UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# COMPRENSION DE LA NOCION DE CUADRATURA A TRAVÉS DE ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Autor(es)

Ángela María Cabal Hernández

María Isabel Hoyos Torres

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2018

Comprensión de la noción de cuadratura a través de áreas de figuras geométricas

**Ángela María Cabal Hernández y María Isabel Hoyos Torres**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

**Indicar el título que se obtendrá Licenciado en Matemáticas y Física.**

Asesores (a):

Rene Alejandro Londoño Cano

Doctor en Educación

Línea de Investigación:

Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) EDUMATH

Categoría: B-Colciencias

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación.

Medellín, Colombia

2018.

# Tabla de contenido

## Tabla de ilustraciones

# Introducción

El presente estudio se enfoca en la generación de descriptores enmarcados en el modelo de van Hiele, que permitan abordar la comprensión de la noción de cuadratura a través de áreas de figuras geométricas; para ello el estudio se ha fundamentado en los estudios histórico epistemológicos que dan cuenta de la evolución de la noción.

Teniendo en cuenta la literatura revisada, todo indica que en el aula de clase de geometría la enseñanza se centra en la aplicación de fórmulas para la medida de áreas, reduciendo los conceptos a procesos aritméticos, además, se llevan al aula ejemplos simples que no muestran procesos que permitan al estudiante hacer un razonamiento lógico.

En este trabajo se usa el concepto de áreas en figuras geométricas y el material teórico que han dejado los matemáticos griegos de la antigüedad tal como lo hizo Arquímedes, con el fin de que el estudiante logre un panorama más amplio y de mayor grado de complejidad para que empiece a crear una estructura lógica en su pensamiento a diferencia de la enseñanza del cálculo de áreas de figuras geométricas que solo es vista como un proceso de aplicación de fórmulas con poco desarrollo de procesos de razonamiento lógico, situación que es evidenciada en la prueba piloto aplicada a un curso de Cálculo en Varias Variables (Anexo 1).

De ahí la importancia y motivación para la realización del presente trabajo de grado, ya que se pretende llevar al estudiante a la comprensión de la noción de cuadratura, que aun siendo considerado como un proceso más largo y abstracto que los cálculos modernos para encontrar el área en figuras geométricas, permitirá crearle la necesidad de hacer construcciones con regla y compás y de concebir una estructura lógica para tener una base para la comprensión de otros conceptos relacionados o más complejos.

El marco teórico del presente trabajo de grado estará orientado por el modelo de van Hiele, ya que está fundamentado en la enseñanza de la geometría, y será el que permita con mayor precisión hacer una descripción de los avances del estudiante en el proceso de comprensión de la noción de cuadratura, e igualmente, ayudará a identificar en el desarrollo de las actividades los descriptores de cada nivel para la comprensión de la noción hablada.

En el capítulo uno se describe la justificación y formulación del problema, sus objetivos y el estado del arte.

En el capítulo dos se realiza una descripción del marco contextual, legal, teórico y conceptual.

En el capítulo tres se hará una descripción de la metodología utilizada, especificando el enfoque y el tipo de estudio, como también la información recolectada y la ruta metodológica utilizada para dicha recolección.

En el capítulo cuatro se analizará la información recolectada, particularizando cada caso basado en el marco teórico.

En el capítulo cinco se expondrán las conclusiones finales y los hallazgos obtenidos a lo largo de la ejecución y desarrollo del presente trabajo.

# Capítulo I: formulación de la investigación

En el capítulo I se pretende presentar el por qué y para qué de esta investigación, abordando la problemática presente en la Educación Matemática desde el estudio de la noción de cuadratura, los antecedentes que se han generado durante la historia y los objetivos de investigación planteados.

## 1.1 Justificación del problema

El presente estudio cobra relevancia en un problema que desde la Educación Matemática se fundamenta en dos razones:

- Se considera importante que los docentes en formación conozcan la génesis de los conceptos, ya que el desconocimiento de estos orígenes puede causar vacíos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Al dejar a un lado la comprensión de un concepto, idea o noción y reducir la enseñanza de este a procesos aritméticos, puede causar que los estudiantes se dediquen a memorizar y repetir procedimientos y no a potencializar su razonamiento.

## 1.2 Formulación del problema:

De acuerdo a los resultados obtenidos de la prueba piloto realizada en el curso de Cálculo en Varias Variables, se puede concluir que la mayor parte de la población de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, no tienen un conocimiento claro sobre la noción de cuadratura, dado que su enseñanza es inusual y se ha centrado en un proceso aritmético para calcular el área de figuras geométricas.

De aquí parte el problema, ya que se considera que traer esta noción al aula permitirá al estudiante tener herramientas para potenciar el razonamiento, lo que posibilitará no solo lograr la comprensión de este, sino otros de mayor complejidad, teniendo en cuenta que la enseñanza de los conceptos en forma repetitiva y la utilización de textos guías que no contienen su génesis y evolución, pueden causar un vacío en la información del contenido. Así las cosas, se considera importante que los estudiantes tengan claridad en estos aspectos para disolver tal dificultad, lo que posibilita tener una mejor comprensión de la noción de cuadratura a través de áreas de figuras geométricas. La anterior afirmación se sustenta desde la siguiente cita:

> Este es un obstáculo debido a que el conocimiento aprendido se toma como único y verdadero, lo cual puede impedir que el individuo tenga mente abierta para adquirir nuevos conocimientos o conocimientos que contradigan lo aprendido, esta predisposición aleja al individuo del conocimiento verdadero. (Castro, Hernández y Padilla, 2010, p3.)

## 1.3 Pregunta de investigación

¿De qué manera se puede describir la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas en un curso de Cálculo en Varias Variables de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquía?

## 1.4 Estado del arte histórico

Desde la revisión de la literatura se destacan diferentes aspectos relevantes para esta investigación, en la que se muestra cómo surge la noción de cuadratura, su desarrollo a través de la historia y su relación con el área de figuras planas. Esto permitirá tener una claridad de las posibles dificultades que se pueden presentar en estudiantes de un curso de Cálculo en Varias Variables de la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia.

Teniendo en cuenta que la necesidad de medir, contar y ordenar ha permitido la evolución constante de las matemáticas, Levi (como se citó en Eudemo, 2006) afirma de acuerdo al desarrollo de la historia que:

> Decimos que, según la tradición general, son los egipcios quienes primeramente inventaron la Geometría, y que ella ha nacido de la medición de los terrenos, que ellos tenían que renovar continuamente a causa de que las crecidas del Nilo hacían desaparecer los límites entre las propiedades. Por nada debe considerarse asombroso que una necesidad práctica haya producido la invención de ésta y otras ciencias, porque todo lo que está sometido a la generación procede de lo imperfecto a lo perfecto; hay por lo tanto un progreso natural de la sensación al razonamiento, de éste a la inteligencia pura. Del mismo modo, así como el exacto conocimiento de los números ha empezado por los fenicios a consecuencia del tráfico y de las transacciones en que se ocupaban, la Geometría ha sido inventada por los egipcios por la razón que he dicho. (p.28).

Con lo anterior se confirma que el origen del uso de las matemáticas va ligado a dar solución a una necesidad presente en determinada época, y de igual forma da una muestra que la curiosidad del ser humano ha logrado la evolución de los diferentes conceptos matemáticos.

En este sentido, es pertinente que los estudiantes tengan un acercamiento hacia una explicación epistemológica de la Historia de la Matemáticas y cómo se ha logrado llegar a un desarrollo de los métodos o formulaciones que han permitido facilitar la solución de las diferentes problemáticas de la cotidianidad, como lo era el caso de la renovación constante de la medición de los terrenos que los egipcios debían realizar a causa de las modificaciones que estos sufrían cada vez que el Nilo presentaba una crecida.

Que el estudiante conozca el origen y el porqué del concepto a estudiar genera un interés y curiosidad de saber cómo otros lograron crear métodos que han facilitado soluciones de problemas del diario vivir que se presentan y cómo estos métodos ayudan a desarrollar procesos futuros en sus prácticas laborales al terminar su carrera profesional.

A partir de lo anterior, Anacona (2003) plantea que “un estudio histórico-epistemológico que dé cuenta de la génesis, evolución y consolidación de un objeto matemático en el marco de unas condiciones socioculturales, contribuye a un conocimiento del concepto matemático que trasciende los meros procesos algorítmicos” (p. 42). En efecto, pensamos que para que en el estudiante haya una mejor comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas, es pertinente y hasta necesario que conozca por qué surgió la necesidad de hallar un método que pudiera obtener el valor del área y cuáles han sido los métodos utilizados desde la antigüedad hasta la actualidad.

Jiménez, (2004) puntualiza que: “El cuadrado, es la figura rectilínea perfecta por excelencia, y se impuso desde el principio como el principal patrón de comparación, de allí que la palabra “cuadratura” fuera utilizada como una forma de referirse a lo que hoy denominamos cálculo del área” (p.105). Cabe resaltar que se entiende por cuadrado a la figura bidimensional formada por cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos e iguales.

En el libro de los Elementos de Euclides, se encuentra recopilado el método de comparación, utilizado para realizar las transformaciones necesarias, a través de regla y compás, con el fin de generar una equivalencia entre una figura dada no cuadrada y el cuadrado.

Las dimensiones históricas relacionadas con la noción de cuadratura se pueden evidenciar en tres momentos:

1. Los trabajos sobre la cuadratura antes de Euclides.

2. Los trabajos de Euclides referentes a la cuadratura.
3. El método utilizado por Arquímedes para demostrar la cuadratura de una parábola.

**1. 4.1 Los trabajos sobre la cuadratura antes de Euclides.**

***Hipócrates de Chio:***

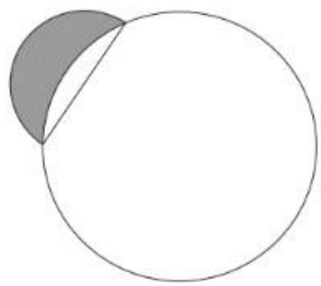


*Figura 1: Ilustración de la Lúnula de Hipócrates Jiménez, D. (2004). Π: la letra griega que los griegos no usaron. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.*

Recuperado de https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol11/Pi_def.pdf

**Hipócrates de Chio (hacia el 450 a.d.C).** Se dice que fue el primer matemático profesional de la historia. Fue quien logró conseguir la primera demostración rigurosa de la cuadratura de una figura curvilínea en la historia de las matemáticas. Hipócrates escribió unos elementos de geometría, donde habría tratado la cuadratura de las lúnulas (figuras planas limitadas por arcos de círculos de radios diferentes), mostrada en la figura 1. Después de esto Hipócrates intentó vanamente dar solución al problema de la cuadratura del círculo (González, 1992).

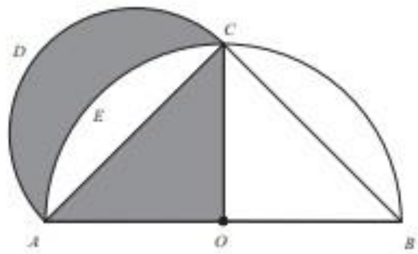



*Figura 2: Ilustración de la Lúnula de Hipócrates Jiménez, D. (2004). Π: la letra griega que los griegos no usaron. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.*

Recuperado de https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol11/Pi_def.pdf

Hipócrates comprobó que es posible cuadrar lúnulas como la de la figura 2, en la que el triángulo sombreado AOC, con base AO, es igual a la lúnula sombreada creada con regla y compás. Se dice que también fue el primer matemático en utilizar letras en las construcciones de las figuras geométricas, así como la introducción del método indirecto de demostración en las matemáticas, es decir, la reducción al absurdo.

La demostración realizada por Hipócrates más tarde fue utilizada y recopilada por Euclides de la siguiente forma:

Libro I, proposición 47, Teorema de Pitágoras: “En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.” (Euclides, 1991, p. 84).

Libro III, proposición 31: “En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto, el (ángulo) en el segmento mayor es menor que un recto, el (ángulo) en el segmento menor es mayor que un recto; y además el segmento del ángulo mayor es mayor que un recto y el ángulo del segmento menor es menor que un recto.” (Euclides, 1991, p. 152).

Libro XII, proposición 2: “Los círculos son el uno al otro como los cuadrados de diámetros.” (Euclides, 1996, p.268).

A continuación, se describe la demostración de la primera lúnula, siguiendo la gráfica de la figura 2 y con modificación en su nomenclatura para que pueda ser entendida por el lector:

*Consideraciones:*

Sem = Semicircunferencia.

∢ = Ángulo.

Ô = Al sector circular comprendido por el diámetro y el arco de la circunferencia que describe la lúnula.

- Sean AC y CB lados del cuadrado inscrito en la circunferencia ACB.
- OA y OB son lados iguales por ser radios de la circunferencia ACB.
- El ∢ AOC es recto.
- El lado OC es igual al lado AO, por ser ambos radios de la circunferencia y, por tanto, el triángulo AOC es un triángulo rectángulo isósceles.
- El ∢ ACB está inscrito en la semicircunferencia, por tanto, el ángulo es recto, por la proposición III, 31.
- $AB^2 = AC^2 + CB^2$ por la proposición I, 47.
- $AB^2 = AC^2 + AC^2$ por ser CB y AC lados del cuadrado inscritos en la circunferencia.
- Sumando términos semejantes tenemos que $AB^2 = 2AC^2$.
- $= \frac{sem\ ACB}{sem\ ADC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{2AC^2}{AC^2}$ por la proposición XII- 2, luego sem ACB = 2 sem ADC.
- sem ACB = del segundo cuadrante AOC, del triángulo ACB.
- sem ADC = al triángulo AOC.
- sem ADC – ÔAEC = cuadrante AOC – ÔAEC.
- Por tanto, el área de la Lúnula ADC =al área del triángulo AOC.

A través de esta demostración, Hipócrates concluyó que el área de la figura curvilínea y el área de la figura rectilínea eran equivalentes, la equivalencia entre el área de la lúnula y el triángulo rectángulo correspondiente se pudo generar, ya que Hipócrates logra determinar que el cuadrante AOC es igual al semicírculo exterior ADC y de este se pudo restar la superficie común, que para este caso fue el sector circular AEC. Esta sustracción de áreas se encuentra presente en el libro I, noción común 3: "y de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restantes serán iguales." (Euclides, 1991, p. 24).

Podemos resaltar dos aspectos importantes de la demostración: primero, la equivalencia entre los sectores circular que son de forma diferente y segundo, la forma como Hipócrates particiona o divide las figuras curvilíneas, para poder hacer una representación de ellas en forma de adición o sustracción de áreas. Dada la relación de equivalencia entre la lúnula ADC y el triángulo AOC, la cuadratura de ésta sería igual a la cuadratura del triángulo, esto fue debido a que para ese entonces la cuadratura de figuras regulares ya se encontraba resuelta. Libro I, proposición 42: "Construir un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado" (Euclides, 1991, p. 76).

***Antifonte y Bryson***:

A partir de la demostración realizada por Hipócrates creció el deseo por demostrar cuadratura de la circunferencia. Uno de ellos fue Antifonte de Atenas (hacia el 430 a.d.C), llamado el sofista. Dado un círculo, Antifonte utilizó el método de aproximación, tratando de inscribir un polígono regular, y sobre cada lado del polígono inscrito duplica su lado, obteniendo un nuevo polígono regular del doble número de lados y repite esta operación hasta encontrar un polígono $2^{n+2}$ lados. González (como se citó en Aristóteles, 1992) cuenta como Aristóteles relató la continuidad de este método:

> Antifón piensa que de esta manera el área (del círculo) podría ser cuadrada, ya que después de un número de veces (de realizar la operación de duplicar los lados del polígono) tendremos un polígono inscrito en el círculo, cuyos lados debido a su coincidirá con la circunferencia del círculo. Y puesto que para todo polígono construir un cuadrado equivalente, (...), estamos en disposición de conseguir un igual al círculo. (Ver figura 3).

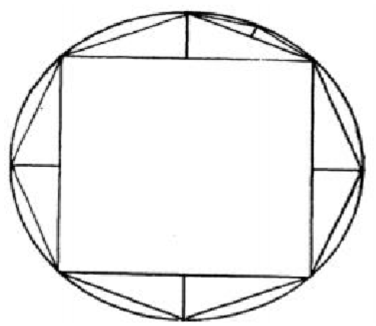


*Figura 3: Ilustración de la aproximación por polinomios de Antifonte. Duque, J., & Maca, O. (2011). Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura de los libros I y II de los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica*

Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3853/4/CB-0449756.pdf

Eudemo, discípulo de Aristóteles, aduce que Antifonte infringe el principio que indica que "las magnitudes son divisibles sin límites", el método de Antifonte nunca alcanzará toda el área de la circunferencia, por lo tanto, los lados del polígono solo se acercarán con tanta aproximación como se quiera, pero nunca alcanzarán u ocuparán el total del área.

Bryson de Heraclea (hacia 400 a.d.C.) fue discípulo de Sócrates, quien no solo utilizó el método de Antifonte, de polígonos inscritos, sino que utilizó polígonos circunscritos, para realizar aproximaciones que le ayudarán a encontrar la solución del problema de la cuadratura del círculo.

El método de Bryson no fue válido ya que no asumió que el espacio bidimensional es continuo, como se muestra en la figura 4. Entre dos cuadrados puede existir otro cuadrado o infinitos cuadrados que no cumplan con la condición establecida de tener igual área, para poder establecer una equivalencia entre el cuadrado y el círculo.

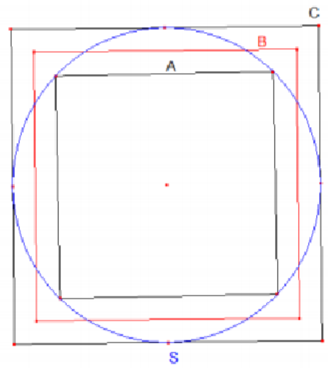



*Figura 4: Método establecido por Bryson. Duque, J., & Maca, O. (2011). Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura de los libros I y II de los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica*

Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3853/4/CB-

Aunque los métodos utilizados por Antifonte y Bryson no lograron resolver el de la cuadratura del círculo, fueron punto de partida para los siguientes matemáticos que intentaron resolver dicho problema. El método de comparación, de aproximación y de inscribir y circunscribir polígonos regulares en la circunferencia fue también un punto de partida importante para realizar una aproximación a la medida del círculo.

#### 1.4.2. Los trabajos de Euclides referentes a la cuadratura.

***Euclides:***

Euclides vivió en Alejandría alrededor del año 300 a.J.C, porque así lo asegura Proclo, un filósofo neoplatónico que vivió en Bizancio cerca de mil años más tarde. Hoy en día Euclides es el referente más importante de la geometría, debido a su obra los Elementos.

En las demostraciones realizadas por Euclides se destaca el uso de proposiciones geométricas que ya habían sido demostradas y aceptadas matemáticamente. Los Elementos, son un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 465 proposiciones distribuidas en 13 libros, en los que se encuentra todo un sistema axiomático utilizado por Euclides y sus antecesores.

Se podría decir que la obra de Euclides está compuesta de dos principios fundamentales: primero, las construcciones geométricas realizadas a través de regla y compás utilizados como base fundamental para el soporte que le da validez a cada una de sus demostraciones; segundo, los métodos de medición utilizados sin el uso de un sistema métrico como el que se tiene en este momento. (Duque & Maca, 2011).

Para darle continuidad y desarrollo al presente trabajo, se enuncian algunas proposiciones utilizadas por Euclides que evidencian métodos utilizados para hallar una solución parcial a la cuadratura.

*Proposiciones del libro I de Euclides, que dan cuenta de la cuadratura de polígonos:*

Uno de los métodos utilizados por Euclides es la aplicación de áreas que se da a partir de dos formas: la primera, es la división de polígonos para transformarlos en otras figuras planas para que a partir del acoplamiento se pueda volver a formar la misma figura u otra diferente; en la segunda, Euclides muestra la igualdad de áreas de ciertos polígonos, es decir, su equivalencia.

Las proposiciones utilizadas por Euclides para dar cuenta de la cuadratura de los polígonos aparecen en el libro *Los Elementos* de la siguiente manera:

Libro I, proposición 4: “Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales tendrán también las respectivas bases iguales, y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales, serán iguales respectivamente” (Euclides, 1991, p.206).

Libro I, proposición 14: “Si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado (de ella), ambas rectas estarán en línea recta” (Euclides, 1991, p.218).

Libro I, proposición 35: “Los paralelogramos que están sobre la misma base y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales entre sí” (Euclides, 1991, p.245).

Para la relación de equivalencia entre el paralelogramo y los triángulos, Euclides establece las siguientes proposiciones:

Libro I, proposición 41: “Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo” (Euclides, 1991, p. 252).

Libro I, proposición 44: “Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado” (Euclides, 1991, p.255).

Libro I, proposición 46: “Trazar un cuadrado a partir de una recta dada” (Euclides, 1991, p.258).

Por último, Euclides realiza la demostración del “teorema de Pitágoras” y la enuncia de la siguiente forma: Libro I, proposición 47: “En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto” (Euclides, 1991, p. 260).

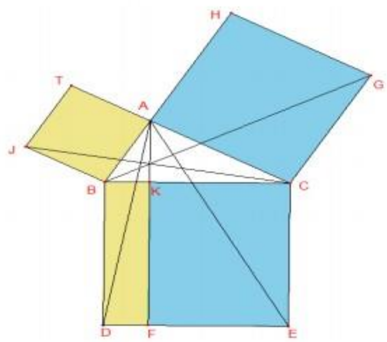



*Figura 5: Método utilizado por Euclides. Duque, J., & Maca, O. (2011). Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura de los libros I y II de los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica*

Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3853/4/CB-0449756.pdf

A continuación, se describe la demostración del método utilizado por Euclides sobre el triángulo rectángulo formado por los lados de figuras cuadradas, siguiendo la gráfica de la figura 5 y con modificación en su nomenclatura para que pueda ser entendida por el lector:

*Consideraciones:*

- Sea ABC el triángulo rectángulo, recto en BAC.
- Se trazan los lados BC del cuadrado BCED, BA del cuadrado BATJ y AC del cuadrado ACGH por proposición I-46.
- Trazar la línea AF ‖ BD
- Trazar las líneas AD y JC

Sea K el punto de corte entre AF y BC (ver figura 5).

*Demostración:*

Demostrar que: BCED = ACGH + ABJT.

- La línea CA está en línea recta con la línea AT y la línea BA está en línea recta con la línea AH por proposición I.14.

- ∢DBC = ∢JBA. Por ser ángulos rectos.

  ∢DBC + ∢ABC = ∢JBA + ∢ABC

  entonces ∢JBC = ∢DBA

- BD = BC por ser lados del mismo cuadrado.
- JB = BA por ser lados del mismo cuadrado.
- ΔBCJ = ΔABD por proposición I-4. (ver figura 6).
- Por tanto AD = JC
- Como BD = KF entonces el paralelogramo BDFK es el doble del ΔABD por proposición I-41.
- El cuadrado ABJT es el doble del Δ JBC por proposición I-41
- Por tanto BDFK = ABJT (Los dobles de cosas iguales son iguales entre sí).

  De manera análoga, trazando AE y BK se demuestra que:

  ΔACE = ΔBCG (ver figura 6)

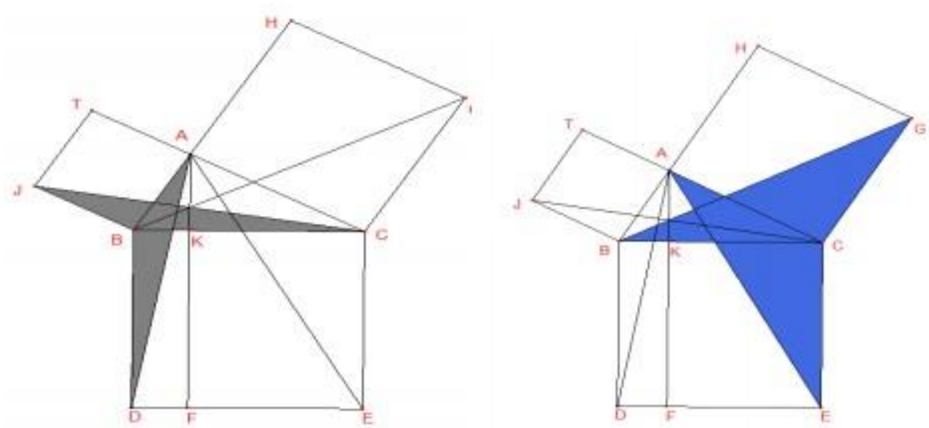



*Figura 6: Método utilizado por Euclides. Duque, J., & Maca, O. (2011). Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura de los libros I y II de los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica*

Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3853/4/CB-

- El paralelogramo KCEF es el doble del ΔACE por proposición I-41

- El cuadrado ACGH es el doble del ΔBCG por proposición I-41

  Por tanto KCEF= ACGH

  Se concluye que:

- BCED = KCEF + BKFD
- BCED = ACGH + ABJT (ver figura 6).

A través de esta demostración y las proposiciones utilizadas, fue como Euclides la congruencia en los triángulos ΔJBC y ΔABD, y es a partir de estos triángulos que se establece la relación entre el cuadrado ABJT y el rectángulo BKDF respectivamente, que son a su vez paralelogramos.

El triángulo ΔJBC sirve para establecer una relación de igualdad en áreas dadas en polígonos de diferente forma, estos polígonos son el cuadrado ABJT y el rectángulo BKDF, ya que cumplen con la condición de ser el doble del área del mismo triángulo, garantizando y dando credibilidad a la equivalencia de las correspondientes áreas.

*Proposiciones del libro II de Euclides, que dan cuenta de la cuadratura de polígonos:*

En el libro II Euclides muestra la solución parcial a la cuadratura de polígonos a través de regla y compás; utilizando la proposición II-14 demuestra que es posible formar un cuadrado igual a una figura rectilínea dada. Esta proposición Euclides la sustenta haciendo uso de otras proposiciones del libro I y gran parte del libro II.

Para dicha demostración, Euclides hace uso de algunas proposiciones auxiliares que serán expuestas a continuación:

Libro I, proposición 46: “Trazar un cuadrado a partir de una recta dada” (Euclides, 1991, p.260).

Libro I, proposición 47: “En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto” (Euclides, 1991, p. 260).

Libro II, proposición 5: “Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad” (Euclides, 1991, p.272).

Libro II, proposición 6: “Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se añade, en línea recta, otra recta, el rectángulo comprendido por la recta entera con la otra recta añadida y la recta añadida junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la recta compuesta por la mitad de la recta añadida” (Euclides, 1991, p.274).

Libro II, proposición 11: “Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante” (Euclides, 1991, p.284).

Libro II, proposición 14: “Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada” (Euclides, 1991, p.288).

