



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**ARTICULACIÓN ENTRE LOS CONOCIMIENTOS
EN MATEMÁTICAS Y EN FÍSICA A TRAVÉS DE
LA MODELACIÓN Y LA EXPERIMENTACIÓN**

Sebastián Mejía Arango

Ana Carolina González Grisales

Alexander Castrillón-Yepes

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2019



Articulación entre los conocimientos en Matemáticas y en Física a través de la modelación y la experimentación

Sebastián Mejía Arango
Ana Carolina González Grisales
Alexander Castrillón-Yepes

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:
Licenciado en Matemáticas y Física

Asesora:

Paula Andrea Rendón-Mesa
Doctora en Educación

Línea de Investigación:
Modelación en Educación

Grupo de Investigación:
MATHEMA-FIEM

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Medellín, Colombia

2019

Dedicatoria

Sebastián Mejía Arango: Dedicado a mis padres y a mis abuelos, que con tanto esfuerzo permitieron que cumpliera mi sueño de ser docente. Agradezco a su vez a todas las personas que con sus comentarios hicieron posible el desarrollo de este trabajo, a mis compañeros de trabajo de grado por todas las enseñanzas que me dieron durante este proceso. Por último, felicito a mi asesora por el compromiso profesional y humano que me brindó en mi formación docente e investigativa.

Ana Carolina González Grisales: Dedicado a mis padres y a mi hermano, que con tanto esfuerzo me han apoyado en este camino de la docencia. Agradezco a mi asesora Paula Andrea Rendón, quién hizo posible que este proceso se llevara a cabo y pudiera crecer tanto en el ámbito académico como en el personal. Agradezco a todas aquellas personas que con sus comentarios ayudaron al desarrollo de este trabajo. Y agradezco a mi pareja, que con sus consejos y apoyo incondicional me ayudó para no desfallecer en el camino.

Alexander Castrillón Yepes: Dedicado a mi familia, que soportó mis ausencias para culminar este proceso y me apoyó siempre. A mis compañeros de trabajo de grado que con su esfuerzo y dedicación lograron materializar ideas ambiciosas en el contexto escolar y a la asesora de trabajo de grado, amiga y compañera de viaje en este mundo académico y personal.

CONTENIDO

| | |
|---|----|
| INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA | 3 |
| 1.1 Contextualización..... | 3 |
| 1.2. Delimitación del problema de investigación | 5 |
| 1.2.1. Nivel institucional..... | 5 |
| 1.2.2. Nivel documental..... | 9 |
| 1.3. Objetivos | 13 |
| 1.3.1 Objetivo general..... | 13 |
| 1.3.2 Objetivos específicos | 14 |
| 2. REFERENTES TEÓRICOS | 15 |
| 2.1 Los conocimientos en matemáticas y en física | 15 |
| 2.1.1. Los conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas | 15 |
| 2.1.2 Los conocimientos conceptuales y procedimentales en física..... | 21 |
| 2.2 La modelación y la experimentación | 26 |
| 2.2.1 Aspectos de la modelación | 27 |
| 2.2.2 Aspectos de la experimentación | 35 |
| 3. DISEÑO METODOLÓGICO..... | 40 |
| 3.1 Enfoque | 40 |
| 3.2. Contexto | 42 |
| 3.2.2. Escenario investigativo..... | 44 |
| 3.3. Etapas de la investigación | 45 |
| 3.3.1. Etapa 1. Configuración del problema y revisión de la literatura. | 45 |
| 3.3.2. Etapa 2. Diseño, construcción y validación de un instrumento articulador. | 47 |
| 3.3.3. Etapa 3. Implementación del instrumento articulador, recolección y análisis de la información..... | 50 |
| 3.4. Consideraciones éticas | 55 |
| 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS | 57 |
| 4.1 Relación entre conocimientos conceptuales en matemáticas y física. | 57 |
| 4.2 Relación entre conocimientos procedimentales en matemáticas y física..... | 62 |
| 4.3 Relación entre conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y física ... | 68 |

| | |
|--|-----|
| 4.4 Dificultades para la articulación entre conocimientos en matemáticas y en física | 72 |
| 4.5 Categorías secundarias | 76 |
| 5. CONCLUSIONES Y DISCUSIONES | 83 |
| REFERENCIAS..... | 87 |
| ANEXOS | 95 |
| Anexo A. Formato de Diario Pedagógico | 95 |
| Anexo B. Instrumento de implementación..... | 96 |
| Anexo C. Fases del proceso de implementación..... | 112 |
| Anexo D. Formato de consentimiento informado..... | 116 |

LISTA DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 1. <i>Destrezas en clases de ciencias</i> | 23 |
| Tabla 2. <i>Características generales del proceso de modelación</i> | 33 |
| Tabla 3. <i>Acciones de modelación y experimentación.</i> | 38 |
| Tabla 4. <i>Categorías iniciales y descriptores</i> | 52 |
| Tabla 5. <i>Relación entre variables y video</i> | 62 |
| Tabla 6. <i>Respuestas de las preguntas de selección múltiple de los grupos 11°1 y 11°2</i> | 63 |
| Tabla 7. <i>Afirmaciones respecto a las gráficas</i> | 75 |
| Tabla 8. <i>Evidencias de categorías emergentes.</i> | 79 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| <i>Figura 1.</i> Problema de investigación. | 13 |
| <i>Figura 2.</i> Conocimiento matemático desde los aspectos abordados. | 20 |
| <i>Figura 3.</i> Convergencia entre conocimientos. | 26 |
| <i>Figura 4.</i> Ciclo de modelación de Perrenet y Zwaneveld (2012). | 29 |
| <i>Figura 5.</i> Ciclo propuesto por Rodríguez y Quiroz (2016). | 31 |
| <i>Figura 6.</i> Fases de modelación de Caron y Pineau (2017). | 32 |
| <i>Figura 7.</i> Etapas del proceso investigativo. | 51 |
| <i>Figura 8.</i> Categorías iniciales y categorías emergentes de la investigación. | 55 |
| <i>Figura 9.</i> Respuesta de un estudiante. | 58 |
| <i>Figura 10.</i> Respuesta de un estudiante. | 58 |
| <i>Figura 11.</i> Respuesta de un estudiante. | 58 |
| <i>Figura 12.</i> Respuesta de un estudiante. | 59 |
| <i>Figura 13.</i> Relación entre conocimientos conceptuales en matemáticas y física. | 60 |
| <i>Figura 14.</i> Relación de dependencia e independencia entre variables. | 60 |
| <i>Figura 15.</i> Relación de dependencia e independencia entre variables. | 60 |
| <i>Figura 16.</i> Relación funciones periódicas y MAS. | 61 |
| <i>Figura 17.</i> Respuesta de un estudiante. | 64 |
| <i>Figura 18.</i> Práctica del sistema masa-resorte. | 65 |
| <i>Figura 19.</i> Gráfica de posición vs tiempo. | 66 |
| <i>Figura 20.</i> Gráfica de posición vs tiempo. | 66 |
| <i>Figura 21.</i> Gráfica de posición vs tiempo. | 66 |
| <i>Figura 22.</i> Experimento realizado por los estudiantes. | 68 |
| <i>Figura 23.</i> Registros de las construcciones hechas por los estudiantes. | 71 |
| <i>Figura 24.</i> Variables del movimiento periódico. | 73 |
| <i>Figura 25.</i> Respuestas de los estudiantes. | 74 |
| <i>Figura 26.</i> Respuesta de una estudiante. | 74 |

RESUMEN

En este documento se presenta una investigación que se realizó en el marco del programa de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). El problema de dicha investigación emergió de la práctica pedagógica que se desarrolló en la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa del municipio de Caldas-Antioquia y se centró en la desarticulación entre los conocimientos en matemáticas y física en estudiantes de educación media. Este problema se delimitó a través de un nivel institucional y un nivel documental que contienen los planes de área institucionales en matemáticas y en física, los diarios pedagógicos de los maestros en formación, los documentos rectores y algunos reportes de la literatura en educación en matemáticas y educación en ciencias. A partir del problema se planteó la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo la modelación y la experimentación promueven articulaciones entre el conocimiento en matemáticas y en física en estudiantes de educación media?

Para responder a la pregunta se adoptaron algunos referentes teóricos frente a tres aspectos centrales, a saber: los conocimientos, la modelación y la experimentación. Se asumieron dos tipos de conocimientos que reporta la literatura, los conocimientos conceptuales y los conocimientos procedimentales; la modelación y la experimentación se presentan como procesos que pueden promover articulaciones entre estos conocimientos. Se adoptó un enfoque cualitativo con la intención de interpretar la realidad del estudiante frente a la manera en que articula los conocimientos en matemáticas y en física en correspondencia con un instrumento. Los resultados de la investigación muestran que existen al menos tres maneras en que los estudiantes relacionan los conocimientos: relación vacía, relación de aplicación y relación de complementariedad.

Palabras clave: Conocimiento conceptual, conocimiento procedimental, modelación, experimentación, articulación de conocimientos.

ABSTRACT

This work presents a research carried out within the framework of the Licenciatura en Matemáticas y Física, a program of the Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). The problem of this research emerged from the pedagogical practice developed in the Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa of the municipality of Caldas-Antioquia. It was focused on the disarticulation between knowledge in mathematics and physics in middle school students. This problem was delimited through an institutional level and a documentary level containing the institutional area plans in mathematics and physics, the preservice teachers' pedagogical journals, guiding documents and some literature reports in mathematics education and science education. From the problem the following question was raised how do modeling and experimentation promote articulations between knowledge in mathematics and physics in middle school students?

To answer the research question, some theoretical references were adopted in front of three central aspects, namely: knowledge, modeling and experimentation. Two types were found in the literature, conceptual knowledge and procedural knowledge; modeling and experimentation are presented as processes that can promote articulations among the knowledge. A qualitative approach was adopted in this research to interpreting the reality of the student against the way they articulate knowledge in mathematics and physics in correspondence with an instrument that was designed. The research results show that there are at least three ways in which students relate knowledge: application relationship, constitution relationship and empty relationship.

Keywords: Procedural knowledge, conceptual knowledge, modeling, experimentation, knowledge articulation.

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones muestran la importancia de considerar los conocimientos en contextos educativos tanto en matemáticas como en ciencias (Castro, Prat y Gorgorió, 2016; Hiebert y Lefevre, 1986; Lawson, 1994) no obstante, la manera en que estos se han caracterizado es diversa. Una de ellas plantea dos tipos de conocimientos que son considerados en esta investigación: los conceptuales y procedimentales. Es a partir de estos que los investigadores de este trabajo (maestros en formación) buscan cumplir con su objetivo de investigación, a saber: analizar las posibles articulaciones que estudiantes de educación media construyen frente al conocimiento en matemáticas y en física a partir de procesos de modelación y experimentación.

La modelación y la experimentación se consideran procesos de interés tanto en clases de matemáticas como en clases de ciencias (Caron y Pineau, 2017; Rodríguez y Quiroz, 2016; García y Rentería, 2011) debido, entre otras cosas, a la posibilidad de relacionar diferentes áreas del conocimiento cuando se realizan procesos de modelación, a que se requieren conocimientos tanto de matemáticas como de física y porque son procesos importantes para la actividad científica.

En coherencia con lo anterior, el contenido de este trabajo se organiza en 6 capítulos. En el primero se presenta el problema de investigación y la manera en que este se consolidó a través de las dificultades y las necesidades de los estudiantes también, se muestran los objetivos y la pregunta de investigación que orienta el desarrollo de este trabajo.

En el segundo Capítulo se da a conocer los referentes teóricos que sustentan la manera en que se asumen los conocimientos en matemáticas y en física en el ámbito de la enseñanza y las relaciones que pueden existir entre ellos. También se presentan consideraciones teóricas acerca de la modelación y la experimentación como procesos para la articulación entre dichos conocimientos.

En el Capítulo tres se menciona la manera en que los maestros en formación procedieron, en términos investigativos, para responder a la pregunta y cumplir con los objetivos de

investigación, es decir, se muestra el diseño metodológico y las categorías iniciales y secundarias que surgieron del desarrollo del trabajo. Esta investigación se realizó con 83 estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa (Caldas-Antioquia) y se adoptó un enfoque cualitativo, en el marco de un proceso inductivo que involucra acciones como cuestionar, crear hipótesis e interpretar; en él los maestros en formación asumieron el rol de observadores participantes y observadores. En este capítulo se presenta una intervención de aula en el marco de una articulación de las asignaturas Matemáticas y Física en las prácticas pedagógicas realizadas por los maestros en formación, dicha intervención se llevó a cabo a través de un “instrumento articulador” que permitió responder al objetivo general de esta investigación.

Los resultados de la investigación en cada una de las fases del instrumento articulador se presentan en el cuarto Capítulo, allí se analizan a partir de unas categorías iniciales las maneras como los estudiantes relacionaron los conocimientos en matemáticas y en física por medio de los procesos de modelación y de experimentación. A partir de esto se caracterizaron tres tipos de relaciones entre los conocimientos, a saber: relación vacía, relación de aplicación y relación de complementariedad las cuales muestran que la modelación y la experimentación pueden favorecer las articulaciones entre conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y en física. No obstante, también se reportan algunas dificultades para que se de dicha articulación.

Las principales conclusiones y reflexiones del trabajo se presentan en el Capítulo 5. Una de las conclusiones presentadas en este capítulo es que la modelación y la experimentación posibilitaron relaciones entre los conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y en física. La adopción de la modelación y la experimentación como procedimientos en el aula requiere que los profesores promuevan discusiones y cuestionen el trabajo de los estudiantes que orienten sus acciones hacia la articulación de conocimientos.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se presenta el problema de investigación y la manera en que se consolidó. En primer lugar, se describe el contexto de la institución educativa donde los autores, maestros en formación adscritos al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia (Colombia), realizaron su práctica pedagógica. En segundo lugar, se expone la delimitación del problema de investigación, en el cual se encuentran los registros de los diarios pedagógicos que desarrollaron los investigadores en las clases de matemáticas y de física, los planes de área de la institución y algunas investigaciones en educación matemática y en educación en ciencias que dan cuenta de dificultades y necesidades de los estudiantes, a partir de las cuales se configuró el problema de investigación. Por último, se plantea la pregunta y los objetivos de este trabajo.

1.1 Contextualización

Las prácticas pedagógicas se llevaron a cabo en la sede principal de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa (En adelante, IEPLAC), ubicada en el sector urbano del municipio de Caldas, Antioquia. La Institución Educativa tiene énfasis en comercio, es pública y de carácter mixto (IEPLAC, 2012a). El estudio se desarrolló con estudiantes de educación media, con edades entre los 15 y 18 años de los grados 10 y 11, en las asignaturas de Matemáticas y Física.

La Institución Educativa reconoce en su horizonte institucional ser una escuela líder en la formación integral que se preocupa por la competencia empresarial, laboral y social, fundamentada en valores al servicio de la comunidad; por lo cual se visiona para 2022 como una Institución que vela por el sentido de superación y de pertenencia tanto de quienes la conforman como del entorno (IEPLAC, 2019). La Institución Educativa adopta algunos elementos del enfoque pedagógico activo-desarrollista, en el cual se plantea que el proceso de aprendizaje se lleva a cabo a partir de la actividad de los estudiantes (aprender haciendo) y mediante situaciones problema.

Durante los dos semestres de la práctica pedagógica (2018-II y 2019-I) los maestros en formación hicieron un reconocimiento de la planta física, de los estamentos institucionales, las actividades culturales y la gestión de aula en la Institución Educativa. Además, se revisaron documentos como el manual de convivencia, el Proyecto Educativo Institucional (En adelante, PEI) y los planes de área de matemáticas y ciencias naturales; este último incluye la asignatura Física¹. Esto se llevó a cabo con el propósito de conocer la manera en que se organiza la Institución, sus intenciones formativas y sus normas, de tal forma que la intervención de los maestros en formación se realizara en coherencia con los planteamientos institucionales.

En el primer semestre de la práctica pedagógica (2018-II) los maestros en formación acompañaron algunos grados de décimo y undécimo en las asignaturas de Matemáticas y Física. Para el segundo semestre (2019-I), periodo en el cual se realizó el proceso de intervención en el aula, la práctica pedagógica se desarrolló en dos grupos del grado undécimo, tanto en Matemáticas como en Física.

La práctica pedagógica es entendida en la institución como el proceso donde el profesor trasciende su ejercicio profesional a una construcción reflexiva y planificada de la enseñanza. El profesor se debe preguntar por el origen y la trascendencia de las situaciones problemáticas que emerjan en el contexto escolar, a partir de las cuales realiza un plan de acción. Así el PEI propone que, dentro de la práctica pedagógica, la implementación del plan de acción debe registrarse a través de diarios, notas de campo, contenidos multimedia, introspección y cuestionamientos. Después, el profesor reflexiona y argumenta cómo el plan ejecutado aporta a su formación. Finalmente, el PEI plantea que con los elementos anteriores se busca “una transformación permanente de la práctica pedagógica pues el profesor está en permanente revisión, reevaluación y mejoramiento de su práctica y del proceso que desarrolla con los estudiantes” (IEPLAC, 2012a, p.31).

¹ En algunos apartados de este trabajo se hará referencia a la enseñanza de las ciencias naturales debido a que en diferentes contextos, nacionales e internacionales, se encuentra constituida por disciplinas como biología, química, geología y, en particular, física.

