidad continua o un conjunto discreto de objetos en partes congruentes” (p.1).

Es de resaltar que el estudiante logra escribir la fracción correspondiente dando muestra del número total de partes en que se cortó el pitillo y el número de partes que coloreó, lo cual le permite ubicarse en el nivel de *creación de la imagen*, ya que estas acciones de cortar o mochar le ayuda a crear una imagen mental del concepto de fracción pues según Pirie y Kieren citado por Meel (2009) “las acciones que se realizan en este estrato se relacionan con que el estudiante realice algo mental o físico” (p. 237).

Luego al pasar con la actividad posterior que tiene como objetivo reconocer la unidad y las partes en la fracción, donde tiene que armar un rompecabezas conformado por 12 piezas y 4 de ellas están resaltadas de color, es capaz de reconocer la situación tal y como se muestra en la imagen 50. El estudiante E5 avanza al siguiente nivel de comprensión de Pirie y Kieren, correspondiente al nivel de *comprensión de la imagen* ya que el estudiante logra comprender que

esas imágenes mentales asociadas a las ideas de mitad, igual, unidad o el todo se remplazan por una imagen mental en relación al concepto de fracción.

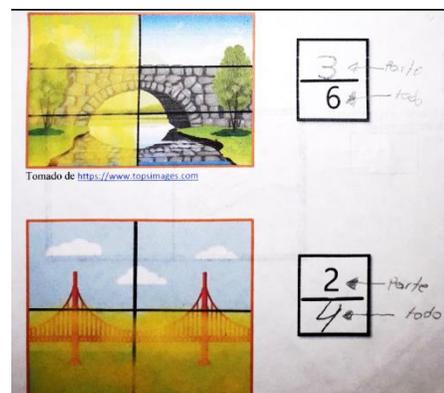
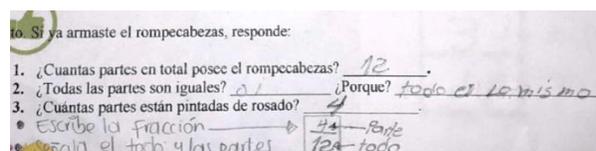


Imagen 50. Evidencia de la comprensión de imagen

Imagen 51. Reconocimiento de atributos de fracción

De este modo E5 es capaz de reconocer los elementos que hacen parte de la fracción, numerador, denominador al escribir e identificar de manera correcta cuál de los símbolos es la unidad (todo) y las partes cuando se le solicita completar la fracción en cada ejemplo como se muestra en la imagen 50 y 51, demostrando así que ha logrado relacionar la representación gráfica de la fracción con su representación simbólica cuando dan muestra del uso de la representación mental sin necesidad de usar objetos concretos pues ya ha construido la suya.

Continuando con el desarrollo del proyecto STEM el estudiante debe construir un muro de fracciones con pitillos en diferentes tamaños y en partes iguales que van desde la unidad hasta un noveno, el estudiante E5 realiza las acciones de cortar partes iguales, reconociendo la idea de fraccionamiento en cantidades continuas logrando establecer la fracción correspondiente para cada parte, se puede decir que ha alcanzado el nivel de comprensión de *observación de la propiedad* al poder identificar en diferentes representaciones pictóricas de fracciones la unidad y sus partes,

determinando que todas contienen atributos que las relacionan y las ubican en la imagen mental de fracción, evidencias de lo mencionado es cuando se le solicita y realiza de manera correcta colorear de rojo la unidad y se le pregunta:

-Profesor: ¿Cuántas piezas de un $1/5$ caben en la parte correspondiente a la unidad?

-E5: 5 partes

Otra evidencia de la comprensión en este nivel es cuando se enfrenta a la elaboración del prototipo de puente propuesto en el proyecto STEM, el cual da cuenta de la comprensión de las propiedades de la fracción y de su uso en una situación concreta, según Pirie y Kieren citado por Meel (2003), en este nivel el estudiante es capaz de “Observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales” (p.238).

De modo que el estudiante E5 es capaz de distinguir características y propiedades del concepto propias de fracción en su relación parte todo, al explicar de manera verbal o simbólica las conexiones de todos los atributos que posee la fracción para realizar el prototipo del puente, lo cual se puede observar cuando:



Imagen 52. Unión de piezas para el puente



Imagen 53. Representación simbólica de la fracción con el prototipo del puente

A partir de la elaboración del prototipo de puente el estudiante E5, evidencia que las acciones de cortar y dividir piezas grandes y pequeñas encierra elementos básicos de los atributos de la fracción.

-Profesor: ¿Qué fracciones usamos para realizar el prototipo de puente?

-E5: un cuarto

-Profesor: ¿Cuáles son las piezas de un cuarto?

-E5: (el estudiante señala las piezas pequeñas de la pasarela del puente)

-Profesor: ¿cuál de las partes es la unidad?

-E5: la pieza larga

-Profesor: ¿Cuándo usamos la fracción?

-E5: cuando dividimos para pintarlo

Al momento de realizar la pasarela del puente y pintarla el estudiante incorpora dichos atributos de forma abstracta, así:

-Profesor: ¿cuántas partes está dividida la pasarela?

-E5: cuatro cuartos

-Profesor: ¿Qué fracción representa cada color de la pasarela?

-E5: un cuarto en cada color

-Profesor: ¿cuántas piezas conforma la pasarela?

-E5: 24 piezas pequeñas

-Profesor: *¿Entonces cuántas piezas debes pintar de color, cuando te piden pintar un cuarto?*

-E5: *el estudiante piensa y queda en silencio*

Para resolver la pregunta el estudiante toma las piezas de un cuarto, es decir las piezas pequeñas que conforma la pasarela para dar con la respuesta:

-E5: *(el estudiante cuenta las piezas en su totalidad, las pone sobre la mesa) y comienza contar*

-E5: *(...) son 6 piezas de cada color*

-Profesor: *¿Por qué son 6?*

-E5: *las reúno y formo 4 grupos y no sobra piezas, para cada uno un color.*



Imagen 54. Conteo de piezas para el folding back



Imagen 55. Uso de fracciones para pintar del puente

En este punto del proyecto STEM, se puede considerar que el E5 alcanza el nivel de *observación de la propiedad*, cuando ha construido una imagen mental del concepto de fracción,

al relacionar todas las imágenes mentales que ha construido en las anteriores actividades y es capaz de buscar una solución, demostrando con acciones y expresiones, ya que según Michener (1978): “estas conexiones surgen de la exploración y manipulación de un concepto en distintos niveles como la examinación de ejemplos relevantes” (p.237).

De acuerdo al recorrido y comportamiento que tuvo el estudiante E5 por los niveles de comprensión de Pirie y Kieren, se obtiene el siguiente esquema:

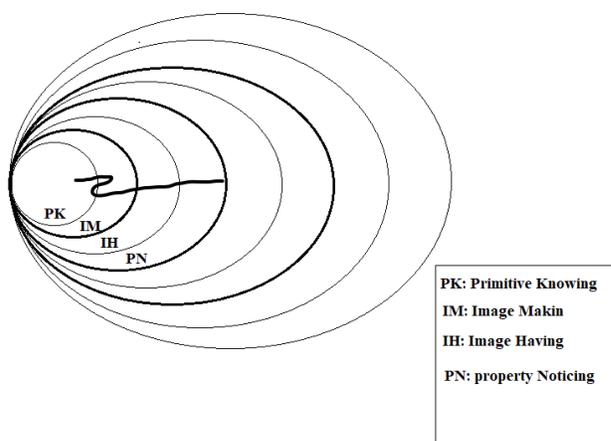


Figura 9. Evolución de comprensión del caso 3 según modelo de Pirie y Kieren.

5.4.4. El caso 4: E3.

El estudiante E3 realiza de manera apropiada las particiones relacionadas a la fracción en su representación parte-todo, en la actividad en que se solicita dar al guardián $\frac{1}{4}$ de cada una de las sandías.

Se puede ver que el estudiante logra identificar cuál de las partes de la sandía representa un $\frac{1}{4}$, también se puede evidenciar que el estudiante posee nociones de igualdad entre las partes de una fracción, ya que al momento de trazar líneas que cortan las figuras obtiene como resultado partes iguales o congruentes, por lo que se puede establecer que el estudiante E3, se sitúa en el

nivel de conocimiento primitivo, donde expresa los conocimientos previos que trae a la situación que debe resolver, mostrando nociones de unidad de la fracción y que esta está compuesta por partes al dividirla.

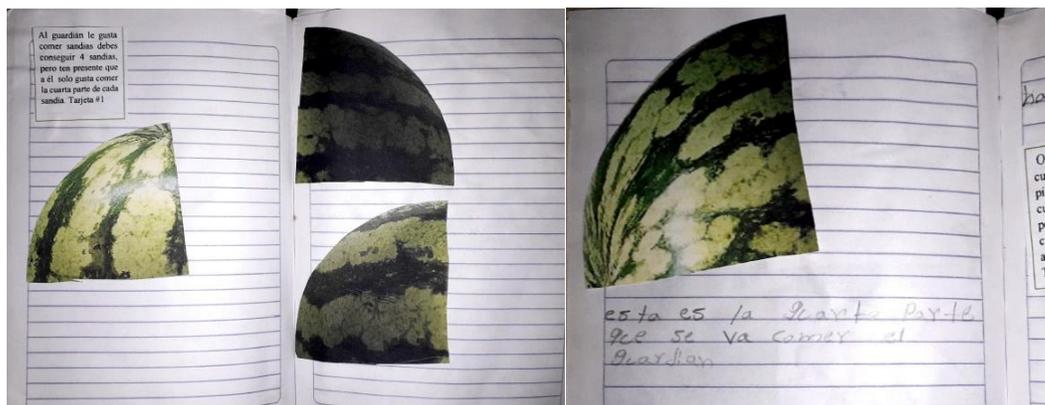


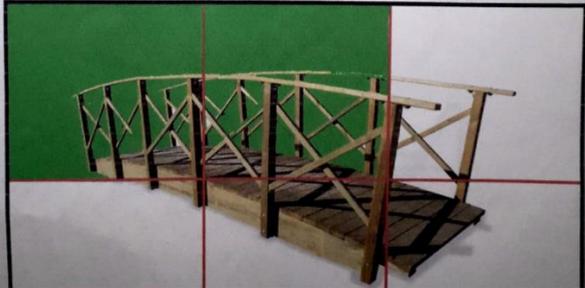
Imagen 56. Respuesta del estudiante para cuartos de sandía

Al dar paso a la siguiente actividad que proporciona orientaciones sobre el concepto de fracción, el estudiante avanza en su comprensión al nivel de *creación de la imagen* cuando se le muestra una representación gráfica de fracción y logra establecer el símbolo matemático de la fracción correspondiente a la gráfica.

Una vez construida la imagen mental del concepto de fracción, el estudiante se enfrenta a la situación de aprendizaje propuesta en la actividad, pero este se le dificulta distinguir el numerador y denominador, y distinguir en las representaciones gráficas, por lo que se le hace necesario *folding back*, en donde se le propone una situación similar a la actividad anterior haciendo énfasis en la representación gráfica de la fracción, es así como se le solicita identificar las partes y el todo, y así de cuenta del numerador y denominador como parte de la fracción, en este sentido el estudiante E3 es capaz de pasar de la representación gráfica a la simbólica al momento de escribir la fracción que corresponde a la gráfica dada en una situación particular del

desarrollo del proyecto STEM, por lo que se puede decir que al reconocer estos atributos como parte del concepto, E3 avanza al *nivel de comprensión de la imagen* como se observa en la siguiente imagen:

Camila es una niña que le gustan mucho los puentes, tanto así que en su habitación tiene colgado el siguiente cuadro.