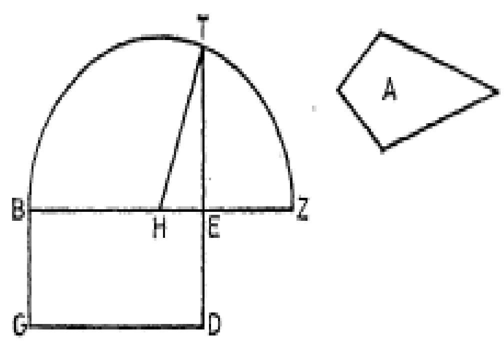



*Figura 7: Construcción de la proposición II-14. Recuperado de: Vera, F. (1970). Científicos Griegos - Tomo I. Madrid, España: Juan Bravo*

A continuación, se describe la demostración del método utilizado por Euclides sobre la cuadratura de polígonos haciendo uso de regla y compás, siguiendo la gráfica de la figura 7 y con modificación en su nomenclatura para que pueda ser entendida por el lector:

*Consideraciones:*

- Sea A la figura rectilínea dada.
- Constrúyase el paralelogramo rectángulo CBED equivalente a la región dada; por proposición I-45.
- Si el lado BE es igual al lado ED se habrá considerado el propósito, porque quedará construido el cuadrado CBED equivalente a la región rectilínea A, y si no, una de las rectas BE o ED será mayor. Sea BE mayor y prolongue hasta el punto Z.
- Sea EZ= ED.
- Sea H el punto medio de BZ.
- Con centro en H y radio igual a cualquiera de las rectas HB o HZ describa el semicírculo BHZ.
- Prolongar el segmento DE hasta el punto T y trazar el segmento HT. (Vera, 1970).

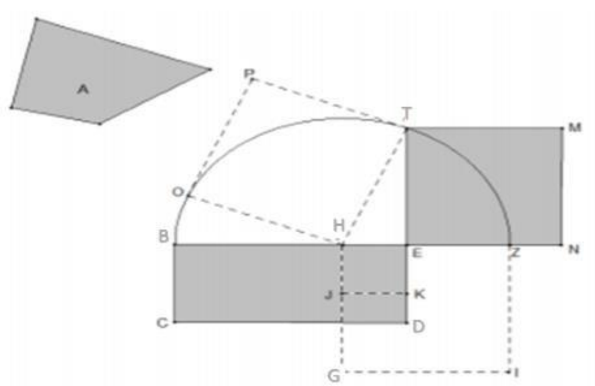



*Figura 8: Construcción de la proposición II-14. Duque, J., & Maca, O. (2011). Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura de los libros I y II de los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica*

. Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3853/4/CB-

- Sea ETMN cuadrado a partir del segmento TE por proposición I-46.
- Sea EHJK cuadrado a partir del segmento HE
- Sea IGHZ cuadrado a partir del segmento HZ
- Sea HTPO cuadrado a partir del segmento HT

*Demostración:*

- Demostrar que ETMN = A
- BCDE + HJKE = HGIZ por proposición II-5.
- HZ = HT por ser radios del mismo semicírculo.
- BCDE + HJKE = HTOP
- HJKE + ETMN = HTOP por proposición I-47.
- BCDE + HJKE = HJKE + ETMN; Se iguala con respecto a HTOP
- BECD = ETMN
- Como BECD = A y BECD = ETMN
- Entonces ETMN = A
- Por tanto, la figura rectilínea A es igual al cuadrado ETMN.

En esta demostración se destaca la habilidad manejada por Euclides para reconocer y hacer congruentes segmentos, a partir de un semicírculo, pues se dice que, si dos segmentos son congruentes, los cuadrados de dichos segmentos también serán congruentes.

La proposición II-14 deja ver la equivalencia entre tres figuras geométricas planas de diferentes formas, demostrando que el área de una figura dada es equivalente con el área del rectángulo y este a su vez es equivalente también con el área del cuadrado, de esta manera las tres figuras son equivalentes y se puede construir un cuadrado que sea equivalente a una figura rectilínea.

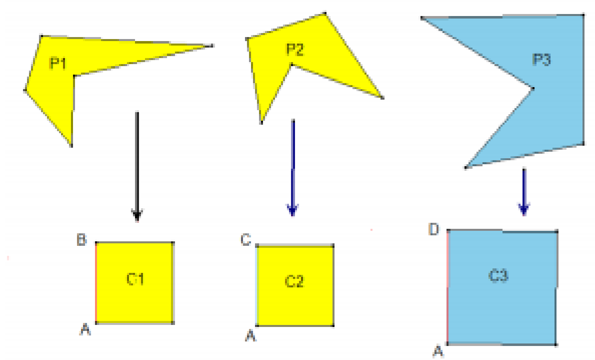



*Figura 9: Propósito de la cuadratura de polígonos en Euclides. Duque, J., & Maca, O. (2011). Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura de los libros I y II de los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica*

Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3853/4/CB-

El procedimiento diseñado por Euclides para convertir los polígonos en cuadrados, permitió que se pudiera dar una solución parcial a la medida de superficies, ya que para aquella época estaba implícita la necesidad de comparar superficies (Ver figura 9).

### 1.4.3. El método utilizado por Arquímedes para demostrar la cuadratura de una parábola:

***Arquímedes:***

**Arquímedes (287-212 a. J. C.).** Son muy escasos los datos ciertos sobre la biografía de Arquímedes. Se sabe que nació en Siracusa, Sicilia y que allí murió en el 212 a.J.C., a la caída de la ciudad en manos de Marcelo, cónsul romano. Entre los textos de Arquímedes se destacan los siguientes: *sobre la esfera y el cilindro, sobre conoides y esferoides, sobre las espirales, medida del círculo, arenario, del equilibrio de los planos o de sus centros de gravedad, de la cuadratura de la parábola, sobre los cuerpos flotantes y el método.* (Vera, 1970).

En concordancia con el presente trabajo se hablará sobre el método que utilizó Arquímedes para hallar la cuadratura de la parábola. De la Torre (1997), resume la definición de la cuadratura de la parábola de la siguiente manera: “Arquímedes demuestra en el texto de la cuadratura de la parábola, que el área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de un triángulo de la misma base y la misma altura que el segmento". (p.113). Y también hace referencia a la importancia de dicho descubrimiento.

> El descubrimiento de Arquímedes de la cuadratura de la parábola es el primer caso que se registra en la historia de la cuadratura de una figura mixtilínea, es decir, constituida por arcos curvilíneos y segmentos de recta. Previamente a Arquímedes, Hipócrates había obtenido la cuadratura de algunas lúnulas, pero estás son figuras puramente curvilíneas y están formadas por las intersecciones de varios círculos (De la Torre, 1997, p.115).

Para la solución de dicha demostración Arquímedes realizó dos demostraciones diferentes, utilizando en ambas el método de exhaución. "El método de exhaución, era el método usado por los griegos para demostrar la igualdad de dos áreas" (De la Torre, 1997, p.113).

La primera es la demostración mecánica, que apela a la teoría de la palanca y de los centros de gravedad, desarrollado por Arquímedes en su texto "*El equilibrio de los planos o de sus centros de gravedad*".

La segunda es la demostración geométrica, en la que se pretende encontrar la suma de los términos de una progresión geométrica.

*Demostración mecánica:*

Las proposiciones utilizadas por Arquímedes para hallar la cuadratura de la parábola por un método mecánico fueron las siguientes:

Proposición 2: "Dada la parábola ABG, la recta BD paralela al diámetro, o el mismo diámetro (figura 10), la AG paralela a la tangente en B y la GE tangente en B, las rectas BD y BE son iguales" (Vera, 1970, p.223).

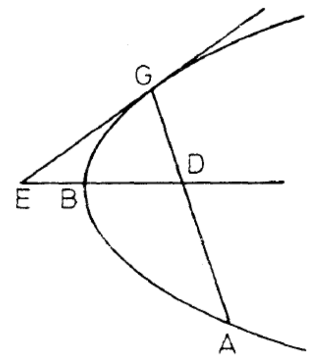



*Figura 10: Propósito de la cuadratura de polígonos en Euclides. Duque, J., & Maca, O. (2011). Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura de los libros I y II de los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica*

Proposición 16: “Dado un segmento parabólico BTG y trazando por el punto B la paralela al diámetro y por el G la tangente a la parábola, si el área Z es la tercera parte de la del triángulo GBD, digo que la del segmento dado es igual a Z” (Vera, 1970, p.231).

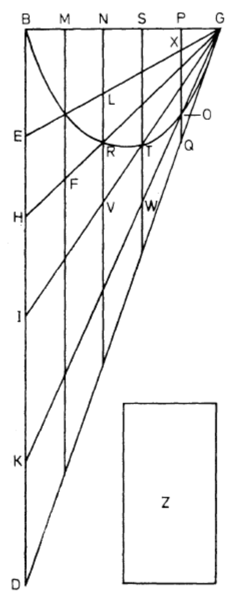



*Figura 11: Proposición 16 de Arquímedes. Recuperado de: Vera, F. (1970). Científicos Griegos - Tomo II. Madrid, España: Juan Bravo*

Proposición 47: “El área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y la misma altura que el segmento” (Vera, 1970, p.233).

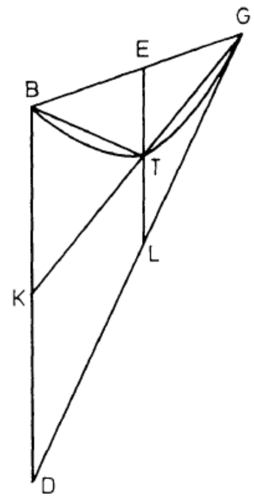



*Figura 12: Cuadratura de la parábola, método mecánico. Recuperado de: Vera, F. (1970). Científicos Griegos - Tomo II. Madrid, España: Juan Bravo*

.

Las siguientes demostraciones han sido extraídas del libro de Vera, F. (1970) y con algunas modificaciones en su nomenclatura para que puedan ser comprendidas por el lector.

*Demostración:*

- Sea BG la base del segmento y T su vértice.
- ΔBGT es el triángulo inscrito que tiene la misma base del segmento y la misma altura.
- Dado que T es el vértice del segmento, el diámetro trazado por T biseca al segmento BG, por ser paralelo a la tangente T por proposición 2.
- Sea E el punto de bisección.
- Se traza la tangente a la curva en G que corta al diámetro EL en T y a la paralela a él trazada por B en L y en D, respectivamente, (ver figura 11).
- TE=TL por proposición 2.
- EL=2TE por ser paralelas.
- BD= 2EL.
- Por tanto, BD = 4EL
- El triángulo ΔBDT =4ΔBGT
- Por proposición 16, el área del segmento parabólico es S= 1/3ΔBGT
- S=4/3ΔBGT.

*Demostración geométrica:*

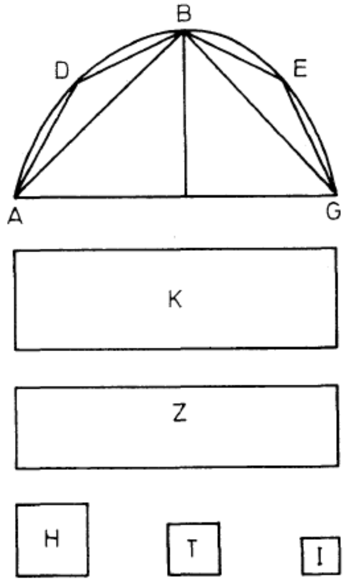



*Figura 13: Cuadratura de la parábola, método geométrico. Recuperado de: Vera, F. (1970). Científicos Griegos - Tomo II. Madrid, España: Juan Bravo*

Las proposiciones utilizadas por Arquímedes para hallar la cuadratura de la parábola por un método geométrico fueron las siguientes:

Proposición 21: "Si en un segmento parabólico se inscribe un triángulo de la misma base y la misma altura y en cada segmento lateral que resulta se inscribe otro triángulo de la misma base y altura que él, el primer triángulo es ocho veces mayor que cada uno de los otros" (Vera, 1970, p.235).

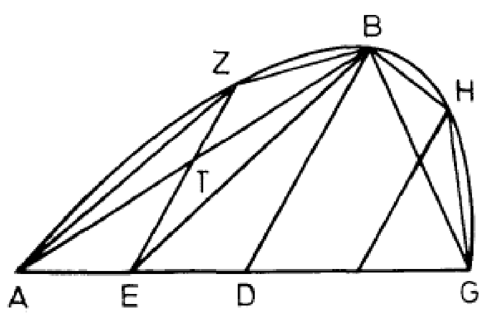



*Figura 14: Proposición 21 de Arquímedes. Recuperado de: Vera, F. (1970). Científicos Griegos - Tomo II. Madrid, España: Juan Bravo*

Proposición 22: “Dado un número cualquiera de áreas tales que, colocadas una a continuación de otras, cada una sea cuádruple de la siguiente y la mayor igual a la de un triángulo inscrito en un segmento parabólico de la misma base y de la misma altura, la suma de todas las áreas es menos que la del segmento” (Vera, 1970, p.236).

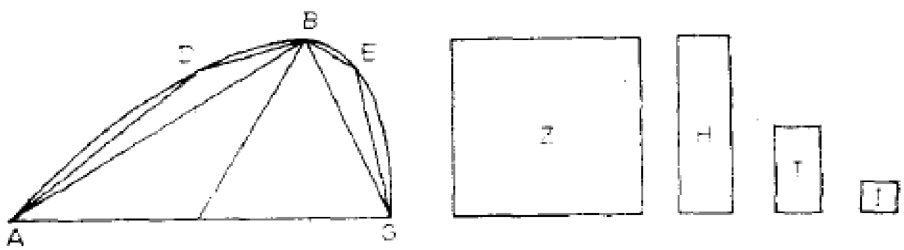



*Figura 15: Proposición 22 de Arquímedes. Recuperado de: Vera, F. (1970). Científicos Griegos - Tomo II. Madrid, España: Juan Bravo*

Proposición 23: “Dado un número cualquiera de área como antes, su suma añadida al tercio de la menor es igual al cuádruple del tercio de la mayor” (Vera, 1970, p.236).

Proposición 24: “El área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento” (Vera, 1970, p.237).

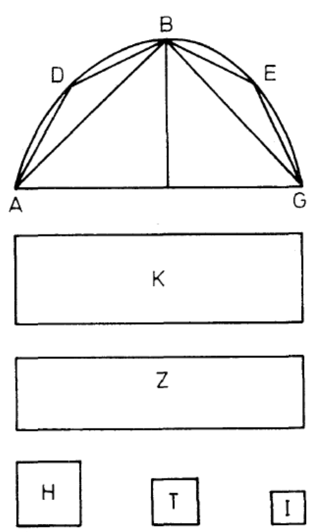



*Figura 16: Proposición 24 de Arquímedes. Recuperado de: Vera, F. (1970). Científicos Griegos - Tomo II. Madrid, España: Juan Bravo*

*Consideraciones:*

- Sean ADBEG un segmento parabólico en el que está inscrito el triángulo ΔABG de la misma base y de la misma altura.
- K un área igual al cuádruple del tercio de la del triángulo ΔABG.

*Demostración:*

Demostrar que K es igual al área del segmento ADBEG.

1. Suponer que el segmento ADBEG es mayor que K.

- Inscribir en los segmentos laterales los triángulos ΔADB y ΔBEG por proposición 21.
- Inscribir en los segmentos restantes otros triángulos que tengan la misma base y la misma altura que estos segmentos, y continuando así, la suma de los segmentos restantes llegará a ser menor que el exceso de segmentos ADBEG sobre el área. (ver figura 24).
- Luego el polígono inscrito será mayor que K, lo cual es imposible porque siendo el triángulo ΔABG cuádruple de la suma de los triángulos ΔADB y ΔBEG, la suma de estos cuádruples de los inscritos en los segmentos siguientes y las áreas ordenadas es de modo que cada una es cuádruple de la que sigue, resultando que la suma de todas estas áreas es menos que el cuádruple del tercio de la mayor de dichas áreas, por proposición 23.
- Como K es igual al cuádruple del tercio de esta área, el segmento ADBEG no es mayor que K.

  Suponer que:
- el segmento ADBEG es menor que K.
- El triángulo ΔABG es igual que Z.

- El área de H es el cuarto de la Z.
- La T el cuarto de la H y así sucesivamente hasta que la última área sea menor que el exceso de la K sobre el segmento.
- Si la última área es I, la suma de las demás áreas Z, H, T e I juntamente con el tercio de I es el cuádruple del tercio de la Z, por proposición 23.
- Como K es igual al cuádruple de la tercera parte de la Z, es K igual a la suma de Z, H, T e I juntamente con el tercio de I.
- El exceso de K sobre esta suma es menor que I y el de K sobre el segmento es menor que I.
- Luego la suma de las áreas Z, H, T e I es mayor que el segmento.
- Es imposible, porque ya se ha demostrado que, si se tiene un número cualquiera de áreas colocadas de modo que cada una sea el cuádruple de la que le sigue inmediatamente, siendo la mayor igual a la del triángulo inscrito en el segmento, la suma de estas áreas es menor que el segmento, por proposición 22.
- Luego el segmento ADBEG no es mayor, es igual, por ser K el cuádruple del tercio del triángulo ABG.
- Entonces el segmento ADBEG equivale a cuatro veces la tercera parte del triángulo $\Delta ABG$.

Éstas han sido las demostraciones realizadas por Arquímedes, en las cuales requirió de varias proposiciones para hallar la cuadratura de la parábola, utilizando el mayor rigor geométrico de la época.

Este rastreo bibliográfico ha sido diseñado con el fin de que el estudiante pueda contar con la génesis y evolución de la noción de cuadratura para el área de figuras geométricas, y de esta manera pueda mejorar su razonamiento mediante un primer acercamiento por medio de la entrevista de carácter socrático aplicada y analizada a la luz del modelo de van Hiele.

## 1.5 Objetivos de investigación:

En este segmento desarrollaremos los objetivos a seguir en la realización de nuestro trabajo de grado.

### 1.5.1 Objetivo General.

Describir la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas en los estudiantes de un curso de Cálculo en Varias Variables de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia.

### 1.5.2 Objetivos Específicos.

- Diseñar descriptores para la comprensión de la noción de cuadratura en el marco del modelo de van Hiele.
- Rastrear la evolución histórica- epistemológica de las nociones subyacentes a la noción de cuadratura.

# Capítulo II: Marco Referencial

En el capítulo II se abordará cuatro subcapítulos donde se evidenciará un desarrollo de los marcos contextual, legal, conceptual y teórico. En estos se sustentará el porqué de la institución escogida para realizar el estudio de la investigación, se definirán los términos más utilizados en el trabajo y la teoría que dará la base a la investigación.

## 2.1 Marco Contextual:

### 2.1.1 Reglamento Estudiantil de Pregrado.

"ARTÍCULO 1. La Universidad de Antioquia como institución de servicio público, en cumplimiento de su función social, será siempre un centro de cultura y de ciencia que imparta a los estudiantes formación integral y los capacite para el ejercicio profesional en las diferentes áreas del quehacer humano" (Universidad de Antioquia, 2018).

La universidad cuenta con varias Escuelas y Facultades. Teniendo en cuenta el enfoque de esta investigación se decidió aplicarla en la Facultad de Educación.

"la Facultad de Educación está ubicada en la Ciudad Universitaria (sede principal de la Universidad de Antioquia) la cual se encuentra en el barrio Sevilla en la zona nororiental de la ciudad de Medellín, Colombia" (Universidad de Antioquia, 2018). Se toma la decisión de aplicar la investigación en esta facultad ya que esta cuenta con el programa de Licenciatura en Matemáticas y Física, en el que se da un tratamiento para la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos y geométricos a trabajar, y un tratamiento al componente pedagógico que permitió evidenciar posibles vacíos conceptuales que se gestan en el colegio y perduran hasta la educación superior. Se pretende que al aplicar esta investigación se rompa con lo dicho, ya que, si los futuros maestros tienen claridad en los conceptos, se posibilitará una enseñanza de la misma forma a sus estudiantes. Se considera importante destacar que el programa de Licenciatura en Matemáticas y Física "tiene como misión la formación integral de maestros de matemáticas y física, con una sólida fundamentación disciplinar y meta disciplinar, sensibles y conocedores de los problemas de los contextos a los cuales dirige su quehacer docente" (Universidad de Antioquia, 2018). Las actividades se realizarán en el curso de Cálculo en Varias Variables del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física, el cual se encuentra ubicado en los primeros semestres de la carrera, pero cuenta con una serie de prerrequisitos que aseguran que el estudiante matriculado posea un conocimiento amplio en conceptos matemáticos y geométricos.

## 2.2 Marco Legal:

### 2.2.1 Ley 115 de 1994, artículo, 22 numeral c.

|La Ley General de Educación 115 de 1994 destaca que es necesario tener en cuenta desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana". (Ministerio de Educación Nacional-MEN, 1994).

### 2.2.2 Estándar nacional.

- El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas.
- El pensamiento espacial y los sistemas geométricos. (Ministerio de Educación Nacional-MEN, 2003).

### 2.2.3 Lineamientos curriculares nacionales.

- Desarrollo del pensamiento geométrico (Ministerio de Educación Nacional-MEN, 1998).

Contextualizando en relación al objeto de estudio, en los procesos de enseñanza se debe tener presente el desarrollo de las capacidades motrices y de aprendizaje de los estudiantes, y en este caso el de los sistemas geométricos y la interpretación de los conceptos de área de las figuras geométricas a través de estrategias didácticas no convencionales y desde las fuentes teóricas que dejaron los matemáticos de la antigüedad.

## 2.3 Marco Teórico:

Se desarrollarán dos teorías, la primera la del modelo de van Hiele, y la segunda, la de la entrevista Socrática, que son las que fueron implementadas en este trabajo de investigación.

### 2.3.1 Algunos antecedentes acerca de la comprensión:

La comprensión ha sido un tema que a lo largo de la historia ha tenido diferentes interpretaciones. Brownell & Sims (como se citó en Meel, 2003) afirman que la comprensión matemática es un concepto difícil de definir y de explicar (p.5).

Antes de 1978, la noción que se tenía sobre comprensión era la misma que se tenía sobre conocimiento, y fue hasta que Skemp en ese mismo año, realizó una reimpresión del Maestro de la Aritmética, que dio pie para que se hiciera una distinción entre ambos conceptos y a partir de ese momento empezó a tomar fuerza en las comunidades Educativas Matemáticas de Estados Unidos (Meel, 2003).

Meel (2003) recopila algunas definiciones dadas antes de 1978 por algunos autores:

- Brownell y Sims describen la comprensión como (a) la capacidad de actuar, sentir o pensar de manera inteligente respecto a una situación; (b) varía respecto al grado de seguridad y finalización; (c) varía respecto a la situación problemática que se presenta; (d) necesita conectar las experiencias del mundo real y los símbolos inherentes; (e) necesita verbalizaciones, a pesar de que puedan contener significados menores; (f) desarrolla varias experiencias, en vez de la repetición de las mismas; (g) está influida por los métodos empleados por parte del maestro; y (h) es inferida por la observación de las acciones y las verbalizaciones.

- Polya (1982) por su parte, identificó la comprensión como un elemento complementario a la resolución de problemas, según se indica en la siguiente cita: Se debe tratar de comprender todo; los hechos aislados mediante su recopilación con los hechos relacionados, los descubrimientos recientes a través de sus conexiones con lo ya asimilado, lo desconocido por analogía con lo acostumbrado, los resultados especiales mediante la generalización, los resultados generales por medio de la especialización adecuada, las situaciones complejas mediante la separación de las mismas en sus partes constituyentes y los detalles mediante la integración de los mismos dentro de una imagen total. Polya identificó cuatro niveles de comprensión como una regla matemática: (a) "mecánica"- un método memorizado que puede aplicarse correctamente, (b) "inductivo"- la aceptación de que las exploraciones de casos simples se extienden a casos complejos, (c) "racional"- la aceptación de la prueba de la regla, según se demuestra por alguien más, e (d) "intuitiva"- la convicción personal como una verdad más allá de cualquier duda (p.4).

Meel (2003) también da algunas definiciones referentes a la comprensión después de 1978. Se destaca Skemp, quien fue el encargado de romper con las definiciones que se tenía sobre dicho concepto:

> Skemp (1976) clasificó la comprensión relacional como el saber qué hacer y el por qué se debe hacer, y la comprensión instrumental como tener reglas sin una razón. La

> comprensión instrumental tiende a permitir un recuerdo fácil para promover recompensas más tangibles e inmediatas y para proporcionar un acceso rápido a la respuesta. Por otro lado, la comprensión relacional proporciona vías para una transferencia más eficiente, para la extracción de información desde la memoria del estudiante, para lograr que esa comprensión sea una meta por sí misma y para promover el crecimiento de la comprensión (p.5).

Dado que el presente trabajo de investigación no se centra en el concepto de comprensión, es preciso tener un panorama más amplio sobre el concepto ya que esto propiciará un mejor proceso frente al análisis, pues como parte fundamental del trabajo, es el marco teórico, que está basado en la comprensión.

### 2.3.2 ¿Por qué orientar el presente estudio bajo el modelo educativo de van Hiele?

El modelo de van Hiele como propuesta educativa para el estudio y enseñanza del pensamiento en geometría, aporta algunas ideas que ayudan a realizar conexión con la pregunta de investigación y las dificultades presentes en un grupo de estudiantes. La estructura del modelo, permite al investigador un mejor análisis de la comprensión de un concepto que puede tener el estudiante y facilita la ubicación en un nivel de acuerdo a la comprensión que tenga de un concepto, lo que da pie para encontrar las dificultades y sus posibles soluciones para seguir en la construcción de un conocimiento claro y concreto.

### 2.3.3 ¿Qué es un modelo?

Se podría definir un modelo como una herramienta para entender mejor un evento o un fenómeno, pero en nuestro caso, lo que nos interesa es entender que es un modelo educativo y modelo matemático ya que este trabajo se encuentra enmarcado bajo los términos de la comprensión de conceptos matemáticos presentes en la educación superior.

Las herramientas físicas que permiten representar estructuras matemáticas, químicas, físicas, entre otras, como lo son, un conjunto de esferas de colores para la representación de las estructuras de los átomos, y los ábacos o calculadoras para la representación de operaciones aritméticas y sus propiedades, pueden ser vistos como modelos de aprendizaje con fines educativos, ya que se conciben como una representación simplificada de un determinado fenómeno real. De los modelos educativos, se dice que son aquellos que tienen que ver con el desarrollo intelectual, la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas, es por ello que los ejemplos de las representaciones ya mencionadas permiten realizar un paralelismo total entre las formas de construir o aplicar los modelos de unos tipos y de otros.

