



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE NÚMEROS
ENTEROS EN ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO DE
EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA**

Carmen Julia Velásquez Martínez

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Apartadó, Colombia
2020



CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE NÚMEROS ENTEROS EN ESTUDIANTES
DE CUARTO GRADO DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

Carmen Julia Velásquez Martínez

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Educación

Asesores:

Dr. Pedro Vicente Esteban Duarte

Mg. Deifer Marmolejo Correa

Línea de Investigación: Educación Matemática

Grupo de Investigación: Educación Matemática e Historia (UDEA – EAFIT)

Universidad de Antioquia

Facultad de educación

Apartadó, Colombia

2020

Dedicatoria

A mis padres y hermanos y, en especial, a mi compañero de vida Jorge, a mi hijo Jorgito y a mis tres hijas Andrea, Daniela y Wendy.

Agradecimientos

A Dios por ser mi fortaleza en los momentos que sentí desfallecer y porque por su misericordia todo lo hace posible.

A mi familia por su paciencia y apoyo constante e incondicional.

A mis asesores: Pedro Vicente Esteban Duarte y Deifer Marmolejo Correa porque gracias a su apoyo, experiencia y conocimientos me orientaron y me brindaron herramientas a nivel personal y académico que permitieron llegar a terminar el proceso investigativo de forma satisfactoria.

A los profesores que hicieron parte del proceso de formación académica, sus aportes y orientaciones fueron muy importantes en el proceso investigativo.

A Diana Arcia y Yuris Aparicio, compañeras de Maestría que fueron apoyo incondicional en todo el proceso de investigación.

Al Centro Educativo Rural El Zumbido y en especial a Alain Mosquera (director) por permitir que la investigación se realizara.

A los estudiantes participantes en el proceso investigativo por su entusiasmo, compromiso y entrega en el desarrollo de las actividades que se realizaron en el marco de la investigación.

A aquellas personas, cuyos nombres no aparecen pero que de una u otra forma aportaron e hicieron parte de este proceso, a ellos y a todos, muchas gracias.

Tabla de contenido

| | |
|--|------|
| Dedicatoria..... | iii |
| Agradecimientos | iv |
| Tabla de contenido | v |
| Índice de Tablas | ix |
| Lista de Ilustraciones..... | x |
| Resumen | xiii |
| Abstract | xiii |
| Capítulo I: Antecedentes | 1 |
| 1.1 Antecedentes del problema de investigación | 1 |
| 1.1.1 Una mirada al proceso de formación y a la experiencia en el aula de una maestra de Educación en Básica Primaria | 1 |
| 1.2 Revisión de la literatura | 3 |
| 1.2.1 Importancia del conjunto de los números enteros en la cotidianidad | 4 |
| 1.2.2 Enseñanza y aprendizaje de los números enteros e implicaciones del contexto..... | 7 |
| 1.2.3 Modelación matemática y contexto. Posibilidades al interior del aula | 13 |
| 1.2.4 Elementos intervinientes en la construcción de significados de objetos matemáticos . | 16 |
| 1.2.5 El contexto en la modelación matemática un escenario para la construcción de significados..... | 18 |
| 1.3 Formulación del problema | 20 |
| 1.4 Objetivo de la investigación..... | 22 |
| 1.4.1 Objetivo general | 22 |
| Capitulo II: Referentes teóricos y conceptuales | 24 |
| 2.1 Marco legal..... | 24 |
| 2.1.1 Números enteros en cuarto grado de Educación Básica Primaria: perspectiva del currículo de matemática en Colombia..... | 24 |
| 2.1.2 Estudio de los números enteros en el currículo colombiano | 25 |
| 2.2 Marco teórico | 33 |
| 2.2.1 Potencialidades de la modelación matemática al interior del aula..... | 33 |
| 2.2.2 Construcción de significados de objetos matemáticos | 39 |
| 2.3.3 Relación entre modelación matemática y construcción de significados | 45 |
| Capítulo III: Diseño metodológico | 49 |

| | | |
|---|--|-----|
| 3.1 | Enfoque | 49 |
| 3.2 | Método | 50 |
| 3.3 | Escenario y participantes de la investigación | 51 |
| 3.4 | Herramientas para la producción de los registros | 52 |
| 3.4.1 | Observación | 52 |
| 3.4.2 | Entrevista semiestructurada | 53 |
| 3.4.3 | Los documentos escritos | 54 |
| 3.5 | Instrumentos de recolección de información | 54 |
| 3.5.1 | Pretest | 55 |
| 3.5.2 | Actividades de modelación con estudiantes de cuarto grado de Básica Primaria | 56 |
| 3.5.3 | Postest | 68 |
| 3.6 | Cronograma | 68 |
| 3.7 | Resultados esperados | 69 |
| 3.8 | Procesamiento y análisis de la información | 70 |
| 3.9 | Validez de la investigación | 70 |
| Capítulo IV: Análisis de la Información | | 72 |
| 4.1 | Análisis de datos cualitativos | 72 |
| 4.1.1 | Análisis del Pretest | 73 |
| 4.1.2 | Análisis actividad uno de modelación matemática. Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera | 76 |
| 4.1.3 | Análisis de la actividad dos de modelación. Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros | 115 |
| 4.1.4 | Análisis de la actividad tres de modelación matemática: observo mi entorno y aplico los números enteros | 138 |
| 4.1.5 | Análisis del Postest | 145 |
| Capítulo V: Conclusiones | | 157 |
| 5.1 | Resultados de la investigación | 157 |
| 5.1.1 | Respuesta a la pregunta de investigación | 159 |
| 5.1.2 | Consecución del objetivo | 163 |
| 5.1.3 | Relación entre modelación matemática y construcción de significados | 168 |
| 5.1.4 | Modelación matemática, una manera de asumir la investigación en el entorno escolar para la construcción de significados | 170 |
| 5.1.5 | Transformación de la práctica docente, posibilidades a partir de la modelación matemática | 171 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.2 | Discusión..... | 174 |
| 5.3 | Futuras líneas de investigación..... | 175 |
| | Apéndice..... | 177 |
| | Apéndice A. Resultados de la actividad diagnóstica, el Pretest, las actividades de modelación y el Postest. | 177 |
| | A.1 Actividad diagnóstica y análisis..... | 177 |
| | A.2 Pretest (actividad de conocimientos previos) | 185 |
| | A.3 Actividad uno de modelación matemática: Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera | 193 |
| | A.4 Actividad dos de modelación matemática: Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros..... | 203 |
| | A.5 Actividad tres de modelación matemática: Observo mi entorno y aplico los números enteros | 212 |
| | A.6 Postest: Actividad de reconocimiento de significados construidos durante las actividades de modelación..... | 215 |
| | A.6.1 Ubicación de números enteros en la recta graduada entera | 216 |
| | A.6.2 Relación de orden en los números enteros (\mathbb{Z}) | 217 |
| | A.6.3 Operaciones aditivas con números enteros (suma y resta) | 218 |
| | Apéndice B. Instrumentos de recolección de información | 220 |
| | B.1 El Pretest | 220 |
| | B.2 Instrumentos de la actividad uno de modelación matemática | 228 |
| | B.2.1 Momento uno | 228 |
| | B.2.2 Momento dos..... | 228 |
| | B.2.3 Momento tres..... | 230 |
| | B.2.4 Momento cuatro..... | 232 |
| | B.2.5 Momento cinco | 234 |
| | B.3 Instrumentos actividad dos de modelación matemática | 235 |
| | B.3.1 Momento uno | 235 |
| | B.3.2 Momento dos..... | 236 |
| | B.3.3 Momento tres..... | 240 |
| | B.3.4 Momento cuatro..... | 242 |
| | B.3.5 Momento cinco | 245 |
| | B.4 Actividad tres de modelación matemática..... | 245 |
| | Apéndice C. Participaciones nacionales | 246 |

| | |
|--|-----|
| C.1 Poster | 246 |
| Apéndice D. Consentimiento informado | 247 |
| D.1 Consentimientos del Centro Educativo | 247 |
| D.2 Consentimiento de los padres | 248 |
| Referencias bibliográficas | 251 |

Índice de Tablas

| Contenido | pág. |
|--|-------------|
| Tabla 1. Implicaciones del contexto en la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros. | 11 |
| Tabla 2. Potencialidades que caracterizan la modelación. | 36 |
| Tabla 3. Elementos intervinientes en la construcción de significados. | 42 |
| Tabla 4. Actividades de modelación. | 57 |
| Tabla 5. Intervalo de tiempo en el cual se desarrolló la investigación. | 69 |
| Tabla 6. Resumen significados construidos por los estudiantes en la actividad uno de modelación..... | 111 |
| Tabla 7. Resumen de los significados construidos por los estudiantes en la actividad dos de modelación..... | 133 |
| Tabla 8. Resumen de significados construidos por los estudiantes en la actividad tres de modelación..... | 143 |
| Tabla 9. Maneras de construir significados, identificadas a partir de las actividades de modelación..... | 162 |

Lista de Ilustraciones

| Contenido | pág. |
|--|-------------|
| Ilustración 1. Relación entre DBA por grado..... | 28 |
| Ilustración 2. Tipos de significados personales e institucionales | 41 |
| Ilustración 3. Construcción de significado en modelación matemática | 47 |
| Ilustración 4. Ubicación del Centro Educativo Rural el Zumbido | 51 |
| Ilustración 5. Significados iniciales de ubicación de número entero en la recta graduada..... | 73 |
| Ilustración 6. Significados iniciales respecto a la relación de orden en números enteros. | 74 |
| Ilustración 7. Representaciones de operaciones aditivas realizadas | 75 |
| Ilustración 8. Signo más, representado | 77 |
| Ilustración 9. Signo menos representado | 78 |
| Ilustración 10. Significado construido del número cero | 78 |
| Ilustración 11. Uso de los números enteros en la vida diaria..... | 79 |
| Ilustración 12. Conformación de los números enteros. | 80 |
| Ilustración 13. Situaciones en las que se utilizan los números enteros | 82 |
| Ilustración 14. Situaciones en las que se utilizan los números enteros. | 84 |
| Ilustración 15. Representación de números enteros. | 84 |
| Ilustración 16. Representación de una situación que involucra los números enteros..... | 86 |
| Ilustración 17. Etiquetas con números enteros..... | 88 |
| Ilustración 18. Etiquetando objetos con números enteros a la derecha e izquierda. | 88 |
| Ilustración 19. Objetos ostensivos y no ostensivos utilizados | 89 |
| Ilustración 20. Objetos ostensivos y no ostensivos utilizados | 90 |
| Ilustración 21. Cuerda con figuras geométricas planas. | 91 |
| Ilustración 22. Etiquetando figuras geométricas con números enteros. | 91 |
| Ilustración 23. Etiquetando figuras geométricas planas en la escalera con números enteros. .. | 92 |
| Ilustración 24. Estudiante etiquetando figuras planas en una escalera. | 93 |
| Ilustración 25. Representaciones ostensivas y no ostensivas de números enteros | 94 |
| Ilustración 26. Alberto midiendo la profundidad de la placa al suelo. | 96 |
| Ilustración 27. Representaciones de la medición, realizada | 97 |

| | |
|---|-----|
| Ilustración 28. Objetos no ostensivos acerca de la ubicación de números enteros | 98 |
| Ilustración 29. Objetos no ostensivos acerca de la conformación de números enteros. | 98 |
| Ilustración 30. Representación de significado del número cero..... | 99 |
| Ilustración 31. Modelos o solución | 101 |
| Ilustración 32. Modelo representado | 102 |
| Ilustración 33. Relación de números enteros con profundidad | 103 |
| Ilustración 34. Respuesta al problema de manera no ostensiva. | 103 |
| Ilustración 35. Solución al problema de forma ostensiva | 104 |
| Ilustración 36. Solución al problema de forma ostensiva | 104 |
| Ilustración 37. Solución al problema de forma ostensiva | 105 |
| Ilustración 38. Estudiantes haciendo carteleras..... | 105 |
| Ilustración 39. Exposición de significados construidos acerca de números enteros. | 106 |
| Ilustración 40. Significado global de orden en los enteros manifestado | 116 |
| Ilustración 41. Significado global de suma y resta con enteros | 116 |
| Ilustración 42. Alberto organizando los montones en la recta graduada entera..... | 118 |
| Ilustración 43. Pablo ordenando a sus compañeros en la recta graduada entera..... | 119 |
| Ilustración 44. César organizando a sus compañeros en la recta graduada entera. | 120 |
| Ilustración 45. Relación de orden de números enteros con estatura de sus compañeros..... | 121 |
| Ilustración 46. Desplazamientos realizados por los estudiantes. | 122 |
| Ilustración 47. Representaciones de suma y resta en la recta graduada entera. | 123 |
| Ilustración 48. Representación de orden en los números enteros..... | 124 |
| Ilustración 49. Resultado de la indagación realizada. | 125 |
| Ilustración 50. Significados consultados | 126 |
| Ilustración 51. Situaciones de la vida cotidiana que involucran a los números enteros. | 126 |
| Ilustración 52. Modelos representados para la solución del problema. | 127 |
| Ilustración 53. Solución no ostensiva realizada | 128 |
| Ilustración 54. Conclusión de los modelos. | 129 |
| Ilustración 55. Formulación del problema realizado por los estudiantes. | 138 |
| Ilustración 56. Plan para la solución del problema elaborado por los estudiantes. | 140 |
| Ilustración 57. Datos obtenidos por los estudiantes. | 140 |
| Ilustración 58. Modelos y solución del problema realizada por los estudiantes. | 141 |

| | |
|--|-----|
| Ilustración 59. Representaciones realizadas | 145 |
| Ilustración 60. Enumeración de figuras geométricas con números enteros. | 147 |
| Ilustración 61. Respuesta en el Pretest | 148 |
| Ilustración 62. Comparación de números enteros | 149 |
| Ilustración 63. Respuesta en el Pretest respecto al orden en los números enteros. | 149 |
| Ilustración 64. Representación acerca de relación de orden en los números enteros. | 151 |
| Ilustración 65. Prácticas ostensivas manifestadas. | 152 |
| Ilustración 66. Representación de suma y resta en el Pretest..... | 153 |
| Ilustración 67. Representación de significado de suma con números enteros | 154 |
| Ilustración 68. Representación de significado de resta con números enteros..... | 155 |
| Ilustración 69. Significado de orden en los números enteros manifestados | 164 |
| Ilustración 70. Relación de situaciones cotidiana con números enteros..... | 165 |
| Ilustración 71. Significados construidos por Pablo, a partir de la investigación. | 166 |
| Ilustración 72. Significados construidos por los estudiantes, respecto a suma y resta..... | 166 |
| Ilustración 73. Socialización de los resultados de la actividad dos de modelación | 167 |
| Ilustración 74. Representaciones de suma y resta en la recta graduada entera. | 168 |
| Ilustración 75. Relación entre modelación matemática y construcción de significados. | 169 |

Resumen

El presente trabajo de investigación es de carácter cualitativo, se interesó en indagar por maneras en que estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria construyen significados de números enteros (\mathbb{Z}) en actividades de modelación, teniendo en cuenta algunos de los planteamientos de Barbosa (2004) y asumiendo la modelación matemática como método de enseñanza y de aprendizaje en la construcción de significados de números enteros (\mathbb{Z}), analizados bajo aspectos del Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2012) y Godino Batanero y Font (2019) y de esta forma identificar las posibles maneras en que los estudiantes construyen significados de números enteros. Para el alcance de este propósito se diseñaron tres actividades de modelación, atendiendo los casos uno, dos y tres de modelación seleccionada para la investigación, enmarcada en procesos de problematización e investigación. Entre los aspectos metodológicos para dar cuenta de la pregunta y el objetivo de la investigación se centró la atención en planteamientos referidos al estudio de casos, observación, entrevista y documentos escritos como instrumentos para la recolección y análisis de información. Finalmente, se exponen las prácticas operativas y discursivas manifestadas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades de modelación, consideradas dichas manifestaciones como el insumo para dar cuenta de los resultados del proceso investigativo.

Palabras claves: números enteros, Educación Básica Primaria, construcción de significado, modelación matemática.

Abstract

The present research work is qualitative, it was interested in inquiring by ways in which fourth grade students of primary basic education build meanings of integers numbers in modeling activities, taking into account some of the approaches of Barbosa (2004) and assuming modeling as a teaching and learning method in the construction of meanings of integers in the same way are introduced theoretical aspects coming from of the ontosemiótico approach according to authors like Godino, Batnanero and Font (2012) and Godino Batanero y Font

(2019) and in this way identify and analyze the possible ways in which students build meanings of integer numbers. For the reach of this purpose were designed three modeling activities were designed, in where the students get involve in a process of problematization and research.

Between the methodological aspects to give answer to the question and the objective of the investigation attention was focused on the approach referred to the cases study, observation, interview and written documents as instruments for the collection and analysis of information. Finally operational and discursive practices expressed by the students in the development of modeling activities are presented, considered such manifestations as the input to account of the results of the research process.

Key words: integer numbers, mathematical modeling, primary basic education, construction of meaning

Capítulo I: Antecedentes

1.1 Antecedentes del problema de investigación

Los antecedentes del problema de investigación de la presente propuesta se relacionan, en primer lugar, con reflexiones procedentes de procesos de formación y prácticas en el aula de una maestra de Educación en Básica Primaria y, en segundo lugar, con una revisión de la literatura, acerca de los números enteros (\mathbb{Z}) y la construcción de significados de estos objetos matemáticos. A continuación, se describen los aspectos que permitieron definir el problema de investigación y la manera cómo afrontarlo.

1.1.1 Una mirada al proceso de formación y a la experiencia en el aula de una maestra de Educación en Básica Primaria

La génesis de la propuesta de investigación se vincula con saberes que se adquieren durante un diplomado con la Universidad de Antioquia, bajo la orientación de profesores del grupo de investigación Educación Matemática e Historia (UdeA – EAFIT) (EDUMATH), en el que se generaron reflexiones acerca de la importancia de involucrar a los estudiantes de Educación Básica Primaria en procesos de enseñanza y de aprendizaje de los números enteros, aspectos que no se contemplan en el currículo colombiano según los referentes legales en Educación Matemática, como los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2016), los Estándares Básicos de Competencias (2006) y los Lineamientos Curriculares (1998).

Al considerar la experiencia como maestra de matemática en Educación Básica Primaria, y los conocimientos que se adquieren en el Diplomado Matemáticas en Contexto, al diseñar y aplicar una unidad didáctica en donde se exponen los números enteros a estudiantes de grado segundo (Velásquez, Rivas y Méndez, 2016); se reconocen aspectos que favorecen el aprendizaje acerca de este conjunto numérico, por ejemplo: asociar situaciones cotidianas con los signos positivos y negativos (por ejemplo, ganar un partido de fútbol por tantos goles a favor, gastar

dinero en compras en la tienda escolar, perder canicas al jugar en el recreo, etc.) y realizar procedimientos aditivos en relación con dichas situaciones.

En cuanto a las reflexiones de las prácticas en el aula se reconoce que involucrar en la enseñanza de las matemáticas, situaciones en vínculo con las vivencias del entorno de los estudiantes de Educación Básica Primaria, genera motivación e interés y posibilita el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Por tanto, se deduce que estudiantes pertenecientes a los primeros niveles de escolaridad se interesan por el estudio de números enteros al indagar por situaciones que dan cuenta de sus vivencias y cotidianidades. Aspecto que puede favorecer el aprendizaje de este conjunto numérico en los primeros años de educación Básica Secundaria.

Por otro lado, en diálogos con maestros de Educación Básica Secundaria, se identificaron algunas dificultades en relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los números enteros en estudiantes pertenecientes a este nivel de formación, entre las que se destacan: confundir números negativos y positivos en operaciones de estructuras aditivas y multiplicativas, asignar de manera indistinta signos positivos y negativos a soluciones de problemas propuestos e interpretar de manera incorrecta soluciones a problemas procedentes de contextos extramatemáticos, en relación con situaciones procedentes de la realidad y la cotidianidad, los cuales dan cuenta de los intereses, necesidades y vivencias de los estudiantes, (Marmolejo-Correa, Rendón-Mesa y Méndez-Vargas, 2018).

Las dificultades que se describen en el párrafo anterior se evidencian en los resultados de las pruebas saber del grado noveno implementadas por el ministerio de Educación Nacional a través del (ICFES), de la Institución Educativa Rural El Zumbido, en las que se observa que el 80% de los estudiantes poseen niveles de desempeño insuficiente en el área de matemáticas, según las pruebas de los años 2014 y 2016. En el año 2015 no se encuentran resultados de dichas pruebas y la Institución Educativa Rural el Zumbido, en el año 2017, pasó a ser Centro Educativo Rural, bajo la resolución departamental N°201500095347 del 20 de marzo de 2016, pasando a atender,

solo los grados de preescolar a octavo. Por tanto, no se encuentran resultados de las pruebas saber 9°, ya que para esta fecha este grado no se ofrecía en el Centro Educativo.

En consecuencia, identificar potencialidades en estudiantes de Educación Básica Primaria y dificultades en estudiantes de Educación Básica Secundaria, en el aprendizaje de los números enteros (\mathbb{Z} ¹) y reflexionar acerca de la experiencia en el aula, respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, conlleva a cuestionar sobre las maneras de cómo desarrollar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de este conjunto numérico en los primeros años de escolaridad y cómo fortalecer en los estudiantes de grados superiores de Educación Básica. Cuestiones que permiten establecer aproximaciones en la literatura en Educación Matemática, acerca de los números enteros y a la didáctica para su enseñanza y el aprendizaje.

1.2 Revisión de la literatura

La revisión de literatura se orientó a partir de reflexiones de la experiencia docente, puesto que se reconoce que al involucrar a estudiantes de Básica Primaria en el estudio de los números enteros a partir de situaciones extra-matemáticas favorece el proceso de enseñanza y de aprendizaje acerca de este conjunto numérico. Aspectos, que permitieron orientar la revisión de la literatura en primera instancia a partir de los siguientes interrogantes: ¿Qué se entiende por números enteros? ¿Cuáles son las implicaciones del contexto (entendido como las vivencias que tienen los estudiantes en su entorno escolar, familiar y social) en la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros?

Es necesario reconocer que la información que se obtiene en la instancia inicial del proceso de revisión cuando se indaga por aspectos epistemológicos, en relación con los números enteros (\mathbb{Z}), posibilitó establecer relaciones, que dieron lugar a nuevos interrogantes, y orientar la búsqueda a situaciones que se relacionan con la modelación matemática y la construcción de significados tales como: ¿Qué se entiende por modelación matemática en educación? ¿Cómo se analiza el

¹ En adelante se hablará indistintamente de números enteros o números enteros (\mathbb{Z}). Lo mismo es válido para el conjunto de los números naturales (\mathbb{N}) y para los Números racionales (\mathbb{Q}).

proceso de construcción de significado? ¿Cuáles son las implicaciones de la modelación matemática en la construcción de significado de números enteros?

Para dar respuesta a los anteriores interrogantes, se realizó una revisión de literatura en revistas académicas, tales como Dialnet, Redalyc, Scielo, entre otras; en buscadores como Google Académico; en memorias de algunos eventos académicos como las ICMA (2017), EDUMATH (2017), ECME (2013), y en repositorios de universidades como Universidad Nacional, Universidad de Antioquia, Universidad del Valle, entre otras. En dichas fuentes de información, se encontraron artículos, ponencias, talleres, investigaciones y otros documentos que permitieron orientar el proceso investigativo. En los siguientes apartados, se exponen planteamientos de algunos autores que se refieren a los cuestionamientos que se presentan en los párrafos anteriores.

1.2.1 Importancia del conjunto de los números enteros en la cotidianidad

En este apartado, se hace un bosquejo, respecto a la conformación del conjunto de los números enteros (\mathbb{Z}) y a la importancia de estos en la vida cotidiana, con la finalidad de dar cuenta del objeto matemático involucrado en el proceso de estudio que se llevó a cabo en la presente investigación.

En la literatura en Educación matemática, se reconoce que los números se conciben como objetos abstractos, cuya existencia se establece a partir de contextos matemáticos. Sin embargo, autores como Stewart (2007) atribuye a estos objetos matemáticos un carácter práctico y relevante ante situaciones de la realidad, al declarar que “los números son abstractos, y sin embargo nuestra sociedad se basa en ellos y no funcionaría sin ellos” (p. 7). En consecuencia, se reconoce que los números son de gran relevancia en la vida del ser humano, puesto que están ligados a cualquier accionar de las personas en sus quehaceres diarios y permiten solucionar problemas que se presenten en relación con contar, enumerar, clasificar, ordenar, entre otros aspectos.

Aspectos históricos datan acerca del carácter práctico y la utilidad de los números en diferentes épocas, culturas y sociedades. En la Antigüedad, los hombres pertenecientes a esta época utilizaban conceptos básicos de matemáticas, para contar, medir y ordenar. Estos conceptos, se relacionaban con actividades como la agricultura, el pastoreo, la fabricación de textiles, cerámicas, entre otras. Y eran representados a través del uso de partes del cuerpo inicialmente, pero al pasar el tiempo empezaron a utilizar otro tipo de simbología para representar sus pertenencias. Entre estos símbolos se pueden mencionar nudos en cuerdas provenientes de vegetales y rayas en piedras o árboles (Pastor y Babini, 1985).

Cabe resaltar que las formas de representación al igual que los usos dados a los números, evolucionaron de manera gradual y conjunta con el desarrollo económico y social de diferentes civilizaciones, a decir: árabes, chinos, hindús, griegos, mayas, entre otras. Por ejemplo, un caso particular acerca de estos usos y representaciones se sitúa en la China de la Edad Media, época en donde el matemático Qín Jiùshào, a partir de sus aportes en el campo algebraico, emplea una forma de presentar los números enteros, al utilizar los colores negro y rojo como representación de coeficientes negativos y positivos respectivamente. Dicha forma, sería sustituida en años posteriores al asignar una diagonal a los coeficientes negativos para diferenciarlos de los positivos, según Pastor y Babini (1985).

Durante el siglo VII, en la civilización Hindú el uso de los números negativos fue recurrente ante la necesidad de representar situaciones asociadas a problemas de deudas presentes en el desarrollo y la expansión del comercio (Vélez y Varela, 2014); sin desconocer el uso de estos números en años anteriores. En este sentido, la aceptación del número cero, el reconocimiento de los enteros negativos como números, conllevó a la conformación del conjunto de los números enteros al agregarlos a los números que ya conocían (los números naturales) (Collette, 1973).

Cabe destacar que, en el siglo XII, culturas como la griega, árabe y china; a partir de sus influencias y contribuciones en el comercio y la política, conllevaron a los hindús al reconocimiento del cero como símbolo y a la distinción simbólica de los números positivos y negativos que explicaban a través del vínculo con créditos y débitos (Pastor y Babini, 1985).

Tales planteamientos se reconocen en las ideas de Mattessich (1998) al manifestar que, los números que conocían los hindúes en la antigüedad, para representar situaciones que implicaban el conteo, la medición, la asignación de orden, entre otras; fueron insuficiente ante el surgimiento de nuevas situaciones involucradas en el intercambio de mercancías entre pobladores de una región o de regiones distintas y la contabilidad. Dichas circunstancias generaron en algunos matemáticos hindúes la necesidad de reconocer los números enteros como una manera de representar las deudas y los activos.

Al respecto, Pérez, Alcalde y Lorenzo (2014) manifiestan que el descubrimiento del conjunto de números enteros, facilitó la solución de situaciones problemas de la realidad del ser humano como las del cálculo en el comercio, pérdidas y ganancias, alturas y profundidades al considerar el nivel del mar como punto de referencia. Es así, como los números enteros a través de la historia adquieren un carácter práctico ante la necesidad del ser humano de solucionar situaciones extra-matemáticas presentes en su cotidianidad.

De acuerdo con las ideas que declaran en párrafos anteriores, se reconoce que al hacer referencia a la conformación del conjunto de los números enteros, se asumen como “una extensión de los números naturales, formada por los propios números naturales no nulos (1, 2, 3...), sus correspondientes negativos (-1,-2, -3...) y el cero (0). El conjunto de todos los enteros se denota por la letra \mathbb{Z} ”, (Pérez, Alcalde y Lorenzo, 2014, p.10).

En cuanto a la utilización de los números negativos, autores como Pastor y Babini (1985) establecen que durante los siglos XVII y XVIII, el uso de estos números tuvo gran relevancia dada su aplicabilidad en situaciones extra-matemáticas, al igual que en problemas procedentes de la realidad. Cabe destacar que, en la modernidad dichos objetos matemáticos se utilizaban en el campo del álgebra, sin desconocer los aportes de los matemáticos de la época.

Por otra parte, se reconoce que, en el siglo XIX, los avances en el campo de las matemáticas permitieron que los objetos matemáticos trascendieran más allá de su forma abstracta, y se relacionaran con la naturaleza y el mundo exterior (Pastor y Babini, 1985). Es necesario

reconocer que, para este siglo, la aceptación y aplicación de los números negativos permitió su aplicación en problemas algebraicos como en situaciones del mundo exterior.

De acuerdo con las ideas que se describe hasta este momento, se establece que los números enteros se presentan como un conjunto numérico útil para representar y solucionar diferentes situaciones de vida diaria, en particular aquellas que se relacionan con aspectos contables como deudas y activos, pérdidas y ganancias, temperaturas, profundidades y alturas, entre otras. Por tanto, se reconoce la importancia de este conjunto numérico en el desarrollo de la humanidad para resolver problemas reales que se presentan y se asocian a dinámicas sociales y culturales presentes en cada época.

En correspondencia con las ideas que se describen en párrafos anteriores, se identifica la necesidad de indagar acerca de la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros, debido a que, a través de la historia, sus usos y aplicaciones se establecen en estrecha relación con la solución de problemas asociados a situaciones extra-matemáticas presentes en diferentes sociedades y culturas.

En este sentido, en el siguiente apartado se exponen planteamientos de algunos autores que hacen referencia a la enseñanza y el aprendizaje del conjunto de números enteros.

1.2.2 Enseñanza y aprendizaje de los números enteros e implicaciones del contexto

Los hallazgos de la revisión de literatura, permiten asumir los números enteros como un conjunto numérico que se conforma por números enteros positivos, los números enteros negativos y el número cero. Y reconocer como sus formas de representación y usos se presentan en relación con el desarrollo de la humanidad según los problemas y necesidades propios de las culturas y sociedades correspondientes a cada época.

El reconocimiento de los anteriores hallazgos, y algunas reflexiones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros en Educación Primaria (Velásquez, Rivas y Méndez, 2016)

en donde se identifican condiciones favorables cuando se sitúa el estudio de estos objetos matemáticos en relación con contextos extra-matemáticos.

Es así como los elementos que se describen en líneas anteriores, permiten centrar el interés en identificar investigaciones en el ámbito internacional y nacional para reconocimientos de aspectos que se relacionan con la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros.

1.2.2.1 La enseñanza y el aprendizaje de los números enteros a nivel internacional

En el ámbito internacional, investigaciones en el campo de la Educación Matemática, informan acerca de las dificultades presentes en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los números enteros. Entre estas se destacan dificultades de conceptualización de los números enteros y las implicaciones de sus usos en situaciones extra-matemáticas, Gallardo y Mejía (2015); Gallardo, Mejía y Saavedra (2017); Bofferding (2014), Bofferding y Wessman (2017) y Borjas (2009).

Autores como Gallardo y Mejía, (2015); Gallardo, Mejía y Saavedra (2017), reconocen que algunas de estas dificultades pueden asociarse a maneras en cómo los estudiantes presentan ideas informales, cuando se enfrentan al estudio de situaciones que se relacionan con los números enteros (\mathbb{Z}), debido a que los usan para representar algo concreto (es decir, que no es abstracto) impidiéndoles simbolizar números menores o mayores que otro u otros y realizar procedimientos en los que tienen que quitar (restar) más de lo que se tiene. Además, estos autores argumentan que las respuestas que los estudiantes elaboran de situaciones que involucran números enteros (\mathbb{Z}), se restringen al campo de los números naturales (\mathbb{N}).

Ante estas dificultades, Gallardo y Mejía, (2015); Gallardo, Mejía y Saavedra (2017) recomiendan introducir los números enteros en los primeros años de escolaridad, para que la aplicación de solo números naturales no obstaculice el aprendizaje de los números enteros y, reconocen que utilizar los conocimientos previos y el contexto para la enseñanza de los números enteros permite la aplicabilidad de este conjunto numérico en situaciones procedentes de la realidad.

De igual forma, Bofferding (2014), en California, al investigar con estudiantes de grado primero de Educación Primaria, acerca de los distintos significados del signo menos (-), establece que niños en edades entre seis y ocho años, tienden a cambiar el signo a los números como consecuencia de desconocer los distintos significados que se atribuyen en la solución de problemas aditivos. Sin embargo, en los planteamientos de esta autora, se evidencia el estudio de números enteros a partir de conocimientos previos y vivencias de los estudiantes, puesto que permite articularlos con los nuevos conocimientos y de esta manera poder pasar a la construcción de los significados (unario, binario) del signo menos, aspecto que facilita identificar y diferenciar los significados del signo menos (-) e identificar el signo más (+).

En este sentido, Bofferding y Wessman (2017) plantean, que en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de los números enteros se debe tener en cuenta la experiencia que hayan tenido los estudiantes con los números naturales y con los números enteros. Además, en estos planteamientos se reconoce que los estudiantes involucran situaciones de la vida diaria, como edades en años y movimientos en distancias, para entender y justificar los resultados de problemas numéricos.

De acuerdo con los planteamientos anteriores, se reconoce que los saberes previos de los estudiantes, la aplicación y la experimentación en el estudio de los números enteros y situaciones vinculadas con procedimientos extra-matemáticas posibilitan atribuir significados a los signos negativo y positivo. Por tanto, orientar a estudiantes de Educación Básica Primaria (primeros años de escolaridad) en el estudio de este conjunto numérico a partir de situaciones cotidianas, podría presentar potencialidades que favorezcan su aprendizaje y comprensión en grados superiores de la Educación Básica.

Asimismo, Borjas (2009), a partir de investigaciones realizadas en Tegucigalpa (Honduras), establece que ciertas dificultades presentes en el aprendizaje de los números enteros se manifiestan cuando los estudiantes realizan operaciones aditivas, ya que relacionan el signo positivo solamente con aumentar y desconocen los diferentes significados del signo negativo puesto que lo relacionan solo con disminuir o quitar una cantidad de otra; estas nociones se

asocian a aspectos conceptuales y procedimentales, que se refieren al trabajo con números naturales en los primeros años de escolaridad.

Ante estas dificultades, Borjas (2009) recomienda indagar por situaciones problema según los intereses de los estudiantes, como un método de enseñanza que permita vincular la cotidianidad al estudio de operaciones aditivas con números de signo positivo y negativo, posibilitando la mediación de los conocimientos previos en el proceso de aprendizaje y la interiorización de sus saberes de tal manera que se les facilite encontrar sentido a los números enteros (\mathbb{Z}).

En correspondencia con las ideas que se declaran hasta el momento, se reconoce que en el plano internacional se encuentran investigaciones que dan cuenta de la importancia de vincular al trabajo en el aula, situaciones relacionadas con la cotidianidad que posibiliten a los estudiantes emplear los números enteros (\mathbb{Z}) en aspectos representacionales y procedimentales, favoreciendo la construcción de sus significados, desde etapas tempranas de escolaridad.

1.2.2.2 La enseñanza y el aprendizaje de los números enteros a nivel nacional

Centrar el interés en el ámbito de la Educación Matemática en Colombia, permitió identificar investigaciones que informan acerca de dificultades presentes en procesos de enseñanza y de aprendizaje cuando se indaga por los números enteros (\mathbb{Z}).

Arteaga y Rivas (2014) reconocen que en el aprendizaje de los números enteros (\mathbb{Z}), estudiantes de séptimo grado presentan dificultades para interpretar y solucionar problemas con números enteros, no obstante, en sus planteamientos se evidencia que transformar las prácticas educativas a partir del uso de estrategias que vinculen los números enteros con el contexto de los estudiantes permite que estos atribuyan significados a los acontecimientos de su entorno, favoreciendo la motivación y disposición para el aprendizaje.

Por su parte, Otero (2015) informa que cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de situaciones problema con números enteros (\mathbb{Z}), estos las resuelven de manera similar a la forma como resuelven problemas que involucran la utilización de números naturales. Por tanto,

argumenta que vincular situaciones cotidianas como vivencias en sus familias, en el colegio, con los vecinos, entre otras; posibilitan el desarrollo de habilidades matemáticas y potencia la creatividad del estudiante. En efecto, se entiende, que al relacionar situaciones del diario vivir, en las que los intereses y necesidades de los estudiantes se vinculen con el estudio de los números enteros, favorece el proceso de enseñanza y de aprendizaje de estos objetos matemáticos.

Chica (2011), establece que en el trabajo con números enteros (\mathbb{Z}) en el aula, los estudiantes presentan dificultades al representar de forma simbólica enunciados que se relacionan con este conjunto numérico, debido a que los datos que se extraen y las interpretaciones que se generan, en algunos casos, no se establecen en correspondencia con las situaciones en estudio. De igual modo, se reconoce que llevar a cabo intervenciones didácticas a partir de situaciones cotidianas, permite a los estudiantes conectar los saberes que se adquieren y las vivencias procedentes de su realidad.

En correspondencia con las interpretaciones que se establecieron a partir de las investigaciones citadas anteriormente, se identificaron algunas implicaciones del contexto en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de los números enteros. En la Tabla 1, se muestra de manera sucinta estas implicaciones según los planteamientos de algunos autores.

Tabla 1. *Implicaciones del contexto en la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros.*

| Nivel educativo | Autores | Implicaciones del contexto |
|--------------------|-----------------------------------|--|
| | Bofferding, L. (2014). | Permite vincular los conocimientos previos con los nuevos conceptos que se pretenden aprender. Favorece la construcción de significados de objetos matemáticos. Posibilita la construcción de los significados unario y binario del signo menos. |
| Educación Primaria | Mejía y gallardo (2015) | Favorece la articulación de los conocimientos previos con los nuevos conocimientos. Permite la aplicación de números enteros. |
| | Gallardo, Mejía y Saavedra (2017) | Las situaciones provenientes de experiencia de los estudiantes favorecen enlazar los conocimientos previos con los nuevos. |

| | | |
|----------------------|-----------------------------|--|
| | | Posibilita la adquisición de significados de conceptos matemáticos. |
| | Bofferding y Wessman (2017) | Retomar los conocimientos previos. Permite la construcción de significados. |
| | | Entender el problema matemático y Justificar los resultados de los algoritmos. |
| | Borjas (2009) | Adquirir conocimientos mediante la mediación de los conocimientos previos. |
| | | Encontrar sentido por parte de los estudiantes a los números enteros. |
| | Chica (2011) | Relacionar lo que sabe el estudiante con sus necesidades para utilizar sus conocimientos. |
| Educación Secundaria | | Relacionar los conocimientos previos con los números enteros. Interpretación de nuevas ideas. |
| | Arteaga y Rivas (2014) | Favorece la motivación y disposición para el aprendizaje. Dar significados a los acontecimientos del entorno. |
| | Otero (2015) | Desarrollo de habilidades de pensamiento. Aplicar los conceptos matemáticos. |

Fuente: Elaboración propia.

Los planteamientos anteriores evidencian que, al llevar a cabo el estudio de los números enteros (\mathbb{Z}) en conexión con el contexto, genera condiciones que favorecen la construcción de significados de estos objetos matemáticos, tales como: promover la creatividad, relacionar los conocimientos previos con los nuevos conocimientos. Además, posibilita el desarrollo de habilidades matemáticas, conecta los saberes que se adquieren con sus vivencias. No obstante, a pesar de las potencialidades que posee el contexto para favorecer procesos de aprendizaje, se reconoce que este, por sí solo, no es suficiente para desarrollar completamente estos procesos con los estudiantes.

Al respecto, Valero (2002) establece que “el contexto ‘está’ y ‘es’, pero no necesariamente afecta lo que sucede en el aprendizaje” (p. 50). Dichas consideraciones, permite inferir que el uso del contexto en sí no genera implicaciones directas en el aprendizaje. Por tanto, es necesario presentarlo a través de estrategias en donde sus usos presenten condiciones que favorezcan los procesos de enseñanza y de aprendizaje del conjunto de números enteros.

Cabe resaltar que, a partir de la experiencia como docente de aula, se reconoce que el uso del contexto puede fomentar la motivación en los estudiantes y articular las nociones matemáticas con la realidad. De igual modo, la revisión de literatura evidencia, cómo el uso del contexto puede generar condiciones para enriquecer y fortalecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

En consecuencia, es necesario articular aspectos que permitan materializar las relaciones entre el estudio de los números enteros con los intereses, cotidianidad y motivación de los estudiantes, particularidades que se encuentran inmersas en la modelación matemática. Por tanto, se reconoce la modelación matemática como un elemento articulador que permite comprender las relaciones entre matemáticas y realidad (MEN, 1998; Molina y Villa-Ochoa, 2013; Caron y Pineau, 2017; Stillman, 2017, entre otros).

En correspondencia con los planteamientos anteriores, a continuación, se exponen algunas ideas que dan cuenta de la modelación matemática en el aula, según varias investigaciones.

1.2.3 Modelación matemática y contexto. Posibilidades al interior del aula

En el campo de la Educación Matemática en Colombia, se identifican investigaciones que reconocen la importancia de involucrar el contexto en los procesos de enseñanza y de aprendizaje a través de la modelación matemática.

Parra-Zapata (2015); Muñoz, Londoño, Jaramillo y Villa-Ochoa (2014); Bossio (2014); Martínez- Almanza (2016) establecen que la modelación matemática permite la relación entre los contextos reales de los estudiantes y contextos matemáticos escolares. Aspectos que fortalece en el aula, la construcción y valoración de los conocimientos matemáticos.

Por consiguiente, se reconoce que al hacer uso de la modelación matemática en el aula, puede favorecer el proceso de enseñanza y de aprendizaje de objetos matemáticos, al utilizar los conocimientos previos provenientes de situaciones de su cotidianidad y la elaboración de modelos como intervinientes del nuevo conocimiento.

En los planteamiento de autores como Villa (2007); Londoño y Muñoz (2011); Rivera, Londoño y Jaramillo (2012); Molina y Villa-Ochoa (2013); Bossio, Londoño y Jaramillo (2013); Bossio (2014); Rivera-Quiroz (2014); Muñoz, Londoño, Jaramillo y Villa-Ochoa (2014); Martínez, Páez y García (2013); se reconoce que utilizar el contexto en la modelación matemática permite a los estudiantes indagar y resolver situaciones reales que se relacionen con su cotidianidad.

Bossio (2014), señala que la modelación matemática posibilita vincular las matemáticas que se enseñan en el aula con situaciones extra-matemáticas, que tengan relación con situaciones de la sociedad y de la cultura de los estudiantes. Lo que deja entender que la modelación matemática es una manera innovadora de hacer uso de las matemáticas en el aula.

De igual forma, en los planteamientos de Rivera-Quiroz (2014), se identifica que, cuando la modelación matemática cumple un papel relevante en el aula, los estudiantes se vinculan de manera directa con el estudio de fenómenos procedentes del contexto, se promueve la motivación y se fortalecen habilidades que permiten interpretar y comprender nociones y conceptos matemáticos. En consecuencia, se percibe que, dicha relación, permite articular las situaciones matemáticas en estudio con la vida cotidiana, la experiencia y los conocimientos previos; aspectos que pueden facilitar la construcción de significados de nociones matemáticas.

Martínez, Páez y García (2013), argumentan que la modelación matemática puede comprenderse como una guía que orienta el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares, al tener en cuenta en este proceso la realidad o contextos cercanos a los estudiantes. En este sentido, la modelación matemática puede jugar un papel relevante en la construcción de significados de objetos matemáticos por parte de los estudiantes, puesto que permite vincular situaciones de contextos reales con las matemáticas que dan cuenta de sus vivencias y cotidianidades con el estudio de objetos matemáticos.

Muñoz, Londoño, Jaramillo y Villa-Ochoa (2014), plantean que, cuando se utilizan situaciones procedentes de la cotidianidad como insumos para el desarrollo de actividades de

modelación matemática se favorece la participación de los estudiantes en aspectos como extracción de datos, producción de modelos y construcción de significados de objetos matemáticos.

En esta misma dirección, investigaciones a nivel internacional, inscritas en las ICMAS (2017), informan acerca de la modelación matemática en ambientes escolares. En las ideas de Caron y Pineau (2017) se establece que la modelación matemática permite conectar las matemáticas con el mundo real a partir de la aplicación de los conceptos que aprenden en el aula, favoreciendo que los estudiantes hagan predicciones, comprender el problema y representarlo de una mejor manera. De igual modo, Stillman (2017) asume la modelación matemática como una estrategia que permite a los estudiantes desarrollar formas de pensar con los modelos y sus mundos social y físico, aspecto que facilitan habilidades de pensamiento crítico.

En correspondencia con los hallazgos que se encuentran en las investigaciones ya citadas, tanto a nivel nacional como internacional, se destaca que el uso del contexto en la modelación matemática presenta potencialidades, tales como: fortalecer la interpretación y la resolución de situaciones problemas, motivar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje, facilitar la extracción de datos, fortalecer la participación de los estudiantes, permitir hacer predicciones, facilitar el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y favorecer la producción de modelos, aspectos que posibilitan la construcción de significado de los conceptos matemáticos en estudio.

Retomando, algunas de las ideas expuestas en el apartado: enseñanza y aprendizaje de los números enteros e implicaciones del contexto, en las que se encuentra que el contexto permite la construcción de significados de objetos y conceptos matemáticos, y teniendo en cuenta los aportes de los autores de la modelación matemática en este apartado. Se percibe que el contexto en la modelación matemática posibilita en los estudiantes la construcción de significados de objetos matemáticos, sin embargo, en estas investigaciones, no se da cuenta de cómo estos procesos tienen lugar en el aula, es decir, no evidencian cómo los estudiantes construyen significados de objetos matemáticos.

Ahora bien, con la finalidad de entender cómo se analiza el proceso de construcción de significados de objetos matemáticos se indaga en la literatura por investigaciones que informan acerca de este proceso. En el siguiente apartado se expondrán algunos planteamientos de autores que dan cuenta del proceso de construcción de significados de objetos matemáticos.

1.2.4 Elementos intervinientes en la construcción de significados de objetos matemáticos

A nivel internacional, en el campo de la Educación Matemática, se reconocen algunas investigaciones, en las que se encuentran elementos que intervienen y caracterizan el proceso de construcción de significados de objetos matemáticos. Godino y Batanero (1994); Godino (2002); Batanero (2005); Godino, Batanero y Font (2007); Godino, Batanero y Font (2012); Godino, Batanero y Font (2019), asumen los significados desde el análisis en dos dimensiones, una personal que se refiere a la cognición y la otra institucional o epistémica a partir de las diferentes prácticas que sean utilizadas por una persona al resolver problemas matemáticos.

En este sentido, Tauber (2001), en la investigación que realizó con estudiantes de los primeros cursos universitarios en España, cuyo objeto de estudio fue la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal, encontró que a partir de elementos de significados en los que se destacan elementos extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos; se puede analizar los significados que construyeron los estudiantes respecto al objeto matemático en dichos estudios.

Del mismo modo, Batanero (2005) resume los significados históricos de la probabilidad. Manifiesta que para el análisis de la actividad matemática intervienen unos componentes o elementos de significados, iniciando con el campo de problemas del que emerge el objeto, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades de los objetos y su relación con otros objetos matemáticos, por último, los argumentos y demostraciones de estas propiedades.

En los planteamientos de Batanero (2005), se reconoce que los significados de un objeto matemático son progresivos, puesto que en la enseñanza de las matemáticas hay diferentes niveles de complejidad de un concepto. En correspondencia con los anteriores planteamientos, se

entiende que los significados de objetos matemáticos van cambiando a medida que se va profundizando en su estudio y, que las acciones o maneras de proceder al enfrentarse en forma individual o colectiva a problemas que involucren objetos matemáticos, para su solución conlleva a construir significados del objeto que se estudia y de los que emerjan en dichas prácticas.

Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone (2017), realizaron una investigación dirigida a analizar los diferentes significados de la proporcionalidad, para dicho análisis utilizaron dos niveles, uno fenómeno-antropológico y el otro ontosemiótico, con el primero buscaron describir los significados de los objetos en estudio y el segundo está dirigido a identificar la conformación de los objetos, cuando se utilizan en la solución de situaciones problemas. En este sentido, como elementos que permiten dar cuenta de la conformación de la proporcionalidad, en los planteamientos de Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone (2017), se reconocen los siguientes: problematización, definición, enunciación, argumentación, particularización-generalización, representación-significación.

De igual manera Pino - Fan, Parra - Urrea y Castro - Gordillo (2019), en la investigación que buscó analizar la representatividad de los significados pretendidos para el objeto función en el currículo chileno de matemáticas, a través de la configuración Ontosemiótica, que, según estos autores, permite describir los objetos intervinientes de significados de función tales como: elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos-definiciones, proposiciones-propiedades, procedimientos. Por tanto, se puede evidenciar que los significados de objetos matemáticos están configurados por elementos que se manifiestan o son utilizados al resolver situaciones problemas que los involucran en el proceso de solución. De manera que, las prácticas que intervengan en este proceso se asumen como significados del objeto.

A continuación, se declaran aspectos que dan cuenta de las implicaciones de la modelación matemática en el proceso de construcción de significado, cuando el contexto cumple un papel relevante en el aula.

1.2.5 El contexto en la modelación matemática un escenario para la construcción de significados

La experiencia en el aula y la experiencia en el diplomado Matemáticas en Contexto, en las que se reconoce la importancia de vincular el contexto en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, expuesta en el apartado: Una mirada al proceso de formación y a la experiencia en el aula de una maestra de Educación en Básica Primaria, generó el interés de investigar en la literatura acerca de la relación entre situaciones del contexto y la enseñanza de los números enteros.

Por tanto, en el apartado: Enseñanza de los números enteros e implicaciones del contexto, expuesto anteriormente, se citan algunas implicaciones del contexto en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, entre las que se destacan: que el contexto favorece la construcción de significados de objetos matemáticos, favorece la adquisición de conceptos matemáticos, permite relacionar los conceptos matemáticos con situaciones cercanas a sus vivencias y permite vincular los conocimientos previos con los nuevos conocimientos (Bofferding, 2014); Mejía y Gallardo (2015); Gallardo, Mejía y Saavedra, 2017; Bofferding y Wessman, 2017; Borjas 2009; Arteaga y Rivas 2014; Otero 2015 y Chica, 2011).

Por tal razón, los hallazgos encontrados en la revisión de la literatura respecto a la enseñanza y al aprendizaje de los números enteros (\mathbb{Z}), en donde se da importancia al contexto en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, favoreciendo la construcción de significados de objetos matemáticos y basándose en los planteamientos de los referentes Curriculares de Educación en Colombia, en los que se expone la modelación matemática como uno de los procesos generales de matemática, que permite relacionar las matemáticas con situaciones del contexto de los estudiantes (MEN, 1998).

Por consiguiente, la modelación matemática se perfila como escenario que posibilita vincular los conceptos matemáticos con las situaciones de la cotidianidad de los estudiantes, es decir, el contexto inmerso en la modelación matemática al permitir la relación de los objetos matemáticos con el contexto genera potencialidades que favorecen de este modo el proceso de construcción de

significados, ya que este proceso presenta particularidades que se llevan a cabo en el proceso de modelación matemática, tales como problematización, definición, enunciación, argumentación, representación, entre otras; citadas en el apartado anterior por autores como Tauber (2001); Batanero (2005); Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone (2017) y Pino - Fan, Parra - Urrea y Castro - Gordillo (2019).

Del mismo modo, en cuanto a la construcción de significados de objetos matemáticos en los apartados: Enseñanza de los números enteros e implicaciones del contexto, expuesto anteriormente y modelación matemática y contexto. Posibilidades al interior del aula, se da indicios de que vincular el contexto en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas favorece la construcción y adquisición de significados de objetos y conceptos matemáticos (Bofferding, 2014; Bofferding y Wessman, 2017 y Gallardo, Mejía y Saavedra, 2017).

Además, en el apartado citado en el párrafo anterior, se enuncian potencialidades de la modelación matemática que pueden favorecer el proceso de construcción de significados de objetos matemáticos, entre estas se destacan, que permite vincular las matemáticas con situaciones extra-matemáticas relacionadas con los intereses y necesidades de los estudiantes, que se fortalecen habilidades que permiten interpretar y comprender nociones y conceptos matemáticos, que favorece la participación de los estudiantes en aspectos como extracción de datos, producción de modelos y construcción de significados de objetos matemáticos (Bossio, 2014; Rivera-Quiroz, 2014; Martínez, Páez y García; 2013 y Muñoz, Londoño, Jaramillo y Villa-Ochoa, 2014).

Por consiguiente, en esta investigación, se tuvo en cuenta algunos planteamientos del Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2012), Godino, Batanero y Font (2019), entre otros autores. Puesto que la configuración semiótica que expone este Enfoque, está orientada a dar cuenta de elementos que constituyen los objetos matemáticos.

En correspondencia, con el interés de esta la investigación, y los hallazgos de la revisión de literatura, se plantea la necesidad de indagar por maneras en que los estudiantes pueden construir significados de números enteros en actividades de modelación matemática. Necesidad que se

declara con la intención de identificar interacciones, formas de proceder y diferentes dinámicas que se llevan a cabo en el aula, por parte de los estudiantes para la construcción de significados del concepto de números enteros (\mathbb{Z}) en relación con el contexto de los estudiantes.

1.3 Formulación del problema

Conforme se declara en los apartados anteriores, la génesis de esta propuesta de investigación se relaciona con reflexiones acerca de procesos formativos y prácticas en el aula de una docente de Educación Básica Primaria y de diálogos con docentes de Educación Básica Secundaria, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de conceptos asociados con números enteros en los primeros años de escolaridad.

Tales aspectos, permiten declarar que, a partir del estudio de los números enteros en el aula de Educación Básica Primaria, los estudiantes de este ciclo de escolaridad se les facilita identificar y simbolizar números enteros en situaciones cercanas a sus vivencias, como se explica al inicio de este Capítulo, en el apartado: Una mirada al proceso de formación y a la experiencia en el aula de una maestra de Educación en Básica Primaria. Además, se observa que, a los estudiantes de Básica Secundaria, cuando se enfrentan a situaciones que requieren solución mediante los números enteros, se les dificulta extraer datos, aplicar algoritmos e identificar los signos positivo y negativo.

En consecuencia, la construcción de significado en cuanto a la conformación del conjunto de números enteros, la identificación de los signos que los caracteriza, la relación de orden, operaciones aditivas (suma, resta), la falta de interpretación de problemas en relación con los números enteros, son algunos de los asuntos a tratar en esta propuesta de investigación, en la que se reconoce el uso del contexto en la modelación matemática, como un aspecto que favorece el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Al respecto, el Ministerio de Educación Nacional (1998) argumenta que la escuela debe proporcionar a los estudiantes situaciones que permitan construir significados a los conceptos matemáticos a partir de la experiencia en la vida cotidiana, aspecto que favorece la utilización de

la modelación matemática en el aula, vista como la relación entre el mundo real y las matemáticas (Villa Ochoa, 2007).

Por otro lado, en los planteamientos en relación con la enseñanza de los números enteros (\mathbb{Z}), de autores como Arteaga y Rivas (2014); Otero (2015); Chica (2011); entre otros, se encuentra que los estudiantes presentan dificultades al operar en el aula con estos números, puesto que los confunden y los asocian a las soluciones de situaciones problema con los números naturales, desconocen el concepto y significado de los signos positivo y negativo al momento de realizar operaciones, extraer datos y realizar procedimientos. Además, las investigaciones documentadas, dejan de manifiesto que se pueden movilizar los conocimientos y habilidades de un grado a otro en beneficio de los aprendizajes de los estudiantes (MEN, 2016).

En relación con el contexto de la modelación matemática, en investigaciones que se citan en el apartado anterior, se reconoce que este adquiere un papel relevante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, con relación a ciertas potencialidades que le son atribuidas, a saber: permite motivar e interesar a los estudiantes en la apropiación de sus saberes, favorece la interpretación y resolución de situaciones matemáticas, fortalece la participación, facilita la extracción de datos y permite la producción de modelos, aspectos que intervienen en la construcción de significados de objetos matemáticos.

En este sentido, indagar acerca de las formas en que los estudiantes construyen significados de números enteros (\mathbb{Z}) toma importancia, puesto que se pretende contribuir en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de este conjunto numérico en Educación Secundaria, desde los primeros años de escolaridad en la Educación Básica Primaria. A pesar de que en los referentes curriculares en Colombia (DBA y Estándares Básicos de Competencias) no se contempla la enseñanza de los números enteros (\mathbb{Z}) en estudiantes de Educación Básica Primaria, es necesario reconocer, de acuerdo con la literatura referenciada, las potencialidades de trabajar con los números enteros (\mathbb{Z}) en el aula, elemento que puede articularse en los primeros años de escolaridad.

Ahora bien, reconocer la importancia del contexto en la modelación matemática como mecanismo para comprender estas relaciones, permite reflexionar acerca de cómo los estudiantes de cuarto grado pueden construir significados acerca de este conjunto numérico en actividades de modelación matemática.

En este sentido, se definió la pregunta que orientó el proceso de investigación como sigue: ¿De qué maneras estudiantes de cuarto grado de Básica Primaria construyen significados de números enteros en actividades de modelación?

De esta pregunta de investigación, surge el objetivo que direccionó el proceder investigativo.

1.4 Objetivo de la investigación

Las prácticas que los estudiantes utilizan para dar cuenta de la respuesta de una situación problema que involucre objetos matemáticos para su solución, permiten la construcción de significados de dicho objeto en estudio, así lo aseguran Godino, Batanero y Font (2007) en la configuración Ontosemiótica para analizar el proceso de construcción de significado de un objeto matemático, en donde reconocen las situaciones problemas como elemento desencadenante de la acción matemática que involucra el lenguaje, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumento como elementos de significados.

En este sentido se reconoce la modelación matemática como un elemento que posibilita la construcción de significados de objetos matemáticos, puesto que permite la vinculación de situaciones de la realidad con las matemáticas escolares, Bossio (2014), Marmolejo (2018), entre otros. La necesidad de abordar el proceso de construcción de significados de números enteros (Z) apoyado en la modelación matemática, conlleva a definir el siguiente objetivo de investigación.

1.4.1 Objetivo general

A partir de la pregunta de investigación, anteriormente formulada y, teniendo que la adquisición de un concepto matemático por parte de los estudiantes se evidencia a partir de los

significados que ellos le otorguen en su proceso de aprendizaje, se formuló el siguiente objetivo de investigación:

Identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado de Básica Primaria construyen significados de números enteros en actividades de modelación.

Con la finalidad de profundizar en el proceso investigativo y tomando como referencia la experiencia en el aula, la revisión de literatura respecto a modelación matemática y el proceso de construcción de significados, en donde se reconocen potencialidades de la modelación matemática que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje y elementos que caracterizan el proceso de construcción de significado de objetos matemáticos, se consideró conveniente articular referentes conceptuales que están de acuerdo con los hallazgos encontrados en los antecedentes, de manera que los referentes teóricos y conceptuales que fundamentan el proceso investigativo se relacionen directamente con el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números enteros, la modelación matemática y el Enfoque Ontosemiótico. En el siguiente Capítulo se exponen planteamientos respecto a los referentes en mención.