Siendo en cuenta la imagen anterior responde

4. ¿Cuántas partes forman la imagen del cuadro? 6
5. Del total del cuadro que son 6 partes, ¿cuántas están coloreadas? 2 ¿Cuántas no están coloreadas? 4
6. Observa la pieza comunicativa, piensa y representa en fracción las partes del cuadro de Camila

Señala el todo y las partes

<u>2</u>	parte
<u>6</u>	todo

Imagen 57. Evidencia de la dificultad en el nivel comprensión de la imagen

También cabe resaltar que el estudiante E3 realiza transiciones de la representación simbólica a la gráfica plasmando en un dibujo que se le solicita el cual representa la fracción de la situación planteada como se evidencia a continuación en la siguiente imagen:

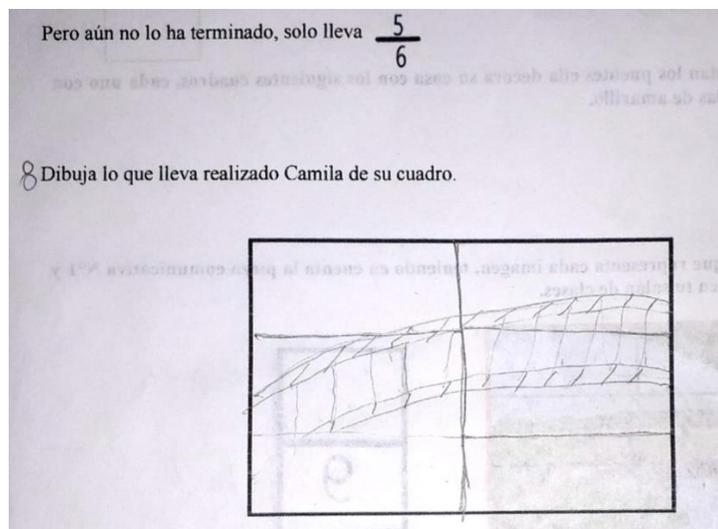


Imagen 58. Respuesta de E3 para la representación simbólica de fracción

Esta evidencia, imagen 58 permite dar cuenta que el estudiante traza líneas que distribuye en el espacios de la figura en partes iguales, representando la unidad que constituye 6 piezas y las partes terminadas del cuadro que son 5.

Al momento de usar las fracciones en otros contextos como en el caso del proyecto STEM, cuando se les pide realizar el prototipo del puente, demuestra alcanzar *el nivel de observación de la propiedad*, pues el estudiante E3 construye el concepto de fracción, realiza conexiones de todas la imágenes mentales adquiridas para dar solución a una situación que requiere la comprensión del concepto de fracción en su representación parte-todo. Según Pirie y Kieren citado por Meel (2003) el estudiante está en la “capacidad de observar una conexión entre las imágenes y explicar cómo verificar la conexión” (p. 237).

-Profesor: vamos a pintar la cuarta parte del puente de amarillo, una cuarta parte de azul, una cuarta parte de rojo y la otra cuarta parte de naranja de una Pasarela que tiene 24 piezas. ¿Cuál será la cuarta parte de color rojo?

-E3: 6 piezas

-Profesor: ¿Cómo lo averiguas, explícalo?

-E3: ... piensa un momento, comienza realizando un dibujo de la situación.



Imagen 59. División de partes para respuesta a entrevista

Luego, con la ayuda del dibujo como se observa en la imagen 59 y el proceso mental pudo relacionar que realizando una división de las partes obtiene 6 piezas de la pasarela para el color rojo.

Por último se puede considerar que probablemente el estudiante E3 pudo seguir avanzando en su comprensión pero la investigación solo comprende los cuatro primeros niveles de Pirie y Kieren. A continuación se presenta el esquema de la evolución del nivel de comprensión para E6:

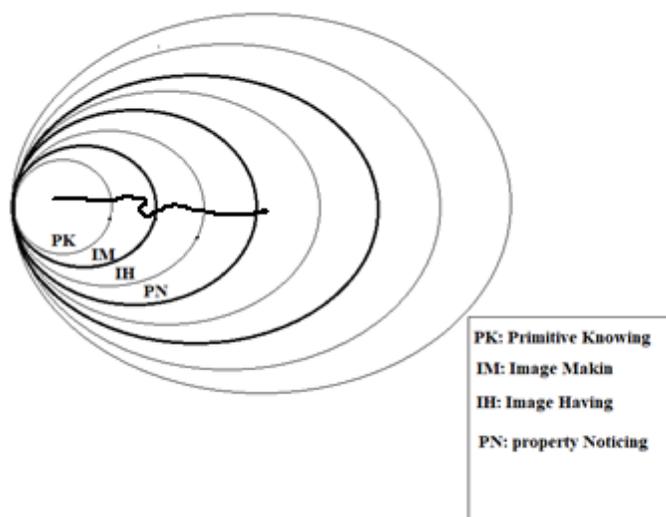


Figura 10. Evolución de comprensión caso 4. Elaboración propia

Al comparar los esquemas presentados de la evolución de la comprensión para cada uno de los casos, podemos concluir lo siguiente:

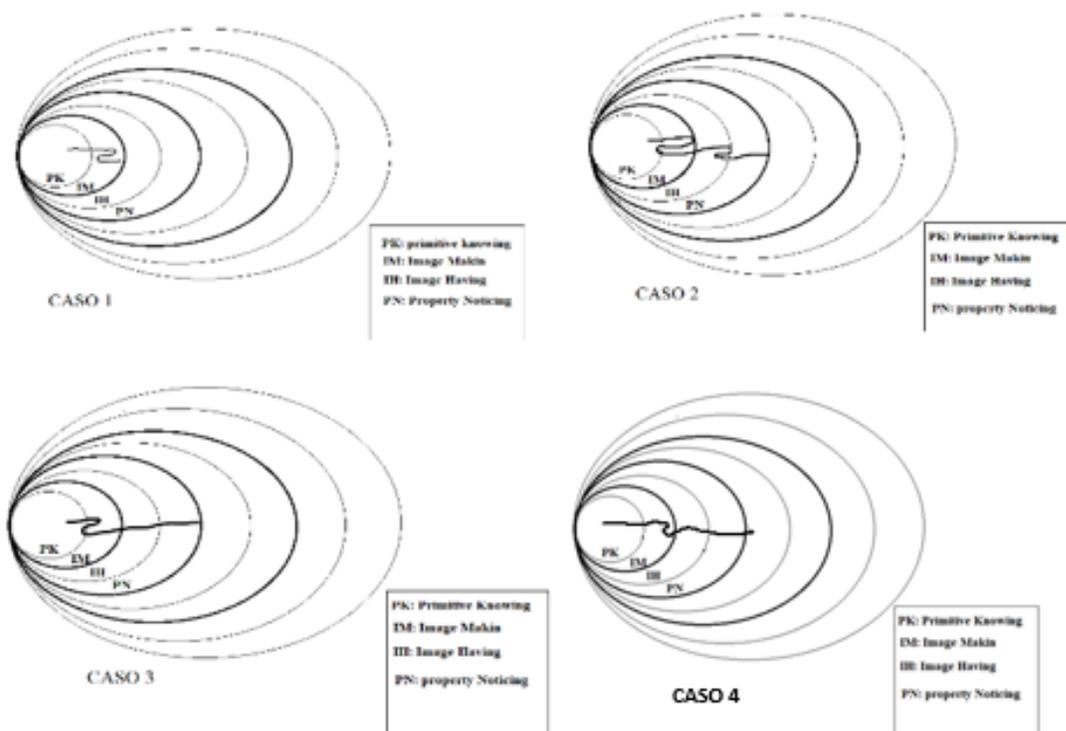


Figura 11. Comparación de representaciones de evolución de comprensión en los casos. Elaboración propia.

Al observar la figura 11, cada uno de los esquemas de evolución de la comprensión relacionados a cada caso, se puede evidenciar que la comprensión en cada individuo tiene un desarrollo distinto, puesto que el recorrido trazado marca diferencias en cuanto a los niveles en los cuales los estudiantes presentaron *folding back*, así mismo se observa que el caso 4, es una muestra del avance en la comprensión del concepto de fracción ya que finaliza en el nivel de observación de la propiedad mientras que el caso 1 logra llegar al nivel de creación de la imagen.

Otro aspecto que se evidencia de manera clara en el caso 2 es la presencia constante de redoblamiento en el proceso de comprensión lo cual permitió observar las acciones y expresiones que un estudiante realiza para construir un concepto matemático.

Del mismo modo una característica del modelo observada en el caso 4 fue la de límite de falta de necesidad ya que el estudiante asociado a este caso luego de realizar un *folding back* en el nivel de comprensión de la imagen no necesitó devolverse a otros niveles anteriores para superar las dificultades en la comprensión.

Por último, se aborda una característica que para el desarrollo de este estudio fue fundamental, y que se hace referencia es la fractalidad, particularmente en este estudio se evidenció cuando los estudiantes expresaron tener nociones o preconceptos relacionados al concepto de fracción, dichas nociones se identificaron como unidad, igualdad y mitad por mencionar algunas, las más comunes en todos los casos. A continuación se muestra un esquema que intenta ilustrar las diferentes nociones y como está participaron en la comprensión de las fracciones en su interpretación como parte- todo.

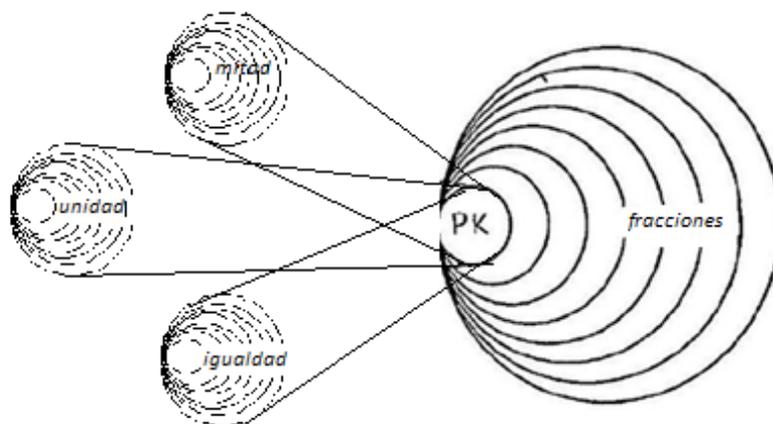


Figura 12. Representación de fractalidad de modelo de comprensión según Pirie y Kieren. Adaptación de Meel (2003)

Al analizar la característica de fractalidad contenida en el modelo de comprensión de Pirie y Kieren se pudo identificar que en el proceso de comprensión presentado por los estudiantes involucrados en los casos 1, 2, 3 y 4 se evidenciaron nociones con respecto a conceptos como fueron unidad, mitad e igualdad por mencionar algunos, estas nociones se configuran como evidencia de la fractalidad del modelo ya que en el nivel de conocimiento primitivo se encuentran contenidos los mismo niveles solo que en función de la evolución de la comprensión de conceptos consolidados previamente al abordaje del concepto de fracción. De esta manera observamos que para la comprensión del concepto de fracción fueron necesarios los preconceptos de unidad, igualdad y mitad, los cuales se activaron con situaciones de aprendizaje y ayudaron a la comprensión ratificando la fractalidad propia del modelo teórico.

Finalmente, el evidenciar la evolución en los niveles de comprensión de los estudiantes, permitió identificar las potencialidades didácticas que ofrecen los proyectos STEM, específicamente para el contexto Escuela Nueva. A continuación presentamos un esquema que sintetiza algunas de esas relaciones y puntos de encuentro entre la estrategia, por ser elementos

que cobraron gran relevancia durante el desarrollo de la investigación y que evidenciaron una conexión.