Un modelo matemático tiene como objetivo describir matemáticamente una situación del mundo real que se presenta con la suficiente frecuencia como para que merezca la pena estudiarla y tratar de comprenderla.

Un ejemplo, son aquellos fenómenos físicos que pueden ser representados por estructuras creadas a partir de elementos presentes en la cotidianidad y que a su vez representan o pueden ser analizadas por un modelo matemático (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Los autores muestran una definición de modelo bajo los términos de la educación y las matemáticas, que permiten entender la definición de modelo. En este trabajo es importante tener claro este concepto, ya que a través del modelo educativo de van Hiele se pretende describir cómo se da la comprensión de la noción de cuadratura a través de áreas de figuras geométricas planas.

#### 2.3.4 Breve reseña histórica del modelo educativo de van Hiele.

Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, se dieron a la tarea de evidenciar que el aprendizaje no solo era una acumulación de contenidos, sino que los maestros debían ocuparse por la comprensión de estos.

Así que, bajo los estudios de Piaget, Langeveld y Freudenthal, Pierre van Hiele formuló un sistema de niveles de pensamiento en geometría. Él evidenció en algunas entrevistas de Piaget que existe un nivel de pensamiento superior que requiere de un conocimiento del vocabulario o propiedades fuera del alcance de los estudiantes (van Hiele, 1986).

Freudenthal explica el nivel de pensamiento superior de la siguiente manera "En tanto que el niño no sea capaz de reflexionar sobre su propia actividad, el nivel alto se mantiene inaccesible. El nivel alto de operación puede entonces pensarse como un algoritmo, aunque con una consecuencia de poca duración. Esto ha sido probado debido al fracaso en 1a enseñanza de fracciones" (Freudenthal, 1973, p.78). Cada que un estudiante avanza de nivel se aclaran y se convierten en más cotidianos los conocimientos del nivel anterior, generando que el grado de complejidad en la comprensión y dominio sea cada vez mayor, pero si no se genera un estudio continuo y consecuente con los niveles anteriores se perderá la intención y se hará cada vez más difícil de alcanzar el último nivel, que se ha catalogado como un nivel de pensamiento superior. Una regla importante que sigue este modelo, es que no se debe avanzar de nivel sin haber comprendido el anterior al 100%.

> "En 1957 los van Hiele, presentaron sus respectivas memorias doctorales en la Universidad de Utrecht. Sus disertaciones las acompañaron con el desarrollo de una estructura y el experimento con niveles de pensamiento, con el propósito de ayudar a los estudiantes a desarrollar la percepción en la geometría. P. van Hiele formuló el esquema y los principios sicológicos y D. van Hiele enfocó sus experimentos didácticos con el

propósito de elevar los niveles de pensamiento de los estudiantes" (Jurado y Londoño, 2005, p.11).

## 2.4 Descripción del Modelo.

El modelo de van Hiele se compone de tres elementos principales:

- Niveles de razonamiento, que son jerárquicos y es en los que se ubica a la persona de acuerdo a su comprensión.
- Fases de aprendizaje, son los procesos que conducen a un estudiante de un nivel a otro.
- Percepción -insight, que es el interés original y el tema de disertación.

Se puede enunciar el modelo educativo de van Hiele de la siguiente forma: Es un modelo en el que existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes, donde ningún nivel de razonamiento es independiente de otro y no es posible saltarse ninguno, el individuo debe pasar y dominar un nivel para subir al siguiente, y abarca dos aspectos básicos:

- Descriptivo: mediante este se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar su progreso.
- Instructivo: marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran.

### 2.4.1 Nomenclatura del Modelo.

El modelo de van Hiele está conformado por cinco niveles, aunque no se ha establecido una numeración única, varía según los autores; algunos los han numerado de 0 a 4 y otros de 1 a 5. Entre ellos se encuentran:

- En el libro Structure and Insight A Theory of Mathematics Education de Pierre M. van Hiele, la nomenclatura que se describe es la

  Primer nivel: nivel visual.

Segundo nivel: el descriptivo.

Tercer nivel: el nivel teórico, con relaciones lógicas, geometría generada según Euclides.

Cuarto nivel: lógica formal, un estudio de las leyes de la lógica.

Quinto nivel: la naturaleza de las leyes lógicas

(Pierren M, 1986, p. 53).

- Jaime y Gutiérrez utilizan la siguiente

  Nivel 1: Reconocimiento.

  Nivel 2: De análisis.

  Nivel 3: De clasificación.

  Nivel 4: Deducción formal.

  (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 9).

- J. Llorens utiliza la siguiente nomenclatura, la cual será utilizada en el presente

  Nivel 0: pre descriptivo.

  Nivel I: de reconocimiento visual.

  Nivel II: de análisis.

  Nivel III: de clasificación, de relación.

  Nivel IV: de deducción formal.

  (Llorens, 1994, p. 84).

### 2.4.2 Descriptores de los niveles:

Llamaremos descriptores en el modelo de van Hiele a las características que permiten reconocer el nivel en que se encuentra cada estudiante.

**Nivel 0, pre descriptivo:**

- Los estudiantes reconocen figuras geométricas en forma general y pueden atribuirles atributos irrelevantes.
- Ven las figuras geométricas como objetos individuales, no generalizan las características que reconocen de una figura de la misma clase.
- Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras geométricas y notan sus diferencias y semejanzas solo por su apariencia en forma muy general.
- Muchas veces las descripciones de las figuras geométricas las relacionan con otras no geométricas.

**Nivel I, de reconocimiento visual:**

- Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándose a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una ventana, etc.). No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
- Perciben las propiedades de las figuras geométricas y las enuncian de manera
- No relacionan unas propiedades con

**Nivel II, de análisis**

- Se va adquiriendo la capacidad de un razonamiento
- Reconocen y deducen propiedades de
- Los estudiantes no comprenden la estructura

**Nivel III, de clasificación, de relación**

- Entienden y realizan razonamientos lógicos
- Comprenden la estructura
- Los estudiantes entienden que se puede llegar al mismo resultado por distintos métodos de deducción.

**Nivel IV, deducción formal**

- Analizan diferentes sistemas deductivos y los relacionan.
- Conocen postulados, axiomas y propiedades del sistema

Los van Hiele aclaran en su libro Structure and Insight a Theory of Mathematics Education, que este último nivel es de un grado mayor de abstracción y son muy pocas las personas que logran alcanzarlo, por eso en este trabajo se tendrá en cuenta como referente teórico, pero no se centra en el estudio de sus descriptores.

### 2.4.3 Fases del modelo

- En el libro Structure and Insight A Theory of Mathematics Education de Pierre M. van Hiele, describen las fases de la siguiente manera:

**Fase 1:** Fase de la información, los alumnos se familiarizan con el dominio de trabajo.

**Fase 2:** Fase de orientación guiada, se guían por pruebas (dadas por el profesor, o hechas por ellos mismos) con diferentes relaciones de la red que debe formarse.

**Fase 3:** Fase de explicitación, toman conciencia del lenguaje técnico que acompaña al tema.

**Fase 4:** Fase de orientación libre, aprenden por tareas generales a encontrar su propio camino en la red de relaciones.

**Fase 5:** Fase de la integración, crean una visión general de todo lo que han aprendido sobre el tema, de la red de relaciones recién formada que ahora tienen a su disposición

- Jaime y Gutiérrez (1990) describen las fases de la siguiente

**1. Información:**

- El profesor informa sobre el campo de estudio que van a trabajar.
- Se adquieren conocimientos básicos para poder empezar el trabajo.

- El profesor averigua los conocimientos previos de los estudiantes.
- Se descubre el nivel en el que se encuentra el estudiante.

**2. Orientación dirigida:**

- Los estudiantes exploran el informe.
- Los talleres son dirigidos y enfocados para lograr el objetivo principal.

**3. Explicitación:**

- Los estudiantes intercambian sus experiencias.
- Tiene como misión que los estudiantes aprendan un nuevo vocabulario.
- Conclusión y perfeccionamiento.

**4. Orientación libre:**

- Planteamiento de problemas.
- Combinación de los nuevos conceptos, propiedades y formas de razonamiento.

**5. Integración:**

- Visión general de los contenidos.
- Relacionan el campo trabajado con otros.

#### 2.4.4 Percepción -insight.

"van Hiele afirma que una persona muestra insight si:

- Es capaz de actuar en una situación no familiar.
- Actúa competentemente (correcta y adecuadamente) en los hechos sucedidos en una situación.
- Aplica intencionalmente (deliberadamente y conscientemente) un método que resuelve la situación.
- Para tener insight, los estudiantes entienden qué están haciendo, por qué lo están haciendo

y cuándo lo hacen.

- Los estudiantes son capaces de aplicar sus conocimientos para resolver problemas." (Londoño y jurado, 2005, p.23).

### 2.4.5 Caracterización del modelo.

Según Usiskin, el modelo de van Hiele posee unos niveles, pero cada nivel necesita de unos descriptores y estos tienen unas propiedades específicas; usando la nomenclatura de Usiskin, se tiene:

**Propiedad 1: (Secuencialidad fija).** Cada estudiante debe progresar a través de los niveles en una secuencialidad fija, esto es, "Un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele sin haber superado el nivel n-1".

**Propiedad 2: (Adyacencia).** El objeto de percepción del nivel n-1 se convierte en el objeto de pensamiento del nivel n.

**Propiedad 3: (Distinción).** El nivel n requiere de una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel n-1, esto es, la percepción de una nueva estructura.

**Propiedad 4: (Separación).** Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático.

**Propiedad 5: (Cada nivel tiene su lenguaje).** Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles hasta el punto de que cada nivel tiene un tipo de lenguaje específico, de modo que las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a cada uno de los niveles de van Hiele, no sólo se reflejan en las formas de resolver problemas, sino que sobre todo, se manifiestan en la forma de expresarse y en el significado que se da o se puede dar al vocabulario específico, como es el caso de la palabra demostrar, por ejemplo. Esta palabra tiene significados típicamente diferentes según el nivel de razonamiento.

**Propiedad 6: (Consecución).** El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual. Algunos investigadores como Hoffer (1983) y Fuys, Geddes, & Tischler (1985), han desglosado cada nivel de van Hiele en varias habilidades de razonamiento, de forma que sólo se puede considerar adquirido un nivel cuando se manifiestan cada una de sus cualidades.

## 2.5 ¿Que es una entrevista?

Según Jurado & Londoño (2005) se ha mencionado que la entrevista está concebida como una red de relaciones, permitiendo que detrás de cada pregunta se esconda una intencionalidad que sólo el entrevistador conoce y que a medida que se avanza en su aplicación, el entrevistado entreteja, relacione, razone, reflexione e infiere a partir de su red de relaciones (p.92).

En el diseño de la entrevista utilizada en el presente trabajo, se han dejado implícitos algunos conceptos importantes para el desarrollo de la investigación, y otros se han definido con la intención de que el entrevistado pueda relacionarlos con los conceptos principales de dicha entrevista. Se espera que el entrevistado logre relacionarlos y pueda responder de manera acertada la totalidad de las preguntas.

### 2.5.1 Entrevista de carácter socrático enmarcada en el modelo educativo de van Hiele:

El artículo de revista "Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele" de Jaramillo y Campillo (2001), resaltan ciertas tesis que han probado que la entrevista socrática y el modelo de van Hiele han permitido descubrir y realizar descripciones de razonamientos y construcciones lógicas que hace un alumno frente a un concepto matemático.

La entrevista socrática se consolida como un instrumento que permite al estudiante obtener y crear conocimientos claros bajo razonamientos bien fundamentados y, a su vez, permite al docente o entrevistador observar y evaluar el avance sobre su razonamiento, posibilitando una evaluación en forma gradual. Esta afirmación está muy de la mano con lo que menciona De la Torre (2003), en cuanto que el aprendiz participa activamente en su proceso, que finaliza cuando este inventa o descubre la respuesta pertinente a una pregunta bien elaborada, manifestando, además, su nivel de pensamiento con respecto al concepto estudiado.

La entrevista socrática surge como una idea del diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón, en el Capítulo *Menón, Diálogos de Platón* (Platón, 1996), acerca de encontrar el cuadrado de área doble, de otro cuadrado dado, lo cual ha servido como fundamento para la creación de una entrevista de carácter socrático, vista como una herramienta estratégica para la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas planas en los estudiantes de un curso de Cálculo en Varias Variables de la Universidad de Antioquia.

La entrevista se desarrollará mediante preguntas orientadoras hacia el concepto, permitiendo que el entrevistado evolucione en su nivel de comprensión sobre el tema, y el entrevistador pueda realizar una descripción de esta evolución.

Según Londoño y Jurado (2005), un diálogo de carácter socrático cumple con las siguientes diez características:

**Intencionalidad de la entrevista:**

Su principal característica es la claridad en los objetivos por parte del entrevistador, pues este debe tener muy claros cuales son los objetivos que el entrevistado debe lograr, para así poder ubicar en qué nivel de razonamiento se encuentra. En este sentido, el entrevistado debe demostrar que puede dar respuestas espontáneas y claras, que surgen de un razonamiento crítico y reflexivo, en torno al concepto estudiando.

**El lenguaje:**

El lenguaje manejado en la entrevista debe ser acorde con el vocabulario del estudiante, que las preguntas alienten al estudiante a dar respuestas desde su cotidianidad, que éstas surjan de manera espontánea sin la utilización del tecnicismo y que el diálogo tenga un desarrollo natural para que se pueda crear un ambiente de confianza entre ambos participantes. Sin embargo, el uso de las palabras frente al desarrollo de la entrevista, juega un papel determinante para ubicar el nivel de razonamiento del estudiante, pues a medida que se va avanzando se debe ir mejorando el discurso, este debe ser más preciso y refinado.

**Los conceptos básicos:**

Las preguntas iniciales de la entrevista tienen como objetivo indicar los conocimientos previos que posee el estudiante, ya que estos son indispensables para que se pueda realizar una mejor ubicación del nivel. Es decir, las preguntas iniciales deben permitir saber si el estudiante se encuentra o supera el nivel 0 de razonamiento (Pre descriptivo: El mero reconocimiento de los objetos de estudio).

**Las experiencias previas del entrevistado:**

Las preguntas de la entrevista deben ser intencionadas a la búsqueda de lo que se quiere conocer, que lleven al estudiante a reflexionar y argumentar desde lo que sabe o cree saber desde sus experiencias o conocimientos previos. Este tipo de preguntas pueden ser acerca de situaciones, imágenes, ejemplos de la cotidianidad, experiencias vividas, entre otras.

**Diálogo inquisitivo:**

El diálogo inquisitivo es una interacción entre entrevistador y entrevistado, que le permite a este último, a través de un pensamiento discursivo, descubrir, encontrar soluciones y comprender el concepto objeto de estudio, ampliando su red de relaciones. El entrevistador no da conocimientos nuevos al entrevistado, lo guía mediante la indagación y el razonamiento.

**Pensamiento discursivo:**

En la entrevista se hace necesario realizar una misma pregunta varias veces y en diferentes instantes. En un primer momento se hace para que el estudiante informe lo que sabe al respecto. En un segundo o posterior momento se hace para que el estudiante tenga la posibilidad de mejorar su respuesta o modificarla ya que pudo haber errado en la primera respuesta.

**El aporte de información:**

Algunas de las preguntas de la entrevista brindan la información necesaria para que el estudiante pueda llegar a la comprensión del concepto, con base en sus reflexiones y razonamientos. Estos aportes pueden aparecer como definición de conceptos, ideas o relaciones entre varios conceptos.

**La problematización con las ideas:**

Hay preguntas que logran que el entrevistado se sienta cómodo con la pregunta y a su vez enriquezca su propio saber, pero también contiene otras que llevan al entrevistado a que explique la carencia o dificultades que posee. En este caso el entrevistado presenta un conflicto interno con lo que cree saber y lo que verdaderamente sabe; en este instante el entrevistado puede cambiar la estructura de su pensamiento y necesitar de la ayuda del entrevistador para crear un nuevo conocimiento o modificar el que ya tenía.

**El paso por los tres momentos:**

Durante la entrevista el estudiante pasa por tres momentos: Creer saber la respuesta a la pregunta, luego, a través de las mismas preguntas darse cuenta de que no sabe (problematizándolo) y por último, al estar en contradicción consigo mismo, se plantea la necesidad de llegar a la verdad, es decir, a la comprensión del concepto.

**La red de relaciones:**

Las estructuras de las preguntas deben ser de tal manera que el entrevistado pueda construir o mejorar su estructura mental en base a un concepto de estudio; esta estructura debe ir acompañada de mecanismos visuales, verbales y escritos, que permitan que se genere un razonamiento y una reflexión en torno al aprendizaje de dicho concepto.

## 2.6 Objeto Matemático:

Cuadraturas de figuras geométricas.

## 2.7 Marco Conceptual:

En esta sección se elabora una revisión bibliográfica de los conceptos generales a partir de los cuales se sustenta el análisis; se utilizarán los siguientes términos y se tendrá en cuenta la mayoría de las primeras 23 definiciones consignadas en el primer libro de *Los Elementos* de Euclides y postulados que fueron utilizados para la construcción del concepto de cuadratura.

**Libro I, definiciones: (Euclides, 1996, p.189-196).**

1. Un punto es lo que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos de las líneas son puntos.
4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
5. Una superficie es lo que tiene únicamente longitud y anchura.

8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.

10. Cuando una recta levantada sobre otra recta forman ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.
11. Un ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto.
12. Un ángulo agudo es el (ángulo) menor que un recto.

13. Un límite es aquello que es extremo de algo.
14. Una figura es lo contenido por uno o varios límites.
15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea (que se llama circunferencia) tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
17. Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada a ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.
19. Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multilaterales las comprendidas por más de cuatro rectas.
23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y sentido prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

**Libro I, postulados (Euclides, 1996, p.197):**

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
3. Y describir un círculo con cualquier centro y distancia.
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontraran en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Otras definiciones que usaremos son las siguientes:

**Unidad de Medida:** Una unidad de medida es una cantidad preestablecida, convencional o no, de una determinada propiedad o magnitud de objetos o eventos. Una unidad de medida convencional toma su valor a partir de un patrón inmodificable bajo ciertas condiciones o surgido como una composición de otras unidades definidas previamente. (Galina, 2008, p.6).

**Cuadrado:** Según Mahler (1927): “Cuadrado: paralelogramo equilátero y equiángulo” (Dalcín, 1998, p.434).

**Área:** Actualmente, la Real Academia de la Lengua Española-RAE, define el concepto de área en su octava acepción como: “Superficie comprendida dentro de un perímetro. (Real Academia Española-RAE, 2018).

## 2.8 Objeto de Estudio:

Comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas.

# Capítulo III: Metodología

En el capítulo III se abordarán seis subcapítulos donde se evidenciará un desarrollo del enfoque, el tipo de estudio, los casos y su contexto, los descriptores con los que se describirá la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas, la recolección de información, la ruta metodológica y el guion de la entrevista socrática aplicada para realizar el análisis en la investigación.

## 3.1 Enfoque y tipo de estudio

En concordancia con los objetivos y la pregunta de investigación, el presente trabajo se enmarca en el paradigma cualitativo. Dada la necesidad de describir la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas planas que tienen los estudiantes de un curso de Cálculo en Varias Variables de la Licenciatura en Matemática y Física de la Universidad de Antioquia durante su proceso formativo, se utiliza el estudio de casos para analizar el proceso que tienen los estudiantes a medida que se va aplicando la investigación; este análisis permitirá ubicar el nivel de comprensión en el que se encuentra cada estudiante objeto de investigación en cuanto a la noción en cuestión.

La investigación se realizó mediante el estudio de caso instrumental colectivo, el cual es un método de investigación cualitativa que nos permitió, a partir del estudio de cuatro (4) casos particulares de siete (7) estudiantes seleccionados y agrupados de acuerdo a razonamientos similares, detectar el nivel de comprensión de la noción objeto de estudio en el marco del modelo de van-Hiele, posibilitando el análisis de las construcciones hechas por los estudiantes durante el desarrollo de la entrevista socrática.

**3.2 Caso y contexto:**

La primera intervención se realizó a modo de prueba piloto en un curso de Cálculo en Varias Variables de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, el cual estuvo conformado por 20 estudiantes ubicados en diferentes niveles de acuerdo al pénsum de la carrera, pero todos contaban con los conceptos geométricos y matemáticos requeridos para el estudio de esta investigación.

Gracias a esta prueba piloto se pudo realizar mejoras a las entrevistas posteriores realizadas en el curso, seleccionando, agregando o descartando preguntas para consolidar la entrevista socrática final, que es con la cual se validan los descriptores de cada nivel. Con base en los descriptores ya creados se seleccionan los cuatro (4) casos a partir del razonamiento de los siete (7) estudiantes que están ubicados en los diferentes niveles propuestos en el modelo de van Hiele; Caso 1: Nivel 0, Caso 2: Nivel I, Caso 3: Nivel II, Caso 4: Nivel III; no se utiliza como caso el último nivel que es de deducción formal, dado que para los mismos van Hiele, es de difícil detección.

Las intervenciones desarrolladas para esta investigación se realizaron durante algunas clases del curso mencionado entre los meses de marzo y septiembre de 2018 con el respectivo consentimiento informado (véase anexo No. 2).

De las respuestas, reflexiones y explicaciones construidas por los estudiantes en la entrevista socrática, se desprende la información con la cual se hará el respectivo análisis sobre la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas.

## 3.3 Descriptores para la comprensión de la noción de cuadratura

En concordancia con el modelo de van Hiele, se crearon los descriptores para la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas, teniéndose en cuenta los niveles que postula.

Los descriptores fueron creados durante la aplicación de las entrevistas socráticas en un curso de Cálculo en Varias Variables. Durante la aplicación los descriptores fueron modificados acorde a la observación realizada en el proceso.

Los descriptores finales fueron:

**Nivel 0 (Pre-descriptivo):**

- Reconoce figuras geométricas regulares planas.
- Reconoce los objetos de estudio (área de figuras geométricas planas).
- Describe figuras geométricas regulares planas por su aspecto físico.
- Diferencia o clasifica figuras geométricas planas teniendo en cuenta semejanzas y diferencias físicas globales entre ellas.

**Nivel I (Reconocimiento visual):**

- Describe propiedades de las figuras geométricas planas.
- Describe una clase de figuras en términos de sus propiedades.
- Identifica los métodos que se utilizan para encontrar el área de una figura geométrica plana.
- Resuelve problemas geométricos por el conocimiento y uso de propiedades de figuras o por intuición.

**Nivel II (Análisis):**

- Descubre nuevas propiedades usando razonamientos deductivos.
- Sigue razonamientos geométricos para dar solución a un problema.
- Encuentra relación entre las áreas de distintas figuras geométricas planas.
- Empíricamente utiliza la noción de cuadratura para hallar el área de una figura geométrica plana.

**Nivel III (Clasificación o realización):**

- Formula y establece formas diferentes de encontrar el área de una figura geométrica plana.
- Comprende la noción de cuadratura.
- Establece una relación entre la noción de cuadratura y de área.

## 3.4 Recolección de la información

Para la recolección de información en la investigación se utilizó la entrevista semiestructurada de carácter socrático y la observación continua durante el proceso de las entrevistas realizadas a los distintos estudiantes.

## 3.5 Ruta metodológica

Luego de la selección de los casos se dio inicio a la aplicación de la entrevista socrática, realizando en primer lugar la fase inicial de exploración en la cual se evidenciaron las dificultades que presentaban los estudiantes en la comprensión de la noción de cuadratura, para luego proceder a la fase de aplicación de la entrevista; en esta fase se realizaron diversas entrevistas, lo que llevó a la fase final de la elaboración de la entrevista socrática y su aplicación.

### 3.5.1 Fase inicial de exploración.

En esta primera fase se realizó un acercamiento hacia los estudiantes del curso de Cálculo en Varias Variables de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, con el fin de indagar sobre los conocimientos de la noción de cuadratura, a través de la prueba piloto mencionada anteriormente, y se pudo concluir que la mayor parte de dicha población de estudiantes, no tienen claro el concepto de área (Ver figura 17).

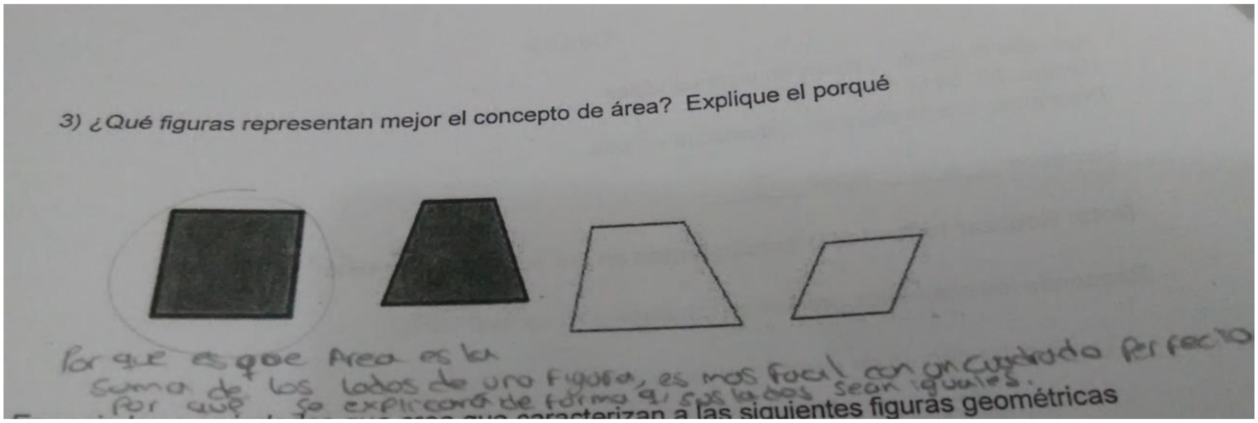



*Figura 17: Pregunta realizada en la prueba piloto para indagar sobre el concepto de área*

Cuando se les preguntó por la noción de cuadratura, una gran parte de la población entrevistada dio como respuesta que no tenía conocimiento (Ver Figura 18).

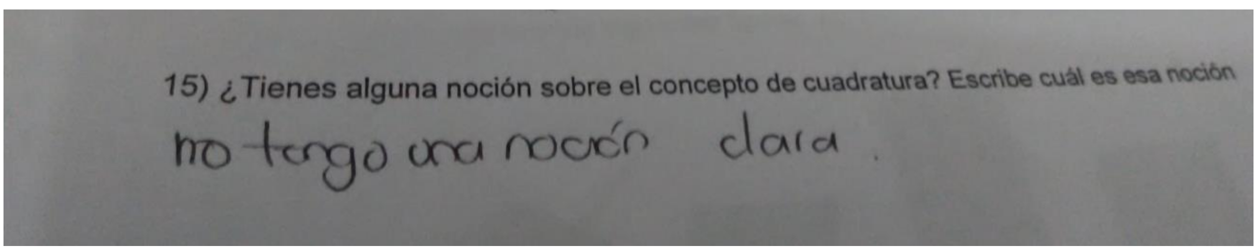



*Figura 18: Pregunta realizada en la prueba piloto para indagar sobre el concepto de área*

Ante las respuestas y diálogos con estudiantes se concluye que el desconocimiento de la noción es debido a que su enseñanza es inusual y los procesos se centran en el cálculo del área de figuras geométricas planas desde un proceso aritmético.