Capítulo II: Referentes teóricos y conceptuales

A continuación, se exponen ideas sobre aspectos teóricos y conceptuales que soportan el proceso investigativo. En primer lugar, se presentan aspectos legales que sustentan la pertinencia de la investigación a partir de documentos directrices según la Educación Matemática en Colombia. En segundo lugar, se declaran aspectos conceptuales acerca de la modelación matemática según Barbosa (2004) y el Enfoque Ontosemiótico de Godino Batanero y Font (2012) y Godino, Batero y Font (2019).

2.1 Marco legal

En este apartado se presentan los referentes curriculares de matemáticas en Colombia, en relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje del conjunto de números enteros en Educación Básica, entre los cuales se encuentran los Lineamientos Curriculares (1998) (LC), los Estándares Básicos de Competencias (2006) (EBC), los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) (DBA) y las Mallas de Aprendizaje (2017). Esto permite presentar una postura crítica ante elementos que se declaran en estos documentos, en cuanto al nivel y grado en que se aborda el conjunto numérico de los enteros (\mathbb{Z}) en la presente investigación.

2.1.1 Números enteros en cuarto grado de Educación Básica Primaria: perspectiva del currículo de matemática en Colombia

El aprendizaje de los sistemas numéricos se reconoce por la importancia que adquiere según su aplicación en situaciones cotidianas y académicas de los estudiantes. Aspecto que se refleja en las actividades que realizan las personas en su cotidianidad, sin importar la profesión que se ejerza.

Se puede apreciar que, cada uno de los planteamientos presentados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), articula la estructura curricular de la Educación Matemática en

Colombia, brindando oportunidad para orientar procesos de enseñanza y de aprendizaje del área de la matemática en los estudiantes de educación Básica y Media.

Al respecto, son los referentes curriculares quienes rigen la estructura del qué y el cómo enseñar en esta área. Aspecto que permite identificar las diferentes temáticas o contenidos para su desarrollo en cada uno de los grados de Básica y Media. En este sentido, el estudio de los números enteros en la Educación Colombiana se sustenta a partir de los referentes curriculares.

Por tanto, en adelante se presentan algunos planteamientos y análisis en relación con la enseñanza y el aprendizaje de este conjunto numérico, según los documentos que orientan el currículo colombiano.

2.1.2 Estudio de los números enteros en el currículo colombiano

Se esboza brevemente, el estudio de los números enteros según los planteamientos de los documentos que orientan el quehacer en el proceso de enseñanza y aprendizaje en Colombia.

2.1.2.1 Lineamientos curriculares del área de matemáticas (1998)

Los Lineamientos Curriculares (1998) manifiestan que el uso de los números es necesario en la mayoría de las actividades que realizan las personas a diario, aspecto que resalta la importancia del proceso de enseñanza y aprendizaje de estos. Dicho proceso se ha transformado en diferentes propuestas curriculares presentadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), con miras a desarrollar el pensamiento numérico a partir de reflexiones pedagógicas.

En los lineamientos se reconoce que el pensamiento numérico se desarrolla a partir de los sistemas numéricos y, que este desarrollo se adquiere gradualmente y se va transformando en la medida que los estudiantes pueden resolver situaciones con números en contextos conocidos, articulados con sus intereses y necesidades. Aspecto que permite evidenciar la importancia del contexto de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números enteros.

En los planteamientos del MEN (1998) no se evidencia de manera explícita el nivel de escolaridad o conjunto de grados en los que se debe iniciar el estudio del conjunto de números enteros. No obstante, se deja de manifiesto que las orientaciones expuestas en los procesos curriculares sirven como orientación, “pero no reemplazan a los docentes en las decisiones que les corresponde tomar en asuntos como contenidos, metodologías y estrategias para la participación” (p. 7).

En consecuencia, se entiende que los docentes pueden ser autónomos al abordar los contenidos de los diferentes grados en el área de matemáticas. Al respecto, se suscita la posibilidad de abordar los números enteros a partir del cuarto grado de Educación Básica Primaria, puesto que el MEN (1998), también argumenta que las matemáticas escolares son la base para la construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados.

De acuerdo con lo planteado en el párrafo anterior, se infiere que la construcción de significado de números enteros a partir de grado cuarto de Educación Básica podría aportar al proceso de construcción del concepto formal de este conjunto numérico en los grados de Básica Secundaria.

2.1.2.2 Estándares Básicos de Competencia (EBC) de matemáticas (2006)

En los (EBC), el Ministerio de Educación Nacional organizó de forma íntegra los conceptos básicos, los procesos matemáticos y el contexto, en cinco grupos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo), con la finalidad de brindar flexibilidad en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, para que los estudiantes puedan desarrollar las competencias establecidas en los Estándares. Es así, como se propone el estudio de los números enteros a partir del grado sexto, sin embargo, el estudio de estos sistemas no se puede limitar a un grado específico de escolaridad, puesto que pueden introducirse en el transcurso de la Educación Básica y Media. De igual modo, se reconoce el desarrollo progresivo del pensamiento numérico a través del estudio de los diferentes sistemas de numeración.

En cuanto a las orientaciones que se establecen para los docentes, establecen pautas para la organización del trabajo en el aula, con la intención de promover la motivación en los estudiantes y alcanzar los niveles de competencia propuestos para cada conjunto de grado. De igual forma se pretende “(...) ir mucho más allá de lo especificado en los estándares de ese conjunto de grados” (p. 31). Por tanto, se infiere que el docente, además de las competencias que están especificadas en los (EBC) para sus grados, puede abordar conceptos básicos que se establecen para otros grados superiores o inferiores de escolaridad de acuerdo con las características de sus estudiantes y en pro de sus aprendizajes.

Desde estos planteamientos, se considera la posibilidad de iniciar con el estudio de los números enteros a partir del cuarto grado de Educación Básica, puesto que tanto en los Lineamientos Curriculares (1998) y en los (EBC) se plantean orientaciones que dejan en libertad al docente para poder movilizar el estudio de saberes que no están establecidos para su grado, en beneficio de los aprendizajes de los estudiantes

2.1.2.3 Derechos básicos de aprendizaje (DBA) de matemáticas (2016)

En los DBA, el Ministerio de Educación organiza y orienta los aprendizajes que los estudiantes deben apropiarse en cada grado. En dicha estructura, al igual que en los EBC, se evidencia que el estudio de los números enteros se propone a partir del grado sexto de Educación Básica. Sin embargo, en las orientaciones que se exponen en los DBA, al igual que en los lineamientos curriculares, se reconoce cierta flexibilidad en el estudio y los aprendizajes que se deben alcanzar en ciertos grados, puesto que se plantea la movilización de saberes de un grado a otro, en función de los aprendizajes de los estudiantes. Consideraciones que otorgan al docente la libertad para realizar este tipo de adaptaciones curriculares, como lo afirman los DBA en donde se declara que “... si bien los DBA se formulan para cada grado, el maestro puede trasladarlos de uno a otro en función de las especificidades de los procesos de aprendizajes de los estudiantes” (p. 6). Por consiguiente, se entiende que, aunque en los DBA se establecen saberes para cada grado, el docente puede dinamizarlos de un grado a otro en función de la transformación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Por tanto, se deduce que los números enteros se pueden abordar en grados anteriores al propuesto en los DBA (grado sexto de básica secundaria). Además, en algunos documentos de apoyo como las mallas de aprendizaje (2017) se muestra cierta coherencia entre los DBA de cada grado, como se evidencia en la siguiente Ilustración 1.



Ilustración 1. Relación entre DBA por grado (tomado de: Mallas de Curriculares de Matemáticas grado quinto, 2017).

En la Ilustración 1 se muestra como el Derecho Básico de Aprendizaje (DBA) de sexto grado se relaciona parcialmente con el Derecho Básico de grado quinto y con el de grado cuarto, porque no es posible inferir el hilo conductor que permita reconocer qué o cuáles procesos se deben seguir para vincularlos. Es decir, entre los tres DBA de los grados cuarto, quinto y sexto, solo se ve la coherencia en el aprendizaje relacionado con fracciones.

Aspecto, que deja abierta la posibilidad de establecer qué o cuáles deben de ser los procesos de enseñanza y aprendizaje que se deben de desarrollar en el grado cuarto de primaria para posibilitar un pertinente y eficaz alcance del DBA del grado sexto.

En esta dirección, el MEN a partir de las diferentes orientaciones curriculares presentadas en los años 1998, 2006 y 2016, ofrece recomendaciones para abordar el proceso de enseñanza y de aprendizaje de los números enteros, de las cuales se hablará de manera sucinta en el siguiente apartado.

2.1.2.4 Enseñanza y aprendizaje de los números enteros: propuesta del ministerio de educación nacional

El MEN (1998) manifiesta que la comprensión de conceptos numéricos apropiados se puede iniciar con la construcción por parte de los alumnos de los significados de los números a partir de sus experiencias en la vida cotidiana.

En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional, en los Lineamientos Curriculares (LC) plantea, de forma general, orientaciones que permiten entender el desarrollo pedagógico del país en el área de matemática, teniendo en cuenta las particularidades de cada región con miras a transformar el proceso educativo, dejando en libertad a las instituciones de diseñar el currículo según sus intereses y necesidades. En consecuencia, se puede inferir que para diseñar el currículo institucional hay que tener en cuenta las características socioculturales del entorno.

De acuerdo con lo anterior, para orientar el currículo de matemáticas, los Lineamientos en Matemáticas (LM), consideran tres aspectos fundamentales: **los procesos generales** (el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos), **los conocimientos básicos** (sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos) y **el contexto** (situaciones problemáticas), los cuales se articulan entre sí y toman al contexto como eje central de la actividad matemática favoreciendo la construcción de significados de los objetos matemáticos en estudio.

De igual forma, en los EBC se establece la misma estructura, para orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas hacia el desarrollo de competencias en los estudiantes, pero en forma más específica. También se reconoce, que el quehacer matemático

toma sentido a partir de las situaciones que se integran con la vida cotidiana de los estudiantes, dejando ver la importancia de relacionar objetos matemáticos con el entorno de los estudiantes.

En consonancia con los planteamientos anteriores, el MEN en el año 2016 después de hacer nuevas reflexiones pedagógicas, presentó la segunda versión de los Derechos Básicos de Aprendizaje, en donde estructuran los saberes en coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia. La diferencia de este documento con las versiones anteriores radica en que los Derechos Básicos plantean orientaciones para materializar el aprendizaje a partir del grado de preescolar hasta el grado once.

A partir de esta clasificación expuesta por el MEN, en los diferentes documentos curriculares, se reconoce la importancia del desarrollo del pensamiento numérico, para que la persona sea capaz de desenvolverse en la sociedad en la que está inserto, para lo cual deja de manifiesto que el proceso de enseñanza y de aprendizaje debe iniciar en la Educación Básica a partir de los conocimientos previos de los estudiantes, con el conjunto de números naturales (\mathbb{N}), luego con los números enteros (\mathbb{Z}) y después con los números racionales (\mathbb{Q}) y demás conjuntos numéricos, a partir de las situaciones problemas que estén en conexión con la vida cotidiana de los estudiantes, con las matemáticas y con otras áreas.

En este sentido, la resolución de problemas a partir de la modelación matemática según el ministerio de educación (1998), permite la articulación de las matemáticas con la realidad, vista la realidad como la situación problema que desencadena la actividad matemática. Dicha relación, favorece sintetizar y visualizar el problema de diferentes formas. Además, de otras potencialidades que se hacen presente en la modelación matemática. De esta forma se favorece la construcción de conceptos matemáticos, la interpretación de las situaciones y la elaboración de modelos que permiten comprender el problema.

Por tanto, se perfila la modelación matemática como herramienta que puede contribuir a la enseñanza y el aprendizaje de números enteros. El MEN, en los LC, la considera como la interrelación entre el mundo real y los objetos matemáticos. Además, toma al contexto como cimiento generador de actividad matemática. En acuerdo con estos planteamientos, se puede

decir que el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes con relación a los números enteros se expone cuando se inicia a partir del vínculo de situaciones cotidianas con el conjunto de los números enteros.

Por consiguiente, se reconoce la articulación de los distintos procesos generales como base de la actividad matemática de las situaciones problemas, para lo cual es vista la modelación matemática como una herramienta que permite exteriorizar la representación mental, a través de gestos, graficas, escrituras, símbolos, entre otras. Aspecto que permite entender el problema y buscar varios caminos de solución, favoreciendo el razonamiento matemático del estudiante y la construcción de significado del objeto matemático involucrado en la situación (MEN, 2006).

Por otro lado, en los EBC los números enteros se reconocen como una extensión del conjunto de los números naturales. Los números enteros los constituyen los números negativos, el cero y los números positivos. El MEN propone abordar los números enteros a partir de aspectos históricos y de situaciones en relación con su motivación y contexto sociocultural que permitan desarrollar la construcción de conocimiento y el razonamiento (LC, p. 15).

En consecuencia, se reconoce que iniciar el proceso de enseñanza y de aprendizaje de este conjunto numérico a partir de aspectos históricos y de situaciones articuladas a la motivación, intereses y necesidades del estudiante, puede favorecer el desarrollo del pensamiento numérico y la construcción de significados, ya que estos aspectos, desencadenan la actividad matemática a partir de los sistemas de prácticas que utilizan para resolver la situación (Godino, Batanero y Font, 2012).

Es evidente en este enunciado, la articulación de los procesos generales en cuanto a resolución de problemas y la modelación matemática en el desarrollo del pensamiento numérico, puesto que se presenta como la relación del contexto del problema y el procedimiento matemático para dar respuesta a la situación en cuestión.

Cabe anotar que la modelación matemática según Barbosa (2004), es vista como un método de enseñanza que se orienta al proceso de interrogar e investigar. Este proceso, según este autor, lo constituyen las situaciones problemas, la simplificación, la investigación, la resolución de la situación y la socialización de los resultados. Por tanto, la modelación matemática se puede relacionar con algunos elementos de la construcción de significados ya que este proceso de construcción de significados según Godino, Batanero y Font (2012) está constituido por las situaciones problemas, el lenguaje, los conceptos, los algoritmos, las proposiciones y los argumentos. Elementos que también pueden intervenir en el proceso de modelación matemática.

De lo anterior, se entiende que los números enteros se deben abordar a partir de situaciones problemas que tengan vínculo con las vivencias cotidianas de los estudiantes para facilitar las representaciones que puedan hacer de estos números en conexión con la situación en estudio y así poder despertar motivación y creatividad en los estudiantes hacia el proceso de construcción de significado de objetos matemáticos (en la presente investigación de números enteros).

El significado según Godino, Batanero y Font (2012) lo constituye una función semiótica conformada por un antecedente y un consecuente, visto el antecedente como la expresión que designa o representa el objeto matemático y el consecuente como el sistema de prácticas realizado por una persona para llegar al significado. En este sentido, la modelación matemática puede favorecer este proceso, puesto que la exteriorización de las representaciones mentales a través de los modelos da cuenta de las prácticas que los estudiantes utilizan en el proceso de significación.

A manera de síntesis, se reconoce en los referentes curriculares en Colombia: Lineamientos curriculares (1998), Estándares Básicos de Competencia (2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (2016)), que el estudio de los números enteros en la estructura curricular se encuentra a partir del grado sexto de Educación Básica. Sin embargo, en los tres referentes se observa la flexibilidad de esta estructura, puesto que permite al docente, según las especificidades de su contexto educativo, poder dinamizar los aprendizajes de un grado a otro, en busca de mejorar los saberes de los estudiantes.

Respecto al cómo enseñar los números enteros, en los referentes se reconoce que se debe abordar a partir del reconocimiento histórico y de situaciones de diferente contexto que permitan desencadenar la actividad matemática y por tanto la construcción de significado de dichos conjuntos de números, puesto que el actuar matemático en la solución de la situación dará cuenta de los sistemas de prácticas utilizados por los estudiantes.

Por tanto, se plantea la modelación matemática como escenario para identificar las formas en que los estudiantes construyen significados de números enteros, ya que esta presenta características que permiten relacionar los objetos matemáticos y el contexto de los estudiantes. Además, posee ciertas potencialidades que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje. En el siguiente apartado se exponen postulados mediante los cuales se sustenta el proceso investigativo.

2.2 Marco teórico

Los referentes teóricos que sustentaron la propuesta de investigación se relacionan con la modelación matemática, la construcción de significados de objetos matemáticos y la relación entre modelación matemática y construcción de significados. Aspectos, que se describen en los siguientes párrafos, teniendo en cuenta los planteamientos de algunos autores, cuyas ideas permiten caracterizar la modelación matemática y el proceso de construcción de significados.

2.2.1 Potencialidades de la modelación matemática al interior del aula

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), manifiesta que la modelación matemática se presenta a través de la relación entre el mundo real y las matemáticas. En estos referentes curriculares se asume la modelación matemática como un proceso que permite a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar situaciones reales o imaginarias que se pueden vincular con la cotidianidad, las ciencias y las matemáticas mismas y de esta manera construir conceptos en forma significativa.

En esta misma dirección, se reconoce en los planteamientos de Kaiser y Sriraman (2006) que en algunas formas de implementar la modelación matemática en el aula se pueden tratar temas extra-matemáticos y temas matemáticos, considerados estos últimos como modelos intra-matemáticos. Aspecto, que deja inferir que toda actividad matemática se puede modelar y que la modelación matemática no se restringe a realizar modelos de situaciones extramatemáticas sino que también, se pueden modelar situaciones propias del área.

Así mismo, Trigueros (2009) plantea que el uso de la modelación matemática en el aula se manifiesta de diferentes formas, dependiendo de la perspectiva en que se mire la didáctica y de los propósitos que se pretendan con la actividad de modelación. Además, declara que la modelación matemática puede asumirse como proceso que permite promover y estructurar la enseñanza y el aprendizaje, al igual que introducir y desarrollar nuevos conceptos matemáticos. En los planteamientos de Trigueros (2009), se reconoce que toda actividad matemática se puede considerar como modelación matemática, en las que vinculan situaciones extra-matemáticas e intra-matemática, haciendo énfasis en el desarrollo del proceso de estudio.

De los anteriores planteamientos, se entiende que la modelación matemática puede implementarse en el aula a partir de situaciones intra-matemáticas o extra-matemáticas dependiendo de lo que se quiera lograr con los estudiantes. Además, se reconocen ciertas características que posibilitan el aprendizaje de conceptos matemáticos a través de los cuales, se puede interpretar y comprender situaciones de diferentes contextos.

Por otro lado, Carvalho (2011) plantea que la modelación matemática “puede ser entendida como una forma de asumir el currículo, en la cual, el estudiante juega un papel protagónico en la elección del tema de interés” (p. 3). Ya que, el interés que muestren los estudiantes por situaciones de su entorno, en relación con las matemáticas, fortalece la enseñanza y el aprendizaje de esta área, puesto que, relaciona los conocimientos socioculturales con los saberes matemáticos (Bossio 2014).

De igual forma, Bassanezi y Biembengut (1997), manifiestan que la modelación matemática es vista como “(...) método de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de modelación en

cursos regulares” (p. 2). Este proceso utiliza técnicas y conceptos matemáticos para el análisis de situaciones reales, donde los estudiantes escogen el tema que más les interese, circunstancia que los hace sentir corresponsables de su aprendizaje y los motiva al conocimiento de nuevos conceptos matemáticos.

De igual forma, Bassanezi y Biembengut (1997), manifiestan que la modelación matemática es vista como “(...) método de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de modelación en cursos regulares” (p. 2). Este proceso utiliza técnicas y conceptos matemáticos para el análisis de situaciones reales, donde los estudiantes escogen el tema que más les interese, circunstancia que los hace sentir corresponsables de su aprendizaje y los motiva al conocimiento de nuevos conceptos matemáticos.

De acuerdo con lo anterior, se puede interpretar que al vincular la modelación matemática en los procesos de enseñanza y de aprendizaje se perciben aspectos que favorecen este proceso, como se pueden reconocer en los planteamientos de Biembengut y Hein (2004), en los que se evidencia que la modelación matemática, favorece el desarrollo de habilidades en los estudiantes tales como: leer, interpretar, formular y resolver situaciones problemas; potencialidades que se pueden reconocer como coadyuvante de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

En las ideas de los anteriores autores, se reconoce que implementar la modelación matemática como método de enseñanza, permite preguntas relacionadas con un tema que se busca resolver. Además, se identifican distintas maneras de llevar la modelación matemática en el aula, entre las cuales se resaltan dos de ellas. La primera, permite al docente desarrollar el contenido programático, a partir de pasos o etapas en las que el profesor junto con el estudiante debe realizar ciertas actividades que permitan llegar a la solución de una situación, de forma que el estudiante construya significados del concepto tratado. Y la segunda, se implementa como orientación para que los estudiantes hagan un trabajo de modelación, siendo ellos los encargados de desarrollar todo el proceso.

Por su parte, Villa Ochoa (2014) argumenta que la modelación matemática, a partir de las situaciones en contexto, permite al docente reconocer ideas previas y propicia en los estudiantes

procesos matemáticos, que los conllevan a producir matemática, es decir que la modelación matemática más que motivar a los estudiantes también se convierte en una manera de dar significados a conceptos matemáticos. Así mismo, Parra Zapata (2015) plantea que la modelación matemática en el aula permite al docente dotarse de estrategias que favorecen en los estudiantes el avance en la construcción de conceptos matemáticos, a través de la exploración, el análisis, la comprensión y la contextualización.

Por consiguiente, la modelación matemática se entiende como herramienta que posibilita la construcción de significados de objetos matemáticos que, al relacionarse con los contextos auténticos, permite que los estudiantes formulen y propongan soluciones a situaciones que mejoren su entorno, Rivero, Londoño y Jaramillo (2016).

La modelación matemática según Aymerich, Gorgorió y Albarracín (2017) es entendida como la creación de estructuras o sistemas complejos creados sobre la base de ciclos de interacción, la cual genera en el estudiante motivación para enfrentarse a situaciones problemas relacionadas con el mundo cotidiano.

En la Tabla 2 se presentan las potencialidades que caracterizan la modelación matemática y pueden intervenir en la construcción de significados de objetos matemáticos cuando esta se implementa en el aula.

Tabla 2. *Potencialidades que caracterizan la modelación.*

| Autores | Potencialidades de la modelación en la construcción de significados |
|------------------------|---|
| MEN (1998), MEN (2006) | Permite observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. |
| Trigueros (2009) | Permite describir y analizar el mundo. |
| Carvalho (2011) | Fortalece la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. |
| Bossio (2014) | Relaciona los conocimientos socioculturales con los saberes matemáticos. |
| Bassanezi y | Hace a los estudiantes corresponsables de sus aprendizajes y los motiva al |
| Biembengut (1997) | conocimiento de un nuevo concepto matemático. |

| | |
|--|--|
| Biembengut y Hein. (2004) | Favorece el desarrollo de habilidades en los estudiantes tales como: leer, interpretar, formular y resolver situaciones problemas conllevando a la construcción de significado de un nuevo concepto. |
| Villa Ochoa (2014) | Permite al docente identificar ideas previas. Se convierte en una manera de dar significado a conceptos matemáticos. |
| Parra Zapata (2015) | Dota al docente de estrategias que generan en los estudiantes la construcción de conceptos matemáticos. |
| Rivero, Londoño y Jaramillo, 2016 | Permite que los estudiantes formulen y propongan soluciones a situaciones que mejoren su entorno. |
| Aymerich, Gorgorió y Albarracín (2017) | Genera en el estudiante motivación para enfrentarse a situaciones problemas relacionados con el mundo cotidiano. |
| Barbosa (2006, 2009) | Permite a los estudiantes aplicar conceptos matemáticos y desarrollar habilidades que pueden utilizarse en la construcción de modelos matemáticos. |

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 2, distintos autores reconocen las potencialidades que presenta la modelación matemática cuando es implementada en el aula, como proceso de problematización e investigación, las cuales pueden favorecer la construcción de significados de objetos matemáticos. No obstante, las anteriores características de la modelación matemática son imprevisibles en el proceso de construcción de significados de objetos matemáticos.

2.2.1.1 Particularidades de la modelación matemática que favorecen el proceso de construcción de significados de objetos matemáticos

Palharini, Tortola y Werle (2017) se refieren a la modelación matemática como un vehículo para enseñar matemáticas, proceso que según estos autores se da a través de diferentes juegos del lenguaje. Además, argumentan que las actividades de modelación mejoran el aprendizaje de conceptos matemáticos, favorece la producción de procedimientos específicos del área y la utilización en otras asignaturas. En consecuencia, se infiere que la modelación matemática está dotada de características que favorecen los procesos de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos. Por tanto, se puede establecer que presenta particularidades que contribuyen con la construcción de significados de conceptos matemáticos.

Barbosa (2004) plantea que la modelación matemática, en términos generales, es considerada como la forma en que se utilizan las matemáticas en otras áreas del conocimiento. Sin embargo, para él, es una limitación ya que considera la modelación matemática como casi un todo.

Describe la modelación matemática como un ambiente o actividad de aprendizaje en donde tiene lugar la problematización y la investigación de problemas.

En este sentido, la modelación matemática como actividad o ambiente de aprendizaje, permite a los estudiantes aplicar conceptos matemáticos y desarrollar habilidades que pueden utilizarse en la construcción de modelos matemáticos que describen situaciones procedentes de contextos intra-matemáticos y extra-matemáticos. Además, según este autor las actividades de modelación favorecen la motivación, facilita el aprendizaje y propician el desarrollo de habilidades para comprender el papel sociocultural de las matemáticas.

Al implementar la modelación matemática, Barbosa (2004), reconoce tres (3) casos a partir de los cuales, el profesor puede orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje al interior del aula. En cada caso, se pueden identificar tareas diferentes para el profesor y los estudiantes; puesto que todos son participantes activos del proceso de modelación.

El primer caso, parte de situaciones reales cercanas a las vivencias de los estudiantes, el cual debe resolverlas a partir de la exploración de dicha situación; el docente se encarga de formular el problema, recolectar los datos y simplificar la información. En el segundo caso, el docente enuncia el problema y los estudiantes tienen la tarea de simplificarlo, realizar la indagación para luego resolverlo y en el tercer caso, las tareas que constituyen las actividades de modelación son compartidas entre estudiantes y docente, mediante el desarrollo de proyectos procedentes de situaciones en contextos extra-matemáticos.

Según los planteamientos de Barbosa (2004) se reconocen ciertos momentos en las actividades de modelación, los cuales son: formulación del problema, simplificación, recolección de datos, solución del problema y socialización de resultados. Estos momentos constituyen el proceso de problematización e investigación que plantea este autor.

En coherencia con las ideas anteriores, en la presente investigación, la modelación matemática se entiende como método de enseñanza que involucra proceso de problematización e investigación, en donde los estudiantes a partir de sus intereses y necesidades pueden indagar por situaciones procedentes de contextos extra-matemáticos e intra-matemáticos, y describirlas a partir de modelos matemáticos.

Por tanto, en este estudio, se orienta la investigación, a partir de los tres casos presentados por Barbosa (2004). Puesto que se trabaja con estudiantes de Básica Primaria, estos casos, posibilitan la intervención del profesor en el proceso de problematización e investigación, circunstancia que permite dirigir el proceso de modelación, conllevando a que los estudiantes, mediante las prácticas utilizadas, en este proceso puedan construir significados del objeto matemático involucrado en la situación, en este caso, de los números enteros (\mathbb{Z}).

En consecuencia, con el propósito de visualizar y entender el proceso de construcción de significados, en el siguiente apartado, se exponen planteamientos de algunos autores que muestran elementos y características de este proceso.

2.2.2 Construcción de significados de objetos matemáticos

En este apartado, se describen aspectos en relación con las características, conformación y clasificación de los significados de objetos matemáticos, según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2012) y Godino, Batanero y Font (2019).

2.2.2.1 Caracterización de significados institucionales y personales

En el enfoque ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019) (EOS) se reconoce la construcción de significados, como un proceso relacional y progresivo a partir del acoplamiento

entre los significados personales con los significados institucionales, mediante la participación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos.

Estos autores, asumen los significados personales como el conjunto de prácticas que una persona (estudiante) utiliza para resolver problemas. Por otro lado, en sus planteamientos se reconoce la clasificación de los significados personales, de manera que se identifican tres tipos de significados: globales, declarados y logrados.

Los significados globales, se relacionan con todas las prácticas, que es capaz la persona de demostrar o mostrar con respecto a un objeto matemático. Los significados declarados son el sistema de prácticas que los estudiantes manifiestan en relación a la evaluación, estos pueden ser correctos o incorrectos. Y los significados logrados, se vinculan con las prácticas expresadas en correspondencia con los patrones institucionales, respecto al objeto en estudio.

Los significados institucionales hacen referencia a prácticas realizadas al interior de una institución (comité de matemáticos) que se dirigen a resolver ciertos campos de problemas y se consideran como adecuadas o verdaderas. Godino, Batanero y Font (2019), los clasifican en significado implementado, evaluado, pretendido y referencial.

En este sentido, el significado implementado, se refiere a la totalidad de prácticas que el docente implementa para llevar a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje. El significado evaluado, tiene que ver con las prácticas inmersas en el significado implementado que dan cuenta de los aprendizajes. Y el significado pretendido, da cuenta de prácticas incluidas en el plan de estudios y el referencial son los sistemas de prácticas que se tienen en cuenta para construir el significado pretendido.

De este modo, se percibe que la construcción de significado de un objeto matemático es progresiva, iniciando por el significado personal del individuo que se puede vincular con los conocimientos que construye a partir de las prácticas socioculturales vivenciadas en su comunidad, hasta llegar al significado institucional, después de realizar una serie de prácticas a nivel personal y colectivo.

Estas clasificaciones dejan en evidencia los aspectos relacional y progresivo, del proceso de construcción de significados, a medida en que los significados personales se van acoplando con los significados institucionales de forma gradual. Es decir, a partir del significado global (conocimientos previos) se llega al significado implementado, el cual da paso al significado declarado que se relaciona con el significado evaluado, dando paso al significado logrado a partir del significado pretendido, para poder llegar al significado referencial y de esta manera se habrá construido significado personal logrado, en vínculo con el significado referencial institucional de un objeto matemático, como se muestra en la siguiente imagen.



Ilustración 2. Tipos de significados personales e institucionales. (Tomada de Godino, Batanero y Font, 2012).

2.2.2.2 Configuración Ontosemiótica de los objetos matemáticos

En el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de Godino (1994); Godino, Batanero y Font (2007); Godino, Batanero y Font (2012); Godino, Batanero y Font (2019), el proceso de significación en matemáticas se declara a partir de una función semiótica constituida por un antecedente (significante) el cual, se considera como el objeto matemático o la palabra que lo distingue o identifica, y el consecuente (significado) que se describe como el sistema de prácticas.

Es decir, el conjunto de signos que un individuo utiliza para resolver ciertos problemas, como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.), donde se tiene en cuenta, especialmente, los sistemas de prácticas discursivas y operativas utilizadas por las personas al enfrentarse a situaciones problemas (Godino, Batanero y Font, 2019). De esta forma, se reconoce como práctica a todos los procedimientos, signos, símbolos y representaciones que se hacen presente al resolver una situación problema.

En cuanto a los objetos en este enfoque emergen de los sistemas de prácticas que se utilizan para resolver problemas, a medida que aumenta la experiencia y el aprendizaje, los objetos matemáticos (conceptos, atributos, definiciones, números enteros) se van transformando. Al respecto, Godino (2002); Godino (2003); Godino (2017), considera los objetos matemáticos como sistemas de prácticas que realiza una persona para resolver cierto tipo de problemas.

Así mismo, en los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019) se identifica que los objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier idea que emerja o intervenga de alguna manera en la actividad matemática, dichas ideas pueden ser reales, imaginarias o de cualquier otra forma.

En este sentido, la construcción de significado de un objeto matemático según Batanero, Godino y Font (2007), Godino, Batanero y Font (2012), Godino, Batanero y Font (2019) la constituyen prácticas operativas que se manifiestan a través de objetos ostensivos tales como gráficas, diagramas, dibujos, algoritmos, procedimientos, conceptos, proposiciones, argumentos, definiciones utilizados para dar solución a una situación problemática.

En la Tabla 3 se muestran los elementos intervinientes en el proceso de construcción de significados a partir de prácticas utilizadas para resolver ciertos tipos de problemas.

Tabla 3. *Elementos intervinientes en la construcción de significado.*

| Prácticas operativas | Prácticas discursivas |
|----------------------|-----------------------|
| Procedimientos | Conceptos |
| Algoritmos | Definiciones |
| Graficas | Argumentos |
| Dibujos | Gestos |

Fuente: elaboración propia

Estos elementos se pueden vincular con situaciones problemas que desencadenan los elementos constituyentes de significados de objetos matemáticos. Puesto que las situaciones problemas (contexto) son el pilar de la actividad matemática, ya que motiva el surgimiento de elementos que caracterizan un objeto matemático y favorece la construcción de sus significados.

Los procedimientos y algoritmos se pueden interpretar como las operaciones, cálculos y demás prácticas algorítmicas o representacionales que se utilizan al resolver la situación inicial, mientras que las propiedades y conceptos se pueden entender como las descripciones del objeto matemático en cuestión. Asimismo, las proposiciones son entendidas como enunciados sobre los conceptos y, por último, los argumentos y explicaciones se refieren a la justificación de los procedimientos y proposiciones.

De acuerdo con lo anterior, en este estudio se reconocen como elementos constituyentes de significados prácticas operativas que se manifiestan a partir de objetos ostensivos, y prácticas discursivas que se expresan mediante objetos no ostensivos. En estas prácticas, se encuentran inmersos los elementos descritos en el párrafo anterior, según los planteamientos expuestos por Godino, Batanero y Font (2007); Godino, Batanero y Font (2012); Godino, Batanero y Font (2019).

Los elementos que constituyen el significado desde una configuración del Enfoque Ontosemiótico, permiten reconocer una trayectoria cognitiva (situaciones problemas, lenguaje, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos) que se caracteriza por procesos matemáticos de tipo personal que dan cuenta del aprendizaje construido por el estudiante.

De esta configuración hacen parte la trayectoria epistémica, referente a las prácticas institucionales que hacen posible la realización de la actividad matemática y, la trayectoria instruccional, que se describe como las prácticas realizadas por el docente, por los estudiantes y la relación de la interacción que se da entre los actores involucrados en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, en donde también se tienen en cuenta los materiales y recursos que apoyan el proceso de instrucción. Por tanto, se entiende que estas tres trayectorias (epistémica,

instruccionales y cognitiva) van articuladas para que pueda haber un proceso de construcción de significados y los estudiantes puedan llegar a la construcción de significados personales acoplados a los institucionales de un objeto matemático de forma eficaz.

2.3.2.3 Construcción de significados de números enteros

En correspondencia con los planteamientos que dan cuenta del proceso de construcción de significados desde el Enfoque Ontosemiótico, se reconoce que los significados de los números enteros (\mathbb{Z}) se pueden construir, a partir de las situaciones problemas, de los sistemas de prácticas y procedimientos que el estudiante utilice para su solución. También, intervienen los elementos y estrategias que el docente utilice para dar la instrucción y las relaciones interpersonales que se den dentro del aula entre estudiantes - docentes y estudiantes y estudiantes (Godino, Batanero y Font, 2019).

Dicho de otra manera, el proceso de construcción de significado se da a través de la participación en prácticas operativas y discursivas suscitadas al enfrentarse a la solución de situaciones problémicas. Dichas prácticas se manifiestan, mediante objetos ostensivos y no ostensivos, que se hacen presente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en forma individual (significado personal) y colectiva (significado institucional), conllevando al acoplamiento de los significados personales con los significados institucionales y de esta manera lograr la apropiación de los aprendizajes acerca de objetos matemáticos (números enteros).

En el proceso de construcción de significado expuesto en este apartado lo desencadenan las diferentes prácticas que realizan las personas ante ciertos tipos de problemas, puesto que para el Enfoque Ontosemiótico (EOS) las situaciones problemas (contexto) son el pilar de la actividad matemática, al igual que en la modelación matemática el contexto es de gran importancia en el proceso de modelación.

Por tanto, en el siguiente apartado, se esboza brevemente la relación entre modelación matemática y construcción de significados que se puede establecer a partir de la revisión de literatura en esta investigación.

2.3.3 Relación entre modelación matemática y construcción de significados

En apartados anteriores, se habla de las potencialidades de la modelación matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tales como: que favorece la interpretación de problemas, la extracción de datos, la elaboración de modelos favorece la participación, entre otras; no obstante, estas potencialidades son imprevisibles en el proceso de construcción de significados.

A pesar de esta limitante, se puede establecer que al elaborar modelos se desarrollan referentes de los objetos en estudios, a través del uso de sistemas de signos y símbolos psicológicos y representaciones que incluyen dibujos, mapas, cuadrículas, lenguaje hablado y escrito, lenguaje figurativo y símbolos matemáticos, puesto que la elaboración de modelos permite transferir imágenes internas creadas en la mente del estudiante a imágenes externas que luego pueden ser analizadas y reflexionadas con sus compañeros (Kotze, Jacobs y Spangenberg, 2017).

Por tanto, se puede argumentar que la elaboración de modelos matemáticos posibilita la construcción de significados, puesto que al exteriorizar las imágenes mentales se representan los significados construidos, como lo plantean Godino, Batanero y Font (2019), las prácticas operativas se manifiestan mediante objetos no ostensivos y permiten exteriorizar los significados personales e institucionales.

En efecto, se entiende que, en el desarrollo de las actividades de modelación, se articula el uso de diferentes signos, símbolos y representaciones, puesto que los estudiantes se enfrentan y hacen uso de diferentes prácticas y signos (verbales y no verbales, iconos, símbolos, entre otros) que proporcionan interiorizar su conocimiento acerca del objeto matemático involucrado en la situación a modelar (Scott, Wessels y Swart, 2017).

En los planteamientos de los anteriores autores se reconoce, la relación entre modelación matemática y construcción de significado, ya que, según el EOS, los significados se construyen a partir de los sistemas de prácticas operativas y discursivas. Dichas prácticas se relacionan

directamente con los modelos elaborados por los estudiantes en las actividades de modelación según los planteamientos de Scott, Wessels y Swart, (2017), expuestos en el párrafo anterior. Por consiguiente, en esta investigación se asumen las representaciones ostensivas y no ostensivas que realizan los estudiantes en el desarrollo de las actividades de modelación, como modelos que permitirán dar respuesta o solución a la situación problemática que genera la acción matemática.

De manera que, en esta investigación, los planteamientos de Kotze, Jacobs y Spangenberg (2017) y Scott, Wessels y Swart (2017), se interpretan como la relación existente entre modelación matemática y construcción de significado, ya que las prácticas, representaciones, sistemas de signos y símbolos utilizados en la realización de modelos matemáticos intervienen en la construcción de significado desencadenados estos modelos a partir de una situación problema inicial.

En este sentido, el Enfoque Ontosemiótico expuesto por Godino y Batanero (1994); Godino (2003); Batanero (2005); Godino, Batanero y Font (2007); Godino, Batanero y Font (2012) y Godino, Batanero y Font (2019), considera los símbolos, graficas, iconos, entre otros, como elementos lingüísticos; las prácticas y sistemas de signos se consideran como todos los procedimientos, proposiciones, conceptos y argumentos que se pueden utilizar para resolver situaciones problemas.

Por tanto, se deduce que en el Enfoque Ontosemiótico como en la modelación matemática, las situaciones problemáticas son las desencadenantes de la acción matemática y facilitan las prácticas ostensivas y no ostensivas, vistas estas como modelos matemáticos. En la siguiente ilustración se muestra la relación entre modelación matemática y construcción de significados.

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

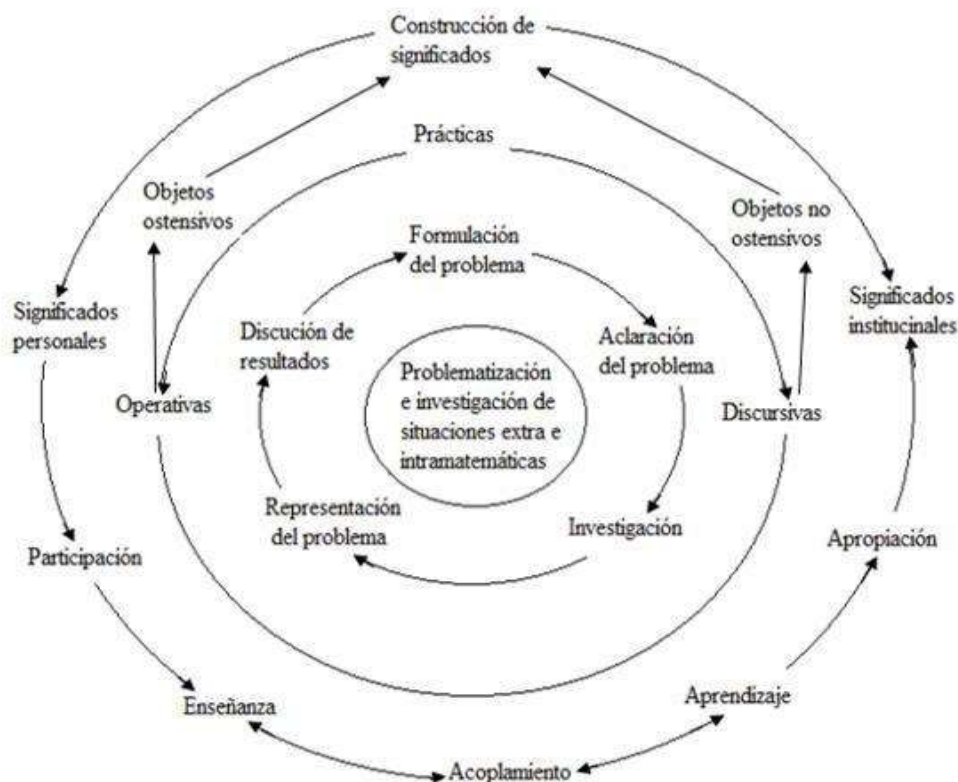


Ilustración 3. Construcción de significado en modelación matemática (elaboración propia)

En el diagrama anterior se muestra, que la modelación matemática y la construcción de significados de objetos matemáticos se pueden articular, puesto que los elementos que los conforman se complementan, de manera que al involucrar la modelación matemática en los procesos de enseñanza de objetos matemáticos se favorece la construcción de significados de estos.

Por tanto, en esta investigación, al hablar de significado en modelación matemática, se parte del hecho de considerar la modelación matemática como un proceso de problematización e investigación, en donde se indagan por situaciones extra-matemáticas e intra-matemáticas. Este proceso lo constituyen varios aspectos como son la formulación del problema, aclaración del problema, la investigación, la representación y la discusión de resultados.

En este proceso se reconoce que en cada uno de sus componentes se identifica cierto tipo de prácticas. Las cuales, atienden a prácticas discursivas y prácticas operativas, en cuanto a las prácticas discursivas se relaciona con aspectos declarados en el Enfoque Ontosemiótico como objetos no ostensivos, los cuales dan cuenta de argumentos, proposiciones, justificaciones, conceptos, entre otros. Por otro lado, encontramos que las prácticas operativas están vinculadas con objetos ostensivos, los cuales dan cuenta de representaciones gráficas, dibujos, diagramas, algoritmos, entre otros.

Estas prácticas exteriorizan la construcción de significados, los cuales se clasifican según el Enfoque Ontosemiótico en significados personales y significados institucionales. Estos significados se hacen presente cuando hay un proceso de acoplamiento, en el cual media la participación en el proceso de enseñanza y aprendizaje, permitiendo la apropiación de los significados. Aspecto, que da cuenta del acoplamiento entre los significados personales e institucionales.

A partir de los argumentos anteriores, se deja de manifiesto que la modelación matemática está configurada con elementos que favorecen la construcción de significados de objetos matemáticos, aspectos que pueden contribuir a alcanzar el objetivo propuesto para este estudio, el mismo que busca identificar formas en que los estudiantes construyen significados de números enteros (\mathbb{Z}) a partir de actividades de modelación matemática. Por tanto, en el siguiente apartado se presenta la ruta metodológica que siguió la presente investigación.

Capítulo III: Diseño metodológico

En este apartado se presentan aspectos que constituyen el diseño metodológico, los cuales orientaron el proceder investigativo, es decir: enfoque, método, descripción del ambiente institucional y de investigación, fases del trabajo de campo, participantes e instrumentos de recolección de la información.

El diseño metodológico estableció el direccionamiento de la investigación, permitió definir cómo realizar el estudio al establecer una ruta para cumplir el objetivo propuesto, y dar cuenta del método, las fases de intervención, los instrumentos, los participantes, el proceso de análisis y la manera como el investigador asume y construye el conocimiento (Borba & Araújo, 2004). En este sentido, en los siguientes apartados se establece la ruta que conlleva a identificar las posibles maneras en que estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria construyen significados de números enteros (\mathbb{Z}).

3.1 Enfoque

Esta propuesta de investigación se realizó bajo el enfoque cualitativo sustentado por Hernández, Fernández y Baptista (2010), quienes plantean que “la investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto” (p. 364).

En esta dirección, asumir la investigación desde el enfoque cualitativo permitió estudiar a los participantes, a partir de las formas de proceder, de las dinámicas de interacción comunicativa y de las maneras como comparten sus ideas al interior del aula, cuando se enfrentan al desarrollo de actividades con números enteros (\mathbb{Z}) en situaciones intra-matemáticas y extra-matemáticas, procedentes de sus necesidades e intereses, con la compañía y orientación de la docente investigadora.

3.2 Método

En esta investigación se adoptó el método de estudio de casos. Según Stake (1999), el estudio de casos se describe como “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 8). La utilización de este método posibilitó la intervención del investigador en el desarrollo del estudio y facilitó la comprensión y análisis de las actividades desarrolladas por los estudiantes. Desde la perspectiva de este autor, el estudio de casos se clasifica en tres tipos de estudio: estudio intrínseco, estudio instrumental y estudio colectivo de casos.

En lo referente al estudio intrínseco de casos, se entiende como algo que está inserto en el aula y no requiere intervención. Por otro lado, el estudio colectivo de casos se encuentra inmerso en el estudio instrumental, pero se estudian varios participantes o instituciones de forma individualizada.

Desde la perspectiva de Stake (1999), en el estudio del caso instrumental, el caso no viene dado. Este método de estudio, en particular, se usa como instrumento para comprender la vida de los participantes, cuando se incorporan aspectos nuevos, es decir, se introduce en el aula el estudio de otro caso. Por ejemplo, investigar cómo estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria construye significados de números enteros (\mathbb{Z}) en actividades de modelación, son aspectos externos que se introducen en la vida de los participantes a partir de contenidos curriculares para el área de Matemáticas.

Dichos aspectos, originan el caso y permiten su estudio. Por consiguiente, esta investigación se interesa en atender un estudio de caso instrumental, con lo cual, se pretende identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria construyen significados de números enteros (\mathbb{Z}) en el desarrollo de actividades de modelación.

3.3 Escenario y participantes de la investigación

La investigación se desarrolló en el Centro Educativo Rural el Zumbido, una Institución Educativa del municipio de San Pedro de Urabá, ubicada en zona de difícil acceso a ocho (8) kilómetros del casco urbano. La institución es de carácter público, tiene (3) sedes en donde se ofrece educación en los niveles de escolaridad de preescolar a octavo, cuenta con 156 estudiantes, siete docentes y un director rural. En la siguiente ilustración se observa la ubicación geográfica de la institución donde se realizó la investigación.



Ilustración 4. Ubicación del Centro Educativo Rural el Zumbido (tomado de google map)

El Centro Educativo Rural el Zumbido, es una institución de carácter oficial mixto, aprobado por resolución 08319 del 09 de mayo de 2008, resolución 7624 del 16 de abril de 2009, y en la fecha funciona con resolución 201500095347 del 20 de marzo de 2015. En este plantel, los procesos de enseñanza y aprendizajes son orientados bajo los parámetros del modelo pedagógico constructivista, la metodología que se utiliza es Escuela Nueva en educación primaria y pos primaria de sexto a octavo. Los estudiantes pertenecientes a dicho Centro Educativo son provenientes de veredas aledañas, algunos de los estudiantes viven en la vereda donde se ubica el Establecimiento Educativo.

Los participantes de la investigación fueron una maestra investigadora y tres estudiantes, dos (2) de cuarto grado de Básica Primaria y un (1) un estudiante de tercer grado de este mismo nivel educativo, con edades que oscilan entre los 8 y 11 años.

La elección de los estudiantes se realizó a partir de una razón circunstancial, la cual consistió en que, como maestra mono-docente, en la metodología Escuela Nueva se contaba con estos estudiantes en grado cuarto. Además, del criterio anterior, se tuvo en cuenta el interés, la motivación y la curiosidad, de estos estudiantes por el área de matemáticas. Es decir, las aptitudes matemáticas, ya que se realizó una prueba diagnóstica a los estudiantes de tercero y cuarto grado, los tres estudiantes seleccionados obtuvieron los mejores resultados, incluyendo el de tercer grado. Otro criterio fue la disponibilidad de tiempo para la implementación de la investigación y el consentimiento de los padres y de los estudiantes para participar en el proceso investigativo.

De acuerdo con el problema y el objetivo de investigación, se considera que estos criterios son elementos que permiten que las actividades en el aula se desarrollen de una manera en la que el estudiante pueda trabajar de forma conjunta con sus compañeros atendiendo, las orientaciones de la maestra, que es un aspecto fundamental en la construcción de significados de números enteros (\mathbb{Z}).

3.4 Herramientas para la producción de los registros

Los instrumentos de recolección de información previstos para esta investigación son: la observación, la entrevista semiestructurada y documentos escritos.

3.4.1 Observación

Según Stake (1999) “Las observaciones conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso” (p. 57). Se entiende, que la observación permite interpretar en profundidad el fenómeno a estudiar. Es decir, permitió ver en detalle las interacciones o prácticas que utilizaron los estudiantes para dar respuesta a las actividades de modelación.

Los sistemas de prácticas que el estudiante utilizó para resolver problemas son considerados por Godino y Batanero (1994); Godino (2003); Batanero (2005); Godino, Batanero y Font (2007) como constituyentes de construcción de significado de objetos matemáticos.

Por tanto, las observaciones en esta investigación se orientaron a recolectar información a partir de prácticas, procedimientos, elementos, hechos relevantes, representaciones y mecanismos que los estudiantes utilizaron para compartir y manifestar sus ideas en el desarrollo de las actividades de modelación.

3.4.2 Entrevista semiestructurada

Según Stake (1999), la entrevista semiestructurada “es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples.” (p. 60). Este instrumento de recolección posibilitó obtener información acerca de cómo los estudiantes, al relacionar situaciones del contexto con los números enteros (\mathbb{Z}) en las actividades de modelación, construyen sus significados a partir de interacciones o prácticas (cómo se comunican, argumentan, expresan sus ideas, sus representaciones, sus explicaciones).

La entrevista semiestructurada dio cuenta del lenguaje utilizado por los estudiantes y los mecanismos que permitieron compartir sus ideas en el desarrollo de las actividades de modelación. Al respecto en los planteamientos de Palharini, Tórtola y Werle (2017) y Gallart, Ferrando, García, Albarracín y Gorgorió (2017) manifiestan que la modelación matemática favorece el lenguaje matemático, uno de los principales elementos que constituyen la construcción de significados de objetos matemáticos según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019). Por tanto, el lenguaje matemático se reconoce como elemento que puede relacionar la modelación matemática con la construcción de significado de números enteros (\mathbb{Z}). Esta relación permitió comprender las diferentes maneras de darle uso y aplicación a este conjunto numérico.

3.4.3. Los documentos escritos

Stake (1999) plantea que los documentos escritos “sirven como sustitutos de registros de actividades que el investigador no puede observar directamente” (p. 63). Son pertinentes porque mediante estos se observaron los modelos que los estudiantes construyeron a partir de las situaciones intra-matemáticas y extra-matemáticas.

Estos modelos, según Kotze, Jacobs y Spangenberg (2017) permiten la transmisión de representaciones internas en representaciones externas, es decir, en el proceso de modelación matemática intervienen prácticas, signos, símbolos y representaciones que posibilitan la interiorización del conocimiento (Scott, Wessels y Swart, 2017).

Aspectos que según Godino, Batanero y Font (2007), Godino, Batanero y Font (2012), Godino, Batanero y Font (2019) intervienen en la construcción de significados de objetos matemáticos. Por tanto, con los documentos escritos en este estudio se identificaron símbolos, graficas, algoritmos, herramientas y demás procedimientos que los estudiantes utilizaron en el desarrollo de las actividades de modelación matemática que permitieron evidenciar maneras en que construyeron significados de números enteros (\mathbb{Z}).

3.5 Instrumentos de recolección de información

En este apartado se presenta el diseño de las actividades que permitieron recolectar información para el logro del objetivo investigativo, iniciando con un Pretest (prueba diagnóstica) que permitió identificar los conocimientos previos que tienen los estudiantes acerca de números enteros (\mathbb{Z}). Se continúa con el diseño y análisis de las actividades de modelación según los planteamientos de Barbosa (2004), y por último se exponen aspectos en relación con un Posttest que permitió comparar los significados iniciales con los significados que construyeron los estudiantes durante el desarrollo de las actividades de modelación.

Es necesario reconocer que los instrumentos de recolección de información se diseñaron de manera paulatina, a medida que el proceso investigativo se fue desarrollando en correspondencia

con los aportes y la progresión de los estudiantes en el proceso de construcción de significados del conjunto de números enteros, esto se estableció debido a las dinámicas cómo se asume la modelación matemática y el proceso de construcción de significados. Cada uno de los instrumentos fue experimentado con estudiantes diferentes a los involucrados en la investigación con la finalidad de comprobar la efectividad de dichos instrumentos.

Los instrumentos diseñados para la recolección de la información se encuentran en el Apéndice y se denominan de la siguiente manera: **i.** Pretest: actividad de reconocimiento de significados iniciales. **ii.** Actividad uno de modelación: Reconozco la ubicación de los números enteros (\mathbb{Z}) en la recta graduada entera. **iii.** Actividad dos de modelación: Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros (\mathbb{Z}). **iv.** Actividad tres de modelación: Observo mi entorno y aplico los números enteros (\mathbb{Z}). **v.** Postest: actividad de reconocimiento de significados logrados. En este sentido, en adelante, se describen brevemente cada uno de los instrumentos antes mencionados.

3.5.1 Pretest

Para iniciar con el proceso de recolección de datos, se diseñó un Pretest con el objetivo de identificar los conocimientos previos de los estudiantes acerca de números enteros (\mathbb{Z}), con el propósito de relacionar y comparar dichos conocimientos con los construidos durante el desarrollo de la investigación.

El Pretest contiene aspectos en relación con números enteros (\mathbb{Z}), tales como ubicación en la recta numérica, relación de orden y operaciones aditivas (suma, resta). Se les presentó a los estudiantes en forma de un taller, en el cual tenían que completar y argumentar. En otras palabras, debían realizar las actividades propuestas.

Las actividades del Pretest, se diseñaron en el siguiente orden: en un primer momento se indagó por la ubicación de los números enteros en la recta, a través de representaciones simbólicas en donde se les indicó ubicar números naturales (\mathbb{N}) y números enteros (\mathbb{Z}) y en otras actividades completar las secuencias numéricas. En un segundo momento se indagó acerca de la

relación de orden en los números enteros (\mathbb{Z}), para lo cual se solicitó a los estudiantes que ordenaran los números enteros (\mathbb{Z}), colocando símbolos, menor que ($<$), mayor que ($>$) o igual ($=$), según la situación planteada. Por último, se indagó acerca de operaciones aditivas (suma, resta), mediante algunas situaciones que involucraban desplazamientos de animales en la recta graduada entera y lateralidad. Ver Apéndice A. 2.1.

3.5.2 Actividades de modelación con estudiantes de cuarto grado de Básica Primaria

En este apartado se exponen aspectos con relación al diseño y descripción de las actividades de modelación, que permitieron dar cuenta de las maneras en que los estudiantes de grado cuarto de Educación Básica Primaria construyeron significados de números enteros (\mathbb{Z}).

En los planteamientos de Barbosa (2004), las actividades de modelación se relacionan con preguntas e investigación. Las preguntas se consideran como el acto de crear interrogantes o problemas acerca de un tema, en tanto que la investigación se asocia con la búsqueda, selección, organización y procesamiento de la información para hallar resultados a interrogantes o problemas en conexión con el contexto cercano a las vivencias de los estudiantes o de las mismas matemáticas.

En este sentido, se asumió la modelación matemática como proceso de problematización e investigación, mediante el cual se orientó el desarrollo del trabajo de campo. Se consideraron los tres casos para implementar la modelación matemática en el aula, en correspondencia con roles del docente y los estudiantes, según los planteamientos que expone Barbosa (2004). Es decir, se hacen algunas modificaciones, en las cuales se permitió la interacción de la docente investigadora en el desarrollo de las actividades de modelación. Condiciones que proporcionaron maneras de orientar las actividades de modelación y favorecieron el desempeño de los estudiantes ante el estudio de situaciones intra y extra-matemáticas.

Para este trabajo en las actividades de modelación se abordaron conocimientos matemáticos y extra-matemáticos, se realizaron indagaciones acerca del tema tratado y se analizaron los modelos y procedimientos elaborados por los estudiantes. En este sentido, se describen a

continuación las actividades que constituyeron el trabajo de campo en relación con las actividades de modelación.

Para el desarrollo del trabajo de campo se proponen tres actividades de modelación, cada una corresponde a los casos uno, dos y tres (Barbosa, (2004); los cuales, se nombran de la siguiente manera; **i.** Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera, **ii.**

Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros, **iii.** Observo mi entorno y aplico los números enteros.

Cada actividad comprende cinco momentos para su desarrollo, de acuerdo con los planteamientos de Barbosa (2004). Los momentos que se tuvieron en cuenta para cada una de las actividades de modelación son los siguientes: **i.** Detallar la situación, **ii.** Aclarar y explicar la situación problema, **iii.** Recolectar datos que permitan solucionar la situación problema, **iv.** Representar soluciones a la situación problema, **v.** Socialización de los resultados. En la Tabla 4 se presenta de manera sucinta las actividades de modelación que se desarrollaron en el trabajo de campo.

Tabla 4. *Actividades de modelación.*

| Momentos | Actividades de modelación | | |
|--|--|--|--|
| | Actividad 1 | Actividad 2 | Actividad 3 |
| | Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera. | Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros. | Observo mi entorno y aplico los números enteros. |
| Detallar la situación. | ¿Cómo ubico los números en la recta graduada entera? | ¿Qué más puedo saber de los números enteros? | Formulación del problema |
| Aclarar y explicar la situación problema | Utilidad de los números enteros. | Ordeno números enteros y hago sumas y restas. | Aclaración de ideas respecto al problema |
| Recolectar datos que permitan solucionar la situación problema | A investigar jugando. | ¡A investigar! | Investigación. |

| | | | |
|--|-------------------------------------|-------------------------|------------------------------|
| Representar soluciones a la situación problema | Represento situaciones. | Represento situaciones. | Representación y solución. |
| Socializar los resultados | Comparemos y discutamos resultados. | Comparemos resultados. | Socialización de resultados. |

Fuente: elaboración propia

La Tabla 4 describe la articulación de los momentos de las actividades de modelación con el proceso de problematización e investigación que plantea Barbosa (2004), donde la problematización se refiere a la creación de preguntas y cuestionamientos a situaciones reales, y la investigación se relaciona con procesos de exploración, selección y procesamiento de información.

Las actividades uno y dos de modelación se realizan teniendo como base el juego el Rey \mathbb{Z} manda. Acciones que se establecen al considerar las situaciones y dinámicas que se generan al hacer uso del juego al interior del aula, puesto que se reconoce como una manera de motivar a los estudiantes para que se les facilite consolidar sus aprendizajes y puedan experimentarlos en diferentes contextos (Tamayo, 2008). Por otro lado, en los planteamientos de Bishop (1998), se evidencia que los juegos favorecen la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que desarrollan habilidades de pensamiento como el razonamiento matemático, respecto a aproximaciones, demostraciones, verificaciones, entre otras.