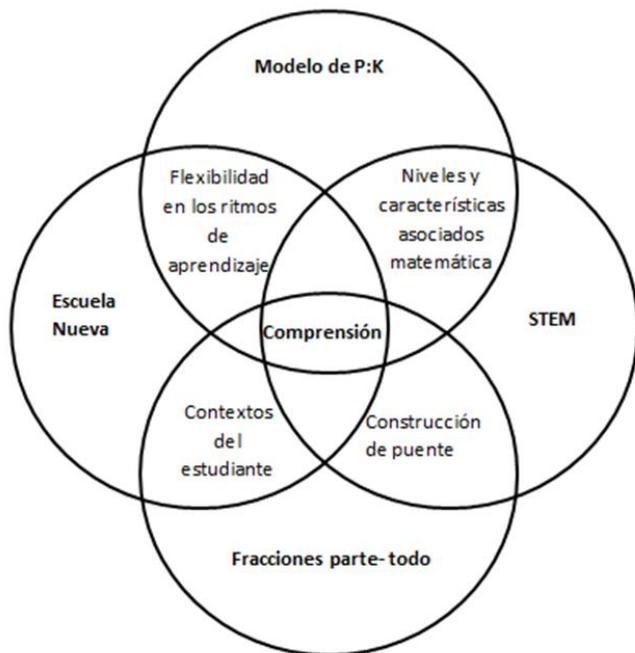


Figura 13. Esquema de relación de categorías

De este modo se observa en la figura 13 como el modelo de Pirie y Kieren guarda relación con la comprensión en el marco de un proyecto STEM, en la medida en que se desarrollan guías de aprendizaje de las matemáticas, una de las áreas STEM.

Posteriormente se evidencia en el esquema la relación existente entre la estrategia de proyectos STEM con el concepto matemático de fracción en su interpretación como parte-todo, dicha relación existente entre estos dos elementos mencionados anteriormente y que giran alrededor de la comprensión, evidencian un punto de encuentro desde el mismo momento en que se inicia la construcción de un prototipo de puente, dando lugar al uso de artefactos u objetos para la medición, comparación y fracción de unidades en partes demostrando la presencia de las

matemáticas en actividades y situaciones de la cotidianidad, volviendo las acciones y expresiones de los estudiantes un aspecto esencial en la comprensión de un concepto matemático.

Finalmente se muestra, la conexión que proporciona el modelo educativo de escuela nueva con las fracciones y con el modelo de Pirie y Kieren, donde se resalta la flexibilidad que aporta el modelo de escuela nueva a la hora de permitir la incorporación de otros modelos y estrategias en función de la comprensión de los estudiante, sobre todo en situaciones en las cuales se valoran los diferentes significados y nociones que han adquirido los estudiantes gracias a el contexto donde se encuentran inmerso y que los hace únicos en sus formas de comprender, pero también en sus limitación, avances, acciones y expresiones que son propias en este caso de la ruralidad.

6. Conclusiones y Recomendaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones de un trabajo de investigación que tuvo como intención analizar la comprensión del concepto de fracción de los estudiantes de grado 3°,4° y 5° del C.E.R. Esperanza en el marco de un proyecto STEM.

Para alcanzar dicho objetivo, el diseño metodológico se inscribió en el paradigma naturalista y bajo un enfoque de investigación cualitativa. El método que se utilizó fue el estudio de caso de tipo intrínseco. Para el trabajo de campo se diseñó un proyecto STEM llamado ¡Vamos a construir un puente! Las técnicas e instrumentos que se utilizaron para recoger la información fueron: la observación participante/diario de campo, la entrevista semiestructurada/protocolo de entrevista y las actividades propuestas en las guías de aprendizaje. El análisis de contenido fue la técnica que posibilitó la categorización y triangulación de la información.

A continuación se presentan los hallazgos con respecto a cada uno de los objetivos específicos que se trazaron:

Con respecto al primer objetivo específico: identificar las dificultades de comprensión que presentan los estudiantes al enfrentarse a situaciones relacionadas el concepto de fracción. Se puede concluir que los estudiantes presentan dificultades para obtener mitades de igual proporcionalidad al dividir unidades representadas gráficamente, en la mayoría de los casos los estudiantes no lograban trazar líneas rectas que pudieran convertirse en ejes de simetrías en la división de una unidad. Así mismo, se evidenciaron otras dificultades relacionadas con la identificación de la presencia de una fracción en una representación gráfica y viceversa, y el reconocimiento de la unidad fraccionaria.

Algunas de estas dificultades se evidenciaron al momento de hacer repartos equitativos, sobre todo cuando se requirió de la utilización o manejo de materiales obtenidos del entorno como lo fue la madera de guadua, dicha dificultad fue superada por algunos estudiantes cuando se aplicó el *folding back* y se adaptaron las actividades con otro tipo de material que permitiera una mejor manipulación y favoreciera la motricidad de los estudiantes de tal manera que realizaran repartos más exactos en cuanto a la proporcionalidad.

En el desarrollo de otras de las actividades propuestas en el proyecto STEM se evidenciaron también dificultades, específicamente, en la interpretación de la fracción como parte – todo, lo que da cuenta del problema que tienen los estudiantes para identificar atributos propios de las fracciones como son, por ejemplo: que las partes que conforman la unidad se puede fraccionar y que las partes fraccionadas se pueden seguir fraccionando infinitas veces. Del mismo modo, se evidenciaron aspectos como el desconocimiento la posición del numerador y denominador en la representación simbólica de la fracción y el bajo nivel de uso de un lenguaje matemático para hacer referencia a las fracciones.

Un aspecto particular en la identificación de las dificultades en la comprensión del concepto de fracción en algunos estudiantes fue el hecho de presentar problemas para fraccionar unidades cuando se les solicitaba que las dividiera en cantidades impares, ejemplo 3, 5, 7, 9 partes, lo que permitió establecer que a mayor número de partes al dividir la unidad mayor era la presencia de la dificultad de los estudiantes para establecer la proporcionalidad de las partes que conformaban la unidad.

Es pertinente mencionar que producto del abordaje de las actividades también se evidenciaron dificultades en la comprensión de lectura, situación que fue posible sobre llevar gracias al acompañamiento del docente de aula, pues la metodología de indagación que se utilizó

para el proyecto STEM, permitió que en el desarrollo de la etapa de indagación guiada, se utilizaran piezas comunicativas que ofrecían información adicional del concepto objeto de investigación.

Con respecto al segundo objetivo específico: “describir el nivel de comprensión sobre el concepto de fracción, que adquieren los estudiantes, en el marco de un proyecto STEM” es pertinente manifestar que el modelo de Pirie y Kieren fue fundamental para desarrollar el proceso de análisis de la comprensión, pues gracias a sus características y estructura permitió realizar un ejercicio de descripción de las interacciones de los estudiantes con el concepto matemático (fracción) y llevar a cabo el análisis en profundidad mediante la discusión de la teoría propiamente dicha, las evidencias de producción de los estudiantes y la información registrada en la observación participante y la entrevista semiestructurada.

Específicamente, fue posible evidenciar cuatro casos, relacionados con los cuatro procesos de comprensión, cada uno de ellos caracterizados por ser diferentes uno de otro y por su dinámica o movimiento de acuerdo a la estructura por niveles propuesta desde el modelo de comprensión de PK. Pero además porque tienen algunas similitudes en cuanto a las dificultades que presentan los estudiantes inicialmente. Sin embargo, cada caso tuvo su propia evolución, esto gracias a que en cada uno de ellos, la forma de superar la dificultad marcó el camino recorrido por cada estudiante de manera única.

Todo lo anterior, permite afirmar que la comprensión en los individuos inmersos en este estudio, no fue similar al del otro, a pesar de estar sometidos a las mismas actividades, es decir, cada individuo crea su propio significado del concepto matemático. En conclusión, en el proceso de construcción de una imagen mental, se integran: las experiencias vividas, las nociones, las habilidades desarrolladas y la situación de aprendizaje planteada, lo que exigen un esfuerzo cognitivo de parte de cada sujeto.

En el desarrollo de este objetivo, particularmente para el caso 1, se presenta un tipo de comprensión que se caracteriza por iniciar en un nivel de conocimiento primitivo como lo concibe el modelo y que en la medida en que se avanzó en las actividades del proyecto STEM el estudiante asociado a este caso necesito de *folding back*, sin embargo, este no fue suficiente para que el estudiante avanzara significativamente a los niveles siguientes, finalizando el proceso en un nivel de *creación de la imagen*, ya que según Meel (2003), Pirie y Kieren afirma que si los estudiantes realizan solo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasaran al siguiente nivel. De este modo, el proceso presentado por E1 (caso 1), corresponde con la descripción anterior ya que el estudiante fue capaz de crear una imagen mental pero no pudo establecer una complementariedad de las acciones realizadas con las expresiones, es decir el estudiante no da cuenta de las matemáticas involucradas en las acciones desarrolladas, por consiguiente tampoco presenta la característica de límites de falta de necesidad.

Por otro lado, cabe resaltar, que en los otros tres casos presentados también se necesitó de la característica de *folding back* y que ésta ayudó a realizar reacomodaciones de las imágenes mentales creadas por los estudiantes involucrados en estos casos, así mismo, se evidenció en el proceso de descripción de la comprensión que los individuos hicieron uso de otras características del modelo de Pirie y Kieren como lo fueron la complementariedad de la expresión y la acción.

Todo lo anterior permite manifestar la posibilidad de que a mayor nivel de utilización de *folding back*, *complementariedad de la acción y la expresión* mayor es la evolución de la comprensión de un concepto en este caso, la fracción. Al parecer, cuando los estudiantes requirieron de reacomodación de las imágenes y de expresar acciones a través del lenguaje matemático (verbal o escrito) se amplió la comprensión de las imágenes mentales asociadas e involucradas en la construcción del concepto de fracción en su interpretación como parte – todo.

Se puede concluir al respecto, que el proceso de *folding back* es una acción fundamental en la comprensión de un concepto matemático cuando se quiere evolucionar en el conocimiento de las características de un concepto, de tal forma que, los atributos y propiedades inherentes a un concepto puedan ser comprendidos de manera progresiva, a pesar de encontrar obstáculos en el proceso comprensión, permitiendo cada vez una reacomodación de las representaciones mentales del individuo.

Por otro lado es importante mencionar que cuanto más se presenta la característica de *folding back*, el individuo siente la necesidad de reexaminar el concepto y las nociones anteriores o primitivas que en un inicio ayudaron a la construcción de ese concepto, las cuales fueron necesarias para alcanzar el nivel en que se encuentra.

Se considera, que el modelo teórico de Pirie y Kieren fue pertinente en la medida en que permitió a través de su estructura por niveles identificar el recorrido que tuvo la evolución de la comprensión de cada estudiante. Del mismo modo, aportó por medio de sus características principales, insumos para el análisis de las actividades que integraron el proyecto STEM, el cual en cada situación de aprendizaje guardó relación con los cuatro primeros niveles de comprensión.

En el proceso de análisis de la comprensión de los estudiantes se establecieron categorías de análisis las cuales, mediante una interpretación de la información permitieron la consolidación de un constructo alrededor de la pregunta de ¿Cómo comprenden el concepto de fracción los estudiantes de básica primaria de grado 3, 4 y 5 de escuela nueva en el marco de un proyecto STEM? frente a este interrogante la investigación permite exponer que cada estudiante manifiesta una comprensión particular, tanto en su evolución como en sus obstáculos para la comprensión, pero que también, pueden presentarse algunas similitudes en cuanto a las nociones de unidad, partes de una fracción e igualdad entre las partes. Sin embargo, dichas nociones son producto de

las experiencias y significados construidos por los individuos de manera propia en su proceso de interacción con el medio en el que se encuentra.

Para dar respuesta al tercer y último objetivo específico del presente estudio, conviene señalar que después de desarrollar la investigación se pudo establecer que las posibilidades didácticas de los Proyectos STEM en la comprensión de los conceptos matemáticos, son amplias, específicamente en el contexto de escuela nueva, en particular por la posibilidad de integrar todas las áreas del conocimiento, así mismo, por la flexibilidad del modelo de escuela nueva que posibilita el trabajo por proyectos.

En cuanto al aporte a los procesos de enseñanza y aprendizaje, los proyectos STEM representan una oportunidad de abordar conceptos matemáticos sin dejar de lado las otras disciplinas del conocimiento, optimizando la utilización del tiempo y recursos en el contexto educativo. Sumado a lo anterior la posibilidad didáctica que ofrece STEM para la comprensión de los conceptos matemáticos como en este caso las fracciones, se enriquece en la medida en que los proyectos potencian el uso de materiales de todo tipo en el desarrollo de sesiones o situaciones de aprendizaje, más aun, cuando se abordan interpretaciones de las fracciones que están relacionadas con la representación gráfica, parte - todo.