Se replantea una nueva entrevista y se procede a su realización con otro grupo de personas, con iguales características a las anteriores.

### 3.5.2 Fase de aplicación de la entrevista.

Después de recolectar la información necesaria a través de la prueba piloto y detectar las falencias en forma, diseño y contenido, se diseñó la versión final de la entrevista semiestructurada de carácter socrático con 25 preguntas aplicadas nuevamente a los estudiantes del curso de Cálculo en Varias Variables; la entrevista permitió identificar y clasificar en qué nivel de comprensión se encuentra cada estudiante objeto de investigación a partir de los descriptores creados desde el modelo de comprensión del modelo de van Hiele. Dichos descriptores han sido creados acorde al contexto y grado de escolaridad de los estudiantes participantes de la entrevista.

### 3.5.3 Fase final.

Con base en la prueba piloto y la entrevista de carácter socrático aplicada a los estudiantes, se especificarán los descriptores enmarcados en el modelo de van Hiele correspondiente a los niveles de razonamiento 0, I, II y III en cuanto a la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas planas.

Las preguntas de la entrevista están en correspondencia con los descriptores asociados a cada nivel de la siguiente manera: Al nivel 0 le corresponde las preguntas: 1, 2, 3 y 4 con las cuales se pretende indagar los conocimientos primitivos sobre el objeto de estudio trabajado en la investigación; aquí el estudiante no reconoce de forma explícita los componentes y propiedades de los objetos, pero sí hace descripciones visuales de la apariencia física.

Al nivel I le corresponde las preguntas: 5, 6, 7, 10, 12 y 20 con las que se pretende verificar que el estudiante puede describir de manera informal o intuitiva propiedades del objeto de estudio, aunque no realiza clasificaciones teniendo en cuenta las propiedades.

Al nivel II le corresponde las preguntas 8, 9, 11, 13, 19, 21 y 22 con las que se pretende verificar que el estudiante describa las propiedades del objeto de estudio, las clasifique y nos permita observar algunos razonamientos.

Al nivel III le corresponde las preguntas 14, 15, 16, 17, 18, 23, 24 y 25 con las que se pretende verificar que el estudiante realiza deducciones formales y demostraciones, además encuentra relaciones entre las propiedades del objeto de estudio.

Consideramos conveniente analizar en particular las respuestas a las preguntas 24 y 25, ya que abren la posibilidad para que futuras investigaciones en el contexto de la Historia y Epistemología de la noción de cuadratura, pretendan realizar un tratamiento profundo a los trabajos realizados por Arquímedes, específicamente en relación a la cuadratura de la parábola.

A continuación, se presenta la entrevista semiestructurada de carácter socrático:

## 3.6 Guion de entrevista socrática para la comprensión del concepto de cuadratura a través del área de figuras geométricas planas en el marco del modelo de van- Hiele.

**Noción:** Cuadratura.

**Manifestación**: La cuadratura a través del área de figuras geométricas planas.

**Contenido del guion-entrevista:**

**1. ¿Cuál de las siguientes imágenes de tu diario vivir pueden representar una figura geométrica plana? Indica las opciones que consideres más apropiadas y justifica tu respuesta.**

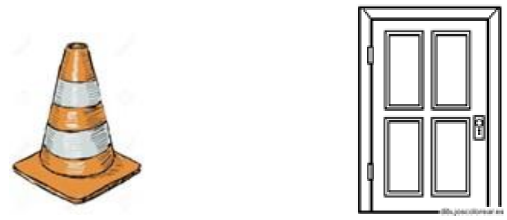


*Figura 19: Ilustración para verificar el reconocimiento de las figuras geométricas planas en su entorno*

**2. ¿Cuál de las siguientes imágenes representan figuras geométricas planas? Indica las opciones más apropiadas y justifica el porqué de tu respuesta.**

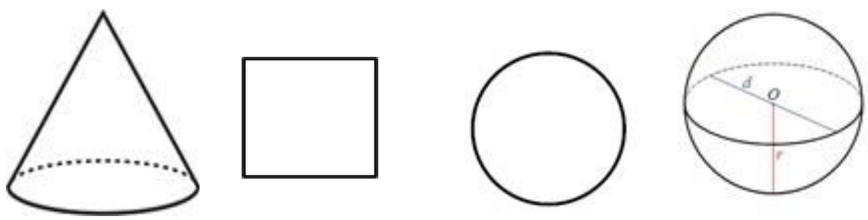


*Figura 20: Ilustración para verificar el reconocimiento de las figuras geométricas planas*

**3. Describe el aspecto físico de cada una de las siguientes figuras geométricas planas.**

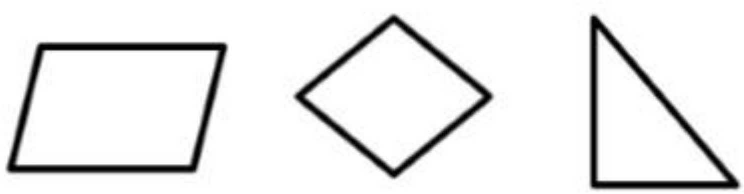


*Figura 21: Ilustración para verificar el reconocimiento del aspecto físico de las figuras geométricas planas*

**4. Escribe las diferencias entre cada par de las siguientes figuras geométricas.**

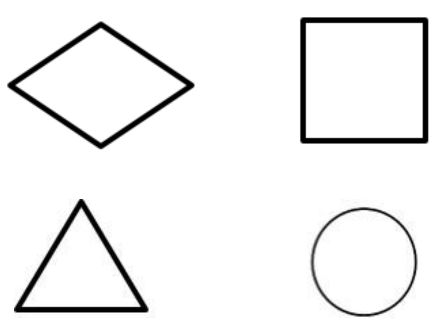


*Figura 22: Ilustración para verificar el reconocimiento del aspecto físico de las figuras geométricas planas*.

**5. ¿Podrías identificar el nombre de las siguientes figuras geométricas? En otro caso, ¿podrías sugerir un nombre apropiado? Justifica tu respuesta.**

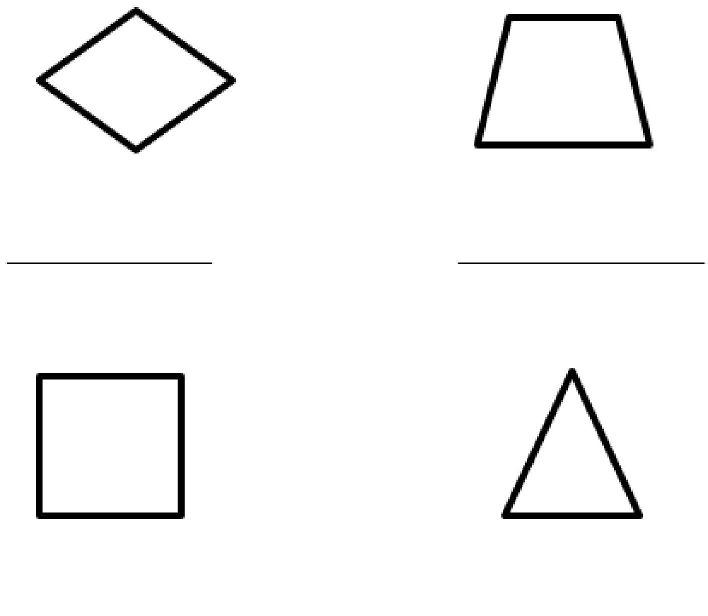


*Figura 23: Ilustración para verificar el reconocimiento del nombre de las figuras geométricas planas*

**Aporte de información:**

Un polígono es una figura plana, cerrada y formada por segmentos que se unen en sus extremos, cada uno de ellos se unen exactamente con dos segmentos. Los extremos de los segmentos se llaman vértices, y los segmentos se llaman lados del polígono (Malaver, 2017, p.88). Los polígonos se pueden clasificar tal como lo indica la siguiente tabla:

| CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS SEGÚN EL NÚMERO DE LADOS | | | | |
|---|---|---|---|---|
| LADOS | NOMBRE | SUMA ÁNGULOS INTERNOS | SUMA ÁNGULOS EXTERNOS | NÚMEROS DE DIAGONALES |
| 3 | Triángulo | 180° | 360° | 0 |
| 4 | Cuadrilátero | 360° | 360° | 2 |
| 5 | Pentágono | 540° | 360° | 5 |
| 6 | Hexágono | 720° | 360° | 9 |
| 7 | Heptágono | 900° | 360° | 14 |
| 8 | Octágono | 1080° | 360° | 20 |
| 9 | Eneágono | 1260° | 360° | 27 |
| 10 | Decágono | 1440° | 360° | 35 |
| 11 | Endecágono | 1620° | 360° | 44 |
| 12 | Dodecágono | 1800° | 360° | 54 |

*Figura 24: Aporte de información sobre la clasificación de polígonos*

.

**6. ¿Cuáles de los siguientes polígonos crees que representan un cuadrado? Justifica tu respuesta.**

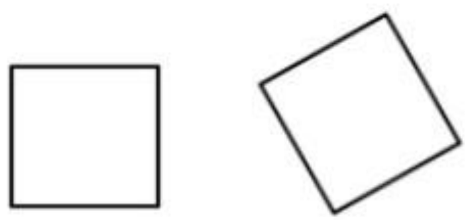


*Figura 25: Ilustración para verificar el reconocimiento de figuras geométricas planas*

**7. Enuncia las propiedades que crees caracterizan a los siguientes polígonos.**

**Cuadrado: ____________________________________________________________**

**Triángulo: ____________________________________________________________**

**Rectángulo: ___________________________________________________________**

**Rombo: _______________________________________________________________**

**8. ¿Crees que existe una relación entre el área de un triángulo y el área de un**

**rectángulo? Justifica tu respuesta.**

**Aporte de información:**

La noción de **superficie** es lo que se refiere a la forma geométrica, hay superficies rectangulares, triangulares, circulares, etc.; la noción de área es lo que se refiere al tamaño, es la medida de una superficie (cantidad de superficie).

**9. ¿Cuál de los siguientes polígonos crees que es más conveniente para rellenar las otras superficies? Justifica tu respuesta.**

*Figura 26: Ilustración para verificar el conocimiento empírico de la noción de cuadratura*

**Aporte de información:**

El cuadrado es la figura rectilínea perfecta por excelencia y se impuso desde el principio como el principal patrón de comparación, de allí que la palabra "**cuadratura**" fuera utilizada como una forma de referirse a lo que hoy denominamos cálculo del área (Jiménez, 2004, p.105).

**10. ¿Podrías encontrar el número de cuadrados que caben en la superficie rectangular? Justifica tu respuesta.**

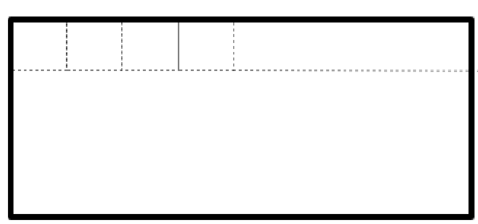


*Figura 27: Ilustración para verificar el conocimiento empírico de la noción de cuadratura*

**Aporte de información:**

**Rectángulo:** Paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos.

**Paralelogramo:** Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí.

**Romboide:** Paralelogramo cuyos lados contiguos son desiguales y dos de sus ángulos mayores que los otros dos.

**Trapecio:** Paralelogramo que tiene al menos un par de lados paralelos.

**11. Dado el siguiente cuadrado sombreado, trata de construir un rectángulo, un romboide, un triángulo y un trapecio que tengan la misma área (asume que los cuadrados de la cuadrícula tienen 1 cm cada lado). Justifica tu respuesta.**

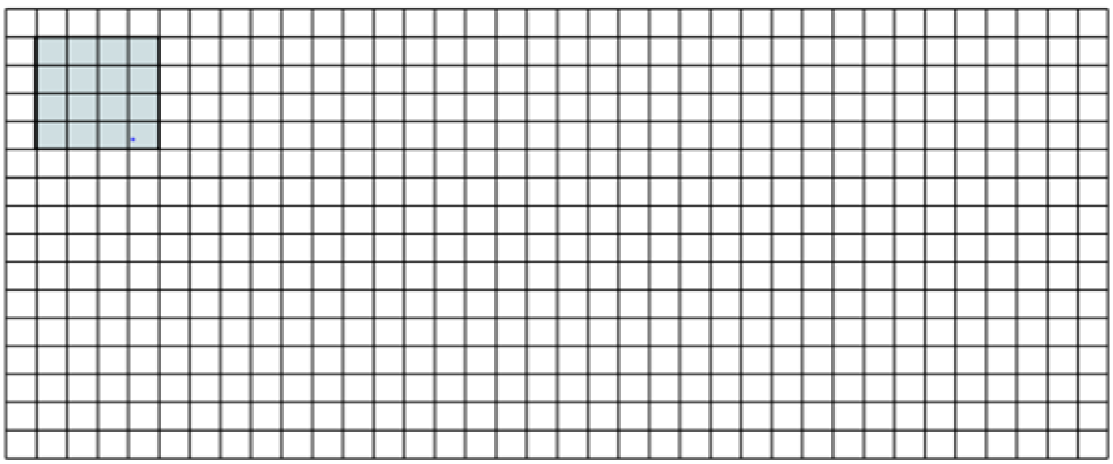


*Figura 28: Ilustración para verificar el conocimiento empírico de la noción de cuadratura*

**12. Calcula el número de cuadrados de 4 cm$^2$ de área que pueden rellenar la superficie de la figura dada a continuación. Justifica tu respuesta.**

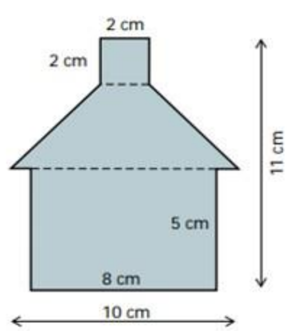



*Figura 29: Ilustración para verificar el conocimiento empírico de la noción de cuadratura*

**13. Dibuja un cuadrado que tenga la misma área de las siguientes figuras y describe el proceso que realizaste.**

**Rectángulo que tiene de ancho 4 veces más que su largo.**

**Triángulo que tiene de altura dos veces más que su base.**

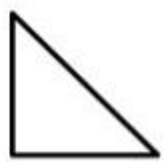


*Figura 30: Ilustración para verificar el razonamiento lógico frente al objeto de estudio*

**14. Ahora, utilizando los acoplamientos de los polígonos entregados, trata de armar un cuadrado y contesta las siguientes preguntas con cada uno:**

*Figura 31: Ilustración de acoplamientos.*

**¿Fue posible armar el cuadrado?**

**¿Tienen la misma área?**

**15. ¿Crees que es posible formar un cuadrado de igual área que el de otro polígono? Da un ejemplo de cuál y cómo lo harías (ten en cuenta en no hacer una de las figuras utilizadas anteriormente en la entrevista).**

**16. Hallar el área sombreada de la siguiente figura.**

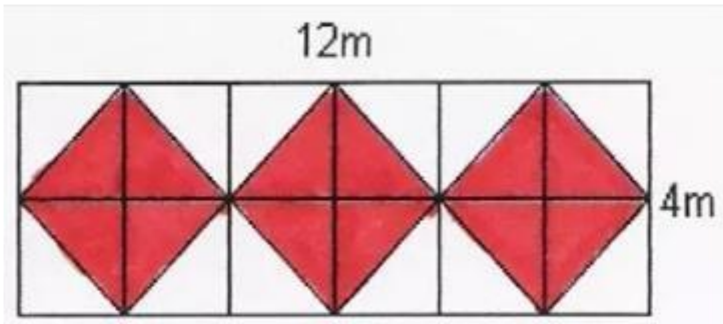



*Figura 32: Ilustración para verificar el razonamiento lógico del objeto de estudio*

**17. Existe una finca que tiene un terreno con superficie irregular que posee un área de 4.36 km$^2$ y está representado en la figura. ¿Crees que podrías crear una superficie cuadrada con igual área que la de la figura? Justifica tu respuesta y realiza el procedimiento utilizado.**

*Figura 33: Ilustración para verificar la comprensión de la noción de cuadratura*

.

**18. Teniendo en cuenta la pregunta anterior cuál de las siguientes gráficas crees que**

**podrían representar mejor la superficie cuadrada, recordando que debe tener la misma área de la superficie irregular que es de 4.36 km$^2$. Justifica tu respuesta.**

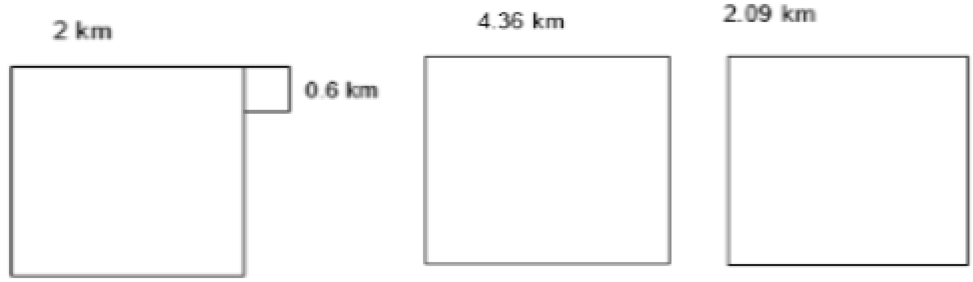



*Figura 34: Ilustración para verificar la comprensión de la noción de cuadratura*

**19. Llena el siguiente rectángulo con cuadrados de la mayor área posible.**

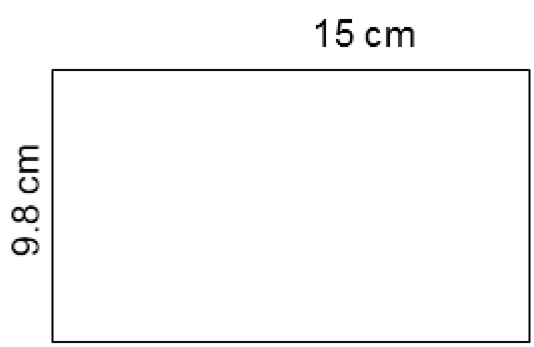



*Figura 35: Ilustración para verificar la comprensión de la noción de cuadratura*

**20. ¿Tienes alguna idea acerca del concepto de cuadratura? En caso contrario, ¿qué te sugiere el término?**

**21. ¿Podrías aproximar el área de la región limitada por la parábola y el eje mostrada en la siguiente figura? Describe el método usado. ¿Podrías calcularla exactamente? Describe el método usado.**

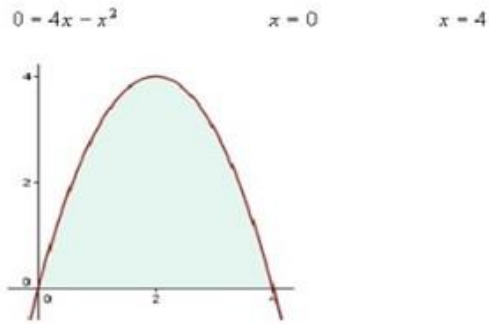



*Figura 36: Ilustración relaciona las propiedades de la noción de cuadratura.*

.

**22. ¿Podrías aproximar el área de la región limitada por la parábola y el eje mostrada en la siguiente figura, haciendo uso de métodos geométricos? Justifica tu respuesta**

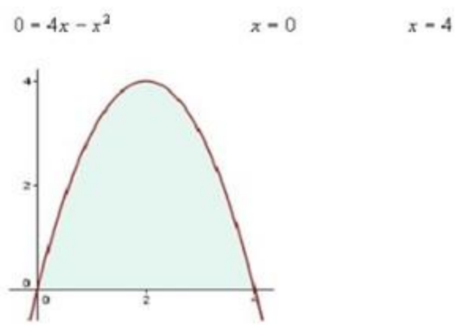



*Figura 37: Ilustración relaciona las propiedades de la noción de cuadratura.*

**23. Calcula el área de la región limitada por la parábola y el eje mostrada en la siguiente figura. Luego, calcula el área de los triángulos ABC para cada caso.**

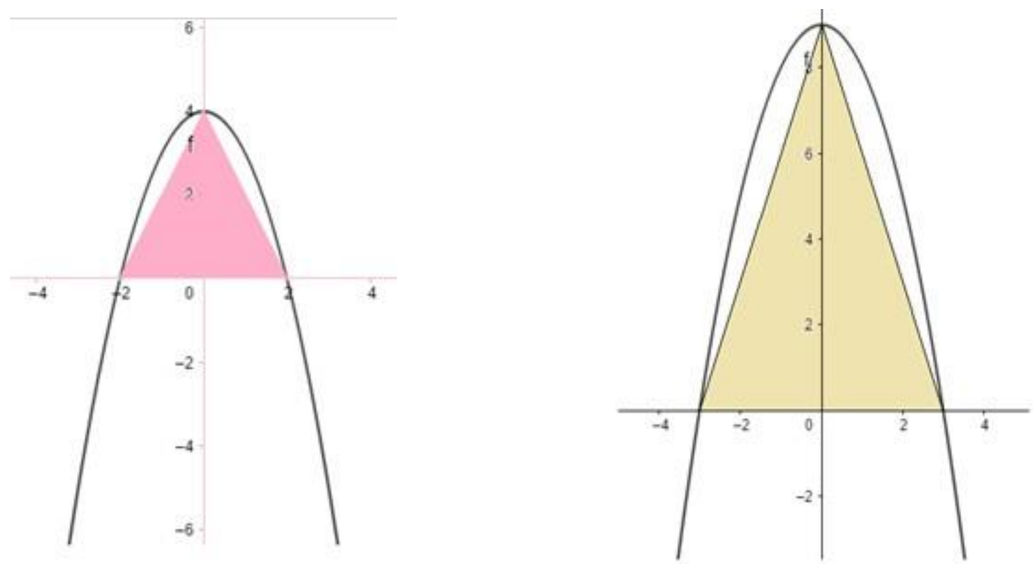


*Figura 38: Ilustración relaciona las propiedades de la noción de cuadratura..*

**¿Observas en cada caso alguna relación entre el área de la región limitada por la parábola y el eje, y el área del respectivo triángulo inscrito?**

**Aporte de información:**

**Cuadratura de la parábola:** El área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de un triángulo de la misma base y la misma altura que el segmento. Arquímedes demostró la cuadratura de la parábola a través del método de exhaución (Torres, 1997, p.113).

**24. ¿Podrías traducir el aporte de información anterior en una ecuación? Explícita la ecuación.**

**25. Dada una región cualquiera, ¿crees que puedas formar una figura con superficie cuadrada?**

# Capítulo IV: Análisis

En el capítulo IV se describe el proceso de los cuatro (4) casos seleccionados en los se agrupan los siete (7) estudiantes objeto de investigación. Los casos fueron clasificados de acuerdo al nivel de comprensión que se encontraban los estudiantes y se etiquetaron así:

Caso 1: Luisa

Caso 2: Sebastián

Caso 3: Emanuel

Caso 4: Sofía

En cada caso se hará una descripción y clasificación del nivel de comprensión en el se encuentra ubicado, de acuerdo a los descriptores creados en concordancia con la noción de cuadratura en el marco del modelo de van Hiele.

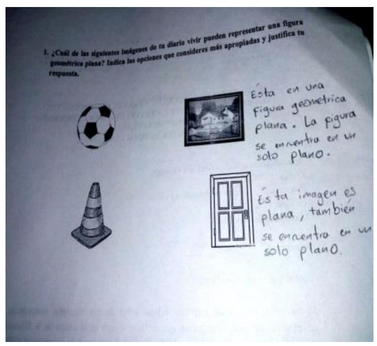
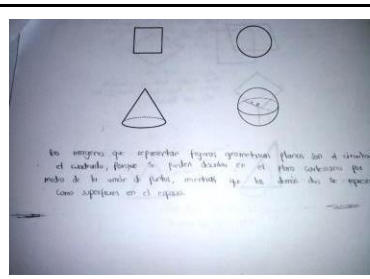
## 4.1 Casos:

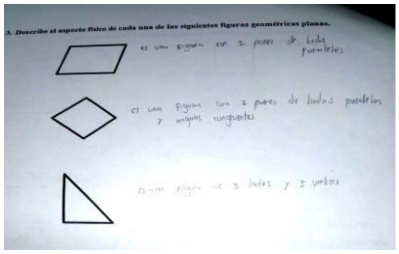
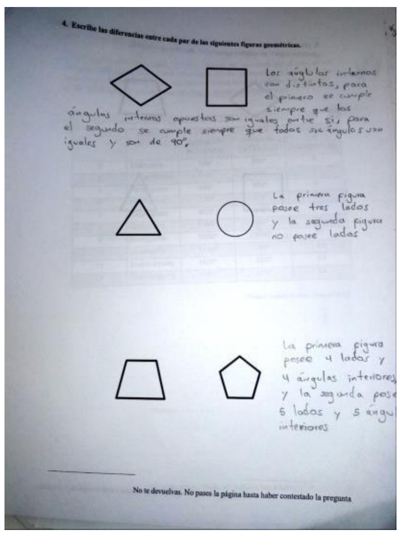
Se aclara que todos los estudiantes partícipes en los casos se encuentran cursando Cálculo en Varias Variable en la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia y son distintos a los que participaron en la prueba piloto para el refinamiento de la entrevista ylos descriptores.

### 4.1.1 Caso 1. Luisa:

Corresponde a dos estudiantes, uno del semestre 9 y nivel 8 y el otro del semestre 7 y nivel 5, quienes se encuentran ubicados en el nivel 0 o pre descriptivo. Se evidencia que en las primeras preguntas se tuvo un acercamiento a las respuestas conforme a los descriptores ya diseñados.