En correspondencia con los anteriores autores, en esta investigación se asume el juego el Rey \mathbb{Z} manda, como estrategia de motivación e interés de los estudiantes para desarrollar las actividades de modelación, según los planteamientos de Barbosa (2004). De manera que, a partir de este juego imitativo e imaginario los estudiantes se involucran en el estudio de los números enteros mediante actividades de modelación. Puesto que el juego presenta particularidades que posibilitan el aprendizaje de las matemáticas, como lo afirma Bishop (1998):

La actividad matemática consiste en el desarrollo de ciertos tipos de modelos de la realidad que implica que ciertos juegos imitativos puedan ser una base importante para una gran cantidad de nuestra actividad como educadores de matemática. La descontextualización de una idea o de un proceso desde la realidad hasta la abstracción

de la realidad es una parte importante de la manera en que se han generado las ideas matemáticas, y por lo tanto los juegos de experimentación pueden ser una parte importante de la educación matemática de los estudiantes (p. 9).

Por tanto, se involucró el juego el Rey \mathbb{Z} manda en las actividades uno y dos de modelación, generando, motivación e interés en los estudiantes, respecto a la actividad matemática en estudio. En este sentido, se presentan las actividades de modelación, como sigue.

3.5.2.1 Actividad uno. Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera

Con esta primera actividad se pretendía que los estudiantes pudieran comenzar a construir significados de números enteros (\mathbb{Z}), en aspectos como la identificación de los signos negativo y positivo, a través de diferentes situaciones, tales como direccionalidad, lateralidad, debo-tengo, profundidad y altitud, entre otras.

Esta actividad se realizó, básicamente, teniendo en cuenta aspectos relacionados con el desarrollo del juego el Rey \mathbb{Z} manda, el cual consiste en que uno de los integrantes hace las veces de Rey, quien manda y da instrucciones, y los demás integrantes del juego deben obedecer sus mandatos. Sin embargo, para la intención investigativa de este estudio, al juego el Rey manda se le adaptaron nuevas configuraciones, tales como el cambio del nombre.

Como se trabajó con números enteros y estos se denotan con la letra " \mathbb{Z} ", el juego pasa de llamarse "el Rey Manda" a el Rey \mathbb{Z} manda. La esencia del juego es la misma, el Rey (quien dirige el juego) da instrucciones y los otros participantes deben cumplirlas.

Otra configuración del juego adaptada para esta actividad es la estructura que conforma el juego el Rey \mathbb{Z} manda, la cual consta de cinco momentos que se relacionan con elementos que constituyen las actividades de modelación. Los momentos diseñados para esta actividad son los siguientes: **i.** ¿Cómo ubico los números en la recta graduada entera? **ii.** Utilidad de los números

enteros, **iii.** ¡A investigar jugando!, **iv.** Represento situaciones, **v.** Comparemos y discutamos resultados.

Con miras a alcanzar el objetivo de esta actividad se diseñaron los momentos, como se muestran en adelante.

3.5.2.1.1 Momento uno: ¿Cómo ubico los números en la recta graduada entera?

Esta actividad se encuentra con las respuestas que elabora uno de los estudiantes en el Apéndice A.3, denominado: Ubicación de los números enteros en la recta graduada entera. Este momento de la actividad uno de modelación tiene como objetivo, dar a conocer el problema a los estudiantes para que identifiquen algunos aspectos necesarios para su solución.

En una actividad previa que trataba del orden de los números naturales en la recta numérica, a los estudiantes se les generó una inquietud respecto a qué números seguían a la izquierda del cero que se encontraba en la recta numérica. Esto debido a que la flecha que estaba a la derecha quería decir que los números naturales eran infinitos, pero al lado izquierdo del número cero también, estaba una flecha que quería decir que los números enteros negativos también, se extendían hacia ese lado hasta el infinito, lo que generó esta pregunta en los estudiantes ¿Qué números continúan a la izquierda del número cero? A partir de esa pregunta se fueron generando otras como ¿Por qué no nos han enseñado esos números? ¿A qué números pertenecen? Entre otras.

Con el propósito de ayudar a dar respuesta a estos interrogantes, se presenta en un tablero digital, la siguiente situación, la cual se pide a los estudiantes analizar junto con la docente a través de la observación de un video.

Después de la lectura y socialización de posibles formas de ayudar al Rey \mathbb{Z} manda se observa el siguiente video: video (Números enteros - 1.- ¿Qué son los números enteros? - 1°ESO), tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=uCLSk-kXsgU> descargado el 22-06-2019.

Luego se invita a los estudiantes a través de una petición del Rey \mathbb{Z} manda que realicen las actividades que él les solicita, como se muestra en el Apéndice A.3.1.

3.5.2.1.2 Momento dos: utilidad de los números enteros

Objetivo: Aclarar aspectos con relación a números enteros que permitan dar solución al problema.

Este momento, consiste en que el Rey \mathbb{Z} manda, solicita a los estudiantes que a partir de lo observado en el video relacionen el uso de los números enteros con situaciones de la vida diaria y que escojan las que ellos creen que son más comunes, ver Apéndice A.3.2

3.5.2.1.3 Momento tres: a investigar jugando

Objetivo: Recolectar datos que puedan favorecer la solución de la situación expuesta.

Este momento, se realizó a través de la realización del juego el Rey \mathbb{Z} manda. Este juego, está distribuido en cuatro partes. Parte A, parte B, parte C y parte D. ver Apéndice A.3.

Parte A

El Rey \mathbb{Z} manda, en esta actividad fue la docente investigadora, quien dio la instrucción y los estudiantes debían de cumplirlas. Se escoge un lugar, el cual pueda tener un punto de referencia, por ejemplo, la puerta del salón de clases. Al lado derecho de la puerta a igual longitud se colocan cinco o más objetos, al lado izquierdo de la puerta también se colocan igual cantidad de objetos. Se le pidió a un estudiante, que se pare en la mitad de la puerta, que levante su mano derecha y observe y nombre los objetos que están ubicados para ese lado. Luego se pregunta: ¿cuál es el objeto más cercano a ti? y ¿cuál es el más alejado? Después se le pidió al estudiante que levante su mano izquierda y nombre los objetos que se encuentran para ese lado y también se le preguntó ¿cuál es el más cercano? y ¿cuál es el que se encuentra más lejos de ti?

Se entregaron cinco etiquetas con los números positivos y se le pide al estudiante que marque los objetos que están a su derecha con las etiquetas y cuando terminó, se le preguntó si hubiera

otro objeto después del último ¿con qué etiqueta lo marcarías? ¿Por qué etiquetaste o marcaste los objetos de esa forma? ¿Con qué número lo representarías? ¿Por qué?

De igual forma, se le entregan otras etiquetas con números negativos y el cero para que marque los objetos que están a su izquierda, cuando terminó se hicieron las siguientes preguntas ¿Por qué lo colocas el cero en ese lugar? ¿Si hubiera otro objeto hacia el lado izquierdo con qué número lo etiquetarías? ¿Por qué?

Al finalizar el juego se les solicitó a los estudiantes que hicieran representaciones de las situaciones vividas en el juego, ver Apéndice A.3.3. Las partes B, C y D del juego el Rey \mathbb{Z} manda se encuentran en el Apéndice A.3.

3.5.2.1.4 Momento cuatro. Represento situaciones

Objetivo: solucionar el problema inicial a través de representaciones o modelos que permitan la identificación de significados construidos por parte de los estudiantes.

En este momento, se diseñó un instrumento en el cual se solicitaba a los estudiantes que leyeran la situación inicial (¿Cuáles son los números enteros y cómo se representan?) y que según sus conocimientos la respondieran. El instrumento se puede encontrar en el Apéndice A.3.4.

3.5.2.1.5 Momento cinco. Comparemos y discutamos resultados

Objetivo: identificar los significados de números enteros construidos por los estudiantes y las formas cómo los construyeron.

En este momento, el grupo de tres estudiantes participantes en la investigación, en forma verbal socializaron las respuestas de las preguntas del momento cuatro, y escribieron las conclusiones a las que llegaron al responder cada pregunta. Se dieron las siguientes indicaciones:

- i.** Participar en su turno.
- ii.** Respetar la participación del compañero.

iii. Si no está de acuerdo con la opinión de su compañero, pida la palabra y justifique sus razones, por las cuales no está de acuerdo.

Después de socializar los resultados o solución encontrada mediante los modelos realizados en el momento cuatro, se solicitó a los estudiantes realizar una cartelera con las conclusiones a dicha respuesta y presentarla ante sus compañeros de todo el curso, a través de una exposición.

3.5.2.2 Actividad dos. Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros

La actividad dos de modelación matemática se diseñó teniendo en cuenta las diferentes prácticas realizadas por los estudiantes en la actividad número uno. Por tal razón, se indagó con los estudiantes involucrados en esta investigación, acerca de los aspectos que les causó, curiosidad, motivación o alguna preocupación. De esta manera, se reconoce que los estudiantes tienen curiosidad por saber si con los números enteros se pueden hacer relaciones y operaciones, al igual que con los números naturales. Aspecto, que generó algunos interrogantes como ¿Cómo será el orden en los números enteros? ¿Se podrán hacer sumas y restas con los números enteros? estos interrogantes desencadenan la estructura de esta actividad, la cual se diseñó a partir de los siguientes momentos:

- i.** ¿Qué más puedo saber de números enteros?
- ii.** Ordeno los números enteros y hago sumas y restas.
- iii.** ¡A investigar!
- iv.** Represento situaciones
- v.** Comparemos resultados.

En esta actividad se atendió algunos aspectos estructurales del juego el Rey \mathbb{Z} manda. Con lo cual, se pretendía que los estudiantes construyeran significados de relaciones de orden (mayor que, mayor igual que, menor que, menor igual que igual a) y de operaciones aditivas (suma y resta) con números enteros. A continuación, se plantea el diseño de los diferentes momentos de la actividad número dos de modelación.

3.5.2.2.1 Momento uno: *¿Qué más puedo saber de los números enteros?*

Objetivo: estructurar el problema involucrando a los estudiantes a través de la formulación de preguntas que conlleven a la introducción de la actividad de modelación.

A partir de la curiosidad de los estudiantes por saber si con los números enteros (\mathbb{Z}) se pueden hacer relaciones y operaciones de la misma forma como se hacen con los números naturales, se planteó la formulación del problema de la siguiente manera: El Rey \mathbb{Z} manda, quiere saber el orden de los números enteros (\mathbb{Z}) y también quiere saber cómo se hace la suma y la resta con estos números. ¿Le ayudarías al Rey a responder las siguientes preguntas? **i.** ¿Cuál es el orden en los números enteros (\mathbb{Z})? **ii.** ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?

Con el propósito de detallar el problema se solicitó a los estudiantes diligenciar un documento con algunas situaciones relacionadas con las preguntas anteriores, ver Apéndice A.4.1.

3.5.2.2.2 Momento dos. *Ordeno los números enteros y hago sumas y restas*

Objetivo: aclarar aspectos relacionados con el orden en los números enteros y de las operaciones aditivas (suma, resta) en los estudiantes de cuarto grado.

Este momento de la actividad dos de modelación matemática se desarrolla en varios momentos: momento A, momento B y Momento C. El momento A del juego el Rey \mathbb{Z} manda, (profesora) se configuró de la siguiente manera: la profesora guía la introducción de la actividad en esta parte. Sin embargo, en las partes B y C, son los estudiantes los encargados de desarrollarlas.

Parte A.

El Rey \mathbb{Z} manda, entregó una copia a los estudiantes en cuyo contenido se presentó la relación de orden y suma y resta con números enteros, información que se descargó de: http://agrega.educacion.es/repositorio/03122014/3c/es_2014120312_9201222/orden_de_los_nm

[eros_enteros.html](#) descargado el 02- 09- 2019 y en <https://www.smartick.es/blog/matematicas/sumas-y-restas/sumas-y-restas-de-numeros-enteros/> descargado el 02- 09-2019.

El Rey \mathbb{Z} manda, solicita a los estudiantes que lean y socialicen a través de preguntas el contenido de las copias. ¿Cuándo un número entero es menor que otro número? ¿Cuándo es mayor? ¿Cómo se suma con los números enteros? ¿Cómo se resta? Luego, el Rey \mathbb{Z} manda, pidió a uno de los estudiantes participantes en la investigación, que organice once montones de fichas de diferentes tamaños y colores, en una recta numérica que está dibujada en una cartulina, iniciando con la ubicación del montón más pequeño en el número menos cinco y a continuación, a la derecha los restantes montones hasta ubicarlos todos.

El Rey \mathbb{Z} manda, le preguntó al estudiante ¿A qué lado del número cero se encuentran los montones más pequeños? ¿A qué lado del número cero se encuentran los montones más grandes? ¿En cuál número está ubicado el montón más pequeño? ¿En cuál número está ubicado el montón más grande? ¿El montón que está ubicado en el número cero es más grande o pequeño que el ubicado en el número menos uno? ¿El montón que está ubicado en el número cero es más grande o pequeño que el ubicado en número uno? ¿El montón que está ubicado en el número menos tres es más grande o pequeño que el ubicado en el número menos cuatro? ¿Dónde colocarías este montón de fichas? (se entrega un montón de fichas con igual cantidad a uno de los montones ubicados en la recta) ¿Por qué lo colocarías en ese lugar?

Parte B

Para este momento el juego el Rey \mathbb{Z} manda, (se trabajó con estudiantes de otros grados de escolaridad) se configuró de la siguiente manera: se pinta en el piso del patio o de la placa polideportiva una recta numérica. Uno de los participantes del juego hace las veces de Rey \mathbb{Z} manda. Se espera que el Rey ubique a los participantes del juego en la recta, en orden de estatura del más bajo al más alto, en dirección de izquierda a derecha.

A cada estudiante se le entregó una tarjeta con el número que ocupaba en la recta, así, el estudiante que está en el punto de referencia de la recta se le entregó el número cero y los compañeros que están a su derecha los números positivos iniciando por más uno (+1) y los que están al lado izquierdo se les entregó la tarjeta iniciando con menos uno (-1).

A partir de esta ubicación, el Rey \mathbb{Z} manda les pregunta a los estudiantes participantes del juego que están ubicados en la recta numérica: ¿Quién es el más bajo? ¿Qué número representas? ¿Quién es más alto? ¿Qué número representas? ¿Quién representa el número cero y quien el número menos uno? ¿Cuál de los dos es más pequeño? Si hay compañeros que tengan la misma estatura se pregunta ¿Dónde ubicarías los compañeros que tienen igual estatura?

Después, de terminado el juego se solicitó a los estudiantes completar algunos enunciados, los cuales, se pueden evidenciar en el Apéndice A.4.2.

Parte C

En esta, parte el juego el Rey \mathbb{Z} manda se buscaba que los estudiantes construyan significados de operaciones aditivas (suma, resta) con números enteros. Para el logro del anterior objetivo se diseñó y aplicó la siguiente actividad: Se dibujaron dos rectas numéricas en la placa polideportiva. Esta parte se trabajó con los tres estudiantes involucrados en la investigación.

Un estudiante hace las veces del Rey \mathbb{Z} manda. Se ubica un estudiante en el punto de referencia de cada una de las rectas. El Rey \mathbb{Z} manda pide que se desplacen de cero hacia otro número (el que él elija). Por ejemplo: El Rey \mathbb{Z} manda que se desplacen más cinco pasos, el Rey \mathbb{Z} manda quiere que se desplacen menos seis pasos. A partir de esta situación se hacen preguntas como: ¿Cuántos puestos avanzaste? ¿Cuántos puestos retrocediste? ¿En qué número te encuentras? ¿De qué maneras podrías representar esta situación?

Terminadas las respuestas el Rey \mathbb{Z} manda, vuelve a pedir dos nuevos desplazamientos a los mismos participantes y repite las preguntas, es decir que cada participante tiene cuatro opciones de movimiento. Esta situación se repite, pero los estudiantes cambian de roles, es decir, el que

hacía las veces de Rey \mathbb{Z} manda pasa a realizar los desplazamientos en la recta, hasta que todos los integrantes del juego participaron en la actividad.

Cuando se termina el juego, se vuelve al salón de clases y se indica a los estudiantes que representen las situaciones vividas en el juego y las relacionen con situaciones de su cotidianidad.

3.5.2.2.3 Momento tres: ¡a investigar!

Objetivo: recolectar información que permita dar con la solución de la situación inicial. La cual consistía en responder las siguientes preguntas ¿Cuál es el orden en los números enteros (\mathbb{Z})? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?

En este momento los estudiantes investigarán, en forma individual, acerca de tres aspectos relacionados con números enteros: orden en los números enteros, operaciones aditivas y diferentes situaciones de la vida diaria en las que se puedan utilizar los números enteros. Los resultados de las investigaciones realizadas por un estudiante se encuentran en el Apéndice A.4.3.

3.5.2.2.4 Momento cuatro: Represento situaciones

De acuerdo con lo que investigaste acerca del orden en los números enteros y lo vivido en el juego el Rey \mathbb{Z} manda realiza modelos que permitan dar cuenta a las preguntas con la que se inició esta actividad (¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?). Ver Apéndice A.4.4

3.5.2.2.5 Momento cinco: Comparemos resultados

Los estudiantes comparan los resultados y representaciones que realizaron de las preguntas ¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos? En forma de plenaria, los estudiantes dieron a conocer los resultados del problema matemáticamente. Dichos resultados fueron expuestos y se discutieron entre los estudiantes y la docente

investigadora, con la finalidad de verificar los resultados. Luego, de la verificación fueron expuestos ante los demás compañeros de los grados tercero, cuarto y quinto. Ver Apéndice A.4.5.

3.5.2.3 Actividad tres. Observo mi entorno y aplico los números enteros

Los estudiantes conforman grupos de tres integrantes (los integrantes de la investigación) para iniciar el proyecto de modelación matemática en relación con los significados que hasta el momento habían construido acerca de números enteros en el desarrollo de las anteriores actividades de modelación.

El proyecto se realizó teniendo en cuenta cinco momentos: **i.** Formulación del problema, **ii.** Aclaración del problema, **iii.** Recolección de datos, **iv.** Solución del problema, **v.** Socialización de resultados. Este proceso lo realizaron los estudiantes según sus intereses con la orientación de la docente investigadora. En el Apéndice A.5, se puede observar las actividades que desarrollaron los estudiantes durante el proyecto.

3.5.3 Postest

El Postest se diseñó teniendo en cuenta aspectos relacionados con el conjunto de números enteros, tales como ubicación en la recta, relación de orden y operaciones aditivas (suma y resta) estudiados en las actividades uno, dos y tres de modelación matemática. Por tanto, se aplicó después de haber terminado las actividades de modelación con la finalidad de comparar los significados iniciales con los que finalmente alcanzaron a construir los estudiantes en el desarrollo de las tres actividades en mención. (Ver Apéndice C.1)

3.6 Cronograma

El proceso investigativo que permitió dar respuesta a la pregunta de investigación ¿de qué maneras estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación? Y posibilitó dar cuenta del objetivo de investigación el cual, se definió como

sigue: identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación. Se realizó en un lapso que inició en marzo de 2018 y terminó en diciembre de 2019 como se muestra en la Tabla 5, en donde se presentan las actividades que se realizaron durante el proceso investigativo, incluyendo el diseño y aplicación del trabajo de campo y el intervalo de tiempo en el cual se desarrollaron y analizaron.

Tabla 5. *Intervalo de tiempo en el cual se desarrolló la investigación.*

| Actividades | Meses en que se desarrolló la investigación | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | M | A | M | J | J | A | S | O | N | D | E | F |
| Revisión de literatura | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| Diseño de instrumentos de recolección de la información | | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| Planeación de actividades | | | | | | | | | | | | ■ |
| Aplicación de los instrumentos de recolección de la información | | | | | | | | | | | | ■ |
| Sistematización de la información | | | | | | | | | | | | ■ |
| Análisis y triangulación de la información | | | | | | | | | | | | ■ |
| Elaboración de informes y conclusiones | | | | | | | | | | | | ■ |

3.7 Resultados esperados

Se espera que con los resultados de esta investigación se pueda contribuir a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros (\mathbb{Z}) en Educación Básica Secundaria a partir del estudio y la aplicación de estos números en Educación Básica Primaria. En este sentido, el impacto del estudio se refleja, a partir de aspectos que tienen que ver en primer lugar, con la formación de la docente investigadora y en segundo lugar con la transformación de sus prácticas

de aula y del trabajo directo con los estudiantes en el transcurso del tiempo que orientó a los estudiantes en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

De manera que, entre la transformación de sus prácticas, se involucre la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros en las aulas de cuarto grado de Educación Básica Primaria, mediante situaciones intramatemáticas y extramatemáticas de contextos cercanos a las vivencias de los estudiantes, para que estos, puedan construir significados de números enteros y sean capaces de ponerlos en prácticas en situaciones que se conecten con su realidad, tanto en la vida escolar como en actividades de su cotidianidad.

3.8 Procesamiento y análisis de la información

Hernández, Fernández y Baptista (2010) plantea que “utilizar diferentes fuentes y métodos de recolección, se le denomina triangulación de datos” (p. 481). Por consiguiente, se utilizó la triangulación para el procesamiento y análisis de la información que se obtienen a través de la observación, la entrevista y los documentos escritos.

Este proceso, permitió verificar y comparar la información a partir de los datos que se recolectaron, y a su vez, enriqueció el proceso investigativo. En este sentido, se identificaron las maneras en que los estudiantes construyeron significados de números enteros, a partir de la interpretación y comparación de datos que se recolectaron en los diferentes momentos de las actividades de modelación según los planteamientos de Barbosa (2004) y con el análisis realizado a partir del Enfoque Ontosemiótico de Godino Batanero y Font (2019).

3.9 Validez de la investigación

La validez en la investigación cualitativa se asocia a la confiabilidad del estudio mediante la triangulación de datos y del trabajo y análisis realizado por los investigadores (Álvarez y Jurgenson, 2009). En esta investigación, se hizo énfasis en la triangulación de datos que se recolectaron a través de los instrumentos y técnicas que se utilizaron durante el proceso investigativo (Ver Apéndice). Los alcances son afines con aspectos teóricos, metodológicos y

pragmáticos a partir de los cuales se buscó identificar las formas en que los estudiantes construyen significados de números enteros.

Metodológicamente, se da cuenta de la influencia de las actividades de modelación en los estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria, para la construcción de significados de números enteros (\mathbb{Z}). Desde la propuesta investigativa, los estudiantes a partir de orientaciones de la maestra investigadora son los encargados de su propio aprendizaje, apropiándose de conocimientos matemáticos que podrán aplicar en situaciones cotidianas según la realidad que enfrenten.

Capítulo IV: Análisis de la Información

En este Capítulo se presenta el análisis de la información obtenida a partir de la implementación de los instrumentos de recolección de información diseñado para tal fin y descrito en el Capítulo III. En los Apéndices se encuentran los instrumentos escritos tal y como fueron aplicados al grupo de estudiantes seleccionados. El análisis se realizó teniendo en cuenta aspectos del Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2012) y Godino, Batanero y Font (2019), haciendo énfasis en las prácticas operativas y discursivas que realizaron los estudiantes en las actividades de modelación según los planteamientos de Barbosa (2004).

4.1 Análisis de datos cualitativos

Según Hernández, Fernández y Baptista (2010) para analizar los datos obtenidos a través de los diferentes instrumentos de recolección de información, es necesario recolectar los datos, agruparlos y clasificarlos. Aspectos que permiten, relacionar los datos encontrados mediante los instrumentos, con los referentes teóricos que sustentan el proceso investigativo, de manera que se puedan comparar e interpretar.

Por tanto, el análisis de los datos obtenidos a partir de los instrumentos de recolección de información utilizados en esta investigación que permitieron analizar las maneras en que estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria construyen significados de números enteros en actividades de modelación, se basó en el análisis de prácticas operativas y discursivas manifestadas por los estudiantes en el desarrollo de un Pretest, tres actividades de modelación y un Postest, que permitieron la recolección de datos para responder la pregunta y dar cumplimiento al objetivo de la investigación, como se presenta en adelante en los siguientes apartados.

4.1.1 Análisis del Pretest

El Pretest se diseñó con el propósito de identificar los significados iniciales que tenían los estudiantes acerca de los números enteros (\mathbb{Z}), (ver Apéndice B.1). Durante el desarrollo del Pretest se evidenció que los estudiantes han construido significado personal de número como secuencia numérica, puesto que organizaron los números dados en la recta numérica de forma adecuada únicamente cuando se trató de los números naturales (\mathbb{N}). Al involucrar números negativos, en los significados personales manifestados en las prácticas operativas y discursivas, se identificaron significados personales declarados, puesto que no están en coherencia con los significados institucionales de referencia, es decir, los dados en los DBA (2016), en los Estándares Básicos de Competencia (2006) y en los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1998). En las siguientes respuestas se puede ver los significados personales iniciales de números enteros (\mathbb{Z}), exteriorizados por un estudiante.

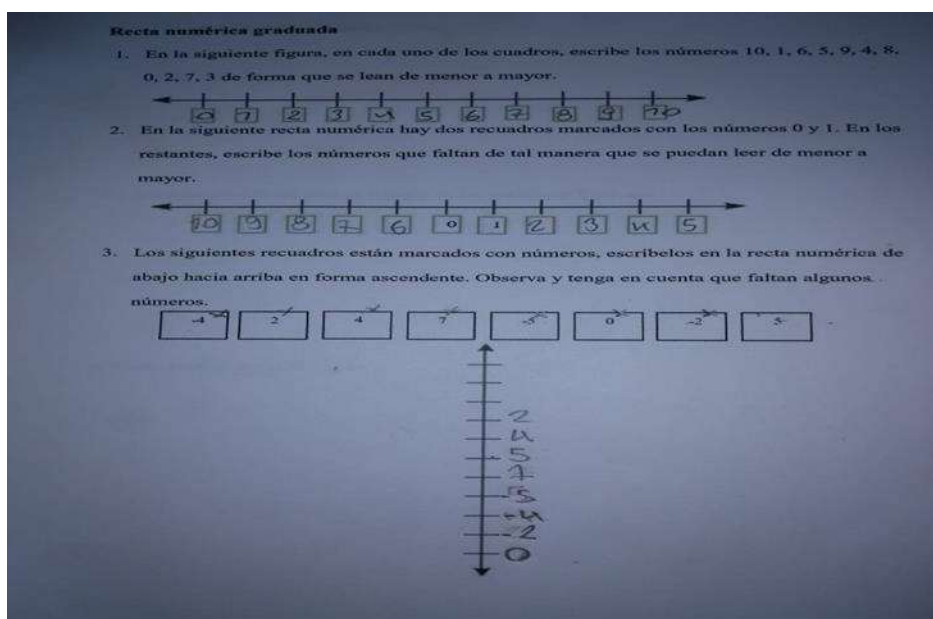


Ilustración 5. Significados iniciales de ubicación de número entero en la recta graduada entera, realizada por Alberto.

En consecuencia, toma importancia el reconocimiento de los conocimientos previos como lo manifiesta Godino, Batanero y Font (2012), “...en el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio, interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen” (p. 8). La anterior

afirmación permite inferir que, aunque el estudiante no ha construido significados de números negativos, los significados construidos acerca de números naturales pueden facilitar la construcción de estos significados.

Por otro lado, en cuanto al orden en los números enteros, los estudiantes muestran que han construido significados de número para contar, que se pone de manifiesto cuando el estudiante afirma “que uno es menor que dos, que dos es menor que tres...”, que se relaciona como secuencia numérica con números naturales y como forma de expresar una cantidad, puesto que en las actividades planteadas no mostraron dificultad para contar, representar y organizar números naturales (\mathbb{N}).

Sin embargo, cuando se les presentó situaciones que involucraban números negativos los significados personales manifestados no coinciden con los significados institucionales referenciales (Godino, Batanero y Font, 2019). También, se observó que al comparar números negativos con números positivos y viceversa, los estudiantes ignoraban los signos negativos, asumían ambas cantidades como positivas, como en el caso de comparar cero (0) con menos cuatro (-4), en donde colocaron que el cero era menor que menos cuatro. En las siguientes respuestas se evidencia lo expuesto en este párrafo.

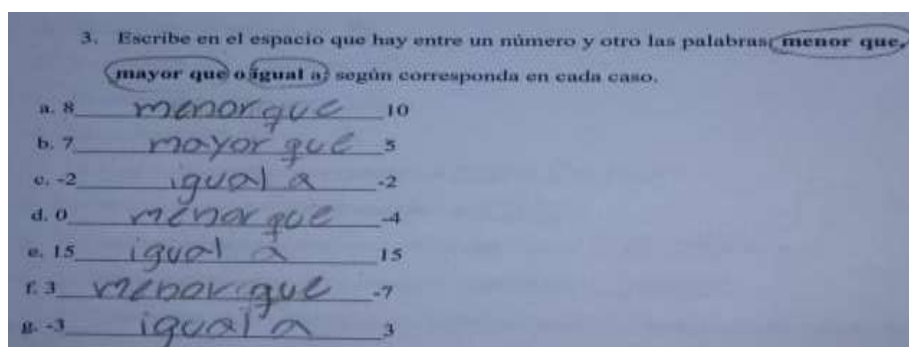


Ilustración 6. Significados iniciales respecto a la relación de orden en números enteros.

De lo anterior, se entiende que los estudiantes en el lapso de su proceso de formación no han construido significado personal logrado de números enteros (\mathbb{Z}). Por tanto, no se ha dado el

acoplamiento entre los significados personales y los institucionales de este conjunto numérico (Godino, Batanero y Font, 2019).

En lo relacionado con operaciones aditivas (suma, resta) con números enteros, en las prácticas operativas y discursivas, se puede reconocer que a los estudiantes les falta construir significados personales logrados acerca de suma y resta con números enteros, puesto que aunque representaron las operaciones aditivas en la recta graduada entera, solo lo hicieron siguiendo indicaciones que se daban en la situación expuesta, como se puede evidenciar en las siguientes representaciones elaboradas por un estudiante.

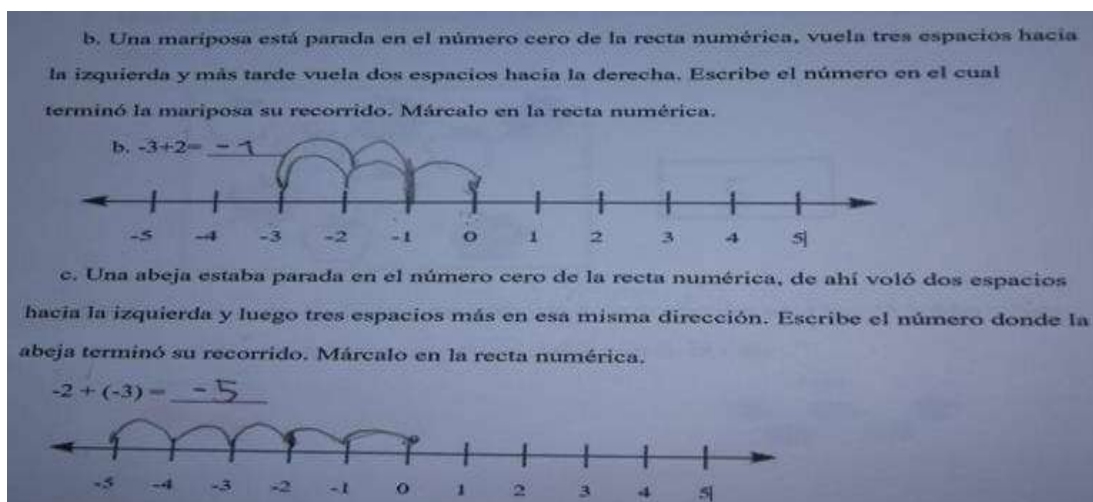


Ilustración 7. Representaciones de operaciones aditivas realizadas por Alberto.

Por todo lo anterior se reconoce, que los estudiantes dieron cuenta de los significados personales globales acerca de números enteros. Sin embargo, falta hacer el acoplamiento entre los significados personales logrados con los significados institucionales referenciales.

En consecuencia, se deja en evidencia la necesidad de implementar estrategias que permitan la construcción por parte de los estudiantes de dichos significados y para este estudio se crearon escenarios diferentes para los procesos de enseñanza y de aprendizaje a partir de actividades de modelación según algunos de los planteamientos de Barbosa (2004). A continuación, se presenta el análisis de las prácticas operativas y discursivas manifestadas por los estudiantes en la actividad uno de modelación. Ver Apéndice A.3

4.1.2 Análisis actividad uno de modelación. Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera

Objetivo: construir significados de números enteros, tales como identificación de signos (negativo y positivo), la ubicación de estos números en la recta numérica a través de diferentes situaciones (direccionalidad, lateralidad, debo-tengo, profundidad y altitud; entre otras).

4.1.2.1 Momento uno. ¿Cómo ubico los números en la recta graduada entera?

Objetivo: dar a conocer el problema a los estudiantes para que identifiquen algunos aspectos necesarios para la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera.

El momento uno, de la actividad uno de modelación, se realizó a partir de la formulación de una pregunta, la cual surgió del interés de los estudiantes, en un contexto intra-matemático, cuando se trabajaba con números naturales en la recta numérica. En el desarrollo de la actividad los estudiantes llegaron a concluir que los números se extienden hasta el infinito, hacia ambos lados de la recta numérica, dicha conclusión generó interrogantes, tales como ¿Qué números siguen hacia el lado izquierdo de cero en la recta numérica?

A manera de incrementar la curiosidad de los estudiantes, se les explicó que el número cero no hace parte de los números naturales. Esto, inmediatamente causó interés en ellos, conllevándolos a preguntar ¿a qué números pertenece el número cero y los números que siguen a la izquierda de él?

A partir de los anteriores interrogantes, la maestra investigadora creó otro nuevo interrogante, que se tomó como punto de partida de la actividad uno de modelación, formulado de la siguiente manera: ¿Cuáles son los números enteros y cómo se representan?

Esta pregunta se presentó a los estudiantes en forma de una situación que involucra al juego el Rey \mathbb{Z} manda. Mediante la cual, se propició un conversatorio respecto a la pregunta, donde los estudiantes dejaron ver su interés, curiosidad por saber acerca de los números enteros (\mathbb{Z}). Para

detallar la situación problemática, los estudiantes observan un video, titulado “Números enteros - 1.- ¿Qué son los números enteros? - 1ºESO”, tomado de:
<https://www.youtube.com/watch?v=uCLSk-kXsgU> (22-06-2019).

A partir de la observación del vídeo, a los estudiantes se les suministraron en una copia, (ver Apéndice B.2.1) varios enunciados para completar la información requerida, en relación con este conjunto numérico.

En el primer punto, se les indicó a los estudiantes que escribieran el signo con que se puede diferenciar los números positivos de los números negativos. Los tres estudiantes completaron correctamente el enunciado, escribiendo el símbolo correspondiente para identificar los números positivos, permitiendo observar que el lenguaje simbólico utilizado por ellos está relacionado con el significado institucional implementado. Según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019), esto quiere decir, que los estudiantes han construido significado personal declarado del signo más, ya que identificaron el signo (+) como símbolo para diferenciar los números enteros positivos de los números enteros negativos, como puede observarse en una de las respuestas manifestadas por uno de los estudiantes.

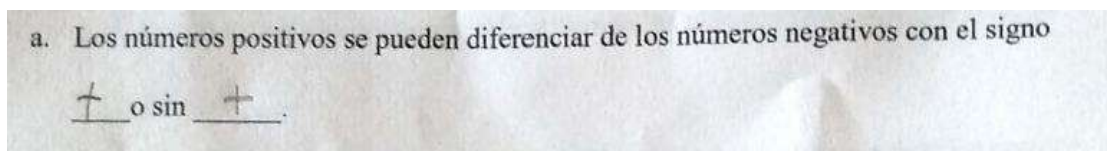


Ilustración 8. Signo más, representado por César.

De igual forma, en el segundo punto se les indicó a los estudiantes completar enunciados con relación a los números negativos, el cual también completaron correctamente, haciendo uso de la representación del símbolo que distingue o caracteriza a los números enteros negativos. El lenguaje que utilizaron los estudiantes para manifestar los significados construidos respecto del símbolo que identifica los números enteros negativos de los números enteros positivos, permitió dar cuenta de sus significados personales declarados. Aspecto, que se puede evidenciar en la siguiente respuesta.

b. Los números enteros negativos se pueden diferenciar de los enteros positivos porque se escriben con un signo — antes del número.

Ilustración 9. Signo menos representado por Alberto.

En la anterior respuesta, se puede observar el objeto matemático ostensivo (signo menos) manifestado por los estudiantes para dar cuenta de sus significados personales. Según Godino, Batanero y Font (2019), los estudiantes exteriorizan los significados de un objeto matemático a partir de sus representaciones ostensivas y no ostensivas. Por tanto, se infiere que los estudiantes han construido significado personal declarado, respecto al signo menos que identifica a los números enteros negativos, puesto que las representaciones realizadas por cada uno de ellos la hicieron de forma individual.

Por otro lado, en una tercera actividad se indaga por el significado que los estudiantes adquirieron acerca del número cero (0), permitiendo observar que los estudiantes construyeron un significado personal declarado respecto al número cero (0), asumiéndolo como punto de referencia. En la siguiente respuesta se puede ver el objeto matemático realizado por un estudiante.

c. Según el video observado, el cero se utiliza como Punto de Referencia

Ilustración 10. Significado construido del número cero (0) por César.

Por tanto, se puede decir que los significados que los estudiantes han construido acerca del número cero (0) son significados personales que están en acuerdo con los significados institucionales implementado de números enteros, es decir, los estudiantes manifestaron que el cero es visto en este conjunto numérico, como punto de referencia y esta noción se articula con los significados institucionales implementados.

Los objetos ostensivos y no ostensivos, evidenciados en los tres puntos anteriores, permiten inferir que los estudiantes han logrado detallar parcialmente la composición de los números

enteros, es decir, han construido significados personal global y declarado, puesto que son capaces de escribir e identificar símbolos y expresiones que corresponden a los significados institucionales implementados y referenciales.

Sin embargo, el acoplamiento de los significados personales de números enteros con el significado institucional referencial aún no se ha dado, puesto que los estudiantes en las representaciones que realizaron manifestaron solo significados personales globales y declarados. No obstante, los significados parciales que han construido pueden facilitar que den una solución adecuada al interrogante que conllevó a esta actividad.

En este orden, en un cuarto punto se indagó por la utilidad de los números enteros en la vida cotidiana. Los estudiantes dieron cuenta a través de prácticas discursivas, de algunas situaciones en las que se pueden utilizar estos números, como se muestra a continuación.

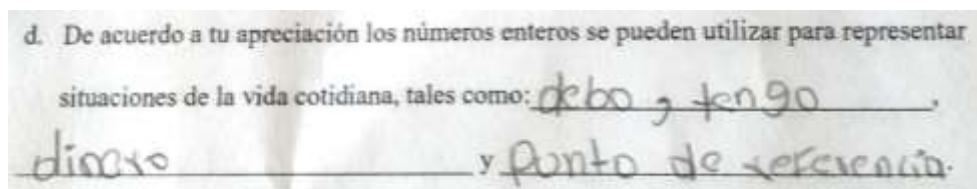


Ilustración 11. Uso de los números enteros en la vida diaria, según Pablo.

En consecuencia, de lo anterior, se puede decir que los estudiantes lograron asociar los números enteros con algunas *situaciones propias de su contexto*, como deber, tener dinero, nivel de la tierra, puesto que en los enunciados expuestos por los estudiantes dan indicio de la construcción de significados globales, acerca de la utilidad de los números enteros (\mathbb{Z}).

De igual forma, en un quinto punto, se indagó por la conformación del conjunto de los números enteros. Los estudiantes construyeron significados personales de números enteros, ya que hicieron representaciones escritas que dan cuenta de un significado personal global, aunque se observa en las representaciones realizadas por los estudiantes la presencia de significados iniciales, les falta hacer la correspondencia con los significados institucionales implementados de este conjunto numérico, como se puede ver en la siguiente respuesta.

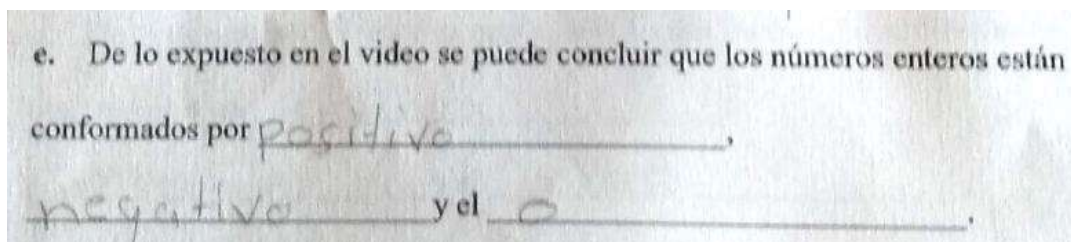


Ilustración 12. Conformación de los números enteros, según César.

Todo lo anteriormente expuesto, permite observar que los estudiantes han construido significados personales de números enteros. Significados que permiten diferenciar los números enteros positivos y negativos, tales como, que los números positivos se pueden simbolizar escribiendo el signo más (+) antes del número y también pueden escribirse sin este signo y que a los números enteros negativos siempre debe anteponerse el signo menos (-).

También se reconoce que los estudiantes pudieron detallar la composición de los números enteros, es decir, manifestaron mediante objetos matemáticos no ostensivos que los números enteros están conformados por tres componentes: los negativos, los positivos y el cero; aunque esta noción no está del todo de acuerdo con los significados institucionales de este conjunto numérico, se evidencia la construcción de significado personal global, que según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2012), se deben tener en cuenta en el proceso de construcción de significados, puesto que estos significados son necesarios para llegar a los significados institucionales.

Por otro lado, en una actividad de socialización, donde todos los estudiantes implicados en este estudio participaron en forma colectiva, permitió dar cuenta de los significados institucionales construidos por los estudiantes a través de argumentos, justificaciones, nociones, entre otras manifestaciones que realizaron los estudiantes, reconociendo que *socializar y discutir acerca de un tema puede ser una manera de construir significados*.

Los estudiantes a través de prácticas discursivas, en un ambiente de discusión acerca de la conformación del conjunto de números enteros, concluyeron que los números enteros positivos se pueden diferenciar de los números enteros negativos, como lo manifiesta uno de los estudiantes: "... porque a los negativos se les coloca una rayita antes del número y a los

positivos se les coloca un signo más o también, se pueden escribir sin el signo más". Además, argumentaron que los números enteros "*están conformados por el cero, los negativos y los positivos*" (registro en audio, 02-07-19)

Los anteriores argumentos, permiten evidenciar que construyeron significados institucionales, porque lo hicieron de forma colectiva y sus argumentos están de acuerdo con los significados institucionales, dejando ver durante el dialogo el acoplamiento entre los significados personales y los institucionales, a través de gestos corporales (movimiento de aceptación con la cabeza) y objetos no ostensivos.

Del mismo modo, en cuanto a la utilidad de los números enteros en la vida cotidiana, los estudiantes, *lograron relacionar algunas situaciones de la vida diaria con los números enteros* y reconocieron al cero como punto de referencia. Sin embargo, los significados construidos hasta este momento se pueden reconocer como significados personales.

No obstante, en la socialización, con los argumentos, nociones y proposiciones expresadas por cada uno de los estudiantes, se inicia la construcción de significados institucionales de números enteros, puesto que según Godino, Batanero y Font (2019), los significados institucionales se relacionan con prácticas que se utilizan de manera conjunta para resolver problemas.

En este caso, a partir de los diferentes aportes de los estudiantes se complementaron los significados personales globales y los declarados, con los significados institucionales implementados. De manera que, los objetos no ostensivos manifestados por cada estudiante posibilitaron el acoplamiento entre los significados personales y los significados institucionales, acerca de números enteros.

Todo lo anterior, permitió reconocer que la curiosidad, el dialogo e interacciones de los estudiantes facilitan exteriorizar representaciones ostensivas como dibujos, gestos, graficas, signos, códigos y representaciones no ostensivas como expresiones de los significados construidos. En consecuencia, *las discusiones y socializaciones* se perfilan como maneras de construir significados de números enteros.

Es decir, el uso de objetos matemáticos ostensivos y no ostensivos como la argumentación y la socialización verbal de las tareas realizadas, posibilita la construcción de significados, puesto que según Godino, Batanero y Font (2019), los sistemas de prácticas operativas y discursivas constituyen el significado de los objetos matemáticos.

4.1.2.2 Momento dos: Utilidad de los números enteros

Objetivo: Aclarar asuntos con relación a los números enteros.

El momento dos, se desarrolló con el propósito de aclarar aspectos con relación a los números enteros, tales como situaciones en las que se utilizan y sus representaciones. Para la realización de este momento, se tuvo en cuenta la información expuesta en el video que se observó en el momento uno. A partir de esta información, en un primer punto, se solicitó a los estudiantes escribir otras formas o situaciones diferentes en las que se pueden utilizar números enteros en la vida diaria.

Los estudiantes escribieron algunas situaciones en las que se utilizan los números enteros, como se evidencia en la respuesta realizada por uno de los estudiantes.

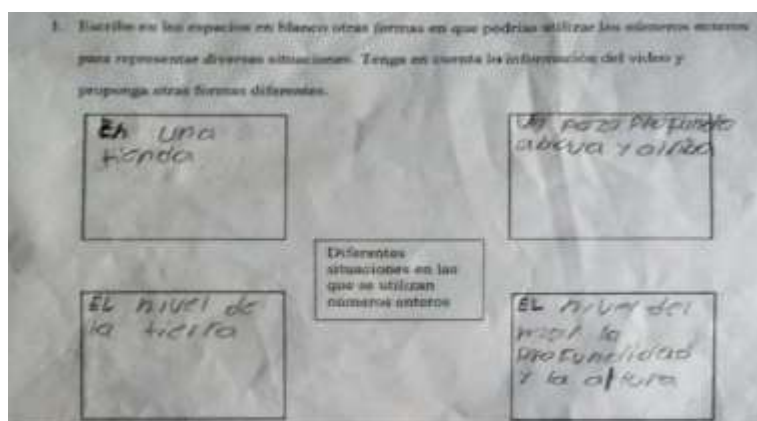


Ilustración 13. Situaciones en las que se utilizan los números enteros de acuerdo con César.

En consecuencia, según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019), quienes identifican varios tipos de significados personales y manifiestan que estos significados se expresan a partir de las prácticas realizadas de forma individual, se entiende que los estudiantes

tienen un significado personal global, acerca de la *relación de situaciones cotidianas con números enteros*, puesto que identificaron a estos números con situaciones relacionadas con su contexto. Sin embargo, hay que seguir construyendo los significados personales y propiciar el acoplamiento con los significados institucionales.

En las anteriores representaciones, no ostensivas manifestadas en las respuestas de los estudiantes, se puede observar que relacionaron el uso de los números enteros con diversas situaciones de la vida cotidiana, entre las cuales se destacan: deber en la tienda y profundidad de pozo. Estos aspectos dejan ver la importancia de los conocimientos previos en el proceso de construcción de significado de un objeto matemático, como lo plantean Godino, Batanero y Font (2012), quienes argumentan que los conocimientos iniciales de los estudiantes hay que tenerlos en cuenta en el proceso de construcción de significado, puesto que son el punto de partida para llegar a los significados institucionales.

Ahora bien, esta asociación entre situaciones cotidianas y números enteros dejan inferir que a los estudiantes se les facilita construir significados *al relacionar estos números con situaciones vivenciadas* por ellos. Aunque en el video se mostraron varias situaciones acerca de la utilidad de los números enteros, los estudiantes coincidieron en mencionar la tienda y el pozo profundo (en sus hogares sacan el agua para uso personal de pozos profundos), puesto que son situaciones que se relacionan con actividades de su cotidianidad.

Con la intención de seguir en el proceso de construcción de significados de números enteros, en un segundo punto, después de socializar las situaciones expuestas por los estudiantes con sus posibles representaciones, se les solicitó que escogieran o escribieran las situaciones que se presentan con más frecuencia en su vida cotidiana. Los estudiantes propusieron situaciones en las que se pueden utilizar los números enteros, tales como deber, tener, pérdidas, ganancias, profundidad de un pozo. Situaciones que se pueden observar en las siguientes imágenes.

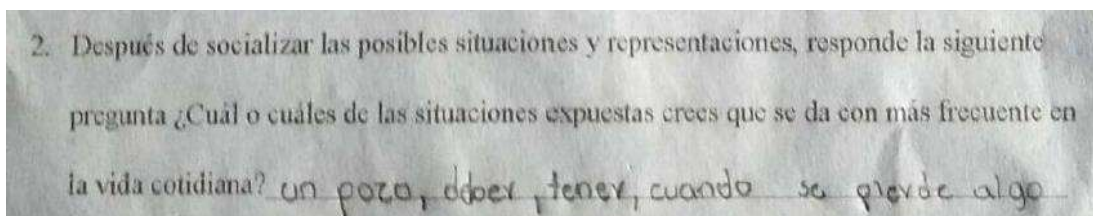


Ilustración 14. Situaciones en las que se utilizan los números enteros, según Pablo.

En las representaciones ostensivas y no ostensivas manifestadas de forma grupal e individual, se observa que los estudiantes relacionaron números enteros con situaciones de la vida cotidiana. Aspecto, que puede facilitar la construcción de significados de números enteros, puesto que los conocimientos previos son considerados importantes en el proceso de construcción de significados, según el Enfoque Ontosemiótico expuesto por Godino, Batanero y Font (2012).

En este caso, las diferentes situaciones expuestas por los estudiantes, se consideran conocimientos previos, ya que son situaciones con las que se relacionan casi a diario y puede ayudar a la construcción de significado de números enteros a partir de la asociación entre estos y las situaciones vividas. En este sentido, a los estudiantes se les facilitó *asociar los números enteros con la situación de pozo profundo, de deudas y lo que se tiene*, puesto que, son más cercanas a sus vivencias. Todos los días realizan compras en la tienda, piden fiado, pagan. Además, en esta región el agua utilizada para el consumo humano es escasa, por lo tanto, es común que en las casas de los estudiantes hayan hecho un pozo profundo para obtener el agua para el uso diario.

Por otro lado, cuando se les solicitó representar mediante un dibujo una de las situaciones expuesta, las representaron a través de objetos ostensivos, como se muestra en la siguiente respuesta realizada por un estudiante.



Ilustración 15. Representación de números enteros según Alberto.

Los objetos ostensivos, evidenciados en la respuesta anterior, permiten reconocer que los estudiantes han asociado deudas, izquierda y profundidad con números enteros negativos, y los números enteros positivos los asocian con medidas sobre el nivel de la tierra, derecha y con lo que tienen de dinero. En este sentido, según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019), se percibe que los estudiantes han construido significados personales implementados, exteriorizados a partir de las diferentes representaciones de objetos ostensivos emergentes en el desarrollo del momento uno y el momento dos.

De igual manera, a partir de los objetos matemáticos no ostensivos, también se pueden manifestar los significados construidos por los estudiantes, respecto a los números enteros. En una entrevista semiestructurada, realizada en forma grupal, se inicia preguntando a los estudiantes ¿cuáles situaciones de la vida diaria se podían representar con números enteros? Además, se solicita que expliquen su respuesta. Ante esta pregunta, los estudiantes en su turno la respondieron. Unos argumentaron muy bien sus respuestas, por ejemplo: *cuando voy a la tienda, si tengo plata, lo puedo representar con números positivos, si pago y no me queda nada sería el cero y si quedo debiendo se puede representar con los números enteros negativos* (registros en audios, 03- 07-19).

La anterior respuesta y los argumentos dados permiten articular los significados expresados por los estudiantes mediante objetos ostensivos con los significados expresados a partir de objetos no ostensivos. Por tanto, se valida la construcción de significados personales logrados, por parte de los estudiantes, respecto a la representación de diversas *situaciones del contexto con números enteros*.

Sin embargo, con la participación de todos los estudiantes en la entrevista se observa una transición o acoplamiento entre los significados personales e institucionales, ya que las respuestas y los argumentos de cada uno de los estudiantes, permitió que sus compañeros ampliaran sus significados acerca de números enteros y les facilitó llegar a acuerdos respecto a los significados estudiados del objeto matemático, tales como *la relación de los números enteros con situaciones de la vida cotidiana y la conformación de este conjunto numérico*, entre otros. De esta manera se reconoce que la participación de los estudiantes en forma colectiva en las

prácticas utilizadas para dar solución a la situación problemática, permiten el acoplamiento entre los significados personales e institucionales (Godino, Batanero y Font, 2019).

En una segunda pregunta, se solicitó a los estudiantes que escogieran una de las situaciones socializadas y que explicaran cómo se podía representar. Nuevamente, sus explicaciones están en correspondencia con el significado institucional implementados de números enteros, como se ve en la siguiente representación realizada por un estudiante.



Ilustración 16. Representación de una situación que involucra los números enteros, por Alberto.

Al pedirle al estudiante que dé una explicación de lo que quiere decir con este dibujo, expone lo siguiente: *Cuando debo algo a ese número se le coloca la rayita antes, para saber que estoy debiendo y cuando tengo plata quiere decir que es positivo* (Registro en audio, 03-07-19).

Se solicita al estudiante, que observe la imagen y se le pregunta si en esa representación están todos los elementos que conforman los números enteros. El estudiante se queda observando la imagen, piensa unos segundos y luego responde: *No está el cero*. Luego se le pregunta ¿cómo podrías involucrar al número cero en esa situación? El estudiante se quedó pensando en silencio. Después de un tiempo no respondió. Otro de sus compañeros que hacía parte del conversatorio respondió: *Cuando no tienes plata, cuando no estas debiendo, quiere decir que estas en cero. Como en el pozo profundo lo que está para abajo de la tierra son los números negativos y el nivel de la tierra es el cero* (Registro en audio, 03-07-19). Aspecto, que deja evidenciar que *al socializar y discutir ideas* acerca de un tema, es una manera de construir significados.

Terminada la intervención de este estudiante, su compañero estuvo de acuerdo con sus aportes haciendo gestos de aceptación con su cabeza. Estas respuestas dejan en evidencia la articulación entre objetos ostensivos y no ostensivos. Además, permiten reconocer que la participación colectiva en el proceso de enseñanza y aprendizaje posibilitan el acoplamiento entre los significados personales e institucionales (Godino, Batanero y Font, 2019).

En este sentido, se puede decir que los estudiantes han construido significados personales declarados, respecto a la identificación de números enteros negativos, positivos y del cero, que les permite hacer representación de algunas *situaciones cotidianas*. En cuanto a los significados institucionales, se infiere que los estudiantes, mediante las discusiones, han logrado hacer el acoplamiento entre sus significados personales declarados y los significados institucionales implementados, permitiendo entender las *socializaciones y discusiones* como maneras de construir significados de números enteros.

Cabe resaltar, que las interacciones entre estudiantes posibilitan la construcción de significados, respecto a un objeto matemático. En este caso, las socializaciones y entrevistas grupales permitieron que los estudiantes hicieran el acoplamiento entre los significados personales e institucionales.

4.1.2.3 Momento tres: el Rey \mathbb{Z} manda (investigación)

El momento tres se realiza con la finalidad de que los estudiantes recolecten información que permita llegar a la solución de la situación problemática inicial (Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada). A través del juego el Rey \mathbb{Z} manda, el cual, está distribuido en cuatro partes. Parte A, parte B, parte C y parte D.

Parte A

La parte A, del juego consistió en que el Rey \mathbb{Z} manda les pidió a los estudiantes que se ubicaran en un punto de referencia y después levantaran su brazo derecho y miraran a ese lado, luego que nombraran los objetos que se encontraban en esa dirección.

De igual forma, se les pidió que levantaran el brazo izquierdo e hicieran el mismo proceso que habían hecho con el lado derecho. Además, se les solicitó etiquetar los objetos que estaban hacia el lado derecho con los números enteros positivos, escritos en tarjetas de cartulina. Dichos números se les entregaron en un montón, de manera desordenada (5, 1, 4, 3, 2). Así mismo, para etiquetar los objetos que estaban a su lado izquierdo, se les entregaron tarjetas marcadas con los números negativos, en ese montón también estaba el número cero (-3, -,5, -1, -4, 0,-3), como se muestra en la siguiente imagen.



Ilustración 17. Etiquetas con números enteros.

Los estudiantes César, Pablo y Alberto, en el desarrollo del juego, evidenciaron significados personales declarados, a través de procedimientos y lenguaje que se podrían vincular con significados institucionales, puesto que etiquetaron los objetos que estaban a su lado derecho con números positivos y los que estaban a su lado izquierdo con números negativos, como se ve en el siguiente procedimiento realizado por un estudiante.



Ilustración 18. Etiquetando objetos con números enteros a la derecha e izquierda.

Sin embargo, dos de los estudiantes al referirse al nombre que representa un número entero negativo, siempre decían primero el número y después el signo. Por ejemplo: cuando se les preguntó, si hubiera otro objeto después del último que etiquetaste, hacia tu lado izquierdo ¿con qué número lo etiquetarías? Los estudiantes contestaron: *con el seis menos*. Aspecto que deja entender, que a estos estudiantes les falta seguir construyendo significados personales de números enteros y hacer el acoplamiento con los significados institucionales.

Terminado el juego, se les pidió a los estudiantes que representaran gráficamente lo vivenciado en el desarrollo del juego. En la siguiente representación, se pueden articular las prácticas discursivas con las prácticas operativas, es decir, las representaciones ostensivas son semejantes a las representaciones no ostensivas. En otras palabras, sería, la correspondencia entre lo que hacen y dicen los estudiantes, como se puede observar en las siguientes representaciones.

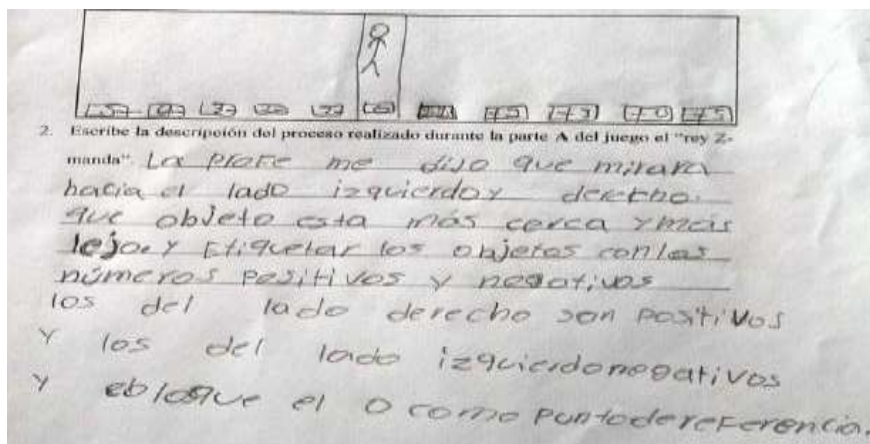


Ilustración 19. Objetos ostensivos y no ostensivos utilizados, por César

Además, cuando en la entrevista individual se les preguntó, por qué habían representado el juego de esa forma, los dos estudiantes respondieron muy similar y al justificar su respuesta dijeron, que los números que ubicaron a la izquierda *eran el uno menos, el dos menos...*, porque *esos números fueron los que me entregaron para colocar hacia el lado izquierdo y a ese lado van los negativos* (Registro en audio, 09-07-19).

Por tanto, se evidencia que en las anteriores representaciones ostensivas (que se pueden ver a través de gráficas, dibujos, signos, entre otras) y no ostensivas (las expresiones) se deja ver que

los estudiantes han construido significados personales declarados, acerca de números enteros, a través de la participación individual en el juego, no obstante, les falta llegar al significado personal logrado y hacer la articulación o acoplamiento con los significados institucionales.