1.2. Delimitación del problema de investigación

El problema de investigación que se presenta en este capítulo se determinó a partir de dos niveles que emergieron de la práctica pedagógica. A través del acercamiento a las clases de matemáticas y de física que se evidenció en los diarios de campo, los maestros en formación identificaron preocupaciones de los estudiantes frente a la utilidad de las matemáticas y algunas dificultades para comprender el uso de expresiones propias de esta área en las clases de física. Los aspectos que se identificaron suscitaron la lectura de los planes de área de la institución en los cuales se buscó reconocer las intenciones formativas en matemáticas y en física. Allí se destaca la importancia de relacionar estas asignaturas. Así, los diarios de campo y los planes de área configuran un *nivel institucional*. En consecuencia, los maestros en formación recurrieron a los planteamientos ministeriales y de la literatura frente a las dificultades que se encontraron en los diarios pedagógicos y las ideas propuestas en los planes de la institución. Es decir, se revisaron diferentes documentos que discuten las necesidades de formación y las dificultades de los estudiantes, pero también las estrategias propuestas para superarlas; estos documentos configuran un *nivel documental*. A continuación, se describe cada uno de los dos niveles que permitió la delimitación del problema de investigación.

1.2.1. Nivel institucional

Este nivel parte del análisis en los registros de los diarios pedagógicos de los maestros en formación que constituyen un instrumento para la recolección de información sobre la planeación y el desarrollo de las clases que realizaron en el marco de su práctica pedagógica. Frente al uso de los diarios pedagógicos en esta investigación, se resalta que “[...] un docente comprometido con su labor desde el carácter investigativo que puede darle a la misma, debe asumir el diario pedagógico como material de análisis sobre su práctica, y por supuesto, como elemento para la mejora continua de la misma” (Fernández y Roldán, 2012, p.127). Bajo estas consideraciones, el diario pedagógico (Anexo A) fue una de las primeras herramientas investigativas que se estudió, esto permitió identificar algunas relaciones entre los conocimientos en matemáticas y en física. Estas constituyeron los indicios iniciales para la configuración del

problema de investigación. De este acercamiento se destacan los siguientes aspectos encontrados en el aula:

- Los estudiantes se cuestionan sobre la utilidad de las matemáticas. Una de las preguntas más reiterada por ellos es: “¿para qué sirven las matemáticas?”, aun cuando en sus clases de física se requiere de representaciones matemáticas para explicar un fenómeno. Por lo tanto, es posible interpretar que los estudiantes tienen dificultades para reconocer la necesidad de las matemáticas en otras asignaturas o que, a pesar de hacerlo, no encuentran relaciones entre los conceptos o fenómenos propios de estas con las matemáticas.
- Algunas dificultades en las clases de física para reconocer la coherencia entre las expresiones matemáticas y su uso para la construcción de explicaciones. Por ejemplo:

[...] se observó que hay desarticulación entre las representaciones matemáticas, su “manipulación” y la interpretación o “sentido” físico. La Ley de Coulomb sólo es una “fórmula” o expresión que les permite obtener resultados a partir de una serie de datos. De esta manera no hay evidencia de un análisis de esta expresión, es decir, qué representa y cómo se relaciona en la descripción y explicación de fenómenos físicos, pues al proponer a los estudiantes la situación descrita en el numeral 2b, manifiestan que no saben qué hacer (Diario pedagógico sesión de clase 13 de septiembre del 2018).²

También se observaron situaciones en las cuales hay desvinculación entre los elementos teóricos vistos y las prácticas experimentales realizadas por los estudiantes. Un caso particular dio cuenta de que hay obstáculos para identificar y relacionar variables en la clase de física con el fenómeno a estudiar:

Se utilizó un globo y unos papeles. El globo se electrificó y observaban que a menos distancia las hojas de papel se movían más rápido, mientras que el globo al estar lejos de los papeles su fuerza era casi imperceptible. Así, concluyeron que a menor

² El ejercicio 2b era “Una barra con carga negativa se acerca a trozos pequeños de papel sin carga (neutro). Los lados positivos de las moléculas en el papel son atraídos hacia la barra, y los lados negativos son repelidos por ella. Como la cantidad de carga positiva y negativa es igual, ¿por qué no se anulan entre sí las fuerzas de atracción y repulsión” (Serway, Jewett y González, 2015)

distancia mayor fuerza eléctrica, pero resulta que cuando se presentó por primera vez la ecuación de la Ley de Coulomb sólo relacionaron la fuerza eléctrica con dependencia de las cargas [...] (Diario pedagógico sesión de clase 13 de septiembre del 2018).

La pregunta de los estudiantes por la utilidad de las matemáticas y las relaciones que se establecen entre esta disciplina y, en este caso, la física (tanto en elementos teóricos como prácticos) no deben ser vistos de manera aislada, por el contrario, se configuran como evidencias de una sola problemática que radica en la dificultad de establecer conexiones entre los conocimientos en matemáticas y en física.

Lo anterior suscitó una revisión de los planes de área de Matemáticas y de Ciencias Naturales frente a los planteamientos institucionales alrededor de la anterior problemática, es decir, sobre las posibles relaciones entre las asignaturas de Matemáticas y de Física. Así mismo, se buscó reconocer los propósitos de formación en estas áreas, las competencias que se pretenden desarrollar y, además, las posibles relaciones que se declaran entre los conocimientos en matemáticas y en física.

Los planes de área de la Institución se orientan bajo los documentos rectores del Ministerio de Educación Nacional (En adelante, MEN) (MEN, 1998a; 1998b; 2006), se estructuran por indicadores de logros y competencias en tres periodos escolares. En general, en matemáticas y en física se busca que el estudiante desarrolle competencias a nivel del pensamiento crítico y que se promueva la actividad científica con la capacidad de atender las problemáticas que la comunidad laboral exige.

Dentro de las competencias expuestas en el Plan de Área de Matemáticas se encuentran: la básica, la ciudadana, la laboral y la científica; esta última permite establecer una relación de las prácticas experimentales con la enseñanza de las matemáticas. Así, por ejemplo, la competencia científica del grado undécimo de la Institución plantea que el estudiante debe establecer relaciones de orden causal y multicausal entre datos (IEPLAC, 2012b), los cuales pueden obtener de fenómenos físicos.

Las competencias establecidas en el Plan de Área de Ciencias Naturales son: las cognitivas, las laborales, las ciudadanas, las multiculturales y las inclusivas; cuando se habla de forma específica de la Física (asignatura que comienza en el grado décimo), los contenidos de la asignatura están focalizados en la conceptualización y la realización de prácticas experimentales. En coherencia, este plan de área destaca la importancia de vincular metodologías en pro de la experimentación, el aprendizaje significativo y el cambio conceptual (IEPLAC, 2012c).

Dentro de las competencias cognitivas en Ciencias Naturales se puede evidenciar: el desarrollo de expresiones matemáticas para explicar los fenómenos en la enseñanza de la física (IEPLAC, 2012c), por ejemplo, en el tercer periodo del grado décimo se plantea el uso de modelos matemáticos para comprender el movimiento de los cuerpos a partir de los diagramas de cuerpo libre. Es decir, se estudian algunas representaciones (diagramas de cuerpo libre) que posibilitan la construcción de modelos matemáticos para explicar las leyes del movimiento (describir un fenómeno de la dinámica con ecuaciones obtenidas de un esquema con vectores).

Otro aspecto que se resalta en los planes de área tiene que ver con la relación que se puede establecer con otras asignaturas. Así, por ejemplo, el Plan de Área de Matemáticas sostiene que el desarrollo de los pensamientos (métrico, variacional, aleatorio, espacial y numérico) requiere de otras disciplinas como la física. Por su parte, el Plan de Área de Ciencias Naturales argumenta la necesidad de establecer relaciones cualitativas y cuantitativas mediante actividades experimentales, de manera que contribuyan al desarrollo de las competencias establecidas en ambas disciplinas. No obstante, al revisar los elementos que configuran el nivel institucional, en el diario pedagógico se evidencia que el cuestionamiento sobre la utilidad de las matemáticas se aísla de las maneras en las que se representan algunos fenómenos físicos (expresiones matemáticas) y que en la clase de física hay dificultades por parte de los estudiantes para relacionar las expresiones matemáticas con la realidad física. Por lo anterior, se muestra una contradicción entre lo que registran los diarios pedagógicos y los planes de área de Matemáticas y de Ciencias Naturales, pues en estos se plantea la importancia de diseñar estrategias que vinculen los conocimientos de diferentes disciplinas, pero esta vinculación no se configura en el aula.

A partir de los planteamientos en el nivel institucional, los maestros en formación deciden hacer un rastreo frente a las consideraciones que estipula el Ministerio de Educación Nacional y algunos reportes de la literatura, configurándose así el *nivel documental*.

1.2.2. Nivel documental

Este nivel concierne a una revisión de documentos que den cuenta de las dificultades que se presentaron en el nivel institucional. Para esto se abordaron los documentos rectores de la educación en Colombia (MEN, 1998a; 1998b; 2006) que mostraron la necesidad de vincular relaciones entre las asignaturas de Matemáticas y de Física. Además, en este nivel se encuentran reportes de la literatura en didáctica de las matemáticas y de las ciencias naturales que evidencian las dificultades por parte de los estudiantes para reconocer el uso de expresiones matemáticas con la construcción de explicaciones de un fenómeno físico y su cuestionamiento por la utilidad de las matemáticas (v.g. Romero y Rodríguez, 2003; Arévalo y Terrazzan, 2015; Blum, 2011). La literatura que se empleó en este nivel destacó posibles relaciones entre los conocimientos en matemáticas y en física, y la importancia de promover la interdisciplinariedad. Este factor ayudó a delimitar el problema de investigación.

En la revisión de los documentos rectores expedidos por el Ministerio de Educación Nacional se consultó sobre aspectos frente a las articulaciones que se podrían establecer entre las matemáticas y las ciencias. Frente a ello se destaca los planteamientos de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, donde se establece que parte de los desarrollos de esta área provienen de otras ciencias y que las situaciones problema que se deben propiciar en las clases pueden emerger de otros contextos como los científicos; asunto que propicia procesos interdisciplinarios de riqueza (MEN, 1998a). Por su parte, los Lineamientos Curriculares en Ciencias Naturales y Educación Ambiental plantean la importancia de un lenguaje formalizado; sin embargo, se reconoce que su uso puede ser difícil para los estudiantes. Por esta razón, “la introducción de los lenguajes formalizados requiere entonces de un cuidadoso proceso que le permita al estudiante ver la necesidad de utilizar un lenguaje de esa naturaleza y le otorgue el tiempo suficiente para hacer esa transición [...]” (MEN, 1998b, p. 48).

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) también se resalta la importancia de los conocimientos de otras asignaturas. Por ejemplo, se afirma que el pensamiento métrico, no se limita a las matemáticas, sino que se extiende a otras áreas como las ciencias naturales y que, además, requiere del desarrollo del conocimiento científico. Así mismo, en dicho documento se resalta el valor de las matemáticas para analizar fenómenos y situaciones de las ciencias naturales, simular experimentos y resolver problemas.

Por su parte, los Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales y Ciencias Sociales (MEN, 2006) declaran que para lograr un aprendizaje auténtico se requieren conexiones con otras disciplinas como las matemáticas, de allí que se proponga el trabajo interdisciplinario como elemento importante para orientar la formación en la educación básica y media. De esta manera, estos estándares plantean que:

[...] El desarrollo científico implica el uso de las matemáticas como sistema simbólico que permite cuantificar y construir modelos sencillos de los fenómenos y eventos que se observan, además de utilizar ciertas habilidades numéricas que hacen parte del método científico como son la recolección y organización de datos cuantificables, el análisis de dichos datos con base en la estadística y la probabilidad, etc. (MEN, 2006, p. 110).

Además, en el mismo documento se plantea que al finalizar el grado undécimo los estudiantes de ciencias naturales deberían proponer modelos para predecir los resultados de sus experimentos y simulaciones, y establece como una competencia el hecho de utilizar las matemáticas para “modelar, analizar y presentar datos y modelos en forma de ecuaciones, funciones y conversiones” (MEN, 2006, p. 140).

En los planteamientos ministeriales anteriores es posible identificar la importancia de promover procesos interdisciplinarios tanto en matemáticas como en ciencias naturales y reconocer los roles de cada una de estas áreas en la construcción del conocimiento de la otra. En este sentido, el proceso de práctica pedagógica se convierte en una oportunidad para reflexionar

y aportar a la discusión frente a los aspectos que se deben configurar a la hora de promover articulaciones entre los conocimientos en matemáticas y en física.

Como bien lo han configurado los documentos rectores es necesario que existan relaciones entre la matemática y la física. Investigadores como Arévalo y Terrazzan (2015) plantean que en el contexto educativo es esencial mantener una relación entre ellas porque genera habilidades científicas para analizar variables y magnitudes que posibiliten la comprensión del fenómeno:

[...] Utilizar o asumir el carácter deductivo del formalismo matemático, en contextos de la enseñanza de la física, no significa enseñar a calcular valores por medio de una ecuación, sino llevar al alumno a comprender formas de relacionar magnitudes físicas, seleccionando apropiadamente determinadas estructuras matemáticas, a fin de comprender el uso y significado de las representaciones de los fenómenos físicos. (p.104)

Por su parte, Romero y Rodríguez (2003) sostienen que los procesos de formalización de la física causan dificultades a los estudiantes de educación media en Colombia porque se enseñan los conceptos físicos sin recurrir a las representaciones matemáticas, asunto que los investigadores denominan “desmatematización de la física”. Los mismos autores establecen que la desvinculación manifestada por los estudiantes se suma a las didácticas tradicionales del uso de las matemáticas en la enseñanza de la física, pues se confunden los procesos de formalización de los fenómenos con la aplicación de fórmulas y los procesos operativos. Además, agregan que tanto en las instituciones de educación media como en las universitarias se posiciona las matemáticas como lenguaje de la física, tomando una relación de aplicación, es decir, las matemáticas tienen solo un uso instrumental en la ciencia (Romero y Rodríguez, 2003).

Frente al cuestionamiento por la utilidad de las matemáticas, algunos autores plantean que aprender matemáticas no garantiza aprender a usarlas en otros contextos (Redish, 2009). Este aspecto es importante para el trabajo investigativo, puesto que según el MEN (2006) y los planes de área en matemáticas y en ciencias naturales de la IEPLAC, se pretende formar

personas con habilidades científicas que puedan actuar en el mundo y que sean *matemáticamente competentes* con conocimientos básicos que contribuyan a su desarrollo profesional.

En este apartado se presentaron planteamientos a nivel curricular que muestran la necesidad de relacionar los conocimientos matemáticos y científicos, donde cada uno contribuye a que el otro se desarrolle. Además, se mostraron algunas de las contribuciones de la literatura en educación matemática y educación en ciencias donde se plantea que las matemáticas hacen parte de la estructuración del conocimiento en física y que saber sobre ellas no implica saber aplicarlas en otros contextos.

Tanto el nivel institucional como el documental dan cuenta de una desarticulación entre el conocimiento en matemáticas y en física en educación media de la IEPLAC. Para procurar una articulación entre las matemáticas y la física se pueden reconocer como alternativas los procesos de modelación y experimentación. La modelación según Blum (2011) y Blomhøj (2004), permite establecer relaciones entre las matemáticas y otros contextos. Así mismo, el MEN plantea la importancia de la modelación para el estudio de situaciones científicas y menciona que esta “puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente” (MEN, 2006, p. 53). La adopción de la experimentación se debe a que es una actividad de importancia en la enseñanza de las ciencias (Romero y Aguilar, 2013; Ferreirós y Ordóñez, 2012), se ha incorporado en la enseñanza de las matemáticas (Rodríguez y Quiroz, 2016) y porque se reconoce su relación con la modelación y los modelos (MEN, 2006; Rodríguez y Quiroz, 2016; Dounas-Frazer y Lewandowski, 2018). En ese sentido, este trabajo busca dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cómo la modelación y la experimentación promueven articulaciones entre conocimientos en matemáticas y en física en estudiantes de educación media? La manera en que se delimitó el problema de investigación se resume en la Figura 1.

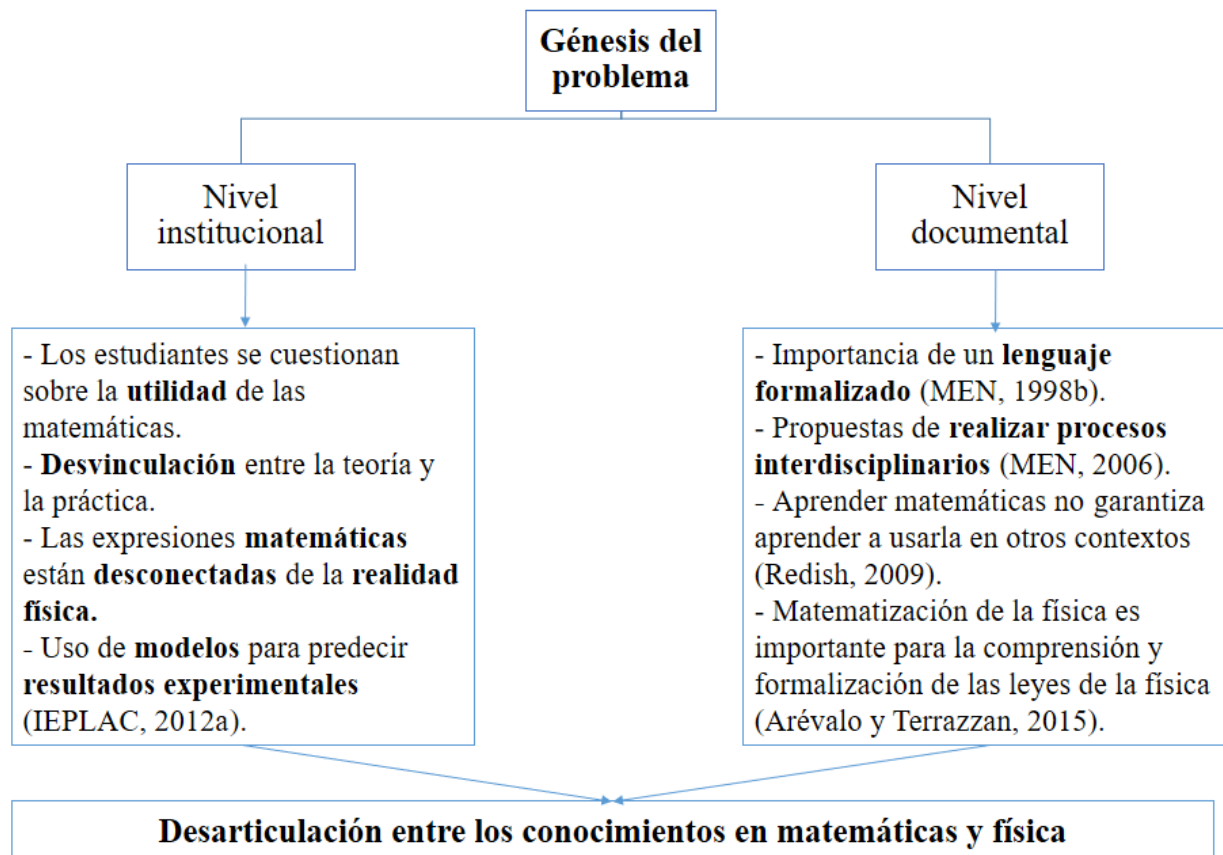


Figura 1. Problema de investigación.