***Nivel 0 (Pre-descriptivo)***

| DESCRIPTORES | EVIDENCIA | ANÁLISIS |
|---|---|---|
| Reconoce las figuras geométricas regulares planas. | <br>Anexo 3 | Responden a la primera pregunta de la entrevista lo siguiente: "Ésta en una figura geométrica plana. La figura se encuentra en un plano." y también agrega "Esta imagen es plana, también se encuentra en un solo plano".<br><br>Aunque su justificación escrita es corta, visualmente sí identifican qué figuras geométricas en su entorno se pueden describir en un solo plano, seleccionando la imagen de un retrato y una puerta, omitiendo el balón de fútbol y el cono de tránsito que pueden representar la esfera y el cono que son figuras geométricas tridimensionales. |
| Reconoce los objetos de estudio (área de figuras geométricas planas). |  | En la segunda pregunta de la entrevista proporcionan la siguiente respuesta: "Las imágenes que representan las figuras geométricas planas son el círculo y el cuadrado, porque se pueden describir en el plano cartesiano por medio de la unión de puntos, mientras que los demás se representan como superficies en el espacio".<br><br>Aquí evidencian el reconocimiento de conceptos básicos de la geometría que necesitan para comprender el objeto de |

| | | |
|---|---|---|
| | | estudio. |
| Describe figuras geométricas regulares planas por su aspecto físico. |   Anexo 5 | En la tercera pregunta responden: “Es una figura con 2 pares de lados paralelos”, “Es una figura con 2 pares de lados paralelos y ángulo congruentes”, “es una figura de 3 lados y 3 vértices”.<br><br>Describen el aspecto físico de las figuras geométricas, utilizando conceptos básicos de la geometría. |
| Diferencia o clasifica figuras geométricas planas teniendo en cuenta semejanzas y diferencias físicas globales entre ellas. |   Anexo 6 | En la cuarta pregunta contestan; “Los ángulos internos son distintos, para el primero se cumple siempre que los ángulos internos opuestos son iguales entre sí, para el segundo se cumple siempre que todos sus ángulos son iguales y son de 90 grados”, “La primera figura posee tres lados y la segunda figura no posee lados”, “La primera figura posee 4 lados y la segunda posee 5 lados y 5 ángulos interiores”<br><br>Con esta pregunta se reafirma que sí reconocen los conocimientos básicos del objeto de estudio y además diferencian o clasifican con base a semejanzas y diferencias físicas globales entre ellos. |

.

Los estudiantes no alcanzan a estar en nivel I ya que en el momento de enunciar propiedades de las figuras geométricas tienen inconsistencias y como se aclara en el marco teórico, ningún nivel de razonamiento es independiente de otro y no es posible saltarse ninguno. (Ver figura 39 y figura 40)

.

.

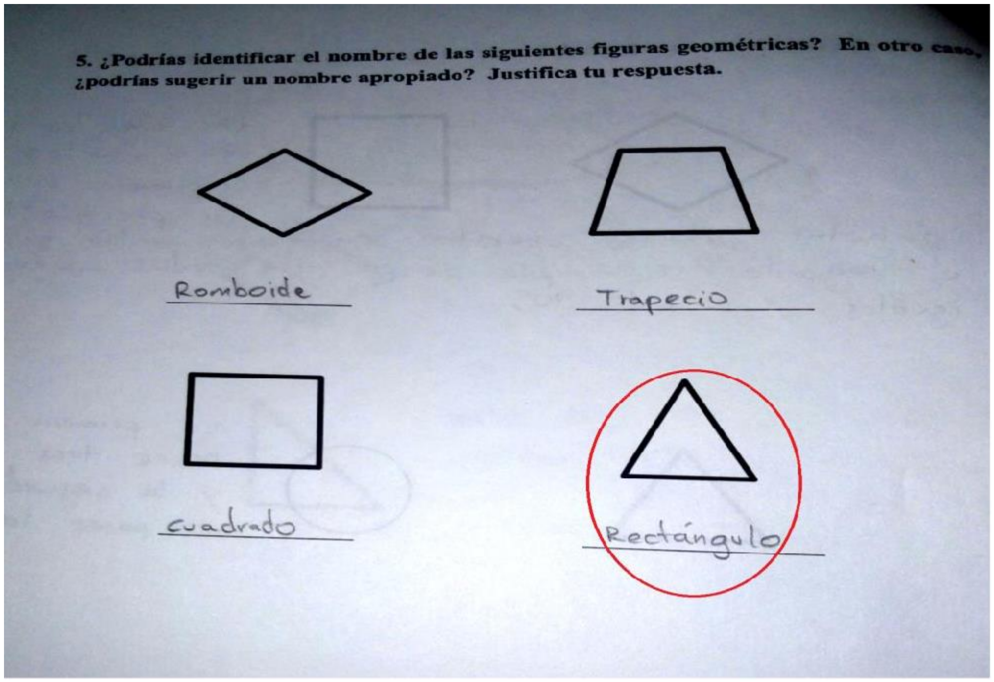



*Figura 39: Ilustración del caso 1 de la pregunta 5 de la entrevista*

.

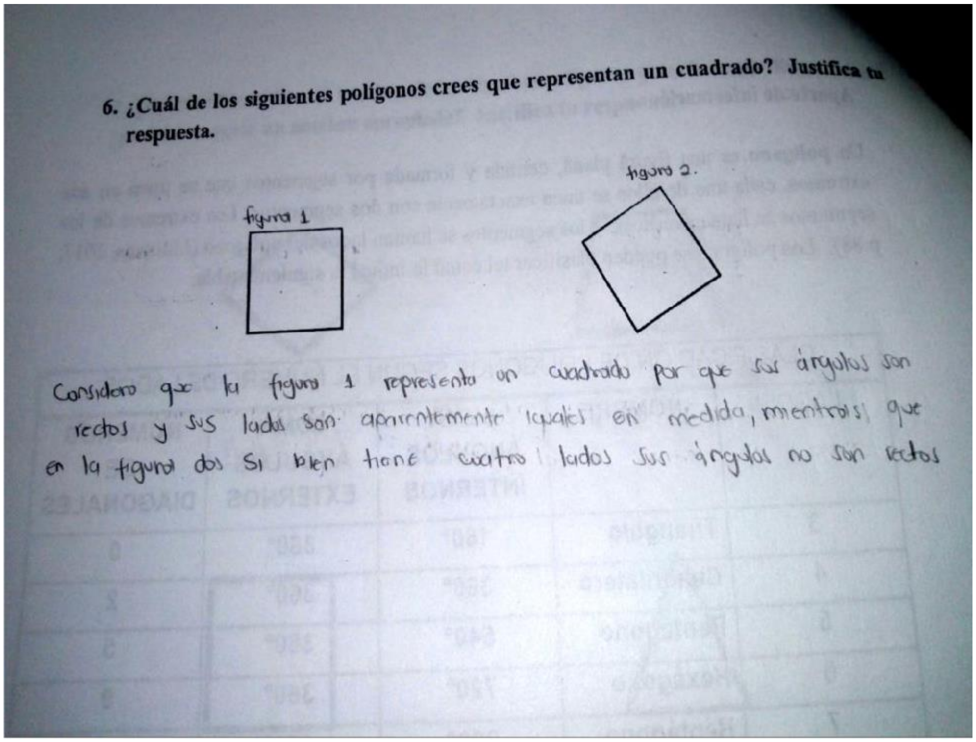



*Figura 40: ilustración del caso 1 de la pregunta 6 de la entrevista*

En el caso de la figura 40, no identifican las propiedades del cuadrado cuando este encuentra en una posición inusual.

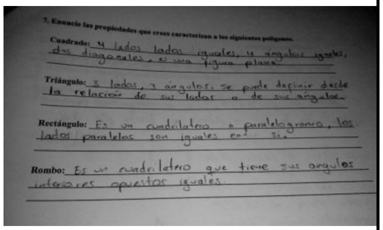
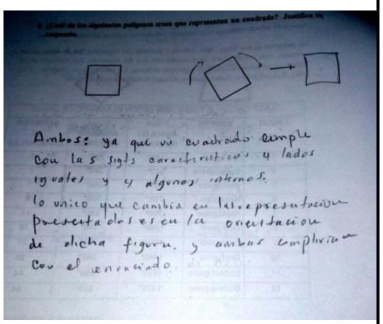
Para posibilitar el paso a los siguientes niveles en la entrevista, se dan aportes de información.

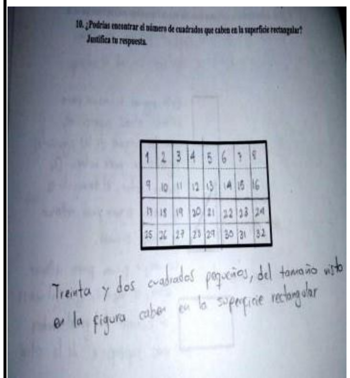
### 4.1.2 Caso 2 Sebastián:

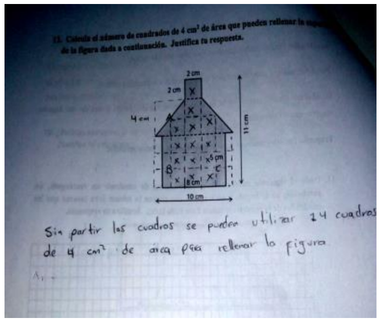
Corresponde a dos estudiantes, uno de semestre 9 y nivel 6 y otro del mismo semestre y nivel 8 y fueron clasificados en el nivel I de reconocimiento visual. En el desarrollo de la entrevista se evidencia que cumplen con todos los descriptores del nivel 0 y alcanzan los descriptores del nivel I de reconocimiento visual.

***Nivel I (Reconocimiento visual)***

| **Descriptores** | **Evidencia** | **Análisis** |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| Describe propiedades de las figuras geométricas planas. | <br>Anexo 7 | En la pregunta 7 evidencian el conocimiento de las propiedades de algunas figuras geométricas planas, mediante la descripción que hacen de ellas. |
| Describe una clase de figuras en términos de sus propiedades. | <br>Anexo 8 | En la pregunta 6 de la entrevista socrática, el estudiante responde: “Ambos, ya que un cuadrado cumple con las siguientes características, 4 lados iguales y 4 ángulos internos. Lo único que cambia en las representaciones presentadas es en la orientación de dicha figura…”<br><br>Describen una clase de figura geométrica en términos de sus propiedades, evidenciando que no solo reconocen una figura por su aspecto físico, sino que además perciben las propiedades de las figuras geométricas y las enuncian de manera informal. |

| | | |
|---|---|---|
| Identifica los métodos que se utilizan para encontrar el área de una figura geométrica plana. | <br>Anexo 9 | En la pregunta 10 de la entrevista, el estudiante responde: “Treinta y dos cuadrados pequeños del tamaño visto en la figura caben en la superficie rectangular”.<br><br>Se evidencia un método con un razonamiento más formal que les permitió dar la respuesta esperada en este nivel de razonamiento. |
| Resuelve problemas geométricos por el | | En la pregunta 12 proporcionan como respuesta: “Sin partir los cuadrados se pueden utilizar 14 cuadrados de $4cm^2$ de área para rellenar la figura. |

| | | |
|---|---|---|
| conocimiento y uso de propiedades de figuras o por intuición. |  Anexo 10 | Comienzan de forma intuitiva a utilizar la noción de cuadratura, dando así solución al problema. |

Los estudiantes quedan ubicados en el nivel I ya que solo alcanzan a cumplir con los descriptores del nivel 0 y nivel I, presentando dificultades en los del nivel II al momento del desarrollo de algunas preguntas (ver figura 41 y 42).

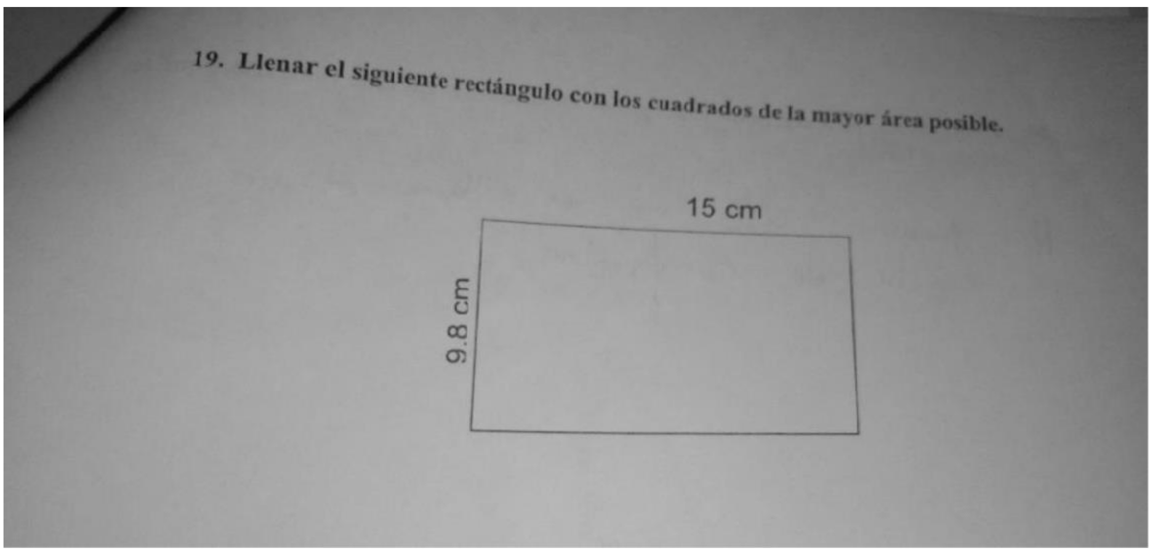



*Figura 41: Ilustración del caso 2 pregunta 19 de la entrevista*

.

El estudiante deja la respuesta en blanco evidenciando que no encuentra una forma relacionar el concepto de área para dar solución al problema.

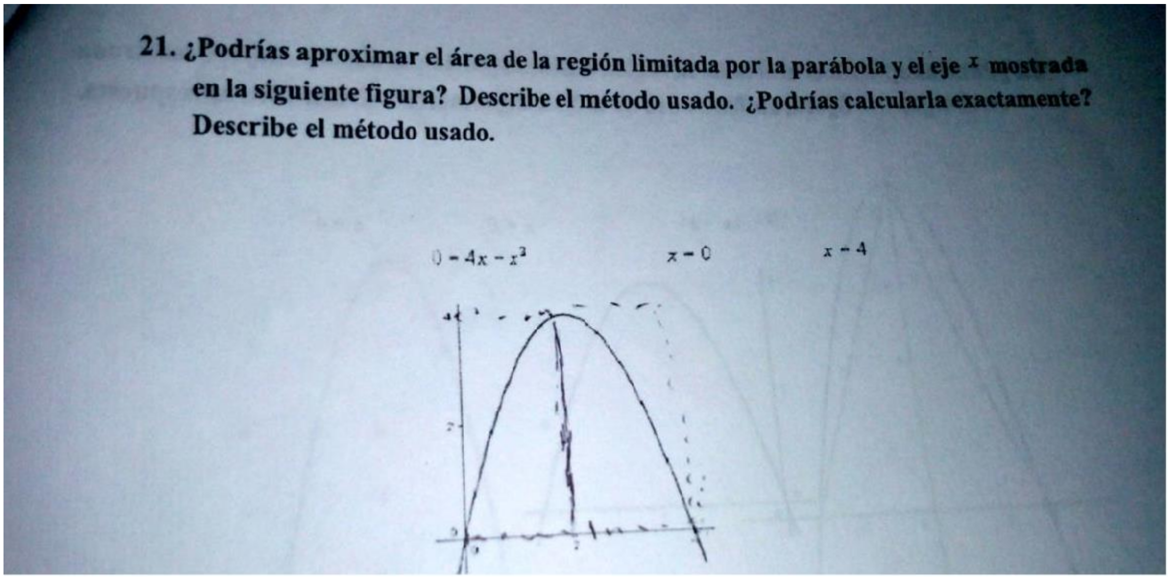



*Figura 42: Ilustración del caso 2 pregunta 21 de la entrevista*

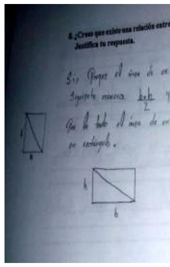
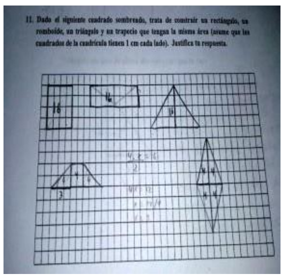
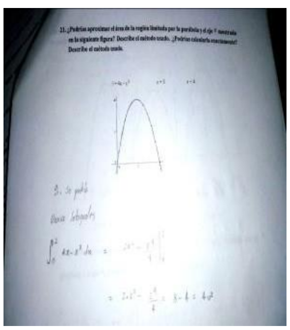
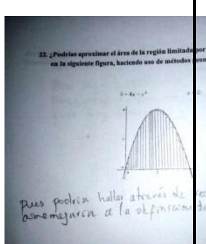
De nuevo se evidencia que el estudiante deja la respuesta en blanco y que no una forma de relacionar la noción de área para dar solución al problema.

### 4.1.3 Caso 3 Emanuel:

Corresponde a dos estudiantes, uno del semestre 7 y nivel 6, el otro del semestre 4 y 3, quienes se encuentran ubicados en nivel II o de análisis, ya que alcanzaron el cumplimiento de los descriptores del nivel 0, nivel I y nivel II.

***Nivel II (Análisis)***

| **Descriptores** | **Evidencia** | **Análisis** |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| Descubre nuevas propiedades usando razonamientos deductivos. |  Anexo 11 | A la pregunta ocho responden: “Si, porque el área de un triángulo se podría calcular de la siguiente manera (b*h) /2 y la de un rectángulo sería b*h. Por lo tanto, el área de un triángulo sería la mitad a la de un rectángulo”<br>El estudiante comienza a usar las propiedades para realizar razonamientos más formales. |
| Sigue razonamientos geométricos para dar solución a un problema. |  Anexo 12 | En la pregunta 11 ya comienzan a utilizar conceptos geométricos para dar solución al problema. |
| Encuentra relación entre las áreas de distintas figuras geométricas planas. |  Anexo 13 | En la pregunta 21, solucionan el problema por medio de integrales, relacionando así el concepto de área con el concepto de integrales. |
| Empíricamente utiliza el concepto de cuadratura para hallar el área de una figura geométrica plana. |  Anexo 14 | En la pregunta 22 responden: “pues podría hallarse a través de rectángulos que se asemejarían a los que se usan para las sumas de Riemann en Integrales definidas”. Se evidencia el uso de la noción de cuadratura empíricamente, cuando al solucionar la pregunta afirman que el área se puede encontrar por medio de “rellenar” con otra figura la superficie de la parábola. |

Los estudiantes hasta este nivel desarrollan la entrevista con fluidez y coherencia, pero se evidencian falencias para alcanzar el nivel III (ver figura 43).

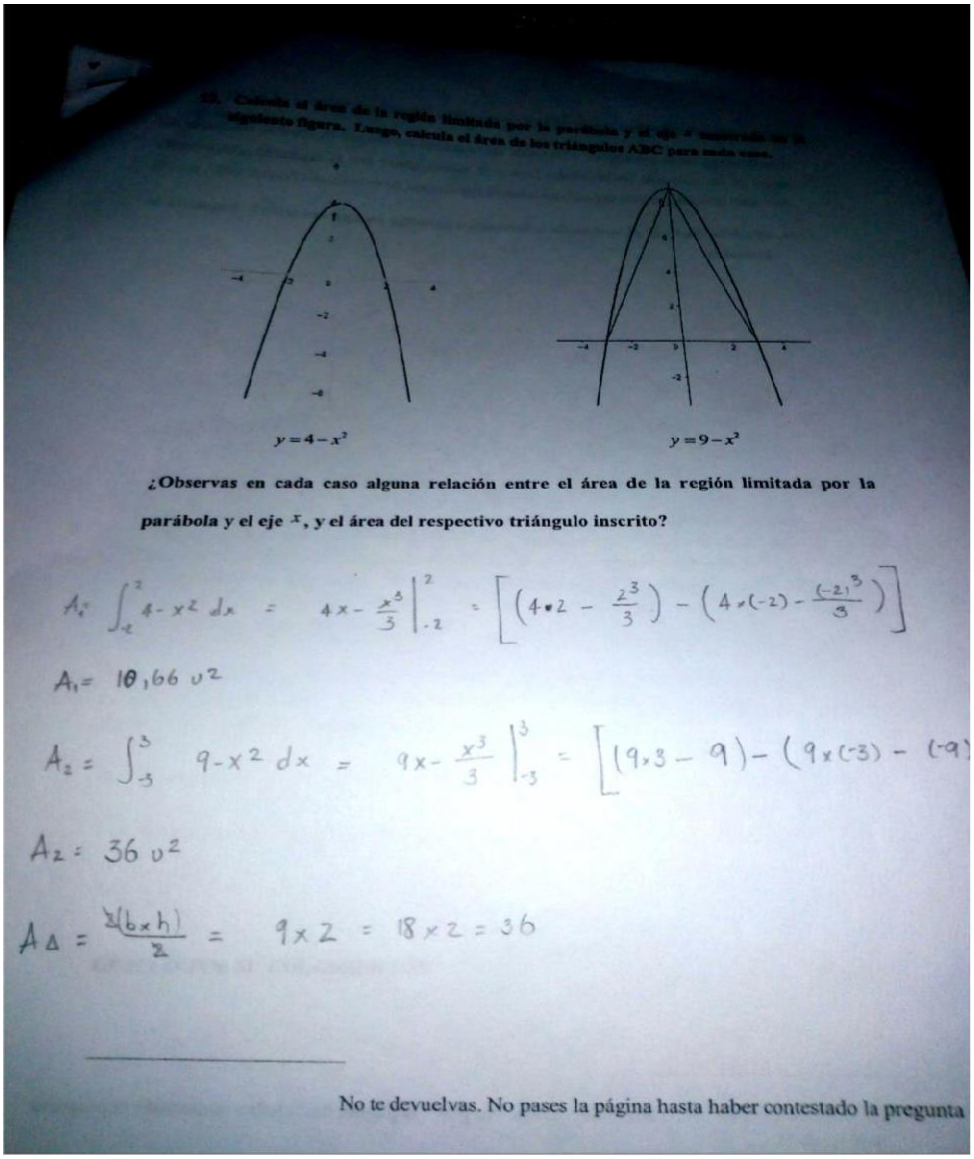


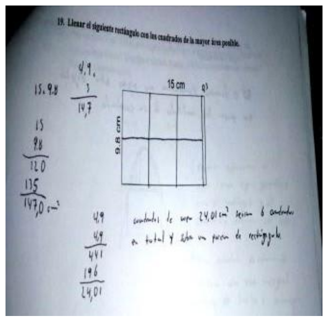
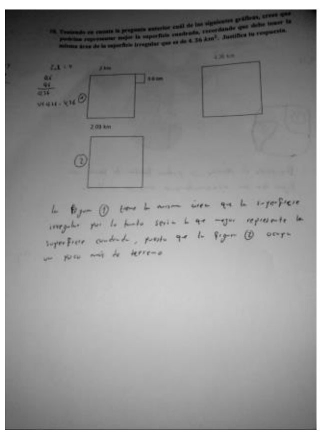
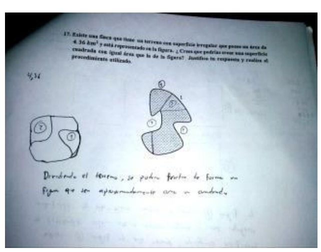

*Figura 43: Ilustración del caso 3, pregunta 23 de la entrevista*

En el momento de solucionar la pregunta 23, el estudiante hace un proceso mas no formula ni establece formas diferentes de encontrar el área y la relación entre ellas.

### 4.1.4 Caso 4 Sofía:

Corresponde a un solo estudiante del semestre 9 y nivel 6 que logra cumplir con los descriptores del nivel III y los anteriores ya mencionados.

***Nivel III (Clasificación y relación)***

| **Descriptores** | **Evidencia** | **Análisis** |
|---|---|---|
| Formula y establece formas diferentes de encontrar el área de una figura geométrica plana. |  Anexo 15 | En la pregunta 19 responde: "cuadrados de área 24,01$cm^2$ serían 6 cuadrados en total y sobre una porción de rectángulo".<br><br>El estudiante encuentra una forma distinta a un proceso aritmético para encontrar el área del rectángulo, dividiendo la superficie rectangular en superficies cuadradas. |
| Comprende el concepto de cuadratura. |  Anexo 16 | En la pregunta 18 el estudiante responde: "la figura 1 tiene la misma área que la superficie irregular, por lo tanto, sería la que mejor representa la superficie cuadrada, puesto que la figura 2 ocupa un poco más de terreno."<br><br>Usa un lenguaje más técnico al momento de dar respuestas, lo que evidencia la comprensión y aplicación de la noción de cuadratura. |
| Establece una relación entre la noción de cuadratura y área. |  Anexo 17 | En la pregunta 17 responde afirmando que: "Dividiendo el terreno, se podría tratar de formar una figura aproximadamente como un cuadrado."<br><br>El estudiante se apropia de la noción de cuadratura y es capaz de relacionarla con el concepto del área. |

## Capítulo V: Conclusiones.

En el capítulo V se abordan 3 subcapítulos, en los cuales se describen la consecución o los logros de los objetivos, el discurrir de la entrevista y las posibilidades de proyectos que se podrían generar a futuro o para nuevas líneas de investigación en el campo de la educación matemática.

### 5.1 Consecución de los objetivos

Para el desarrollo de la investigación, se diseñó un objetivo general presentado en capítulo I, apartado 1.5.1: Describir la comprensión del concepto de cuadratura a través del área de figuras geométricas planas en los estudiantes de un curso de Cálculo en Varias Variables de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia. Para alcanzar este objetivo fue necesario plantear en consecuencia dos objetivos específicos.

1. *Diseñar descriptores para la comprensión del concepto de cuadratura en el marco del modelo de van Hiele.*

Siguiendo el marco teórico del modelo de van Hiele se construyen los descriptores que guían el diseño de la entrevista semiestructurada de carácter después de su primera aplicación como prueba piloto se analiza y se realizan ajustes modificaciones, creándose así los descriptores finales presentados en el apartado 3.3 del capítulo III, los cuales fueron utilizados para describir la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas planas.

Los descriptores permitieron crear una entrevista que giraba en torno a necesidad de razonar, evitando en lo posible el uso de procesos aritméticos, facilitando los estudiantes la construcción de su propio conocimiento, características que se corresponden con el modelo de van Hiele.

En el proceso de la investigación y la interacción con los estudiantes de un de Cálculo en Varias Variables de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, se evidencia que el rastreo de la parte epistemológica e histórica de la evolución de la noción de cuadratura proporciona elementos metodológicos y didácticos que se constituyen en insumos para el diseño de la socrática, lo que crea la necesidad de un segundo objetivo específico.

2. *Rastrear la evolución histórica- epistemológica de los conceptos subyacentes a la noción de cuadratura.*

Este segundo objetivo específico surge a partir de la necesidad de apoyarnos elementos históricos que puedan replicarse en la investigación a través de la socrática, explorando nuevas formas de acercamiento a la noción de cuadratura, desligadas de procesos aritméticos, procedimentales, algorítmicos o memorísticos.