El trabajar con proyectos STEM permite la utilización de una situación problema del contexto real del estudiante o la escuela como medio para abordar conceptos matemáticos y comprender sus características más sobresalientes.

Se les puede plantear a los estudiantes de las zonas rurales e incluso urbanas, situaciones de aprendizajes innovadoras y reales que requieren del desarrollo de competencias y habilidades matemáticas, científicas, ingenieriles y tecnológicas para dar solución a problemáticas del entorno

cercano del estudiante, lo que representa un desafío para el estudiantes y aumenta su nivel de involucramiento en el auto aprendizaje.

Así mismo el proyecto STEM fortalece el aprendizaje cooperativo en el modelo de escuela nueva en la medida en que plantea situaciones teniendo en cuenta que, los estudiantes a través de sus experiencias particulares y las habilidades desarrolladas pueden involucrarse en el proceso de aprendizaje y aportar soluciones de manera creativa, permitiendo a cada miembro del proyecto asumir roles.

Podemos concluir que por medio de la aplicación del proyecto STEM se desarrolló una manera didáctica de involucrar uno de los niveles de comprensión del modelo de Pirie y Kieren (conocimiento primitivo) permitiendo de manera espontánea aflorar las nociones que los estudiantes tenían del concepto de fracción, de esta manera se diseñaron el resto de situaciones de aprendizajes de acuerdo a los niveles de comprensión. De igual forma, se enriquecieron las actividades que posibilitaron la recolección, registro y el análisis de información relacionada con la comprensión de la fracción, específicamente en actividades propuestas en el proceso de *folding back*, lo que permitió el uso de material concreto manipulable proveniente de los centros de recursos de aprendizaje y del medio rural en que se encuentra los sujetos involucrados en el estudio.

Este estudio se considera como un aporte a la literatura de la comprensión de las fracciones, en un contexto de la escuela rural, así como también brinda elementos para la discusión en relación con las dificultades que pueden presentar los estudiantes de básica primaria de grado 3°, 4° y 5° en la construcción y evolución de la comprensión de un concepto matemático, en la medida en que el análisis de las evidencias se desarrolló bajo el marco teórico del modelo de comprensión de Pirie y Kieren y que al mismo tiempo se apoyó en el método de estudio de caso de tipo

instrumental por medio del cual se observaron e interpretaron las experiencias y significados construidos por los participantes del estudio.

Otro aporte producto de los resultados es la necesidad de utilización de proyectos para disminuir la dificultad de enseñanza de las matemáticas por parte del docente de escuela nueva (monodocente), más aun, cuando no se tiene formación en el área.

Por otro lado, el estudio proporciona elementos para entender que para algunos estudiantes en el contexto de escuela nueva, el proceso de comprender un concepto matemático está íntimamente ligado a vincular nociones y experiencias previas para luego ir las relacionando con imágenes mentales que a su vez están ligadas con acciones y expresiones ya sean simbólicas o gráficas que se interconectan para construir un nuevo concepto, pero que en el proceso de construcción conceptual puede haber reacomodaciones de imágenes y superación de obstáculos en la comprensión haciendo un redoblamiento y volviendo a revisar nociones inmediatamente anteriores.

De igual forma, otro de los aportes, es para los docentes que desarrollan sus clases con el modelo de escuela nueva y que tienen como propósito la comprensión de un concepto matemático en estudiantes de educación básica primaria en grados como 3°, 4° Y 5°, donde el docente imparte todas las áreas, es la posibilidad que ofrece para la integración disciplinar por proyectos. Así mismo, gracias a los resultados de esta investigación se pueden dar a conocer las diferentes dificultades que presentan los estudiantes cuando inician un proceso de comprensión de las fracciones en su interpretación como parte - todo. Dichas dificultades pueden ayudar a los docentes en su labor de enseñanza a refinar maneras de abordar el concepto de fracción ayudando a los estudiantes a superar las dificultades.

Durante el desarrollo del presente estudio se presentaron algunas limitantes como es el caso del tiempo, ya que en el proceso empleado para el diseño de actividades y la recolección de datos, el tiempo fue un factor determinante en la obtención de información. Se considera que los proyectos STEM necesitan mayor tiempo para su implementación.

Otra limitante que se considera en este estudio fue el nivel de comprensión lectora presentado por los estudiantes, el cual fue enriquecido gracias a la indagación guiada y las estrategias de piezas comunicativas utilizadas para aportar información al estudiante sobre el concepto de fracción, todo lo anterior también repercutió en la distribución del tiempo para el desarrollo de la investigación.

De la misma manera, el estudio fue las dificultades presentadas por los estudiantes en cuanto a la competencia comunicativa, se evidenciaron problemas para expresar de manera clara las ideas y sentimientos de los estudiantes, lo que en ocasiones limitó sus respuestas en entrevista y actividades.

Teniendo en cuenta que la existencia de estudios sobre la comprensión de las fracciones en el contexto de escuela nueva en estudiantes de básica primaria en el marco de un proyecto STEM son pocos, otras investigaciones a futuro podrían enfocarse en abordar aspectos relacionados con la comprensión de las fracciones en interpretaciones como razón o medida en el marco de un proyecto STEM para lograr generalizar la utilización de proyectos en la comprensión de otras interpretaciones más complejas sobre las fracciones.

De igual forma, las investigaciones con estudiantes de grados iniciales 1° y 2° aproximando al estudiante a las nociones de igualdad, unidad y proporcionalidad por medio de un proyecto STEM bajo el modelo de Pirie y Kieren en el contexto de escuela nueva.

Otra propuesta sería el desarrollo de estudios para el diseño de proyectos STEM como estrategia para la comprensión de conceptos inmerso en las disciplinas STEM. Se considera pertinente conocer ¿cómo los proyectos STEM promueven la creación de espacios para la investigación y creatividad en estudiantes de escuela nueva?

7. Referencias

- Acevedo D, López M, Guerrero Y, Morales L. (2013). La fracción parte - todo a través de una mirada gráfica, *Revista científica*, (S.I.) 273-277. Recuperado de <https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/7051/8723>
- Arroyave, B. Ciro, Y. y Ocampo, G. (2016). *Aproximación para la comprensión de las fracciones en los grados transición, primero y segundo*. Tesis de maestría, universidad de Medellín, Medellín, Colombia.
- Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes Pedagógicos*. 15(1), 33-45. Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco. México.
- Castro, E. (2015). Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada, España. Recuperado de: <http://digibug.ugr.es/handle/10481/40316>
- Escuela Nueva- Escuela Activa. Manual para docente. (2009). (ed.2015). Bogotá, Colombia: Fundación Escuela Nueva, volvamos a la gente.
- Fandiño M. (2009). *Las fracciones, aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá, Colombia: Editorial magisterio.
- Fazio L, Siegler R. (2011). *Enseñanza de las fracciones*. Recuperado de <http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/MINEDU/5156>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001

Instituto Colombiano de Fomento a la Educación Superior (2017). Reporte de resultados Pruebas Saber 3°, 5° y 9°.

Llinares, S. y Sanchez, M.V. (2000). Fracciones. Madrid. Sintesis.

Laverde J. (2016). Diseño de un módulo didáctico con el enfoque STEM para la enseñanza/aprendizaje de los gases en la educación media. Tesis de maestría. Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia. Recuperado de: <https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/13681/u728957.pdf?sequence=1>

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Revista Educación Matemática*. 4 (2), Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/9540/1/Significados1992Mancera.pdf>

Manzano J, Gómez M, Mozo J. (2017). Mecanismos articulados: Geometría Dinámica y Cinemática en un entorno educativo STEM. *Innoeduca. International Journal of Technology and Educational Innovation*. 3 (1), pp. 15-27. Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.24310/innoeduca.2017.v3i1.1973>

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y kiere sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamérica de investigación en matemática educativa*. 6 (3), 221-271. Recuperado de https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Modelos+y+teor%C3%ADa+de+la+comprensi%C3%B3n+matem%C3%A1tica+3A+comparaci%C3%B3n+de+los+modelos+de+Pirie+y+kiere+sobre+la+evoluci%C3%B3n++de+la+comprensi%C3%B3n+matem%C3%A1tica+y+la+teor%C3%ADa+APOE&btnG=

Ministerio de Educación Nacional, Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. (2006). Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional, Lineamientos Curriculares de Matemática. (1998). Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Murillo, A. (2014). *Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación en la solución de situaciones cotidianas con fracciones* Tesis de maestría, Universidad de Antioquia, Medellín. Recuperado de: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/7538>

Muñiz, M. (2010). Estudios de caso en la investigación cualitativa. Facultad de Psicología, División de Estudios de Posgrado. Universidad Autónoma de Nuevo León. Recuperado de: https://psico.edu.uy/sites/default/files/cursos/1_estudios-de-caso-en-la-investigacion-cualitativa.pdf

Ocaña, G. Romero, I. Gil, F. y Codina, A. (2015). Implantación de la nueva asignatura “Robótica” en Enseñanza Secundaria y Bachillerato. *Investigación en la escuela*. N° 87, 65-79. Recuperado de: <https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/59693>

Pirie S. Kieren T. (1992). Educational Studies in Mathematics, Vol. 23, No. 5, Constructivist Teaching: Methods and Results. pp. 505-528. recuperado de <http://links.jstor.org/sici?sici=00131954%28199210%2923%3A5%3C505%3ACCEACC%3E2.0.CO%3B2-2>

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

Prada, D. (2007). Comunicación personal. Universidad Pontificia Bolivariana. IBERCIENCIA: comunidad de educadores para la cultura científica. 10 de marzo de 2016. Bucaramanga, Colombia.

Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la educación investigativa. *Investigación Educativa*, revista del Instituto de Investigación educativa. Universidad Nacional Mayor de

San Marcos. Lima, Perú. 7 (12), 23-40. Recuperado de:
<http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/8177/7130>

Hernández Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M.P. (2014). *Metodología de la investigación*. (6 a. ed.). México, D.F: McGraw-Hill /Interamericana editores, S.A.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. (2 a. ed.). Madrid, España: - Ciudad de México: Mc Graw Hill.

Toma, R. y Greca, I. (2016). *Modelo interdisciplinar de educación STEM para la etapa de Educación Primaria*. Conferencia presentada en el tercer Simposio Internacional de Enseñanza de las Ciencias SIEC. Recuperado de:
https://www.researchgate.net/.../303919928_Modelo_interdisciplinar_de_educacion

Valdemoros, M. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones, *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(2), 423-440. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4065106>

Villafrades, R. (2016). Las matemáticas y su importancia en nuestra vida. *Iberciencia: Comunidad de Educadores para la Cultura Científica*. Universidad Pontificia Bolivariana. Bucaramanga, Colombia. (p.p 1-3). Recuperado de
<http://www.oei.es/historico/divulgacioncientifica/?Las-matematicas-y-su-importancia-en-nuestra-vida>

8. Anexos

Anexo 1. Consentimiento informado participantes de la investigación

El propósito de esta ficha de consentimiento es proveer a los participantes en esta investigación con una clara explicación de la naturaleza de la misma, así como de su rol en ella como participantes:

La presente investigación será realizada por Maryuris Yepes Reyes y Oscar Bula Yáñez, como requisito para optar el título de magister de los estudiantes de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Su propósito es analizar la comprensión del concepto de fracción de los estudiantes del Centro Educativo Rural Esperanza en el marco de un proyecto STEM. Si usted como padre de familia de los estudiantes de esta institución accede para que su hijo participe en el desarrollo de un proyecto STEM que se realizará durante las sesiones de clase, y además nos autoriza para que se recojan algunos productos derivados del trabajo de los estudiantes en el proyecto.

La participación de los estudiantes, implica la participación en una entrevista, y en la solución de un cuestionario. Lo que conversemos durante las sesiones de clase y en la entrevista se grabará, de modo que los investigadores puedan transcribir después las ideas que hayan expresado. Igualmente, se harán registros de audio, video y fotografías.