Elaboración de los autores.

1.3. Objetivos

En coherencia con los planteamientos anteriores sobre la desarticulación entre los conocimientos en matemáticas y física y sobre las posibilidades tanto de la modelación como de la experimentación para articularlos, en este trabajo se proponen los siguientes objetivos para responder a la pregunta de investigación:

1.3.1 Objetivo general

Analizar las posibles articulaciones que los estudiantes de educación media construyen frente a los conocimientos en matemáticas y en física a partir de la modelación y la experimentación.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar las articulaciones que los estudiantes de educación media construyen frente a los conocimientos en matemáticas y en física a partir de la modelación y la experimentación.
- Categorizar las relaciones que los estudiantes establecen entre los conocimientos en matemáticas y en física a partir de la modelación y la experimentación.

2. REFERENTES TEÓRICOS

Tal y como se presentó en la sección anterior, este trabajo se pregunta cómo la modelación y la experimentación promueven articulaciones entre conocimientos en matemáticas y física. Para responder, en este capítulo se presenta la manera en que se asumen estos conocimientos en el ámbito de la enseñanza y las relaciones que pueden existir entre ellos. Adicionalmente, se plantean consideraciones teóricas sobre la modelación y la experimentación referentes a las acciones que cada uno de estos procesos implican y sus aportes para lograr dichas articulaciones.

2.1 Los conocimientos en matemáticas y en física

Para promover articulaciones entre los conocimientos en matemáticas y física, es necesario indicar cómo se da en la escuela; en esa medida se retoman estudios cognitivistas centrados en observar cómo el ser humano procesa la información. Al respecto, algunos teóricos cognitivos han planteado que nuestro comportamiento está determinado por al menos dos tipos de conocimiento: los conocimientos conceptuales y los procedimentales. En este apartado se presentan algunos elementos teóricos sobre la manera de entender entiendo dichos conocimientos tanto en matemáticas como en física.

2.1.1. Los conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas

El MEN (2006) propone que el “ser matemáticamente competente” se vincula con ciertos conceptos y procesos que desarrollan los estudiantes en sus clases de matemáticas y que se materializan en el aula a través del saber por qué, saber qué, saber cómo y saber hacer. En ese orden de ideas, algunas investigaciones asocian el saber qué y el saber por qué con el conocimiento conceptual, mientras que el saber cómo y el saber hacer se relacionan con un conocimiento procedimental (MEN,2006). Así, los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) aluden a que el conocimiento conceptual busca la reflexión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes; y a su vez que el conocimiento procedimental se centra en el desarrollo de habilidades para ejecutar algoritmos, reglas y estrategias en diferentes problemas

(MEN, 2006; Castro et al., 2016). En consideración con los planteamientos anteriores se presentan algunos referentes de cómo se entiende el conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas y cómo posibilitan articulaciones con el conocimiento en física.

Los maestros en formación encontraron en su revisión de literatura que el conocimiento conceptual en matemáticas se caracteriza por ser un conocimiento rico en relaciones (Hiebert y Lefevre, 1986), en otras palabras, por conectar un concepto matemático con otro. Por lo tanto, se menciona que la comprensión de los conceptos matemáticos corresponde con las conexiones que el estudiante realiza (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001; Rittle-Johnson y Star, 2007). Hiebert y Lefevre (1986) comentan que existen dos niveles para relacionar conceptos matemáticos: el primero, llamado primario, alude a los enlaces que el estudiante establece sin salirse del contexto específico, por ejemplo, abordar el concepto de una función quedándose solo en el ámbito analítico; el segundo, nombrado reflexivo, es cuando el estudiante realiza relaciones entre los conceptos saliendo del contexto específico, por ejemplo, abordar el concepto de función no sólo por vía analítica, sino desde cuestiones geométricas. A pesar de que los autores consideran la relación reflexiva sólo dentro del ámbito de las matemáticas, en esta investigación se asume que las conexiones entre conceptos también pueden darse con otras disciplinas como la ciencia y la ingeniería, por ejemplo: la derivada y la velocidad instantánea, la pendiente de una recta con el movimiento uniforme, las funciones periódicas y los movimientos oscilatorios.

Una de las características del conocimiento conceptual es que los conceptos de la disciplina adquieran significado para el estudiante (Díaz y Hernández, 2002), esto es, que pueda interiorizar los conceptos y no recurra a procesos memorísticos sin comprensión. Para ilustrar esta afirmación, se puede aprender la idea literal de función como la relación entre un conjunto de partida y de llegada de tal manera que a un elemento del conjunto de partida le corresponda uno y solo uno del de llegada; sin embargo, esta definición puede carecer de connotación para el estudiante. Según los autores, para que los conceptos matemáticos tengan significado es necesario que quien aprenda busque una asimilación del concepto; esto posibilita que pueda construir de manera personal, según el ejemplo, el concepto de función. Una manera en que los estudiantes asimilan los objetos matemáticos es cuando hacen uso de sus conocimientos previos

(Díaz y Hernández, 2002), donde se relaciona lo que se conoce con lo que está pronto por conocer.

Algunos investigadores atribuyen las siguientes características a los conocimientos conceptuales en matemáticas:

- Es un conocimiento que no necesita ser verbalizable (Star y Stylianides, 2013) puesto que se caracteriza por las diferentes construcciones, relaciones y esquemas mentales que utiliza el estudiante para significar los conceptos, lo que causa que se vea como un conocimiento profundo. Pese a ello, en este trabajo la verbalización es importante porque permite a los investigadores evidenciar los conocimientos que los estudiantes construyen a partir de sus esquemas mentales.

- La relación entre los conceptos aumenta con la experiencia, en tanto que entre más se expanda el conocimiento más relaciones posibilita (Star y Stylianides, 2013).

- Parte de un conocimiento declarativo constituido por los hechos (eventos y unidades de información), los principios (las teorías, modelos, etc.) y los conceptos o sistemas conceptuales (relaciones entre hechos que se representan por medio de signos o símbolos) y permite comprender las razones para adquirir el conocimiento, es decir, el saber por qué (González-Tejero, Pons y Ortiz, 2011; Rico, 1997).

- No está vinculado con tipos de problemas particulares (Schoner y Wilimzig, 2005).

- Está centrado en poder organizar experiencias y estructurar el contenido en un todo coherente (Lauritzen, 2012).

Como se mencionó al inicio, el conocimiento en matemáticas está compuesto también por conocimientos procedimentales. Según Hiebert y Lefevre (1986) se dividen en dos partes: la primera se relaciona con la familiaridad que posee el estudiante con las representaciones simbólicas, es decir, que reconozcan los símbolos matemáticos y a su vez que la escritura que utilizan con estos tengan sentido. Los autores admiten que en las clases de matemáticas existen al menos dos formas de representaciones: las simbólicas (dónde se les presenta problemas en términos de expresiones, ecuaciones, etc.) y las no simbólicas (imágenes mentales, objetos concretos, etc.). La segunda se concentra en las reglas y algoritmos manejados por el estudiante

para resolver los problemas matemáticos sobre representaciones no simbólicas. Se concluye a partir de los referentes que los procedimientos no solo consisten en la aplicabilidad de símbolos, sino también en solucionar problemas que se vinculan de manera directa con objetos concretos. En concordancia con lo anterior, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998a) deliberan que en la clase de matemáticas los estudiantes pueden representar un problema a través de gráficas, mediciones, modelos, etc.

Hiebert y Lefevre (1986) presentan el conocimiento procedimental como una secuencia lineal de pasos conscientes, donde no necesita de conocimientos con significado, sino de un proceso automatizado. En discrepancia, Star y Stylianides (2013) sostienen que el estudiante no solo debe resolver problemas matemáticos al ser consciente de las acciones a proceder, sino que este debe ser capaz de construir una serie de pasos para resolver el problema, reconocer cuándo se utilizan, identificar las restricciones que tiene el procedimiento y vincular el sentido común. En ese orden, el conocimiento procedimental, además de centrarse en las habilidades que los estudiantes obtienen al aplicar representaciones simbólicas o concretas a los problemas, también se focaliza en la manera en que ellos planifican y llegan a deducciones.

Según Rico (1997) los procedimientos son las formas en las que se ejecutan las tareas matemáticas y logran ser materializadas a través de razonamientos, destrezas y estrategias. Por su parte, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998a) afirman que el aprendizaje de los procedimientos o también llamados “modos de saber hacer” aluden a presentar las matemáticas en la realidad, donde se ponen en escena la funcionalidad, la aplicabilidad, la verificabilidad y la modificabilidad de los objetos matemáticos. Al respecto, el MEN (1998) afirma que:

El estudiante razone y se comunique matemáticamente, y elabore modelos de los sistemas complejos de la realidad, se espera también que haga cálculos correctamente, que siga instrucciones, que utilice de manera correcta una calculadora para efectuar operaciones, que transformen expresiones algebraicas desde una forma hasta otra, que mida correctamente longitudes, áreas, volúmenes, etc.; es decir que ejecute tareas

matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas. (p.81)

Los Estándares Básicos de Competencias (2006) declaran cinco procesos generales de la actividad matemática. Dos de ellos son de interés para esta investigación: el primero es la modelación y el segundo es la formulación, tratamiento y resolución de problemas. Ambos procesos buscan que las matemáticas adquieran sentido por medio de la realidad, incluyendo los fenómenos físicos. En deferencia con la articulación en física, y la propuesta del MEN (1998a, 2006) se muestran algunos trabajos interdisciplinarios entre las matemáticas y la ciencia, por ejemplo, la enseñanza de ecuaciones diferenciales ordinarias a través de los resortes (Rodríguez y Quiroz, 2016) y la matemática en el contexto de las ciencias (Camanera, 2012).

Una de las características del conocimiento procedimental es ser teleológico, es decir, que apunta a una meta u objetivo (Castro et al., 2016), lo que ocasiona que el estudiante identifique hacia donde tiene que llegar. Otras características son la secuencialidad (el paso a paso que se realizan para llegar a una solución) y la adquisición de habilidades en la resolución de problemas en matemáticas.

Existe así la pregunta ¿Cómo se relacionan estos conocimientos? En la actualidad es posible identificar al menos cuatro maneras de asumir esta relación. Una de ellas considera que estos conocimientos se desarrollan de forma independiente; otra plantea que el conocimiento conceptual se desarrolla primero que el procedimental, pues aquel puede ser adquirido a través de explicaciones y, posteriormente, la práctica permitirá el desarrollo del conocimiento procedimental; otra postura afirma que el conocimiento procedimental es el primero que se desarrolla (por ejemplo a partir del ensayo y el error), y que a partir de la reflexión se abstrae el conocimiento conceptual. La última perspectiva afirma que puede existir una relación bidireccional entre ambos conocimientos “modelo iterativo”, lo cual implica que el desarrollo de uno de ellos afectará el otro (Schoner y Wilimzig, 2005; Rittle-Johnson y Schneider, 2015).

El “modelo iterativo” permite que el conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas esté en constante comunicación, por ejemplo, la modelación matemática favorece

que los estudiantes desarrollen conceptos y habilidades. Este modelo implica que la practicidad y el formalismo, la habilidad y la significación son asunto de complementariedad. En términos de Star (2005), “una teoría completa de la comprensión incluye tanto la comprensión de los conceptos como la comprensión de los procedimientos” (p.6). Asumir el modelo iterativo del conocimiento en matemáticas en esta investigación facilita que la asimilación de los conceptos en matemáticas se desarrolle a medida que se estudian los fenómenos físicos a la vez que se establecen relaciones entre conceptos en física y en matemáticas.

En este orden de ideas, se reconoce que el conocimiento en matemáticas tipificado en conocimientos procedimentales y conceptuales permite generar relaciones entre conceptos, buscar el significado de los objetos matemáticos, vincular la resolución de problemas, considerar el modelo iterativo para la comprensión de los conceptos tanto desde la asimilación hasta en los modos de saber hacer. La Figura 2, pretende sintetizar los aspectos que se abordan en este apartado.

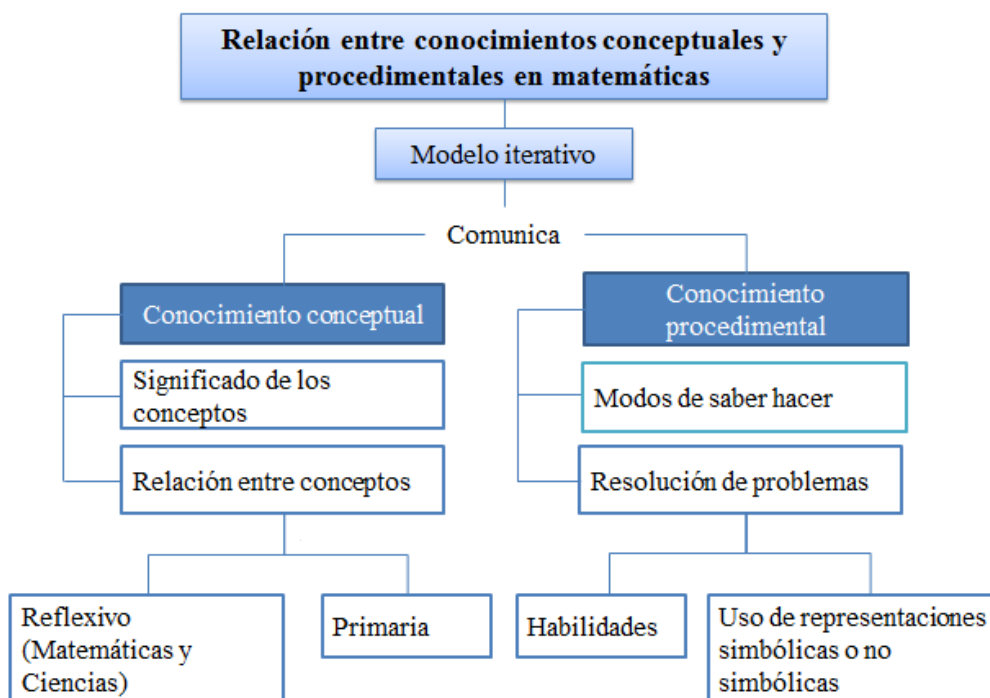


Figura 2. Conocimiento matemático desde los aspectos abordados.

Elaboración de los autores.

2.1.2 Los conocimientos conceptuales y procedimentales en física

Los maestros en formación encontraron escasas investigaciones en ciencias referentes a la función de los conocimientos conceptuales y procedimentales en física. En este apartado se menciona la manera en que la literatura y los documentos rectores definen el conocimiento científico y en consideración se relaciona con la tipificación de conocimientos. Después se abordan algunos reportes de la necesidad de vincular dichos contenidos en la enseñanza.

Lawson (1994) reconoce que el conocimiento conceptual en ciencias es parte de un conocimiento declarativo que se centra en el saber qué, compuesto por un conjunto de conceptos con ciertos grados de abstracción. El autor comenta que existen dos maneras de categorizar los conceptos en ciencias: los descriptivos y los teóricos. Los primeros son directos con lo que el estudiante percibe de la realidad física, quien tiene una interacción inmediata con el mundo de la vida, por ejemplo, las mesas, las sillas, etc.; mientras que los segundos no son perceptibles de manera directa, sino que son utilizados por la comunidad científica para explicar algunos comportamientos en correspondencia con la experiencia del mundo exterior, sea el caso de los átomos, el vacío y los electrones. Lawson (1994) atribuye una característica a los conocimientos conceptuales en ciencias y es que se encuentran conectados con otros conceptos, es decir, no se presentan de manera aislada, sino que se relacionan.

Por otra parte, para Hammer (1994) los estudiantes muestran su conocimiento conceptual al menos de dos formas: el primero se encuentra ligado con el sentido común y la intuición de los fenómenos físicos; el segundo en considerar que los conocimientos en física consisten en representar fenómenos por medio del formalismo matemático.

Respecto a la primera forma en que los estudiantes consideran el conocimiento conceptual en física, el MEN (1998b) plantea la importancia de vincular a las clases de ciencias un conocimiento común que tiene la característica de estar ligado con el sentido y la intuición del sujeto. Así, autores como Driver (1989) mencionan la necesidad de que el estudiante llegue a las clases de ciencias con un conocimiento sobre el “funcionamiento de la naturaleza” y así “debe

construir, con el apoyo y orientación de sus maestros, el conocimiento científico que sólo tiene sentido dentro de este mismo [el mundo] y para el hombre que en él vive” (MEN, 1998b, p. 6).