En resumen, gracias a los dos objetivos específicos se proporciona de una forma práctica describir la comprensión de la noción de cuadratura a través del área de figuras geométricas planas, permitiendo además durante el proceso, una experiencia más de aprendizaje a partir de su propio razonamiento.

### 5.2 2. Sobre el discurrir de la entrevista

Antes de que se dé inicio a la aplicación de la entrevista, a los estudiantes se les aclara que no existen respuestas incorrectas ya que pueden existir diferentes formas de razonar y darle una solución a lo planteado, y se les hace la observación sobre nuestra intención de apreciar su razonamiento.

Con las primeras preguntas de la entrevista se pretende describir los niveles 0 y I de razonamiento, enmarcados en el modelo de van Hiele y brindar confianza a los estudiantes sobre la sencillez de la prueba, aunque a medida que se va desarrollando se les solicita que tengan un mayor grado de concentración para que sus razonamientos sean más finos y, por ende, de mayor calidad.

Todos los participantes deben colaborar voluntariamente y deben desconocer sobre las entrevistas anteriormente realizadas, para evitar la familiaridad con el contenido (se cree que, sin ser algo decisivo, es conveniente la improvisación en el entrevistado).

Es necesario que durante la entrevista se deba manejar correctamente un diálogo socrático en el que el entrevistador no influya en las respuestas del entrevistado, pero sí posibilite dar respuestas elaboradas que permitan la descripción por parte del investigador.

## 5.3 Proyecciones a futuro

Con la presente investigación se abre la posibilidad para otras líneas de investigación en el campo de la educación matemática, entre las cuales se destaca:

- La posibilidad de analizar la comprensión de la noción de cuadratura mediante un software de geometría dinámico, que permita el diseño de descriptores a través de una entrevista de carácter socrático en el marco del modelo de van Hiele.

- Un análisis histórico-epistemológico de la noción de cuadratura, para que a través del marco teórico de los obstáculos epistemológicos fundamentado en Gaston Bachelard y ampliado por otros autores en el campo de la Educación Matemática, se puedan rastrear otras alternativas para la comprensión de la noción en cuestión y su relación con el concepto de áreas de figuras planas.

## Referencias bibliográficas.

Área | Definición de área - Diccionario de la lengua española - última edición http://dle.rae.es/?id=3UNKjcA. Se consultó el 8 oct. 2018.

Antioquia, U. d. (2018). *Portal udea.* Obtenido de https://goo.gl/KtR4nh.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la Educación Matemática. *EMA*, 8(1), 30-46.

Castro, F., Hernández, D., & Padilla, E. (2010). Una mirada de los obstáculos epistemológicos desde Gastón Bachelard. (Especialización). Recuperado https://repository.unimilitar.edu.co/bitstream/10654/5008/2/CastroForeroLia2010.pdf

Dalcín, M. (1998). *La definición y clasificación de cuadriláteros*. Uruguay.

De la torre Gómez, A. (1997). *Anotaciones a una lectura de Arquímedes.* Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

Duque, J., & Maca, O. (2011). *Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura de los libros I y II de los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica.* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Euclides. (1991). *Los Elementos (Libro I-IV).* Barcelona, España: Editorial Gredos.

Euclides. (1996). *Los Elementos (Libro X-XIII).* Madrid, España: Editorial Gredos.

Freudenthal. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordreckt, Holland: Reidel Pub.Co.

Galina, E. (2008). *Medida, geometría y el proceso de medir*. Córdoba.

González Urbaneja, P. M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid, España: Editorial Alianza.

Jaramillo López, C. M., & Campillo Herrero, P. (2001). *Propuesta Teórica de Entrevista Socrática. Divulgaciones Matemáticas,* 65-84.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En M. Linares, & M. Sánchez, Teoría y práctica en educación matemática* (págs. 295-384). Sevilla, España: Alfar.

Jiménez, D. (2004). *Π: la letra griega que los griegos no usaron.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, XI (1), 103-117.

Jurado, F., & Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. (Tesis de maestría) Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Levi, B. (2006). *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.

Ministerio de Educación Nacional (1994). Ley 115 General de Educación.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. Relime, 221-271.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares.

Ministerio de Educación Nacional (2003). Estándares Básicos de Competencias.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid, España: Ediciones Morata.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry,* Columbus, Estados Unidos: ERIC.

van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A Theory of Mathematics Education.* New York, Estados Unidos: Academic Press.

Vera, F. (1970). *Científicos Griegos* - *Tomo I.* Madrid, España: Juan Bravo.

Vera, F. (1970). *Científicos Griegos* - *Tomo II*. Madrid, España: Juan Bravo.

# ANEXOS

**Anexo 1: Prueba piloto**

Aplicado al curso: Cálculo en varia variables

Código: 2019414

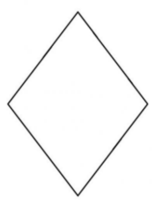
Programa: Licenciatura en matemática y física.

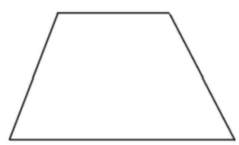
Semestre_________, Nivel ________

**Nota: Realizar todos los procedimientos en las hojas de este taller**

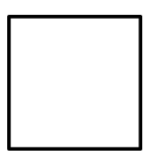
Responde las siguientes preguntas con base a su conocimiento

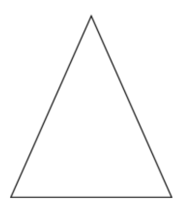
3. Escriba debajo de cada figura su nombre.





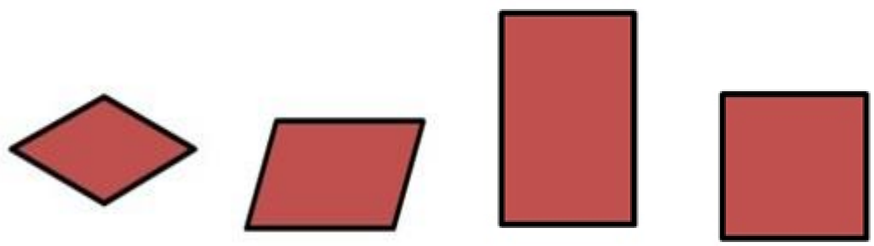
________________ ________________



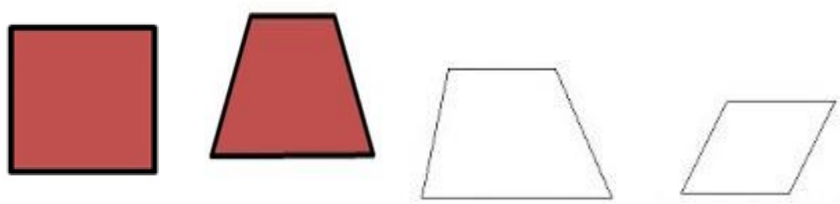


________________ ________________

4. ¿Cuáles de las siguientes figuras representan un cuadrado?

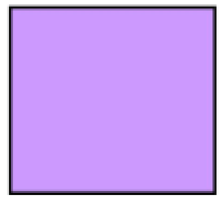


5. ¿Qué figuras representan mejor el concepto de área?



6. Enuncie las propiedades que cree que caracterizan a las siguientes figuras geométricas.
   - Cuadrado
   - Triángulo
   - Rectángulo
   - Rombo
   - Círculo

7. ¿Cuál de las siguientes respuestas referentes a la figura dada, no es correcta?



a. Es un paralelogramo.

b. Es un rombo.

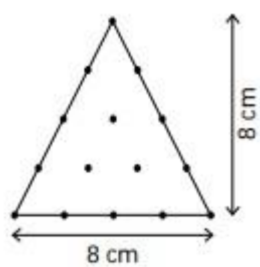
c. Es un cuadrado.

d. Es un cuadrilátero.

e. No puede ser todas las anteriores a la misma vez.

8. La base de un rectángulo que tiene 52 $cm$ de área y su altura mide 4 $cm$. ¿Cuánto mide su base?

9. Calcula el número de triángulos isósceles iguales de 8 cm2 de área que se pueden formar al dividir este triángulo.




Coloque en el paréntesis de la izquierda la letra V o la F según que el enunciado sea verdadero o falso, justifique su respuesta si es verdadera y realice un contraejemplo si es falso

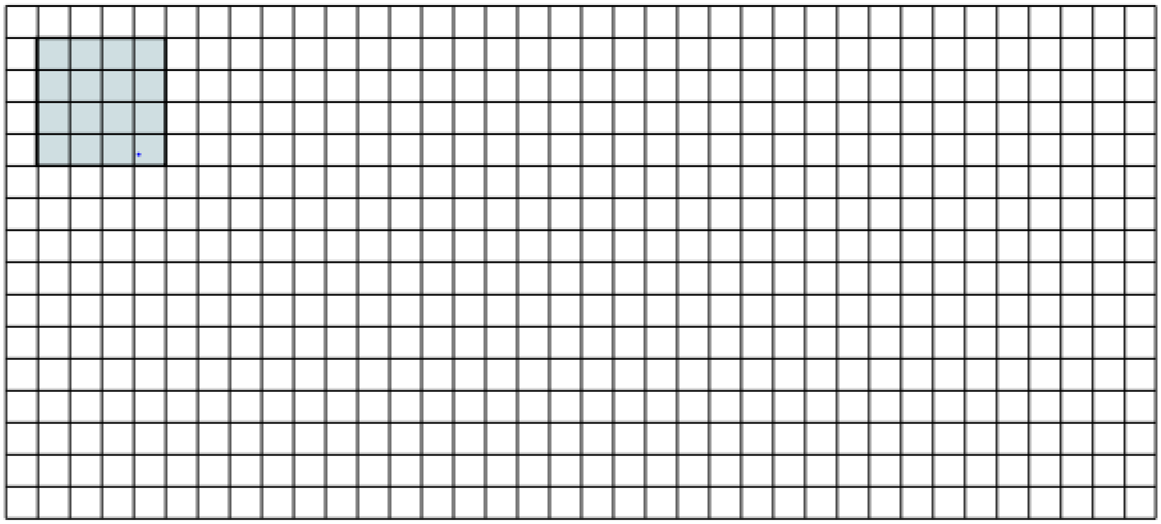
10. (___) Todo cuadrado es un rombo pero no todo rombo es un cuadrado.

11. (___) Todo rectángulo es un cuadrado, pero no todo cuadrado es un rectángulo.

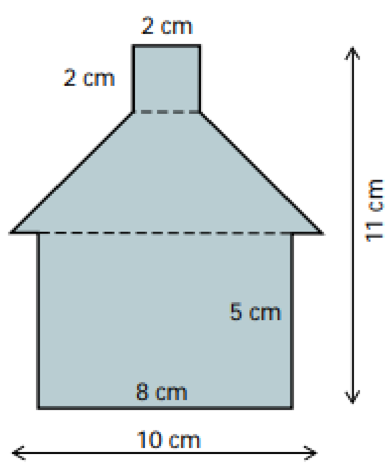
12. ( ) Existe una relación entre el área de un triángulo con el área del rectángulo.

13. Un cuadrado tiene 16 cm2 de área.

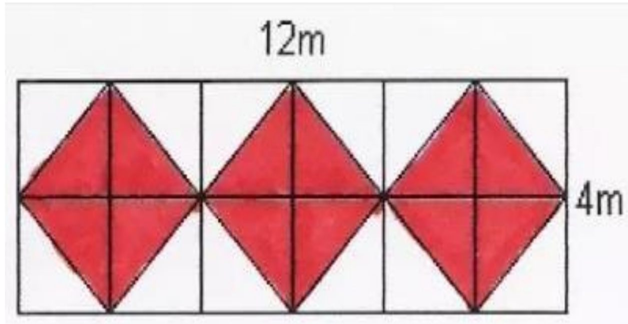
14. Dibuja en la cuadrícula y escribe las dimensiones de un cuadrado, un rectángulo, un romboide, un triángulo y un trapecio que tengan la misma área que el cuadrado.



15. Observa la figura y calcula el área total.

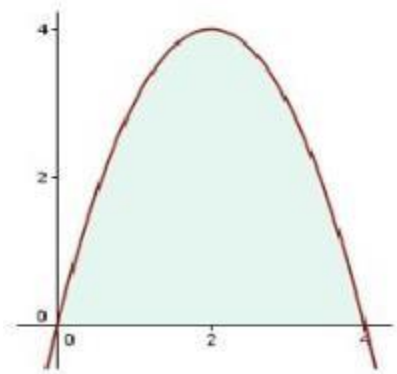



16. Hallar el área sombreada de la siguiente figura



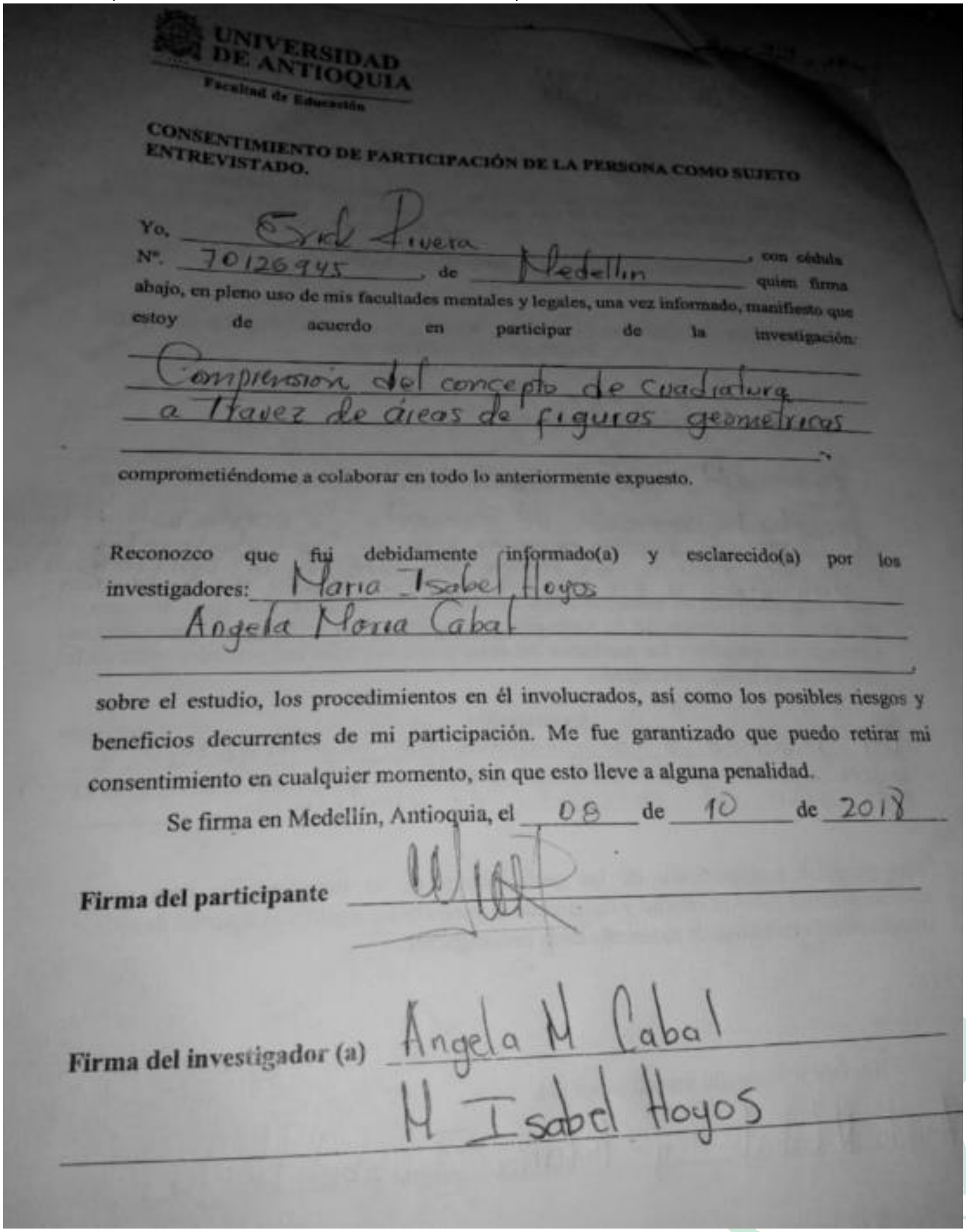

17. Encuentra el área de la parábola sin utilizar integrales

$0 = 4x - x^2$ $\qquad x = 0$ $\qquad x = 4$




18. ¿Tienes alguna noción sobre el concepto de cuadratura? Escribe cuál es esa noción.

**Anexo 2 (Consentimiento de los estudiantes)**



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

CONSENTIMIENTO DE PARTICIPACIÓN DE LA PERSONA COMO SUJETO ENTREVISTADO.

Yo, Erick Rivera, con cédula N°. 70126945, de Medellín quien firma abajo, en pleno uso de mis facultades mentales y legales, una vez informado, manifiesto que estoy de acuerdo en participar de la investigación: Comprensión del concepto de cuadratura a travez de áreas de figuras geométricas; comprometiéndome a colaborar en todo lo anteriormente expuesto.

Reconozco que fui debidamente informado(a) y esclarecido(a) por los investigadores: Maria Isabel Hoyos, Angela Maria Cabal, sobre el estudio, los procedimientos en él involucrados, así como los posibles riesgos y beneficios decurrentes de mi participación. Me fue garantizado que puedo retirar mi consentimiento en cualquier momento, sin que esto lleve a alguna penalidad.

Se firma en Medellín, Antioquia, el 08 de 10 de 2018

**Firma del participante** ______________________

**Firma del investigador (a)** Angela M Cabal

M Isabel Hoyos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

## TÉRMINO DE CONSENTIMIENTO LIBRE E INFORMADO

Usted está siendo invitado(a) para participar, como voluntario(a), en una investigación del área de Educación. Después de tener conocimiento acerca de la investigación, en caso de aceptar hacer parte del estudio, por favor firme al final de este documento.

### INFORMACIÓN SOBRE LA INVESTIGACIÓN:

**Título del proyecto:**

**COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE CUADRATURA A TRAVÉS DE ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS**

**Investigador (a) responsable y contactos**

El proyecto de investigación "Compresión del concepto de cuadratura a través..." el cual tiene como objetivo:
Describir la compresión del concepto de cuadratura a través del área de figuras geometricas en los estudiantes de un curso de cálculo en varias variables de la licenciatura en Matemáticas y física de la Universidad de Antioquia.

Nos comprometemos en preservar todos los nombres de docentes, directivos docentes y estudiantes de la Universidad de Antioquia, participantes de la investigación; así como en compartir el desarrollo y los resultados del estudio con todos los entrevistados antes de la publicación del trabajo de pregrado.

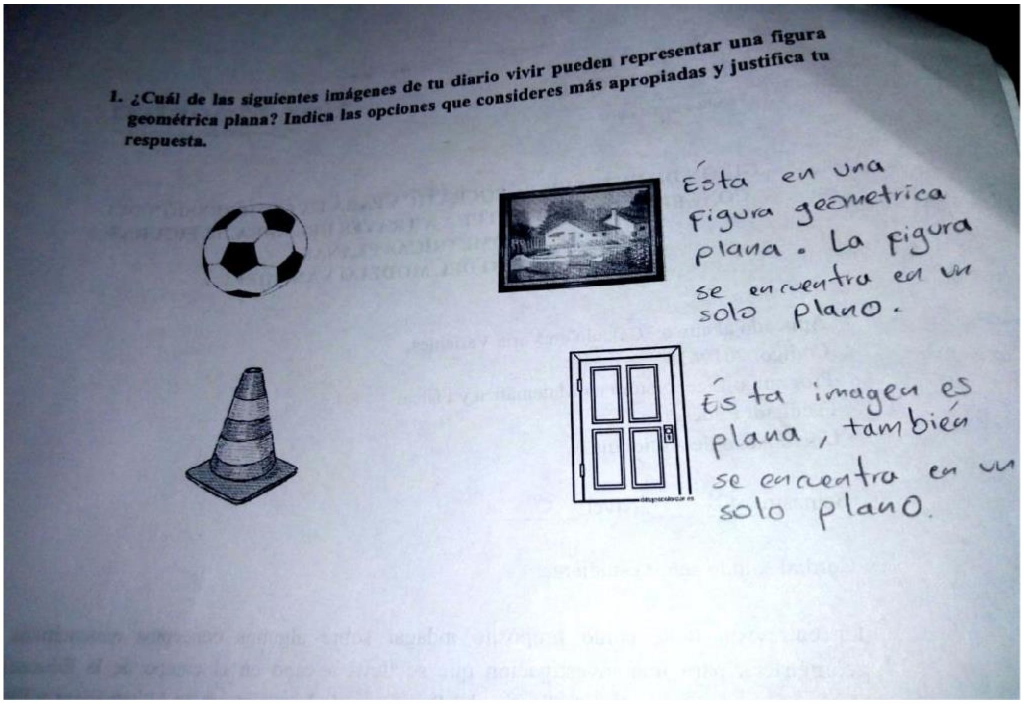
La investigación pretende
Dar respuesta a la pregunta de investigación y además abrir una nueva posibilidad para investigar más sobre el concepto de cuadratura

Nos ponemos a disposición de los participantes de la investigación para mayores esclarecimientos sobre el estudio y reiteramos la garantía del sigilo y el derecho de retirar su consentimiento en cualquier momento de la investigación.

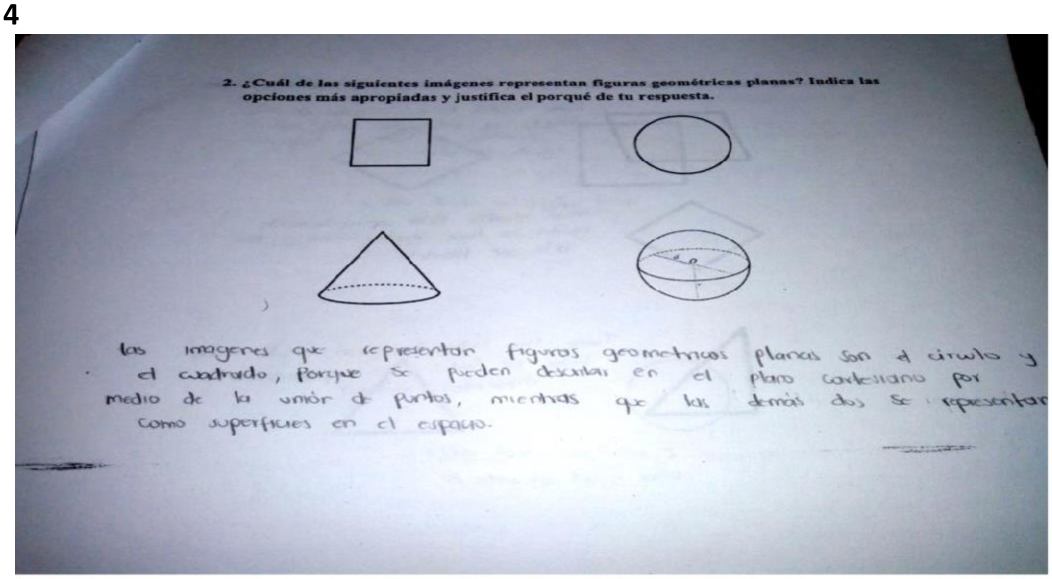
Nombre y firma del investigador (a):