La participación en este estudio es estrictamente voluntaria. La información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito. Sus respuestas al cuestionario y a la entrevista serán codificadas usando un número de identificación y por lo tanto, serán anónimas. Una vez transcritas las entrevistas, los audios con las grabaciones se destruirán.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento durante la participación de su hijo en él. Igualmente, puede retirarse del proyecto en cualquier momento sin que eso lo perjudique en ninguna forma. Si alguna de las actividades le parece incómoda, tiene usted el derecho de hacérselo saber al investigador o solicitar que su hijo no participe de ellas.

Desde ya le agradecemos su participación.

Acepto participar voluntariamente en esta investigación, conducida por Maryuris Yepes Reyes y Oscar Bula Yáñez. He sido informado (a) de que el propósito de este estudio es analizar la comprensión del concepto de fracción en el marco de un proyecto STEM.

Me han indicado también que mi hijo tendrá que responder cuestionarios y preguntas en una entrevista, lo cual tomará aproximadamente 30 minutos cada uno.

Reconozco que la información que mi hijo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento. He sido informado de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento y que los estudiantes pueden retirarse del mismo cuando así lo decidan, sin que esto acarree perjuicio alguno para ellos. De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo contactar a Maryuris Yepes Reyes y Oscar Bula Yáñez, al teléfono 3123703789.

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido.

Nombre del estudiante	Firma del estudiante	Nombre del padre de familia	Firma del padre de familia

Fecha: _____

Anexo 2. Guía de aprendizaje N° 1.

AREA: INGENIERÍA

Fase 1.	Invitación a la indagación
Sesiones	1
Tiempo	2 horas
Propósito	Reconocer en el contexto la problemática de movilidad

Actividad 1. Planteamiento del problema de movilidad.

El maestro introduce el problema, los estudiantes presentan sus predicciones, se socializan con el grupo, con el fin de identificar sus ideas o alternativas a la posible solución. Cada estudiante deberá anotar sus predicciones en su bitácora de trabajo (cuaderno)

Situación problema

Luis es estudiante del CER Esperanza, sabe que para asistir a la escuela todos los días a clases debe cruzar una quebrada cuyo caudal aumenta cuando hay lluvias, lo cual dificulta la asistencia y el normal desarrollo de las clases. ¿Qué solución plantearías para resolver el problema de movilidad de Luis y sus compañeros?

Actividad 2. De paseo por la quebrada

Teniendo en cuenta la situación problema se les plantea a los estudiantes las siguientes preguntas para que las respondan después de realizar el recorrido por la quebrada.

1. ¿Cuál sería la mejor forma para cruzar de un lado a otro de la quebrada y lograr llegar a la escuela? _____
2. Dibuja tu solución

3. ¿Por qué esta solución y no otra?

4. ¿Cómo podemos medir el ancho de la quebrada?

5. ¿Qué artefactos o instrumentos se pueden utilizar para medir el ancho de la quebrada?_____

Anexo 3. Guía de aprendizaje N° 2.

ÁREA: CIENCIAS NATURALES

Fase 2.	Indagación guiada
Sesión	2
Tiempo	4 horas
Propósito	Identificar los materiales adecuados para la construcción del puente

ACTIVIDAD 3. Eligiendo el mejor material para construir el puente.

1. Marca con una x los materiales que se pueden encontrar en tu entorno, que consideres que te pueden servir para construir un puente:

GUADUA



Imagen 1:

<http://armeideasenguadua.com/generalidades-de-la-guadua-angustifolia-kunth/>

HIERRO



Imagen 2:

<https://industriaspacifico.com/inicio/55-varilla-hierro-corrugada.html>



1. Si tú quieres construir un puente ¿cuál de estos materiales te sirve?
-

Dirígete a la biblioteca y consulta sobre los materiales y sus características.

2. ¿Cuáles son las características de estos materiales?
-

3. ¿Qué materiales de las imágenes anteriores se encuentran más cerca de tu escuela?
-

Salimos del salón y damos un paseo por sus alrededores y recolectamos diferente clase de materiales que puedan servir para la construcción del puente.

Completa el cuadro con los materiales que recolectaste y marca con una x las características que posee cada uno.

Material	Dureza	Resistencia	Flexibilidad	Durabilidad

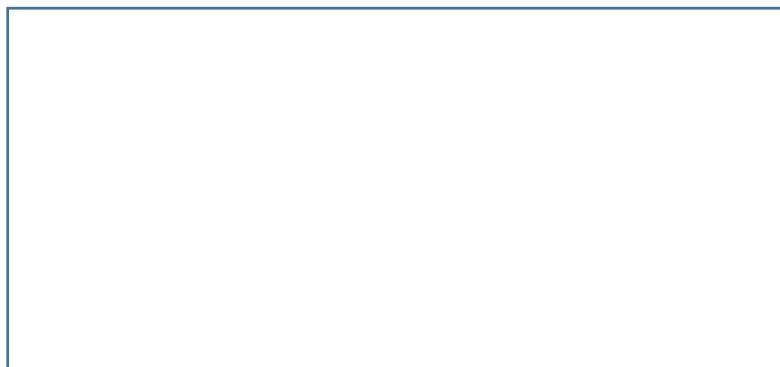
4. Comenta ante el grupo tu respuesta.

Anexo 4. Guía de Aprendizaje N° 3.**ÁREA: TECNOLOGÍA**

Fase 2.	Indagación guiada
Sesión	1
Tiempo	2 horas
Propósito	Identificar los tipos de estructura y la más idónea para el modelo de puente

Actividad 4. Eligiendo el diseño del puente

1. Qué forma debe tener el puente, dibuja

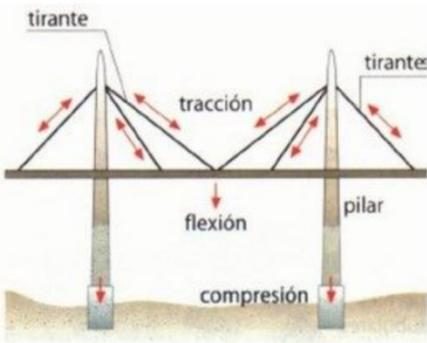
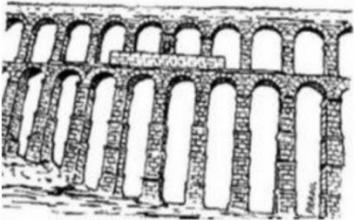


2. ¿Podrá tener el puente el mismo ancho de la quebrada? ¿Por qué?

3. ¿Todas las partes o piezas deben ser iguales? ¿Escribe por qué?

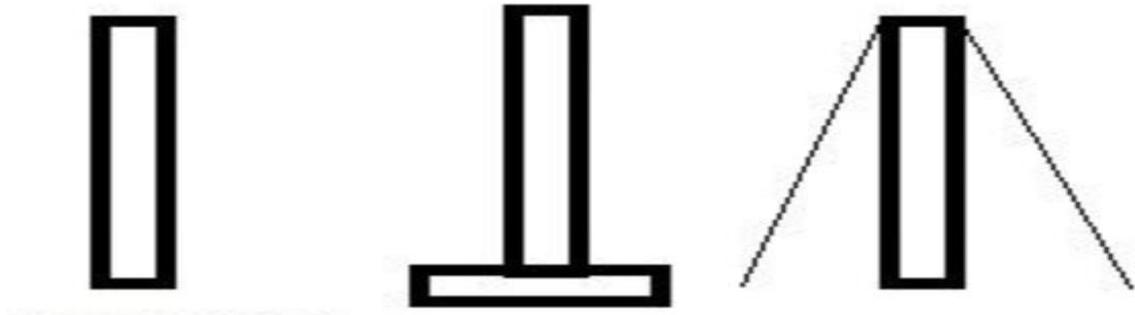
4. ¿Qué medidas deben de tener cada pieza o parte del puente?

5. A continuación te damos a conocer las diferentes estructuras, lee con atención para contestar las preguntas 6,7 y 8.

Tipo de estructura	
<p><u>Estructuras Trianguladas</u></p> <p>Están formadas por barras unidas entre sí en forma de triángulo. Por ejemplo las grúas de la construcción.</p> 	<p><u>Estructuras Masivas</u></p> <p>Son estructuras que se construyen acumulando material, sin dejar apenas hueco entre él. Un ejemplo son las pirámides.</p> 
<p><u>Estructuras Colgantes</u></p> <p>Se emplean cables de los que cuelgan parte de la estructura. Los cables se llaman tirantes y suelen tender a estirarse. Los tirantes llevan en sus extremos unos tensores para tensar el cable o destensarlo a la hora de colocarlo.</p>  <p>Fuente. www.areatecnologia.com</p>	<p><u>Estructuras Abovedadas</u></p> <p>Son estructuras que tienen arcos y bóvedas. Los arcos permiten aumentar los huecos en la estructura y las bóvedas son arcos uno a continuación del otro. Se usó mucho en iglesias, catedrales y puentes.</p> 

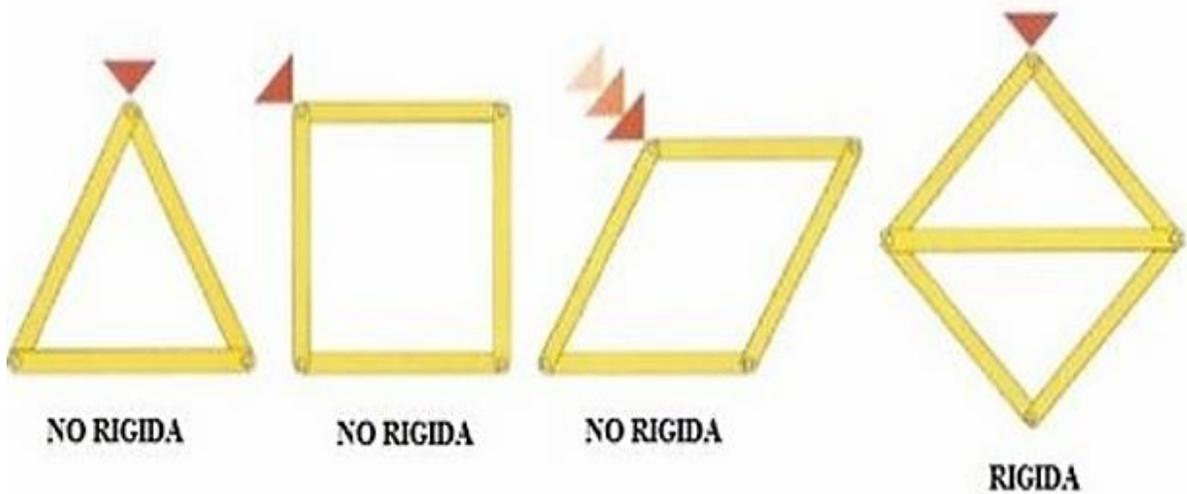
Realiza una marcha por tu salón y observa las distintas piezas comunicativas para obtener información para ayudarte a conocer más sobre las estructuras y tipos de puentes.