Los planteamientos propuestos por el MEN (1998b) afirman que el conocimiento común del estudiante pretende apuntar a un conocimiento científico que cuestiona sobre el por qué ocurre un fenómeno y sobre este se plantean preguntas y se contribuye a la construcción de una teoría capaz de explicar lo que sucede. Bravo y Rocha (2008) sustentan que las experiencias que el estudiante tiene sobre el conocimiento común le permiten elaborar concepciones sobre los fenómenos físicos. Sin embargo, al pasar a un conocimiento científico es necesario cambios que vayan más allá de lo conceptual, debido a que la enseñanza de las ciencias implica algunas veces cambiar la forma en que se estudian los fenómenos.

La segunda forma expuesta por Hammer (1994) se relaciona con el cómo los estudiantes pueden considerar el conocimiento conceptual en física ligado a las ecuaciones y diferentes representaciones matemáticas. La anterior afirmación posibilita mostrar en esta investigación algunas reflexiones sobre las relaciones que tienen las matemáticas en las clases de física. Según Romero y Rodríguez (2003) y Lévy-Leblond (1988), los conocimientos físicos están asociados a varios conocimientos matemáticos, pero no son iguales, la física sin las matemáticas no posibilita especificar y expresar los fenómenos, por lo tanto, existen corrientes que presentan las matemáticas como lenguaje de la física. Los autores plantean que la relación de lenguaje implica dos enfoques. El primero, donde la matemática se equipara al lenguaje de la naturaleza (que el estudiante debe descubrir), es decir, es la manera de expresar los fenómenos que en ella se encuentran. El segundo, que afirma que el lenguaje de las matemáticas es una forma del pensamiento que permite traducir la naturaleza de tal forma que esta sea más comprensible (Romero y Rodríguez, 2003; Lévy-Leblond, 1998). Los argumentos anteriores permiten mostrar en esta investigación cómo los estudiantes pueden relacionar el conocimiento en matemáticas y física.

Estas discusiones sobre la relación entre las matemáticas y la física llevan a algunos investigadores como Aragón y Marín (2012) a plantear la existencia de un pensamiento “físico-matemático”. Para ellos, el pensamiento físico-matemático es la representación de la relación

entre la Física y las Matemáticas. De esta manera, los autores plantean que dicha relación, desde el punto de vista del lenguaje, debe ser “vista desde los fundamentos que caracterizan al lenguaje como una estrategia que permita la construcción, la interpretación, la abstracción y la consolidación de significados para el docente y para el estudiante sobre los fenómenos Físicos” (p. 3).

El conocimiento procedimental en ciencias alude a términos como las habilidades, los procesos y las habilidades de los procesos para manipular y resolver problemas (Millar et al, 1994). En esa misma línea, Mazzistelli et al. (2005) sostiene que estas habilidades parten de lo que el estudiante conoce (tanto conocimiento común como conocimiento científico); algunas de las habilidades que desarrollan los estudiantes en ciencias tienen que ver con la identificación de las variables involucradas en los fenómenos físicos, la manipulación de instrumentos, la recolección de información y la representación e interpretación para probar los problemas físicos estudiados.

En contraste con lo anterior, el conocimiento procedimental en ciencias según Lawson (1994) propicia el desarrollo del conocimiento conceptual que busca, entre otras cosas, que el estudiante pueda comprender conceptos a través de preguntas, predicciones y relaciones, que se materializan a través de procesos que este realiza en sus clases de ciencias, algunos de ellos son: el control de variables, el manejo de correlaciones, y la validación de los fenómenos físicos. Para Lawson (1994), este conocimiento permite que el estudiante adquiera cierto tipo de destrezas que define como “la capacidad de hacer algo bien” (p.10), en otras palabras, que él comprenda qué debe hacer, cuándo lo debe hacer y cómo debe hacerlo. En ese orden, en la Tabla 1 se categorizan algunas destrezas que puede adquirir un estudiante a la hora de buscar la comprensión de los conceptos científicos y que se vinculan con procesos de modelación y experimentación en las clases de ciencias.

Tabla 1. *Destrezas en clases de ciencias*

| Destrezas | Procesos que se destacan |
|---|--------------------------|
| Describir apropiadamente la naturaleza. | Experimentación |

| | |
|---|-------------------------------|
| Percibir y plantear cuestiones causales sobre la naturaleza. | Experimentación |
| Reconocer, generar y formular hipótesis alternativas (explicaciones causales) y teorías. | Experimentación Modelación |
| Generar y formular predicciones lógicas basadas en la bondad asumida de las hipótesis y de las condiciones experimentales imaginadas. | Experimentación |
| Planear y llevar a cabo experimentos controlados para someter a prueba hipótesis alternativas. | Experimentación |
| Recoger, organizar y analizar datos experimentales y correlacionales relevantes. | Modelación |
| Extraer y aplicar conclusiones razonables. | Modelación Experimentación |

Las categorías que plantea Lawson (1994) en la tabla anterior implican unos procesos como la experimentación, la cual es un elemento esencial para las clases de ciencias (Romero y Aguilar, 2013), y la modelación que permite actuar con modelos que representan los fenómenos físicos a estudiar. El autor expone que conforme se desarrollan estas destrezas, la comprensión de los conceptos en ciencias se hace más fácil para el estudiante. Aunque Lawson (1994) propone que el conocimiento procedimental actúa en merced de un conocimiento conceptual, en esta investigación se asume que el trabajo con los conceptos es de paridad con los procesos. Afines a esta postura se encuentran Sudarmani, Daban y Pujianto (2018), quienes mencionan que la comprensión de los conceptos físicos permite ver la relación entre conceptos y procedimientos, y se hace evidente cuando los estudiantes argumentan fenómenos en correlación con otros.

El conocimiento procedimental no solo se centra en el desarrollo de destrezas que permitan al estudiante entender los fenómenos físicos. Según Lawson (1994) este conocimiento tiene un proceso llamado abstracción reflexiva, que aparece cuando el estudiante se cuestiona sobre los resultados que está obteniendo de la realidad física, debates con el maestro y con sus compañeros o cuando este se encuentra con una contradicción. La intención de la abstracción es que se pueda obtener un conocimiento conceptual por medio de los errores. Al respecto, algunos

autores comentan que los conceptos erróneos que tiene el estudiante se deben a ideas que utilizan para predecir la realidad física (André y Ding, 1991).

Finalmente, desde la postura de Lawson (1994) acerca del conocimiento conceptual en términos de un conocimiento declarativo y del conocimiento procedimental sustenta que estos posibilitan en la clase de ciencias que los estudiantes se pregunten o se planten problemas a través de sus conocimientos previos (incluyen las relaciones que estos establecen entre conceptos) y las prácticas que realizan. Además, menciona la necesidad del docente de cuestionar las acciones del estudiante y de sugerirle nuevos procedimientos y alternativas que le generen nuevos conceptos.

Otra de las posturas sobre los conocimientos procedimentales en clases de ciencias es dada por Hammer (1994), quien sostiene que la solución de problemas en física se ha dirigido a identificar falencias en el conocimiento conceptual del estudiante. Sin embargo, debate que este conocimiento depende de los supuestos y creencias con la que los estudiantes llegan a sus clases de física. Por su parte Sudarmani, Daban y Pujianto (2018) afirma que la intención del conocimiento procedimental en física es reflejar la capacidad de los estudiantes para conectar procesos algoritmos con una situación problema de manera que comunique los resultados si los algoritmos son correctos.

Finalmente, se reconoce que las acciones de los estudiantes con respecto a adquirir conocimientos conceptuales y procedimentales se encuentran centradas en las relaciones entre conceptos y procesos, para comprender el conocimiento científico. Además, se identifica el papel que desempeña la matemática en la construcción de explicaciones de los fenómenos físicos, la función de la abstracción reflexiva en las acciones del estudiante y la intención de los procesos de modelación y experimentación para desarrollar destrezas.

En la Figura 3 se presenta la manera como convergen los conocimientos en matemáticas y en física en consideración con la tipificación realizada.

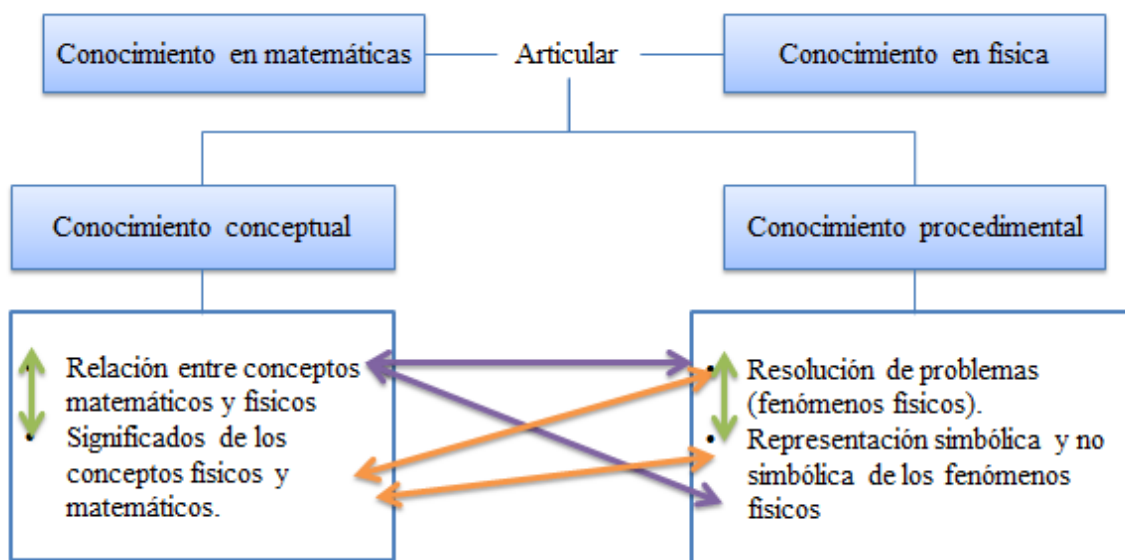


Figura 3. Convergencia entre conocimientos.

Elaboración de los autores.

2.2 La modelación y la experimentación

En el campo de la Educación Matemática y la Educación en Ciencias se reconocen diferentes estrategias y medios que buscan favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje como el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), la incorporación de la historia de las matemáticas, la literatura científica, el aprendizaje basado en proyectos, la modelación, entre otros. De manera particular, los estudios en modelación muestran que esta puede ser entendida como un proceso (Biembengut y Hein, 2004), una estrategia de enseñanza (Molina-Mora, 2017), una competencia (Verbel y Castilla, 2013) y un objeto de estudio tanto en el campo científico como en educación matemática. La experimentación también se considera un proceso científico que contribuye al aprendizaje de las ciencias (y a la física en particular) y que existen experiencias donde se relaciona con la modelación. En coherencia con lo anterior y con los propósitos de este trabajo, se presenta en este apartado la modelación matemática como proceso en el aula, planteamientos sobre la experimentación en los procesos de enseñanza y algunas consideraciones sobre sus roles en la articulación de conocimientos.

2.2.1 Aspectos de la modelación

Según algunos investigadores (Blum y Niss, 1991; Camarena, 2012; Gilbert y Justi, 2018), la modelación puede ser definida como un proceso que busca la construcción de modelos de acuerdo con una situación problemática de algún contexto específico (matemático o no) o con un fenómeno que se estudia. En particular, Gilbert y Justi (2018) consideran que la modelación³ “es la operación compleja involucrada en la producción y validación de dichos modelos” (p. 25). Sin embargo, Búa y Fernández (2015) afirman que la modelación no sólo se puede reducir a la obtención de modelos, sino que es necesario reflexionar sobre ellos y que se comprendan las diferentes representaciones matemáticas y su relación con la situación problema. En coherencia con lo anterior, autores como García y Rentería (2013) y Domínguez, de la Garza y Zavala (2015) afirman que la modelación ayuda a que los estudiantes hagan predicciones de una situación física a partir de la construcción y la validación de modelos con el fin de comprobar sus hipótesis.

Gilbert y Justi (2018) plantean que la modelación es un aspecto importante dentro de los contextos escolares por al menos dos razones. La primera razón tiene que ver con el hecho de que este proceso es clave en el pensamiento, y la segunda es que hace parte de la naturaleza de la ciencia, es decir, con la manera en que se organiza y se valida. Así mismo, los autores reconocen que este es un proceso dinámico y que no es posible definir un método preciso para hacerlo. A pesar de ello, plantean algunas etapas importantes para la construcción de un modelo, estas son: creación de un modelo mental inicial, expresión del modelo, prueba del modelo (testing the model) y evaluación del modelo (evaluation of the model). A continuación se describe cada uno de ellos:

La creación de un modelo mental inicial: El modelo mental puede ser entendido, según los autores, como una representación de un aspecto del mundo en la mente de alguien. Esto implica considerar qué se desea hacer con el modelo (plantear[se] unos objetivos), relacionarse

³ En la literatura se hallan términos como modelización o modelación para aludir a la construcción de modelos. Ambos términos se entienden de la misma manera en este trabajo. Sin embargo, se adopta el uso de la palabra modelación.

con el fenómeno a modelar, relacionar los objetivos del modelo con el fenómeno, y usar un enfoque de razonamiento analógico con el fin de producir un modelo mental inicial.

Expresión del modelo: Se refiere a emprender acciones para hacer comunicable el modelo. Esto implica producir una visualización del prototipo (modelo mental), expresar el prototipo en uno de los cinco modos de representación principales (estos incluyen la representación concreta/material, verbal, visual, simbólico y virtual), y adaptar el modelo expresado a la luz de los objetivos con los que se soporta su creación y de la experiencia con el fenómeno.

Prueba del modelo: Aquí se deben realizar pruebas mentales y empíricas de la validez del modelo y la modificación del mismo en caso de ser necesario.

Evaluación del modelo: Se debe considerar el grado de coincidencia entre el modelo y el fenómeno mismo, en coherencia con los propósitos que se plantean.

Por su parte Camarena (2012) plantea que la modelación, como la construcción de modelos, consta de tres momentos. El primero está relacionado con la identificación de variables e invariantes presentes en la situación de estudio, el segundo con el establecimiento de relaciones entre esas variables a través de conceptos involucrados (propios de la matemática o del contexto a modelar), y el último, plantea un momento para validar la relación matemática (modelo) con lo modelado. Además, la misma investigadora plantea que para llevar a cabo la modelación como proceso se requiere de algunas habilidades, entre las que se encuentran:

- Identificar regularidades.
- Transitar del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa.
- Transitar entre las diferentes representaciones de un elemento matemático.
- Hacer "consideraciones" o "idealizar" el problema.

Algunos investigadores han caracterizado este proceso en ciclos motivados por el interés frente a la manera en que se realiza ese proceso en el aula y la relación con el contexto en el cual

emerge la situación a modelar. Sin embargo, es importante destacar que no existe un único ciclo de modelación, sino que hay múltiples representaciones de este proceso. Por ejemplo, Perrenet y Zwaneveld (2012) reportan ocho ciclos diferentes de modelación y construyen una propuesta (Figura 4), a partir de la identificación de diferentes elementos que consideran estudiantes y profesores a la hora de *modelar*.

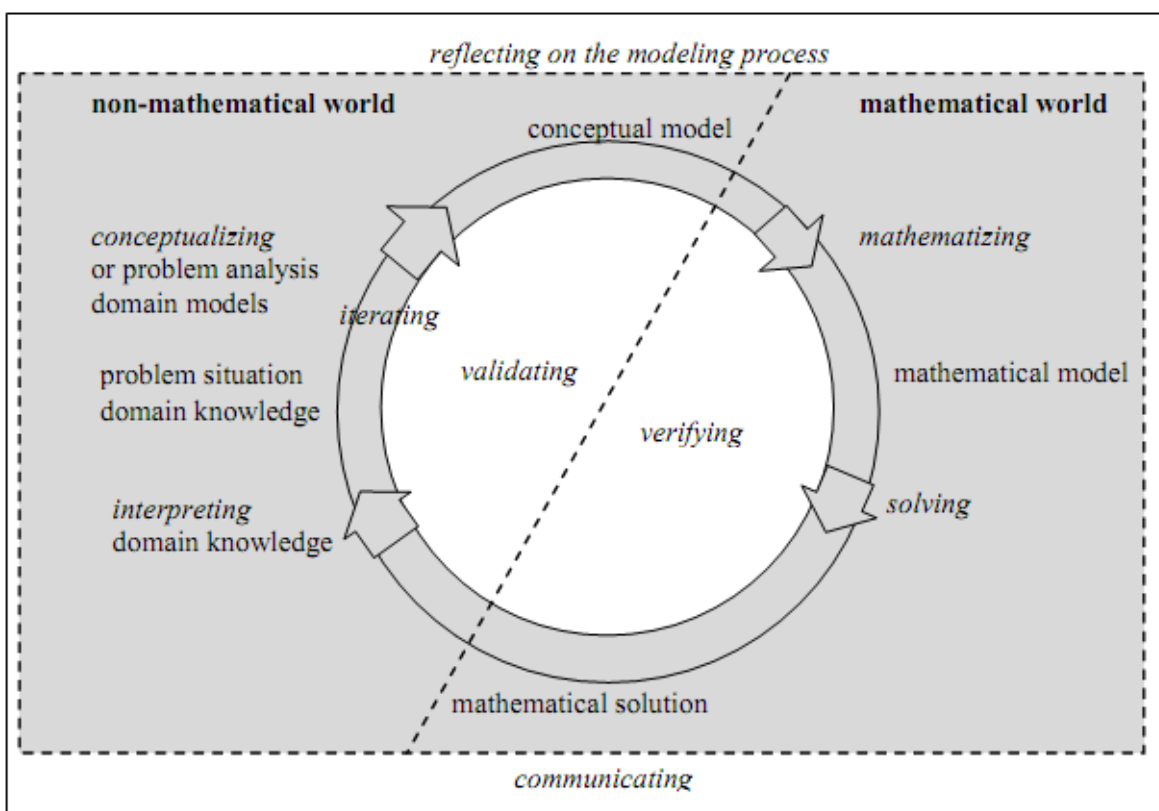


Figura 4. Ciclo de modelación de Perrenet y Zwaneveld (2012).