Sin embargo, uno de los estudiantes (Pablo) al responder a la misma pregunta que se les hizo a sus compañeros durante el desarrollo del juego, respondió: *el número que sigue después de la última etiqueta era el menos seis* y en la representación que hizo del juego también mostró un uso del lenguaje en correspondencia con los significados personales logrados, como se evidencia en las siguientes representaciones.

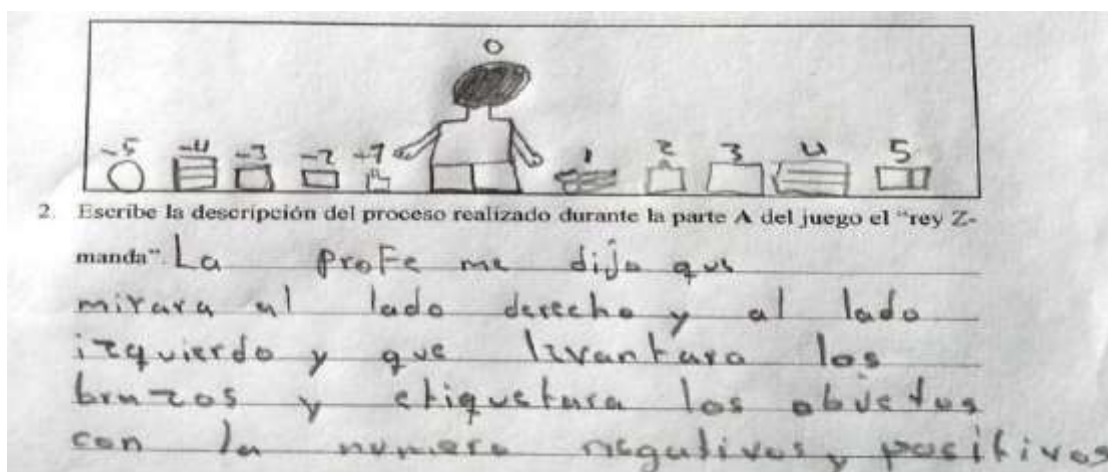


Ilustración 20. Objetos ostensivos y no ostensivos utilizados por Pablo.

De igual forma, cuando se le pidió explicar la representación del juego el estudiante utilizó un lenguaje acorde con los significados institucionales implementados de números enteros, argumentando que *los números enteros negativos son los que ubiqué al lado izquierdo y son el menos uno, el menos dos...* (Registro en audio, 09-07-19). Aspecto que permite inferir, que ha construido el significado personal logrado respecto a la representación de signos y símbolos de números enteros negativo, positivo y el cero. Significado construido a través de la participación del estudiante en el desarrollo de las actividades realizadas. Este significado es manifestado por el estudiante mediante las distintas representaciones ostensivas como dibujos y graficas; y no ostensivas como proposiciones, argumentos, justificaciones entre otros.

Parte B

Por otro lado, la parte B del juego el Rey \mathbb{Z} manda, consistió en colocar una cuerda en forma horizontal en el piso de un salón, con varias figuras geométricas pegadas a ella, al lado derecho y al lado izquierdo, respecto a un punto de referencia.

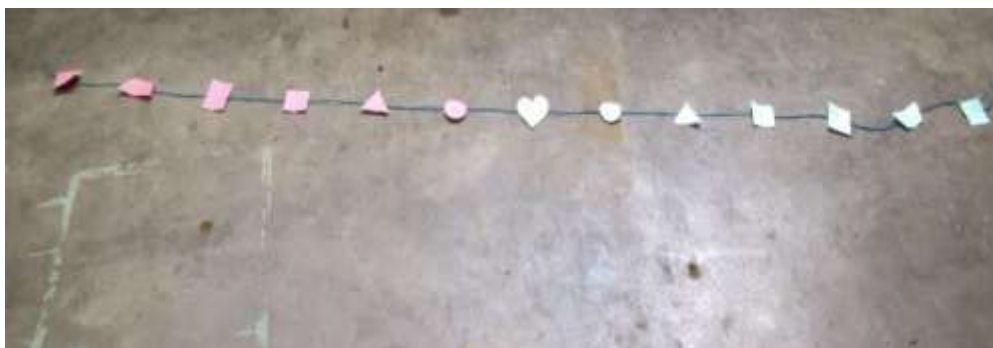


Ilustración 21. Cuerda con figuras geométricas planas.

Los participantes en su turno (la actividad se desarrolló en forma individual, ningún estudiante estaba mirando o escuchando lo que estaban realizando sus compañeros), parados en el punto de referencia, debían nombrar las figuras geométricas que estaban a su derecha y a su izquierda y luego enumerarlas con los números enteros.

Al respecto los tres participantes, nombraron las figuras geométricas y las etiquetaron correctamente haciendo uso de los números enteros como se puede ver en el siguiente procedimiento realizado por un estudiante.



Ilustración 22. Etiquetando figuras geométricas con números enteros.

Cuando se pidió que justificaran la forma como enumeraron las figuras geométricas respondieron: *porque los números enteros negativos van al lado izquierdo* (muestran con el brazo el lado izquierdo de la cuerda) *y los números enteros positivos van al lado derecho* (muestra el lado que queda a su derecha) *y el cero es el punto de referencia* (muestra la figura geométrica diferente) (Registro en audio, 12-07-19).

Por consiguiente, se puede inferir que los estudiantes han construido los significados personales logrados respecto a la ubicación de los números enteros negativos, positivos y el cero, asociados a lateralidad. Manifestando dichos significados a partir de gestos y expresiones corporales y verbales.

El juego continuó, pegando la cuerda en una escalera en el piso del salón de juegos, donde cada figura geométrica correspondía a un escalón de esta y a partir de este momento, se pidió a los estudiantes en su turno que ubicaran sus pies detrás del punto de referencia y nombraran nuevamente las figuras geométricas y que las enumeraran utilizando las tarjetas en las que tenían escrito los números enteros. Los tres estudiantes respondieron a las indicaciones satisfactoriamente, nombraron y enumeraron bien las figuras, como se ve a continuación.



Ilustración 23. Etiquetando figuras geométricas planas en la escalera con números enteros.

Luego se indicó, que colocaran la escalera en forma vertical y a partir de esta nueva ubicación se les preguntó a los estudiantes en su turno *¿Cuál figura representa el punto de referencia?* A lo cual, respondieron correctamente, *¿Dónde ubicarías este número (-2)?* Respondieron que en el

rectángulo rosa (era la ubicación correcta), ¿Dónde ubicas esta otra etiqueta (3)? En el trapecio azul, también correspondía a la ubicación correcta, como se puede evidenciar en las siguientes imágenes.



Ilustración 24. Estudiante etiquetando figuras planas en una escalera, según el número entero dado.

Por último, se les preguntó ¿Qué relación existe entre la ubicación de la escalera y la ubicación de los números enteros? A esta pregunta los tres estudiantes contestaron similarmente, se toma como ejemplo uno de los argumentos expuesto por un estudiante: *cuando la escalera estaba acostada en el suelo, los números negativos estaban en el lado izquierdo y ahora que está parada se encuentra hacia abajo y los números que estaban a la derecha ahora están hacia arriba y son los positivos (registros en audio, 12-07-19).*

Los estudiantes justificaron las respuestas y hacían gestos con las manos dando las diferentes direcciones arriba, abajo, derecha e izquierda. Aspectos que, según el enfoque ontosemiótico, planteado por Godino, Batanero y Font (2012), manifiestan que el lenguaje gestual posibilita la construcción de significados, puesto que el lenguaje, los procedimientos, los conceptos, los argumentos las proposiciones constituyen el significado de un objeto matemático.

Por tanto, se entiende que los estudiantes habían logrado, hasta este momento, construir el significado personal logrado respecto a la ubicación de números enteros negativos a la izquierda

y hacia abajo y números enteros positivos hacia la derecha y hacia arriba, como se puede ver en las siguientes representaciones ostensivas y no ostensivas realizadas por un estudiante.

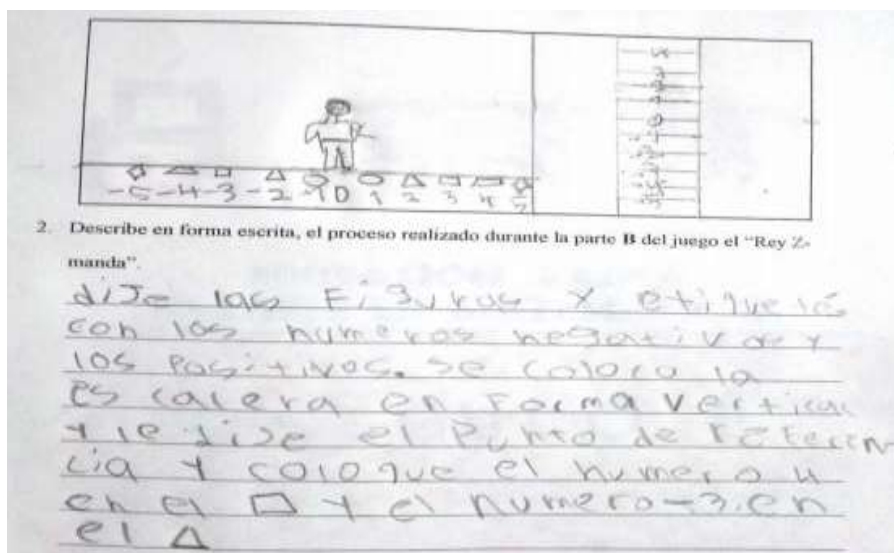


Ilustración 25. Representaciones ostensivas y no ostensivas de números enteros realizadas por César.

Por tanto, se puede inferir que los estudiantes han construido significados de números enteros a partir de la relación con lateralidad y direccionalidad de manera que asocian la ubicación a la izquierda y abajo de un punto de referencia con los números negativos y la ubicación a la derecha y arriba con números positivos, siempre partiendo de un punto de referencia: el número cero.

La anterior inferencia se puede comprobar, con los argumentos de los estudiantes, cuando se solicitó que explicaran lo qué paso con la ubicación de los números enteros al colocar la escalera en forma vertical, ya que ellos, argumentaron *que los números que antes estaban a la derecha ahora estaban hacia arriba y los que estaban a la izquierda ahora estaban hacia abajo del punto de referencia, ¿Qué entiendes de ese cambio de ubicación? Quiere decir, que los números enteros negativos se pueden representar hacia abajo o hacia la izquierda y los números enteros positivos se pueden representar hacia la derecha o hacia arriba* (Registro en audio, 12-07-19).

Por consiguiente, según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019), se reconoce que las distintas manifestaciones expuestas por los estudiantes, respecto a los números enteros, permiten dar cuenta de que han construido significados personales logrados en cuanto a la ubicación, es decir, a la derecha y arriba con números positivos e izquierda y abajo con números negativos.

También, se entiende que los estudiantes han logrado hacer el acoplamiento entre los significados personales y los significados institucionales, porque las representaciones exteriorizadas por los estudiantes están en correspondencia con los significados institucionales referenciales de números enteros y aunque las prácticas las realizaron en forma individual, el juego que suscito dichas representaciones fue realizado en forma colectiva, evidenciando el acoplamiento de sus significados personales con los institucionales, respecto a la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera.

Parte C

Esta parte consistió en que los estudiantes marcaran en una cuerda un punto de referencia y a partir de allí señalaran espacios en la cuerda que tuvieran la misma longitud, es decir que marcaran espacios siguiendo un patrón, para luego, medir la profundidad al piso respecto del nivel de la cancha polideportiva.

Los estudiantes marcaron la cuerda, usando medidas no convencionales, tales como dedos y jemes (abertura que se obtiene extendiendo el dedo pulgar y el índice de una mano). Uno de los estudiantes utilizó un patrón de cuatro dedos, otro con longitudes de cinco dedos y el otro con longitudes de un jeme. Luego se les pidió que midieran la profundidad al suelo, tomando como punto de referencia la superficie de la placa polideportiva.

Los estudiantes, colocaron el punto de referencia de la cuerda en la superficie de la cancha y midieron la profundidad al suelo. A cada estudiante le dio un resultado diferente, debido al patrón de medida y a la parte de la cancha que escogió cada uno para medir. En la siguiente imagen se puede observar el procedimiento realizado por un estudiante.



Ilustración 26. Alberto midiendo la profundidad de la placa al suelo.

En esta práctica se pudo observar que los estudiantes midieron la profundidad de la placa al suelo en la cancha polideportiva, a partir de un punto de referencia que ellos marcaron en la cuerda, y cuando se les preguntó por el símbolo que representa la medida de la profundidad del suelo, uno de los estudiantes respondió *que menos tres*, el otro estudiante que *menos dos* y el ultimo estudiante respondió que *menos tres*, dejando en evidencia los significados personales construidos y el acoplamiento de dichos significados con los institucionales acerca de números enteros negativos, asociando los números negativos con profundidad (los resultados de cada estudiante son diferente porque, los patrones de medidas y la profundidad del suelo no eran iguales).

Dicho acoplamiento, se evidencia durante la medición de la profundidad de la cancha ya que los estudiantes, se apoyaban unos a otros y *discutían* las medidas y representaciones obtenidas por cada uno. Aspecto que generó la *socialización* de los resultados y que llegaron a acuerdos a partir de las medidas realizadas por cada estudiante. Los acuerdos tienen que ver con la relacionar la profundidad de la cancha respecto al nivel del suelo con números negativos y la parte que está sobre la superficie de la placa con números positivos, tomando como referencia la superficie de la cancha.

Por otro lado, se les pidió a los estudiantes que representaran y explicaran lo sucedido en la actividad realizada con la cuerda. Los estudiantes realizaron la representación mediante objetos ostensivos como se puede observar en una de las respuestas elaboradas por uno de los estudiantes.

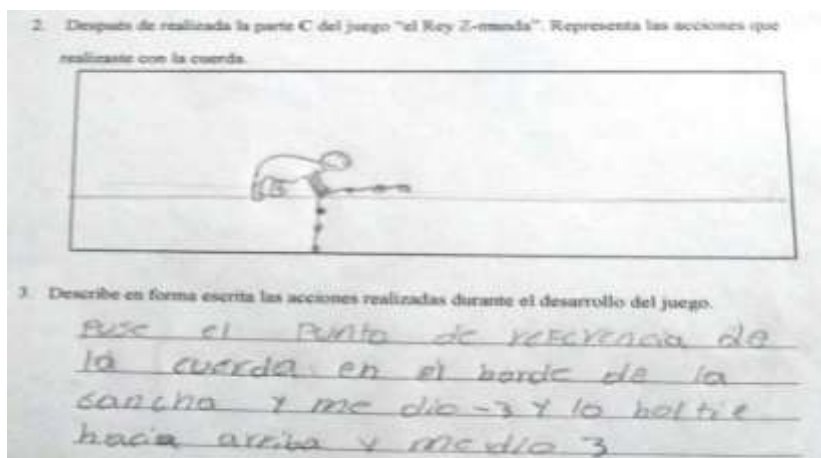


Ilustración 27. Representaciones de la medición, realizada por César.

Por tanto, se infiere que los estudiantes han construido significado personal logrado en acoplamiento con los significados institucionales, manifestados a partir de las anteriores representaciones ostensivas (dibujos, graficas) y representaciones no ostensivas (conceptos, gestos, argumentos) que permiten, identificar que *los estudiantes han construidos estos significados relacionando situaciones de la vida real* como la profundidad del suelo, con procedimientos matemáticos como medición, conteo y comparación. De esta manera, se reconoce que las prácticas que el estudiante utiliza para resolver una situación posibilitan la construcción de significados de un objeto matemático (Godino, Batanero y Font, 2019).

Parte D

De igual forma, en el momento D, del juego el Rey \mathbb{Z} manda, a manera de conclusión, se realizó un *socialización* grupal en donde los estudiantes, en forma verbal y escrita, manifestaron sus argumentos, conceptos, proposiciones, procedimientos, entre otros; con relación al conjunto

de números enteros, de tal forma, que dieron cuenta de los significados construidos acerca de la ubicación de los números enteros, como se puede ver a continuación.

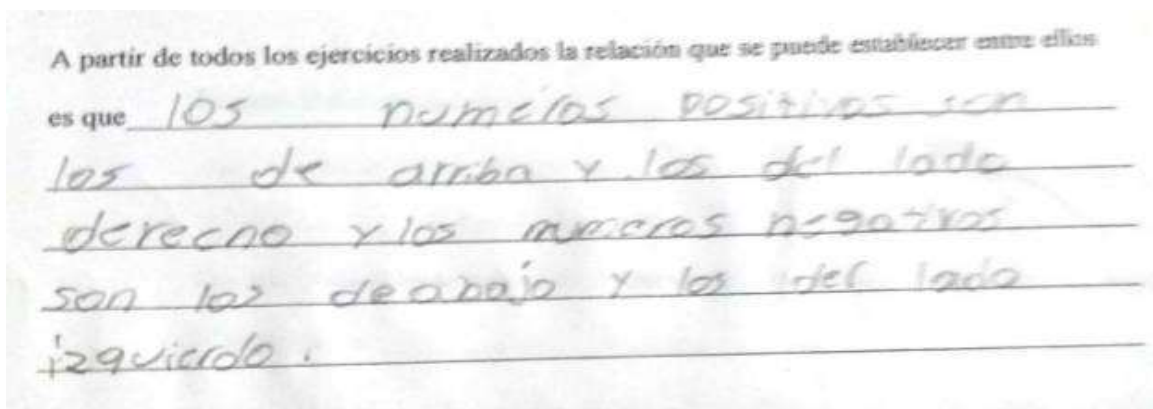


Ilustración 28. Objetos no ostensivos acerca de la ubicación de números enteros, Pablo.

Además, pudieron exteriorizar representaciones internas relacionadas con la conformación de los números enteros. Un estudiante manifestó que este conjunto numérico *es una reunión de números*, y los otros dos compañeros complementaron, diciendo que estaban conformados por *los números enteros negativos, por los números enteros positivos y por el cero* (registro en audio, 19-07-19). En las siguientes representaciones se puede evidenciar lo expuesto anteriormente.

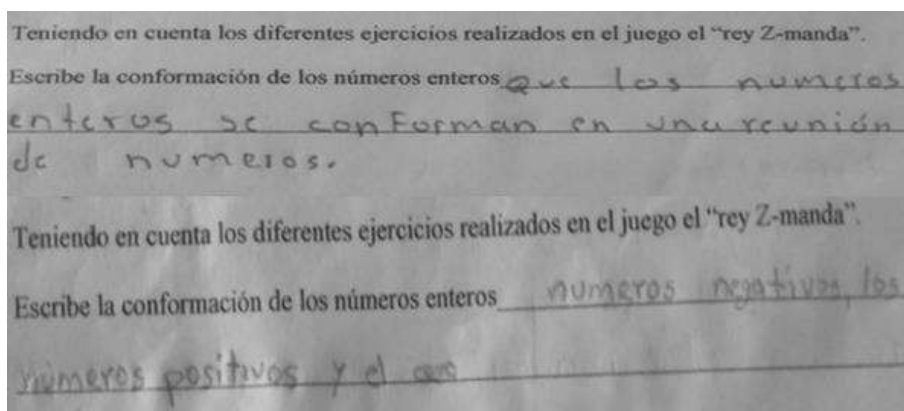


Ilustración 29. Objetos no ostensivos acerca de la conformación de números enteros, Alberto.

Las representaciones exteriorizadas por los estudiantes permiten evidenciar que han construido significados personales logrados, acerca de la conformación del conjunto de números enteros acoplados a los significados institucionales, puesto que en el desarrollo del momento dos de la actividad de modelación, varias de las prácticas que ellos realizaron, las hicieron de manera colectiva en las que a través de *discusiones* llegaron a acuerdos en relación con los significados del objeto matemático en estudio.

Por otro lado, los estudiantes manifestaron a través de representaciones no ostensivas, el significado del cero como punto de referencia. En las siguientes imágenes se muestran las representaciones exteriorizadas por los estudiantes, respecto al cero en los números enteros.

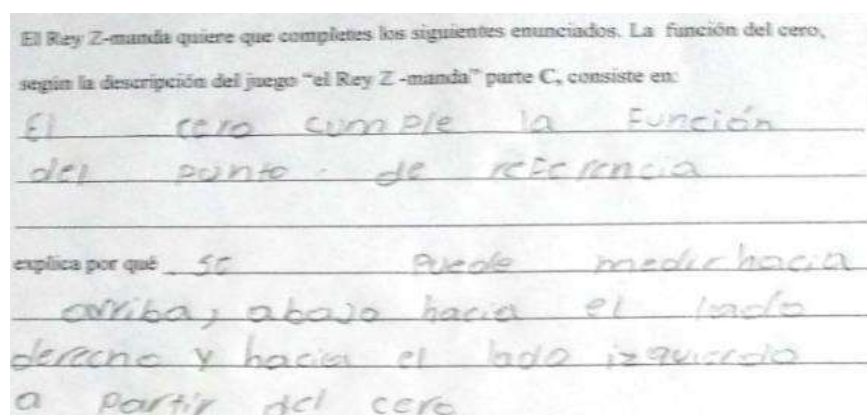


Ilustración 30. Representación de significado del número cero, por César.

Los anteriores significados manifestados por los estudiantes, acerca de la ubicación, conformación de los números enteros y el cero como punto de referencia, permiten concluir que los estudiantes han construido significados personales logrados con relación a los números enteros, manifestando que estos están compuestos por número positivos, negativos y el cero. Además, durante el desarrollo de este momento de la actividad de modelación se evidencia el acoplamiento entre estos significados con los significados institucionales implementados.

Esta conclusión se sigue a partir de los aportes de Godino, Batanero y Font (2019), quienes manifiestan que los significados personales se construyen a partir de todo lo que hace y dice una

persona en forma individual, para resolver una situación. Y que los significados institucionales se manifiestan a través de prácticas realizadas en forma colectiva.

Por tanto, se asume que los estudiantes han declarado construir significados personales de números enteros en cuanto a ubicación y conformación de los números enteros y del número cero como punto de referencia a partir del cual se pueden ubicar los números enteros positivos y negativos en la recta graduada entera. Además, a partir de los dibujos, gestos, prácticas discursivas y escritos de los estudiantes se muestra que lograron hacer acoplamiento entre los significados personales declarados y los significados institucionales implementados. Aspecto que deja en evidencia que *investigar acerca de números enteros* se puede reconocer como una de las maneras de construir significados de este conjunto numérico.

Sin embargo, aunque son variadas las representaciones exteriorizadas por los estudiantes, en forma individual y colectiva, aún falta percibir el acoplamiento entre los significados personales logrados con los significados institucionales referenciales.

4.1.2.4 Momento cuatro: Represento situaciones

Este momento se diseñó y aplicó con la finalidad de que los estudiantes respondieran o resolvieran la situación problemática (¿Cuáles son los números enteros y cómo se representan?), mediante representaciones o modelos. En este momento, los estudiantes dieron cuenta de la solución a la situación problemática a través de modelos o representaciones, exteriorizadas mediante representaciones u objetos ostensivos y no ostensivos, en donde se identifica que elaborar modelos se reconoce como manera de construir significados.

En una primera actividad se les pidió a los estudiantes que leyeran la situación (¿Cuáles son los números enteros y cómo se representan?) y que según sus conocimientos la respondieran. Los estudiantes, realizaron representaciones ostensivas que permitieron dar cuenta de la situación en cuestión, como se puede ver en una respuesta realizada por un estudiante, en la que representa situaciones propias de la tienda escolar.

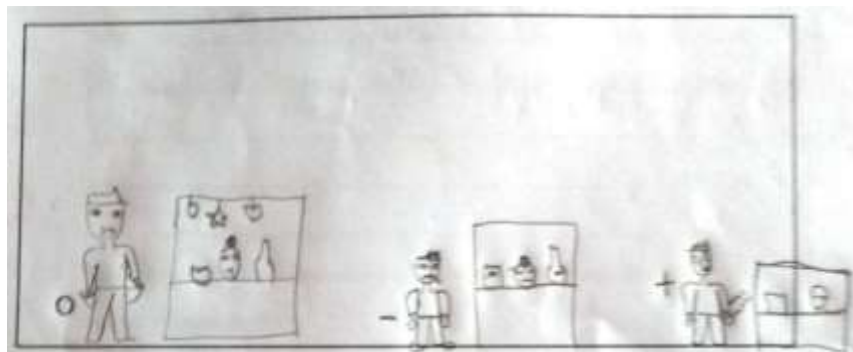


Ilustración 31. Modelos y solución realizados, por Alberto.

Según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019), se evidencia que el estudiante construyó significados personales logrados de números enteros, tales como: la identificación de números enteros negativos y números enteros positivos a través la utilización de signos negativos y positivos (-, +), puesto que, en las prácticas operativas exteriorizadas por él, de forma individual, realiza dibujos *asociados a situaciones de la tienda*, que le permitió representar de forma ostensiva a los números enteros.

De igual forma, a través de prácticas discursivas deja de manifiesto los significados construidos, puesto que mediante las explicaciones realizadas a sus representaciones ostensivas da cuenta de dichos significados como se puede ver en sus argumentos: *en el dibujo donde está el número cero quiere decir que el niño no tiene plata, por eso está triste, el dibujo donde está el signo menos significa los números enteros negativos, el niño está triste porque está debiendo y en el dibujo que coloque el signo más quiere decir que tiene plata para comprar, por eso el niño está feliz* (registro en audio, 30-07-19).

Tanto las prácticas operativas como las practicas discursivas exteriorizadas por este estudiante, permiten entender que sus significados acerca de números enteros, *los asoció con situaciones de la vida cotidiana* como la de deber, tener y no tener nada.

Por otro lado, los estudiantes, participantes en el proceso investigativo, realizaron modelos similares para representar los números enteros. Uno de esos modelos o representaciones elaboradas por un estudiante se muestra a continuación.

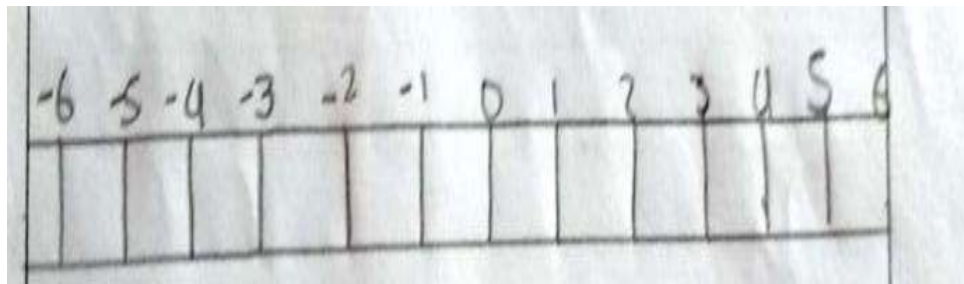


Ilustración 32. Modelo representado por Pablo.

De los anteriores objetos ostensivos se puede entender que los estudiantes construyeron significados personales logrados, acerca de la identificación del número cero como punto de referencia para ubicar los números enteros negativos y positivos en la recta y la ubicación de estos números, relacionada con la lateralidad (izquierda, derecha), puesto que en sus prácticas discursivas, explicaron la representación elaborada por ellos, argumentando que: *en la recta se toma un punto de referencia que se marca con el número cero y de ahí se ubican los enteros negativos hacia el lado izquierdo y los enteros positivos hacia el lado derecho* (Registro en audio, 30-07-19).

Tomando como referencia las prácticas operativas y prácticas discursivas utilizadas por los estudiantes para resolver la situación problemática que desencadenó estas prácticas, se puede reconocer que los significados personales construidos acerca de números enteros, tales como el número cero como punto de referencia, identificación de signos positivo y negativo (+,-) y ubicación en la recta graduada entera, *asociada a situaciones cotidianas como lateralidad, deber, tener, no tener nada, con direccionalidad y profundidad* como se muestra en una de las representaciones realizadas por un estudiante.



Ilustración 33. Relación de números enteros con profundidad, por César

Además, de los anteriores significados, exteriorizados por los estudiantes a través de los objetos matemáticos ostensivos como la recta numérica, los dibujos de la tienda y la medición del pozo profundo, mediante los cuales dan cuenta de ¿Cuáles son los números enteros y como se pueden representar?, coinciden con los objetos matemáticos no ostensivos manifestados por los estudiantes a través de prácticas discursivas, como se puede ver a continuación en la siguiente respuesta.

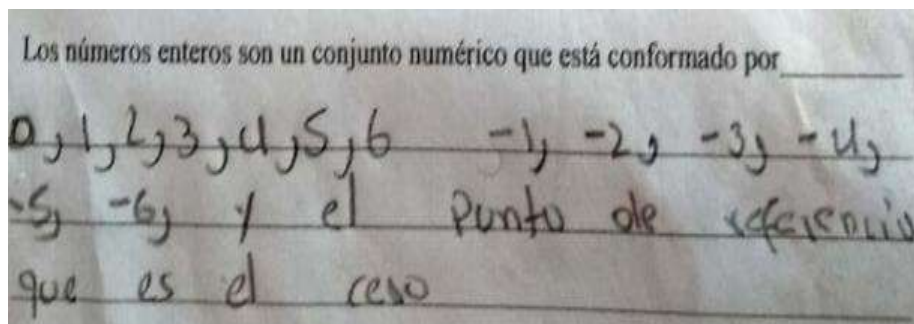


Ilustración 34. Respuesta al problema de manera no ostensiva, Pablo.

Tales manifestaciones, permiten concluir que los estudiantes a través de los diferentes modelos (objetos ostensivos y no ostensivos), lograron dar respuesta acertada a la situación problemática (¿cuáles son los números enteros y cómo se representan?). Aspecto, que permite reconocer *la elaboración de modelos o representaciones* de situaciones que se pueden considerar como una manera de construir significados de números enteros y, que los significados personales logrados que construyeron los estudiantes, en el desarrollo de los cuatro momentos de esta actividad, se relacionan con los significados institucionales implementados.

4.1.2.5 Momento cinco: Verificación y socialización de resultados

Este momento se desarrolló con la finalidad de verificar y socializar los resultados o solución del problema que los estudiantes manifestaron. Este momento consistió en que a manera de plenaria el grupo de estudiantes involucrados en el proceso de investigación socializaran los resultados del problema que ellos habían estado trabajando en el momento cuatro.

Cada estudiante en su turno mostró su trabajo a los compañeros del grupo y explicó sus representaciones. De manera que César mostró una recta numérica y explicó diciendo que los números enteros están conformados por una reunión de números tales como el cero, los números enteros negativos y los números enteros positivos.

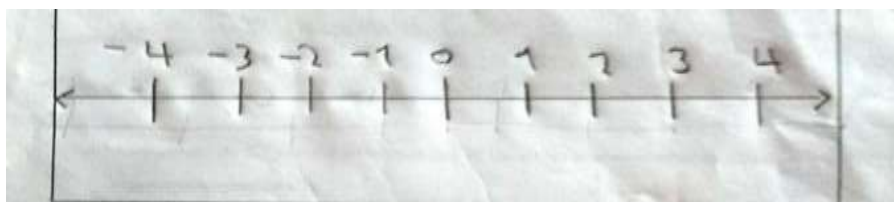


Ilustración 35. Solución al problema de forma ostensiva dada por César.

Alberto también, compartió sus representaciones a través de los siguientes dibujos:

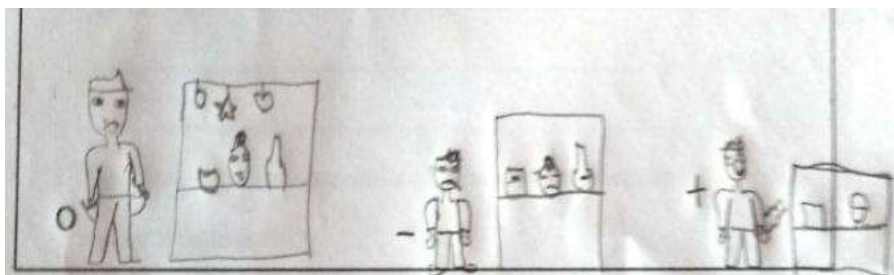


Ilustración 36. Solución al problema de forma ostensiva dada, por Alberto.

A las inquietudes expuesta por sus compañeros, respecto a su representación, él explicó, diciendo que *el primer dibujo significa el cero porque no tenía nada de dinero en los bolsillos, por eso estaba triste, el segundo dibujo significa los números enteros negativos, porque estaba debiendo, también está triste y el tercer dibujo significa que tenía algo de plata para comprar y*

que por eso estaba feliz (Registro en audio, 08-08-19). Por su parte, Pablo representó los números enteros en una escalera en forma horizontal, como se ve en la imagen.

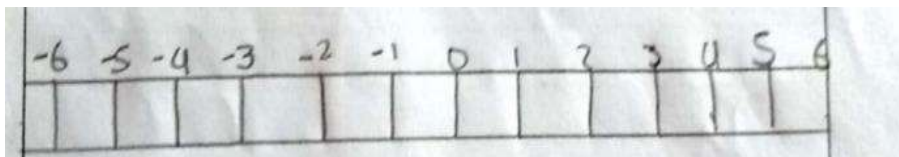


Ilustración 37. Solución al problema de forma ostensiva dada por Pablo.

En la socialización con sus compañeros de grupo Pablo, argumenta que *los números enteros negativos van al lado izquierdo de cero y los números enteros positivos van al lado derecho.* (Registro en audio, 08-08-19).

A partir de todas las anteriores prácticas operativas y discursivas suscitadas mediante la *socialización y discusión* de los modelos elaborados por los estudiantes, se puede reconocer que estos han construido significados de números enteros en relación con situaciones de su cotidianidad y que dichas prácticas en forma colectiva permitieron el acoplamiento entre los significados personales y los significados institucionales.

Terminada la plenaria o socialización con el grupo de estudiantes involucrados en el proceso investigativo. Se pide a los estudiantes que teniendo en cuenta las diferentes opiniones manifestadas en la plenaria, realicen una cartelera en cartulina, donde den respuesta a la pregunta *¿Cuáles son los números enteros y como se representan?* Además, esta actividad se debe de *socializar* con los demás estudiantes de los grados tercero, cuarto y quinto.



Ilustración 38. Estudiantes haciendo carteleras.

Los estudiantes hicieron las siguientes carteleras, en las cuales mostraron la solución al problema presentado, (¿Cuáles son los números enteros y cómo podemos representarlos?). En el proceso de elaboración de la cartelera, los estudiantes siguieron *discutiendo*, acerca de los significados construidos en las actividades anteriores. Aspecto que permitió que los estudiantes se apropiaran de dichos significados. En las carteleras los estudiantes, representaron la solución a la pregunta que generó la actividad matemática y la *socializaron*, como se puede observar en la siguiente imagen.



Ilustración 39. Exposición de significados construidos acerca de números enteros.

Después que terminaron la elaboración de las carteleras, las expusieron ante sus compañeros de grado tercero, cuarto y quinto, explicando la conformación de los números enteros, la ubicación en la recta y la *asociación de números enteros con situaciones de la vida diaria* como pozo profundo, deber, tener, nivel de la tierra, entre otras.

La socialización y discusión de los resultados de la situación, la elaboración y exposición de carteleras, permitió que los estudiantes pudieran acoplar los significados personales de números enteros con los significados institucionales de este conjunto numérico, puesto que según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019), los significados institucionales se logran a partir de los sistemas de prácticas socialmente compartidos, es decir, las practicas realizadas en forma colectiva.

Con la presentación de carteleras ante sus compañeros, terminó la actividad uno de modelación, con la cual se pretendía que los estudiantes construyeran significados de números enteros, tales como la identificación de los números enteros negativos, de números enteros positivos y la ubicación de estos en la recta numérica a partir de situaciones como lateralidad, direccionalidad, deber, tener, entre otras. Permitiendo observar que, en *la socialización y discusión* de los resultados, se generaron espacios para que los estudiantes dialogaran, argumentaran y justificaran sus ideas. Aspectos, que permiten asumir *la socialización y discusión* de un tema como una manera de construir significados de números enteros.

En el desarrollo de los cinco momentos de esta actividad los estudiantes construyeron significados de números enteros, puesto que según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019), los significados se construyen de forma progresiva. Los significados personales se inician con el significado global, luego el declarado y después el logrado, los cuales deben de acoplarse con los significados institucionales implementados y referencial, para poder decir que hubo apropiación de los significados de un objeto matemático por parte de los estudiantes.

Por tanto, en el desarrollo del momento uno de la actividad uno de modelación, se reconoce que los estudiantes a partir de la discusión acerca de la conformación, ubicación y utilidad de los números enteros utilizaron objetos ostensivos como símbolos y objetos no ostensivos como expresiones, para dar cuenta de sus significados. Entre los objetos ostensivos se pueden identificar los signos (+, -), mientras que los objetos no ostensivos que los estudiantes utilizaron fueron expresiones como punto de referencia, argumentos sobre la ubicación de los números enteros positivos y negativos.

También relacionaron los números enteros con algunas *situaciones de la vida diaria*, de manera que el signo menos lo relacionaron con deber, con profundidad de un pozo, entre otras y el signo más lo relacionaron con tener, con altura, entre otras. En consecuencia, se puede decir que los estudiantes construyeron significados personales declarados en cuanto a la identificación de números enteros positivos y negativos y reconocimiento del cero como punto de referencia, relación de los números enteros negativos con deudas y profundidad como forma de

representarlos y la relación de los números enteros positivos con tener y altura como forma de representar los números enteros.

En el momento dos, se reconoce que los estudiantes a partir de interacciones con sus compañeros manifestaron sus significados a través de objetos ostensivos como dibujos o representaciones de números enteros y prácticas discursivas, tales como justificaciones y argumentos de la relación de sus representaciones ostensivas con números enteros. Algunas de estas prácticas se realizaron de manera colectiva, como *la socialización y discusión* de las representaciones ostensivas, permitiendo identificar tanto los significados personales como el acoplamiento con los significados institucionales.

De esta manera se puede evidenciar que los estudiantes, además de manifestar significados personales de números enteros en aspectos como representaciones mediante dibujos de *situaciones de la vida cotidiana*, como tener, deber, profundidad de la tierra, la tienda, también lograron hacer el acoplamiento entre sus significados personales declarados con los significados institucionales implementados.

Puesto que, se observó que mediante la socialización y argumentación de sus representaciones ostensivas fueron *socializando y discutiendo* sus significados acerca de números enteros. De manera que se logró aclarar algunas diferencias con relación a estos significados, justificando así, la relación entre los significados personales con los institucionales, ya que según Godino, Batanero y Font (2019), los significados institucionales se logran a partir de las prácticas que se realicen en forma colectiva.

Asimismo, en el momento tres de la actividad uno, los estudiantes manifestaron sus significados a través de objetos ostensivos y no ostensivos. Los objetos ostensivos que los estudiantes simbolizaron fueron representaciones de los números enteros a través de dibujos de la escalera en forma horizontal, con los números enteros positivos al lado izquierdo, el cero en el punto de referencia y los números enteros positivos hacia el lado derecho.

También, hicieron representaciones de la escalera en forma vertical, colocando los números enteros positivos hacia arriba del punto de referencia y los números negativos hacia abajo del punto de referencia. Los objetos no ostensivos manifestados por los estudiantes tienen que ver con los argumentos y justificaciones de los objetos ostensivos, en donde dan cuenta de la relación entre la ubicación de la escalera y la ubicación de los números enteros.

Todas las manifestaciones o sistemas de prácticas realizadas por los estudiantes en el desarrollo de este momento fueron generadas a partir del juego el Rey \mathbb{Z} manda, permitiendo reconocer que los estudiantes construyeron significados personales declarados acerca de números enteros en cuanto a la ubicación de estos en la recta numérica. De manera que relacionaron la ubicación de los números enteros negativos con la ubicación hacia la izquierda y hacia abajo del punto de referencia. Los números enteros positivos los relacionaron con la ubicación hacia el lado derecho del cero y hacia arriba de él.

En un cuarto momento, los estudiantes solucionaron el problema inicial ¿Cuáles son los números enteros y como se pueden representar? Discusiones, acerca de los números enteros suscitó en los estudiantes, prácticas operativas y discursivas manifestadas a través de modelos representados con objetos ostensivos y no ostensivos. Los objetos ostensivos declarados se relacionan con dibujos como la recta numérica, los números enteros en una escalera ubicada en forma horizontal y la representación mediante dibujos del cero asociado a no tener nada, los números negativos con deber en la tienda y los números enteros positivos con tener dinero.

Los objetos no ostensivos se relacionan con justificaciones que los estudiantes hicieron de sus representaciones ostensivas, tales como los números son una reunión de números, conformada por los enteros positivos, los enteros negativos y el cero; los números enteros son menos uno, menos dos, menos tres... el cero y uno, dos, tres...y se pueden representar en la recta numérica en forma vertical y en forma horizontal.

Las anteriores manifestaciones, permiten identificar que los estudiantes han construido significado personal logrado de números enteros en cuanto al reconocimiento de los números enteros negativos, positivos y cero y, a la ubicación de estos en la recta numérica, al relacionar la

ubicación de la escalera con la ubicación de los números enteros en aspectos como lateralidad y direccionalidad.

En el último momento de la actividad de modelación, los estudiantes socializan y discuten acerca de los modelos elaborados en el momento cuatro y luego presentaron una solución final. En este momento, los estudiantes expusieron objetos ostensivos como los símbolos de los números enteros, los números enteros ubicados en la recta numérica. También manifestaron, objetos no ostensivos como la definición de números enteros en forma verbal y gestual.

Este momento permitió que los estudiantes en consenso reconocieran cuales eran los números enteros, y que gráficamente se podían representar en la recta numérica, permitiendo de esta manera, hacer el acoplamiento entre los significados personales logrados, en cuanto a la identificación de números enteros negativos, el cero, números enteros positivos y la ubicación en la recta numérica con los significados institucionales implementados, respecto a estos mismos aspectos.

Además, de los anteriores significados construidos por los estudiantes, en el desarrollo de los diferentes momentos se reconoce que los estudiantes relacionan los números enteros con *situaciones de la vida diaria* como deudas, tener, no tener nada, profundidad de un pozo, altura, entre otras.

Todos los aspectos mencionados en los párrafos anteriores permiten dar cuenta del logro del objetivo de la actividad uno de modelación. Puesto que, en los diferentes momentos, los estudiantes exteriorizaron sus representaciones internas a través de los objetos ostensivos y no ostensivos, utilizados para dar cuenta de los significados construidos acerca de números enteros y la relación de estos con los significados institucionales pretendidos. En la Tabla 6 se muestra en forma resumida los significados construidos por los estudiantes en esta actividad de modelación.

Tabla 6. *Resumen significados construidos por los estudiantes en la actividad uno de modelación.*

| | Nociones | Prácticas operativas | Prácticas discursivas | Significados personales | Significados institucionales |
|--|------------------|--|--|--|---|
| Momento 1. ¿Cómo ubico los números en la recta graduada entera? | Números enteros. | Representación gráfica del signo más (+), representación simbólica del signo menos (-) | Los números enteros positivos llevan el signo más antes del número. Los números enteros negativos llevan el signo menos antes del número. El número cero es el punto de referencia. | Global y declarado, acerca de utilizar el signo más para identificar números positivos, el signo menos para identificar números enteros positivos y el cero como punto de referencia para ubicarlos, a partir de situaciones como nivel del mar, superficie de la tierra y la temperatura. | Implementado acerca de identificación de números enteros positivos, números enteros negativos y el cero como punto de referencia mediante la relación de estos con situaciones como nivel del mar, superficie de la tierra y temperatura. |
| Momento 2. Utilidad de los números enteros | Números enteros | Representación gráfica de números enteros, a través del dibujo de un pozo, de un dibujo que simboliza tener, no tener nada y estar | Justificaron los números enteros a partir de relacionarlos con bajar dentro de un pozo, estirar un chicle hacia arriba y hacia abajo y argumentaron que arriba de la superficie del suelo van los números enteros positivos y que, en una escalera de cero para arriba positivos, de cero para abajo negativo. | Significado declarado, acerca de la ubicación de números positivos, tales como: hacia arriba, tener, hacia la derecha, en la recta y | Implementado acerca de la ubicación de números enteros, en la recta y con relación a situaciones como |

| | | | | | |
|--------------------------------------|-----------------|--|--|--|--|
| | | debiendo y dibujo de rectas de números donde ubicaron números positivos hacia arriba de cero y números negativos hacia abajo de cero; números positivos hacia la derecha de cero y números negativos hacia la izquierda de cero. | Además los relacionaron, los positivos con tener, los negativos con deber y el cero con no tener nada. Tener algo. Hacia arriba y hacia la derecha de cero. | con relación a situaciones cotidianas. | deber, no tener dada, tener, profundidad y lateralidad. |
| Momento 3. ¡A investigar jugando! | Números enteros | Dibujaron los objetos etiquetados en el borde de la pared, la escalera en forma horizontal y vertical colocando el número cero como punto de referencia a partir del cual ubicaron los números enteros positivos y negativos. | El punto de referencia es para ubicar a partir de él, los números enteros positivos hacia el lado derecho y hacia arriba, y los números enteros negativos hacia el lado izquierdo y hacia abajo. | Declarado, acerca de la ubicación de números enteros positivos y negativos respecto a lateralidad, derecha e izquierda y direccionalidad, arriba y debajo de cero. | Implementado, acerca de la ubicación de números enteros positivos y negativos, respecto a lateralidad y direccionalidad. |

| | | | | | |
|--|---------------------------------|--|--|--|---|
| Momento 4. Represento situaciones | Números enteros positivos | Simbolizaron los números enteros positivos, negativos y el cero mediante un dibujo de una escalera horizontal, también en una recta numérica y un dibujo que representaba tener, deber y no tener nada. | Los números enteros son una reunión de números formada por los números enteros negativos, los números enteros positivos y el cero. El cero como punto de referencia lo relacionaron con superficie del suelo, superficie de la cancha, con no deber ni tener dinero | Logrado, respecto a la conformación y ubicación de números enteros y con relación a situaciones de la cotidianidad como un pozo, deber y tener, nivel de la tierra, entre otras. | Implementado y declarado, respecto a la conformación y ubicación de números enteros y con relación a situaciones de la cotidianidad como un pozo, deber y tener, nivel de la tierra, entre otras. |
| Momento 5. Comparemos y discutamos resultados | Números enteros positivos | Dibujaron dos rectas, una en forma horizontal y otra en forma vertical y en ella ubicaron los números enteros, negativos, positivos y el cero. Los estudiantes realizaron ante sus compañeros una exposición en una cartelera. | En la socialización concluyeron que los números naturales son los enteros positivos. Los naturales con signo menos son los enteros negativos. Para conformar los números enteros hay que unirles el cero y se pueden ubicar en una recta numérica horizontal de tal forma que el cero es el punto de referencia. Al lado derecho de él se ubica los enteros positivos y se pueden relacionar con tener plata y al lado izquierdo de él se ubican los números negativos y se pueden relacionar con estar debiendo y el cero es cuando no debes, pero tampoco tienes nada. | Logrado, respecto a la conformación de los números enteros positivos y negativos, y la ubicación en la recta graduada entera y en relación con situaciones de la cotidianidad como tener, no tener nada y deber. | Referencial, respecto a la conformación de los números enteros positivos, ubicación en la recta graduada entera y en relación con algunas situaciones de la cotidianidad. |

Esta actividad uno de modelación matemática, surgió en un contexto intramatemático a partir de los intereses y curiosidades de los estudiantes. Tuvieron la oportunidad de relacionar los números enteros con situaciones de su cotidianidad, aspecto que contribuyó a la construcción de significados acerca de

estos objetos matemáticos. En cada uno de los momentos de esta actividad de modelación, los estudiantes, a partir de prácticas operativas y discursivas dieron cuenta de los significados personales e institucionales construidos. De ahí que se puede afirmar que la modelación matemática según Barbosa (2004), permite la construcción de significados de números enteros. Por tanto, al relacionar la modelación matemática implementada en este estudio con el EOS de Godino, Batanero y Font (2012) y Godino, Batanero y Font (2019) se generan escenarios que favorecen el proceso de construcción de significados y las maneras cómo los estudiantes construyen dichos significados. De manera que esta relación permitió identificar maneras de construir significados de números enteros.

En el momento uno y momento dos de esta actividad se generaron discusiones acerca de la ubicación y conformación de los números enteros, discusiones que permitieron detallar y aclarar la situación problema conllevando a que los estudiantes exteriorizaran sus ideas y a través de objetos matemáticos ostensivos y no ostensivos y de esta manera dieran cuenta de los significados construidos durante los momentos uno y dos, donde se refleja el logro del objetivo de estos momentos que era detallar y explicar la situación problema en estudio.

El momento tres que tenía como objetivo indagar acerca de aspectos que permitieran llegar a la solución de la situación problema, conllevó a que los estudiantes investigaran y ampliaran los significados acerca de números enteros. Por tanto, en este momento los estudiantes lograron acrecentar sus significados respecto a este conjunto numérico, aspecto que les permitió resolver la situación en el momento cuatro. En consecuencia se entiende que investigar acerca de un tema en cuestión permite la construcción de significados.

En el momento cuatro, los estudiantes representaron la situación en estudio, mediante prácticas operativas y discursivas que dieron cuenta de sus significados construidos de la ubicación, conformación y uso de números enteros en la cotidianidad, logrando así el objetivo de este momento.

Y por último, en el momento cinco los estudiantes socializaron los resultados representados en el momento cuatro y generaron discusiones en las que expresaron y expusieron sus ideas ante los demás compañeros del aula, demostrando la apropiación de los significados construidos durante el desarrollo de esta actividad. Aspecto que dejó comprender que los estudiantes involucrados en el proceso investigativo construyeron significados personales respecto a la ubicación, conformación y utilidad de números enteros en la cotidianidad y acoplaron dichos significados con los significados institucionales. Dando por alcanzado el objetivo de esta actividad en la que se buscaba que los estudiantes construyeran significados de números enteros con relación a la ubicación, conformación y utilidad de estos números en la cotidianidad.

4.1.3 Análisis de la actividad dos de modelación. Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros

Esta actividad tuvo en cuenta aspectos con relación a la estructura de la actividad y el rol de los estudiantes y del docente en el desarrollo de los diferentes momentos que la conforman, según los planteamientos de Barbosa (2004).

4.1.3.1 Momento uno: ¿Qué más puedo saber de los números enteros?

Este momento se desarrolló a partir de los intereses y curiosidades de los estudiantes, puesto que, mediante un proceso de indagación, originado al finalizar la actividad uno de modelación, se reconoció que los estudiantes tenían diferentes motivaciones para saber más acerca de los números enteros, de su orden y de cómo se suma y se resta en este conjunto de números. Por lo tanto, la formulación del problema se ajusta a los anteriores aspectos, manifestados por los estudiantes involucrados en esta investigación.

Después de retomar el diálogo acerca de los intereses de los estudiantes respecto a los números enteros se llegó a plantear la siguiente situación:

El Rey \mathbb{Z} manda quiere saber el orden de los números enteros y también quiere saber cómo se hacen la suma y la resta con estos números. Por tanto, se formulan las siguientes preguntas: ¿Cuál es el orden en los números enteros (\mathbb{Z})? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos? Estas preguntas se formularon como introducción a la actividad dos de modelación.

En una cartelera se presentó la situación con preguntas a los estudiantes y a manera de fortalecer los significados globales de los estudiantes acerca del orden y de las operaciones aditivas con números enteros, en un primer ejercicio se preguntó acerca del orden de estos números. Los estudiantes, ante la solicitud realizada, a través de un taller manifestaron significados declarados como se puede ver en la siguiente respuesta manifestada por un estudiante.

1. El Rey Z-manda, quiere ordenar a los estudiantes de cuarto grado en una recta numérica que esta dibujada en el piso, pero aún no sabe cómo hacerlo. ¿Le ayudarías al Rey Z-manda a organizarlos? Si ¿Cómo lo harías? Los ubicaría de menor a mayor. Los menores al lado izquierdo y los mayores al lado derecho.

¿Qué forma propones para ordenarlos? Explica Lo colocaría en una recta numérica del más pequeño hasta llegar al más grande de izquierda a derecha.

Ilustración 40. Significado global de orden en los enteros manifestado por Alberto.

En las anteriores representaciones no ostensivas, se evidencia que los estudiantes dan cuenta de los significados personales declarados que han construido, ya que propusieron y exteriorizaron ideas para organizar los números enteros. Aspectos que, según planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019) posibilitan la construcción de significados.

Por otro lado, en un segundo ejercicio, mediante una situación problemática se les solicitó a los estudiantes ayudar al Rey \mathbb{Z} manda, a encontrar la cantidad de dinero que debía y la cantidad de dinero que tenía para pagar. Ante esta solicitud los estudiantes manifestaron sus ideas, mediante representaciones no ostensivas, las cuales, permitieron evidenciar los significados personales globales que los estudiantes tienen acerca de sumas y restas con números enteros. En la siguiente representación se muestran las ideas exteriorizadas por un estudiante.

2. El Rey Z-manda, está debiendo un dinero a sus empleados, el dice que ese dinero equivale a los pasos que des al lado izquierdo del número cero, en la recta numérica y la cantidad de dinero que tiene equivalen a los pasos que des a la derecha del cero en la recta numérica. ¿Le ayudarías al Rey Z-manda a saber la cantidad de dinero que debe y la cantidad de dinero que tiene para pagar? Si ¿Cómo lo harías? hacia una recta numérica y diera de 10 en 10 a la izquierda y diera 8 pasos y de la derecha otros 8 pasos que equivale a en lo que a 10 y 80 10 que tiene que pagar

¿Qué propones para ayudarlo? Explica 8 diera 8 pasos porque la recta la hice de 10 en 10.

Ilustración 41. Significado global de suma y resta con enteros, por Pablo.

En las anteriores imágenes, se reconocen los significados personales globales exteriorizados por los estudiantes, acerca de suma y resta con números enteros, tales como: asociar desplazamientos a la izquierda en la recta graduada entera con deudas y desplazamientos a la derecha en la recta graduada entera con tener dinero. Sin embargo, esta relación no es del todo clara, ya que los estudiantes manifiestan la relación de los desplazamientos a la izquierda con deudas y desplazamientos a la derecha con tener, mas no con restas y sumas. Por tanto, se evidencia que falta el acoplamiento entre los significados personales con los significados institucionales implementados (Godino, Batanero y Font, 2019).

No obstante, las representaciones elaboradas por los estudiantes permiten evidenciar que los significado construidos acerca de los números enteros, los asociaron con *situaciones extra-matemáticas*, dejando en evidencia que relacionar conocimientos matemáticos con situaciones del contexto se pueden reconocer como una manera de construir significados.

4.1.3.2 Momento dos: Ordeno números enteros y hago sumas y restas

En este momento, los estudiantes detallaron el problema a través de información relacionada con algunos aspectos como el de relación de orden y operaciones aditivas con números enteros. Este momento se desarrolló a partir del juego el Rey \mathbb{Z} manda, mediante tres partes: A, B y C. La parte A, se inició con la solicitud del Rey \mathbb{Z} manda, de leer y socializar las copias relacionadas con la relación de orden y operaciones aditivas con números enteros, tomadas de: http://agrega.educacion.es/repositorio/03122014/3c/es_2014120312_9201222/orden_de_los_numeros_enteros.html 02- 09- 2019 y <https://www.smartick.es/blog/matematicas/sumas-y-restas/sumas-y-restas-de-numeros-enteros/> . 02- 09-2019, respectivamente. Ver apéndice B.3.2. Propiciando espacios para la discusión de aspectos relacionados con números enteros.

En las copias se encuentra una lectura que consiste en explicar cómo se da la relación de orden en los números enteros y muestra algunos ejemplos. En cuanto a la suma y a la resta con estos números, en la lectura también se encuentran explicaciones de diferentes formas de realizar estas operaciones aditivas y también se encuentran algunos ejemplos.

Después de la lectura, el Rey \mathbb{Z} manda, solicitó a los estudiantes organizar once montones de fichas, de diferentes tamaños en una recta graduada entera, dibujada en una cartulina de tal forma, que el montón de menor tamaño quedara ubicado en el menos cinco y el de mayor tamaño en el número cinco. En este ejercicio, los estudiantes en su turno ubicaron los montones del más pequeño al más grande de izquierda a derecha, como se puede ver en la siguiente imagen.



Ilustración 42. Alberto organizando los montones en la recta graduada entera.

En las prácticas manifestada por los estudiantes mediante este ejercicio se puede evidenciar significados personales declarados, respecto al orden en los números enteros, puesto que organizaron los montones de menor a mayor de tal forma, que el montón más pequeño lo ubicaron en el menor número entero escrito en la recta (-5) y el montón más grande lo ubicaron en el mayor número entero escrito en la recta (+5). También, hicieron comparaciones con montones de igual tamaño, los cuales ubicaron al frente del montón que estaba en la recta con igual cantidad de fichas.

Además, en el desarrollo de la parte A del juego, los estudiantes dieron cuenta de objetos no ostensivos, como algunas proposiciones relacionadas con el orden en los números enteros, tales como la siguiente expuesta por un estudiante: *los montones más pequeños se ubican al lado izquierdo de cero, los montones más grandes están al lado derecho de cero, el número cero es mayor que el número menos uno, el número cero es menor que uno, el número menos cuatro es menor que menos tres* (Registro en audio, 04-09-19).

En consecuencia, de las anteriores manifestaciones, se infiere que los estudiantes han construido significados personales declarados, acerca del orden en los números enteros, puesto que ordenaron correctamente los montones en la recta numérica, es decir, las prácticas operativas y discursivas que utilizaron al enfrentarse a la tarea de ordenar los montones en la recta las realizaron en forma individual.

Parte B

Esta parte del momento dos, estuvo a cargo de los estudiantes, ellos diseñaron y desarrollaron la parte B del Juego el Rey \mathbb{Z} manda, teniendo en cuenta el ejercicio anterior realizado con los montones de fichas. El juego lo realizaron de la siguiente manera: uno de los estudiantes involucrado en la investigación hizo las veces de Rey \mathbb{Z} manda, quien pedía a otros compañeros, ubicarse en una recta graduada entera según su estatura, de tal forma que el estudiante de menor estatura quedara ubicado en el menor número entero escrito en la recta y de esta forma ubicar a todos sus compañeros en la recta, hasta llegar al mayor número entero escrito en la recta.

En el desarrollo de este ejercicio, dos de los estudiantes ubicaron a sus compañeros teniendo en cuenta el de estatura más baja al de estatura más alta, de izquierda a derecha. Los estudiantes que faltaron para ubicar en la recta, los ubicaron al frente del estudiante que tenía igual estatura y que ya estaba en la recta. En las siguientes imágenes, se evidencia lo descrito en este párrafo.



Ilustración 43. Pablo ordenando a sus compañeros en la recta graduada entera.

Sin embargo, César inicialmente, ubicó a sus compañeros de tal forma que no se identificaba el orden en los números enteros. Aspecto, que permite evidenciar que los significados que el estudiante tenía acerca de orden en los números enteros es un significado personal declarado, es decir, es un significado que en este caso no es acorde con el institucional. Como César quien hacía las veces del Rey \mathbb{Z} manda, no pudo en primera instancia ubicar a sus compañeros en la recta graduada entera, se generó una *discusión* entre los estudiantes involucrados en el proceso investigativo y los demás participantes del juego.

Dicha *discusión*, permitió que el estudiante construyera significados personales logrados, respecto al orden en los números enteros, ya que en una segunda oportunidad, a partir de los argumentos y justificaciones de sus compañeros y de comparar el ejercicio que había realizado con la ubicación de los montones de fichas, logró organizar a sus compañeros en la recta en orden de estatura, del más bajo al más alto, permitiendo evidenciar el acoplamiento entre los significados personales y los significados institucionales. En la siguiente imagen se observa el procedimiento realizado por César.