6. Las bases de una estructura en este caso de un puente debe ser dura y segura para que sea estable, la cual se puede conseguir colocando tirantes o haciendo la base más ancha. **Encierra con un círculo la base del puente que consideres es la más adecuada para darle estabilidad:**



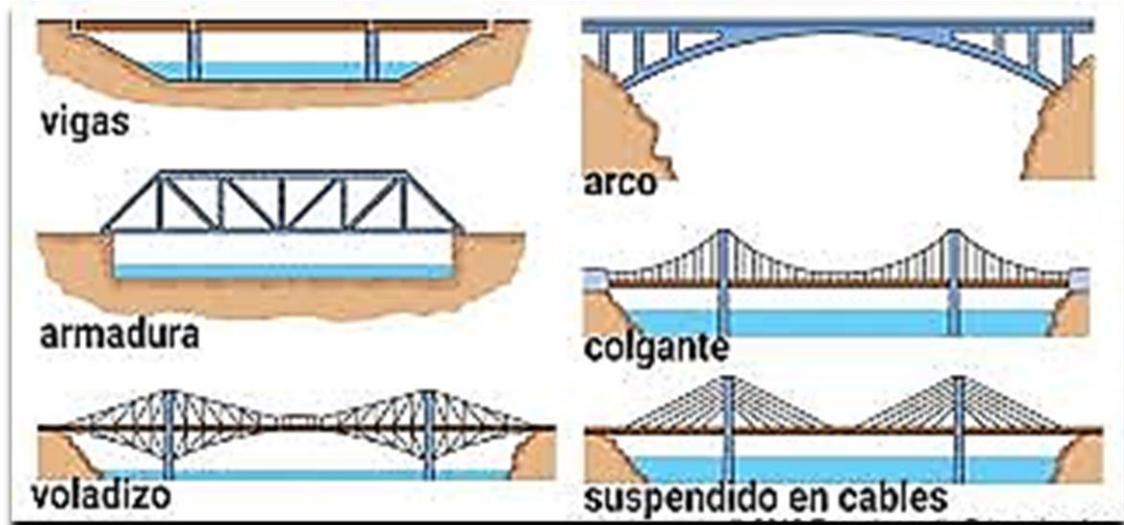
Fuente. www.areatecnologia.com

7. Para que la estructura del puente sea rígida es decir no pierda su forma, se puede conseguir construyéndola con triángulos. **Encierra la figura de la forma que consideres es la más apropiada para construir tu puente:**



Fuente. www.areatecnologia.com

8. Encierra la estructura la estructura que te sirve para la construcción del modelo de puente.



Fuente. www.areatecnologia.com

¿Por qué te sirve?
explica _____

ANEXO 5. GUÍA DE APRENDIZAJE N° 4

ÁREA: MATEMÁTICAS

CUESTIONARIO DE DIAGNOSTICO

Fase 2.	Indagación guiada
Sesión	4
Tiempo	8 horas
Propósito	Comprender el concepto de fracción (parte-todo) para utilizarlo en la construcción del puente

Actividad 5. Cruzando el puente**Cuestionario diagnóstico**

Propósito de la actividad: Indagar las nociones de partición que tienen los estudiantes.

¿Qué haremos? Para llegar a la escuela debes cruzar el único puente que existe, pero está custodiado por un guardián, el cual solo deja pasar a la persona que cumpla 5 órdenes del guardián.

¿Qué usamos? Lápiz, bitácora

¿Cómo lo realizamos? Dirígete al primer escalón del puente, el guardián te entregara una tarjeta con la primera tarea que debes cumplir, y así hasta cruzar el puente.

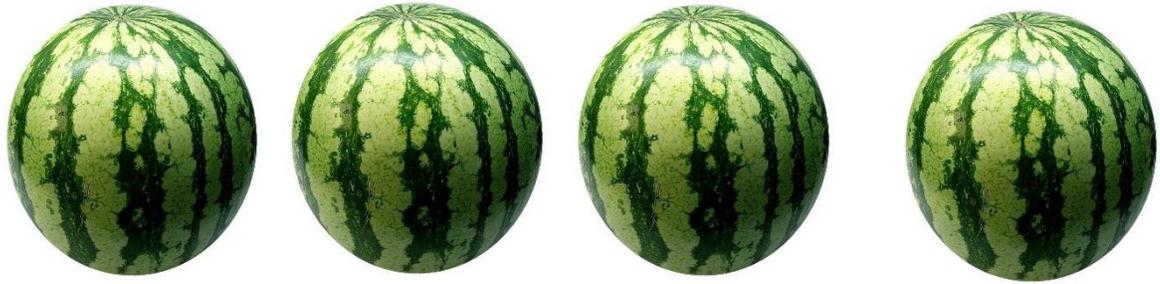
Al guardián le gusta comer sandias, debes conseguir 4 sandias, pero ten presente que a él solo gusta comer la cuarta parte de cada sandia. Tarjeta #1

Observa el puente y cuenta cuantas piezas grandes y cuantas piezas pequeñas tiene el puente y cuéntale tu respuesta al guardián. Tarjeta#2

En este tercer escalón el guardián quiere que le digas cuantas piezas grandes y piezas pequeñas tiene la mitad del puente.
Tarjeta #3

Ahora el guardián quiere que tomes una pieza pequeña y descubras cuantas piezas pequeñas necesitas para formar una pieza grande.
Tarjeta #4

Para cruzar finalmente el puente lo que falta es convencer al guardián, para eso debes tomar una pieza grande y cortarla en 4 partes iguales y luego de cortadas organízalas lo más unidas que se puedan y hora responde: ¿sigue siendo la misma pieza? ¿Porque? tarjeta #5



Actividad 6. Cortemos partes para el puente

Cuestionario diagnostico

Nivel de Comprensión P.K: conocimiento primitivo.

Propósito: observar las nociones de reparto que poseen los estudiantes

¿Qué haremos? Realizaremos diferentes acciones que nos permitirán cortar y partir elementos.

¿Qué usamos? Papel, lápiz y tijeras

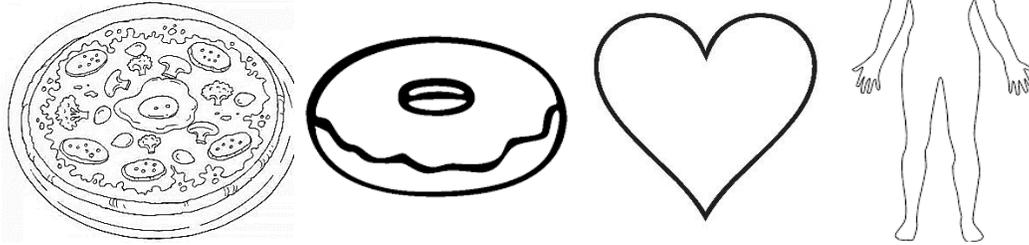
¿Cómo lo realizamos?

1. Toma una hoja de block y córtala por la mitad, vuelve córtala lo que obtuviste nuevamente por la mitad. Luego responde:
 - ¿Qué acción acabas de hacer? _____
 - ¿En qué otras tareas de tu vida realizas esta acción?

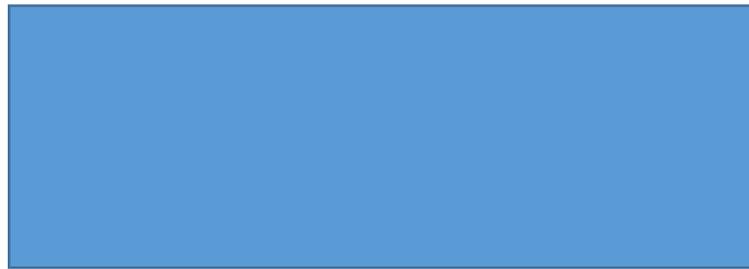
 - ¿Qué objetos o cosas puedes partir por la mitad? _____
 - ¿Cuántas partes quedó la hoja?

 - ¿En números como representarías esas partes? _____
 - Colorea 3 partes de esa hoja.
 - Representa la parte coloreada de la hoja en números

2. Traza una línea que corte por mitad igual a cada una de las siguientes imágenes



3. Observa la imagen y traza 3 líneas rectas con la que demuestres como se puede partir la figura en parte iguales



- ¿Cuántas partes obtuviste? _____

4. Con tiras de papel de diferentes tamaños



Se solicita a los estudiantes que comparen las piezas:

¿Cuántas veces caben las amarillas en las azules? _____

¿Cuántas veces caben las rojas en las azules? _____

ANEXO 6

Actividad 7. Conozcamos las fracciones

Nivel de P.K: Creación de la imagen.

Propósito: proporcionar a los estudiantes información del concepto de fracción en relación a su representación.

¿Qué haremos? Tomaremos varas de guaduas de medidas establecidas por el docente y se partirán en diferentes tamaños y compararemos.

¿Que usamos? Lápiz, guada y seguetas y pieza comunicativa.

¿Cómo lo realizamos?

- Tomar una vara de 30 cm y partirla por mitades iguales.

Responde: ¿cuantas mitades obtuviste? _____

- Nuevamente corta las partes que obtuviste por la mitad.

Responde. ¿Cuantas mitades obtuviste?

Arma todas las partes que obtuviste hasta formar la vara inicial



Imagen de muestra para el docente

- Toma otra vara de 30 cm y colócala al lado de la que acabas de armar, y compara

Cuantas varas pequeñas obtienes de la vara grande

- Toma un parte de las que obtuviste, escribe lo que acabas de hacer _____

- ¿Cuantas partes quedaron? _____

- Escribe lo que acabas de hacer _____



- Completa la siguiente informacion

De 4 partes de vara que tenia tome

De 4 partes que tenia cuantas me quedaron

¡Recuerda!



Que mientras realizas este ejercicio, puedes aprender y contrastar tus ideas con la pieza comunicativa que estará presente en tu salón.

PIEZA COMUNICATIVA #1

FRACCIÓN



Para expresar unidades incompletas o parte de objetos o cantidades utilizamos **las fracciones**.

observa el puente... Está dividido en 3 tramos.
¿Sabes cuantos tramos ha pasado el niño?
¿En que parte del puente está el niño?

En la fracción se distingue 2 partes:
El denominador: que representa el numero de partes en que se divide la unidad.
El numerador: que representa el numero de partes que se toma de la unidad.



El niño ha recorrido dos tercios del puente $\frac{2}{3}$ Numerador
Denominador

Adaptado de <https://co.pinterest.com/>

Actividad 8. Los puentes de Camila

Nivel de Pirie y Kieren: comprensión de la imagen.

Propósito: Reconocer la unidad y la parte en la fracción.

¿Qué haremos? Ayudaremos a Camila a terminar algunas imágenes que faltan por pintar e identificaremos las partes de una fracción.

¿Qué usaremos? Lápiz, borrador y pegamento.

¿Cómo haremos? Observaremos la pieza comunicativa y completaremos las preguntas para ayudar a Camila.



¡Armemos el siguiente rompecabezas para dar inicio a esta aventura!



Tomado de <https://www.topsimages.com>



Listo. Si ya armaste el rompecabezas, responde:

- ¿Cuántas partes en total posee el rompecabezas? _____.
- ¿Todas las partes son iguales? _____ ¿Porque?

- ¿Cuántas partes están pintadas de rosado? _____.

Camila es una niña que le gustan mucho los puentes, tanto así que en su habitación tiene colgado el siguiente cuadro:



Adaptado de <https://www.mobiliariosurbanos.com>

Teniendo en cuenta la imagen anterior responde

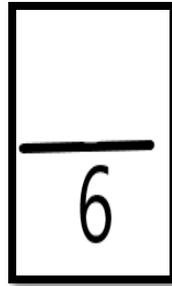
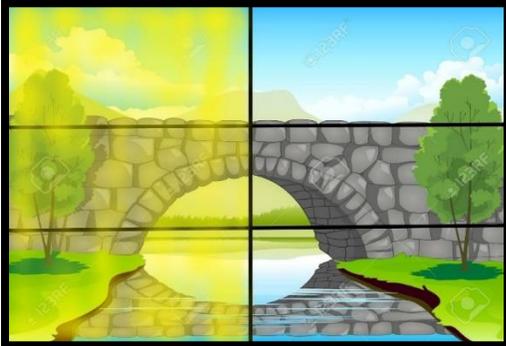
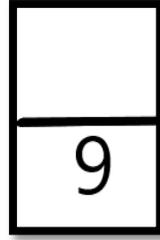
- ¿Cuántas partes forman la imagen del cuadro? _____
- Del total del cuadro que son _____ partes, ¿cuántas están coloreadas? _____ ¿Cuántas no están coloreadas? _____
- Observa la pieza comunicativa, piensa y representa en fracción las partes del cuadro de Camila _____

Como a Camila le gustan los puentes ella decora su casa con los siguientes cuadros, cada uno con partes distintas pintadas de amarillo.