Perrenet y Zwaneveld (2012) plantean, en consideración con los resultados de su trabajo, algunos aspectos que no se presentan con tanta frecuencia en otros ciclos y los denominan “Mundos, modelos y conocimientos”. Estos aspectos se refieren a que la modelación matemática es mucho más que solo modelar, que la situación problema proviene de otros dominios extramatemáticos que implican conocimientos y modelos no matemáticos. Así mismo, los autores plantean que es importante realizar una actividad metacognitiva en los procesos de modelación, la reflexión. Para realizar dicha actividad se debe responder a preguntas relacionadas con las mejoras necesarias que debieron considerarse en el proceso y con la

posibilidad de aplicar tanto los métodos usados como los modelos construidos en otros contextos.

En coherencia con lo anterior, es común encontrar que la modelación emerge de un contexto, situación problema o fenómeno del mundo real (dominio extramatemático). A partir de dicha situación se genera una serie de actividades como la simplificación, en donde se busca delimitar la situación original; la matematización que, a través de una serie de procedimientos matemáticos, permite consolidar un modelo que debe ser interpretado a la luz de la situación en cuestión, aquí el modelo representa parte de la realidad y en ella se debe encontrar correspondencia con las teorizaciones realizadas. Posteriormente, se valida el modelo: si es satisfactorio se plantea la solución en términos de la situación original y se comunica; en caso de no serlo, se realizan algunas modificaciones para finalizar el trabajo o plantear un modelo nuevo (Blum y Leiß, 2006; Perrenet y Zwaneveld, 2012).

De esta revisión exploratoria se puede concluir que más o menos común a todas estas representaciones (y visiones subyacentes) [ciclos de modelación] es que uno comienza con la noción de un problema. Este problema tiene que traducirse en un modelo matemático de este problema, del lenguaje no matemático a las matemáticas. Luego, el problema matemático debe resolverse mediante algún tipo de cálculo y la solución matemática debe interpretarse en términos del problema original. (p. 6-7)

No obstante, estos aspectos comunes que reportan los investigadores no consideran elementos destacados por otros autores como la identificación de variables y relaciones entre ellas (Camarena, 2012) u otras acciones que son importantes para este trabajo como la experimentación.

Se identifica en la literatura algunos estudios que incorporan la modelación y la experimentación de manera conjunta en la educación matemática (Bua y Fernandez, 2015; Rodríguez y Quiroz, 2016; Caron y Pineau, 2017). El trabajo de Rodríguez y Quiroz (2016), por ejemplo, buscó describir el rol de la experimentación en un curso de matemáticas para ingenieros basado en modelación. Los autores plantean que la experimentación ayudó a la comprensión de

la modelación de fenómenos eléctricos, que en ese contexto favoreció la construcción, interpretación y validación de modelos matemáticos. Además, plantean que la experimentación es determinante en el proceso de dotar de nuevo significado las nociones matemáticas involucradas. Estos investigadores adoptaron el ciclo que se presenta en la Figura 5.

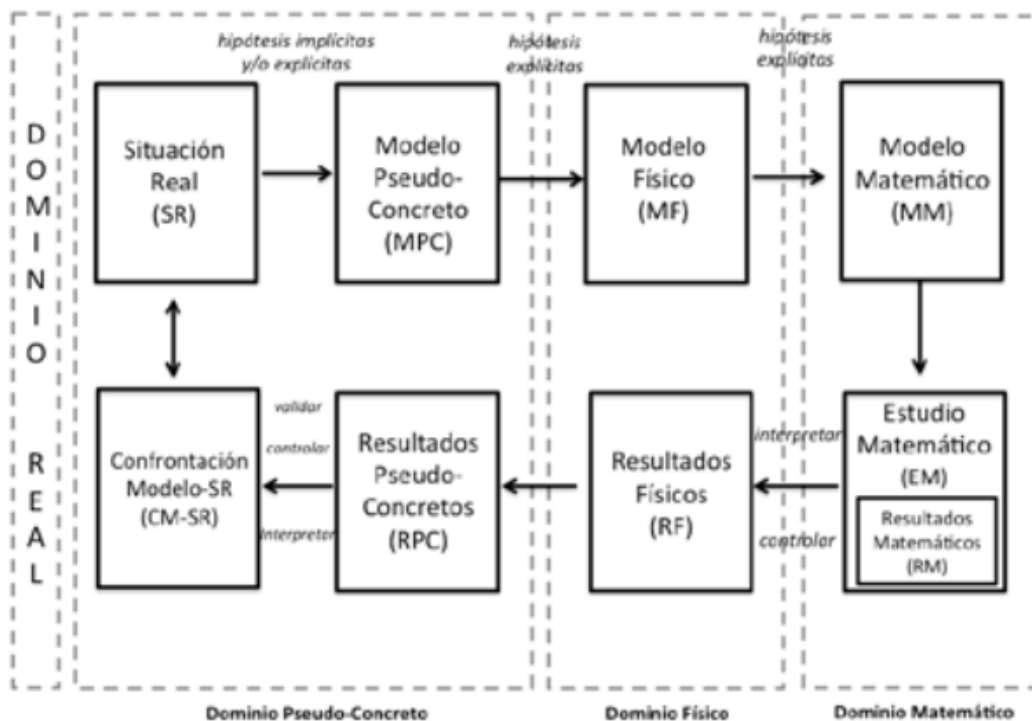


Figura 5. Ciclo propuesto por Rodríguez y Quiroz (2016).

En este ciclo se demarca de manera explícita un dominio físico en el cual se debe tener en cuenta la presentación del modelo en términos comunes, además se debe indicar con precisión las leyes que rigen el fenómeno; estas deben establecerse en lenguaje natural y deben describir el comportamiento general del problema. Asimismo, se plantea la necesidad de especificar cuáles son las incógnitas y las variables del problema, la redacción matemática de las relaciones identificadas entre variables, la formulación matemática de la pregunta o el objetivo planteado, la construcción de una ecuación basada en las leyes del fenómeno estudiado y el conocimiento teórico del modelo pseudo-concreto. Es importante integrar los argumentos para justificar las interpretaciones, reconocer la importancia de las matemáticas y hacer correcciones (si es necesario), antes de recurrir a una interpretación final para dar respuesta al problema o alcanzar los objetivos propuestos (Rodríguez, 2007).

Caron y Pineau (2017) realizaron un trabajo basado en el problema de peso de L'Hospital que incluye la elaboración de un montaje experimental. Los autores plantean un esquema para mostrar las fases de modelación empleadas en su actividad (Figura 6), en el cual se observan aspectos de la modelación que se mencionaron antes, pero con una diversidad más amplia de interacciones entre ellos. Se señala que dentro de los resultados planteados por los autores se encuentra que los estudiantes tienen una buena percepción sobre la actividad, quizás por las posibilidades de interactuar con el modelo físico, lo cual permite a los estudiantes explorar y anticipar lo que ocurrirá en el sistema; también que los estudiantes se sintieron mejor, una vez culminada la actividad, frente a ciertos temas como la relación entre variables y funciones. Otro asunto a resaltar es que los estudiantes asocian las diferencias entre los datos obtenidos del modelo y los experimentales, provenientes de los instrumentos y mediciones, aunque no consideran la simplificación (por ejemplo, la fricción).

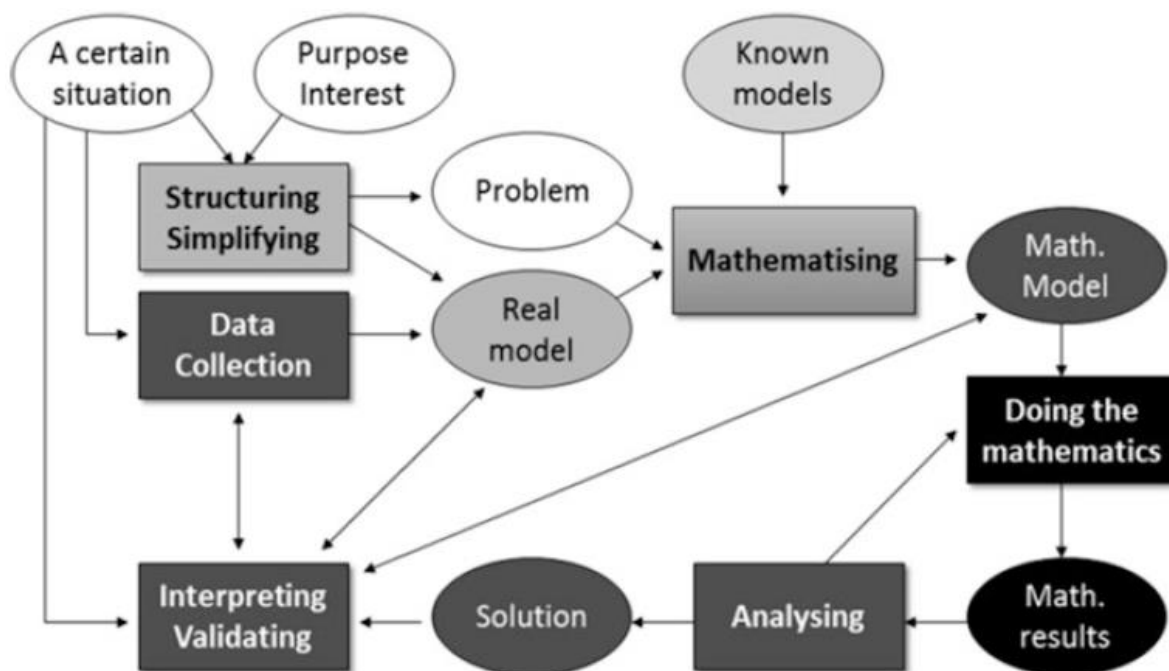


Figura 6. Fases de modelación de Caron y Pineau (2017).

En la actividad propuesta por Caron y Pineau (2017) se incluyó la familiarización con el aparato, la construcción de ecuaciones, la prueba de modelos matemáticos, la predicción de aspectos relacionados con la situación, la verificación del grado de predicción y la evaluación de

qué tan bien se refleja lo anticipado a través de las ecuaciones. Sin embargo, los autores reconocen que el cruce hacia la física fue difícil de implementar. Esto revela que hay una complejidad para incluir procesos de modelación en clase de física porque hay conceptos y procedimientos propios de esa disciplina que deben ser considerados como la medición, el uso de instrumentos, la simplificación, entre otros.

En los procesos de modelación es posible identificar la intervención de, al menos, tres elementos de interés: una problemática o contexto en la cual emerge una situación a modelar (ente modelado), que para efectos de esta investigación corresponde a una situación del mundo físico; una relación, en este caso matemática, que se encarga de establecer una conexión entre el dominio matemático y la situación real (modelo); y una persona que se encarga de realizar el proceso para la obtención y validación del modelo (modelador). El modelador crea (o actúa sobre) un modelo que representa alguna situación o fenómeno.

De forma adicional, según el contexto en el cual emerge la situación a modelar y los propósitos de este proceso, se debe considerar que se suelen realizar acciones como la identificación de magnitudes variables y constantes, predicciones sobre el comportamiento de la situación o fenómeno (aquí se resalta la importancia del modelo), la creación de modelos mentales iniciales, la generalización, la medición, la identificación por caso límite, entre otras que pueden ser emergentes. Por tanto, en coherencia con los objetivos de investigación es importante establecer la manera en que los maestros en formación entenderán la modelación en este trabajo. Más que adoptar uno de los diferentes ciclos de modelación, se consideran algunas características generales de este proceso que se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. *Características generales del proceso de modelación*

| Característica | Acciones involucradas | Descripción |
|--|---|---|
| Estudio de un problema o situación. | - Exploración o reconocimiento de la situación. - Emitir hipótesis iniciales sobre la situación. | Hace referencia al contexto en el cual emerge la situación a modelar. La situación susceptible de modelar puede provenir del mundo real o ser recreada para evocar uno. |
| Construcción de un modelo físico | - Construir un modelo físico sobre la situación. | Se construye un modelo físico o tangible de la situación de estudio. Usualmente, es |

| | | |
|-----------------------|--|--|
| | | producto de modelos mentales iniciales que proyectan la materialización de ideas o hipótesis. |
| Simplificación | <ul style="list-style-type: none"> - Ignorar factores que no intervienen en la situación. - Despreciar elementos que por su poca influencia pueden ser omitidos en el estudio de la situación o problema. - Emitir hipótesis implícitas o explícitas sobre el comportamiento de la situación. | Tiene que ver con el hecho de reconocer e ignorar elementos que no intervienen directamente en el estudio del fenómeno o que pueden ser discriminados por su poca influencia en el mismo. Esta característica nos muestra que en los procesos de modelación no es posible incluir todas las variables que intervienen en un fenómeno. Simplificar requiere de conocimientos propios de la situación estudiada para poder determinar que efectivamente pueden no ser considerados. |
| Matematización | <ul style="list-style-type: none"> - Identificación de variables y sus relaciones. - Reconocimiento de orden causal. - Emitir hipótesis explícitas sobre la situación. - Construcción de modelos matemáticos que aludan a la situación o problema, de manera tal que represente algunos aspectos de esta según las hipótesis planteadas. - Procesos para obtener datos. | Alude al uso de representaciones matemáticas, en cualquiera de los diferentes registros simbólicos (algebraico, tabular, gráfico), asociadas al comportamiento del fenómeno o la situación, generalmente al producto de dicha actividad se le considera modelo matemático. |
| Validación | <ul style="list-style-type: none"> - Evaluar la consistencia lógica o matemática del modelo planteado. - Determinar el grado de correspondencia entre el modelo y la situación o problema (en este caso, se debe recurrir al mundo real para contrastar y validar resultados). | Consiste en verificar que el modelo planteado represente adecuadamente la situación estudiada; es decir, que exista un grado de correspondencia satisfactorio entre el objeto de estudio y el ente que la representa con el fin de resolver la situación problema o atender a los propósitos de la modelación. Si los resultados no son satisfactorios, se debe considerar un análisis retrospectivo que permita identificar y solventar las dificultades, o realizar nuevamente el proceso. |

Los anteriores aspectos suelen ser comunes en los procesos de modelación y son importantes para esta investigación porque en cada uno de ellos es posible encontrar elementos

de los conocimientos en matemáticas y en física, tales como la realización de procedimientos algorítmicos, la construcción de representaciones, la identificación de variables y sus relaciones. Asimismo, se debe considerar unos conocimientos propios del contexto de la situación a modelar, pues son necesarios para poder determinar qué factores se pueden ignorar y cuáles son importantes (por ejemplo, se requiere de un conocimiento conceptual para considerar que en la caída libre la gravedad no puede ser ignorada, a diferencia de otros fenómenos como el movimiento de un fluido). Adicionalmente, como lo plantea Villa-Ochoa y Berrio (2015), la modelación no solo posibilita la construcción de conocimientos en matemáticas, sino que también se da en el contexto donde se enmarca la actividad de modelado. En este trabajo, el contexto en el cual emerge la situación a modelar es el mundo físico y se verá inmerso en actividades tanto de modelación como de experimentación. A continuación se describen algunos aspectos relacionados con dicha experimentación.

2.2.2 Aspectos de la experimentación

En este apartado se muestra la importancia de la experimentación en la educación en ciencias. Se presenta como una actividad que permite explicar, organizar y comprender los fenómenos y se reportan algunas investigaciones que consideran el rol de la modelación en la experimentación.

En diferentes contextos se reconoce el carácter experimental de las ciencias naturales y se reportan diversas investigaciones que resaltan la importancia de la experimentación en las clases de ciencias (Romero y Aguilar 2013; Romero, 2017; Guerrero, 2012; Okono, Sati, y Awuor, 2015). Sin embargo, aún existen discusiones sobre la manera en que se debe asumir y orientar en el aula. Estas discusiones pueden ser planteadas en términos de la relación entre teoría y experimentación. Sin pretender limitar los planteamientos, es posible identificar al menos dos perspectivas referentes a dicha relación. La primera considera la experimentación como un mecanismo a través del cual se corrobora o se falsea una teoría. La segunda perspectiva defiende que la experimentación es la base para la construcción del conocimiento, es decir, la teoría es producto de ella. En ambas perspectivas se asume una dicotomía entre teoría y experimentación. Esta relación es variable, compleja y contextual, es decir no es universal ni ahistórica (Malagon,

Ayala y Sandoval, 2011). A pesar de ello, en este trabajo se asume que no es posible establecer una separación tajante entre la teoría y la experimentación ya que mantienen una relación dinámica y constante (Guerrero, 2012; Malagon, Ayala y Sandoval, 2011; Izquierdo, Sanmartí y Espinet, 1999). Romero y Aguilar (2013, p.92) plantean que:

Se pretende propiciar y poner en práctica una visión del experimento en estrecha relación con las construcciones conceptuales; de hecho muchos conceptos físicos han surgido, precisamente, de una organización de la experiencia sensible y muchos diseños y técnicas experimentales para la cuantificación de magnitudes físicas tienen sentido solo a la luz de su significación conceptual.