Ilustración 44. César organizando a sus compañeros en la recta graduada entera.

En consecuencia, se entiende que problematizar una situación, en donde se generen espacios para la participación de los estudiantes, en *socializaciones y discusiones de sus ideas*, favorece la construcción de significados de objetos matemáticos.

En el desarrollo de este ejercicio, los demás estudiantes de los grados tercero, cuarto y quinto involucrados en el juego se motivaron de tal manera que todos querían ser el Rey \mathbb{Z} manda, y poder organizar a sus compañeros en la recta graduada entera. Como no había tiempo para que todos los estudiantes realizaran el ejercicio, se seleccionaron algunos al azar y tuvieron la oportunidad de organizar a sus compañeros, de la manera como comprendieron la parte del juego. La mayoría de los niños que participaron en el ejercicio tanto como Rey o como número, manifestaron significados personales declarados, acerca de relación de orden, en vínculo con los significados institucionales implementados.

Los estudiantes César, Pablo y Alberto; además, de ubicar a sus compañeros en la recta entera graduada, mediante la observación, pudieron comprobar que los participantes del juego que tenían menor altura estaban ubicados al lado izquierdo del número cero en la recta y que los estudiantes que estaban en el lado derecho del cero tenían mayor estatura que el que estaba ubicado en el número cero y los que estaban ubicado al lado izquierdo de él. Aspecto que les permitió hacer *relaciones entre la estatura de los participantes del juego y el orden en los números enteros*, como se puede ver a continuación en las siguientes representaciones.

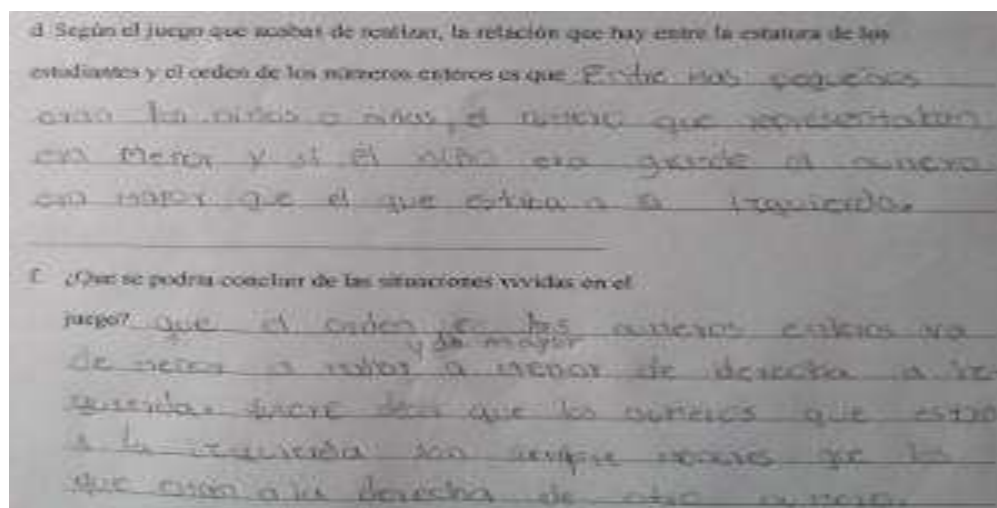


Ilustración 45. Relación de orden de números enteros con estatura de sus compañeros.

De las anteriores representaciones, se puede reconocer que los estudiantes han construido significados personales declarados, respecto al orden de los números enteros, significados como, que los números que están a la izquierda de otro son menores y los que están a la derecha son mayores. Además, pudieron *relacionar el orden de los números enteros con la estatura de sus compañeros*, de manera que dieron cuenta que a menor estatura de los niños menor era el número que representaban y a mayor estatura, mayor era el número que representaba. Por tanto, se puede concluir que los significados personales declarados, manifestados por los estudiantes en las diferentes prácticas y objetos ostensivos y no ostensivos, están en relación con los significados institucionales implementados (Godino, Batanero y Font, 2019).

Parte C

Este ejercicio estuvo a cargo de los estudiantes involucrados en el proceso investigativo, fue desarrollado de la siguiente manera:

Uno de los estudiantes hace las veces del Rey \mathbb{Z} manda (César), quien solicita a sus compañeros que se ubiquen en el punto de referencia de dos rectas (recta 1, recta 2) que están dibujadas en el piso y a partir de esta ubicación le pide a cada uno, en forma individual que se desplacen en la recta según les indique (recta 1, más tres pasos; recta 2, menos cuatro pasos), (recta 1, más dos pasos; recta dos más 5 Pasos), como se puede observar en la siguiente imagen.



Ilustración 46. Desplazamientos realizados por los estudiantes siguiendo indicaciones de su compañero.

Las manifestaciones no ostensivas, en este caso los gestos corporales realizados por los estudiantes (desplazamientos y movimientos de sus brazos hacia ambos lados del punto de referencia), y las prácticas discursivas (argumentos, justificaciones, conceptos), respecto a las solicitudes del Rey \mathbb{Z} manda, posibilitaron la construcción de significados acerca de la suma y resta con números enteros, puesto que según Godino, Batanero y Font (2019), el lenguaje es un elemento fundamental en la construcción de significado.

De manera que, se reconocen los significados personales declarados y la aceptación de dichos significados con los significados institucionales, puesto que los estudiantes durante el desarrollo del juego el Rey \mathbb{Z} manda lograron *asociar los significados de los números enteros con sus vivencias*, de manera que relacionaron los desplazamientos al lado izquierdo con la operación de resta y los desplazamientos hacia el lado derecho con la operación de suma, como se puede observar en la siguiente respuesta elaborada por un estudiante.

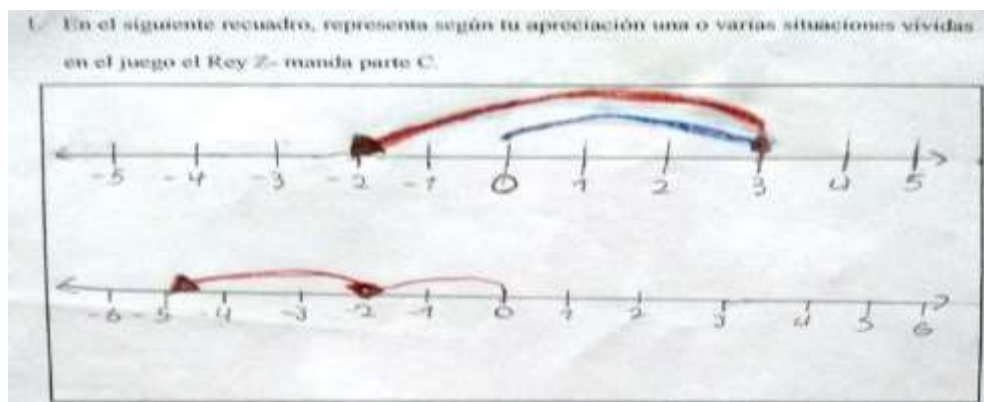


Ilustración 47. Representaciones de suma y resta en la recta graduada entera, por César.

Se les pidió a los estudiantes que justificaran oralmente sus representaciones, los tres estudiantes coincidieron en sus argumentos, uno de estos argumentos es el que se muestra a continuación, el cual fue exteriorizado por un estudiante: *los pasos a la derecha eran la suma y los pasos hacia la izquierda eran la resta* (Registro en audio, 16-09-19). Ante esta respuesta se les solicitó que la justificaran. Nuevamente volvieron a coincidir en sus argumentos, pues asociaron los desplazamientos realizados en el juego con las explicaciones de suma y resta que se encontraban en la copia que leyeron al iniciar esta actividad, como se evidencia en uno de los

argumentos expuesto por un estudiante: *los pasos hacia la derecha representan la suma como dice la explicación de la copia y los pasos a la izquierda la resta* (Registro en audio, 16-09-19).

En consecuencia, de las observaciones de las prácticas operativas y discursivas manifestadas por los estudiantes en el desarrollo del momento dos, se reconocen los significados personales logrados que ellos han construido, acerca de la suma como pasos a la derecha en la recta numérica y de la resta como pasos a la izquierda. De manera que se puede evidenciar el acoplamiento entre los significados personales logrados y los significados institucionales pretendidos (Godino, Batanero y Font, 2019). Además, en el desarrollo de los momentos uno y dos de esta actividad, se reconoció que *las socializaciones, discusiones e interacciones* entre los estudiantes son maneras que posibilitaron la construcción de significados de números enteros. Por tanto, se consideran estas como maneras de construir significados.

4.1.3.3 Momento tres: ¡a investigar!

Este momento permitió recolectar información que facilitó llegar a la respuesta de las preguntas: ¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos? Se solicitó a los estudiantes investigar acerca de orden, comparación, suma, resta con números enteros y relación de estos con situaciones de la vida cotidiana. Esta tarea la realizaron en forma grupal, favoreciendo la *socialización y discusión* acerca de los aspectos antes mencionados. Sin embargo, en algunas de las representaciones ostensivas y no ostensivas manifestadas por ellos, se observan diferencias que no afectan las particularidades de la consulta. En las siguientes representaciones, se muestra los resultados de la consulta realizada por los estudiantes, respecto a orden y comparación de números enteros.

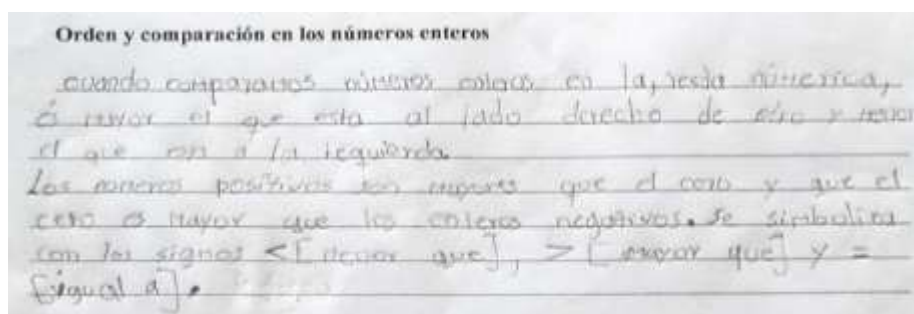


Ilustración 48. Representación de orden en los números enteros.

De las anteriores representaciones, se puede concluir que los estudiantes construyeron significados personales logrados, acerca de orden en los números enteros, construidos en el desarrollo de la presente actividad de modelación. Además, representan símbolos que posibilitan la comparación de estos números, tales como el de menor que ($<$), mayor que ($>$) e igual a ($=$). Por lo cual, se entiende que, mediante las indagaciones realizadas por los estudiantes, pudieron hacer el acoplamiento entre sus significados personales y los significados institucionales, respecto al orden en los números enteros, dejando en evidencia una manera de construir significados.

Por otro lado, los estudiantes indagaron acerca de suma y resta con números enteros, en cuya investigación manifiestan los significados personales en concordancia con los significados institucionales construidos acerca de operaciones aditivas, a través de objetos ostensivos y no ostensivos exteriorizados mediante el lenguaje escrito y simbólico como se ve en la siguiente respuesta.

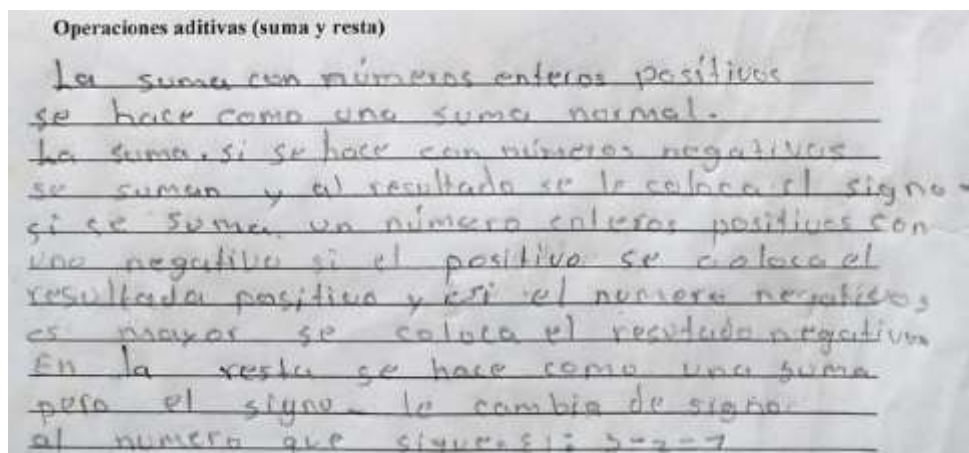


Ilustración 49. Resultado de la indagación realizada por Pablo.

Las anteriores representaciones dan cuenta de los significados personales declarados que han construido los estudiantes con relación a la suma y a la resta, en las cuales se evidencia que los estudiantes asocian la suma de números positivos, con la suma de números naturales, al igual que la suma con números negativos como una suma, pero se le coloca el signo menos y cuando se trata de operaciones aditivas con números de diferentes signos, se suma normal y se coloca el

signo del número mayor. Asimismo, dieron cuenta a través de la consulta del significado de suma y resta como desplazamientos a la derecha y hacia la izquierda en la recta, como se muestra en la siguiente representación.

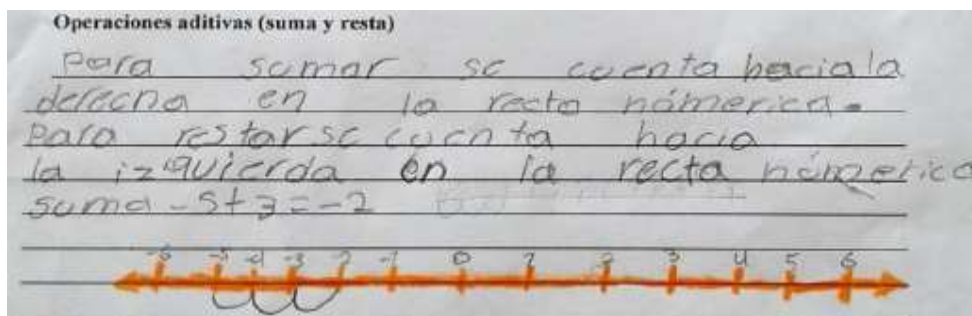


Ilustración 50. Significados consultados por César.

A partir de los resultados de la indagación, se preguntó a los estudiantes ¿de qué manera sumarían y restarían números enteros? los cuales, respondieron *que haciendo desplazamientos en la recta numérica*. Aspecto que deja ver la influencia de prácticas operativas asociadas a las vivencias de los estudiantes para la construcción de significados (Godino, Batanero y Font, 2019).

Por otro lado, en la indagación acerca de situaciones de la vida cotidiana relacionadas con números enteros, los resultados que los estudiantes mostraron son los siguientes.

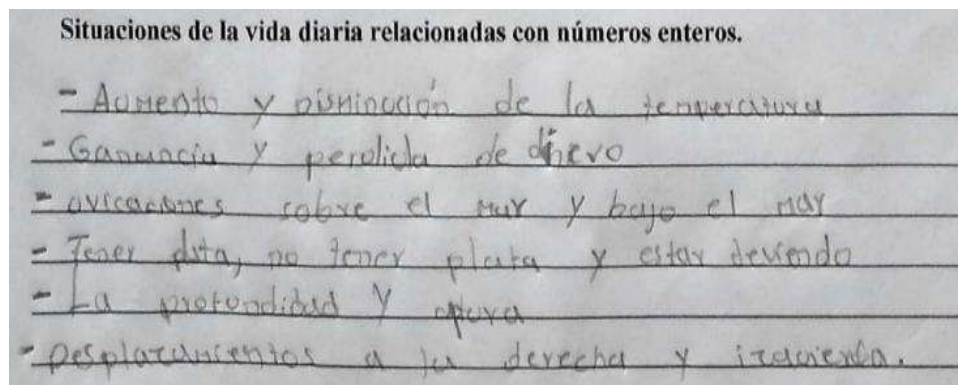


Ilustración 51. Situaciones de la vida cotidiana que involucran a los números enteros, por Pablo.

En la representación anterior se evidencia *la asociación de números enteros con situaciones de la vida diaria*, permitiendo a los estudiantes apropiarse de los significados de números enteros, de manera que puedan relacionar los números enteros negativos con varias situaciones reales de su cotidianidad e igualmente puedan relacionar los números enteros positivos y el número cero con este tipo de situaciones.

Las representaciones ostensivas y no ostensivas exteriorizadas por los estudiantes en el desarrollo del momento tres, permitieron reconocer que estos han construido significados personales logrado acerca de orden, suma y resta con números enteros y que se ha dado el acoplamiento, entre los significados personales logrado con los significados institucionales implementados. Puesto que en el desarrollo de este momento los estudiantes trabajaron de manera grupal, posibilitando la *socialización y la discusión* acerca de los significados de orden en los números enteros para llegar a acuerdos respecto a estos significados y enriquecerlos con la opinión y argumentos de sus compañeros, conllevando a reconocer la socialización y discusión de ideas como manera de construir significados.

4.1.2.4 Momento cuatro: represento situaciones

En este momento se pretende que los estudiantes resuelvan las preguntas realizadas en la situación inicial en el momento uno de esta actividad de modelación: ¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos? Se entregó una copia (ver Apéndice A.4.4) a cada estudiante, la cual contenía las anteriores preguntas, una en cada recuadro. Se pidió a los estudiantes resolverlas teniendo en cuenta los significados construidos, acerca de orden y operaciones aditivas. Uno de los modelos, manifestados por un estudiante es el siguientes.

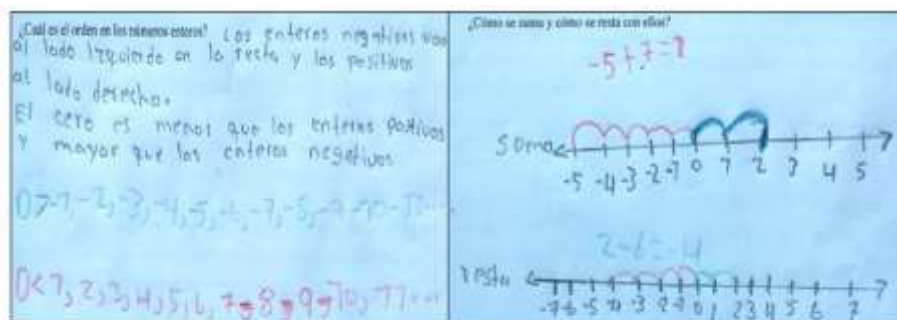


Ilustración 52. Modelos representados para la solución del problema, por Alberto.

Además de los anteriores modelos matemáticos exteriorizados a través de objetos ostensivos, los estudiantes, también realizaron modelos a través de prácticas discursivas, como se muestra a continuación en la siguiente respuesta.

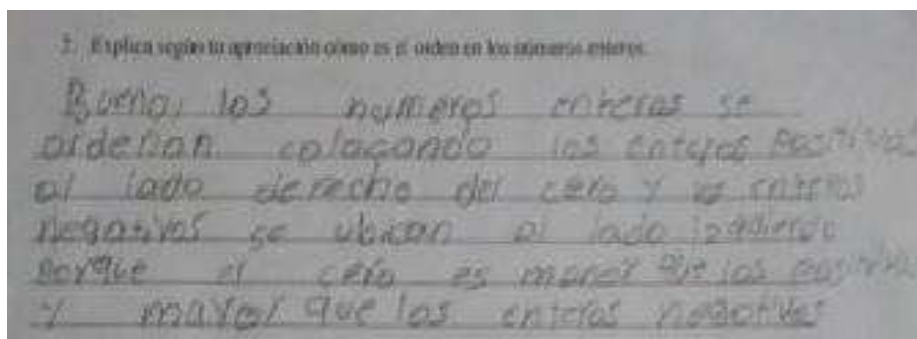


Ilustración 53. Solución no ostensiva realizada por Pablo

Los anteriores modelos exteriorizados por los estudiantes, dan cuenta de los significados construidos en el desarrollo de esta actividad de modelación, de manera que se reconoce que los estudiantes han construido significados personales logrados, respecto a la relación de orden, suma y resta de números enteros, tales como: reconocer que el número cero es mayor que los enteros negativos y menor que los enteros positivos, entender la suma asociada con desplazamientos a la derecha y la resta con desplazamientos a la izquierda en la recta graduada entera.

Por tanto, se entiende que los estudiantes se apropiaron de estos significados y han logrado hacer acoplamiento entre los significados personales logrados y los significados institucionales implementados, permitiendo reconocer que la *elaboración de modelos o representaciones* es una manera de construir significados acerca de los números enteros.

4.1.2.5 Momento cinco: comparemos resultados

En este momento, los estudiantes dieron a conocer los resultados de la situación inicial (¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?) Realizado en el momento cuatro a través de modelos, representados mediante objetos ostensivos y no ostensivos.

Los estudiantes involucrados en el proceso investigativo socializaron y discutieron los modelos realizados para dar respuesta a la situación inicial, llegando a unificar a través de una conclusión sus respuestas, como se muestra a continuación en la cartelera.

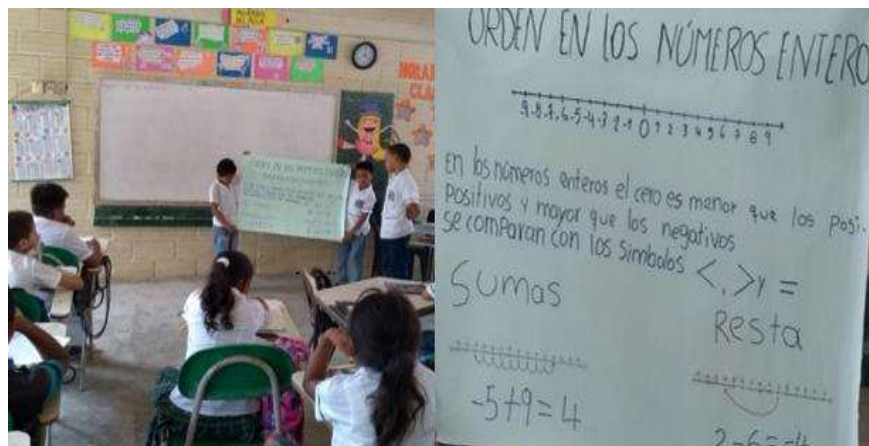


Ilustración 54. Conclusión de los modelos.

Luego, *socializaron* y *discutieron* estos resultados a través de una exposición de una cartelera, en la cual explicaron a sus compañeros de los grados tercero, cuarto y quinto del Centro Educativo Rural El Zumbido, ¿cuál es el orden en los números enteros y cómo se suma y se resta con estos números? En consecuencia, algunos de sus compañeros les solicitaron que explicaran de nuevo cómo sumar y cómo restar, a dicha solicitud los estudiantes expositores explicaron con ejemplos como el siguiente: *si tú tienes una deuda de cinco naranjas y pagas tres, te ubicas en el número menos cinco en la recta y recorres tres espacios a la derecha, entonces es una suma, pero si tienes cinco naranjas y le regalas tres a un amigo, te ubicas en el número cinco y recorres tres pasos hacia la derecha en la recta, entonces es una resta.* (Registro en audio, 08-10-19).

Durante la exposición, los estudiantes dieron cuenta del acoplamiento entre los significados personales logrados y los significados institucionales implementado, puesto que los objetos ostensivos y no ostensivos manifestados durante la exposición, permitieron identificar que los significados construidos por los estudiantes acerca de relación de orden y operaciones aditivas fueron construidos en forma grupal, enriqueciendo sus aprendizajes a través de las *socializaciones* y *discusiones* entre compañeros. Además, demostraron apropiación de los

significados de orden en los números enteros y operaciones aditivas (suma y resta) en la recta numérica, ya que sus expresiones daban cuenta del significado institucional implementado, es decir, en *la socialización* de las respuestas y en la exposición se evidencian los aprendizajes adquiridos durante el proceso de enseñanza, puesto que los estudiantes manifestaron, mediante sus explicaciones y justificaciones, los significados personales en relación con los institucionales.

Por otro lado, esta actividad de modelación, permitió vincular a los demás estudiantes de los grados tercero, cuarto y quinto, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de números enteros. Los cuales se mostraron motivados e interesados por conocer más acerca de este conjunto numérico. Algunos de los estudiantes, a través de la participación en esta actividad y mediante sus expresiones, dieron cuenta de significados personales acerca de relación de orden y operaciones aditivas. Por tanto, se reconoce que socializar representaciones o modelos en donde se presentan oportunidades para argumentar y justificar, conllevando a discusiones para llegar a acuerdos se puede identificar como una manera de construir significados.

A manera de síntesis, se puede decir que en la actividad dos de modelación se alcanzó el objetivo, con la cual, se buscaba que los estudiantes construyeran significados de números enteros, respecto a la relación de orden y operaciones aditivas (suma y resta) en la recta graduada entera. Los estudiantes en el momento uno, con relación al orden y operaciones aditivas con números enteros, manifestaron significados personales globales a través de objetos no ostensivos. En cuanto a la relación de orden exteriorizaron ideas como la relación de izquierda con números negativos (menores) y derecha con números positivos (mayores). Respecto a la suma con números enteros la relacionaron con tener y con pasos a la derecha en la recta. Mientras que la resta la asociaron con deuda y pasos a la izquierda en la recta.

En el momento dos, los estudiantes expresaron significados declarados acerca de la relación de orden, asociando el lado derecho de cero como números mayores que los números negativos y que el mismo cero y el lado izquierdo de cero lo asociaron con números menores que cero y que los positivos.

Por otro lado, en cuanto a la suma y a la resta, los estudiantes construyeron significados personales declarados, puesto que realizaron manifestaciones ostensivas y no ostensivas asociadas a sus vivencias, tales como, relacionar la suma con desplazamientos a la derecha y la resta con desplazamientos a la izquierda en la recta graduada entera. Tanto los significados acerca de la relación de orden como los de las operaciones aditivas manifestados por los estudiantes, se relacionan con los significados institucionales implementados.

En el tercer momento, se reconocen significados personales declarados acerca de orden en los números enteros, a través de expresiones como: el número cero es menor que los enteros positivos y mayor que los enteros negativos, también hicieron representaciones para comparar los números enteros como se deja evidencia en el momento tres: ¡a investigar! De la actividad dos de modelación. En cuanto a la suma y la resta realizaron manifestaciones ostensivas y no ostensivas, que declaran la suma como desplazamientos hacia la derecha y la resta los desplazamientos hacia izquierda en la recta. Significados que están en correspondencia con los significados institucionales implementados.

En el momento cuatro, los estudiantes dan cuenta de la solución de la situación inicial (¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?), a través de manifestaciones ostensivas y no ostensivas, tales como simbolizar las expresiones cero es menor que uno y cero es mayor que menos uno, simbolizar que los números enteros negativos son menores que el cero y los números enteros positivos son mayores que él. En cuanto a las operaciones aditivas, los estudiantes realizaron modelos que dan cuenta de cómo se suma y cómo se resta con números enteros, procedimientos como desplazamientos en la recta hacia la derecha y hacia la izquierda.

Las anteriores manifestaciones, permiten evidenciar los significados personales logrados acerca del orden en los números enteros y operaciones aditivas (suma y resta), en la recta graduada entera y el acoplamiento entre estos significados y los significados institucionales implementados.

En el último momento de esta actividad, los estudiantes realizaron prácticas ostensivas y no ostensivas, las cuales permitieron evidenciar la apropiación de los significados construidos de orden en los números enteros tales como, el número que está a la izquierda de otro es menor, el número que está a la derecha de otro es mayor, el cero es mayor que los números enteros negativos, el cero es menor que los números enteros positivos. En cuanto a operaciones aditivas (suma y resta), los estudiantes realizaron manifestaciones ostensivas y no ostensivas. Asociaron la suma con desplazamientos hacia la derecha en la recta graduada entera y la resta con desplazamientos hacia la izquierda de esta.

A partir del análisis realizado anteriormente, se infiere que las diferentes prácticas ostensivas y no ostensivas manifestadas por los estudiantes, entre estas las *socializaciones* y *discusiones*, generaron espacios que posibilitaron el acoplamiento entre los significados personales logrados acerca del orden y de las operaciones aditivas (suma y resta) y los significados institucionales implementados, permitiendo, de esta manera, que los estudiantes se apropiaran de dichos significados.

En consecuencia, se reconoce que las *socializaciones* y *discusiones acerca de un tema*, entre los estudiantes involucrados en la construcción de significados de objetos matemáticos favorecen la construcción de significados. En la Tabla 7 se muestran las prácticas exteriorizadas por los estudiantes.

Tabla 7. *Resumen de los significados construidos por los estudiantes en la actividad dos de modelación.*

| | Nociones | Prácticas operativas | Prácticas discursivas | Significados personales | Significados institucionales |
|--|---|---------------------------|--|--|---|
| Momento 1. ¿Qué más puedo saber de números enteros? | Relación de orden en los números enteros. | | Los colocaría en una recta del más pequeño hasta llegar al más grande de izquierda a derecha. | Global acerca de relación de orden. | Implementado acerca de relación de orden en los números enteros. |
| | Suma y resta | | Los pasos que se den hacia la derecha es la plata que tiene para pagar y los pasos que se dan a la izquierda equivale a lo que debe. | Global, acerca de suma como pasos a la derecha y en relación con tener, y resta como pasos a la izquierda y deber dinero. | Implementado, acerca de suma y resta con números enteros. |
| Momento 2. Ordeno números enteros y hago sumas y restas | Relación de orden | | Los números enteros entre más a la izquierda están son más pequeños o menores que los que están a la derecha. Los números enteros negativos son menores que cero y que los enteros positivos. | Declarado, acerca del orden en los números enteros, asumen menores los del lado izquierdo y mayores los del lado derecho. Declarado, acerca del orden en los números enteros, asumen menores los del lado izquierdo y mayores los del lado derecho. | Implementado, acerca de relación de orden en los números enteros, respecto a números enteros negativos menores que cero y números enteros positivos mayores que cero. |
| | Suma y resta | Representaron en la recta | Los pasos a la derecha era la suma y los | Declarado, acerca de la suma como pasos hacia el | Implementado y pretendido, acerca de suma |

| | | | | | |
|------------------------------|-------------------|--|---|--|--|
| | | numérica, desplazamientos hacia la derecha y desplazamientos hacia la izquierda. | pasos hacia la izquierda eran la resta. | lado derecho en la recta numérica y acerca de la resta como pasos hacia la izquierda. | como desplazamientos en la recta numérica hacia la derecha y la resta como desplazamientos hacia la izquierda. |
| Momento 3. ¡A investigar! | Relación de orden | Compararon números enteros utilizando los signo menor que, mayor que e igual a. | Los números que están a la derecha son mayores que los que están a la izquierda. | Declarado, acerca de orden, números ubicados a la izquierda de otro menor y a la derecha mayor. | Implementado y pretendido, números ubicados a la izquierda de otro menor y a la derecha mayor. |
| | Suma y resta | Representaron sumas y restas en la recta numérica. Además utilizaron el signo menos para representar la resta. | Si se suman dos números enteros positivos la suma se hace normal. Si se suman dos números enteros negativos también se hace normal pero se coloca el signo menos al resultado. Si se suma un número entero negativo con uno positivo se suman y se coloca el signo del mayor. | Declarado, la suma como desplazamientos en la recta hacia el lado derecho y la resta como desplazamientos hacia la izquierda. También la resta como una suma a la cual se cambia el signo al resultado según la situación. | Implementado, acerca de la suma como desplazamientos o saltos en la recta numérica hacia el lado derecho y como desplazamientos a la izquierda como resta. |

| | | | | | |
|---|----------------------|---|--|---|---|
| Momento 4. Represento situaciones | Relación de orden | Representaron el cero como mayor que los números enteros negativos y cero como número menor que los números enteros positivos, a través de símbolos numéricos y signos menor y mayor que. | Los números que están a la derecha de cero son mayores que él. Los números que están ubicados a la izquierda de cero son menores que él. | Logrado, acerca de orden en los números enteros de manera que reconoce que un número es mayor que otro si está a su lado derecho y menor si está al lado izquierdo. | Implementado como números ubicados a la izquierda de otro menor y a la derecha mayor. |
| | Suma y resta | Representan la suma con símbolos numéricos y en la recta y de igual forma representan la resta. | Pasos hacia la derecha en la recta numérica simbolizan la suma y pasos a la izquierda en la recta simbolizan la resta. | Logrado, realiza desplazamientos a la derecha en recta numérica al realizar sumas con enteros positivos y hacia el lado izquierdo cuando se trata de resta. | Implementado La suma con números enteros se realiza en la recta numérica a partir de desplazamientos hacia el lado derecho. Implementado, la resta con números enteros se realiza en la recta numérica a partir de desplazamientos hacia el lado izquierdo. |
| Momento 5. Comparemos resultados | Relación de orden | Representación con símbolos numéricos y signo de mayor que y menor que. | El cero es mayor que los números enteros negativos y menor que los números enteros positivos. | Logrado acerca de orden en los números enteros, de manera que reconoce que los números que están a la izquierda de otro son | Implementado, los números enteros se comparan utilizando signos mayores que menor que e igual a. |

| | | | | |
|------|---|---|--|---|
| | | Un número que este a la derecha de otro siempre será mayor y uno que este a su izquierda será menor. | menores y los que están a su derecha mayor. | Un número es mayor que otro si está ubicado al lado derecho. Un número es menor que otro si está ubicado a su lado izquierdo. |
| Suma | Grafican en la recta numérica sumas y restas. | Desplazamientos hacia el lado derecho en la recta para representar sumas y hacia el lado izquierdo para representar restas. | Logrado, respecto a suma de manera que realizan sumas a partir de desplazamientos a la derecha en la recta numérica y respecto a resta de manera que realizan resta a partir de desplazamientos a la izquierda en la recta numérica. | Implementado La suma con números enteros se realiza en la recta numérica a partir de desplazamientos hacia el lado derecho y La resta con números enteros se realiza en la recta numérica a partir de desplazamientos hacia el lado izquierdo. |

Esta actividad dos de modelación matemática surgió a partir de la curiosidad de los estudiantes al interesarse por saber si con los números enteros se pueden hacer relaciones y operaciones como con los números naturales. Alrededor de los interrogantes ¿Cuál es el orden en los números enteros? y ¿cómo se suma y se resta con ellos? se desarrolló esta actividad. En donde se generaron momentos propios de la modelación matemática del caso dos de Barbosa (2004). Los cuales, posibilitaron que los estudiantes construyeran significados de números enteros respecto a la relación de orden y operaciones aditivas (suma y resta), manifestados los significados a través de prácticas operativas y discursivas que se evidenciaron mediante objetos matemáticos ostensivos y no ostensivos. De esta manera se muestra que la modelación matemática presenta particularidades que posibilita la construcción de significado de números enteros, dejando en evidencia la relación entre esta y el enfoque ontosemiótico de Gonino Batanero y Font (2012) y Godino Batanero y Font (2019).

Esta articulación entre modelación matemática y el Enfoque Ontosemiótico, permitió identificar maneras de construir significados de números enteros, puesto que en los momentos uno y dos de esta actividad de modelación matemática suscitaron discusiones y prácticas que posibilitaron que

los estudiantes detallaran, entendieran y explicaran la situación problema mediante la exteriorización de sus ideas a través de objetos ostensivos y no ostensivos, aspecto que dio cuenta de los significados personales construidos por los estudiantes respecto a relación de orden, suma y resta con números enteros, dejando en evidencia que discutir con respecto al tema en cuestión posibilita construir significados del mismo.

En el momento tres de esta actividad, los estudiantes investigaron acerca de relación de orden, operaciones aditivas y utilidad de los números enteros en la vida diaria. Aspectos que les permitieron ampliar los significados respecto a los temas investigados, realizando manifestaciones a través de prácticas operativas y discursivas que permitieron evidenciar que al hacer investigación, respecto a los aspectos mencionados anteriormente de números enteros, favorece la construcción de significados en relación a estos números. Por tanto, la investigación se reconoce como una manera de construir significados.

En el momento cuatro, los estudiantes representaron las situaciones problemas ¿Cómo es el orden en los números enteros? y ¿cómo se suma y se resta con ellos? exteriorizando mediante estas representaciones los significados personales construidos hasta este momento, de esta forma se da por alcanzado el objetivo de este momento de este momento de modelación matemática, de acuerdo con Barbosa (2004).

En el momento cinco se generaron espacios para que los estudiantes pudieran socializar y discutir los resultados de las situaciones en cuestión y exponer las conclusiones ante los demás estudiantes del aula, en donde se evidencio a través de sus enunciados, justificaciones y argumentos el acoplamiento entre los significados personales construidos y los significados institucionales, permitiendo de esta manera alcanzar el objetivo de la actividad dos de modelación matemática.

4.1.4 Análisis de la actividad tres de modelación: observo mi entorno y aplico los números enteros

La actividad tres de modelación se realizó tomando como base la actividad uno y la actividad dos, puesto que los estudiantes pusieron en práctica los aprendizajes apropiados durante el desarrollo de estas actividades.

En este sentido, esta actividad surgió a partir de *discusiones* con los estudiantes acerca de la utilidad o uso de los números enteros en la vida cotidiana. Esto llevo a la formulación de problemas de la realidad de los estudiantes. Fueron varias las situaciones que se generaron a partir de *discusiones* con relación a los números enteros, pero después de diálogos entre los estudiantes decidieron formular el problema de la siguiente manera.

4.1.4.1 Momento uno: formulación del problema

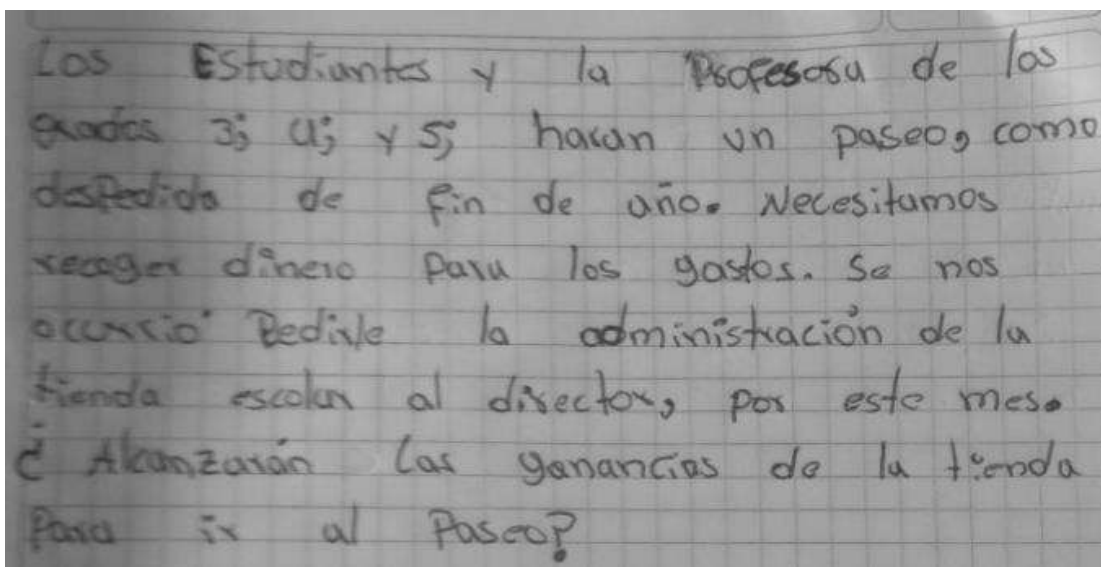


Ilustración 55. Formulación del problema realizado por los estudiantes.

Al preguntarle a los estudiantes por qué habían formulado de esa manera el problema, uno de ellos respondió: *porque los números enteros sirven para representar deudas y lo que uno tiene y*

el problema que hicimos tiene que ver con ganancias, ósea lo que tenemos (Registro en audio, 16-10-19).

Los anteriores argumentos, expuesto por el estudiante y aprobado por sus compañeros del grupo, dejan en evidencia que han construido *significados logrados de números enteros asociados con situaciones cotidianas* como deber y tener. Aspectos, que según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019), dejan entender que los estudiantes mediante la participación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números enteros pudieron construir y apropiarse de significados personales logrados y hacer el acoplamiento con los significados institucionales implementados.

Por tanto, se reconoce que la modelación matemática genera ambientes que posibilita la construcción de significados de objetos matemáticos, tales como, la problematización, investigación, *socialización y discusión de ideas* o significados, permitiendo reconocer la *socialización y discusión* acerca de números enteros como manera de construir significados.

4.1.4.2 Momento dos: aclaración de ideas respecto a la situación

En el segundo momento de esta actividad de modelación, los estudiantes elaboraron un plan que les permitió entender el problema que habían formulado inicialmente y que los conllevó a realizar la investigación para obtener datos que favorecieran dar respuesta al problema. El plan que los estudiantes realizaron fue el siguiente².

² Como parte de una actividad de los cursos de la Maestría se propuso trabajar con los estudiantes formas de solución de problemas matemáticos. La implementación expuesta es una interpretación de los estudiantes participantes en la investigación de actividades desarrolladas con ellos en relación con otros conceptos matemáticos.

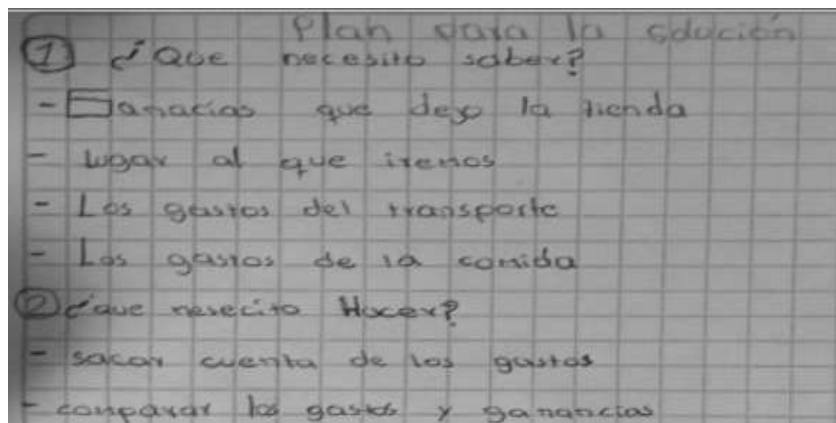


Ilustración 56. Plan para la solución del problema elaborado por los estudiantes.

Mediante los datos que exponen los estudiantes a través del plan, se puede evidenciar que ponen de manifiesto significados personales globales, acerca de cómo resolver problemas. Aspecto que según el enfoque ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019), es fundamental en el proceso de construcción de significados, lo cual deja entender que los estudiantes en el desarrollo de la actividad tres de modelación. Además de construir significados de números enteros también, ponen de manifiesto el significado acerca de resolución de problemas.

4.1.4.3 Momento tres: investigaciones

En el momento tres los estudiantes llevaron a cabo el plan, investigaron los datos que le permitieron llegar a la solución del problema. A continuación, se muestran los datos que arrojó el proceso de indagación realizado por los estudiantes.

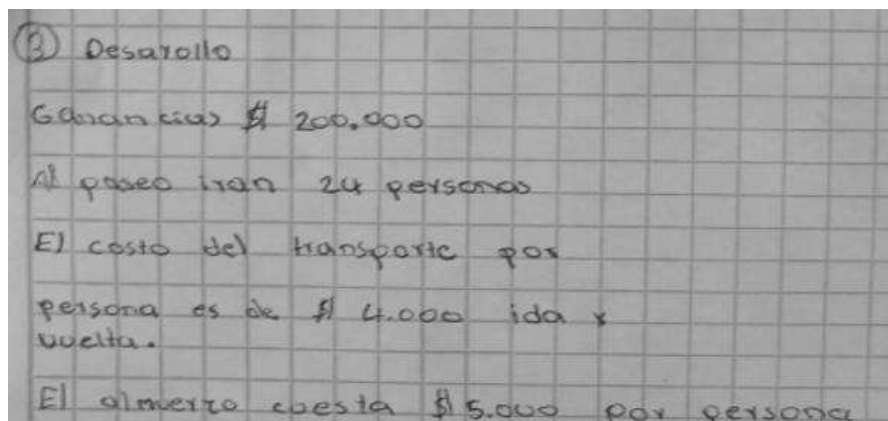


Ilustración 57. Datos obtenidos por los estudiantes.

4.1.4.4 Momento cuatro: solución

En el momento cuatro, los estudiantes *elaboraron modelos* que permitieron llegar a la repuesta del problema, algunos de dichos modelos no se relacionan con procedimientos de suma y resta con números enteros, sin embargo, son procedimientos donde los estudiantes hacen uso de conocimientos matemáticos globales, puesto que son objetos matemáticos que ya se habían estudiado en este grado y en grados anteriores como lo es la multiplicación con números naturales. No obstante, se hace énfasis en los significados manifestados por los estudiantes de números enteros relacionados con suma y resta, pues es del interés de esta investigación. A continuación, se evidencian algunos de los significados que los estudiantes exteriorizaron para resolver la situación inicial.

Handwritten work on grid paper:

④ solución

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 4 \\ \hline 96.000 \Rightarrow \text{costo del transporte} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 5 \\ \hline 120.000 \Rightarrow \text{costo} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ 120 \\ \hline 216.000 \text{ total de gasto} \\ \text{de la alimentación} \end{array}$$

⑤ conclusión

lo que tengo son +200.000 pesos
 lo que debo son -216.000 pesos
 entonces si tengo 200.000 y se
 deben 216.000 pago los 200 y
 queda de tienda 16.000
 quiere decir que la plata de
 la tienda no nos alcanza para hacer
 el paseo, nos toca colocar una cuota o
 aporte para completar.

Ilustración 58. Modelos y solución del problema realizada por los estudiantes.

Las anteriores representaciones, permiten observar que los estudiantes se han apropiado de los significados de números enteros, *respecto a la utilidad de estos, para representar situaciones de la cotidianidad* como deber y tener. Esto quiere decir, según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019) que los modelos y argumentos realizados por los estudiantes en el

desarrollo del momento cuatro (solución) dan cuenta de los significados personales logrados construidos y del acoplamiento con los significados institucionales implementados. En consecuencia, se entiende que *la elaboración de modelos o representaciones* de situaciones asociadas a situaciones extra-matemáticas en la implementación de actividades de modelación, posibilitan la construcción de significados de números enteros, lo que deja entender que la *elaboración de modelos* o representaciones de situaciones problemas se pueden considerar como maneras de construir significados.

4.1.4.5 Momento cinco. Socialización

En el momento cinco, los estudiantes *socializaron y discutieron* los resultados con sus compañeros y la docente investigadora. Explicaron el plan que realizaron, los modelos que realizaron y cómo llegaron a la conclusión que las ganancias de la tienda no alcanzaban para ir al paseo. En este momento se observó la apropiación por parte de los estudiantes del significado de la resta con relación a situación de pagar deudas, puesto que ellos asociaron las ganancias de la tienda con la plata que tenían y los gastos del paseo con deuda o lo que tenían que pagar, de esa manera se dieron cuenta que la deuda era mayor que lo que el dinero que tenían y si pagaban con todo el dinero, quedarían debiendo y no alcanzaba para ir al paseo.

Por tanto, se reconoce que además de los significados de números enteros manifestados por los estudiantes con relación a la resta, también se evidencian significados de la apropiación del significado de orden en los números enteros.

Por eso, se puede decir que esta actividad de modelación permitió que los estudiantes manifestaran la apropiación y el acoplamiento de los significados personales logrados con los significados institucionales implementados y de esta manera evidenciar que la modelación matemática favorece la construcción de significados de objetos matemáticos tomando como base los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019). En la Tabla 8 se muestran los significados construidos por los estudiantes durante el desarrollo de la actividad tres de modelación matemática.

Tabla 8. *Resumen de significados construidos por los estudiantes en la actividad tres de modelación.*

| | Nociones | Prácticas operativas | Prácticas discursivas | Significados personales | Significados institucionales |
|---|--|--|--|---|--|
| Momento 1. Formulación del problema. | Aplicación de números enteros en el entorno. | | Discusión acerca del uso de números enteros en la vida cotidiana y formulación de una situación que trató de recolectar recursos económicos para una excursión escolar. | Logrados acerca del uso de números enteros en algunas situaciones de la cotidianidad. | Referencial acerca del uso de números enteros en algunas situaciones de la cotidianidad. |
| Momento 2. Aclaración de ideas respecto al problema. | | | Detallaron la situación para poder entenderla, como dónde conseguirían el dinero, quienes irían, dónde sería la excursión y formularon un plan de solución. | | |
| Momento 3. Investigación. | | | Investigaron acerca de aspectos que ayudaron a resolver la situación, como la cantidad de dinero que necesitaban para hacer la excursión, la cantidad de personas que asistirán, costo de la comida, costo del transporte, entre otras. | | |
| Momento 4. Representación y solución | | Representaron en forma numérica la situación, realizaron sumas | Concluyeron que los doscientos mil pesos que tenían no alcanzaban para ir a la excursión porque el costo total de la excursión era de doscientos dieciséis mil pesos, entonces si tenían doscientos y debían menos doscientos dieciséis, quedarían debiendo dieciséis pesos. | Logrado acerca de suma y resta de números enteros. | Referencial acerca de suma y resta de números enteros. |

y restas para dar
con la solución.

| | | |
|--|---|---|
| Momento 5. Socialización de resultados | En el momento cinco, los estudiantes socializaron los resultados con sus compañeros y docente. Explicaron el plan que realizaron, los modelos que realizaron y cómo llegaron a la conclusión que las ganancias de la tienda no alcanzaban para ir al paseo. | Referencial acerca de suma y resta de números enteros. |
|--|---|---|

En las prácticas operativas y discursivas manifestadas por los estudiante en el desarrollo de la actividad tres de modelación matemática se evidenció la relación entre modelación matemática según los planteamientos de Barbosa (2004) y el enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2012) y Godino, Batanero y Font (2019), puesto que los estudiantes dieron cuenta de la apropiación de algunos de los significados construidos durante las actividades uno y dos de modelación matemática acerca de la ubicación en la recta, relación de orden, operaciones aditivas (suma y resta) y utilidad de los números enteros, permitiéndoles aplicarlos en situaciones de su cotidianidad.

De manera que en el momento uno, se suscitaron discusiones que permitieron que los estudiantes acoplaran los significados personales acerca de utilidad de números enteros en su entorno con los significados institucionales. Aspecto que permite reconocer las discusiones o cuestionamientos como una manera de construir significados de números enteros.

En los momentos dos y tres se generaron espacios que permitieron que los estudiantes detallaran la situación problema y aclararan ideas, que conllevaron a investigar acerca de asuntos que permitieran llegar a la respuesta de la situación problema, dando cuenta de significados personal globales acerca de estrategias de resolución de problemas.

En el momento cuatro los estudiantes dieron respuesta al problema a través de representaciones ostensivas y no ostensivas en las cuales manifestaron los significados construidos acerca de suma y resta con números enteros.

En el momento cinco socializaron los resultados, explicaron y justificaron ante sus compañeros del salón de clases los resultados obtenidos en esta actividad. Aspecto que permitió evidenciar la apropiación de algunos de los significados construidos por los estudiantes acerca de la utilidad de los números enteros, suma y resta con estos números. Es así como se da por alcanzado el objetivo de esta actividad tres de modelación matemática.

4.1.5 Análisis del Postest

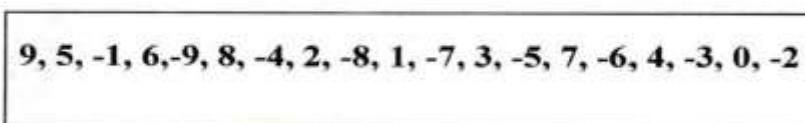
El Postest se aplicó teniendo en cuenta tres aspectos fundamentales: recta numérica, relación de orden y operaciones aditivas (suma y resta) (ver Apéndice C.1). En adelante se expone el análisis de las respuestas de los estudiantes frente a las actividades que involucraron los anteriores aspectos.

4.1.5.1 Recta numérica

Las actividades del Postest se iniciaron indagando acerca de la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera. Los estudiantes respondieron correctamente a la solicitud realizada en el instrumento de recolección de información, como se puede ver a continuación en unas de las respuestas dadas por un estudiante.

1. En el siguiente recuadro hay dígitos que pertenecen al conjunto de números enteros (\mathbb{Z}).

Ubícalos en la recta.



2. Observa la recta numérica le hacen falta algunos números. complétala

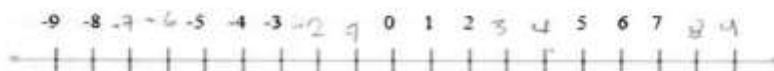


Ilustración 59. Representaciones realizadas por un Pablo.

En la respuesta anterior, se puede observar que los estudiantes ubicaron y completaron los números enteros en la recta graduada entera, circunstancia que muestra que construyeron significados personales logrados e hicieron acoplamiento con los significados institucionales implementados.

Dichos significados fueron manifestados a partir de diferentes estrategias o procedimientos, puesto que cada estudiante ubicó los números enteros teniendo en cuenta sus significados construidos, es decir, uno de ellos inició ubicando los números del menor al mayor de izquierda a derecha y los otros dos estudiantes ubicaron el cero como punto de referencia y a partir de ahí iniciaron a ubicar los demás números enteros.

A continuación, se muestra algunos de los argumentos expuestos por los estudiantes cuando se les preguntó acerca de la estrategia que habían utilizado para lograr la ubicación exitosa de los números en la recta: *inicié contando los números que estaban en el recuadro y contando las rayitas que había en la recta, y me di cuenta de que había dieciocho números enteros y dieciocho rayitas, entonces cada número corresponde a una rayita* (registro en audio, 12-11-19).

Esta respuesta generó otra pregunta ¿cómo sabes que son números enteros? a la cual respondió: *porque hay positivos y negativos y el cero*. Se continuó pidiéndole que siguiera explicando la estrategia y el estudiante continuó argumentando *que después de comparar la cantidad de rayitas y de números me fijé en cuáles eran los números y comencé ubicando el menos nueve en la última rayita de la izquierda en la recta y luego con el menos ocho y así hasta que llegue al cero y de ahí puse los enteros positivos* (registro en audio, 12-11-19). Aspecto, que evidencia la asociación de los significados acerca de la ubicación de los números enteros con las vivencias de los estudiantes, en este caso con lateralidad, es decir, lado izquierdo y lado derecho del número cero.

Un segundo estudiante, explicó: *miré los números y vi que estaba el nueve como el mayor y que también estaba el menos nueve y el cero... Y los otros*. Al escuchar la respuesta se le preguntó ¿Cuáles son los otros? El respondió: *los otros números, los enteros positivos y los enteros negativos*. Se solicitó continuar la explicación. *Ubiqué el cero como punto de referencia y de ahí ubiqué a los otros números* (registro en audio, 12-11-19).

Un último estudiante, explicó diciendo: *profe yo sé que los números enteros negativos van a la izquierda de cero y los positivos van a la derecha, entonces ubiqué el cero y miré que cupieran los otros números a un lado y al otro y empecé a ubicarlos a todos* (registro en audio,

12-11-19). Estos objetos no ostensivos también, dejan de manifiesto la relación entre los significados de números enteros y lateralidad.

Las anteriores explicaciones, realizadas por los estudiantes, además de dar cuenta de los significados construidos acerca de la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera, dejan en evidencia las diferentes estrategias o procedimientos que los estudiantes utilizan para materializar sus significados acerca de un objeto matemático.

De acuerdo con los planteamientos del enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019), las prácticas que se utilizan o que emerjan en la solución de un problema, hacen parte del proceso de construcción de significados. Por consiguiente, las estrategias que los estudiantes manifestaron de forma ostensiva y no ostensiva permiten evidenciar los significados construidos por los estudiantes acerca de la ubicación de números enteros en la recta.

De esta manera, se reconoce que los estudiantes participantes en la investigación *asocian los números enteros con lateralidad*, es decir, los enteros negativos, los relacionan con lado izquierdo de cero y los enteros positivos con lado derecho de cero, como lo muestra la respuesta dada por un estudiante ante la solicitud de etiquetar figuras teniendo en cuenta un punto de referencia.

3. Etiqueta escribiendo los números enteros correspondientes en las siguientes figuras. Ten en cuenta la figura que es diferente a las demás.



Ilustración 60. Enumeración de figuras geométricas con números enteros.

Teniendo en cuenta los significados construidos y comparándolos con los significados iniciales obtenidos en el Pretest, con relación a la ubicación en la recta numérica, se observa que

en el Pretest los estudiantes ubicaron los números enteros de forma incorrecta como se puede evidenciar en las siguientes respuestas elaboradas por un estudiante.

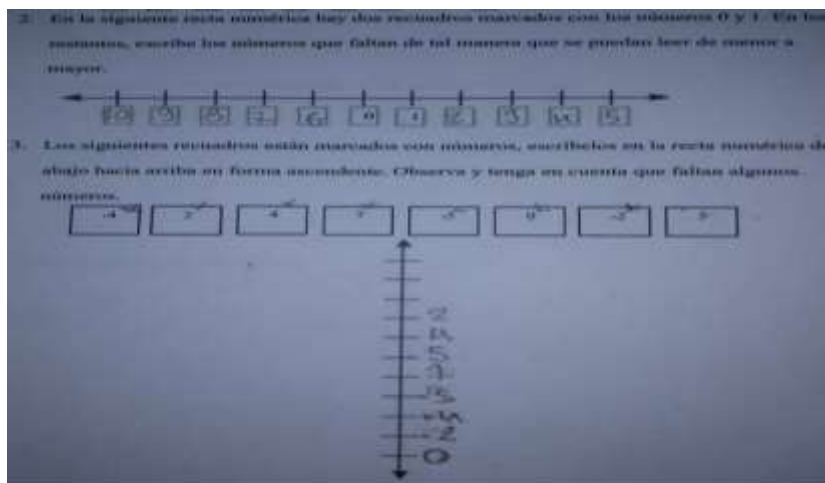


Ilustración 61. Respuesta en el Pretest por César.

En la respuesta anterior se puede observar que los significados personales que el estudiante tiene no corresponden a los significados institucionales, respecto a ubicación de números enteros en la recta numérica. Sin embargo son de gran importancia en el proceso de construcción de significados de números enteros, puesto que Godino, Batanero y Fon (2012), plantean que “en el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio, interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen” (p.8).

Se reconoce que los significados previos manifestados por los estudiantes facilitaron la construcción de significados de números enteros, puesto que, en el desarrollo de las actividades de modelación, los estudiantes tuvieron en cuenta los significados iniciales, para así construir sus significados logrados en vínculos con los institucionales implementados. Por esta razón, se consideran las actividades de modelación como escenarios que posibilitan la construcción de significados de objetos matemáticos.

4.1.5.2 Relación de orden en los números enteros

En cuanto a la relación de orden en los números enteros, se solicitó a los estudiantes, con una actividad para completar, comparar números enteros a través de la utilización de signos mayor que ($>$) y menor que ($<$), los cuales respondieron satisfactoriamente, como se muestra en la respuesta realizada por uno de los estudiantes.

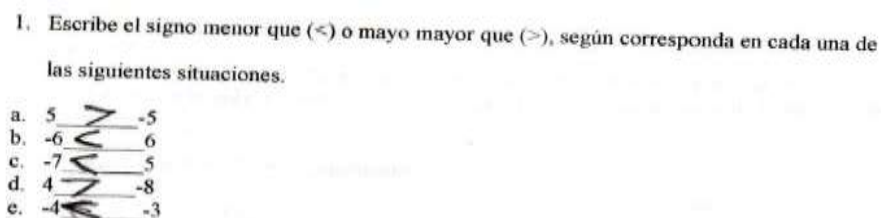


Ilustración 62. Comparación de números enteros, por Pablo.