Angela M Cabal y Maria Isabel Hoyos

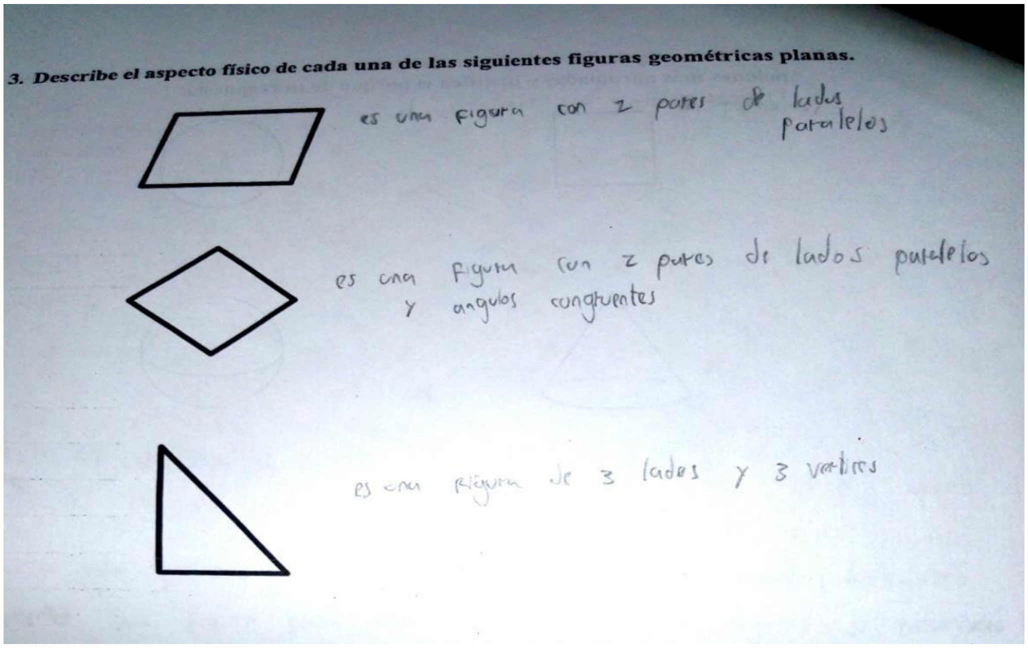
**Anexo 3**



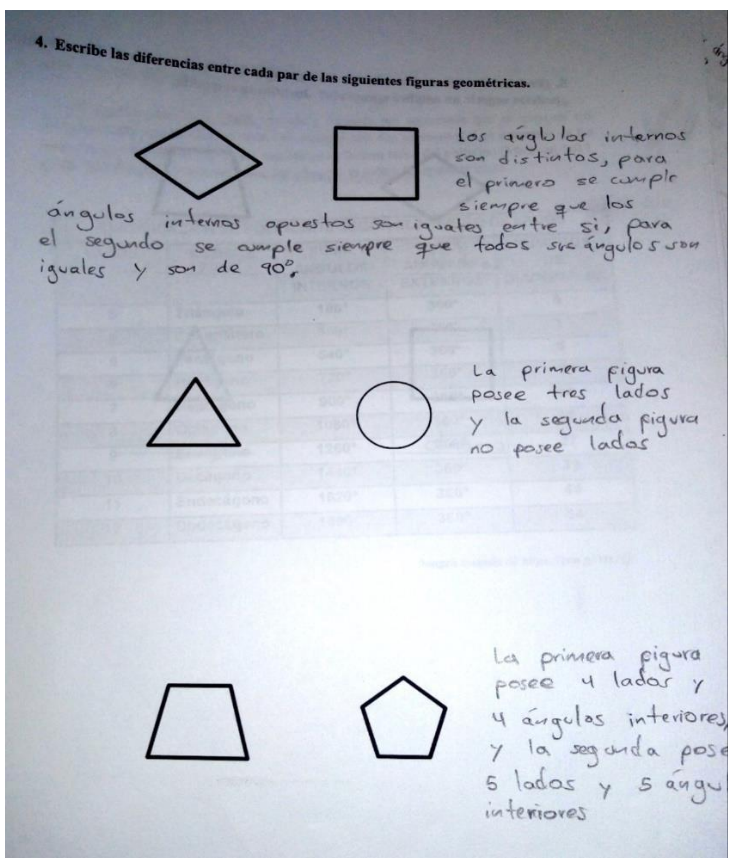

**Anexo 4**



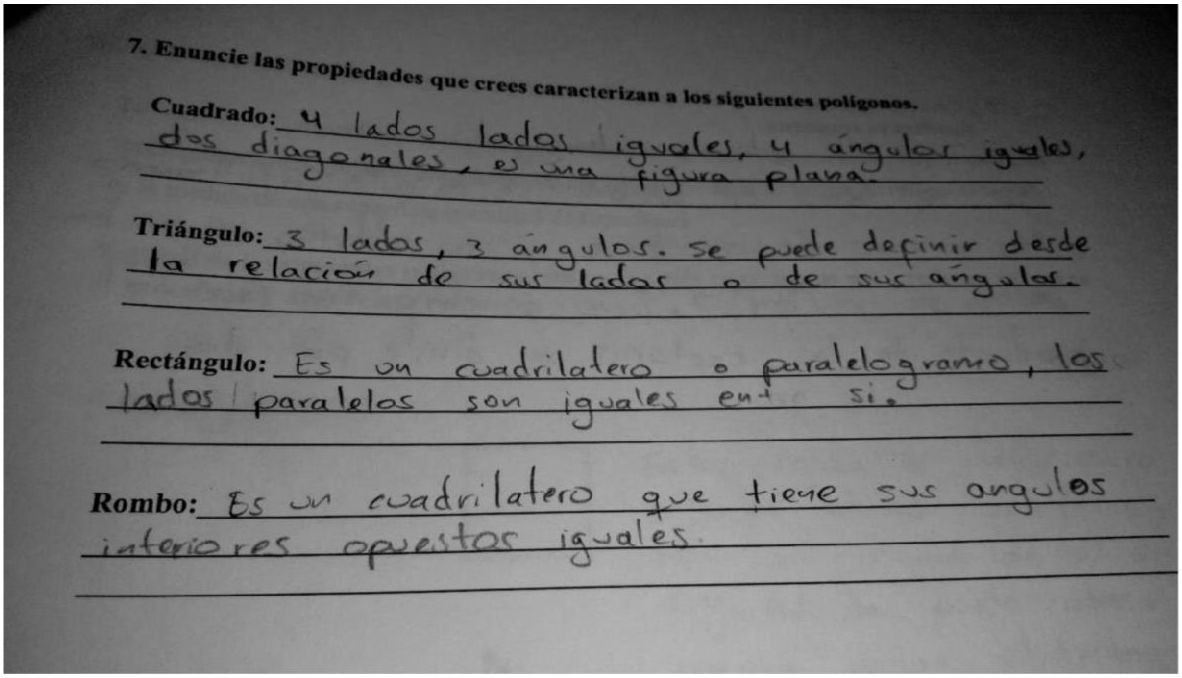
**Anexo 5**




**Anexo 6**



**Anexo 7**



**7. Enuncie las propiedades que crees caracterizan a los siguientes polígonos.**

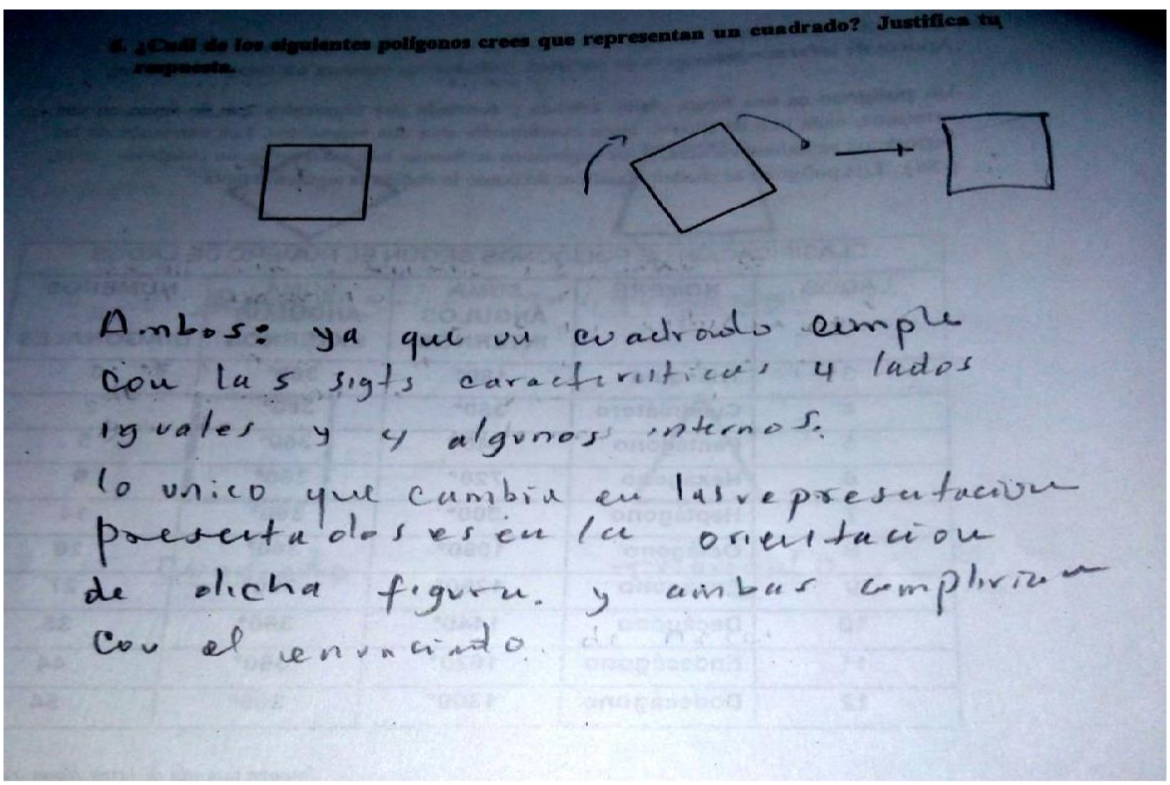
Cuadrado: 4 lados lados iguales, 4 ángulos iguales, dos diagonales, es una figura plana.

Triángulo: 3 lados, 3 ángulos. se puede definir desde la relación de sus lados o de sus ángulos.

Rectángulo: Es un cuadrilatero o paralelogramo, los lados paralelos son iguales ent si.

Rombo: Es un cuadrilatero que tiene sus angulos interiores opuestos iguales.

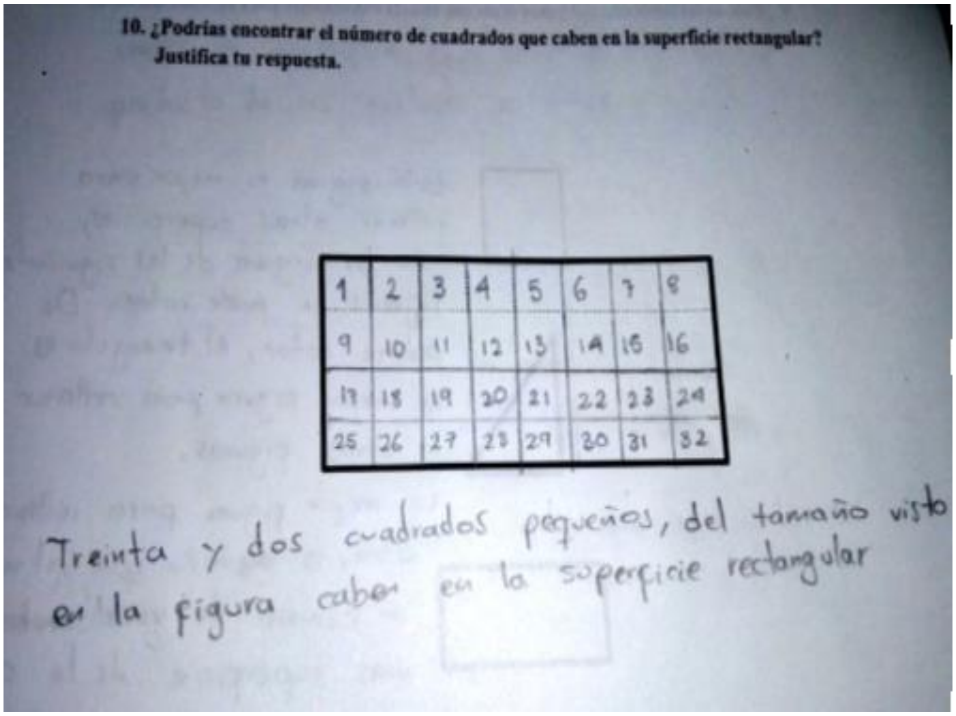
**Anexo 8**



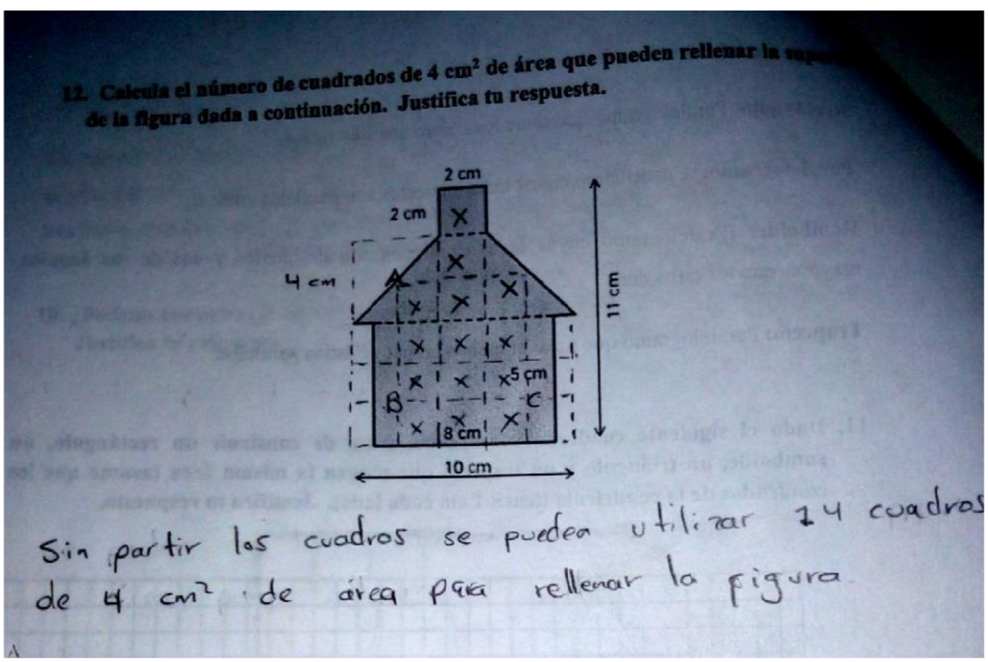
**6. ¿Cuál de los siguientes polígonos crees que representan un cuadrado? Justifica tu respuesta.**

Ambos: ya que un cuadrado cumple con las sigts caracteristicas 4 lados iguales y 4 algunos internos.
lo unico que cambia en las representaciones presentadas es en la orientacion de dicha figura. y ambas cumpliran con el enunciado.

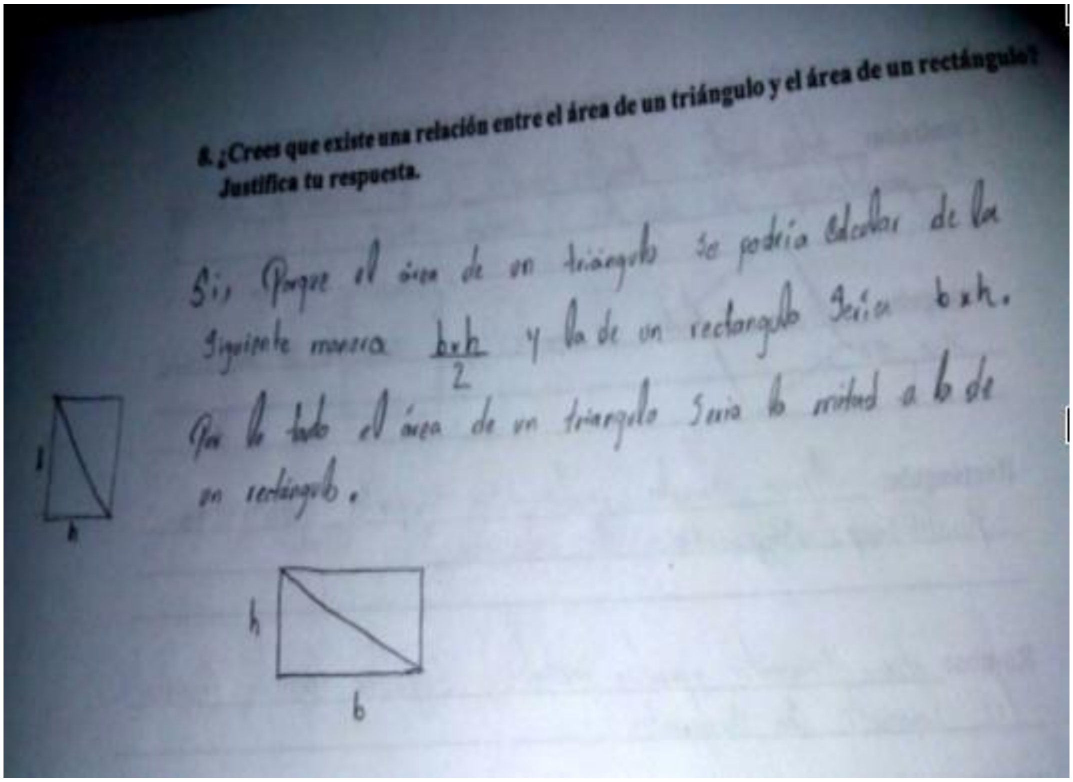
## Anexo 9




## Anexo 10



**Anexo 11**

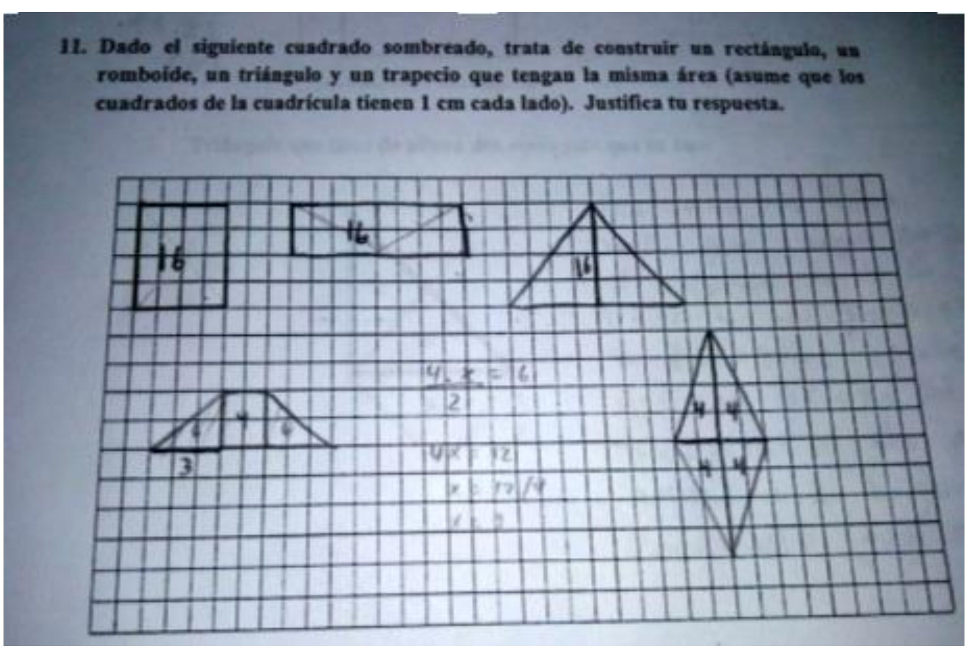


8. ¿Crees que existe una relación entre el área de un triángulo y el área de un rectángulo? Justifica tu respuesta.

Si, Porque el área de un triángulo se podría calcular de la siguiente manera $\frac{b \times h}{2}$ y la de un rectangulo sería $b \times h$. Por lo tanto el área de un triángulo sería la mitad a la de un rectángulo.

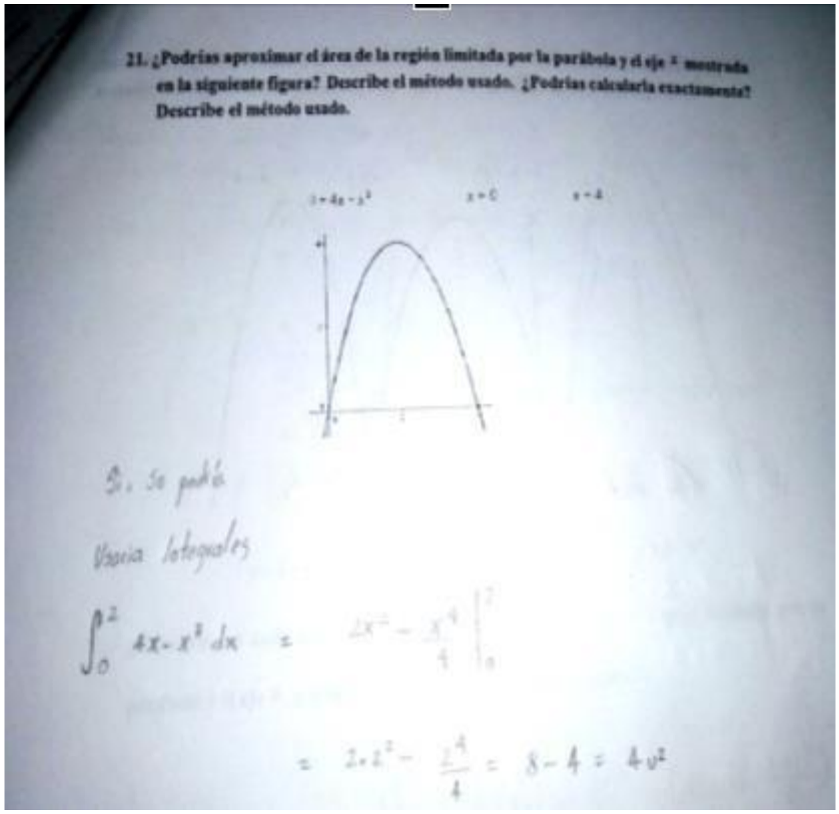


**Anexo 12**



11. Dado el siguiente cuadrado sombreado, trata de construir un rectángulo, un romboide, un triángulo y un trapecio que tengan la misma área (asume que los cuadrados de la cuadrícula tienen 1 cm cada lado). Justifica tu respuesta.

**Anexo 13**



21. ¿Podrías aproximar el área de la región limitada por la parábola y el eje $x$ mostrada en la siguiente figura? Describe el método usado. ¿Podrías calcularla exactamente? Describe el método usado.



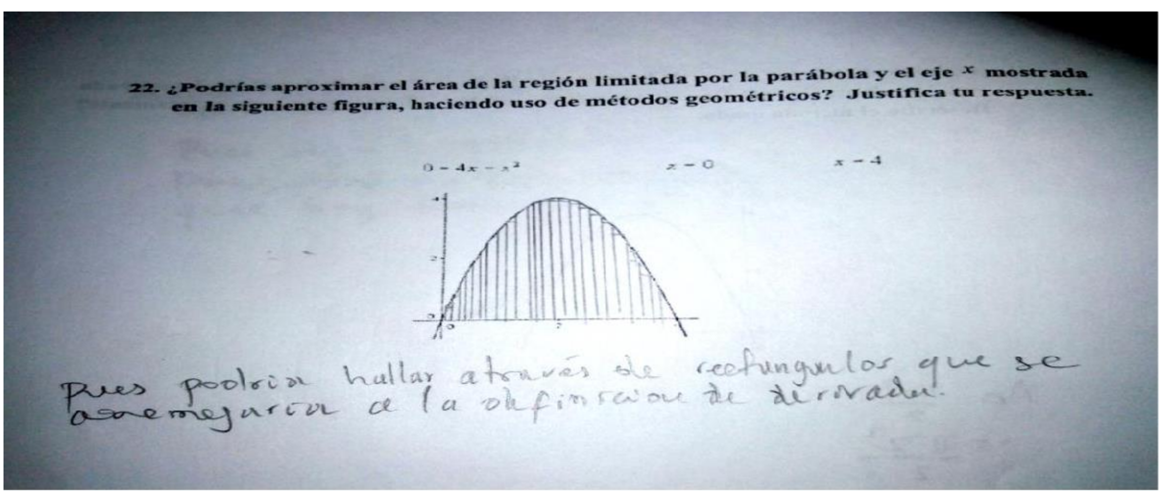
Si, se podría

Usaría Integrales

$$\int_0^2 4x - x^2\, dx = 2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^2$$

$$= 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} = 8 - 4 = 4u^2$$

**Anexo 14**

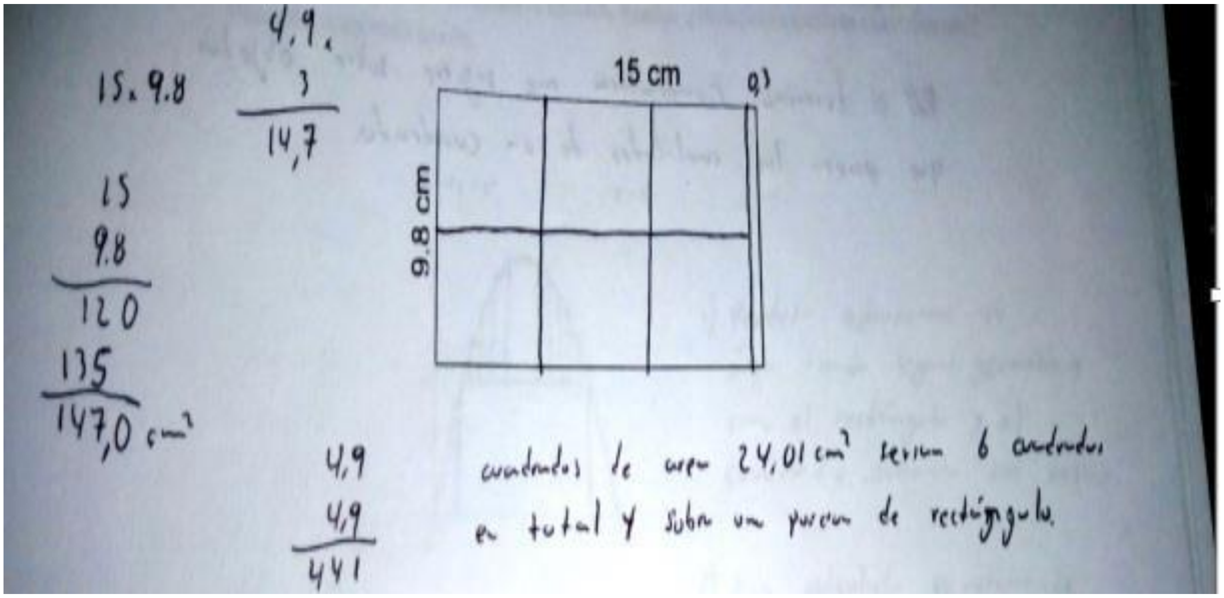


22. ¿Podrías aproximar el área de la región limitada por la parábola y el eje $x$ mostrada en la siguiente figura, haciendo uso de métodos geométricos? Justifica tu respuesta.

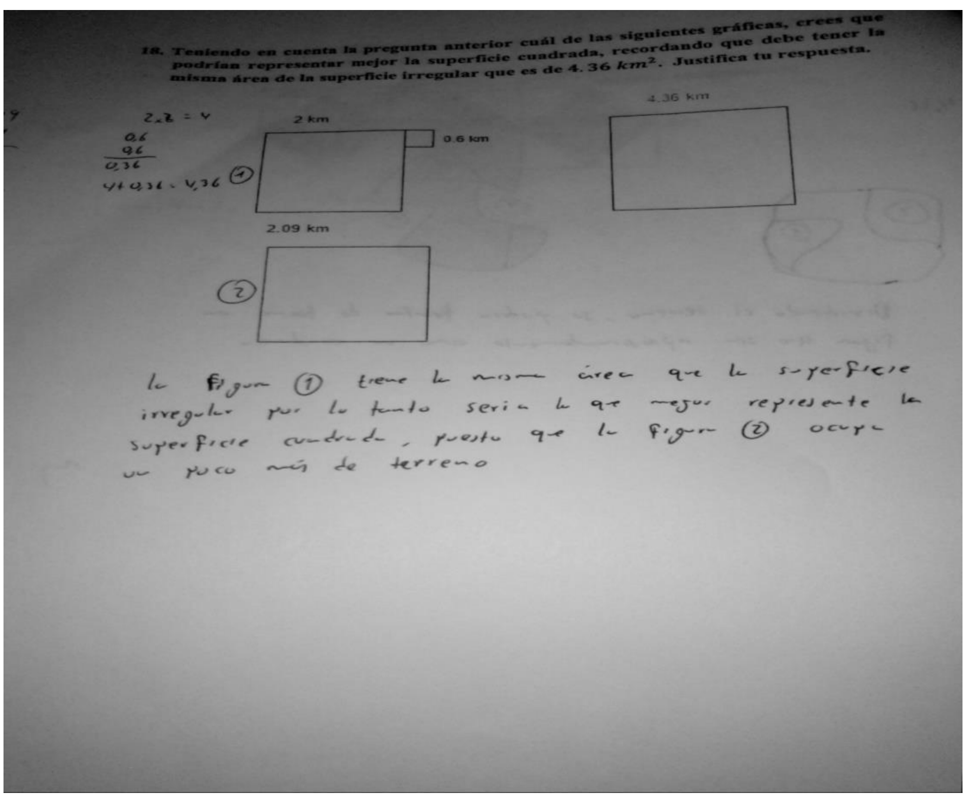


Pues podría hallar através de rectangulos que se asemejaría a la definición de derivada.