Malagón, Sandoval y Ayala (2013) arguyen que, al asumir esta postura, la experimentación se acompaña de una comprensión conceptual que posibilita el diseño y la organización de experiencias.

Frente a las características o acciones involucradas en la experimentación es importante resaltar la presencia de una observación controlada (e intencionada) o de una intervención del estudiante que en cierto sentido altera el curso normal de la naturaleza. Este es un aspecto que permite distinguir los experimentos de la experiencia, la cual se suele asociar con observaciones no controladas (Meli, 2006). Este aspecto de la experimentación revela el carácter creado de los experimentos, pero también pone de relieve que en ella no es posible involucrar todos los factores presentes en la naturaleza.

Alís, Gil-Pérez, Peña, y Valdez (2006) presentan las diferentes críticas que se han atribuido a las guías tipo receta pues esto “contribuye a una visión rígida, algorítmica y cerrada de la ciencia, faltando incluso el análisis crítico de los resultados obtenidos, el planteamiento de nuevos problemas, etc.” (p. 162). A su vez, los autores proponen asociar el trabajo experimental con otros aspectos importantes de la investigación científica, entre ellos se destacan algunos que son considerados en este trabajo investigativo:

- Presentar situaciones problemáticas abiertas en consideración con el nivel de los estudiantes.
- Potenciar análisis cualitativos que ayuden a comprender y acotar los fenómenos o situaciones que se estudian.
- Emitir hipótesis que permitan orientar ciertas acciones dentro de la actividad científica y que muestren las preconcepciones de los estudiantes.
- Elaborar diseños experimentales.
- Realizar un análisis detenido de los resultados a la luz de los conocimientos disponibles, de las hipótesis elaboradas y de resultados de otros equipos de trabajo.
- Elaborar memorias científicas que den cuenta del trabajo.
- Potenciar la dimensión colectiva del trabajo científico.

Por su parte, Romero, Aguilar, y Mejía (2016) realizaron una caracterización de las formas de asumir el rol de la experimentación en clases de física a partir de algunos planteamientos de futuros profesores y de sus producciones. Allí presentan las tres categorías siguientes: relación teorización-experimentación, rol del instrumento en la construcción de conocimiento y finalidades de la experimentación. La primera plantea subcategorías que aluden a una relación de independencia (donde hay un énfasis en considerar la teoría como fundamento de las actividades experimentales) y una relación de complementariedad (donde ambas se desarrollan de manera conjunta), postura que se asume en este trabajo investigativo. La segunda alude al rol de los instrumentos y los procesos de medición como independientes del sujeto que experimenta o como constituidos interdependientemente con el fenómeno abordado. Finalmente, en la tercera categoría se presentan tres subcategorías que demarcan acciones de interés para este trabajo como producción de efectos sensibles, identificación de propiedades, construcción de magnitudes, identificación de regularidades, discusiones, validación de representaciones, relacionamiento de datos y conclusiones, evaluación de afirmaciones a partir de experiencias.

Frente al uso de modelos y de la modelación en procesos experimentales es posible identificar algunas experiencias en la literatura. Por ejemplo, García y Rentería (2011) plantean que el uso de la modelación en problemas puede desarrollar habilidades de experimentación en sus estudiantes. La experimentación, según los autores, implica la construcción o el uso de

modelos y, a su vez, tanto la identificación y manipulación de variables como el reconocimiento del orden causal entre ellas, aspectos que son vistos por los autores como habilidades de experimentación. Para cumplir con la implementación de la modelación los autores realizan actividades como la emisión de hipótesis, la construcción de un modelo físico, el análisis de las variables involucradas en el fenómeno, el uso de representaciones matemáticas que muestren cómo se relacionan las variables y la evaluación del modelo. Esto es importante para los investigadores en tanto entienden que “dicho proceso se caracteriza porque en éste se controlan las condiciones naturales del fenómeno estudiado, con la intención de analizar los posibles efectos que ejercen unas variables sobre otras” (García y Rentería, 2011, p. 51).

Los aspectos relacionados con la experimentación que se presentaron en este apartado muestran que hay una relación estrecha con las acciones que se proponen frente a la modelación. En ese sentido, la Tabla 3 presenta las acciones implicadas tanto en la modelación como en la experimentación que se consideraron en el desarrollo de este trabajo de investigación y que se concretan en unas acciones de modelación y experimentación:

Tabla 3. *Acciones de modelación y experimentación.*

| Modelación | Experimentación | Modelación y Experimentación |
|------------------------------------|--|--|
| Estudio de un problema o situación | Estudio de un fenómeno | Estudio de un fenómeno físico de interés |
| Construcción de un modelo físico | Elaborar un diseño experimental | Construcción de un montaje experimental |
| Simplificación | Observación controlada Manipulación de artefactos e instrumentos | Consideraciones de interés y ajustes del montaje |
| Matematización | Identificación y manipulación de variables Procesos de medición Construcción de representaciones | Obtención de datos y construcción de modelos |
| Validación | Validación | Validación |

La conjugación de estos elementos en modelación y experimentación se presenta como una alternativa para unir dos procesos que convergen en algunos de sus planteamientos y que se

pretende, sean la condición de posibilidad para articular conocimientos en matemáticas y física. Esto se debe principalmente a que durante la modelación y experimentación se:

- Promueve acciones (conocimientos procedimentales) tanto en matemáticas como en física. Dentro de estas se encuentran los procesos de representación, argumentación, registro y toma de datos, reconocimiento de patrones, identificación y manipulación de variables, entre otros. También la reflexión sobre dichas acciones respecto a porqué es importante emprenderlas para cumplir con algún propósito.

- Promueve conocimientos conceptuales del fenómeno en el cual emerge la situación a modelar, para efectos de este trabajo, sobre el Movimiento Armónico Simple (en adelante, MAS), a partir de la identificación de regularidades y sus características. Además, permite vincular ideas previas para plantear hipótesis, corroborarlas o refutarlas.

- Posibilita la construcción de modelos que describan y expliquen el movimiento oscilatorio.

- Generan equipos de trabajo indispensables para la construcción de conocimiento matemático y científico.

En el siguiente apartado se presentan las consideraciones metodológicas que orientaron este trabajo y la manera en que este marco teórico configuró una propuesta de intervención en el aula de acuerdo con los objetivos planteados en esta investigación.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

El trabajo de investigación aconteció en el desarrollo de la práctica pedagógica. Por tanto, se llevó a cabo su implementación en la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa, donde se tenía adjudicado el trabajo formativo con estudiantes de Educación Media. El propósito de este capítulo es mencionar la manera en que los maestros en formación procedieron, en términos investigativos, para responder a la pregunta y cumplir con el objetivo general que se definió para la investigación: *analizar las posibles articulaciones que los estudiantes de Educación Media construyen frente al conocimiento en matemáticas y física a partir de la modelación y la experimentación*. Por consiguiente, se presenta el diseño metodológico: el enfoque que se utilizó, la descripción de los participantes, el papel de los maestros en formación, las etapas de la investigación, las técnicas de recolección de la información y el proceso de análisis y validación.

3.1 Enfoque

Se adopta un enfoque cualitativo que involucra acciones como cuestionar, crear hipótesis e interpretar (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Los maestros en formación buscan abordar estas acciones frente a las experiencias que tienen los estudiantes durante el proceso de intervención para articular los conocimientos en Matemáticas y en Física.

Referentes como García, Gil y Rodríguez (1999) y Hernández, Fernández y Baptista (2014) sustentan que la investigación cualitativa se puede concebir como un conjunto de prácticas interpretativas de la realidad que se concibe en el enfoque cualitativo, según Hernández et al. (2014), como una realidad subjetiva que se centra en “las creencias, presuposiciones y experiencias subjetivas de las personas, que van desde las muy vagas o generales (intuiciones) hasta las convicciones bien organizadas y desarrolladas lógicamente a través de teorías formales” (p.6). Estas interpretaciones de la realidad del estudiante se representan a través de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos que realizaron los maestros en formación durante el proceso de práctica y de implementación.

Según Hernández et al. (2014), las acciones del investigador del enfoque cualitativo se centran en entender, interpretar y describir la realidad subjetiva de los participantes, los estudiantes en este caso. Para esta investigación, se destaca el papel que tiene la realidad subjetiva, ya que permitió a los maestros en formación analizar sus experiencias. Por ejemplo, los procesos que realizaron los estudiantes de modelación y experimentación se relacionaban con su contexto y con su realidad para analizar cómo articulaban los conocimientos en matemáticas y en física, estos fueron tipificados por conocimientos conceptuales y procedimentales.

Vega-Malagón et al. (2014) mencionan que el enfoque cualitativo se debe centrar en los ambientes del participante (estudiante), es decir, en cómo este se comporta en lo cotidiano. Para esta investigación, apropiarse de dicho ambiente fue reconocer el contexto de aprendizaje en la escuela durante un periodo de un año (2018-II y 2019-I) donde los maestros en formación se familiarizaron con las dinámicas institucionales e hicieron parte del proceso formativo de los estudiantes. Conocer dicho contexto ayudó a elaborar el instrumento articulador de aula que se presenta en el Anexo B. Instrumento de implementación (p. 96). Así mismo el proceso de implementación busca cumplir con los objetivos propuestos en el Capítulo 1, que aluden a *identificar las articulaciones que los estudiantes de educación media construyen frente a los conocimientos en matemáticas y en física a partir de la modelación y la experimentación, y también a categorizar las relaciones que los estudiantes establecen entre los conocimientos en matemáticas y en física a través de la modelación y la experimentación.*

Al asumir el enfoque cualitativo, según Hernández et al. (2014), los aspectos teóricos presentados en el Capítulo 2 (p. 15) se convierten en un marco de referencia para guiar la investigación. En coherencia, los maestros en formación identificaron dos aspectos en relación con los aportes de los referentes teóricos en el diseño metodológico: el primero consistió en la construcción de un instrumento articulador que se llevó a cabo en el aula; y, el segundo, fue el análisis de los resultados de la implementación.

De acuerdo con las intenciones del enfoque cualitativo, los maestros en formación interpretaron las acciones y productos que desarrollaron los estudiantes de la IEPLAC a la hora

de aplicar el instrumento articulador en el aula (Anexo B. Instrumento de implementación, p. 96) a la luz de los referentes teóricos. De esa manera, fue posible:

- Observar las articulaciones que realizaron los estudiantes frente a los conocimientos en matemáticas y física a través de las experiencias de modelación y experimentación.
- Reconocer el rol de la modelación y la experimentación en la construcción de dichas articulaciones.
- Interpretar las experiencias de los estudiantes frente a la articulación de los conocimientos en matemáticas y física. Dichas experiencias se reportaron por medios audiovisuales, productos propios de los participantes y los diarios pedagógicos de los maestros en formación, que servirán de insumos para los objetivos de la investigación. En especial, para categorizar las relaciones que los estudiantes establecieron entre los conocimientos en matemáticas y en física a través de la modelación y la experimentación.

Las anteriores acciones permitieron a los maestros en formación identificar si los estudiantes, a través de su intervención y la implementación del instrumento, lograban establecer relaciones entre los conocimientos en matemáticas y en física. Por ejemplo, al interpretar las diferentes experiencias de los estudiantes (realidad subjetiva) se podía evidenciar si estos dotaban de sentido las expresiones matemáticas o el fenómeno que se estudiaba. A partir de dicha identificación se reconoció algunos elementos frente al tipo de relaciones que los estudiantes establecen entre esos conocimientos, la manera en que la modelación y la experimentación permitieron articular los conocimientos y de qué manera lo hicieron, lo cual permitió categorizar las relaciones establecidas. En suma, se cumplió con los objetivos propuestos en la investigación.

3.2. Contexto

En el contexto investigativo se presentan tanto los participantes como los colaboradores de la investigación, el papel de los maestros en formación, las consideraciones espaciales y temporales en las que se enmarca la investigación. Así mismo, se muestran los propósitos de formación, los intereses y los recursos que configuran el escenario investigativo.

3.2.1. Colaboradores y participantes en el proceso investigativo

En este trabajo investigativo se considera colaboradores a los profesores cooperadores de la Institución (IEPLAC), encargados de apoyar el proceso de práctica pedagógica; a algunos investigadores que aportaron a diferentes discusiones teóricas y metodológicas en relación con el diseño de un instrumento articulador para la intervención en el aula; a la asesora del trabajo de grado y a los colegas del seminario de práctica, quienes con sus problematizaciones y comentarios ayudaron a la consolidación de la investigación; y en general, a las demás personas que aportaron al desarrollo del estudio.

Los participantes fueron los estudiantes de Educación Media de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa con edades entre los 15 y 18 años. Participaron en el proceso de práctica y en la implementación un total de 83 estudiantes, en su mayoría, del sector urbano del municipio de Caldas-Antioquia.

Los maestros en formación asumieron el rol de observadores participantes y el rol de observadores en consideración con el enfoque. El primer rol hace referencia a que el investigador se cuestiona por la realidad, pero también participa en ella. Autores como Guber (2001) afirman que “la participación pone el énfasis en la experiencia vivida por el investigador apuntando su objetivo a “estar dentro” de la sociedad estudiada” (p. 57). En consideración con lo anterior, el observador participante permeó el ambiente del aula a la hora de abordar la temática e implementar el instrumento articulador diseñado. El segundo rol, según lo propuesto por Bonilla y Rodríguez (1997), consiste en observar de manera investigativa, es decir, centrar la atención en un interés específico, sobre algunos aspectos que se quieren estudiar e investigar.

Con respecto a los dos roles que asumieron los investigadores y el enfoque de esta investigación, los maestros en formación identificaron y analizaron las acciones de los estudiantes observando las articulaciones entre los conocimientos en matemáticas y en física a través de las actividades de modelación y experimentación propuestas en el instrumento que se implementó en el aula. Además, analizaron la información registrada a través de los diarios

pedagógicos, las grabaciones de audio, los videos y los documentos que los estudiantes realizaron.

3.2.2. Escenario investigativo

El proceso de implementación se llevó a cabo en 4 semanas con una intensidad horaria semanal de 6 horas, 2 de ellas correspondían a la clase de Física y 4 a la clase de Matemáticas, según planteamientos institucionales. No obstante, el trabajo de campo se desarrolló en el marco de una articulación de las asignaturas de Matemáticas y Física en la IEPLAC. Es decir, se hizo un proceso secuencial a partir del instrumento articulador sin diferenciar la asignatura a la que pudiesen corresponder las temáticas abordadas.

La articulación de las asignaturas se sustenta a partir de al menos cuatro aspectos. El primero tiene que ver con la convergencia temática que se observa en los documentos ministeriales, pues allí se plantea la necesidad del uso de las matemáticas en ciencias (por medio de ecuaciones, funciones y conversiones) y el estudio de fenómenos periódicos para el caso de las matemáticas (MEN, 2006). El segundo aspecto se relaciona con la necesidad de realizar procesos interdisciplinarios. En un tercer lugar se resalta el valor de los conocimientos teóricos y prácticos que se pueden configurar en ambas asignaturas. Finalmente, el cuarto aspecto hace alusión a la necesidad de incorporar en el aula procesos de modelación donde no exista una subordinación entre los conocimientos en Matemáticas y el contexto en el cual emerge la situación a modelar (Villa-Ochoa y Berrio, 2015), en este caso proveniente de la Física; esta no subordinación también es considerada en la experimentación.

Los maestros en formación configuraron un escenario investigativo en coherencia con el problema y los objetivos que se pretenden alcanzar en la investigación. Así, se conformó un espacio de formación donde se vinculan actividades de modelación que contribuyeron al vínculo entre los conocimientos en matemáticas y otras disciplinas, en este caso con la física, (Blum, 2011; Rodríguez y Quiroz, 2016) y la experimentación como proceso que incorpora acciones de modelación y conceptos propios de las matemáticas.

Otra consideración es la coherencia entre planteamientos institucionales y teóricos, pues se asume el conocimiento a partir de la tipificación del conocimiento conceptual y procedimental que se mencionó en el Capítulo 2 (p. 15), y se reconocen en los planes de área de Matemáticas y Ciencias Naturales, el cual vincula el área de Física. Por ejemplo, el Plan de Área de Matemáticas de la institución propone como objetivo “dinamizar la construcción conceptual y procedimental propia de las matemáticas escolares, favoreciendo el desarrollo de competencias científicas” (IEPLAC, 2012b). Así mismo, frente a las Ciencias Naturales, propiamente en Física, se plantea una formación que posibilite acceder tanto a procedimientos como a los conceptos propios del área (IEPLAC, 2012c). De esta manera, para analizar las articulaciones que realizan los estudiantes se construyó un instrumento de intervención en el aula (Anexo B. Instrumento de implementación, p. 96).

3.3. Etapas de la investigación

El diseño metodológico se configuró a partir de tres etapas: La primera etapa tiene que ver con la construcción del problema de investigación y la revisión de literatura, asunto que brindó elementos para el diseño del instrumento y para optar por el desarrollo de procesos de modelación y de experimentación en clase. La segunda etapa está relacionada con el diseño, construcción y validación del instrumento articulador que incluye actividades de modelación y experimentación, mediante el cual se buscó analizar las articulaciones entre los conocimientos en matemáticas y física. Por último, la tercera etapa abarca la implementación del instrumento articulador, la recolección de la información, el análisis y los resultados de la misma; aspectos centrales para dar cuenta de los objetivos de esta investigación.

3.3.1. Etapa 1. Configuración del problema y revisión de la literatura.

Como se mencionó en el Capítulo 1 (p. 3) de este trabajo, el problema de investigación emergió en el 2018-II a partir de las prácticas pedagógicas como resultado de los análisis del nivel institucional y del nivel documental. Además, se reconoció el problema de investigación e identificó el contexto institucional.