Comparando estas respuestas con las realizadas en el Pretest, son notorias las diferencias entre la prueba inicial y la prueba final, puesto que en la primera los estudiantes compararon y organizaron correctamente los números naturales, pero cuando se involucraron números enteros presentaron dificultad para organizarlos, como se muestra en las siguientes respuestas del Pretest elaborada por un estudiante.

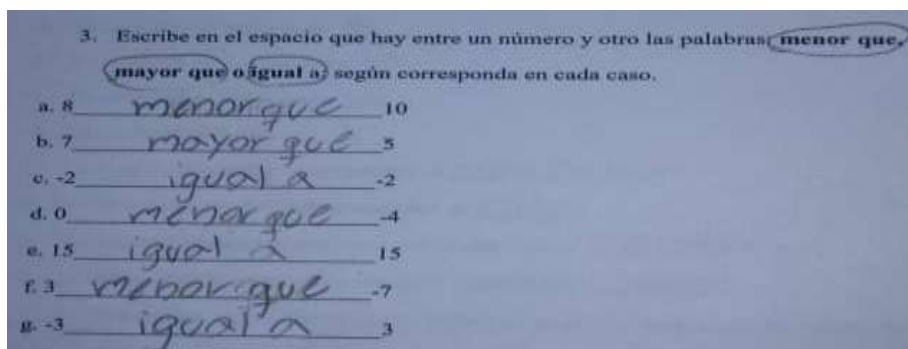


Ilustración 63. Respuesta en el Pretest respecto al orden en los números enteros, por César.

Por tanto, la representación ostensiva manifestadas por los estudiantes en las actividades del Postest, permiten reconocer que durante el desarrollo de las actividades de modelación, los estudiantes construyeron significados de números enteros, acerca de la relación de orden mediante comparación simbólica. Además de la asociación con situaciones de la realidad.

No obstante, mediante representaciones no ostensivas o de carácter discursivas los estudiantes argumentaron que lograron identificar el signo correspondiente a cada situación presentada en el taller, porque relacionaron el orden de los números con la ubicación en la recta o lateralidad, es decir recordaron que los números cuando están a la izquierda de otro, en la recta graduada entera, son menores y viceversa, como lo argumenta uno de los estudiantes al responder a la pregunta: *¿Cómo lograste identificar los signos correspondientes para cada situación?: profe, recordé donde queda cada número. Ante esta respuesta le solicité que me explicara lo que quería decir y él respondió: miré los números en cada caso y recordé donde estaban ubicado, en qué lado estaba uno del otro. Cuando miré el cinco y el menos cinco, yo sé que el menos cinco está al lado izquierdo del cinco. ¿Y qué quiere decir eso? Que cinco es mayor que menos cinco, por eso coloqué ese signo (mayor que) (registro en audio, 12-11-19).*

Por todo lo anterior, se reconoce que los estudiantes manifestaron sus significados a través de prácticas operativas y discursivas, tales como la utilización de los signos menor que ($<$) y mayor que ($>$), para comparar los símbolos de los números enteros, a partir de asociar la ubicación de estos en la recta y la lateralidad (izquierda, derecha) con los signos menor que y mayor que respectivamente y, de esta manera poder identificar cuáles eran menores o mayores.

De donde se puede concluir, en términos del enfoque ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019), que los estudiantes a partir de las diferentes prácticas utilizadas lograron construir significados de números enteros respecto a la relación de orden en estos números. En este sentido, en un segundo inciso del taller se solicita a los estudiantes ubicar unos números enteros en la recta numérica, a dicha solicitud, los estudiantes ubicaron los números correctamente en la recta, como se evidencia en la respuesta realizada por uno de los estudiantes.

Ordena los siguientes números en la recta numérica: -1, 4, -3, 5, 7, -9, 0, 2. Ten en cuenta que faltan algunos números.



Ilustración 64. Representación de significados de relación de orden en los números enteros, por Alberto.

Como se puede observar en la respuesta anterior, los estudiantes ubicaron los números que se les solicitó, de manera que cada uno quedó ubicado en su posición correcta, aspecto que deja en evidencia que los estudiantes construyeron significados de números enteros, respecto al orden de estos, mediante la relación de direccionalidad (arriba, abajo), de manera que reconocen que los números que están ubicados por encima de otro número es mayor y los que están ubicados por debajo es menor.

Dicho enunciado, se ratifica con los argumentos expuestos por los estudiantes cuando se solicita que expliquen el procedimiento o estrategias utilizadas para ubicar los números. Ante esta solicitud los estudiantes explicaron y justificaron sus respuestas, como se puede apreciar en el siguiente argumento de un estudiante. *Ubique el cero y a partir de ahí ubique el menos uno hacia abajo del cero y seguí contando los espacios de la recta hasta llegar al menos tres y después al menos nueve y lo mismo hice para el lado de arriba* (registro en audio, 12-11-19). Luego se le solicitó al estudiante que explicara porque los números enteros positivos los ubico por encima de cero. Él respondió: *profe, porque los números positivos son mayores que el cero* (registro en audio, 12-11-19).

Por consiguiente, se entiende que los estudiantes lograron construir significados personales acerca de la relación de orden en los números enteros y hacer el acoplamiento entre estos significados y los significados institucionales implementados, mediante las diferentes prácticas

operativas y discursivas manifestadas en las actividades de modelación. Algunos de esos significados que se pueden reconocer, son por ejemplo, los relacionados con lateralidad y direccionalidad, es decir, los estudiantes asocian los números que están al lado derecho y arriba de otro con mayor que ($>$) y los números que están a la izquierda y abajo de otro número con menor que ($<$), de esta manera pueden comparar números enteros, dejando en evidencia la construcción de objetos matemáticos que emergen en dicha comparación como lo son los signos mayor ($>$) que y menor que ($<$).

4.1.5.3 Operaciones aditivas (sumas y restas)

En cuanto a lo relacionado con operaciones aditivas, se les solicitó a los estudiantes que resolvieran e inventaran algunas situaciones utilizando números enteros. Se inició la actividad proponiéndole a los estudiantes resolver algunas situaciones que involucraban suma y resta con enteros. Los estudiantes resolvieron las situaciones utilizando los significados construidos, es decir, relacionaron las deudas con números negativos y lo que tenían con números positivos, como se muestra en la solución de una situación realizada por un estudiante.

1. Resuelve las siguientes situaciones.

- a. Pablo le pidió prestado \$200 a María, como no le alcanzaba para comprar el chocolate que quería le pidió prestado \$300 a César ¿Cuánto es la deuda que tiene Pablo con sus amigos?

Escribe en la tabla tu razonamiento

quedo debiendo 500 pesos

Ilustración 65. Prácticas ostensivas manifestadas por Pablo.

Comparando estas representaciones elaboradas por los estudiantes con las elaboradas en el Pretest, se puede reconocer que al inicio de la investigación los estudiantes no habían construido significados personales logrados acerca de suma y resta con números enteros, puesto que aunque representaron las operaciones aditivas en la recta graduada entera, solo lo hicieron siguiendo

indicaciones que se daban en la situación expuesta, como se puede evidenciar en las siguientes representaciones elaboradas por un estudiante.

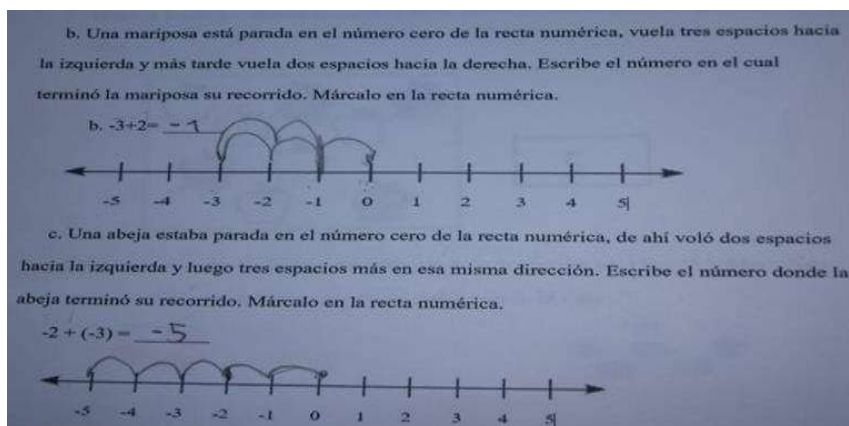


Ilustración 66. Representación de suma y resta en el Pretest.

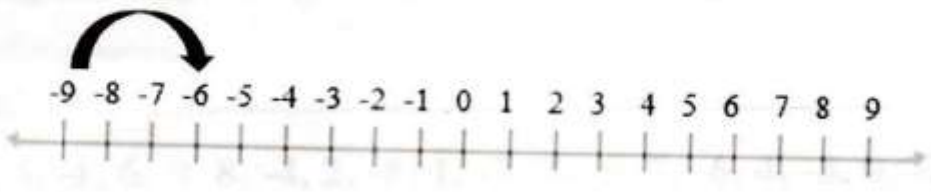
Sin embargo, en los modelos representados en el Postest se observa que los estudiantes manifestaron a través de prácticas ostensivas y no ostensivas, significados personales logrados acerca de operaciones aditivas, los cuales, se relacionan con significados asociados con situaciones como deber y tener, puesto que en la representación realizadas en el Postest el estudiante simbolizó anteponiendo el signo menos a la cantidad de dinero que prestó.

De igual forma, cuando se indagó por la estrategia utilizada el estudiante respondió: *sumé las dos deudas y al resultado le coloqué el signo menos*, luego argumentó que colocó el signo menos al número quinientos porque era una deuda (registro en audio, 12-11-19). Estos aspectos, que dejan en evidencia la relación de *operaciones aditivas con situaciones de la vida cotidiana* de los estudiantes.

En ese mismo sentido, en otro inciso, se solicita a los estudiantes que, a partir de representación en la recta numérica, inventaran una situación relacionada con la vida cotidiana. En las situaciones que los estudiantes inventaron se observa la asociación de las operaciones aditivas (suma, resta) con el entorno escolar y familiar, como se muestra en una de las respuestas realizadas por un estudiante.

2. Para cada una de las siguientes representaciones, inventa una situación relacionada con la vida cotidiana.

a.



Escriba aquí tu situación

-9 + 3 es igual a -6 Hoy presté 9 naranjas. mañana le traeré 3 para pagar ¿cuántas naranjas quedarme debiendo?

Ilustración 67. Representación de significado de suma con números enteros según Alberto.

De los objetos no ostensivos que el estudiante manifestó, se puede inferir que relaciona las operaciones aditivas con deber o tener, esto quiere decir que el significado de suma en este caso lo asocian con situaciones de su cotidianidad.

Por consiguiente, se puede reconocer que asociar los números enteros con situaciones extra-matemáticas favorece la construcción de significados de estos objetos matemáticos, como lo manifiesta uno de los estudiantes en sus argumentos: *representé el menos nueve con una deuda y el tres con tener eso para pagar. ¿Por qué lo hiciste de esa manera? A esa pregunta él respondió: porque así puedo entender lo que tengo que hacer* (registro en audio, 12-11-19).

En la siguiente respuesta también se evidencia la relación de las operaciones aditivas con situaciones cotidianas, permitiendo corroborar que involucrar el entorno de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje favorece la construcción de significados de objetos matemáticos.

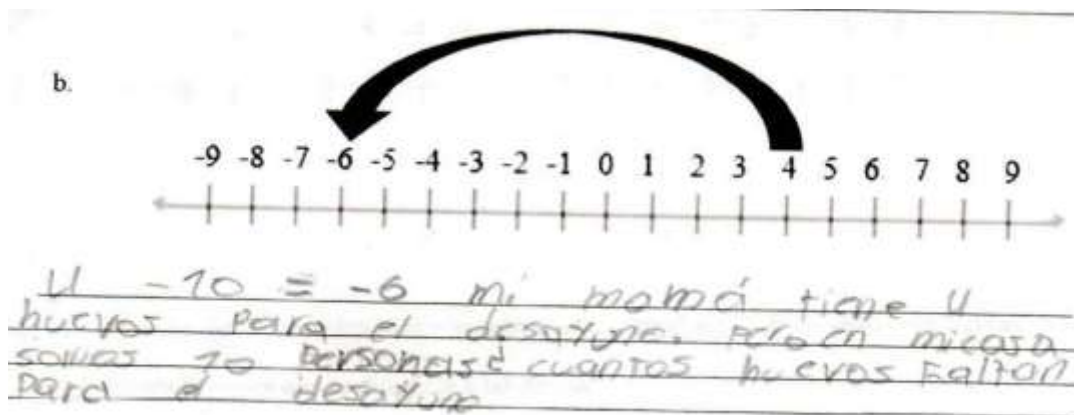


Ilustración 68. Representación de significado de resta con números enteros, según Pablo.

A manera de síntesis, en el Postest se identificó que los estudiantes dieron cuenta de los significados acerca de números enteros construidos en el desarrollo de las actividades de modelación, tales como significados de ubicación de números enteros en la recta, asociados a lateralidad y direccionalidad, de manera que relacionan enteros negativos al lado izquierdo y debajo de cero y enteros positivos al lado derecho y arriba de cero.

También, se observó que asociaron el orden de los números enteros con lateralidad y direccionalidad, concatenando los números menores con ubicación a la izquierda y debajo de otro número y los números mayores con ubicación al lado derecho y arriba de otro número. En cuanto a las operaciones aditivas se evidenció que los estudiantes las asociaron con situaciones de la vida diaria como deber y tener y con desplazamientos a la derecha y a la izquierda en la recta graduada entera.

Por tanto, se entiende que los significados manifestados por los estudiantes dan cuenta de las potencialidades que ofrece la modelación matemática al interior del aula, permitiendo reconocer que utilizar la modelación matemática como escenario para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, posibilita la construcción de significados de objetos matemáticos.

Cabe resaltar, que las actividades del Postest se realizaron después de una anomalía académica interna del Centro Educativo. Los estudiantes involucrados en la investigación estuvieron sin recibir orientaciones académicas, aproximadamente durante ocho días hábiles, por

lo tanto, se creía, que los estudiantes, después de este receso no iban a manifestar en el Postest los mejores resultados acerca de ubicación de números en la recta, orden y operaciones aditivas con números enteros.

Sin embargo, los resultados manifestados por los estudiantes fueron satisfactorios como se mostró en párrafos anteriores, permitiendo entender que cuando se involucran prácticas de enseñanza y de aprendizajes acorde a los intereses de los estudiantes y asociados a su entorno, donde participen activamente brindándole la oportunidad de construir sus aprendizajes, se generan ambientes que posibilitan la apropiación de los conceptos estudiados, cuando se hace a través de un marco didáctico de referencia apropiado, como fue la modelación matemática utilizada en esta investigación.

En correspondencia, con el anterior análisis, en el cual, se da cuenta de los significados construidos por los estudiantes en actividades de modelación y en maneras como fueron construidos estos significados, se presentan en el siguiente Capítulo los resultados o conclusiones de este proceso investigativo.

Capítulo V: Conclusiones

En este Capítulo se exponen aspectos que dan cuenta de los resultados de la investigación y el análisis del proceso de construcción de significados de estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria, según el enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2012), y Godino, Batanero y Font (2019), en relación con los números enteros (\mathbb{Z}). Esto se hará teniendo en cuenta prácticas utilizadas por los estudiantes en actividades de modelación bajo los planteamientos de Barbosa (2004).

5.1 Resultados de la investigación

Los resultados que se obtuvieron en el proceso de investigación están en correspondencia con el marco teórico seleccionado, que fue el de la modelación matemática, según algunos de los planteamientos de Barbosa (2004) y del Enfoque Ontosemiótico propuesto por Godino y Batanero (1994); Godino (2002); Batanero (2005); Godino, Batanero y Font (2007); Godino, Batanero y Font (2012); Godino, Batanero y Font (2019). El marco teórico permitió el diseño, la aplicación y el análisis de los instrumentos de recolección de información. Entre estos hallazgos se pueden resaltar el alcance del objetivo, respuesta a la pregunta de investigación y la relación encontrada entre modelación matemática y la construcción de significados, expuesta en el Capítulo II en el apartado: Relación entre modelación matemática y construcción de significados. En adelante se muestran los resultados de la investigación teniendo en cuenta los aspectos antes mencionados.

La relación entre modelación matemática y construcción de significado permitió dar cuenta de los resultados del análisis de las prácticas operativas y discursivas manifestadas por los estudiantes en el desarrollo de las tres actividades de modelación (Barbosa, 2004) que se trabajaron en esta investigación, en donde se evidenció que los estudiantes de nivel de Educación Básica Primaria pueden construir significados de números enteros (\mathbb{Z}), en cuanto a la conformación de este conjunto numérico, con la ubicación de sus elementos en la recta graduada

entera, relaciones de orden y algunos significados de suma y resta en relación con el contexto en el que los estudiantes desarrollan sus actividades escolares. Aspectos, de los cuales se dejaron evidencias en el Capítulo IV, en los apartados:

- Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera.
- Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros y,
- Observo mi entorno y aplico los números enteros.

Ahora bien, al integrar el marco de referencia de la Modelación Matemática (Barbosa, 2004) y el análisis Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2012; Godino, Batanero y Font, 2019) para analizar los significados personales logrados en correspondencia con los significados institucional implementados y referenciales, construidos por los estudiantes, en el desarrollo de esta investigación, se puede afirmar que cuando se tiene en cuenta o se vinculan los conocimientos previos, los intereses, la cotidianidad a través de situaciones intra y extra-matemáticas en el proceso de enseñanza y de aprendizaje del conjunto de números enteros (\mathbb{Z}), se facilita la construcción de significados respecto a estos números. Aspecto que se puede evidenciar en el Capítulo anterior, en el análisis de las diferentes actividades de modelación.

Por consiguiente, se puede afirmar que la modelación matemática es un escenario propicio para la enseñanza y aprendizaje de números enteros, puesto que presenta características o potencialidades que permiten vincular los conocimientos previos, los intereses y la cotidianidad de los estudiantes por medio de situaciones intra o extra-matemáticas, que motivan a los estudiantes a participar en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, permite *la socialización y discusión* respecto a conceptos matemáticos y no matemáticos, facilita la representación o elaboración de modelos de situaciones intra y extra-matemáticas.

Por otro lado, para presentar los resultados encontrados en esta investigación conviene recordar que la pregunta que se planteó fue ¿De qué maneras estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación? Esta pregunta surgió a partir de situaciones experienciales educativas en el aula.

Con miras a resolver la pregunta de investigación, se planteó un objetivo general que consiste en identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación. En los siguientes apartados se expondrán los aspectos que permitieron dar respuesta a la pregunta de investigación.

5.1.1 Respuesta a la pregunta de investigación

En el Capítulo I, en el apartado: Formulación del problema, a partir de situaciones experienciales y teniendo en cuenta la revisión de literatura, surge la pregunta de investigación ¿De qué maneras estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación? En busca de dar respuesta a dicho interrogante, es necesario recordar algunos aspectos expuestos en los Capítulos II, III y IV.

En el Capítulo II, se exponen discusiones de algunos autores respecto a la modelación matemática en educación y a partir de estos planteamientos se escogió para orientar las actividades de modelación, durante la investigación, los planteamientos de Barbosa (2004), puesto que a partir de la revisión de la literatura con relación a la enseñanza y el aprendizaje de números enteros se reconoció que la modelación matemática presenta potencialidades que favorecen la construcción de significados de objetos matemáticos, y los ambientes o actividades de modelación que propone Barbosa (2004), permite la interacción del docente en el desarrollo de estas actividades. Aspecto, que favoreció el proceso investigativo ya que se trabajó con estudiantes de Educación Básica Primaria.

Además, se muestran posturas de autores, respecto al proceso de construcción de significados de objetos matemáticos enmarcados en los planteamientos del Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2012), Godino, Batanero y Font (2019), puesto que la configuración semiótica que expone este Enfoque, está orientada a dar cuenta de elementos que constituyen los objetos matemáticos y permitió analizar los significados y las formas como los estudiantes los construyeron. También, se evidencian aspectos, respecto a la relación que se logró establecer entre la modelación matemática escogida para este estudio y la construcción de significados a partir de la revisión de literatura.

En el Capítulo III, el interés se centró en aspectos metodológicos, que permitieron diseñar actividades de modelación (ver Apéndice A.3, A.4 y A.5) teniendo en cuenta algunos de los planteamientos de Barbosa (2004), con la finalidad de identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado de Básica Primaria construyen significados de números enteros (\mathbb{Z}), para analizar las respuestas dadas por los estudiantes a partir del EOS.

Y el Capítulo IV, se orientó a identificar y analizar maneras en que estudiantes de cuarto grado de Básica Primaria construyen significados de números enteros en actividades de modelación teniendo en cuenta planteamientos de Barbosa (2004), analizadas bajo el Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019). Para investigar el proceso de construcción de significado, las acciones, interacciones, formas de proceder, el lenguaje, los procedimientos, los argumentos, los gestos, representaciones y manifestaciones de un grupo de tres estudiantes de tercer y cuarto grado, cuando se involucraron en actividades de modelación, a partir de actividades en las que se destacaron sus buenas aptitudes matemáticas, el interés, la motivación y facilidad de comprensión para la solución de diferentes problemas.

Con la finalidad de presentar los resultados de esta investigación, los hallazgos se basan en la respuesta al problema, enmarcados en las particularidades de las actividades de modelación como escenarios, para la construcción de significados de objetos matemáticos. De manera, que se concluye presentando maneras en que estudiantes de cuarto grado construyeron significados de números enteros (\mathbb{Z}) en actividades de modelación.

En este sentido, se muestran las conclusiones respecto a las ideas expuestas en los anteriores enunciados. Como resultado, la investigación mostró que involucrar a los estudiantes de cuarto grado en el estudio de los números enteros (\mathbb{Z}) a partir de actividades de modelación de acuerdo con la perspectiva definida para la investigación, enmarcadas en la problematización e investigación de situaciones extra e intra-matemáticas, permitió evidenciar maneras en que estudiantes de cuarto grado de Básica Primaria construyen significados de este conjunto numérico. Aspecto que permitió dar respuesta a la pregunta de investigación ¿De qué maneras estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de

modelación? Teniendo en cuenta planteamientos de la modelación matemática de Barbosa (2004). En este sentido, las maneras que se identificaron durante el proceso investigativo se relacionan con prácticas operativas y discursivas tomando como referentes planteamientos del Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019) en las que se destacan las siguientes:

Asociar números enteros con situaciones de la cotidianidad de los estudiantes, como se evidencia en el capítulo IV en el desarrollo de las tres actividades de modelación, (ver Apéndice A.3, A.4 y A.5).

Elaborar modelos, las representaciones de los modelos realizados por los estudiantes, se dejan en manifiesto en el análisis del momento cuatro de las actividades de modelación, en el Capítulo cuatro.

Discutir y socializar ideas acerca de una situación matemática o no matemática, como se evidencia en el Capítulo IV en el análisis de los momentos uno, dos y cinco de las actividades de modelación.

Las maneras de construir significados manifestadas por los estudiantes de grado cuarto de Educación Básica Primaria, expuestas a partir del análisis de los datos obtenidos mediante los documentos escritos, la observación y la entrevista semiestructurada, en las que se resaltan: *asociar los números enteros con situaciones de la cotidianidad de los estudiantes, elaborar modelos o representaciones, socializar y discutir acerca de una situación matemática o no matemática*. Permitieron dar respuesta al problema de investigación, puesto que se deja en evidencia que estudiantes del nivel Educativo de Básica Primaria sí pueden construir significado de números enteros, tomando como escenario para el proceso de enseñanza y de aprendizaje de estos números a la modelación matemática de Barbosa (2004), la cual permitió identificar maneras de construir significados de números enteros como se evidencia en la Tabla 9.

Tabla 9. *Maneras de construir significados, identificadas a partir de las actividades de modelación.*

| Actividades de modelación según Barbosa (2004) | | | | |
|--|--|--|--|--|
| Momentos de la modelación | Actividad 1 | Actividad 2 | Actividad 3 | Prácticas operativas y discursivas |
| asumidos teniendo en cuenta a Barbosa (2004) | Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera. | Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros. | Observo mi entorno y aplico los números enteros. | |
| Detallar la situación. | ¿Cómo ubico los números en la recta graduada entera? | ¿Qué más puedo saber de los números enteros? | Formulación del problema | Discusiones acerca de cada una de las situaciones problemas en estudio. |
| Aclarar y explicar la situación problema | Utilidad de los números enteros. | Ordeno números enteros y hago sumas y restas. | Aclaración de ideas respecto al problema. | Exposición de ideas en forma oral y escrita. |
| Recolectar datos que permitan solucionar la situación problema | A investigar jugando. | ¡A investigar! | Investigación. | Investigar acerca de la situación estudiada a través de juegos y consultas en internet, biblioteca o con personas expertos en el tema. |
| Representar soluciones a la situación problema | Represento situaciones. | Represento situaciones. | Representación y solución. | Elaborar modelos o representaciones de la situación en estudio. |
| Socializar los resultados | Comparemos y discutamos resultados. | Comparemos resultados. | Socialización de resultados. | Socialización y discusión acerca de los resultados obtenidos a través del proceso de problematización e investigación. |

En este sentido, se da por resuelta la pregunta de investigación que encaminó el proceso investigativo, interrogante que fue complementado mediante un objetivo general de investigación formulado así: Identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación. Con la finalidad de alcanzar dicho objetivo se tuvo en cuenta los planteamientos de la modelación matemática Barbosa (2004) y el análisis a partir del Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019).

5.1.2 Consecución del objetivo

Para evidenciar el logro del objetivo de investigación, se inicia retomando algunos planteamientos del Capítulo III, en donde se declararon aspectos con relación al reconocimiento de elementos intervinientes en la construcción de significados tales como prácticas operativas (modelos, diagramas, dibujos, símbolos, entre otros) y prácticas discursivas (argumentos, conceptos, proposiciones, entre otras) de Godino, Font y Batanero (2019), en vínculo con elementos propios de actividades de modelación plateada por Barbosa (2004).

De manera que las prácticas operativas y discursivas se asumen como significados personales, si son manifestadas en forma individual o como significados institucionales si son manifestadas en forma colectiva y están de acuerdo con los significados ya establecidos por un grupo de expertos en el tema tratado. Por consiguiente, analizar los significados que los estudiantes construyeron en el marco de las actividades de modelación a partir de sus intereses, curiosidades y motivaciones, permitieron identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros. Ver Apéndice A.3, A.4 y A.5.

En este sentido, se considera que el objetivo investigativo, identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria construyen significados de números enteros en actividades de modelación se logró. Por ejemplo, significados acerca de orden en los números enteros (\mathbb{Z}) manifestados por los estudiantes a través de la siguiente respuesta.

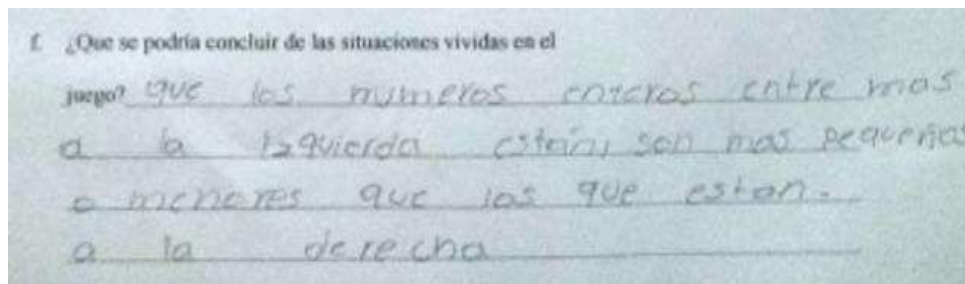


Ilustración 69. Significado de orden en los números enteros manifestados, por Pablo

Además, en el lapso de las actividades de modelación enmarcadas en algunos planteamientos de Barbosa (2004) y analizadas mediante los planteamientos del Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019), los estudiantes manifestaron prácticas operativas y discursivas que permitieron identificar algunas maneras de construir significados de números enteros, ejemplificadas con las evidencias de las actividades realizadas por los estudiantes y analizadas en el Capítulo IV, las cuales se presentan a continuación:

- Asociar números enteros con situaciones de la cotidianidad de los estudiantes
- Elaborar modelos o representaciones
- Socializar y discutir acerca de una situación matemática o no matemática

Asociar los números enteros con situaciones de la cotidianidad, permitió a los estudiantes construir significados, respecto a la ubicación de este conjunto numérico en relación con lateralidad, direccionalidad, profundidad y altura. Además, los significados acerca de relación de orden los relacionaron con la estatura de sus compañeros y tamaños de montones de fichas y las operaciones aditivas (suma, resta) fueron asumidas por los estudiantes como desplazamientos hacia el lado derecho y hacia el lado izquierdo en la recta graduada entera, como se evidencian en los Apéndices A.3, A.4 y A.5.

Las representaciones de la situación, vistas como modelos, permitieron a los estudiantes generar estrategias, utilizar procedimientos, argumentos, proposiciones, entre otros. Aspectos, que posibilitaron a los estudiantes dar cuenta de las particularidades de la situación en estudio, a través de prácticas operativas y discursivas, y suscitar vínculos entre números enteros y

situaciones de la cotidianidad de los estudiantes, como se puede ver en la siguiente representación de números enteros (\mathbb{Z}).

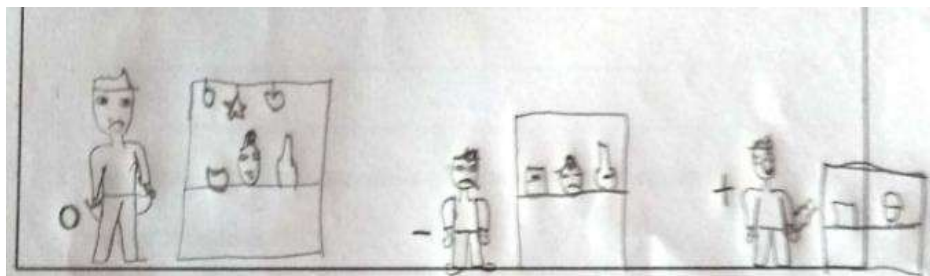


Ilustración 70. Relación de situaciones cotidianas con números enteros, realizada por Alberto.

También, se puede encontrar evidencia de esta manera de construir significado en los Apéndices A.4 y A.5

Discutir acerca de una situación matemática, conllevó a los estudiantes a reconocer particularidades de la situación que permitió entenderla, realizar representaciones de ella y relacionarlas con situaciones de su cotidianidad, como se puede ver en las respuestas elaboradas por los estudiantes en el momento uno y dos de la actividad uno de modelación: Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera. También, se tienen manifestaciones de esta manera de construir significados en los mismos numerales de la actividad dos y tres de modelación. Ver apéndice A.3 y A.4.

Además, las socializaciones y discusiones acerca de una situación matemática o no matemática, facilitó a los estudiantes conocer más acerca de la situación, permitiendo entender peculiaridades de esta, que posibilitaron la representación o elaboración de modelos, como en el caso de la investigación en la actividad dos, en donde este proceso facilitó a los estudiantes construir significados de números enteros, respecto al orden y operaciones aditivas a través de la socialización de los resultados de sus indagaciones y de la solución de problemas planteados que realizaron los estudiantes.

Evidencia de lo expuesto en el párrafo anterior, se encuentra en el Capítulo IV en el análisis del momento tres de la actividad dos de modelación: Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros. En la siguiente imagen se puede observar una de las respuestas de los estudiantes, respecto a la investigación realizada acerca de relación de orden en y operaciones aditivas en los números enteros (\mathbb{Z}).

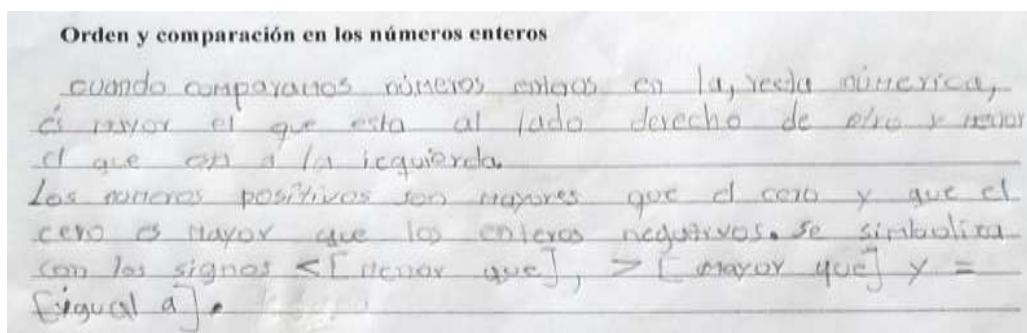


Ilustración 71. Significados construidos por Pablo, a partir de la investigación.

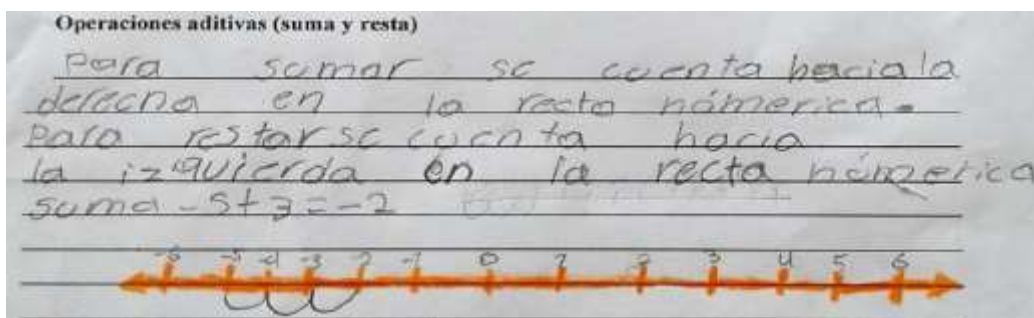


Ilustración 72. Significados construidos por los estudiantes, respecto a suma y resta de números enteros.

Socializar y discutir los resultados, fue un momento de la actividad de modelación, mediante el cual, los estudiantes ampliaron los significados de números enteros. Aspecto, que permitió generar escenarios que posibilitaron el acoplamiento entre los significados personales logrados y los significados institucionales implementados. En el Capítulo IV se evidencia esta manera de construir significado, en cada una de las tres actividades de modelación en el momento cinco, como se puede ver en la siguiente imagen.



Ilustración 73. Socialización de los resultados de la actividad dos de modelación.

La socialización de los resultados de las actividades de modelación permitió vincular a los demás compañeros de los grados tercero, cuarto y quinto, con en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números enteros. Los cuales, se mostraron motivados e interesados por conocer más acerca de este conjunto numérico.

Algunos de los estudiantes, a través de la participación directa en el desarrollo de actividad dos de modelación y mediante sus expresiones en la socialización de los resultados finales, de cada una de las tres actividades de modelación, dieron cuenta de significados personales acerca números enteros (\mathbb{Z}) tales como: ubicación de los números positivos al lado izquierdo de cero y de los números positivos a su lado derecho, que los números que están a la derecha del cero son mayores y que la suma de números enteros se puede relacionar con pasos hacia la derecha.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, el análisis de las actividades de modelación permitió determinar que la construcción de significados de objetos matemáticos emerge de las interacciones de los estudiantes, que se manifiesta a través de prácticas operativas y discursivas, (ver Apéndice A.3, A.4 y A.5) las cuales, fueron generadas a partir del proceso de problematización e investigación, enmarcado en las actividades de modelación según los planteamientos de Barbosa (2004).

Por consiguiente, se reconoce que la modelación matemática posibilita la construcción de significados, en estudiantes de nivel de Educación Básica Primaria respecto a objetos matemáticos, en este caso de los números enteros (\mathbb{Z}) y demás objetos emergentes en dichas actividades, basadas las anteriores afirmaciones en los postulados del enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019), como se muestra en la siguiente representación operativa.

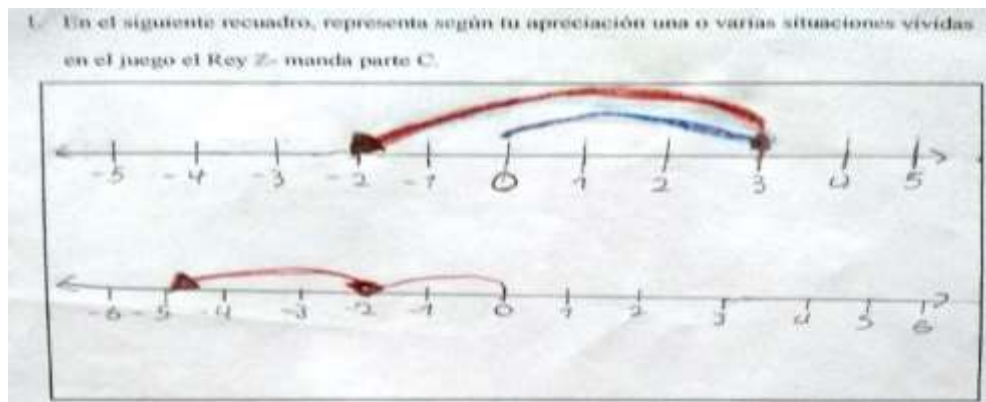


Ilustración 74. Representaciones de suma y resta en la recta graduada entera.

En consecuencia, se entiende que involucrar la modelación matemática en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los números enteros, en el aula de estudiantes de cuarto grado de Básica Primaria, favorece la construcción de significados de estos números y ayuda a que cuando estos lleguen a los primeros años de escolaridad de la Básica Secundaria (sexto y séptimo) se hayan apropiado de algunos significados de números enteros que faciliten la enseñanza y aprendizaje de este conjunto numérico en este ciclo de escolaridad. A continuación, se presentan los hallazgos encontrados respecto a la relación entre modelación matemática y construcción de significados de objetos matemáticos.

5.1.3 Relación entre modelación matemática y construcción de significados

La revisión de literatura conllevó a relacionar la modelación matemática de Barbosa (2004) con el Enfoque Ontosemiótico de Godino Batanero y Font (2012) y Godino Batanero y Font (2019). Dicha relación tiene que ver con articular la modelación matemática, asumida como proceso de problematización e investigación de situaciones intra y extra-matemáticas que

enmarca varios momentos (problematización, aclaración de la situación, investigación, representación de la situación y socialización de resultados) con los elementos constituyentes de significados inmersos en las prácticas operativas y discursivas sustentadas por Godino, Batanero y Font (2012) y Godino, Batanero y Font (2012).

Las prácticas operativas son vistas como representaciones ostensivas (graficas, algoritmos, dibujos, entre otros) y las prácticas discursivas se asumen como representaciones no ostensivas (enunciados, justificaciones, argumentos, conceptos, entre otros), De manera que se reconocen los modelos matemáticos como representaciones o prácticas operativas y discursivas que posibilitan la construcción de significados de objetos matemáticos. En la siguiente ilustración se muestra esta relación.

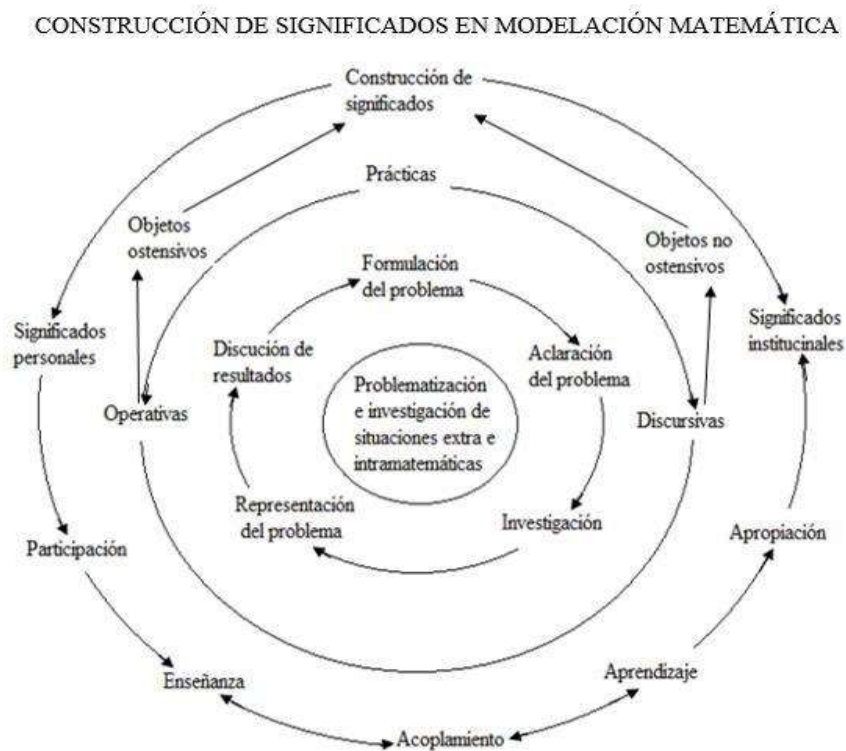


Ilustración 75. Relación entre modelación matemática y construcción de significados (elaboración propia).

Dejando de manifiesto aspectos que permiten analizar el proceso de construcción de significados mediante las prácticas operativas y discursivas exteriorizadas por los estudiantes en las diferentes actividades de modelación.

Tales aspectos, tienen que ver con el proceso de problematización e investigación que se lleva a cabo en el desarrollo de las actividades de modelación, en donde se generan prácticas que se relacionan directamente con los modelos elaborados por los estudiantes en las actividades de modelación manifestados a través de signos como gráficas, algoritmos, preposiciones, argumentos, justificaciones, entre otras; que son reconocidos en el Enfoque Ontosemiótico como elementos de significados que componen los significados de objetos matemáticos.

5.1.4 Modelación matemática, una manera de asumir la investigación en el entorno escolar para la construcción de significados

Las maneras de construir significados identificadas a través del análisis de las prácticas operativas manifestadas por los estudiantes a través de las actividades de modelación según los planteamientos de Barbosa (2004) y analizadas bajo los parámetros del enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019), tales como: discutir acerca de una situación matemática o no matemática, investigar acerca de la situación en cuestión, representar modelos y socializar resultados para llegar a acuerdos, respecto a la solución de la situación, permitieron reconocer, en la modelación matemática potencialidades que facilitan el proceso de construcción de significados de números enteros en estudiantes de cuarto grado de Básicas Primaria. Para que estas potencialidades se hagan visibles al interior del aula, es necesario tener en cuenta la curiosidad, intereses y motivaciones de los estudiantes, y promover la problematización e investigación de situaciones intra y extra-matemáticas.

Atender en el aula la curiosidad e intereses de los estudiantes, mediante actividades de modelación, favorece el proceso de construcción de significados de números enteros, aspecto que permite que los estudiantes puedan vincular el objeto matemático en estudio con situaciones de su cotidianidad. De manera que los estudiantes no solo construyen significados personales, sino

que los van transformando y acoplando con los significados institucionales manifestados a partir de las interacciones realizadas en cada uno de los momentos de las actividades de modelación.

De igual forma, los resultados de la investigación dan cuenta del hecho que suscitar procesos de construcción de significados enmarcados en actividades de modelación se hacen presentes la problematización y la investigación, en las que los estudiantes se involucran en tareas como vincular objetos matemáticos con situaciones cotidianas; discutir ideas que generan argumentos, justificaciones, conceptos, entre otras. Representar situaciones a través de diferentes modelos; planear y aplicar procedimientos matemáticos o de otras áreas, y socializar resultados para llegar a acuerdos con respecto a los significados construidos del objeto matemático en estudio.

A partir de lo anterior se concluye que relacionar la modelación matemática con la construcción de significados, atendiendo los postulados del enfoque ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019), posibilita la construcción de significados de números enteros por estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria.

5.1.5 Transformación de la práctica docente, posibilidades a partir de la modelación matemática

En este apartado cabe recordar que uno de los aspectos que suscitaron el proceso investigativo fueron las reflexiones de la docente investigadora frente a las prácticas de aula relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros. Aspecto, que conllevó a revisar en la literatura de educación matemática acerca de estas prácticas. Dicha revisión permitió reconocer que la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros (\mathbb{Z}) deben estar vinculados con el contexto de los estudiantes y que una manera de materializar esta relación entre números enteros y contexto es la modelación matemática, puesto que presenta potencialidades que favorecen esta relación y posibilita la construcción de significados.

De manera, que las reflexiones de aula y el proceso de revisión de literatura conllevó a formular el problema de investigación y posibles formas de resolverlo. En donde la modelación matemática, asumida como proceso de problematización e investigación, jugó un papel

importante en el proceso investigativo, motivando al diseño y aplicación de actividades de modelación que favorecieron la construcción de significados de los números enteros.

La implementación en el aula de actividades de modelación, permitieron que los estudiantes se involucraran activamente en su proceso de aprendizaje, permitiendo resaltar algunas de las prácticas de aula de los estudiantes y de la docente investigadora.

En cuanto a las prácticas de los estudiantes a partir de las actividades de modelación, se destaca un rol participativo de la profesora, a través de la discusión de situaciones intra y extra-matemáticas e investigación de las mismas y de esta manera los estudiantes se apropien de argumentos, conceptos, justificaciones, proposiciones y conclusiones que emergen de los resultados y procedimientos matemáticos de la situación en cuestión, dejando de manifiesto la participación activa de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. Esto permitió que las actividades de modelación fueran una estrategia u oportunidad en la que los estudiantes pudieron participar, discutir, indagar, refutar, argumentar, socializar, concluir, entre otros procesos que hacen de una clase un ambiente de cooperación en la que se propicia la construcción de significados.

Además, la implementación de las actividades de modelación promovió el trabajo colaborativo, en donde cada uno de los estudiantes involucrados en el proceso investigativo pudo desempeñarse en diferentes roles y participar en consultas, diálogos, representaciones, exposición de ideas y discusiones. Favoreciendo sus capacidades y exponiéndolos a fortalecer sus habilidades a partir del accionar con sus compañeros. Aspectos que se reflejaron al interior del aula, a través de las interacciones entre estudiantes y docente y entre ellos mismos, haciendo del aula un espacio más agradable para el intercambio de ideas y nuevas experiencias educativas.

En cuanto a la transformación de las prácticas docentes, el desarrollo de este proceso investigativo permeó el quehacer pedagógico de la docente investigadora, de manera que propició la reflexión de las prácticas de aula, en donde se enfatiza en la parte metodológica, es decir, el cómo enseñar y cómo evaluar. En cuanto al cómo enseñar, se entiende que relacionar

los conceptos matemáticos con el entorno escolar de los estudiantes interviene positivamente en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, ya que esta investigación permitió reconocer que cuando se estudia el conjunto de números enteros (\mathbb{Z}) a partir de relacionarlos con situaciones en vínculos con los intereses, necesidades y en relación con las vivencias de los estudiantes, que favorecen la construcción de significados de estos conceptos matemáticos.

De igual forma, en lo relacionado con las formas de evaluación, el proceso investigativo permitió percibir que las actividades de modelación, más que una manera de valorar contenidos es una oportunidad para promover la evaluación formativa, en beneficio de suscitar habilidades de pensamientos matemáticos en los estudiantes. En este sentido, las prácticas evaluativas se asumieron como oportunidad para el desarrollo de habilidades y destrezas en los estudiantes y, no como forma de evaluar contenidos o conceptos matemáticos.

Por consiguiente, como un resultado del proceso de investigación se propone involucrar actividades de modelación como método de enseñanza y de aprendizaje en donde se integren situaciones propias del entorno de los estudiantes con conceptos matemáticos y de otras áreas. Además, esta propuesta se puede convertir en un reto y oportunidad de instituir grupos de aprendizaje con los compañeros del Centro Educativo, que permitan hacer realidad esta propuesta de articular situaciones de la realidad con las matemáticas y otras áreas del saber.

La transformación de las prácticas de aula se percibe como una oportunidad en la formación de la docente investigadora, puesto que posibilita vincular a la planeación de las clases actividades que permiten establecer relaciones entre lo que se aprende en el aula y las vivencias cotidianas de los estudiantes, a partir de la modelación matemática, la cual posibilita la construcción de significados y el desarrollo de habilidades para aplicar los conceptos matemáticos.

Las reflexiones de la docente investigadora, acerca del proceso investigativo que se llevó a cabo en el marco de este estudio, permitieron reconocer que más allá de resolver la pregunta y alcanzar el objetivo de investigación, al interior del aula se percibieron cambios tanto en la manera de enseñar como en la manera de aprender. Cambios que tienen que ver con la

implementación de estrategias de enseñanzas que posibilitaron a los estudiantes participar activamente en el proceso de aprendizaje a partir de sus intereses, necesidades y con relación a su entorno.

5.2 Discusión

Según el enfoque ontosemiótico (EOS) de Godino, Batanero y Font (2012), los significados globales o previos son los insumos para la transformación de los significados, puesto que permiten analizar los cambios de significados a través del proceso de estudio, comparados con los que construyan finalmente los estudiantes.

Partiendo del postulado anterior, en esta investigación los significados globales fueron de gran ayuda para el desarrollo de las actividades de modelación, puesto que los estudiantes relacionaron los números enteros con situaciones cotidianas, especialmente las del comercio (deber, tener y no tener dinero). En cuanto a la relación de orden y operaciones aditivas, además de relacionarlos con situaciones cotidianas, los vincularon con algunas propiedades de los números naturales. De esta manera los estudiantes pusieron en manifiesto la importancia de los conocimientos globales en el proceso de construcción de significados.

Al respecto, se resalta que el tener en cuenta los conocimientos previos en el proceso de estudio de los números enteros, les facilitó buscar información, procesarla y construir representaciones y argumentos que permitieron justificar sus resultados. Cabe resaltar que las prácticas operativas y discursivas utilizadas por los estudiantes, permitieron dar cuenta de la apropiación de los significados personales construidos y acoplados con los significados institucionales implementados acerca de números enteros. El análisis de las actividades de modelación permite concluir que involucrar a estudiantes de Básica Primaria en el estudio del conjunto de los números enteros mediante la modelación matemática, permite la construcción de significados de estos números en relación con diversas situaciones de su entorno permitiendo el planteamiento y solución de problemas que no son posibles sin la apropiación de este conjunto numérico.

Por tanto, se reconoce que el conjunto de números enteros (Z) se puede presentar a estudiantes de Básica Primaria en el aula escolar, de manera que, desde los grados tercero y cuarto, se expongan al estudio de estos, con relación a situaciones cotidianas, puesto que los conocimientos previos o experiencias de los estudiantes permiten relacionar los números enteros con su cotidianidad y de esta forma facilitar la construcción de significados de los números enteros, para que cuando lleguen al estudio de los números enteros en grados sexto, séptimo y otros grados de Básica Secundaria, cuenten con significados personales logrados y acoplados con significados institucionales implementados, acerca de este conjunto numérico. Aspecto que facilitará el estudio de dichos números en estas nuevas etapas de escolaridad.

5.3 Futuras líneas de investigación

Con esta investigación, cuyo objetivo es identificar maneras en que estudiantes construyen significados de números enteros (Z) en actividades de modelación, se hace una contribución a las líneas de investigación en modelación matemática y construcción de significados de objetos matemáticos, con el propósito de que este proceso sea puesto en práctica al interior del aula en nuestro país, invitando a estudiar objetos o conceptos matemáticos a partir de la implementación de estrategias de enseñanza y de aprendizaje que permitan vincular y aplicar las matemáticas en situaciones de la cotidianidad de los estudiantes.

En este sentido, se invita a los docentes a implementar actividades de modelación en las aulas de los niveles de Básica Primaria y Básica secundaria, puesto que realizar este proceso matemático es fundamental en el proceso de construcción de significados de objetos matemáticos en relación con la vida cotidiana de los estudiantes. Además, se propone a compañeros docentes, ir más allá de lo que plantean los Referentes Curriculares en Colombia, en busca de alcanzar el perfil del estudiante que se quiere formar.

Ahora bien, iniciar la construcción de significados del conjunto de números enteros a partir de los primeros años de escolaridad (Básica Primaria) mediante actividades de modelación, permite incitar interacciones entre conceptos matemáticos y realidad. Aspecto que promueve el

desarrollo de habilidades y destrezas que se hacen necesarias para resolver problemas de su cotidianidad.

Esta investigación no pretende terminar aquí, sino que procura invitar a futuros investigadores para que continúen explorando acerca de:

- Potencialidades de la modelación matemática en el proceso de construcción de significados de objetos matemáticos.
- Relación del Enfoque Ontosemiótico y la modelación matemática.
- Construcción de significados de objetos matemáticos con otros diferentes marcos teóricos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Posibles investigaciones que se pueden orientar a implementar la modelación matemática en el nivel de Básica Primaria, cómo manera de abordar aspectos metodológicos en el aula como trabajo colaborativo, buscando mejorar relaciones entre estudiante – estudiante y estudiante – docente.

Finalmente, esta investigación deja el camino abierto a futuros investigadores para que puedan explorar acerca de otros conjuntos numéricos a partir de grados de Básica Primaria, como podría ser el de números racionales, no vistos como fracciones sino como conjunto numérico.

Apéndice

Apéndice A. Resultados de la actividad diagnóstica, el Pretest, las actividades de modelación y el Postest.

A.1 Actividad diagnóstica y análisis

Para el análisis de esta actividad se tiene en cuenta el comportamiento y la aptitud de los estudiantes hacia el trabajo matemático con números naturales, puesto que se pretende escoger los estudiantes que serán analizados en el desarrollo del proceso investigativo, los cuales de acuerdo a los intereses de esta investigación, deben presentar potencialidades que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas, ya que en los referentes de curriculares no se plantean este conjunto numérico para ser estudiado en grados de básica primaria y además, el objetivo de este estudio es identificar formas en que estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación, para el fortalecimiento de la enseñanza y el aprendizaje de este conjunto numérico.

En este sentido los estudiantes se escogen teniendo en cuenta criterios de conveniencia y favorabilidad, es decir, los estudiantes que se escogen serán los que se destaquen por demostrar buenas aptitudes frente al trabajo matemático. De esta manera, en adelante se presentan y se describen las aptitudes de los estudiantes elegidos, frente a la actividad diagnóstica, quienes por motivos éticos no serán llamados por su nombre sino que se les asignan seudónimo para su identificación. En el desarrollo de la actividad diagnóstica se destacaron por su aptitud matemática tres estudiantes; Pablo, César y Alberto.

Para el análisis de las diferentes actividades que conforman esta investigación se tendrán en cuenta aspectos del enfoque ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019). Tales como la relación entre significado personal e institucional y elementos constituyentes de significados como situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos. En este sentido, se describe las prácticas utilizadas por los estudiantes al enfrentarse a actividades matemáticas, teniendo en cuenta los aspectos antes descritos.

Esta actividad diagnóstica se realizó con nueve estudiantes de los grados tercero y cuarto de básica primaria. Sin embargo, para el análisis solo se describen las prácticas realizadas por tres estudiantes que se destacaron por sus aptitudes matemáticas. A todos los estudiantes se les entregó montones de fichas y se les pidió que estimar la mayor y menor cantidad de cada montón de fichas, pero a los estudiantes que se les facilitó responder y justificar las respuestas fueron Pablo, César y Alberto. Las preguntas y respuestas se muestran a continuación.

Pablo

Pregunta: ¿En cual de los montones hay más cantidad?

Respuesta: *en este, señalando el montón tres*

¿Por qué crees que hay más en esa?

Respuesta: *porque está más grande*

A la pregunta ¿Cuál montón crees que tiene menos cantidad?

Respuesta: *en el cinco*

¿Por qué crees que es ese?

Respuesta: *porque está más chica la pila*

César

Pregunta: ¿En cual de los montones hay más cantidad?

Respuesta: *en este, señalando el primer montón*

¿Por qué crees que hay más en esa?

Respuesta: *porque está más grande y más ancho*

A la pregunta ¿Cuál montón crees que tiene menos cantidad?

Respuesta: *mostro el montón que estaba en la posición cuatro*

¿Por qué crees que es ese?

Respuesta: *porque está más pequeño.*

Alberto

Pregunta: ¿En cual de los montones hay más cantidad?

Respuesta: *señala el montón que ocupa la posición dos*

¿Por qué crees que hay más en esa?

Respuesta: *porque es el que está más grande*

A la pregunta ¿Cuál montón crees que tiene menos cantidad?

Respuesta: *este y muestra el de la posición tres.*

¿Por qué crees que es ese?

Respuesta: *porque es el más pequeño.*

Estas respuestas, dejan en evidencia que los estudiantes relacionan tamaño con cantidad y de esta manera muestran un significado personal de número natural al relacionar la cantidad con el tamaño de los montones. Aspecto que coincide con los planteamientos de Godino, Batanero y Font 2019, quienes argumentan que los significados son los sistemas de prácticas que un individuo utiliza para resolver una situación, en este caso el estudiante utilizó la comparación entre tamaño y cantidad como practica para resolver la situación expuesta, significado que esta articulado con significado institucional de numero natural.

De igual manera, se indica a los estudiantes contar las fichas de cada uno de los cinco montones y organizarlos de menor a mayor, de tal forma que se observara la secuencia del más

pequeño al más grande, también son estos tres niños los primeros en terminar y no presentar inconvenientes en dicho ordenamiento. En este momento, muestran apropiación del significado institucional implementado y un significado personal logrado acerca de secuencias numéricas y orden en números naturales (Godino, Batanero y Font, 2019).

A partir de la nueva ubicación de los montones y tomando como referencia el montón que se encuentra en el medio de los otros montones se les pregunta ¿Cuántas fichas hay en este montón? (señalando el montoncito que está en el medio, es decir, el montón tres) ¿Tiene menor o mayor cantidad que los montones que están a su derecha? ¿Tiene mayor o menor cantidad que los montones que están a su izquierda? A partir de las relaciones que acabas de hacer con los diferentes montones de fichas responde ¿Qué relación puedes hacer entre las cantidades de fichas que hay en cada montón? A dichas preguntas los estudiantes respondieron lo siguiente.

Pablo

Pregunta: ¿Cuántas fichas hay en este montón?

Respuesta: *ocho*

¿Tiene menor o mayor cantidad que los montones que están a su derecha?

Respuesta: *menor cantidad, porque acá hay once y en la otra 15 (mostrando las filas de fichas que estaban a la derecha de la fila tres)*

¿Tiene mayor o menor cantidad que los montones que están a su izquierda?

Respuesta: *tiene más fichas, porque en este hay cinco y en este hay dos (muestra los montones que están a la izquierda del tercero).*

¿Qué relación puedes hacer entre las cantidades de fichas que hay en cada montón?

Respuesta: *hay relación de menor y mayor*

César

Pregunta: ¿Cuántas fichas hay en este montón?

Respuesta: *once*

¿Tiene menor o mayor cantidad que los montones que están a su derecha?

Respuesta: *menor cantidad, porque acá hay 12 y en la otra 15 (mostrando las filas de fichas que estaban a la derecha de la fila tres)*

¿Tiene mayor o menor cantidad que los montones que están a su izquierda?

Respuesta: *tiene más fichas, porque en este hay siete y en este hay cinco (muestra los montones que están a la izquierda del tercero).*

¿Qué relación puedes hacer entre las cantidades de fichas que hay en cada montón?

Respuesta: *de orden de menor a mayor*

Alberto

Pregunta: ¿Cuántas fichas hay en este montón?

Respuesta: *nueve*

¿Tiene menor o mayor cantidad que los montones que están a su derecha?

Respuesta: *menos fichas, porque acá hay diez y en la otra doce (mostrando las filas de fichas que estaban a la derecha de la fila tres)*

¿Tiene mayor o menor cantidad que los montones que están a su izquierda?

Respuesta: *tiene más fichas, porque en este hay seis y en este hay cinco (muestra los montones que están a la izquierda del tercero).*

¿Qué relación puedes hacer entre las cantidades de fichas que hay en cada montón?