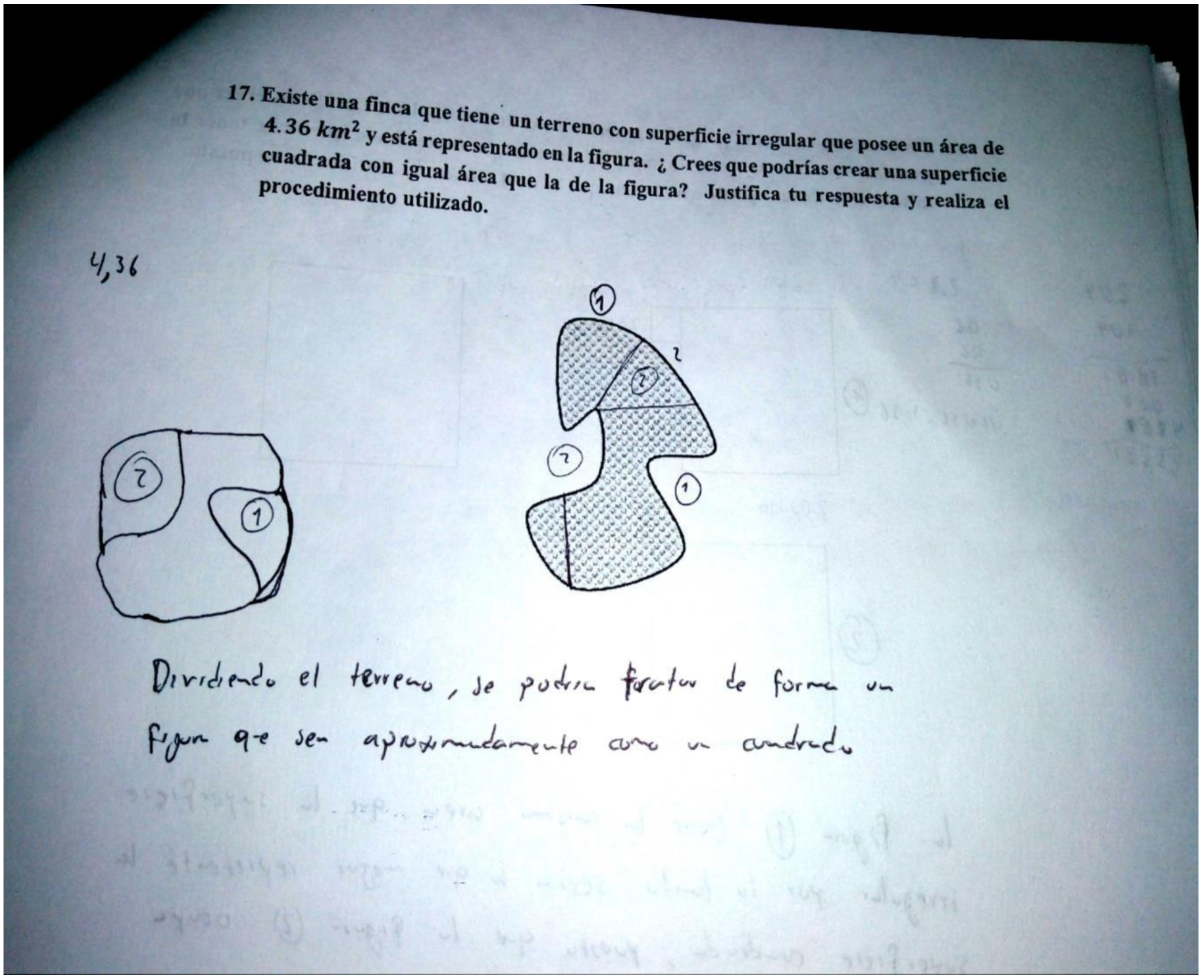
**Anexo 15**




**Anexo 16**



**Anexo 17**



17. **Existe una finca que tiene un terreno con superficie irregular que posee un área de $4.36\ km^2$ y está representado en la figura. ¿ Crees que podrías crear una superficie cuadrada con igual área que la de la figura? Justifica tu respuesta y realiza el procedimiento utilizado.**

4,36

Dividiendo el terreno, se podria formar de forma un figura que sea aproximadamente como un cuadrado

**Anexo 18 (Entrevista socrática final)**

## GUIÓN DE ENTREVISTA SOCRÁTICA PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE CUADRATURA A TRAVÉS DEL ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS EN EL MARCO DEL MODELO VAN- HIELE.

Aplicado al curso: Cálculo en Varia Variables.

Código: 2019414

Programa: Licenciatura en Matemática y Física.

Facultad: Educación.

Universidad de Antioquia.

Semestre_________, Nivel ________

Cordial saludo señor estudiante:

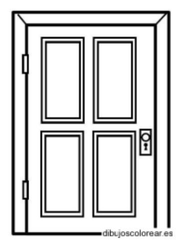
La entrevista tiene como propósito indagar sobre algunos conceptos matemáticos y geométricos para una investigación que se lleva a cabo en el campo de la Educación Matemática por parte de estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación-Universidad de Antioquia. Agradecemos de antemano tu disposición y te solicitamos centrar toda tu atención para obtener respuestas objetivas y con un alto grado de razonamiento.

Cuando no entiendas un enunciado o te parezca que las opciones de las respuestas dadas no se ajustan a lo que crees que sería correcto, debes escribir la respuesta que consideres conveniente, justificando siempre el porqué de tu respuesta.

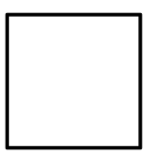
No dejes ninguna pregunta en blanco y no respondas al azar.

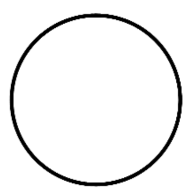
**Nota: Realizar todos los procedimientos en estas hojas.**

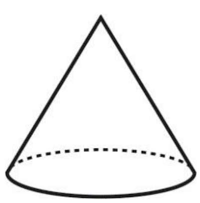
**1. ¿Cuál de las siguientes imágenes de tu diario vivir pueden representar una figura geométrica plana? Indica las opciones que consideres más apropiadas y justifica tu respuesta.**

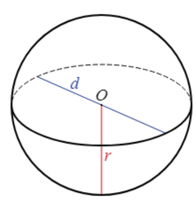



**2. ¿Cuál de las siguientes imágenes representan figuras geométricas planas? Indica las opciones más apropiadas y justifica el porqué de tu respuesta.**

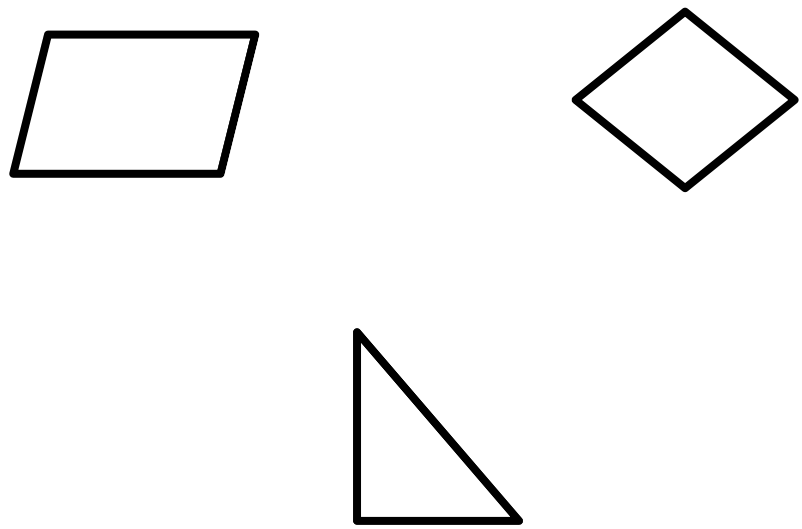




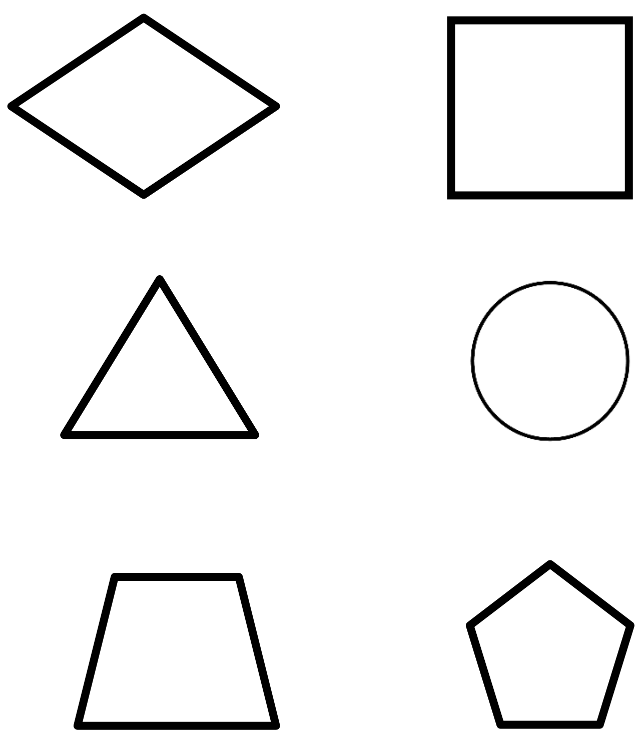




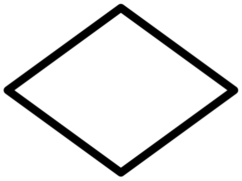
**3. Describe el aspecto físico de cada una de las siguientes figuras geométricas planas.**

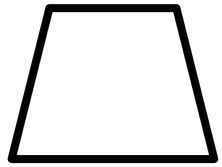


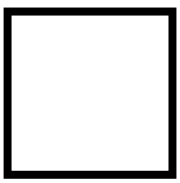
**4. Escribe las diferencias entre cada par de las siguientes figuras geométricas.**

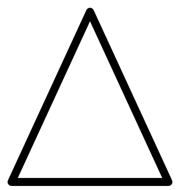


**5. ¿Podrías identificar el nombre de las siguientes figuras geométricas? En otro caso, ¿podrías sugerir un nombre apropiado? Justifica tu respuesta.**









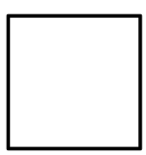
**Aporte de información:**

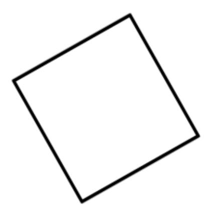
Un **polígono** es una figura plana, cerrada y formada por segmentos que se unen en sus extremos, cada uno de ellos se unen exactamente con dos segmentos. Los extremos de los segmentos se llaman vértices, y los segmentos se llaman lados del polígono (Malaver, 2017, p.88). Los polígonos se pueden clasificar tal como lo indica la siguiente tabla:

| CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS SEGÚN EL NÚMERO DE LADOS | | | | |
|---|---|---|---|---|
| LADOS | **NOMBRE** | **SUMA ÁNGULOS INTERNOS** | **SUMA ÁNGULOS EXTERNOS** | **NÚMEROS DE DIAGONALES** |
| 3 | **Triángulo** | **180°** | **360°** | **0** |
| 4 | **Cuadrilátero** | **360°** | **360°** | **2** |
| 5 | **Pentágono** | **540°** | **360°** | **5** |
| 6 | **Hexágono** | **720°** | **360°** | **9** |
| 7 | **Heptágono** | **900°** | **360°** | **14** |
| 8 | **Octágono** | **1080°** | **360°** | **20** |
| 9 | **Eneágono** | **1260°** | **360°** | **27** |
| 10 | **Decágono** | **1440°** | **360°** | **35** |
| 11 | **Endecágono** | **1620°** | **360°** | **44** |
| 12 | **Dodecágono** | **1800°** | **360°** | **54** |

*Imagen tomada de https://goo.gl/xtx1Q*

**6. ¿Cuál de los siguientes polígonos crees que representan un cuadrado? Justifica tu respuesta.**





**7. Enuncie las propiedades que crees caracterizan a los siguientes polígonos.**

**Cuadrado:**__________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

**Triángulo:**________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

**Rectángulo:**_______________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

**Rombo:**__________________________________________________

____________________________________________________________

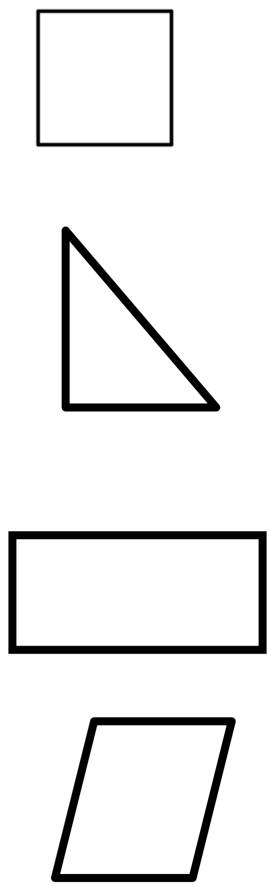
____________________________________________________________

**8. ¿Crees que existe una relación entre el área de un triángulo y el área de un rectángulo? Justifica tu respuesta.**

**Aporte de información:**

La noción de **superficie** es lo que se refiere a la forma geométrica, hay superficies rectangulares, triangulares, circulares, etc.; la noción de **área** es lo que se refiere al tamaño, es la medida de una superficie (cantidad de superficie).

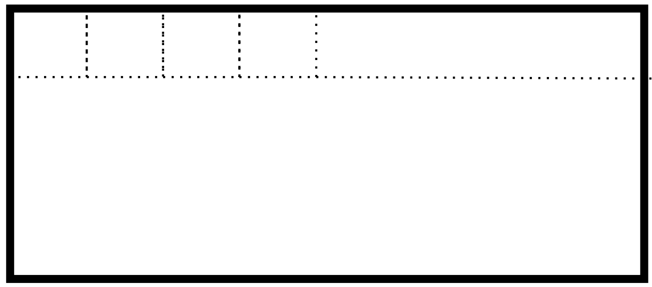
**9. ¿Cuál de los siguientes polígonos crees que es más conveniente para rellenar las otras superficies? Justifica tu respuesta.**



**Aporte de información:**

El cuadrado es la figura rectilínea perfecta por excelencia y se impuso desde el principio como el principal patrón de comparación, de allí que la palabra "**cuadratura**" fuera utilizada como una forma de referirse a lo que hoy denominamos cálculo del área (Jiménez, 2004, p.105).

**10. ¿Podrías encontrar el número de cuadrados que caben en la superficie rectangular? Justifica tu respuesta.**



**Aporte de información:**

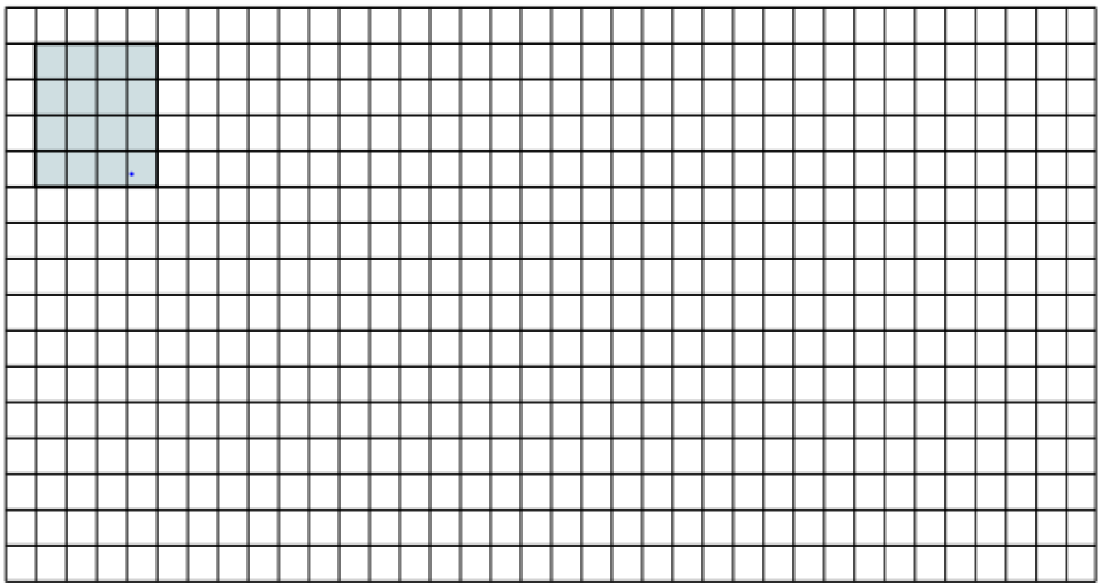
**Rectángulo:** Paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos.

**Paralelogramo:** Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí.

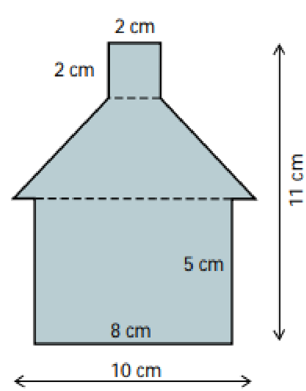
**Romboide:** Paralelogramo cuyos lados contiguos son desiguales y dos de sus ángulos mayores que los otros dos.

**Trapecio:** Paralelogramo que tiene al menos un par de lados paralelos.

**11. Dado el siguiente cuadrado sombreado, trata de construir un rectángulo, un romboide, un triángulo y un trapecio que tengan la misma área (asume que los cuadrados de la cuadrícula tienen 1 cm cada lado). Justifica tu respuesta.**



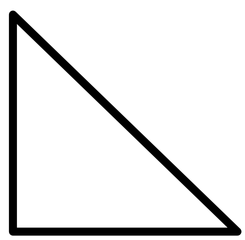
**12. Calcula el número de cuadrados de 4 $cm^2$ de área que pueden rellenar la superficie de la figura dada a continuación. Justifica tu respuesta.**



**13. Dibuja un cuadrado que tenga la misma área de las siguientes figuras y describe el proceso que realizaste.**

**Rectángulo que tiene de ancho 4 veces más que su largo**

**Triángulo que tiene de altura dos veces más que su base**



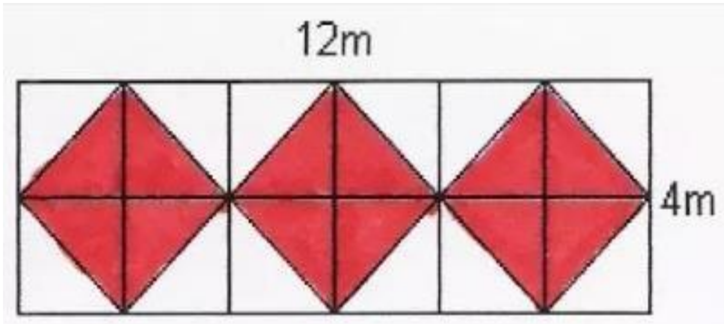
**14. Ahora, utilizando los acoplamientos de los polígonos entregados, trata de armar un cuadrado y contesta las siguientes preguntas con cada uno:**

**¿Fue posible armar el cuadrado?**

**¿Tienen la misma área la figura que formo con el cuadrado?**

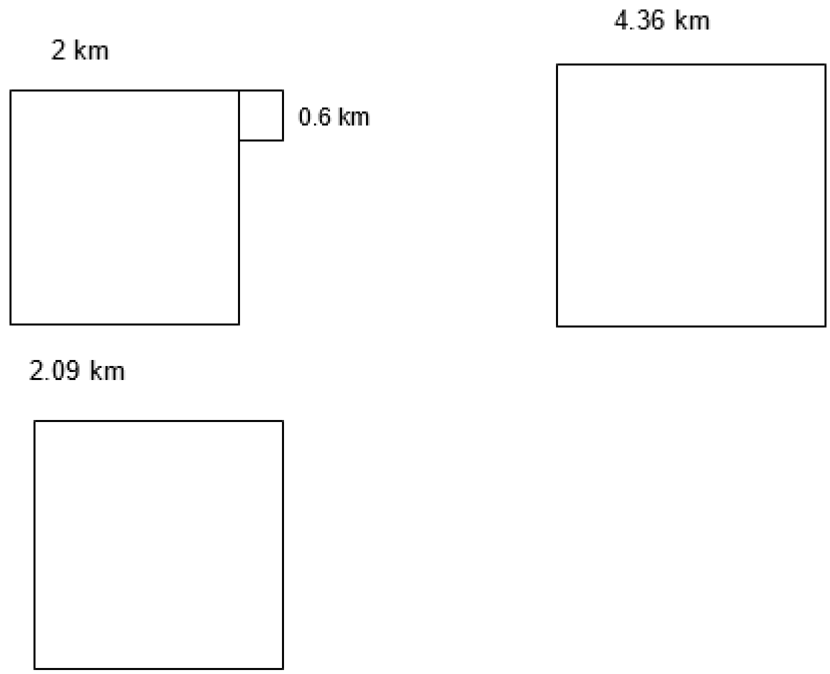
**15. ¿Crees que es posible formar un cuadrado de igual área que el de otro polígono? Da un ejemplo de cuál y cómo lo harías (ten en cuenta en no hacer una de las figuras utilizadas anteriormente en la entrevista).**

**16. Hallar el área sombreada de la siguiente figura.**

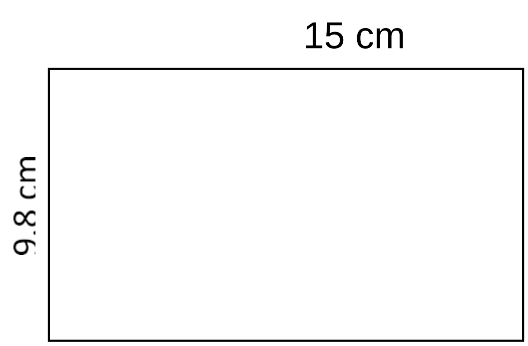



**17. Existe una finca que tiene un terreno con superficie irregular que posee un área de $4.36\ km^2$ y está representado en la figura. ¿Crees que podrías crear una superficie cuadrada con igual área que la de la figura? Justifica tu respuesta y realiza el procedimiento utilizado.**

**18. Teniendo en cuenta la pregunta anterior cuál de las siguientes gráficas, crees que podrían representar mejor la superficie cuadrada, recordando que debe tener la misma área de la superficie irregular que es de $4.\ 36\ km^2$. Justifica tu respuesta**

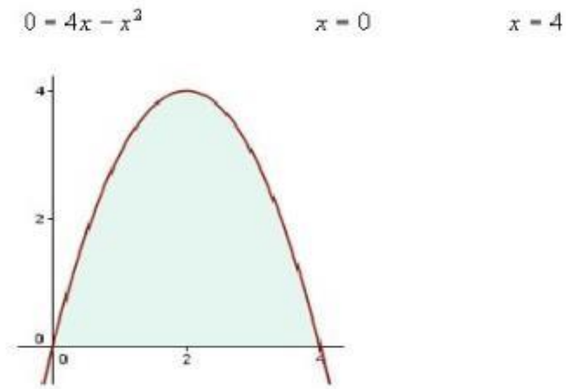



**19. Llenar el siguiente rectángulo con los cuadrados de la mayor área posible.**

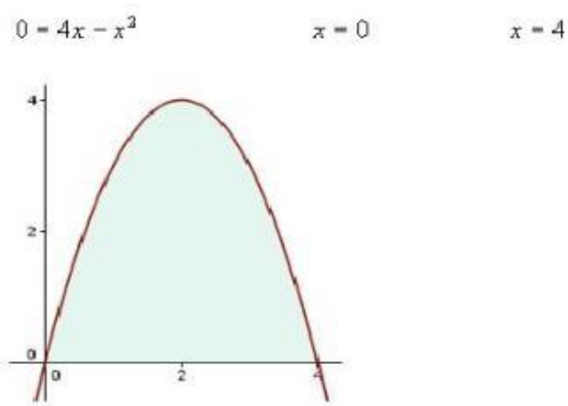



**20. ¿Tienes alguna idea acerca del concepto de *cuadratura*? En caso contrario, ¿qué te sugiere el término?**

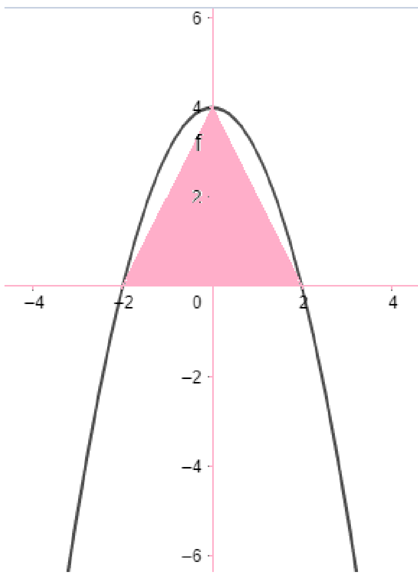
**21. ¿Podrías aproximar el área de la región limitada por la parábola y el eje $x$ mostrada en la siguiente figura? Describe el método usado. ¿Podrías calcularla exactamente? Describe el método usado.**

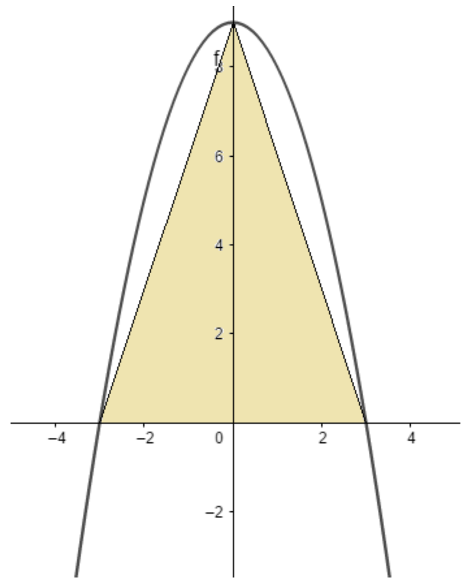



**22.** **¿Podrías aproximar el área de la región limitada por la parábola y el eje $x$ mostrada en la siguiente figura, haciendo uso de métodos geométricos? Justifica tu respuesta.**




**23.** **Calcula el área de la región limitada por la parábola y el eje $x$ mostrada en la siguiente figura. Luego, calcula el área de los triángulos ABC para cada caso.**




$y = 4 - x^2$ $y = 9 - x^2$

**¿Observas en cada caso alguna relación entre el área de la región limitada por la parábola y el eje $x$, y el área del respectivo triángulo inscrito?**

**Aporte de información:**

**Cuadratura de la parábola:** El área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de un triángulo de la misma base y la misma altura que el segmento. Arquímedes demostró la cuadratura de la parábola a través del método de exhaución (Torres, 1997, p.113)

**24. ¿Podría traducir el aporte de información anterior en una ecuación? Explicita la ecuación.**

**25. Dada una región cualquiera, ¿crees que puedas formar una figura con superficie cuadrada?**