En consideración con el problema, se realizó una revisión de la literatura. Para ello, se consultaron documentos en diferentes bases de datos bibliográficas como son: EBSCO, Dialnet, Scopus, Scielo y en el metabuscador Google académico. Así mismo, se tuvo en cuenta algunos trabajos que investigadores en Educación Matemática y en Educación en Ciencias recomendaron. Después se seleccionó la información bajo criterios como que la fecha de publicación de los artículos no excediera los 10 años (2009-2019), excepto aquellos que abordan contenidos históricos o epistemológicos, también se tuvo en cuenta el título, el resumen, las palabras clave, los resultados y la población a la cual se dirigía el documento. El propósito de estas acciones fue presentar discusiones actuales tanto en relación con las maneras de entender los conocimientos en matemáticas y en ciencias, como con las maneras de entender los procesos de modelación y experimentación en contextos educativos y sus potencialidades para articular esos conocimientos.

A partir de la información se realizó una revisión crítica de la literatura donde se describieron los pensamientos actuales de los expertos y se desarrolló un análisis crítico, en este caso para elaborar un marco teórico que respondiera a los objetivos investigativos. En consecuencia, se configuraron tres objetos en la investigación: los conocimientos en matemáticas y en física, la modelación y la experimentación. Finalmente, se evidencia cómo estas dos últimas posibilitan la articulación entre estos conocimientos.

Respecto a los conocimientos en matemáticas y física, se buscó diferentes documentos con palabras clave como “Conocimientos matemáticos” (“mathematical knowledge”) y “Conocimiento físico” (“Physical knowledge”), con la intención de poder pensar la manera en que estos se pueden articular. Así se abordó la articulación a través de una tipificación de los conocimientos conceptuales y procedimentales, por lo cual se revisaron algunos artículos que emergieron al considerar palabras clave como “Procedural and conceptual mathematical knowledge” y “Procedural and conceptual physical knowledge”.

De igual modo, se buscó diferentes documentos con respecto a la modelación en educación en ciencias y a la modelación en educación en matemáticas con la intención de definir dos cuestiones: una postura sobre qué se va entender por modelación y por qué esta postura

aporta para la articulación entre conocimientos en matemáticas y en física. Estos mismos aspectos se consideraron con la experimentación.

3.3.2. Etapa 2. Diseño, construcción y validación de un instrumento articulador.

El diseño y la construcción del instrumento articulador se realizó en correspondencia con las temáticas abordadas en los grados once en matemáticas y en física, a saber: el movimiento armónico simple, las relaciones y funciones matemáticas, en especial las funciones periódicas. El instrumento articulador consta de 3 fases que se subdividen en momentos.

Fase 1 “exploratoria”

Esta fase contiene 3 momentos que se observan en el Anexo B. Instrumento de implementación (p. 96). El primero hace referencia a una serie de preguntas que el estudiante debe responder de acuerdo a las ideas previas que tenga. El segundo consta de una serie de videos que representan situaciones cercanas al mundo real y de acuerdo con ellos se debía llenar una tabla donde el estudiante vinculara lo que se observó con las siguientes preguntas que debían justificarse ¿El movimiento presentado en el video es periódico? ¿Qué variables intervienen en el movimiento? El tercero hace alusión a la conformación de grupos donde los participantes (estudiantes) debían discutir lo que observaron en el momento 1 y 2 y construir una definición del movimiento periódico y las variables involucradas. Finalmente, se hizo un espacio de discusión que orientaron los observadores participantes para promover reflexiones con los estudiantes frente a sus respuestas en los momentos 1, 2 y 3.

Los momentos anteriores buscaban que los estudiantes tuvieran un acercamiento al movimiento, a lo periódico, a lo repetitivo, etc., para así cumplir con el objetivo de la fase, que el estudiante reconociera ciertas características del movimiento armónico simple por medio de preguntas que se relacionaran con sus experiencias y, al mismo tiempo, analizar las variables involucradas en el fenómeno. A partir de las respuestas de los estudiantes, se analizó el conocimiento conceptual y procedimental, que se evidenció en sus ideas previas y algunos conceptos o procedimientos matemáticos y físicos.

Fase 2 “Modelación y experimentación”

La fase 2 consta de 4 momentos. En el primero se presentó a cada estudiante una serie de secuencias de fotos (se tomaron en iguales intervalos de tiempo) para contrastarlas con 4 preguntas de selección múltiple que hacían referencia al análisis de dichas fotos. Se buscaba que el estudiante reconociera algunas variables y sus relaciones; habilidades que son requeridas en los procesos de modelación y experimentación tal y como se reportó en el Capítulo 2 (p. 26). El segundo hace alusión a un estudio que se le hizo a un sistema masa-resorte en donde los equipos de trabajo (máximo 8 estudiantes) tenían que observar, tomar datos, analizar y graficar el fenómeno a través de las variables que intervenían en este. En el tercero se realizó una discusión del sistema masa-resorte desarrollado en el segundo momento. Los maestros en formación promovieron cuestionamientos y evocaron acciones en los estudiantes alrededor de la construcción del montaje. Después de hacer reflexiones sobre las gráficas, se presentaron las funciones periódicas y conceptos como amplitud, periodo, y velocidad angular que les correspondían. Estas discusiones sugirieron la reconstrucción o ajuste de las gráficas de los estudiantes. Finalmente, en el cuarto momento, los mismos equipos de trabajo realizaron la construcción de un modelo matemático que representara de manera general la posición del resorte en cualquier intervalo de tiempo.

En esta fase se buscó que el estudiante reconociera las variables involucradas en un movimiento armónico simple y se viera inmerso en procesos de modelación y experimentación, a través de los cuales se pretendía evidenciar algunas articulaciones entre los conocimientos en matemáticas y en física. Adicionalmente, el estudiante debía observar y analizar el movimiento de un sistema masa-resorte y realizar una representación gráfica que diera cuenta de este movimiento. Dichas acciones permitieron, a los maestros en formación, indagar por la presencia de conocimientos conceptuales y procedimentales mediante las producciones y las verbalizaciones que los estudiantes desarrollaban frente al uso de la modelación y la

experimentación, y frente a la comprensión entre los conceptos matemáticos y físicos expuestos en el Capítulo 2 (p. 15) .

Fase 3 “Apropiación”

Esta fase final se compone de 2 momentos. En el primero se realizó una indagación por equipos de trabajo acerca del movimiento de los péndulos. Se debía analizar las variables implicadas en éstos y con la ayuda de la modelación y la experimentación construir un modelo que relacionara el fenómeno con el conocimiento matemático: se tuvo en cuenta la experiencia que se realizó en el momento 2 de la fase 2. Por último, en el segundo momento, los dos grupos de grado undécimo presentaron a través de un vídeo el modelo que construyeron del movimiento armónico simple, el montaje experimental que construyeron, elementos conceptuales y procedimentales frente a la modelación-experimentación, el uso de instrumentos y consideraciones sobre las funciones periódicas y el movimiento armónico simple.

Esta fase propuso la construcción y validación de un modelo respecto a la experiencia de péndulos, que requirió de procesos de indagación por parte de los estudiantes en relación con el análisis de los fenómenos periódicos. Es decir, el estudiante construyó modelos matemáticos, expresados en funciones trigonométricas, registros gráficos y tabulares que describieran y explicaran el movimiento armónico simple, tal y como lo plantea el MEN (2006). El proceso fue autónomo, aunque contó con el apoyo y supervisión de los maestros en formación. En ese sentido, los maestros atendieron algunas inquietudes y problematizaron acciones que emprendieron los estudiantes.

La manera en que las fases y los momentos anteriores se llevaron al aula se describen con mayor profundidad en el Anexo C. Fases del proceso de implementación (p. 112). De forma adicional, se sometió a discusión el instrumento articulador con expertos de ambas áreas, en el Semillero de Investigación MATHEMA, en el Seminario de Práctica y con los maestros cooperadores. Esto hizo que sus versiones anteriores se transformaran hasta adoptar la estructura actual. Dentro de las modificaciones se incluyen dos aspectos. El primero es el estudio de las

variables como un aspecto de relevancia para establecer articulaciones entre las Matemáticas y la Física, lo cual puede evidenciarse en fenómenos físicos, pues allí se requiere analizar las cantidades que varían o permanecen invariantes y se expresan en ocasiones en funciones matemáticas. El segundo es la redacción de algunas preguntas y la elección de recuadros, preguntas de selección múltiple y casillas de verificación, de manera que faciliten el posterior análisis de la información.

3.3.3. Etapa 3. Implementación del instrumento articulador, recolección y análisis de la información.

En esta etapa se implementó el instrumento articulador que se diseñó en la etapa 2, planteando algunas actividades de modelación y de experimentación con los estudiantes de la IEPLAC en las asignaturas Matemáticas y Física. En la **Error! Reference source not found.** se esquematiza diferentes consideraciones sobre el instrumento articulador, su implementación en el aula y la manera en que proceden los maestros en formación.

La recolección de datos según Hernández et al. (2014) se hace “[...] con la finalidad de analizarlos y comprenderlos, y así responder a las preguntas de investigación y generar conocimiento” (p. 397). Entre los materiales que se estudiaron para el análisis de la información se encuentran las grabaciones de clase, los videos construidos por los estudiantes sobre sus experiencias de modelación y experimentación en clase, los diarios pedagógicos de los maestros en formación y documentos que los estudiantes respondieron, entre otros.

El papel que tienen los autores de este trabajo en esta etapa es fundamental puesto que “el investigador es quien, mediante diversos métodos o técnicas, recoge los datos (él es quien observa, entrevista, revisa documentos, conduce sesiones, etc.). No sólo analiza, sino que es el medio de obtención de la información” (Hernández et al., 2014, p. 397). Por lo tanto, las perspectivas, las didácticas implementadas, la capacidad de interpretación y de abstracción de la información del ambiente de aula a la hora de implementación del instrumento articulador es primordial.

A continuación se presenta el esquema de las etapas de la investigación que se mencionan con anterioridad y a partir de estas se consolidaron los registros del trabajo investigativo.

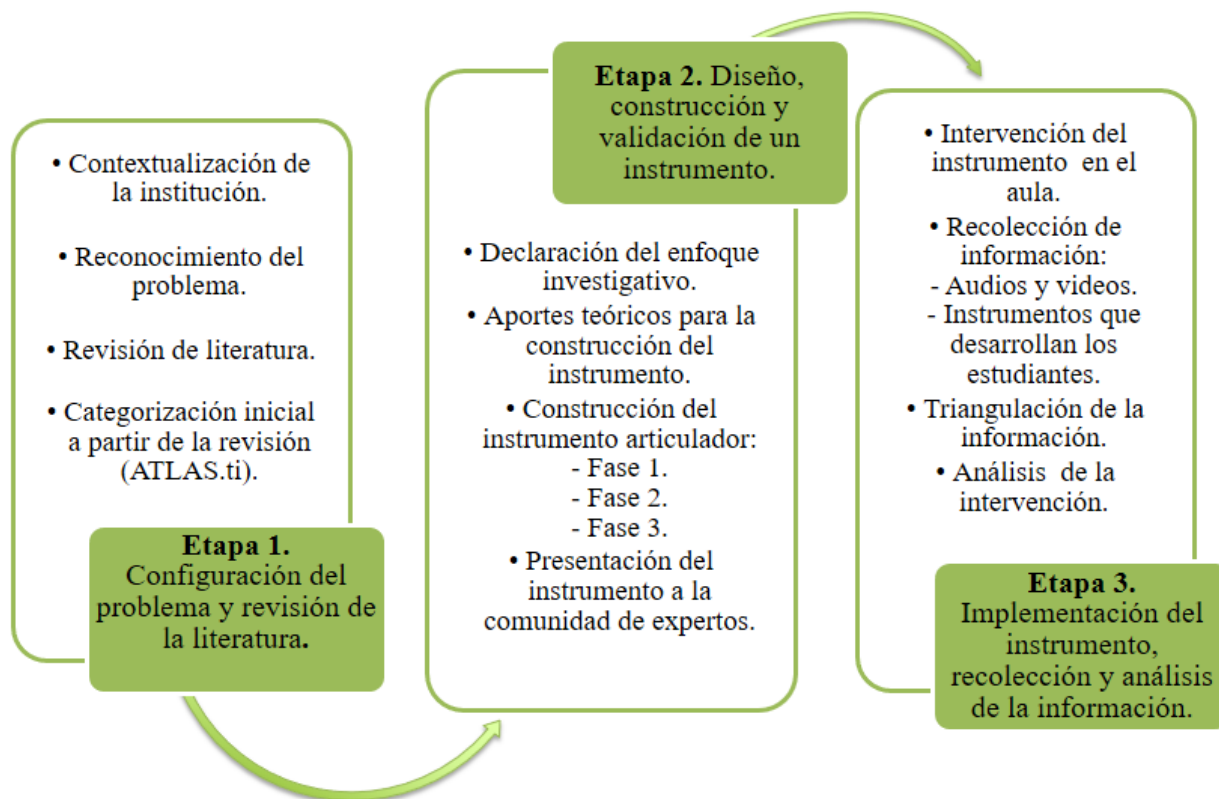


Figura 7. Etapas del proceso investigativo.

Elaboración de los autores.

Finalmente, con la información recolectada se realizó un proceso de análisis. Autores como Hernández et al. (2014) sustentan que esta etapa se centra en estructurar los datos y desarrollar un proceso de categorización que muestre los patrones y los sucesos que ocurrieron dentro de la implementación. Al respecto, en este trabajo de investigación se plantearon cuatro *categorías iniciales* y, posteriormente, se realizó un proceso de *categorización secundaria* acorde con uno de los objetivos de la investigación. A continuación se describen ambas categorías y cómo estas permitieron responder a la pregunta de investigación.

Categorías iniciales

Estas categorías contribuyeron a responder de forma parcial al primer y al segundo objetivo específico de esta investigación (p. 14). Se tuvo en cuenta las siguientes preguntas ¿Qué relaciones realizan los estudiantes entre los conocimientos en matemáticas y en física?, ¿Cómo los estudiantes relacionan estos conocimientos a través de la modelación y la experimentación? Las categorías iniciales son: *Relación entre conocimientos conceptuales en matemáticas y física*, *relación entre conocimientos procedimentales en matemáticas y física*, y *relaciones entre conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y física*. Por último, la categoría de *dificultades para la articulación de conocimientos*. En este orden de ideas se utilizó el software ATLAS.ti que ayudó a clasificar e interpretar la información. A partir de este se crearon cuatro códigos que hacen alusión a cada categoría que se mencionó. En el software se realizaron comentarios frente a los aspectos reconocidos en las evidencias de los estudiantes en relación con las categorías. A continuación, se describen en la Tabla 4.

Tabla 4. *Categorías iniciales y descriptores*

| Categorías iniciales | Características | Descriptores |
|--|--|--|
| Relación entre conocimientos conceptuales en matemáticas y en física. | Centra la atención en aquellos conocimientos conceptuales que se evidenciaron en los estudiantes durante el proceso de implementación que tienen relación tanto con el ámbito de las matemáticas como con el de la física. | Ideas previas: El estudiante posee ideas a priori que se encuentran relacionadas entre ambas asignaturas. Relación entre conceptos: El estudiante utiliza conceptos matemáticos para explicar conceptos físicos, o viceversa. Significación del concepto: El estudiante dota de sentido los conceptos por medio de la otra asignatura. Uso de información: El estudiante tiene evidencias de cómo obtener y aprovechar los conceptos para aprender. |
| Relación entre conocimientos procedimentales en matemáticas y en física. | Se centra en las acciones que el estudiante desarrolla de manera conjunta en el dominio matemático y en el dominio físico. | Objetivo: El estudiante reconoce hacia donde quiere llegar. Habilidades y destrezas: Son las acciones (medir, uso de instrumentos, operaciones matemáticas, representaciones, etc.) que maneja el estudiante a la hora de realizar las actividades propuestas. Propone o diseña estrategias para resolver una situación problema. |

| | | |
|---|--|---|
| Relación entre conocimientos procedimentales y conceptuales en matemáticas y en Física. | Se reconoce la necesidad de un tipo de conocimiento (matemático o físico) para que se dé el otro. También se refiere al cambio o modificación de un concepto a través de procedimientos y se resalta el uso de la modelación y la experimentación. | Abstracción reflexiva: El estudiante se cuestiona sobre los procesos que realiza para solucionar el problema, y plantea mejoras en términos del conocimiento que está adquiriendo o que ya fue adquirido. La argumentación y problematización son necesarias. Modelo iterativo: Facilita al estudiante la asimilación de los conceptos y procedimientos en matemáticas y en física a la hora de enfrentarse a actividades de modelación y experimentación. |
| Dificultades para la articulación de conocimientos. | Se plantea para los casos en que no se evidencian relaciones entre conocimientos o donde se dan sólo al interior de cada dominio de conocimiento, es decir, se relacionan solo conceptos o procedimientos en una sola disciplina. | Relación entre conceptos: El estudiante relaciona conceptos de la misma asignatura. Relación entre procedimientos: El estudiante relaciona procedimientos de la misma asignatura. No relación: No se plantean relaciones entre conocimientos conceptuales o procedimentales. Otros: Hay ideas previas, significación de conceptos, habilidades, destrezas y demás aspectos referentes a las relaciones entre conceptos o procedimientos, pero se dan en una sola asignatura. |

Las cuatro categorías anteriores y los descriptores que componen cada una de ellas se constituyeron en concordancia con los referentes teóricos planteados en el Capítulo 2 que sustenta esta investigación. Las categorías permitieron analizar las evidencias de las relaciones entre los conocimientos en matemáticas y física y que se encontraron en la información recolectada de la implementación. Esta acción atiende a la pregunta y a los objetivos de investigación que se definieron en el Capítulo 1 (p. 13).