Respuesta: *prafe, los números que están a la derecha de otro son mayores y los que están a la izquierda son menores.*

Las respuestas y justificaciones de los estudiantes dejan en evidencia que han construido significado de número como secuencia numérica y de orden en los números naturales, puesto que organizaron los montones de fichas de menor a mayor tomando como referencia el tamaño de cada montón. En este caso también, se puede observar la relación entre los significados personales con los institucionales expuestos por Godino, Batanero y Font (2019).

Por otro lado, se observó que los estudiantes descubrieron que los números que se encuentran a la derecha de otro número son mayores y los que se encuentran al lado izquierdo son menores. Aspecto, que deja inferir que las prácticas operativas y discursivas realizadas por los estudiantes como el conteo, organización de los montones de fichas, la comparación y las respuestas y argumentos conllevaron a la construcción de conceptos y proposiciones por parte de los estudiantes acerca del orden en los números naturales, elementos que según Godino, Batanero y Font (2019), son constituyentes de la construcción de significado de objetos matemáticos.

Estos aspectos, permiten inferir que los estudiantes han logrado relacionar orden de los números con lateralidad (izquierda, derecha), de manera que en sus argumentos asocian izquierda con números menores y derecha con números mayores, lo cual deja ver que han construido significado de números como secuencia, puesto que el lenguaje, los procedimientos, los conceptos, las proposiciones y los argumentos que los estudiantes utilizaron dan cuenta del significado construido (Godino, Batanero y Font, 2019).

Por otro lado, en cuanto a la ubicación de los cinco montones de fichas en la recta numérica, los estudiantes situaron con facilidad los montones según la cantidad de fichas que tenía cada uno y a partir de esa ubicación en la recta numérica respondieron las siguientes preguntas.

Pablo

¿Cómo están ubicados los números en la recta numérica?

De menor a mayor

¿Se pueden ubicar dos números diferentes en una misma posición? ¿Por qué?

No, porque cada número tiene su espacio

¿Se puede ubicar dos veces un mismo número (uno seguido de otro) en la recta? ¿Por qué?

No, porque un número va después del otro (argumenta, ocho va después de siete y así)

¿Qué significa la flecha que se coloca al principio y al final de la recta?

No sé, que siguen los números (hace un gesto de inseguridad e interrogación)

¿Qué puedes concluir a partir del significado de las flechas de la recta numérica?

Aahah; los números siguen de ahí tanto para la derecha como para la izquierda (pregunta ¿Qué número son los que están a la izquierda de cero?).

César

¿Cómo están ubicados los números en la recta numérica? *Del cero en adelante*

¿Se pueden ubicar dos números diferentes en una misma posición? ¿Por qué?

No, porque un número siempre va después de otro (hace un gesto negando y argumenta a un número le sigue uno mayor)

¿Se puede ubicar dos veces un mismo número (uno seguido de otro) en la recta? ¿Por qué?

No, porque los números se ubican en la recta del cero en adelante y no se repiten, va uno después de otro.

¿Qué significa la flecha que se coloca al principio y al final de la recta?

Que los números siguen

¿Qué puedes concluir a partir del significado de las flechas de la recta numérica?

Que hay números menores que cero ¿y cuáles serán esos números?

No sé (devolvió la misma pregunta ¿cuáles son?)

Alberto

¿Cómo están ubicados los números en la recta numérica?

Del más pequeño al más grande

¿Se pueden ubicar en la recta numérica dos números diferentes en una misma posición? ¿Por qué?

No, porque los números van en orden del más pequeño al más grande

¿Se puede ubicar dos veces un mismo número (uno seguido de otro) en la recta? ¿Por qué?

No, por lo mismo (los números van en orden)

¿Qué significa la flecha que se coloca al principio y al final de la recta?

Que los números siguen

¿Qué puedes concluir a partir del significado de las flechas de la recta numérica?

Que hay más números hacia la derecha y hacia la izquierda

¿y cuáles serán esos números?

Hacia la derecha siguen cada vez más grande, no tienen fin, pero hacia la izquierda no

Sé.....sé que son menores que cero (termina preguntando cuáles son)

Las anteriores respuesta, permiten evidenciar que estos estudiantes en el transcurso de su proceso de formación han construido significados personales de números naturales para contar, como secuencia numérica y para representar cantidades, significados que están en consonancia con los significados institucionales de este conjunto numérico (Godino, Batanero y Font, 2019).

Además, se percibe que estos significados fueron construidos a partir de la relación cantidad con tamaño, es decir, los estudiantes relacionan cantidades menores con pequeño y cantidades mayores con más grande. Después de realizar esta actividad, además de hacer las relaciones anteriores, también relacionan números menores con lado izquierdo en la recta numérica y cantidades mayores con lado derecho.

Aspectos, que dejan en manifiesto que las practicas (lenguaje, procedimientos, conceptos proposiciones y argumentos) utilizadas utilizada por los estudiantes para resolver situaciones matemáticas a lo largo de su proceso de formación, permitieron la construcción de significados de números naturales por parte de los estudiantes según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019).

Por tanto, se reconoce que los conocimientos previos favorecen la construcción de significado como lo asegura Godino, Batanero y Font (2019) quienes plantean que para analizar las transformaciones de los significados elaborados en un proceso de estudio es importante tener en cuenta los significados iniciales para poder comparar con los significados finalmente construido.

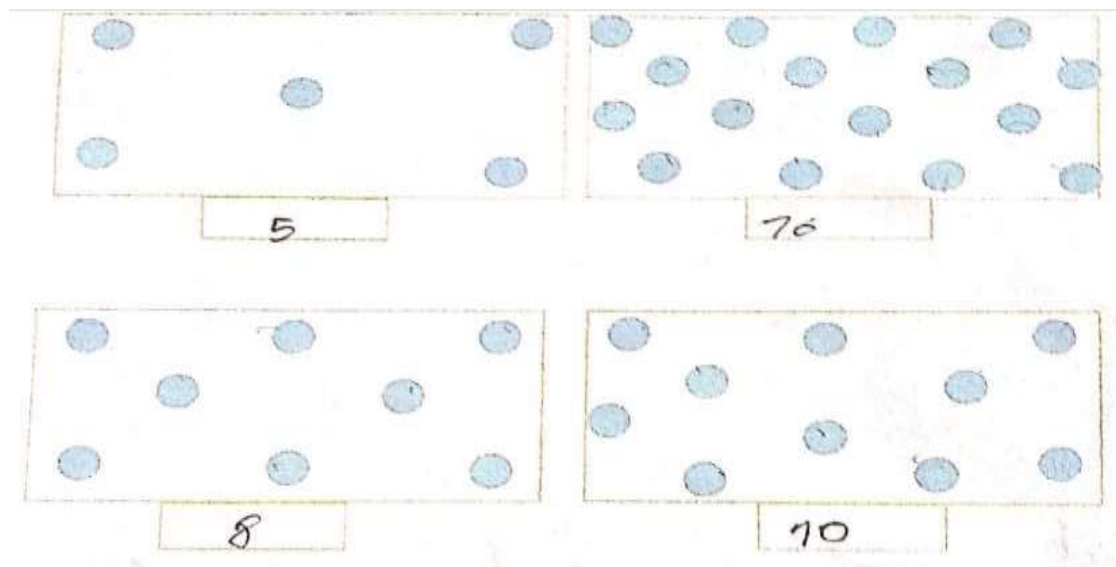
Todo lo anteriormente expuesto, permitió escoger a los estudiantes que serán analizados en el proceso investigativo, puesto que se destacaron en el desarrollo de la actividad diagnóstica, permitiendo observar las aptitudes matemáticas positivas presentadas por estos estudiantes, las cuales pueden facilitar el proceso investigativo. Ya que según el enfoque ontosemiótico de Godino Batanero y Font (2019) manifiesta que la parte emocional también interviene en el desarrollo de la actividad matemática, de manera que la plantean como una de las seis facetas o

trayectorias de la construcción de significado, estas son: epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional.

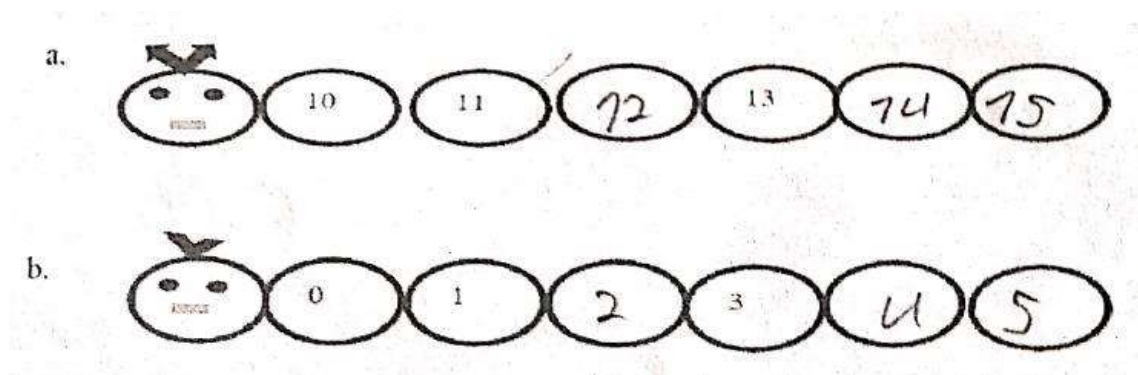
A.2 Pretest (actividad de conocimientos previos)

A.2.1 Dominio numérico

Observa cada uno de los siguientes recuadros y cuenta las bolitas que cada uno contiene. Escribe dicho número debajo.



Observa la siguiente imagen, escribe el número que corresponda en los círculos que no tienen un número marcado.



En cada uno de los siguientes casos escribe los números que siguen a la derecha y a la izquierda, en los espacios correspondientes.

- a. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
- b. 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
- c. 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12
- d. 8, 6, 4, 2, 0
- e. 12, 9, 6, 3, 0
- f. 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4
- g. 4, -3, 2, -1, 2, 3, 2, 3, 4, 5

Observa el siguiente gusano, en tres de sus anillos tiene marcados números, escribe los números faltantes hasta llegar a la cola.

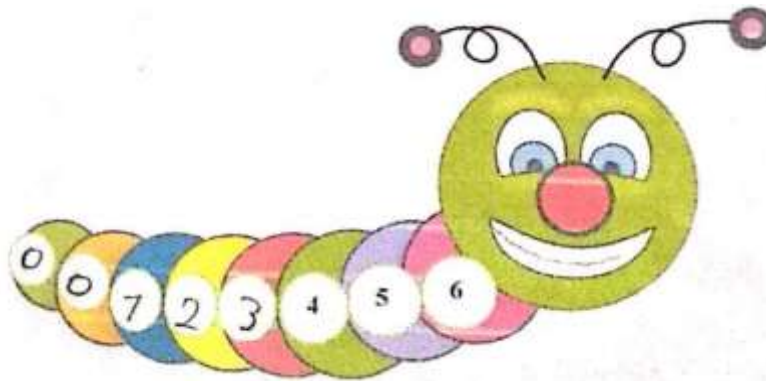


Imagen tomada de: <https://pixabay.com/es/vectors/gusano-libro-sonrisa-310642/>

Lee las siguientes situaciones y representa cada una como creas conveniente.
(Dibujos, graficas, diagramas, entre otras).

a. Le debo 4 bolitas a mi amigo Tomás.



b. En el camino de mi casa al colegio se me perdieron 2 colores.



c. En mi bolsillo tengo 50 pesos.



A.2.2 Recta numérica graduada entera

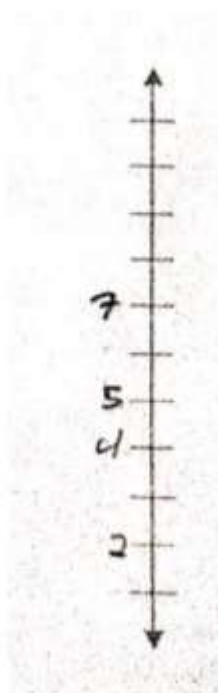
En la siguiente figura, en cada uno de los cuadros, escribe los números 10, 1, 6, 5, 9, 4, 8, 0, 2, 7, 3 de forma que se lean de menor a mayor.



En la siguiente recta numérica hay dos recuadros marcados con los números 0 y 1. En los espacios restantes, escribe los números que faltan de tal.



Los siguientes recuadros están marcados con números, escríbelos en la recta numérica de abajo hacia arriba en forma ascendente (es decir, de menor a mayor). Observa y tenga en cuenta que faltan algunos números.



A.2.3 Orden en los números enteros

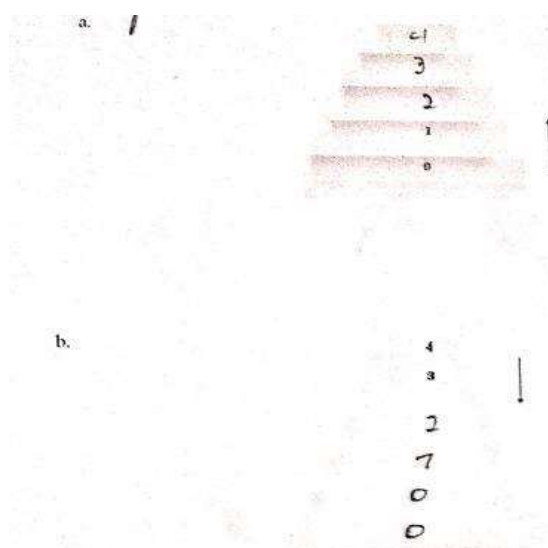
En cada una de las siguientes fotos se muestran diferentes tipos de frutas: mangos, manzanas, bananos y fresas. Completa las siguientes oraciones:



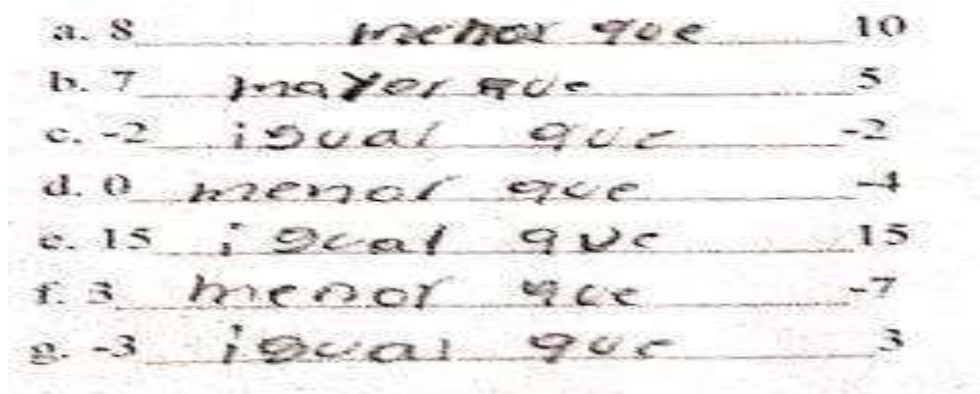
Tomado de: <https://www.elheraldo.co/entretenimiento/consumir-frutas-enteras-mas-saludable-que-en-jugos-278569>

- La cantidad de mangos es 5.
- La cantidad de manzanas es 10.
- La cantidad de bananos es 4.
- La cantidad de fresas es 3.
- La fruta de la que hay más cantidad es manzana.
- La fruta de la que hay menor cantidad es fresa.
- La cantidad de mangos es menor que la cantidad de manzana.
- La cantidad de bananos es menor que la cantidad de fresa.

Observa las siguientes figuras. Escribe los números faltantes en cada uno de los escalones.

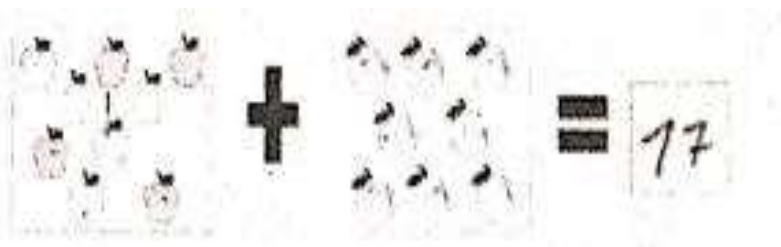


Escribe en el espacio que hay entre un número y otro las palabras: menor que, mayor que o igual a; según corresponda en cada caso, de acuerdo al siguiente ejemplo: **1 menor que 5, 9 mayor que 7, -4 igual a -4.**



A.2.4 Adición y sustracción con números enteros

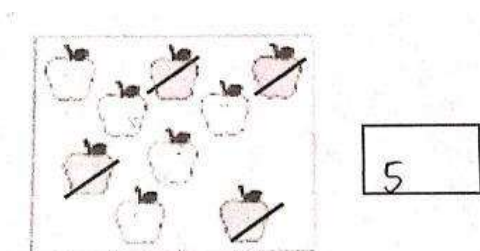
Observa los recuadros, en uno hay manzanas y en el otro naranjas. Cuenta las manzanas y las naranjas y escribe la cantidad de frutas que hay.



Tomado de:

https://www.google.com/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwjO2amav63mAhUKDKwKHSrzAOAQjRx6BAgBEAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.gettyimages.es%2FIlustraciones%2Fmanzana&psig=AOvVaw2fnL_0QtAK_2231uO2ReYY&ust=1576150039405317

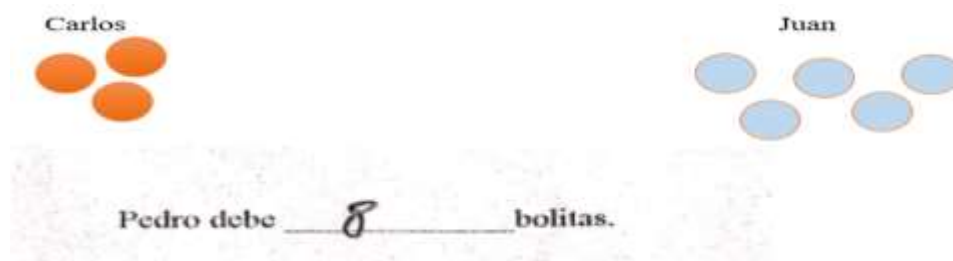
Pedro pierde todas las bolitas que tenía y le debe tres bolitas a Carlos y 5 bolitas a Juan.
Escribe el número de bolitas que Pedro está debiendo en total.



Tomada de:

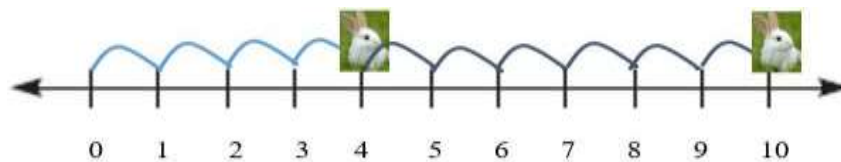
<https://www.google.com/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwiWg8D9v63mAhUETaWKHSuLA1kQjRx6BAgBEAQ&url=http%3A%2F%2Fequipoaldia.blogspot.com%2F2010%2F&psig=AOvVaw0KR2AnrwmwiOVv0gjJNPi5&ust=1576150353204263>

Pedro pierde todas las bolitas que tenía y le debe tres bolitas a Carlos y 5 bolitas a Juan. Escribe el número de bolitas que Pedro está debiendo en total

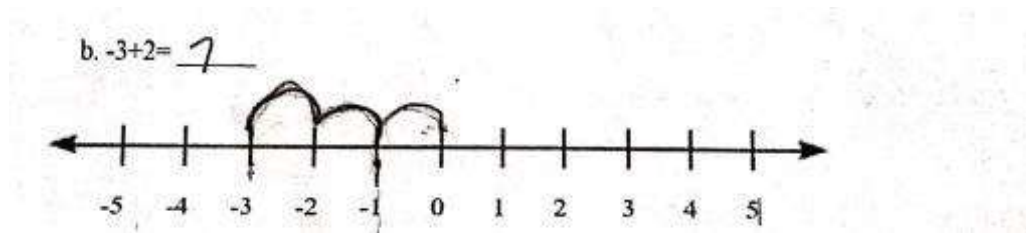


Lee detenidamente cada uno de los enunciados y realiza en la recta numérica las acciones que hacen los animalitos marcando el recorrido en la recta numérica. Ten en cuenta el ejemplo: El conejo Pepo salta desde cero, cuatro espacios hacia la derecha, descansa y luego salta otros seis espacios más. Escribe el número de espacios que saltó el

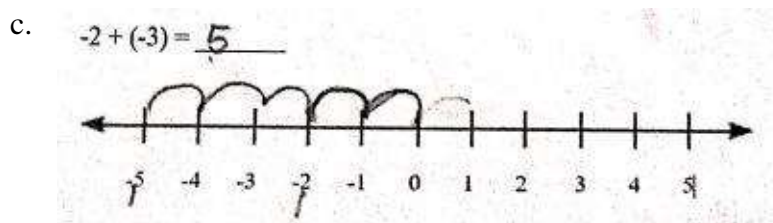
a. $4+6 = 10$



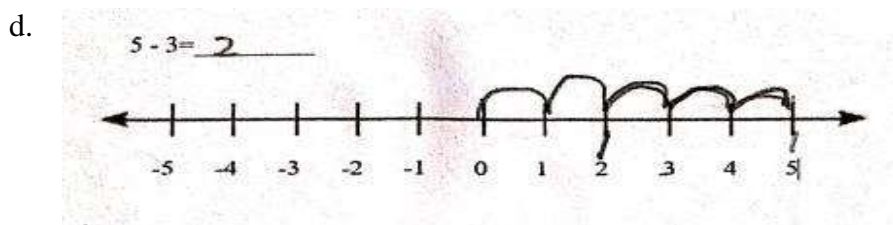
Una mariposa está parada en el número cero de la recta numérica, vuela tres espacios hacia la izquierda y más tarde vuela dos espacios hacia la derecha. Escribe el número en el cual terminó la mariposa su recorrido. Márcalo en la recta numérica.



Una abeja estaba parada en el número cero de la recta numérica, de ahí voló dos espacios hacia la izquierda y luego tres espacios más en esa misma dirección. Escribe el número donde la abeja terminó su recorrido. Márcalo en la recta numérica.



Una ranita está en el número cero de la recta numérica, salta cinco espacios a la derecha y de ahí se devuelve tres espacios. Escribe el número donde terminó el recorrido la ranita. Márcalo en la recta numérica.



A.3 Actividad uno de modelación matemática: Reconozco la ubicación de los números enteros en la recta graduada entera

A.3.1 Momento uno: ¿Cómo ubico los números en la recta graduada entera?

Objetivo: dar a conocer el problema a los estudiantes para que identifiquen algunos aspectos necesarios para su solución.

En una cartelera se presenta la siguiente situación, la cual se pide a los estudiantes analizar junto con la docente a través de la observación de video.

El rey \mathbb{Z} manda quiere saber ¿Cuáles son los números enteros y cómo se representan?
Pide a los estudiantes de grado cuarto que le ayuden a investigar. ¿Cómo le podrías ayudar?

<https://www.youtube.com/watch?v=eiFVq1p3LJ8>

https://www.youtube.com/watch?v=n8_ZOhl5JRY&t=20s

<https://www.youtube.com/watch?v=uCLSk-kXsgU>

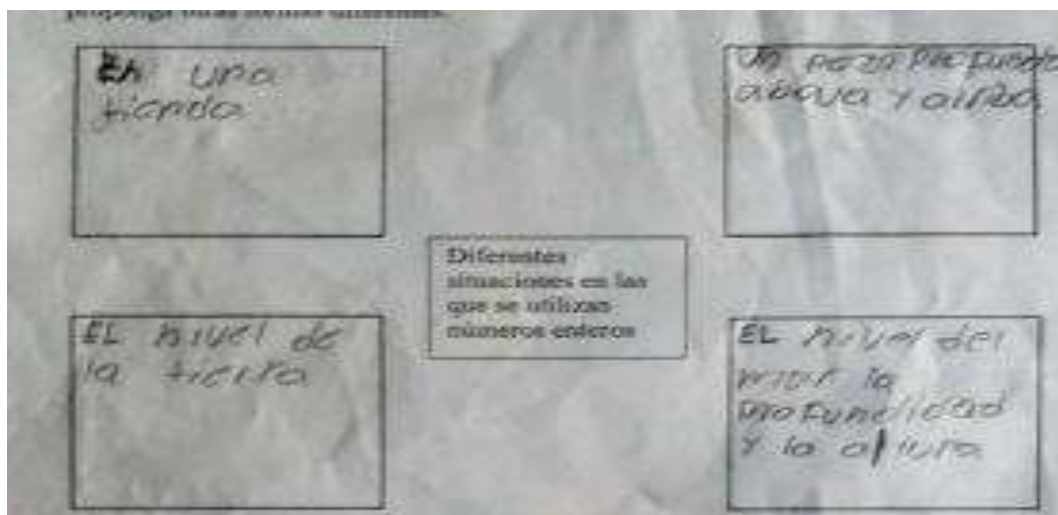
Teniendo en cuenta lo observado en los videos, te invito a leer detenidamente y realizar las indicaciones que encontraras en cada uno de los siguientes puntos.

Según lo observado en el video (Números enteros - 1.- ¿Qué son los números enteros? - 1°ESO), el rey \mathbb{Z} manda, pide que completar los enunciados, según tu forma de pensar.

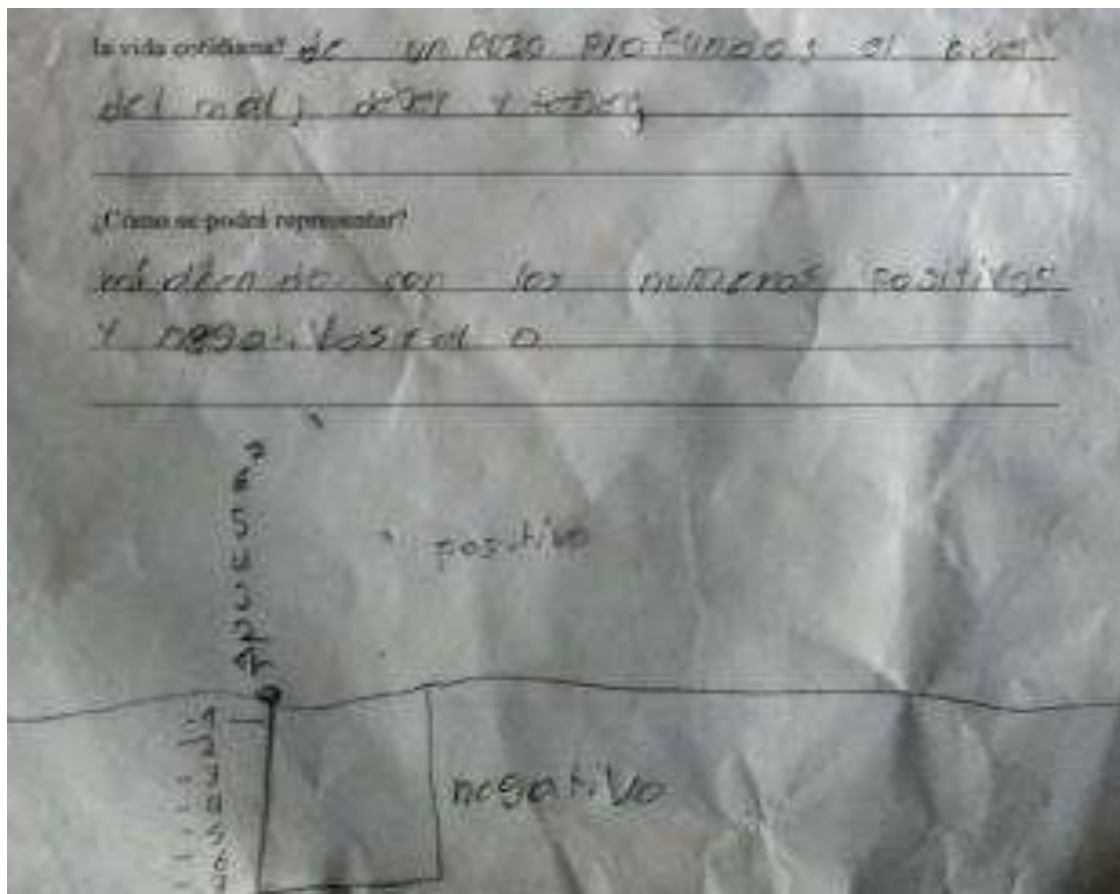
- a. Los números positivos se pueden diferenciar de los números negativos con el signo + o sin +.
- b. Los números enteros negativos se pueden diferenciar de los enteros positivos porque se escriben con un signo - antes del número.
- c. Según el video observado, el cero se utiliza como Punto de partida
- d. De acuerdo a tu apreciación los números enteros se pueden utilizar para representar situaciones de la vida cotidiana, tales como: debo, tengo, dinero y punto de referencia.
- e. De lo expuesto en el video se puede concluir que los números enteros están conformados por positivo, negativo y el cero.

A.3.2 Momento dos: utilidad de los números enteros

Escribe en los espacios en blanco otras formas en que podrías utilizar los números enteros para representar diversas situaciones. Tenga en cuenta la información del video y proponga otras formas diferentes.



2. Después de socializar las posibles situaciones y representaciones, responde la siguiente pregunta ¿Cuál o cuáles de las situaciones expuestas crees que se da con más frecuencia en la vida cotidiana?

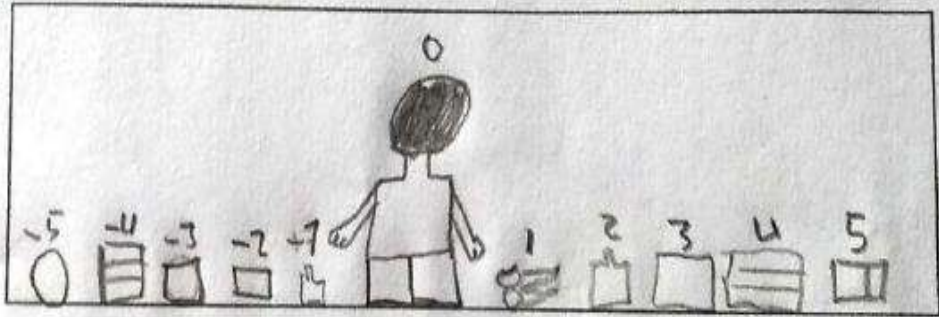


A.3.3 Momento tres: A investigar

Objetivo: identificar los significados construidos por los estudiantes acerca de números enteros e identificar algunos indicios de su construcción.

Parte A

Después de realizado la parte A del juego el rey \mathbb{Z} manda. Representa en tu cuaderno de matemáticas, en forma gráfica (dibujos) las acciones que realizaste en el desarrollo del juego.

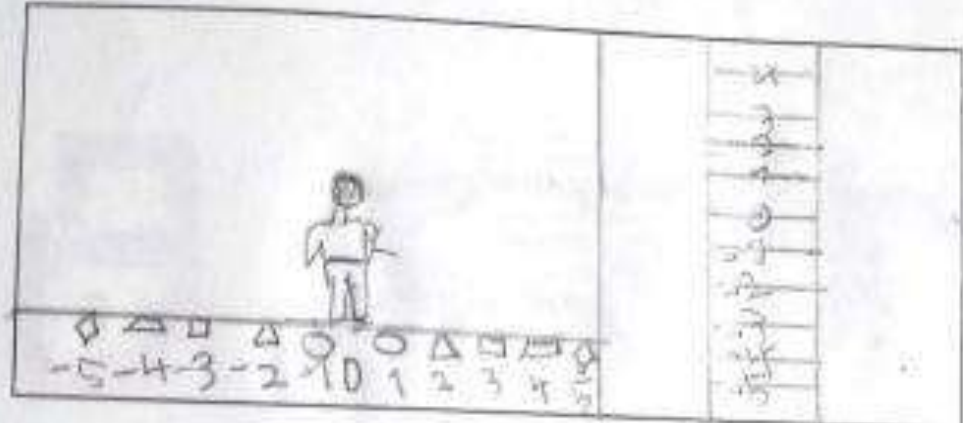


2. Escribe la descripción del proceso realizado durante la parte A del juego el “rey Z-manda”.

La profe me dijo que mirara al lado derecho y al lado izquierdo y que levantara los brazos y etiquetara los objetos con la número negativos, positivos

Parte B

Tenga en cuenta las acciones desarrolladas en el juego el Rey Z-manda parte B, para representar en el siguiente recuadro, en forma gráfica (dibujos) las acciones que viviste durante el juego. .



Describe en forma escrita, el proceso realizado durante la parte B del juego el Rey \mathbb{Z} manda

dije las Figuras y etiquetas con los números negativos y los positivos. Se colocó la es calera en forma vertical y se dijo el Punto de Referencia y coloque el número 4 en el \square y el número -3 en el Δ

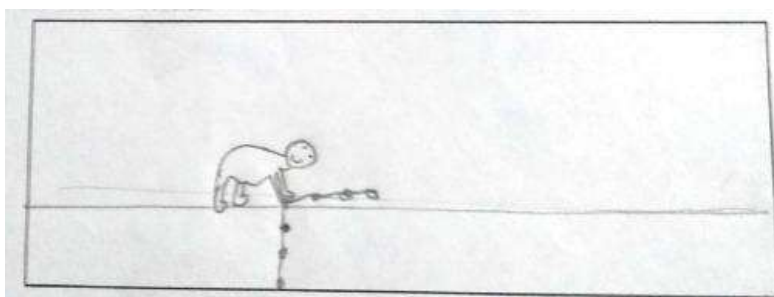
Parte C

El Rey \mathbb{Z} manda, quiere que completes el siguiente enunciado.

La función del cero, según la descripción del juego parte C, consiste en:

El cero cumple la función del punto de referencia
 explica por qué se puede medir hacia arriba, abajo hacia el lado derecho y hacia el lado izquierdo a partir del cero.

Después de realizada la parte C del juego el Rey \mathbb{Z} manda. Representa las acciones que realizaste con la mini cuerda.



Describe en forma escrita las acciones realizadas durante el desarrollo del juego.

Puse el punto de referencia de la cuerda en el borde de la cancha y me dio -3 y lo baltie hacia arriba y me dio 3

Parte D

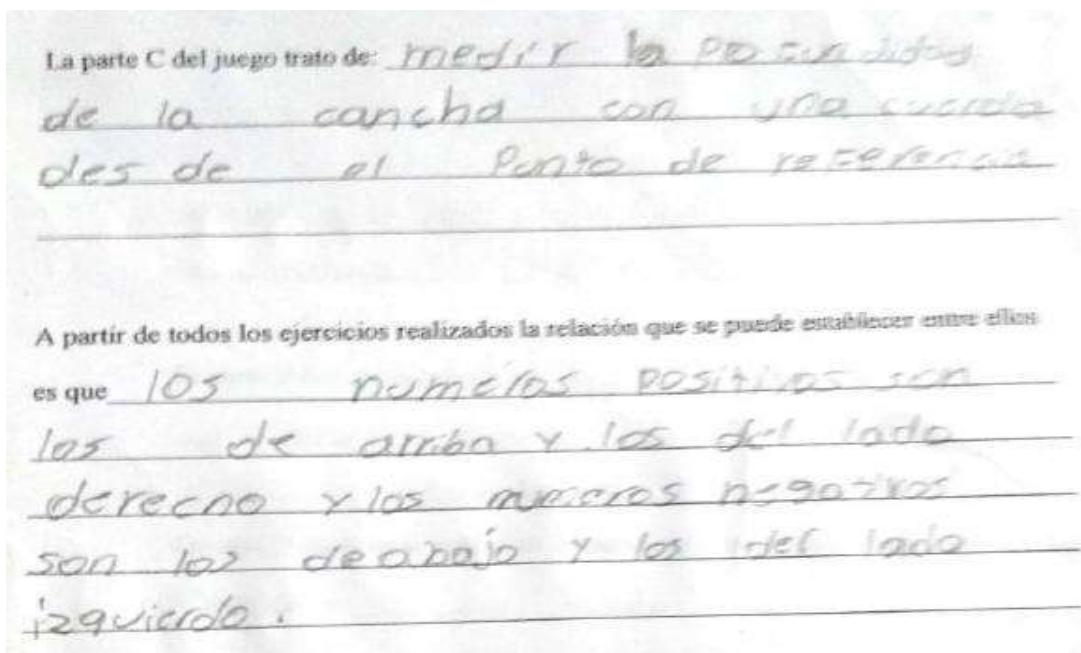
El Rey \mathbb{Z} manda, quiere que recuerdes y describas brevemente, lo vivido en los diferentes momentos del juego, completando los enunciados que encuentras en el siguiente formato.

1. "el rey \mathbb{Z} -manda" quiere que describas lo que hiciste en la primera parte del juego levanté la mano derecha y la mano izquierda y estiré los objetos lo que más me llamo la atención de ese momento del juego fue estirar los objetos,

¿Por qué? es lo más importante, porque pude contar los Positivos y los negativos

La parte B del juego se trató de: estirar las Figuras Planas, para la escalera con las Figuras Planas

Cuando la escalera se colocó en forma vertical los números cambiaron de ubicación, de tal manera que los del lado derecho quedaron arriba y los del lado izquierdo quedaron abajo.



A.3.4 Momento cuatro: Represento situaciones

Objetivo: solucionar el problema inicial a través de representaciones gráficas, para la identificación de significados construidos.

Vuelve a leer la situación que el Rey \mathbb{Z} -manda planteó en el momento uno (¿Cuáles son los números enteros y cómo se representan?) y responde mediante representaciones graficas lo que para ti son los números enteros.



A través de prácticas discursivas, deja en manifiesto los significados construidos, puesto que mediante las explicaciones realizadas a sus representaciones ostensivas da cuenta de dichos significados como se puede ver en sus argumentos: *en el dibujo donde está el número cero quiere decir que el niño no tiene plata, por eso esta triste, el dibujo donde está el signo menos*

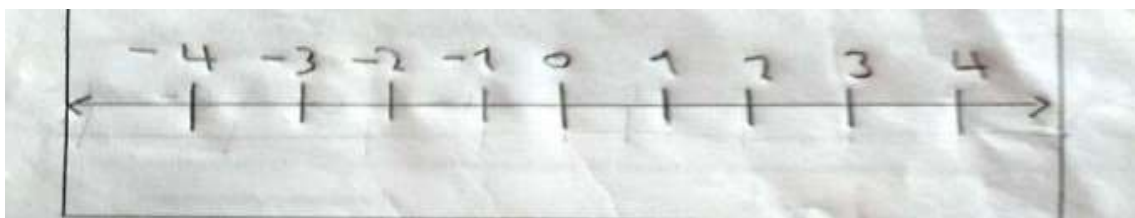
significa los números enteros negativos, el niño está triste porque está debiendo y en el dibujo que coloque el signo más quiere decir que tiene plata para comprar, por eso está feliz.

A.3.5 Momento cinco. Verificación y socialización de resultados

Este momento se desarrolló con la finalidad de verificar y socializar los resultados o solución del problema que los estudiantes manifestaron.

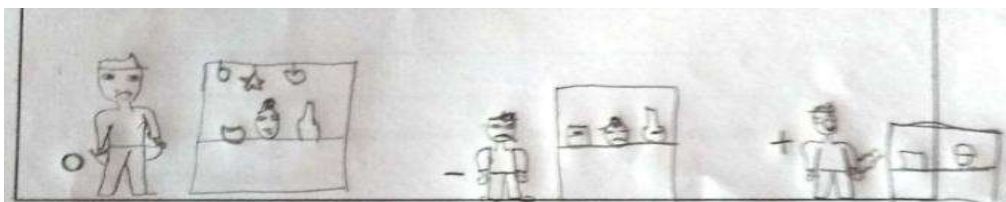
Este momento consistió en que los estudiantes a manera de plenaria socializaran los resultados del problema que ellos habían hecho en el momento cuatro.

Cada estudiante en su turno mostró su trabajo a los compañeros del grupo y explicó sus representaciones. De manera que Cesar mostró una recta numérica y explicó diciendo que los números enteros están conformados por una reunión de números tales como el cero, los números enteros negativos y los números enteros positivos.



Solución al problema de forma ostensiva por César.

Alberto también, compartió sus representaciones a través de los siguientes dibujos

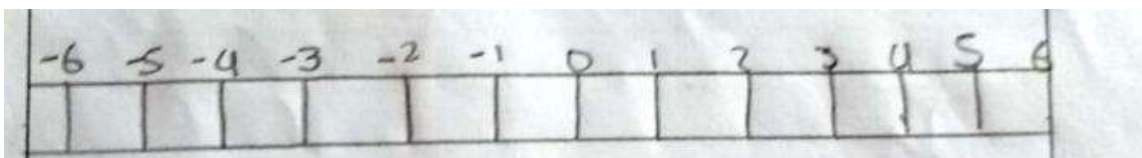


Solución al problema de forma ostensiva por Alberto.

A las inquietudes expuesta por sus compañeros, respecto a su representación, él explicó, diciendo que *el primer dibujo significa el cero porque no tenía nada de dinero en los bolsillos,*

por eso estaba triste, el segundo dibujo significa los números enteros negativos, porque estaba debiendo, también está triste y el tercer dibujo significa que tenía algo de plata para comprar y que por eso estaba feliz.

Por su parte, Pablo represento los números enteros en una escalera en forma horizontal, como se ve en la imagen.



Solución al problema de forma ostensiva por Pablo.

En la socialización con sus compañeros de grupo Pablo, argumenta que *los números enteros van al lado izquierdo porque son menores que cero y los números enteros positivos van al lado derecho porque son mayores que cero.*

A partir de todas las anteriores prácticas operativas y discursivas suscitadas mediante la socialización de los modelos elaborados por los estudiantes, se puede reconocer que estos han construido significados de números enteros en relación con situaciones de su cotidianidad y que dichas prácticas en forma colectiva permitieron el acoplamiento entre los significados personales y los significados institucionales.

Terminada la plenaria o socialización con el grupo de estudiantes involucrados en el proceso investigativo. Se pide a los estudiantes que teniendo en cuenta las diferentes opiniones manifestadas en la plenaria, realicen una cartelera en cartulina, donde den respuesta a la pregunta *¿Cuáles son los números enteros y como se representan?* Además, esta actividad se debe de socializar con los demás estudiantes de los grados tercer, cuarto y quinto.



Estudiantes haciendo carteleras.

Los estudiantes hicieron las siguientes carteleras, en las cuales mostraron la solución al problema presentado, (¿Cuáles son los números enteros y cómo podemos representarlos?).

En el proceso de elaboración de la cartelera, los estudiantes siguieron discutiendo, acerca de los significados construidos en las actividades anteriores. Aspecto que permite que los estudiantes se apropien de dichos significados. En las carteleras los estudiantes, representaron la solución a la pregunta que generó la actividad matemática, como se puede observar en una de las carteleras elaborada por un estudiante.



Cartelera realizada por César.

Después que terminaron la elaboración de las carteleras, las expusieron ante sus compañeros de grado tercero, cuarto y quinto, explicando la conformación de los números enteros, la ubicación en la recta y la asociación de números enteros con situaciones de la vida diaria como pozo profundo, deber, tener, nivel de la tierra, entre otras.

La socialización de los resultados de la situación, la elaboración y exposición de carteleras, permitió que los estudiantes pudieran acoplar los significados personales de números enteros con los significados institucionales de este conjunto numérico, puesto que según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2019), los significados institucionales se logran a partir de los sistemas de prácticas socialmente compartidos, es decir, las practicas realizadas en forma colectiva.

Con la presentación de carteleras ante sus compañeros, terminó la actividad uno de modelación matemática, con la cual se pretendía que los estuantes construyeran significados de números enteros, tales como la identificación de los números enteros negativos, de números enteros positivos y la ubicación de estos en la recta numérica a partir de situaciones como lateralidad, direccionalidad, deber, tener, entre otras.

A.4 Actividad dos de modelación matemática: Relación de orden y operaciones de sumas y restas con números enteros.

En esta actividad se atienden algunos aspectos estructurales del el juego “el Rey \mathbb{Z} -manda”. Con lo cual, se pretende que los estudiantes construyan significados de relación de orden (mayor que, menor que, igual a) y de operaciones aditivas (suma y resta) con números enteros.

A continuación se plantea el diseño de los diferentes momentos de la actividad número dos de modelación matemática.

A.4.1 Momento uno: ¿Qué más puedo saber de números enteros?

Objetivo: dar a conocer el problema a los estudiantes a través de la formulación de preguntas que conlleven a la introducción de la actividad de modelación matemática.

A partir de la curiosidad de los estudiantes por saber si con los números enteros se pueden hacer relaciones y operaciones como con los números naturales se planteó la formulación del problema de la siguiente manera: ¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?

1. El Rey Z-manda, quiere ordenar a los estudiantes de cuarto grado en una recta numérica que está dibujada en el piso, pero aún no sabe cómo hacerlo. ¿Le ayudarías al Rey Z-manda a organizarlos? Si ¿Cómo lo harías? Los ubicaría de menor a mayor. Los menores al lado izquierdo y los mayores al lado derecho.

¿Qué forma propones para ordenarlos? Explica Lo colocaría en una recta numérica del más pequeño hasta llegar al más grande de izquierda a derecha.

2. El Rey Z-manda, está debiendo un dinero a sus empleados, él dice que ese dinero equivale a los pasos que des del lado izquierdo del número cero, en la recta numérica y la cantidad de dinero que tiene equivalen a los pasos que des a la derecha del cero en la recta numérica. ¿Le ayudarías al Rey Z-manda a saber la cantidad de dinero que debe y la cantidad de dinero que tiene para pagar? Si ¿Cómo lo harías? haría una recta numérica y daría de 10 en 10 a la izquierda y daría 8 pasos y de la derecha otros 8 pasos, que equibale a 16 lo que le queda a pagar y 80 lo que tiene que pagar.

¿Qué propones para ayudarlo? Explica 0
daría 8 pasos porque la recta la hace de 10 en 10.

A.4.2 Momento dos: ordeno los números enteros y hago sumas y restas

Objetivo: propiciar la construcción de significado de orden en números enteros y de las operaciones aditivas (suma, resta) en los estudiantes de cuarto grado.

Para el desarrollo de esta actividad se tuvo en cuenta el juego el Rey \mathbb{Z} -manda, efectuado en varios momentos.

En este momento del juego el Rey \mathbb{Z} - manda, (profesora) se configura de la siguiente manera:

El Rey \mathbb{Z} manda, entrega una copia a los estudiantes cuyo contenido es relación de orden y suma y resta con números enteros. El Rey solicita a los estudiantes que lean y socialicen el contenido de las copias.

Luego, el Rey \mathbb{Z} manda, pide a uno de los estudiantes participantes en la investigación, que organice once montones de fichas de diferentes tamaños y colores, en una recta numérica que esta dibujada en una cartulina, iniciando con la ubicación del montón más pequeño en el número menos cinco y a continuación, a la derecha los restantes montones hasta ubicarlos todos.

El Rey \mathbb{Z} manda, le pregunta al estudiante ¿A qué lado del número cero se encuentran los montones más pequeños? ¿A qué lado del número cero se encuentran los montones más grandes? ¿En cuál número está ubicado el montón más pequeño? ¿En cuál número está ubicado el montón más grande? ¿El montón que está ubicado en el número cero es más grande o más pequeño que el ubicado número menos uno? ¿El montón que está ubicado en el número cero es más grande o más pequeño que el ubicado en número uno? ¿El montón que está ubicado en el número menos tres es más grande o más pequeño que el ubicado en el número menos cuatro? ¿Dónde colocarías este montón de fichas? (se entrega un montón de fichas con igual cantidad a uno de los montones ubicados en la recta) ¿Por qué lo colocarías en ese lugar?



Registro escrito, parte B

Registro escrito, parte B

1. A partir de lo vivido en el juego. Completa los siguientes enunciados:

a. El estudiante que estaba parado en el cero era: JUAN

b. Los estudiantes que estaban al lado izquierdo del número cero eran: ROSA, PEI, Y, ALICE

c. ¿Los que están ubicados a la izquierda del cero son de menor estatura o de mayor estatura que el niño que representaba el cero?
son menores

d. Los estudiantes que estaban al lado derecho del cero eran:
VEDIS, MIGUEL, EDUARDO, JULIAN, CESAR

e. ¿Los niños que están ubicados a la derecha de cero son de menor estatura o de mayor estatura que el niño que representaba el número cero?
son de mayor estatura

f. Según el juego que acabas de realizar, la relación que hay entre la estatura de los estudiantes y el orden de los números enteros es que los estudiantes mas pequeños están al lado izquierdo quiere decir que los números que están este lado son menores que los que están al lado de cero

g. ¿Que se podría concluir de las situaciones vividas en el juego? que los números enteros entre mas a la izquierda están, son mas pequeños o menores que los que están a la derecha

El Rey \mathbb{Z} manda, parte C

Registros escritos, parte C

1. En el siguiente recuadro, representa según tu apreciación una o varias situaciones vividas en el juego el Rey \mathbb{Z} - manda parte C.

2. Describe lo ocurrido durante el juego el Rey \mathbb{Z} - manda parte C.

El rey \mathbb{Z} primero me mando a que diera menos dos pasos y luego menos tres pasos y quede en -5 despues me dijo que volviera a cero y que caminara más cuatro y llegue al 4 y luego de ahí me dijo que caminara menos nueve pasos y llegue a -5 .

A.4.3 Momento tres: ¡a investigar!

En este momento los estudiantes investigaran en forma individual, acerca de tres aspectos relacionados con números enteros. 1. Orden en los números enteros, 2. Operaciones aditivas y 3. Diferentes situaciones de la vida diaria en las que se puedan utilizar los números enteros.

Registros escritos, momento tres

1. Con la ayuda de un familiar, consulta en internet, en libros de matemática de grado sexto o con personas que sepan del tema, acerca de:

Orden y comparación en los números enteros

Cuando comparamos números enteros en la recta numérica, el mayor es el que está al lado derecho de otro y menor el que está a la izquierda.

Los números positivos son mayores que el cero y que el cero es mayor que los números negativos. Se simbolizan con las signos $<$ [menor que], $>$ [mayor que] y $=$ [igual a].


Operaciones aditivas (suma y resta)

La suma con números enteros positivos se hace como una suma normal. La resta si se hace con un número negativo se suma y al resultado se le coloca el signo $-$ si se suman un número entero positivo con un negativo, si el positivo es el mayor se coloca el resultado positivo y si el número negativo es mayor se coloca el resultado negativo. En la resta se hace como una suma, pero el signo $-$ le cambia de signo a número que sigue. Ej: $3 - 2 = 1$ $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$

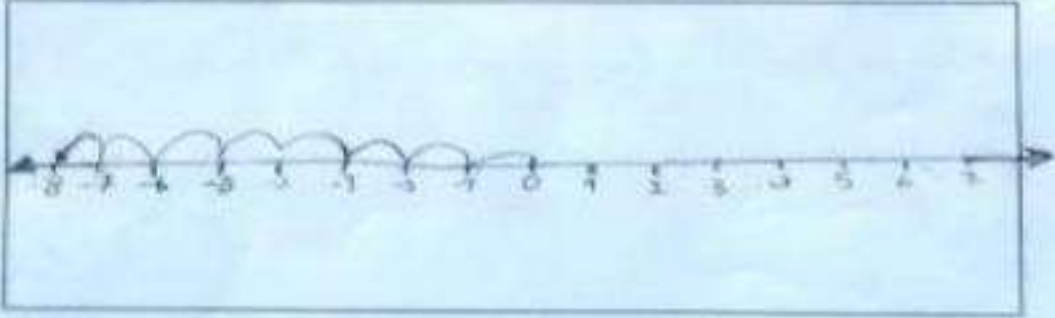
Situaciones de la vida diaria relacionadas con números enteros.

- Aumento y disminución de la temperatura
- Ganancia y pérdida de dinero
- Avistamientos sobre el mar y bajo el mar
- Tener frío, no tener plata y citas de vencido
- La profundidad y altura
- Desplazamientos a la derecha y izquierda.

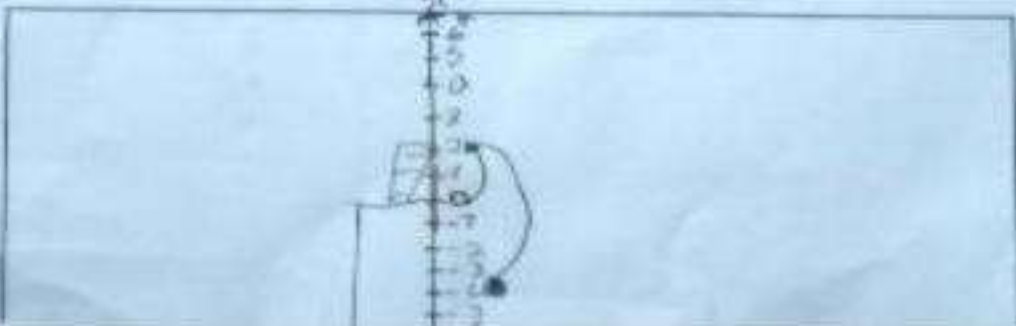
a. Pablo está parado en el punto de referencia de una recta numérica, se desplaza cuatro pasos a la derecha y luego retrocedió cinco pasos ¿en cuál número se encuentra ahora Pablo? *quedo en el -1*



b. César se comprometió a llevarle al colegio, naranjas a sus dos mejores amigos, pero se le olvidaron las naranjas en la casa, ahora le debe tres naranjas a Pablo y cinco naranjas a Alberto ¿Cuántas naranjas debe César? *debe 8 naranjas*



c. Alberto necesita recoger un anillo que cayó en el pozo profundo con agua, para poder llegar al fondo del pozo se subió en una rampa de dos metros de altura, luego se tiró al pozo y bajó seis metros desde la rampa hasta el fondo del pozo ¿Cuál es la profundidad del pozo? *tiene 4 metros de profundidad*



A.4.4 Momento cuatro: Represento situaciones

De acuerdo con lo que investigaste acerca de orden en los números enteros y lo vivido en el juego el “Rey \mathbb{Z} -manda” responde mediante representaciones gráficas, las preguntas con la que

se inició esta actividad. ¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?

Registros escritos, momento cuatro

1. En el siguiente recuadro, realiza representaciones que permitan responder a las preguntas:

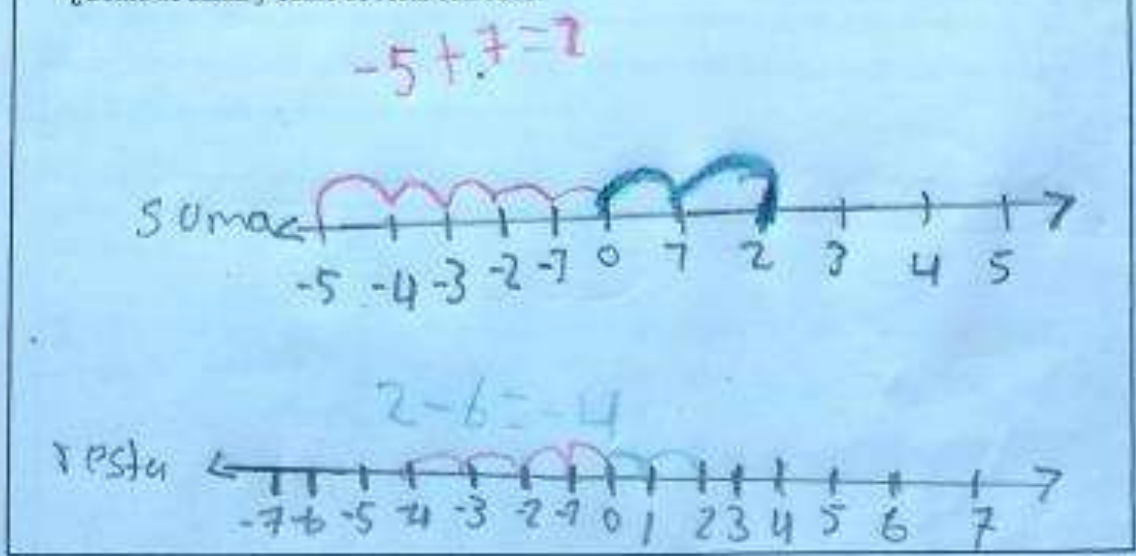
¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?

¿Cuál es el orden en los números enteros? Los enteros negativos van al lado izquierdo en la recta y los positivos al lado derecho.
El cero es menor que los enteros positivos y mayor que los enteros negativos.

$0 > -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, \dots$

$0 < 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$

¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?



2. Explica según tu apreciación cómo es el orden en los números enteros.

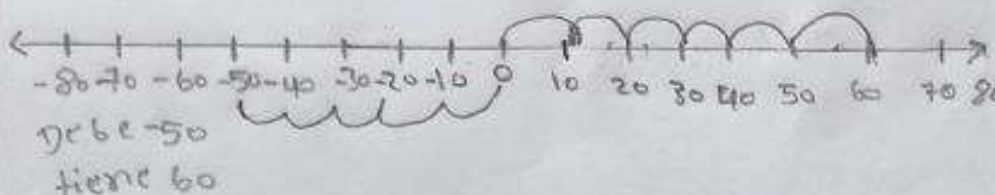
El orden en los enteros es el siguiente se colocan los enteros negativos al lado izquierdo del cero porque son menores que el y al lado derecho se colocan los enteros positivos porque son mayores.

3. Ayuda al Rey Z-manda a encontrar la cantidad de dinero que tiene y la cantidad que debe, para eso lee la situación descrita en el momento uno y realiza las representaciones que estimes correspondientes para hallar el resultado.

Situación

El rey Z-manda, está debiendo un dinero a sus empleados, él dice que ese dinero equivale a los pasos que tu des, al lado izquierdo del número cero en la recta numérica y la cantidad de dinero que tiene equivalen a los pasos que tu des, a la derecha del cero en la recta numérica. ¿Cuál es la cantidad de dinero que debe y la cantidad de dinero que tiene el rey Z-manda para pagar a sus empleados?

Solución



A.4.5 Momento cinco: Comparemos resultados

Los estudiantes comparan los resultados y representaciones que realizaron de las preguntas ¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos? En forma de plenaria, los estudiantes darán a conocer los resultados del problema matemáticamente. Dichos resultados serán expuestos y se discutirán entre los estudiantes y la docente investigadora, con la finalidad de verificar los resultados.

Además, socializaron los resultados con los demás estudiantes de los grados tercero, cuarto y quinto.



A.5 Actividad tres de modelación matemática: Observo mi entorno y aplico los números enteros

La actividad tres de modelación matemática se realizó tomando como base la actividad uno y la actividad dos, puesto que los estudiantes pusieron en práctica los aprendizajes apropiados durante el desarrollo de estas actividades.

En este sentido, esta actividad surgió a partir de diálogos con los estudiantes acerca de la utilidad o uso de los números enteros en la vida cotidiana. Esto llevó a la formulación de problemas de la realidad de los estudiantes. Fueron varias las situaciones que se generaron a partir de discusiones con relación a los números enteros, pero después de discusiones entre los estudiantes decidieron formular el problema de la siguiente manera.

A.5.1 Momento uno: formulación del problema

Los Estudiantes y la Profesora de los grados 3, 4, y 5, harán un paseo, como despedida de fin de año. Necesitamos recoger dinero para los gastos. Se nos ocurrió pedirle la administración de la tienda escolar al director, por este mes. ¿Alcanzarán las ganancias de la tienda para ir al paseo?

A.5.2 Momento dos: aclaración de ideas respecto al problema

En el segundo momento de esta actividad de modelación matemática, los estudiantes elaboraron un plan que les permitió entender el problema que habían formulado inicialmente y que los conllevó a realizar la investigación para obtener datos que favorecieran la solución del problema. El plan que los estudiantes realizaron fue el siguiente.

Plan para la solución

① ¿Que necesito saber?