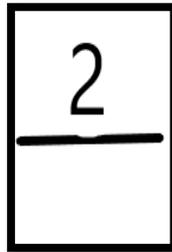
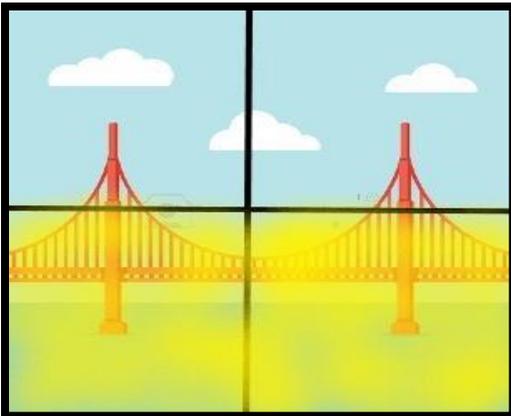
AYUDA A CAMILA



Completa la fracción que representa cada imagen, teniendo en cuenta la pieza comunicativa N°1 y N°2, que se encuentra en tu salón de clases.



Tomado de <https://www.topsimages.com>



Tomado de <https://www.topsimages.com>



Camila está pintando un cuadro de un puente para su mamá

Pero aún no lo ha terminado, solo lleva $\frac{5}{6}$

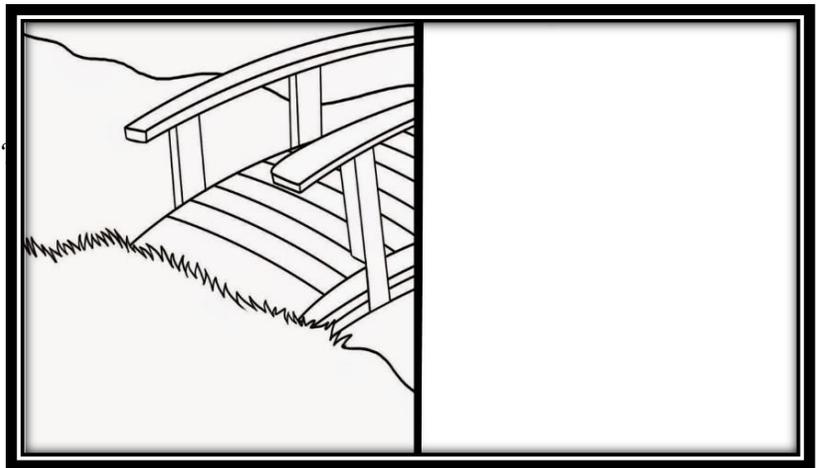
Dibuja lo que lleva realizado Camila de su cuadro.



Camila de camino a la escuela
se encontró este cuadro



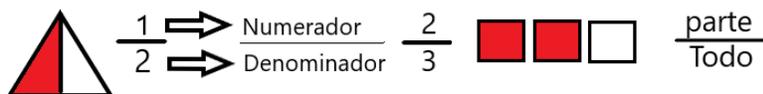
¿Cuál es la fracción que representa
la parte del cuadro que esta dibujada?



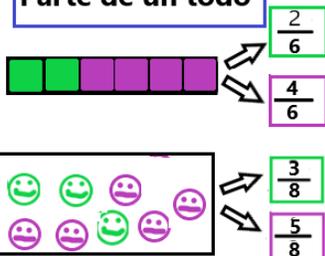
Pieza comunicativa #2

FRACCIÓN

Pueden ser utilizadas para representar diferentes situaciones.



Parte de un todo



Para **leer una fracción** se lee primero el numerador teniendo en cuenta:

si el denominador es	2	3	4	5	6	7	8	9
se lee	Medios	Tercios	cuartos	Quintos	sextos	Septimos	octavos	Novenos

si el denominador es 10 se lee **décimos** y si es mayor que 10 se lee el número seguido de la terminación **avos**

Adaptado de <https://co.pinterest.com/>

GUIA N° 6

Actividad 9. Ayudemos al guardián a reparar su muro

Nivel de Pirie y Kieren: Observación.

Propósito: Demostrar la aplicación de las fracciones en la vida diaria.

En la actividad anterior cumpliste con la misión del guardián del puente y ya son amigos, ahora ayúdalo a reparar el muro que se le dañó en su casa.

¿Qué haremos? Construiremos un muro de material de guadua para ayudar al guardián a reparar el muro de casa

¿Qué usaremos? Lápiz, marcadores, tijeras, papel, colores, pegante, bitácora y metro.

¿Cómo haremos?

Tomaremos varias ramas de guaduas de 1 metro de largo y la partirán en diferentes tamaños.

¡Espera!



El guardián te recomienda que practiques antes de ir a su casa, para ello debes trabajar en equipo con tu docente y construir un muro con el material que prefieras, y no se te olvide escribir la fracción que corresponde a cada parte.



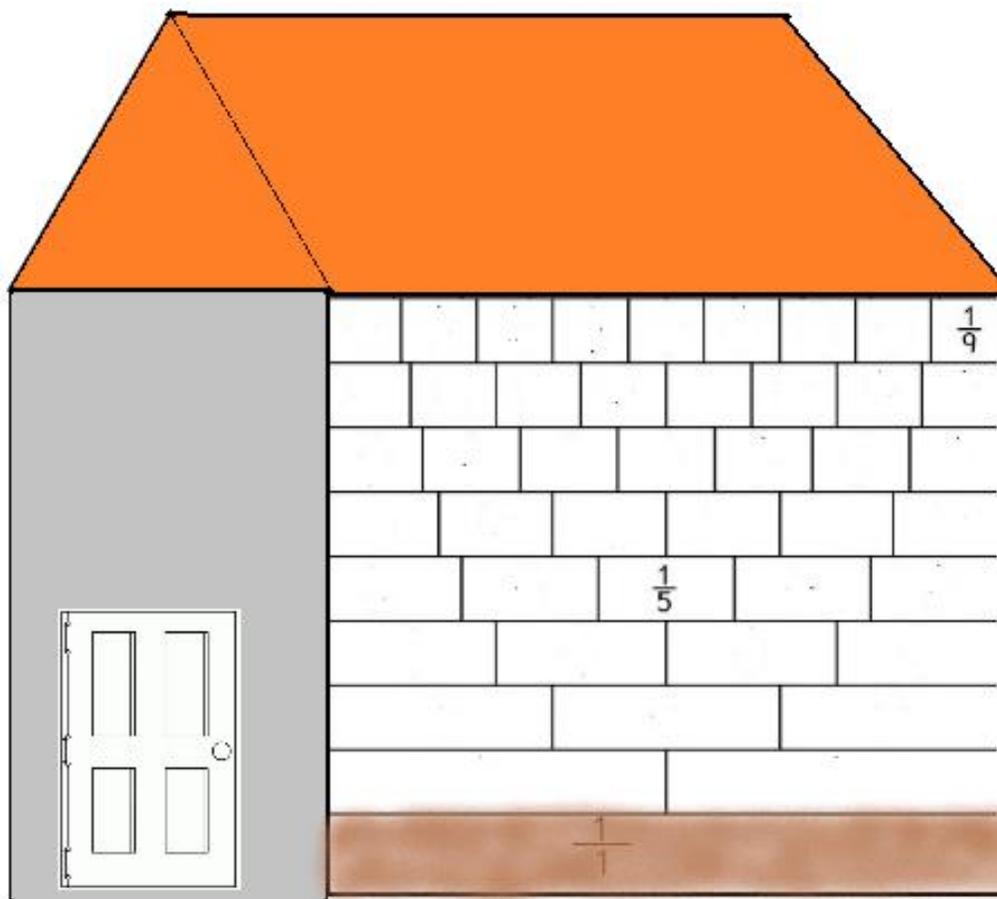
¡Ahora sí!



Para ayudar con la reparación del muro utiliza material que sea fácil pegar, para ello debes seguir las siguientes instrucciones dadas

- Corta la vara de guadua del tamaño que corresponde a la parte que esta coloreada de café y nombra cada parte con la fracción correspondiente.

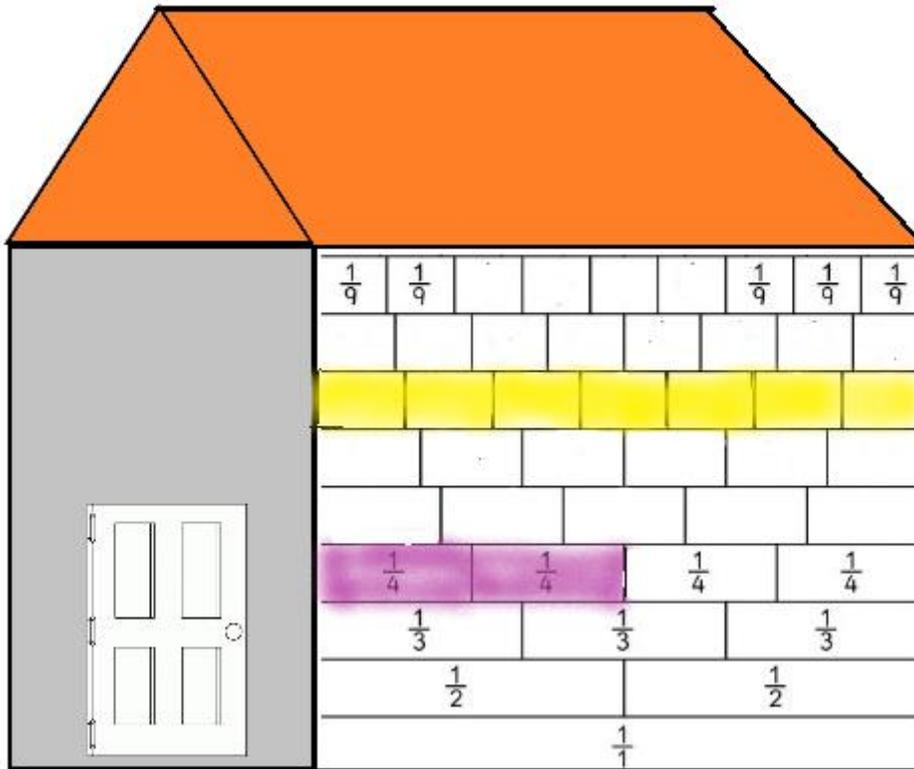
- Continúa colocando toda las partes que hacen faltan en el muro y escribiendo la fracción que representa cada parte.



¡Excelente!



Ya eres todo un conocedor del tema, realiza el siguiente ejercicio que te ayudará a ser un experto.

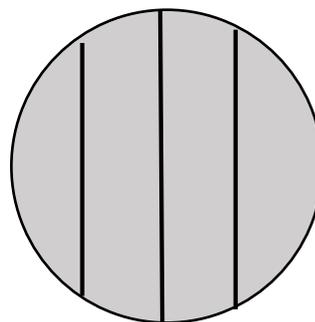
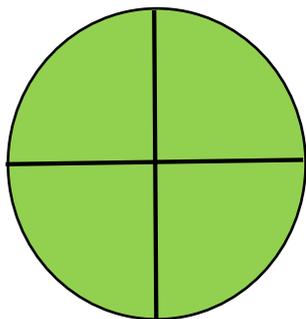
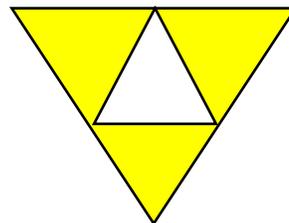
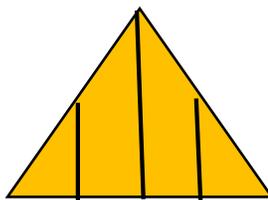


- La primera parte del muro, la cual corresponden a la unidad, coloréala de rojo.
- Colorea de verde las partes que corresponden a $\frac{1}{2}$
- Colorea de azul las partes que corresponden a $\frac{1}{5}$
- Escribe la fracción que corresponde a la parte que esta de color amarillo. _____
- Escribe la fracción de cada parte que no está nombrada.
- ¿Cuántas piezas de un $\frac{1}{5}$ caben en la parte que corresponde a la unidad? _____
- ¿Qué fracción representa la parte coloreada de morado? _____

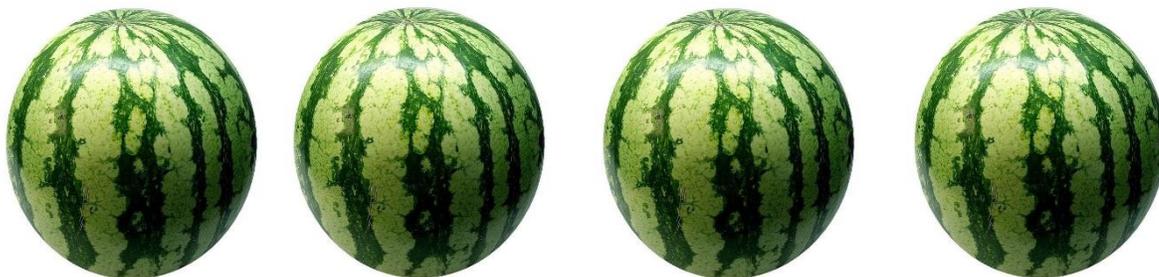
ANEXO 7**PROTOCOLO DE ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA****IER gradual arriba****CER esperanza****Universidad de Antioquia****Maestría en educación – línea matemática****Fecha:****Duración:****Lugar:****Objetivo:** indagar la comprensión que posee el estudiante del concepto de fracción

1. ¿cuánto mide la pieza larga para la construcción del prototipo del puente?
2. ¿Cuántas piezas largas puedes creer que necesitas para realizar el puente?
3. ¿Cuánto mide las piezas cortas del puente?
4. ¿Cuántas piezas cortas necesitas para armar una pieza larga de 27 cm?
5. ¿Cuántas piezas cortas tiene una de las armaduras?
6. ¿la otra armadura tiene el mismo número de piezas?
7. ¿si de esta pieza grande se cortan 3 piezas, a que fracción equivale o representa ese pedazo o pieza?
8. ¿escribe esa fracción?
9. ¿si una pieza corta equivale a un tercio, cuantas usaste para elaborar una de las armaduras?
10. ¿Cuántos tercios o piezas cortas usaste para elaborar las dos armaduras?
11. si pintas un cuarto de la pasarela del puente de color amarillo, la otra de rojo, la otra naranja y la última de azul ¿cuantas piezas compone o forman cada cuarto de color del puente?
12. señala y explica un medio del total del puente
13. ¿Qué fracciones usaste para elaborar el puente?
14. ¿son importantes las matemáticas en la vida diaria?

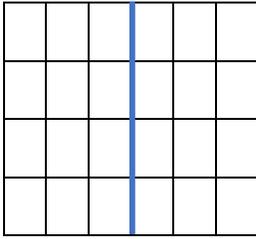
2. encierra la figura que tiene la unidad dividida en partes iguales.



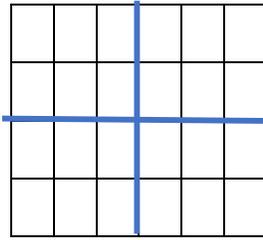
3. Luis le gusta la patilla, pero solo le gusta comer la cuarta parte de cada una. **Colorea la cuarta parte que se va comer Luis de cada patilla.**



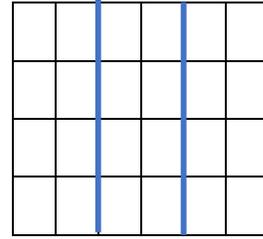
4. escribe el nombre que recibe cada figura según las partes en que se divide la unidad.



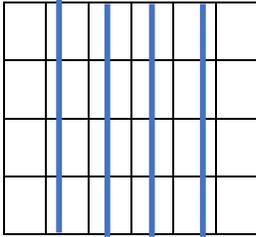
En 2 partes



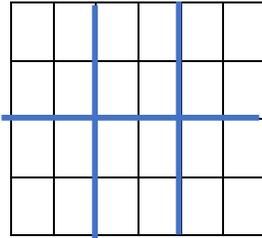
en 4 partes



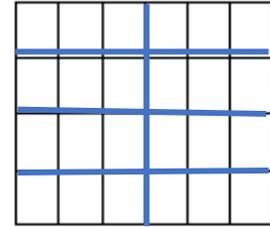
en 3 partes



En 5 partes

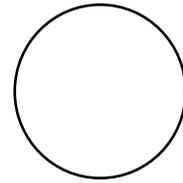
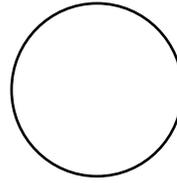
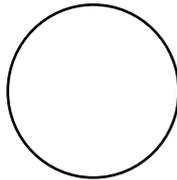
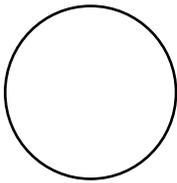


en 6 partes



en 8 partes

5. representa con un dibujo la fracción de cada pizza que se ha comido mateo.



Anexo 9



Hace constar que:

MARYURIS ROSA YEPES REYES
CC: 1.067.855.202

**Participó en modalidad poster en el I Seminario Internacional de Innovación en
Educación y Didáctica de las Ciencias
SIED 2019**

Objetivo:

Generar un espacio de cooperación e intercambio académico para la reflexión sobre aspectos relacionados con la innovación en educación y didáctica de las ciencias.

Intensidad: 20 horas



HERNÁN DE JESÚS SALAZAR ESCOBAR
Jefe Departamento de Educación y Ciencias Básicas
Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas - ITM



YOLANDA DEL SOCORRO ÁLVAREZ RÍOS
Decana Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas - ITM

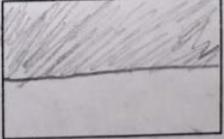
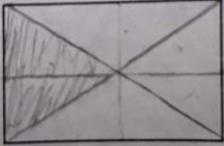
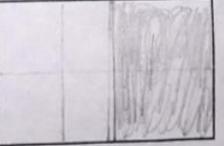
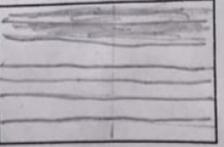
ANEXO 9

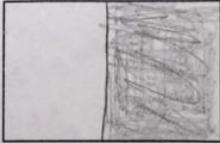
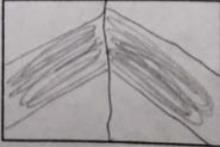
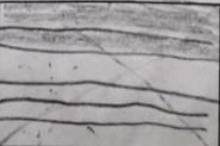
Estudiantes	Toma un pitillo y pártelo por mitades iguales ¿Cuántas mitades obtuviste? 1	Categoría Mitad y proporcionalidad	¿Son iguales las partes? 2	Nuevamente corta las partes que obtuviste por la mitad ¿Cuántas mitades obtuviste? 3	¿Son iguales las mitades? 4	Toma otro pitillo y córtalo en 5 partes iguales ¿son iguales las partes? 5
E1	2		Si	4	Si	No
E2	Dos		Si	4	si	No
E3	2		Si	4	Si	No
E4	2		Si	4	Si	Si
E5	2		Si	4	Si	No
E6	2		Si	4	Si	No
E7	2		Si	4	Si	No
E8	2		Si	4	Si	No
E9	Dos		Si	Cuatro	Si	Si

Tabla 1. Actividades de folding back 1 primera parte

Estudiantes	Colorea con marcador tres partes de ese pitillo ¿Cuántas partes quedaron sin colorear?	Categoría	Escribe con una fracción lo que está representado en el rectángulo anterior
E1	2	Parte- todo	$\frac{3}{5}$
E2	2	Parte- todo	$\frac{3}{5}$
E3	2	Parte- todo	$\frac{3}{5}$
E4	2	Parte- todo	$\frac{2}{5}$
E5	2	Parte- todo	$\frac{3}{5}$
E6	2	Parte- todo	$\frac{2}{5}$
E7	2	Parte- todo	$\frac{3}{5}$
E8	2	Parte- todo	$\frac{2}{5}$
E9	Dos	Parte- todo	$\frac{3}{5}$

Tabla 2. Actividades de folding back 1 primera parte

Estudiantes	Pregunta	Categoría	Descripción
E1	<p>6. parte por la mitad la figura</p>  <p>Fracción</p> $\frac{1}{2}$ <p>7. saca de la figura 6 partes iguales:</p>  <p>Fracción</p> $\frac{2}{6}$	Parte todo Representación grafica	<p>Se evidencia que el estudiante logra cortar en partes las figuras del punto 6 y 7 pero esta partición no es proporcional entre las partes es decir algunas partes quedarían con mayor superficie.</p> <p>En cuanto a la parte algorítmica se evidencia concordancia entre la representación gráfica y la expresión matemática</p>
E2	<p>6. parte por la mitad la figura</p>  <p>Fracción</p> $\frac{1}{2}$ <p>7. saca de la figura 6 partes iguales:</p>  <p>Fracción</p> $\frac{2}{4}$	Parte todo Representación grafica	<p>Se evidencia que el estudiante en el punto 6 de la actividad logra establecer relación entre la representación gráfica de la fracción y la expresión algorítmica.</p> <p>En cuanto al punto 7 de la actividad el estudiante evidencia dificultad para realizar la repartición de la figura en las partes que se le solicita y posteriormente asignarle una expresión algorítmica acorde con lo solicitado. Por el contrario el estudiante hace una repartición que no es solicitada en la actividad con líneas irregulares (líneas curvas) dividiendo la figura en partes y finalmente escribe una expresión algorítmica que si bien está acorde con lo representado en la gráfica, evidencia poca comprensión de la pregunta de la actividad.</p>

E3	<p>6. parte por la mitad la figura </p> <p>Fracción $\frac{1}{2}$</p> <p>7. saca de la figura 6 partes iguales: </p> <p>Fracción $\frac{2}{6}$</p>	Parte todo Representación grafica	<p>Se evidencia que en el punto 6 se logra representar las fracción solicitada en la pregunta se puede establecer que la partición de la figura es correcta y que el estudiante logra relacionar de manera correcta la expresión algorítmica con las representación gráfica de la fracción.</p> <p>Se evidencia dificultad en la partición de la figura del punto 7 el estudiante no logra establecer que las superficies de las partes no son iguales aunque la expresión algorítmica escrita por el estudiante guarda relación con lo representado.</p>
E4	<p>6. parte por la mitad la figura </p> <p>Fracción $\frac{2}{1}$</p> <p>7. saca de la figura 6 partes iguales: </p> <p>Fracción $\frac{2}{4}$</p>	Parte todo Representación grafica	<p>Se evidencia en el ejercicio realizado por el estudiante que existen nociones de partición las cuales a la luz de la teoría sobre los procedimientos para obtener fracciones no corresponde con lo representado en la parte algorítmica de la fracción escrita por el estudiante. Es decir no existe relación entre lo expresado en números y la gráfica, de igual forma se puede evidenciar que existen dificultades para establecer igualdades entre las partes fraccionadas ya que la imagen muestra que las partes obtenidas después de la partición no son proporcionales entre ellas.</p>

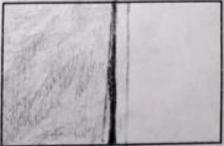
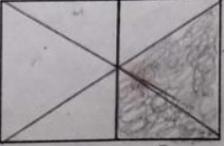
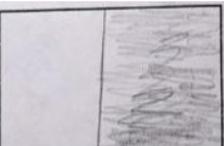
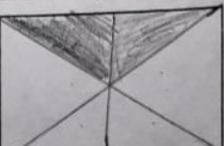
E5	<p>6. parte por la mitad la figura </p> <p>Fracción $\frac{7}{2}$</p> <p>7. saca de la figura 6 partes iguales: </p> <p>Fracción $\frac{2}{4}$</p>	Parte todo Representación gráfica	Se evidencia en el primer ejercicio de esta parte una aproximación al concepto de mitad, se observa que la expresión algorítmica escrita por el estudiante no guarda relación con la gráfica, sumado a esto no hay claridad conceptual entre la posición del numerador y el denominador. Por otro lado en la segunda actividad pareciera que la dificultad para establecer la mitad igual entre las partes se evidenciara en mayor medida cuando se solicita que se divida la unidad en más partes. Es decir a mayor partes para repartir mayor la dificultad para establecer la igualdad de las partes.
E6	<p>6. parte por la mitad la figura </p> <p>Fracción $\frac{2}{1}$</p> <p>7. saca de la figura 6 partes iguales: </p> <p>Fracción $\frac{6}{2}$</p>		

Tabla 3. Análisis de preguntas de actividades asociadas a categorías parte- todo