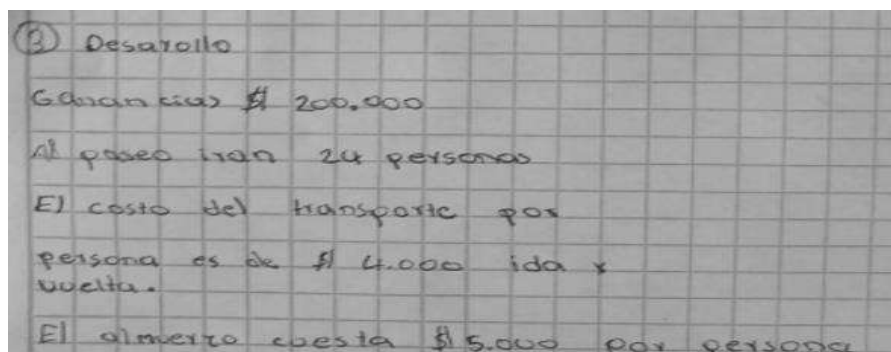
- Ganancias que dejó la tienda
- Lugar al que iremos
- Los gastos del transporte
- Los gastos de la comida

② ¿Que necesito hacer?

- sacar cuenta de los gastos
- comparar los gastos y ganancias

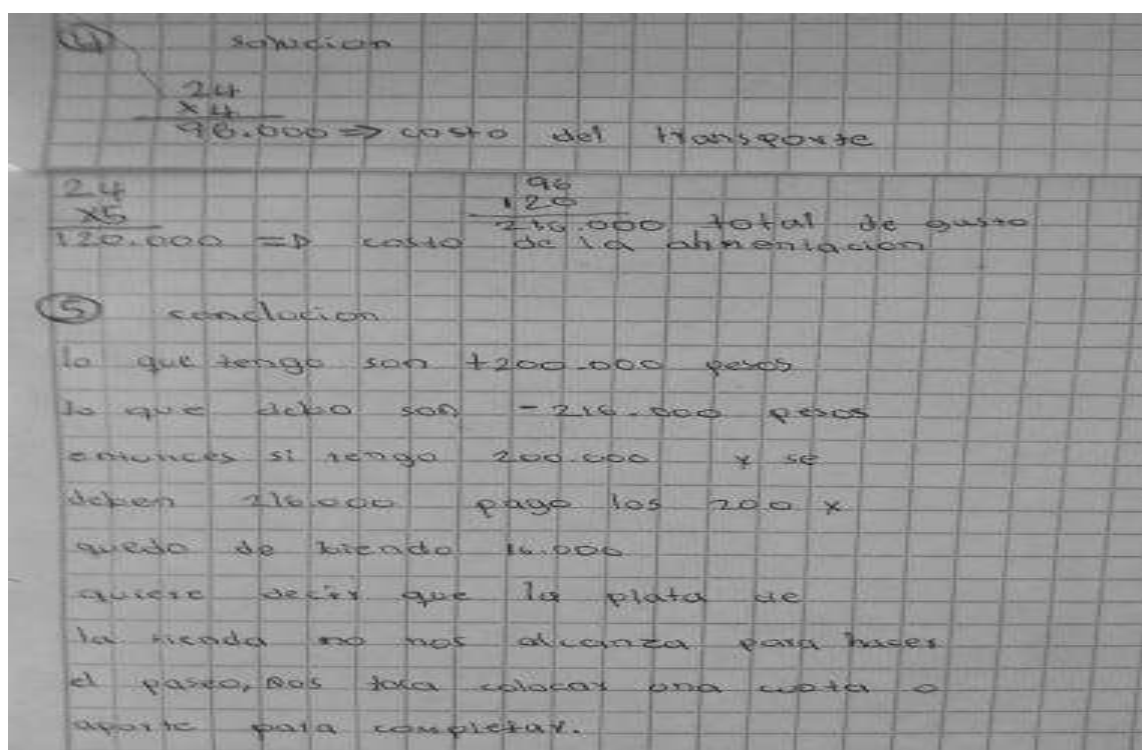
A.5.3. Momento tres: investigación

En el momento tres los estudiantes llevaron a cabo el plan, investigaron los datos que le permitieron llegar al resultado del problema, a continuación se muestran los datos que arrojó el proceso de indagación realizado por los estudiantes.



A.5.4 Momento cuatro: solución del problema

A continuación se evidencian algunos de los significados que los estudiantes exteriorizaron para resolver la situación inicial.



A.5.5 Momento cinco: socialización

En el momento cinco, los estudiantes socializaron los resultados con sus compañeros y docente. Explicaron el plan que realizaron, los modelos que realizaron y cómo llegaron a la conclusión que las ganancias de la tienda no alcanzaban para ir al paseo.

En este momento se observó la apropiación por parte de los estudiantes del significado de la resta con relación a situación de pagar deudas, puesto que ellos asociaron las ganancias de la tienda con la plata que tenían y los gastos del paseo con deuda o lo que tenían que pagar, de esa manera se dieron cuenta que la deuda era mayor que lo que tenían y si pagaban con todo el dinero que tenían, quedarían debiendo y no alcanza para ir al paseo.

A.6 Postest: Actividad de reconocimiento de significados construidos durante las actividades de modelación

El postest, se diseñó teniendo en cuenta aspectos relacionados con el conjunto de números enteros, tales como ubicación en la recta, relación de orden y operaciones aditivas (suma y resta) estudiados en las actividades uno, dos y tres de modelación matemática. Por tanto, se aplicó después de haber terminado las actividades de modelación con la finalidad de comparar los significados iniciales con los que finalmente alcanzaron a construir los estudiantes en el desarrollo de las tres actividades en mención. A continuación se muestran los resultados que manifestaron los estudiantes frente a esta actividad.

A.6.1 Ubicación de números enteros en la recta graduada entera

Ubicación de números enteros en la recta.

1. En el siguiente recuadro hay dígitos que pertenecen al conjunto de números enteros (\mathbb{Z}).

Ubícalos en la recta.

9, 5, -1, 6, -9, 8, -4, 2, -8, 1, -7, 3, -5, 7, -6, 4, -3, 0, -2



2. Observa la recta numérica le hacen falta algunos números: complétala.



3. Etiqueta escribiendo los números enteros correspondientes en las siguientes figuras. En cuenta la figura que es diferente a las demás.



A.6.2 Relación de orden en los números enteros (\mathbb{Z})

Relación de orden en los números enteros

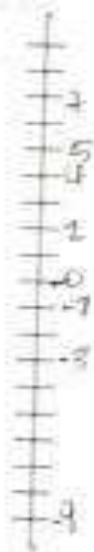
1. Escribe el signo menor que ($<$) o mayor que ($>$), según corresponda en cada una de las siguientes situaciones.

- a. 5 $>$ -5
 b. -6 $<$ 6
 c. -7 $<$ 5
 d. 4 $>$ -8
 e. -4 $<$ -3

2. Escribe el número entero que representa cada una de las siguientes situaciones y ordénalos de menor a mayor.

- a. Tengo cinco bolitas de cristal en mi bolsillo 5
 b. Le debo ocho naranjas a mi hermano -8
 c. Perdí dos colores en el camino a la casa -2
 d. Tengo nueve cuadernos 9
 e. No tengo plata 0

3. Ordena los siguientes números en la recta numérica: $-1, 4, -3, 5, 7, -9, 0, 2$. Ten en cuenta que faltan algunos números.



A.6.3 Operaciones aditivas con números enteros (suma y resta)

Operaciones aditivas con números enteros (sumas y restas)

1. Resuelve las siguientes situaciones.

- a. Pablo le pidió prestado \$200 a María, como no le alcanzaba para comprar el chocolate que quería le pidió prestado \$300 a César. ¿Cuánto es la deuda que tiene Pablo con sus amigos?

Escribe en la tabla tu razonamiento

| | |
|--|---------------------------------|
| $\begin{array}{r} -200 \\ -300 \\ \hline -500 \end{array}$ | <p>quedo debiendo 500 pesos</p> |
| | |

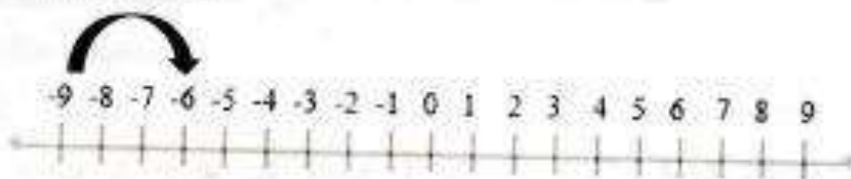
- b. El siguiente día Pablo llevó \$400 para pagarle a sus amigos.
 - ¿le alcanzará para pagar todo lo que debe? ¿le sobrará dinero? ¿Cuánto le sobrará? ¿Le hará falta dinero para poder pagar todo? ¿Cuál será la cantidad que quedara debiendo?

Escribe aquí tu razonamiento

| | |
|--|-----------------------------------|
| $\begin{array}{r} -500 \\ -400 \\ \hline -100 \end{array}$ | <p>R=quedo debiendo 100 pesos</p> |
| | |
| | <p>=100 pesos</p> |

2. Para cada una de las siguientes representaciones, inventa una situación relacionada con la vida cotidiana.

a.



Escribe aquí tu situación

-9 ± 3 es igual a -6 Hoy presté 9
naranjas. mañana le traere 3 para
pagar e cuantas naranjas quedare debiendo?

b.



$11 - 10 = -6$ mi mamá tiene 11
huevos para el desayuno. pero en mi casa
somos 7 personas e cuantos huevos faltan
para el desayuno

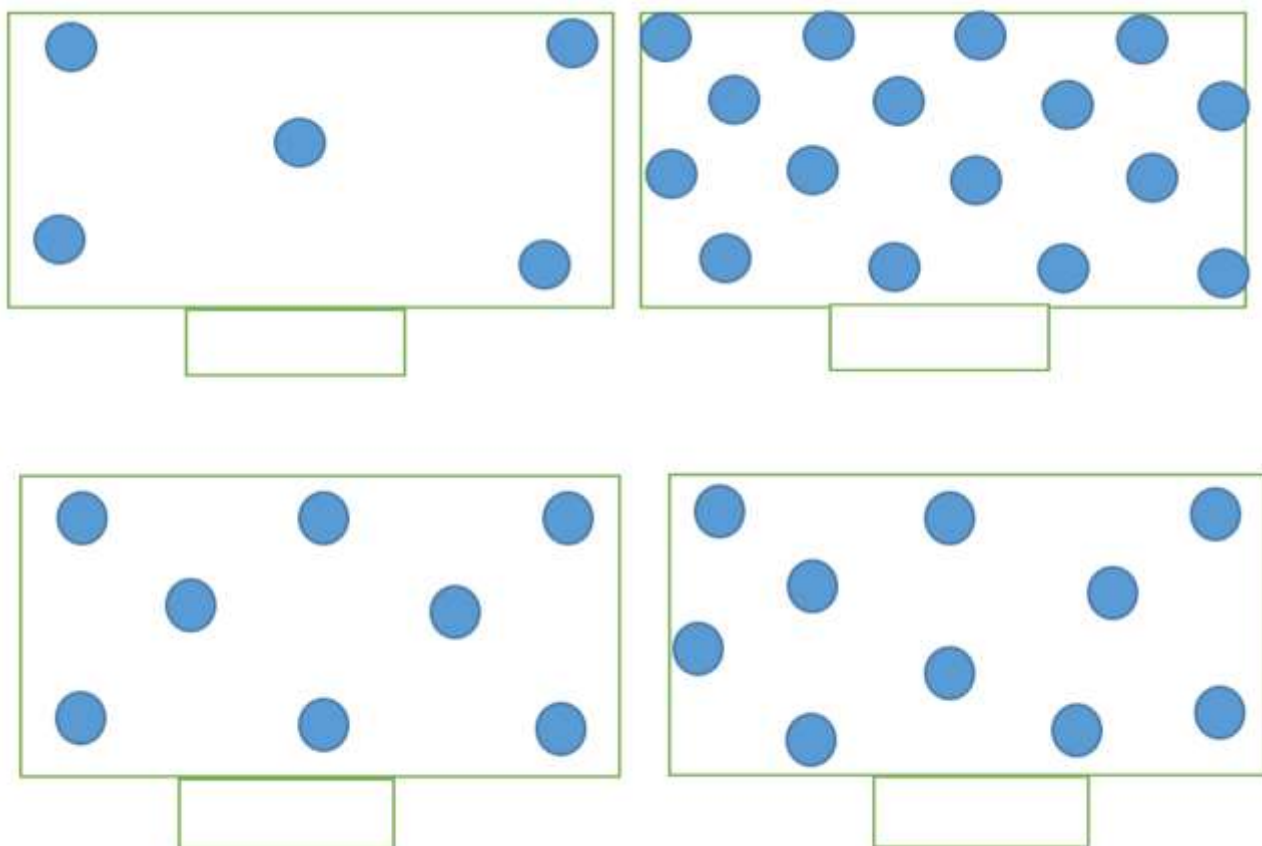
Apéndice B. Instrumentos de recolección de información

B.1 El Pretest

B.1.1 Dominio numérico

Observa cada uno de los siguientes recuadros y cuenta las bolitas que cada uno contiene.

Escribe dicho número debajo.

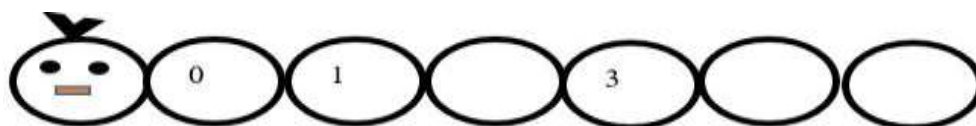


Observa la siguiente imagen, escribe el número que corresponda en los círculos que no tienen un número marcado.

a.



b.



En cada uno de los siguientes casos escribe los números que siguen a la derecha y a la izquierda, en los espacios correspondientes.

a. 0, 1, 2, _____, _____, _____, _____, _____

b. 7, 6, 5, _____, _____, _____, _____, _____

c. 0, 2, 4, 6, _____, _____, _____

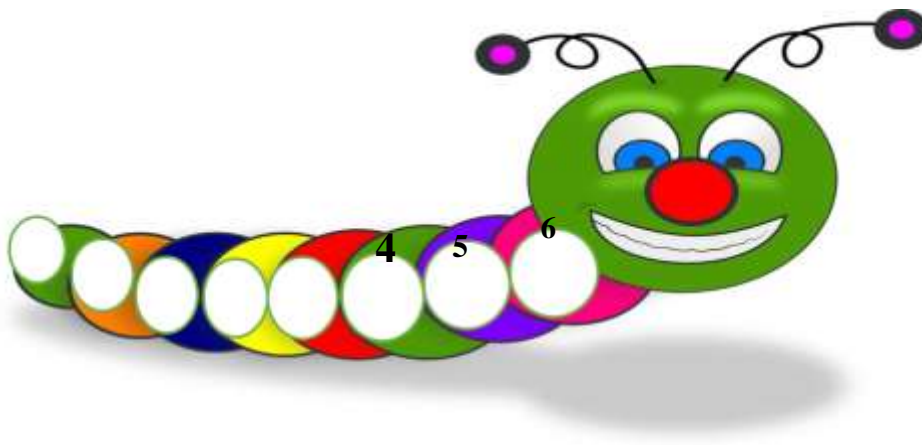
d. 8, 6, 4, _____, _____

e. 12, 9, 6, _____, _____

f. _____, _____, _____, 0, 1, 2, _____, _____

g. _____-3_____, -1, _____, _____, 2, _____, 4 _____

Observa el siguiente gusano, en tres de sus anillos tiene marcados números, escribe los números faltantes hasta llegar a la cola.



Tomado de. <https://pixabay.com/es/vectors/gusano-libro-sonrisa-310642/>

Lee las siguientes situaciones y representa cada una como creas conveniente.
(Dibujos, graficas, diagramas, entre otras).

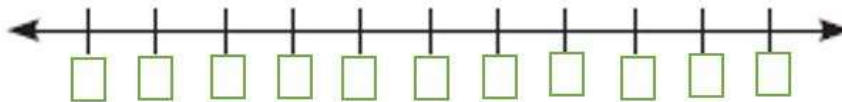
Le debo 4 bolitas a mi amigo Tomás.

En el camino de mi casa al colegio se me perdieron 2 colores.

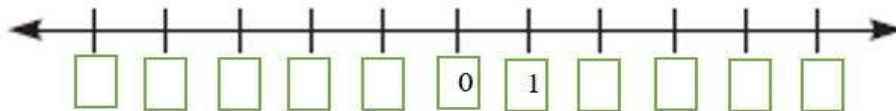
c. En mi bolsillo tengo 50 pesos.

B.1.2 Recta graduada entera

En la siguiente figura, en cada uno de los cuadros, escribe los números 10, 1, 6, 5, 9, 4, 8, 0, 2, 7, 3 de forma que se lean de menor a mayor.



En la siguiente recta numérica hay dos recuadros marcados con los números 0 y 1. En los espacios restantes, escribe los números que faltan de tal.



Los siguientes recuadros están marcados con números, escríbelos en la recta numérica de abajo hacia arriba en forma ascendente (es decir, de menor a mayor). Observa y tenga en cuenta que faltan algunos números.



B.1.3 Orden en los números enteros

En cada una de las siguientes fotos se muestran diferentes tipos de frutas: mangos, manzanas, bananos y fresas. Completa las siguientes oraciones:



Tomado de:

<https://www.elheraldo.co/entretenimiento/consumir-frutas-enteras-mas-saludable-que-en-jugos-278569>

La cantidad de mangos es _____

La cantidad de manzanas es _____

La cantidad de bananos es _____

La cantidad de fresas es _____

La fruta de la que hay más cantidad es _____

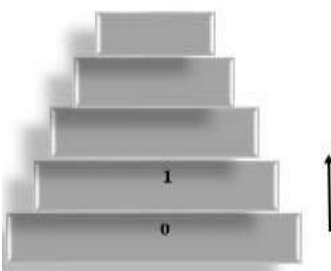
La fruta de la que hay menor cantidad es _____

La cantidad de mangos es menor que la cantidad de _____

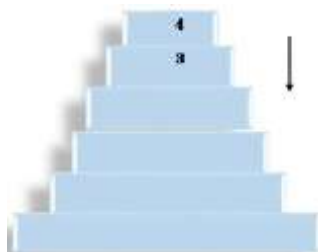
La cantidad de bananos es menor que la cantidad de _____

Observa las siguientes figuras. Escribe los números faltantes en cada uno de los escalones.

a.



b.



Escribe en el espacio que hay entre un número y otro las palabras: **menor que**, **mayor que** o **igual a**; según corresponda en cada caso, de acuerdo al siguiente ejemplo: **1 menor que 5, 9 mayor que 7, -4 igual a -4.**

a. 8 _____ 10

b. 7 _____ 5

c. -2 _____ -2

d. 0 _____ -4

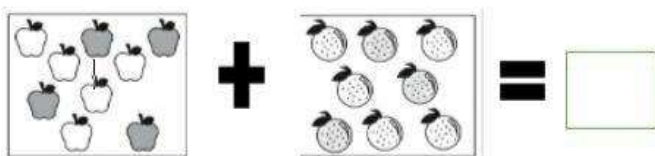
e. 15 _____ 15

f. 3 _____ -7

g. -3 _____ 3

B.1.4 Adición y sustracción con números enteros

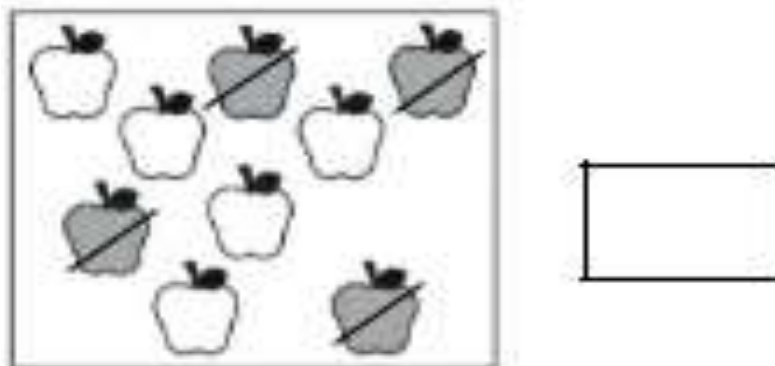
1. Observa los recuadros, en uno hay manzanas y en el otro naranjas. Cuenta las manzanas y las naranjas y escribe la cantidad de frutas que hay.



Tomado de:

https://www.google.com/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwjO2amav63mAhUKDKwKHSrzAOAQjRx6BAGBEAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.gettyimages.es%2FIlustraciones%2Fmanzana&psig=AOvVaw2fnL_0QtAK_2231uO2ReYY&ust=1576150039405317

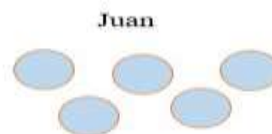
2. Observa la imagen, escribe la cantidad de manzanas que quedan después de regalar cuatro de ellas.



Tomado de:

https://www.google.com/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwjO2amav63mAhUKDKwKHSrzAOAQjRx6BAgBEAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.gettyimages.es%2Filustraciones%2Fmanzana&psig=AOvVaw2fnL_0QtAK_2231uO2ReYY&ust=1576150039405317

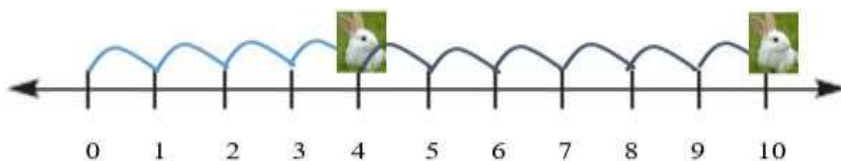
3. Pedro pierde todas las bolitas que tenía y le debe tres bolitas a Carlos y 5 bolitas a Juan. Escribe el número de bolitas que Pedro está debiendo en total.



Pedro debe _____ bolitas.

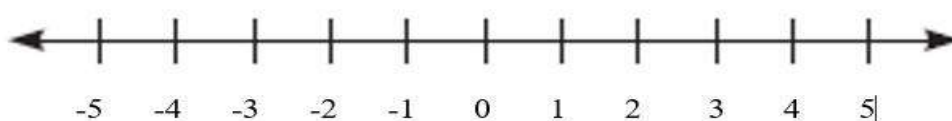
4. Lee detenidamente cada uno de los enunciados y realiza en la recta numérica las acciones que hacen los animalitos marcando el recorrido en la recta numérica. Ten en cuenta el ejemplo: El conejo Pepo salta desde cero, cuatro espacios hacia la derecha, descansa y luego salta otros seis espacios más. Escribe el número de espacios que saltó el conejo.

$$4+6 = 10$$



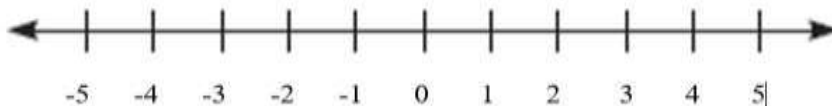
b. Una mariposa está parada en el número cero de la recta numérica, vuela tres espacios hacia la izquierda y más tarde vuela dos espacios hacia la derecha. Escribe el número en el cual terminó la mariposa su recorrido. Márcalo en la recta numérica.

b. $-3+2=$ _____



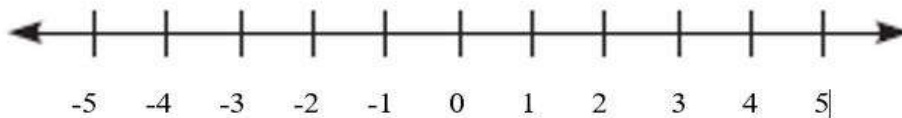
c. Una abeja estaba parada en el número cero de la recta numérica, de ahí voló dos espacios hacia la izquierda y luego tres espacios más en esa misma dirección. Escribe el número donde la abeja terminó su recorrido. Márcalo en la recta numérica.

$-2 + (-3) =$ _____



d. Una ranita está en el número cero de la recta numérica, salta cinco espacios a la derecha y de ahí se devuelve tres espacios. Escribe el número donde terminó el recorrido la ranita. Márcalo en la recta numérica.

$5 - 3 =$ _____



B.2 Instrumentos de la actividad uno de modelación matemática

B.2.1 Momento uno

El Rey \mathbb{Z} manda quiere que leas y realices las indicaciones que se encuentran en los siguientes puntos

Según lo observado en el video (Números enteros - 1.- ¿Qué son los números enteros? - 1ºESO), el Rey \mathbb{Z} manda, pide el siguiente deseo. Deseo que completen los siguientes enunciados según tu interpretación del video observado.

Los números positivos se pueden diferenciar de los números negativos con el signo ____o también se pueden escribir sin _____.

Los números enteros negativos se pueden diferenciar de los enteros positivos porque se escriben con un signo _____ antes cada número.

Según el video observado, el cero se utiliza como _____.

De la información expuesta en el video se puede concluir que los números enteros están conformados por los _____, los _____ y el _____.

De acuerdo a tu apreciación, completa el siguiente enunciado.

Los números enteros se pueden utilizar para representar situaciones de la vida cotidiana, tales como: _____, _____ y _____.

B.2.2 Momento dos

Objetivo: Aclarar aspectos con relación a números enteros que permitan dar solución al problema.

Escribe en los espacios en blanco otras formas en que podrías utilizar los números enteros para representar diversas situaciones. Tenga en cuenta lo información del video y proponga otras formas diferentes.

| | | |
|--|---|--|
| | Diferentes situaciones en las que se utilizan números enteros | |
| | | |

Después de socializar las posibles situaciones y representaciones, responde la siguiente pregunta ¿Cuál o cuáles de las situaciones expuestas crees que se dan con más frecuencia en la vida cotidiana? _____

Escoge una de las situaciones que se ven con más frecuencia en tu comunidad y represéntala

B.2.3 Momento tres

Instrumento escrito parte A

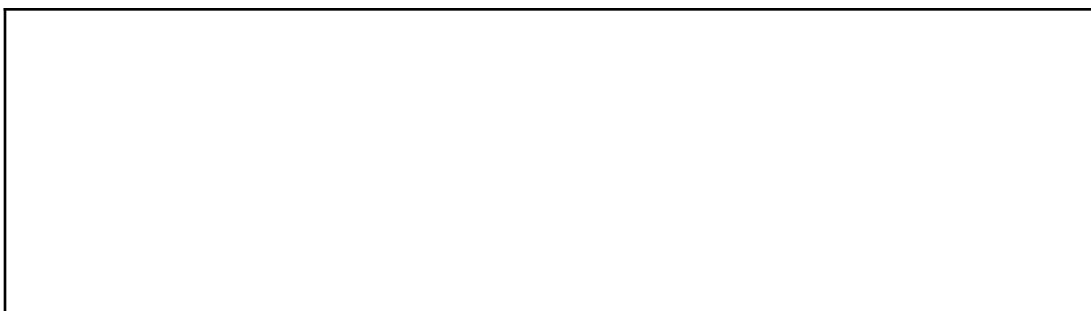
Después de realizado la parte **A** del juego el Rey \mathbb{Z} manda. Representa en el siguiente recuadro, en forma gráfica (dibujos) las acciones que realizaste en el desarrollo del juego.



Escribe la descripción del proceso realizado durante la parte **A** del juego el rey \mathbb{Z} manda.

Instrumento escrito parte B

Tenga en cuenta las acciones desarrolladas en el juego el Rey \mathbb{Z} manda parte **B**, para Representa en el siguiente recuadro, en forma gráfica (dibujos) las acciones que realizaste en el desarrollo del juego.



Describe en forma escrita, el proceso realizado durante la parte **B** del juego el Rey \mathbb{Z} manda.

Instrumento escrito parte C

El Rey \mathbb{Z} manda quiere que completes los siguientes enunciados. La función del cero, según la descripción del juego el Rey \mathbb{Z} manda parte **C**, consiste en:

_____ explica por
qué _____

Después de realizada la parte **C** del juego el Rey \mathbb{Z} manda. Representa las acciones que realizaste con la cuerda.



Describe en forma escrita las acciones realizadas durante el desarrollo del juego.

B.2.4 Momento cuatro

Objetivo: solucionar el problema inicial a través de representaciones gráficas, para la identificación de significados construidos.

Vuelve a leer la situación que el Rey \mathbb{Z} manda planteó en el momento uno (¿Cuáles son los números enteros y cómo se representan?) y responde mediante representaciones graficas lo que para ti son los números enteros.



El Rey \mathbb{Z} manda escribió los siguientes enunciados, pero no los terminó. Te solicita que teniendo en cuenta tus conocimientos, los completes.

Los números enteros son un conjunto numérico que está conformado por_____

Los números enteros se pueden ubicar en la recta numérica de manera que los números enteros negativos queden hacia el lado izquierdo y _____

_____ y también se pueden ubicar los enteros positivos hacia arriba de cero y los _____

Los números enteros se pueden asociar con situaciones de la vida diaria, tales como _____

Escoge una de las situaciones en las que se utilizan los números enteros y realiza representaciones de ella.

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

B.2.5 Momento cinco

Objetivo: identificar los significados de números enteros construidos por los estudiantes y las formas cómo los construyeron.

En grupo de tres, en forma verbal socializa las respuestas de las preguntas del momento cuatro, y en escribir la conclusión de cada pregunta, tenga en cuenta las siguientes indicaciones.

Participar en su turno.

Respetar la participación del compañero

Si no está de acuerdo con la opinión de su compañero, pida la palabra y justifique sus razones, por las cuales no está de acuerdo.

Escribe en los siguientes espacios la conclusión de cada una de las preguntas.

¿Para ti qué son los números enteros? Representalos.

Explica cómo se pueden ubicar estos números en la recta numérica

¿Con qué situaciones de la vida diaria se pueden asociar los números enteros? explica el porqué de esta relación.

Realiza una cartelera, que contenga la respuesta a la pregunta ¿Qué son los números enteros y cómo se representan? Luego expón ante tus compañeros la cartelera.

B.3 Instrumentos actividad dos de modelación matemática

B.3.1 Momento uno

Objetivo: dar a conocer el problema a los estudiantes a través de la formulación de preguntas

Lee detenidamente y responde las siguientes situaciones.

El Rey \mathbb{Z} manda, quiere ordenar a los estudiantes de cuarto grado en una recta numérica que esta dibujada en el piso, pero aún no sabe cómo hacerlo. ¿Le ayudarías al Rey \mathbb{Z} -manda a organizarlos? ----- ¿Cómo lo harías?-----

¿Qué forma propones para ordenarlos? Explica -----

El Rey \mathbb{Z} manda, está debiendo un dinero a sus empleados, él dice que ese dinero equivale a los pasos que des al lado izquierdo del número cero, en la recta numérica y la cantidad de dinero que tiene equivalen a los pasos que des a la derecha del cero en la recta numérica ¿le ayudarías al Rey \mathbb{Z} manda a saber la cantidad de dinero que debe y la cantidad de dinero que tiene para pagar?----- ¿Cómo lo harías?-----

¿Qué propones para ayudarlo? Explica -----

B.3.2 Momento dos

Objetivo: propiciar la construcción de significado de orden en números enteros y de las operaciones aditivas (suma, resta) en los estudiantes de cuarto grado.

Parte A

El Rey \mathbb{Z} manda, entrega una copia a los estudiantes cuyo contenido es relación de orden y suma y resta con números enteros. El Rey solicita a los estudiantes que lean y socialicen el contenido de las siguientes copias.

ORDEN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Ordenar números enteros a partir de su representación en la recta numérica:

Entre dos números enteros, es mayor el que más a la derecha está en la recta numérica

Entre dos números enteros, es menor el que más a la izquierda está en la recta numérica

Ordenar números enteros según su signo y valor absoluto:

Si dos enteros son positivos, el mayor es el que tiene mayor valor absoluto. **Por ejemplo:**

$$+20 > +8$$

Cualquier número positivo es mayor que el cero, y el cero es mayor que cualquier negativo. **Por ejemplo:** $+8 > 0 > -8$

Entre dos números enteros negativos, es mayor el de menor valor absoluto. **Por ejemplo:** $-8 > -20$

Los números by J. Amando Miralles Sendra. Tomado de:

http://agrega.educacion.es/repositorio/03122014/3c/es_2014120312_9201222/orden_de_los_numeros_enteros.html 14- 10- 2019

Sumas y restas de números negativos

Para aprender a sumar o restar números enteros vamos a ayudarnos con la recta numérica:

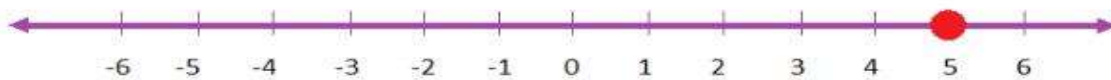
Situamos el primer número en la recta numérica

Si estamos sumando contamos hacia la derecha tantas posiciones como nos indique el segundo número.

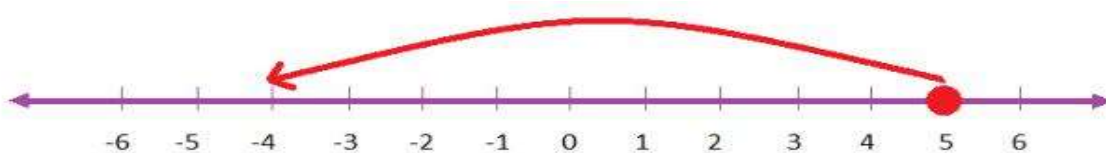
Si estamos restando contamos hacia la izquierda tantas posiciones como nos indique el segundo número.

Por ejemplo: $5 - 9$

Situamos el primer número en la recta numérica. El primer número es el 5 por lo tanto situamos el 5 en la recta.



Si estamos sumando contamos hacia la derecha tantas posiciones como nos indique el segundo número. Si estamos restando contamos hacia la izquierda tantas posiciones como nos indique el segundo número.



En este caso estamos restando, por lo tanto contamos hacia la izquierda, y como el segundo número es 9, contamos 9 posiciones hacia la izquierda desde el 5.

Por lo tanto, $5 - 9 = -4$

Truco:

Voy a enseñar un pequeño truco. Espero que os ayude a sumar y restar números enteros con mayor facilidad.

Si los dos números tienen el mismo signo sumaremos los dos números sin tener en cuenta el signo y después añadimos al resultado el signo que tenían los dos números. Por ejemplo: $-2 - 5$

Como los dos números tienen el mismo signo los sumamos: $2 + 5 = 7$. Ahora añadimos el signo que tenían los dos números, que es el signo negativo (-). Por lo tanto, el resultado es -7 .

Si los dos números tienen distinto signo restaremos los dos números: el mayor menos el menor. Después, al resultado le añadimos el signo que tenía el mayor. Por ejemplo: $3 - 7$
 Como los dos números tienen signos distintos, restaremos el mayor menos el menor: $7 - 3 =$
 4. Ahora nos fijamos en el signo del mayor: -7 (negativo). Por lo tanto el resultado será -4 .

[Smartick, Sara Sánchez Ruesgas.](https://www.smartick.es/blog/matematicas/sumas-y-restas/sumas-y-restas-de-numeros-enteros/) Tomado de <https://www.smartick.es/blog/matematicas/sumas-y-restas/sumas-y-restas-de-numeros-enteros/> . 14- 10-2019.

Parte B

A partir de lo vivido en el juego. Completa los siguientes enunciados:

El estudiante que estaba parado en el cero era: _____

Los estudiantes que estaban al lado izquierdo del número cero eran: _____

¿Los que están ubicados a la izquierda del cero son de menor estatura o de mayor estatura que el niño que representaba el cero?

Los estudiantes que estaban al lado derecho del cero eran:


¿Los niños que están ubicados a la derecha de cero son de menor estatura o de mayor estatura que el niño que representaba el número cero?

d. Según el juego que acabas de realizar, la relación que hay entre la estatura de los estudiantes y el orden de los números enteros es que_____

¿Que se podría concluir de las situaciones vividas en el juego?_____

Parte C

En el siguiente recuadro, representa según tu apreciación una o varias situaciones vividas en el juego el Rey \mathbb{Z} manda parte C.



Describe lo ocurrido durante el juego el Rey \mathbb{Z} manda parte C.

B.3.3 Momento tres

En este momento los estudiantes investigaran en forma individual, acerca de tres aspectos relacionados con números enteros. 1. Orden en los números enteros, 2. Operaciones aditivas y 3. Diferentes situaciones de la vida diaria en las que se puedan utilizar los números enteros.

Registros escritos

Con la ayuda de un familiar, consulta en internet, en libros de matemática de grado sexto o con personas que sepan del tema, acerca de:

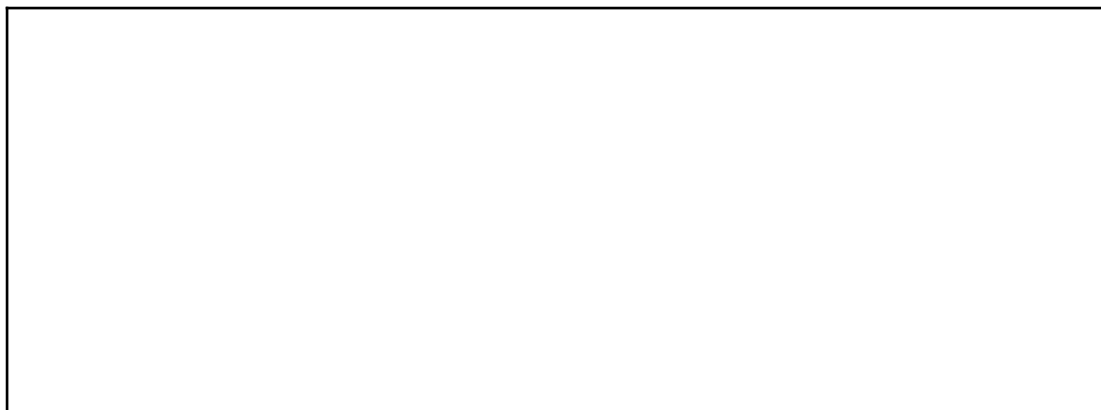
Orden en los números enteros.

Operaciones aditivas (suma y resta)

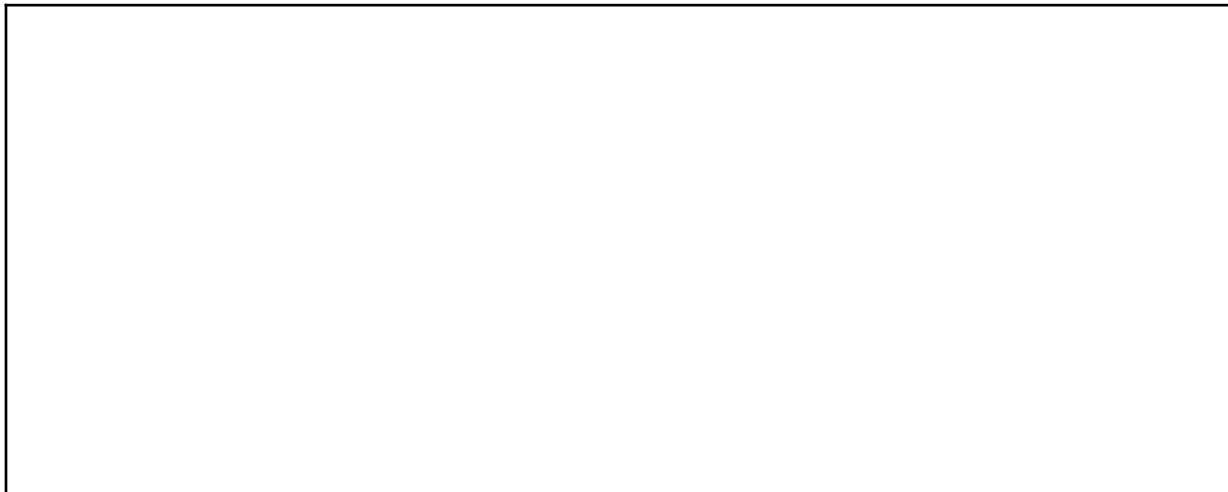
Situaciones de la vida diaria relacionadas con números enteros.

Investiga cómo se representan en la recta numérica las siguientes situaciones y realiza un dibujo de dichas situaciones

Pablo está parado en el punto de referencia de una recta numérica, se desplaza cuatro pasos a la derecha y luego retrocede cinco pasos ¿en cuál número se encuentra ahora Pablo?



César se comprometió a llevarle al colegio, naranjas a sus dos mejores amigos, pero se le olvidaron las naranjas en la casa, ahora le debe tres naranjas a Pablo y cinco naranjas a Alberto ¿Cuántas naranjas debe César?



Alberto necesita recoger un anillo que cayó en el pozo profundo con agua, para poder llegar al fondo del pozo se subió en una rampla de dos metros de altura, luego se tiró al pozo y bajo seis metros desde la rampla hasta el fondo del pozo ¿Cuál es la profundidad del pozo?



B.3.4 Momento cuatro

De acuerdo con lo que investigaste acerca de orden en los números enteros y lo vivido en el juego el Rey \mathbb{Z} manda responde mediante representaciones gráficas, las preguntas con la que se inició esta actividad. A continuación, te la ¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos?

Registros escritos, momento cuatro

En el siguiente recuadro, realiza representaciones que permitan responder a las preguntas:
¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y como se resta con ellos?

| | |
|---|--|
| ¿Cuál es el orden en los números enteros? | |
|---|--|

| |
|--|
| ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos? |
|--|

Explica según tu apreciación cómo es el orden en los números enteros.

Ayuda al Rey \mathbb{Z} manda a encontrar la cantidad de dinero que tiene y la cantidad que debe, para eso lee la situación descrita en el momento uno y realiza las representaciones que estimes correspondientes para hallar el resultado.

Situación

El rey \mathbb{Z} manda, está debiendo un dinero a sus empleados, él dice que ese dinero equivale a los pasos que tu des, al lado izquierdo del número cero en la recta numérica y la cantidad de dinero que tiene equivalen a los pasos que tu des, a la derecha del cero en la recta numérica ¿Cuál es la cantidad de dinero que debe y la cantidad de dinero que tiene el Rey \mathbb{Z} manda para pagar a sus empleados?

Solución

B.3.5 Momento cinco

Los estudiantes comparan los resultados y representaciones que realizaron de las preguntas ¿Cuál es el orden en los números enteros? ¿Cómo se suma y cómo se resta con ellos? En forma de plenaria, los estudiantes darán a conocer los resultados del problema matemáticamente. Dichos resultados serán expuestos y se discutirán entre los estudiantes y la docente investigadora, con la finalidad de verificar los resultados.

B.4 Actividad tres de modelación matemática

En esta actividad, los estudiantes conforman grupos de a tres integrantes para iniciar el proyecto de modelación matemática con relación a los significados que hasta el momento han construido acerca de números enteros en el desarrollo de las anteriores actividades de modelación.

El proyecto se realiza teniendo en cuenta cinco momentos: i. Formulación del problema, ii. Aclaración del problema, iii. Recolección de datos, iv. Solución del problema y v. Socialización de resultados. Este proceso lo realizan los estudiantes según sus intereses con la orientación de la docente investigadora.

Apéndice C. Participaciones nacionales

C.1 Poster



I Seminario
Internacional de Innovación en
Educación y Didáctica de las Ciencias

Hace constar que:

CARMEN JULIA VELÁSQUEZ MARTÍNEZ
CC: 32.272.417

**Participó en modalidad poster en el I Seminario Internacional de Innovación en
Educación y Didáctica de las Ciencias
SIED 2019**

Objetivo:
Generar un espacio de cooperación e intercambio académico para la reflexión sobre aspectos
relacionados con la innovación en educación y didáctica de las ciencias.

Intensidad: 20 horas



HERNÁN DE JESÚS SALAZAR ESCOBAR
Jefe Departamento de Educación y Ciencias Básicas
Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas - ITM



YOLANDA DEL SOCORRO ÁLVAREZ RÍOS
Decana Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas - ITM

Medellín, septiembre de 2019.

Vigilante Metodológico

RECIBIDO



RECIBIDO



RECIBIDO




RECIBIDO



Apéndice D. Consentimiento informado

D.1 Consentimientos del Centro Educativo

Consentimiento informado del Centro Educativo




Centro Educativo Rural El Zumbido,
Municipio de San Pedro de Urabá Antioquia
DANE: 205665000886. Nit: 900254314-2.

Resolución de Aprobación 08319 de 2008 y 7624 de 2009, Secretaría de Educación de Antioquia.

Autorización del Centro Educativo Rural el Zumbido para que algunos de sus estudiantes participen en la investigación de Maestría titulada "construcción de significados de números enteros en estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria", mediante esta, en respuesta a la solicitud realizada por la docente Carmen Julia Velásquez Martínez, le informo que cuenta con el aval del Centro Educativo, para la realización de la investigación antes citada. La docente investigadora, se compromete a:

- Entregar al Centro Educativo una copia de los resultados y conclusiones de la investigación.
- Socializar con la Comunidad Educativa del Centro Educativo Rural el Zumbido los resultados y las conclusiones de la investigación con miras a tomar dichos resultados para transformar los procesos de enseñanza y de aprendizaje del área de matemáticas.



Alain America Mosquera Cossio
C.C: 4861998
Director

D.2 Consentimiento de los padres

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE PADRES DE FAMILIAS

Permiso de padres, madres o acudientes para la participación de su hijo, hija o acudido en la Investigación de la Maestría, titulada "Construcción de significados de números enteros en estudiantes de cuarto grado de educación básica primaria"

Se solicita su autorización para que su hijo o hija participe en el proceso investigativo que se realiza en el Centro Educativo Rural El Zumbido, dirigido por la docente Carmen Julia Velásquez Martínez, estudiante de la Maestría en Educación de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

Propósito de la investigación: el propósito de esta investigación es identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación.

Procedimiento: su hijo, hija o acudido como participante de esta investigación, será observado en clase y extra clase, en ocasiones se toman fotos, se grabaran audios y videos, y también podría ser entrevistado.

Riesgos: no existen riesgos asociados a la participación de su hijo, hija o acudido en esta investigación, puesto que la docente investigadora estará en constante monitoreo de las actividades que realicen los estudiantes en el proceso investigativo. Si su hijo, hija o acudido no desea participar en alguna actividad estará en libertad de hacerlo. Los aportes, comentarios o ideas que realicen serán respetados y valorados por la investigadora.

Confidencialidad: los resultados de este estudio que puedan dar pistas acerca de la identidad del participante serán confidencial. Solo se permitirá el acceso de la información bajo la supervisión de la investigadora y solo para fines académicos. Toda información recolectada en este estudio será confidencial. Se utilizaran seudónimos para remplazar el nombre de los participantes al recolectar los datos y escribir el informe final.

Preguntas posteriores: la investigadora responderá cualquier pregunta relacionada con esta investigación, a través del correo cjuliavelasquez3@gmail.com

Consentimiento del padre de familia: entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo, hija o acudido participe de esta investigación.

Lina Hernandez

1073812040

3177981732

FIRMA DEL PADRE O RESPONSABLE

CEDULA

CELULAR

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE PADRES DE FAMILIAS

Permiso de padres, madres o acudientes para la participación de su hijo, hija o acudido en la Investigación de la Maestría, titulada “Construcción de significados de números enteros en estudiantes de cuarto grado de educación básica primaria”

Se solicita su autorización para que su hijo o hija participe en el proceso investigativo que se realiza en el Centro Educativo Rural El Zumbido, dirigido por la docente Carmen Julia Velásquez Martínez, estudiante de la Maestría en Educación de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

Propósito de la investigación: el propósito de esta investigación es identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación.

Procedimiento: su hijo, hija o acudido como participante de esta investigación, será observado en clase y extra clase, en ocasiones se toman fotos, se grabaran audios y videos, y también podría ser entrevistado.

Riesgos: no existen riesgos asociados a la participación de su hijo, hija o acudido en esta investigación, puesto que la docente investigadora estará en constante monitoreo de las actividades que realicen los estudiantes en el proceso investigativo. Si su hijo, hija o acudido no desea participar en alguna actividad estará en libertad de hacerlo. Los aportes, comentarios o ideas que realicen serán respetados y valorados por la investigadora.

Confidencialidad: los resultados de este estudio que puedan dar pistas acerca de la identidad del participante serán confidencial. Solo se permitirá el acceso de la información bajo la supervisión de la investigadora y solo para fines académicos. Toda información recolectada en este estudio será confidencial. Se utilizaran seudónimos para remplazar el nombre de los participantes al recolectar los datos y escribir el informe final.

Preguntas posteriores: la investigadora responderá cualquier pregunta relacionada con esta investigación, a través del correo cjuliavelasquez3@gmail.com

Consentimiento del padre de familia: entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo, hija o acudido participe de esta investigación.

Merlis Arrieta

FIRMA DEL PADRE O RESPONSABLE

1041756853 3135361680

CEDULA

CELULAR

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE PADRES DE FAMILIAS

Permiso de padres, madres o acudientes para la participación de su hijo, hija o acudido en la Investigación de la Maestría, titulada "Construcción de significados de números enteros en estudiantes de cuarto grado de educación básica primaria"

Se solicita su autorización para que su hijo o hija participe en el proceso investigativo que se realiza en el Centro Educativo Rural El Zumbido, dirigido por la docente Carmen Julia Velásquez Martínez, estudiante de la Maestría en Educación de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

Propósito de la investigación: el propósito de esta investigación es identificar maneras en que estudiantes de cuarto grado construyen significados de números enteros en actividades de modelación.

Procedimiento: su hijo, hija o acudido como participante de esta investigación, será observado en clase y extra clase, en ocasiones se toman fotos, se grabaran audios y videos, y también podría ser entrevistado.

Riesgos: no existen riesgos asociados a la participación de su hijo, hija o acudido en esta investigación, puesto que la docente investigadora estará en constante monitoreo de las actividades que realicen los estudiantes en el proceso investigativo. Si su hijo, hija o acudido no desea participar en alguna actividad estará en libertad de hacerlo. Los aportes, comentarios o ideas que realicen serán respetados y valorados por la investigadora.

Confidencialidad: los resultados de este estudio que puedan dar pistas acerca de la identidad del participante serán confidencial. Solo se permitirá el acceso de la información bajo la supervisión de la investigadora y solo para fines académicos. Toda información recolectada en este estudio será confidencial. Se utilizaran seudónimos para remplazar el nombre de los participantes al recolectar los datos y escribir el informe final.

Preguntas posteriores: la investigadora responderá cualquier pregunta relacionada con esta investigación, a través del correo cjuliavelasquez3@gmail.com

Consentimiento del padre de familia: entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo, hija o acudido participe de esta investigación.

Jose Luis Yanez 10903929 3205459462

FIRMA DEL PADRE O RESPONSABLE

CEDULA

CELULAR

Referencias bibliográficas

- [Sensei De Las Mates]. (2015, octubre. 26) Números enteros - 1.- ¿Qué son los números enteros? - 1ºESO [Archivo de video]. Recuperado <https://www.youtube.com/watch?v=uCLSk-kXsgU>
- Álvarez, J. y Jurgenson, G. (2009). *Cómo hacer investigación cualitativa*. México: Ediciones Paidós Ibérica, S. A.
- Arteaga, A. y Rivas, J. (2014). *Estructuras aditivas de los números enteros y los materiales físicos y virtuales*. (Tesis de maestría) Universidad de Antioquia. Apartadó- Colombia.
- Aymerich, A., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2017). Modelling with Statistical Data: Characterisation of Student Models. Stillman, G., Blum, W. and Kaiser, G. (Ed.), *Mathematical Modelling and Applications Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 37- 47). Australian Catholic University, Australia. Editorial Board IPTL.
- Barbosa, J (2004). Modelagem Matemática: O que é? ¿Por que? Como? *Veritati*, (4), pp. 73-80.
- Bassanezi y Biembengut (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Revista didáctica de las matemáticas*. (32), pp.13-25.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime*. (8), pp.247-263.
- Biembengut, M., y Hein, N., (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (2), 105-125.
- Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *Revista de didáctica de las matemáticas*. pp. 9-19.
- Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(2), 194-245.
- Bofferding, L. and Wessman-Enzinger, N. (2017), "Subtraction involving negative numbers: Connecting to whole number reasoning". Faculty Publications - School of Education. 153.
- Borba, M. y Araújo, J. de L. (2004). *Pesquisa qualitativa em educação matemática* (Vol. 9). Sao Paulo: Autêntica Editora.

- Borjas, D. (2009). *Aprendizaje de los números enteros una experiencia significativa en estudiantes de séptimo grado de la escuela nacional de música*. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Tegucigalpa- honduras.
- Bossio, J. (2014). *Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes de grado décimo al generar modelos lineales*. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín- Colombia.
- Bossio, J., Londoño, S. y Jaramillo, C. (2013). Modelación matemática en el aula clase: una producción de modelos lineales desde el contexto del cultivo de plátano. *Revista Científica*, 409-412.
- Caron, F. and Pineau, K. (2017). L'Hospital's Weight Problem: Testing the Boundaries Between Mathematics and Physics and Between Application and Modelling. En Stillman, G., Blum, W. and Kaiser, G. (Ed.), *Mathematical Modelling and Applications Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 59-70). Australian Catholic University, Australia. Editorial Board IPTL.
- Carvalho, M. (2011). Modelación y Tecnologías Digitales en Educación Matemática. *12° encuentro Colombiano de matemática educativa*, (pp. 314-316). Quindío, Colombia.
- Chica, N. (2011). *Propuesta de intervención pedagógica para comprender el significado del número entero*. Tesis de maestría. Universidad Nacional. Medellín- Colombia.
- Collette, J. (1973). *Histoire des mathématiques* 1. Ed. Renouveau pédagogique, Montréal. Traducido, siglo XXI editores, s. a (México, 1985) isbn 968-23-1362-7 (tomo 1).
- Gallardo, A., Mejía, J y Saavedra, G. (2017). Intertextualidad sobre números negativos en niños de primaria: un acercamiento histórico. *Educación Matemática*, 29 (2), 69-98.
- Gallart, C., Ferrando, I., García, L., Albarracín, L. and Gorgorió, N. (2017). Design and Implementation of a Tool for Analysing Student Products When They Solve Fermi Problems. En Stillman, G., Blum, W. and Kaiser, G. (Ed.), *Mathematical Modelling and Applications Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 265-275). Australian Catholic University, Australia. Editorial Board IPTL
- Godino, J y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355.

- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22, nº 2.3, pp.237-284, 2002. Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/local/jgodino>.
- Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. En Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- Godino, J., Batanero, C y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, (pp. 127-135).
- Godino, J., Batanero, C y Font, V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada del artículo The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2): 127-135 (2007). España.
- Godino, J., Batanero, C y Font, V. (2019). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *For the Learning of Mathematics*, 39 (1), 37- 42.
- Godino, J., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones Ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
- Hernández, R. Fernández, C y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: mcgraw-hill / interamericana editores, S.A. DE C.V. http://digitalcommons.georgefox.edu/soe_faculty/153

- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, Vol. 38, Issue 3, pp 302–310.
- Kotze, H., Jacobs, G and Spangenberg, E. (2017). Mathematical Modelling for Engineering Diploma Students: Perspectives on Visualisation. En Stillman, G., Blum, W. and Kaiser, G. (Ed.), *Mathematical Modelling and Applications Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 541-551). Australian Catholic University, Australia. Editorial Board IPTL
- Londoño, S., y Muñoz, L. (2011). *La modelación matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables*. (Tesis de Maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Marmolejo-Correa, D. (2018). Maneras de atribuir sentidos y significados al contexto en actividades de modelación con estudiantes de séptimo grado. (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia, Medellín.
- Martínez, D., Páez, O., y García, G. (2013). Modelación desde la perspectiva de la educación matemática crítica. Cuestiones relacionadas con la obsolescencia. *Revista científica / issn 0124 2253/ edición especial / Bogotá, D.C.*
- Martínez, E. (2016). Posiciones críticas en actividades de modelación matemática en un contexto del comercio y el turismo. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín.
- Mattessich, R. (1998) From accounting to negative numbers: a signal contribution of medieval india to mathematics. *Accounting Historians Journal*: December 1998, Vol. 25, No. 2, pp. 129-146.
- Mejía, L. y Gallardo, A. (2015). Textos producidos por alumnos de cuarto grado de primaria al resolver problemas elementales con números enteros. 3er Coloquio de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México, 2015.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá-Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencia del área de matemáticas*. Bogotá. Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje de matemáticas*. Bogotá – Colombia.

- Molina, J. y Villa-Ochoa, J. (2013). La modelación en la producción de conocimiento matemático: el caso de la función seno. *Revista Científica*, 80-84.
- Muñoz, L.; Londoño, S.; Jaramillo, C. y Villa-Ochoa, J. (2014). Contextos Auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 42, 48-67.
- Otero, C. (2015). *Estrategia didáctica para el aprendizaje significativo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros con los estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Ana de Castrillón*. Tesis de maestría. Universidad Nacional. Medellín- Colombia.
- Palharini, B., Tortola, E. and Werle, M. (2017) Mathematical Modelling and Proof by Recurrence: An Analysis from a Wittgensteinian Perspective. Stillman, G., Blum, W. and Kaiser, G. (Ed.), *Mathematical Modelling and Applications Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 129-139). Australian Catholic University, Australia. Editorial Board IPTL.
- Parra Zapata (2015). *Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. Reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática*. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín – Colombia.
- Pastor, J. y Babini, J (1985) *Historia de las matemáticas, Volumen 1. De la antigüedad a la baja edad media*. Prefación de Juan Vernet Editorial gedisa.
- Pastor, J. y Babini, J (1985) *Historia de las matemáticas, Volumen 2. Del renacimiento a la actualidad*. Editorial gedisa. <https://es.calameo.com/read/0024347008b1bd318ac9e>
- Pérez, Alcalde y Lorenzo (2014). *Los números enteros y racionales, las magnitudes y las medidas en el aula de primaria*. Universitat Jaume 1. España.
- Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., & Castro-Gordillo, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional De Investigación En Educación*, 11(23), 201-220. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.sfp>
- Rivera, M., Londoño, S. y Jaramillo, C. (2012). Medida de área y el volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática. *Memorias del 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. 154-159.

- Rivera-Quiroz, S. (2014). *Medida de área y volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín - Colombia.
- Scott, R., Wessels, D. and Swart, E. (2017). The Hidden Benefits of Mathematical Modelling for Students with Disabilities. En Stillman, G., Blum, W. and Kaiser, G. (Ed.), *Mathematical Modelling and Applications Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 455-466). Australian Catholic University, Australia. Editorial Board IPTL
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudios de caso*. Madrid: Morata, S.L.
- Stewart, I (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años*. tomado: <http://www.librosmaravillosos.com/historiadelasmaticasenlosultimos10000anos/pdf/Historia%20de%20las%20maticas%20-%20Ian%20Stewart.pdf>
- Stillman, G. (2017). Enabling Anticipation Through Visualisation in Mathematising Real World Problems in a Flipped Classroom. Stillman, G., Blum, W. and Kaiser, G. (Ed.), *Mathematical Modelling and Applications Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 163-174). Australian Catholic University, Australia. Editorial Board IPTL.
- Tamayo, C. (2008). El juego: un pretexto para el aprendizaje de las matemáticas. Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de octubre de 2008). Valledupar, Colombia.
- Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. (Tesis doctoral). Universidad de Sevilla. Sevilla-España.
- Trigueros. (2009). El uso de la Modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*. 9, (46), pp. 75-87.
- Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. Teórica Quadrante: *Revista e de Investigaçãõ*, pp.33-43.
- Velásquez, C., Rivas, M. y Méndez, D. (2016). Construcción del concepto de número de número negativo en grado segundo. En Gómez, D. (Ed.), *Matemáticas en contexto. Unidades didácticas* (pp. 149-158) Medellín, Antioquia: Gobernación de Antioquia.
- Vélez y Varela. (2014). *El descubrimiento de los números negativos*. Publicado en la biblioteca digital de la Universidad de Antioquia. Medellín recuperado de:

http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/3121/6/VelezBotero_2014_Descubrimientonumerosnegativos.pdf

Villa Ochoa (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, pp.63-85.