Categorías secundarias

De acuerdo con las categorías iniciales y lo que se reporta en el Capítulo 2, se categorizaron las relaciones que los estudiantes establecían entre los conocimientos en

matemáticas y física. Para ello, cada investigador realizó una revisión inicial de la información a través del Software ATLAS.ti; en ella se centró la atención sobre cómo los estudiantes relacionaron los conocimientos y qué tipos de relaciones establecieron entre ellos. Luego, los maestros en formación se reunieron para triangular la información y construir las categorías que se presentan a continuación.

Relación vacía entre conocimientos: Se presenta cuando el estudiante reconoce que existe una relación entre los conocimientos en matemáticas y en física, pero en su experiencia no hay evidencia de dicha relación más allá de la enunciación. Otra posibilidad es que, aunque se reconoce su relación, en sus acciones los considera como conocimientos independientes. Un ejemplo de ello se presenta en clase de física cuando se les pregunta por las variables que intervienen en un movimiento periódico y las respuestas de los estudiantes aluden al movimiento rotacional, al de traslación, etc. Los conocimientos conceptuales no están vinculados directamente con lo que se les preguntó. En la Figura 8 se presenta un esquema de las categorías iniciales y secundarias que posibilitaron el análisis de la información.

Relación de aplicación entre conocimientos: los conocimientos en matemáticas y en física intervienen como un instrumento solamente técnico. Hay presencia de esta relación cuando los estudiantes conectan los conocimientos en matemáticas y en física, pero uno de ellos está sujeto al otro. Un ejemplo se presenta cuando en clase de física se alude a la explicación de un fenómeno sólo en términos matemáticos a través de procedimientos algebraicos o algorítmicos. Adicionalmente, se puede evidenciar que cuando una de las dos asignaturas está en una relación de aplicación con la otra hace que la que está subordinada esté en una situación de exterioridad con respecto a la otra. Así, se suele presentar separaciones entre elementos conceptuales y las técnicas matemáticas o físicas que se utilizan.

Relación de complementariedad entre conocimientos: Esta relación se da cuando los conocimientos en matemáticas y en física ayudan a constituir el pensamiento de la otra. Se presenta cuando los estudiantes consideran el conocimiento en matemáticas y en física como uno solo, sin establecer una subordinación entre ellos. Un ejemplo de ello ocurre cuando un estudiante es capaz de comprender los fenómenos físicos en términos de conceptos matemáticos

y viceversa. En consecuencia, resulta difícil encontrar un concepto físico que no esté ligado con un concepto matemático por lo cual, en esta relación de complementariedad es imposible explicar, expresar, y generar los conceptos y procedimientos de una de las disciplinas sin los conocimientos de la otra.

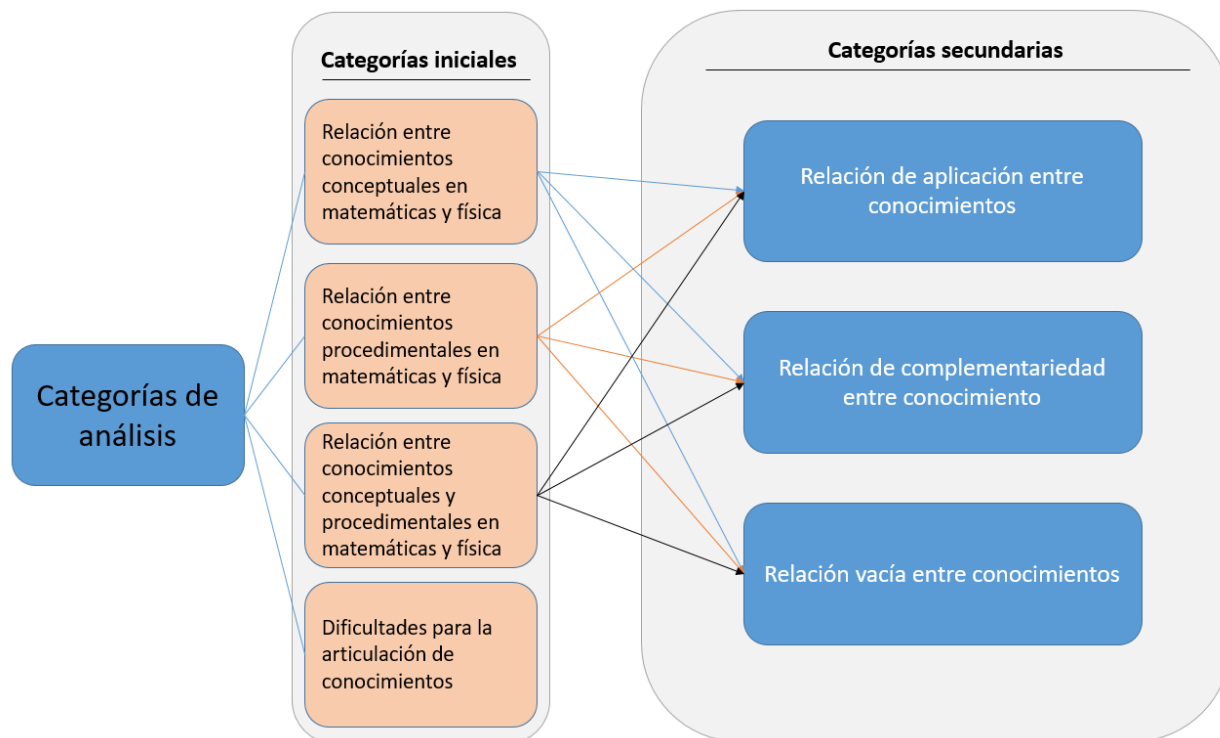


Figura 8. Categorías iniciales y categorías secundarias de la investigación.

Finalmente, cada investigador realizó un proceso de análisis individual de la información y luego se reunieron para discutir, triangular y plasmar los resultados de la investigación.

3.4. Consideraciones éticas

En el desarrollo de esta investigación se tuvo en cuenta diferentes consideraciones éticas como el respeto por los derechos humanos de los participantes y por la propiedad intelectual del trabajo. También se consideró la originalidad de los planteamientos, es decir, no se acudió al plagio o copia de otros escritos o producciones.

En consonancia, los maestros en formación solicitaron un consentimiento informado (Anexo D. Formato de consentimiento informado, p. 116) en el que los estudiantes y sus acudientes (para el caso de los menores de edad) dieron la aprobación frente al manejo de la información. En este consentimiento también se informó sobre el uso de diferentes técnicas de recolección de la información como los videos, las grabaciones, etc.

Las consideraciones éticas de esta investigación se basan en el código de ética en investigación de la universidad de Antioquia y, de acuerdo con el procedimiento de la investigación, se tuvo en cuenta el respeto a la propiedad intelectual de los diversos autores que se mencionan en el trabajo y contribuyen al sustento de esta investigación, y al marco ético y jurídico del centro de prácticas, revisando documentos como el manual de convivencia, el Proyecto Educativo Institucional, la misión, la visión, entre otros.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para atender a los objetivos y a la pregunta de investigación (Capítulo 1, p. 13) se expondrán los resultados que se derivan del proceso de implementación, en cada una de las fases del instrumento articulador. Dichos hallazgos se presentan a partir de las cuatro categorías iniciales: 1) Relación entre conocimientos conceptuales en matemáticas y física; 2) relación entre conocimientos procedimentales en matemáticas y física; 3) relación entre conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y física y 4) dificultades para la articulación de conocimientos. Para ello se consideraron los descriptores que se presentaron en la Tabla 4 y los referentes teóricos. A la luz de las evidencias expuestas en las categorías iniciales y en correspondencia con el segundo objetivo de investigación, se realizó una categorización secundaria de acuerdo con las maneras en que los estudiantes relacionaron los conocimientos de matemáticas y física por medio de los procesos de modelación y de experimentación.

4.1 Relación entre conocimientos conceptuales en matemáticas y física.

En esta primera categoría se exponen evidencias de la manera en que los estudiantes relacionaron y significaron conceptos entre las matemáticas y la física. Es posible identificar en sus producciones la relación de conceptos físicos como el movimiento periódico con objetos o elementos cercanos a su contexto, tales como ventiladores, resortes, sillas de mecer, entre otras, y a su vez con conceptos que se abordaron en clase de matemáticas como las funciones senoidales o cosenoidales como se presenta en la Figura 9. No obstante, también se evidenciaron algunas dificultades al representar gráficamente un movimiento periódico como fueron el obviar nombrar los ejes; en consecuencia, es complejo identificar los argumentos que el estudiante deseaba exponer. Por ejemplo, la Figura 10 muestra que el participante consideró el movimiento periódico como todo un suceso que se repite, pero en sus gráficas hay poca claridad sobre lo que se está iterando. La evidencia anterior mostró que algunos estudiantes tienen ideas intuitivas en relación con conceptos como el movimiento periódico y las funciones periódicas; sin embargo, también da cuenta de algunas dificultades por parte de los participantes para realizar procedimientos como la representación.

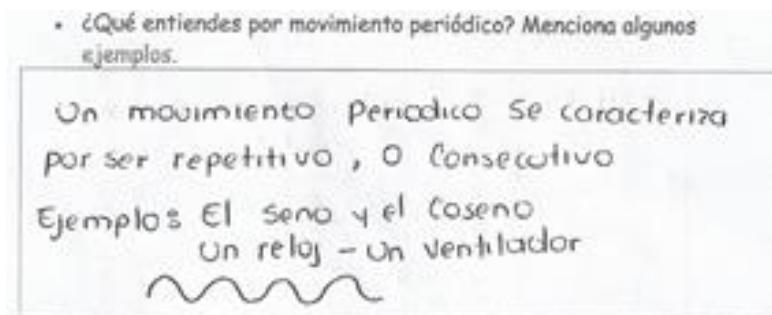


Figura 9. Respuesta de un estudiante.



Figura 10. Respuesta de un estudiante.

Los maestros en formación también identificaron que algunos estudiantes establecen relaciones entre los conocimientos en matemáticas y en física, pero estas pueden carecer de sentido, tal como se evidencia en la Figura 11. En esta experiencia, el participante asoció las variables implicadas en un movimiento periódico con las transformaciones de funciones (reflexión, rotación y traslación). Esto ocurre quizás porque el estudiante alude a términos conocidos que trata de relacionar, pero no tiene los elementos conceptuales necesarios para establecer dichas relaciones.

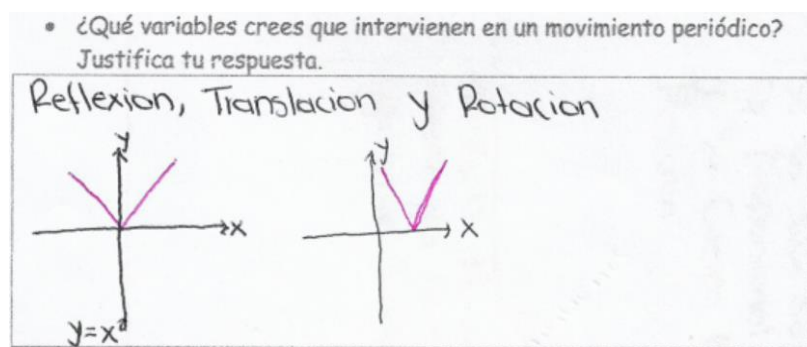


Figura 11. Respuesta de un estudiante.

En adición, en el primer momento de la fase 1 (Anexo B. Instrumento de implementación, p. 96) se encontraron evidencias de ideas físicas que se expresaron a través de símbolos matemáticos. Por ejemplo, un participante presentó expresiones matemáticas que dan cuenta no sólo de las variables involucradas en el movimiento, sino también de la dependencia entre algunas de ellas, tal y como se presenta en la Figura 12. Al respecto autores como Lawson (1994) y Hiebert y Lefevre (1986) defienden que los conceptos no se presentan de manera aislada, sino que se encuentran conectados con otros. En concordancia, la Figura 12 muestra que el estudiante conecta su entendimiento referente al movimiento periódico con algunas variables como el tiempo y el espacio a través de expresiones analíticas. Por tanto, en términos de Lawson (1994), el estudiante realizó un sistema conceptual donde relacionó conceptos subordinados (espacio y tiempo) con conceptos supraordinados (el movimiento) por medio de modelos matemáticos. No obstante, algunas de las expresiones que el estudiante utilizó son dimensionalmente incorrectas. Al preguntar por su razonamiento, mostró que, aunque reconoció que la velocidad se relacionaba con el espacio (tal y como él lo denominó) y el tiempo, se equivocó “despejando la variable distancia” sin validar el modelo con su conocimiento en física.

• ¿Qué variables crees que intervienen en un movimiento periódico?
Justifica tu respuesta.

la → variables $c = \frac{t}{v}$ $t = c \cdot v$ $v = \frac{c}{t}$

Figura 12. Respuesta de un estudiante.

La Figura anterior da cuenta de que algunos de los participantes se remitieron a explicar un concepto físico por medio de modelos matemáticos funcionales. Al respecto, autores como Romero y Rodríguez (2003) y Lévy-Leblond (1968) sostienen que los estudiantes de niveles de educación media y superior tienden a relacionar los conceptos físicos con los matemáticos como un asunto instrumental, es decir, explicar algunos fenómenos por medio de la operatividad.

En ese orden de ideas, los maestros en formación identificaron que los estudiantes relacionaban conceptos físicos con conceptos matemáticos por medio de la dependencia entre

variables, como lo expone la Figura 13. Esta relación causal entre variables es importante en el proceso de modelación y experimentación (2.2 La modelación y la experimentación, p. 26).

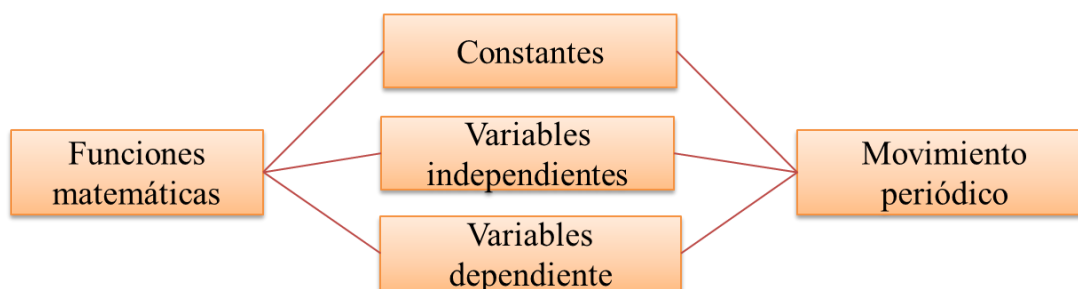


Figura 13. Relación entre conocimientos conceptuales en matemáticas y física.

Elaboración de los autores.

Esta relación entre conceptos se puede apreciar como ejemplo en las figuras 14 y 15, donde los estudiantes relacionaron los conocimientos conceptuales de matemáticas con los de física, en especial relaciones de dependencia.

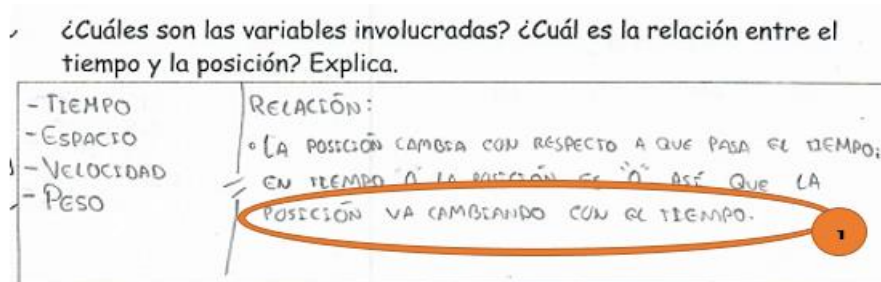


Figura 14. Relación de dependencia e independencia entre variables.

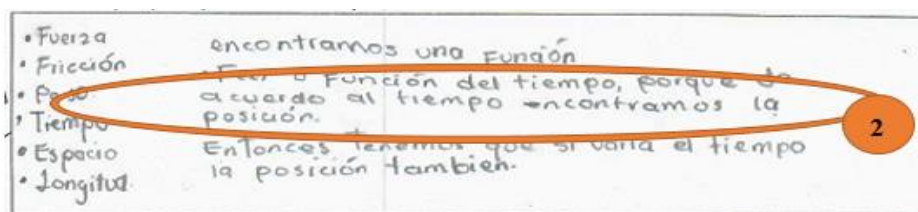


Figura 15. Relación de dependencia e independencia entre variables.

En los textos 1) y 2) que se señalan en las figuras anteriores, cada equipo reconoció que la posición dependía del tiempo, así establecieron que existe una función en términos del tiempo que se relacionaba con la ubicación del cuerpo. Incluso se observa en la Figura 15 que los estudiantes identificaron una covariación entre el tiempo y la posición. Además, el planteamiento sobre la existencia de una función que dependía del tiempo es un aspecto importante para proyectar el proceso de modelación y la información que requieren registrar y analizar experimentalmente para obtener un modelo matemático. Sin embargo, parece que no hay claridad sobre los términos espacio, longitud y posición reportados en la Figura 15 porque se utilizan de manera indistinta.

Otra de las relaciones entre conocimientos conceptuales en matemáticas y en física que desarrollaron los participantes fue en torno al movimiento armónico simple y las funciones periódicas, como se expone en la Figura 16 donde, a través de procesos de modelación y experimentación de un sistema masa-resorte y de un péndulo, conectaron con la amplitud, el periodo y la velocidad angular.

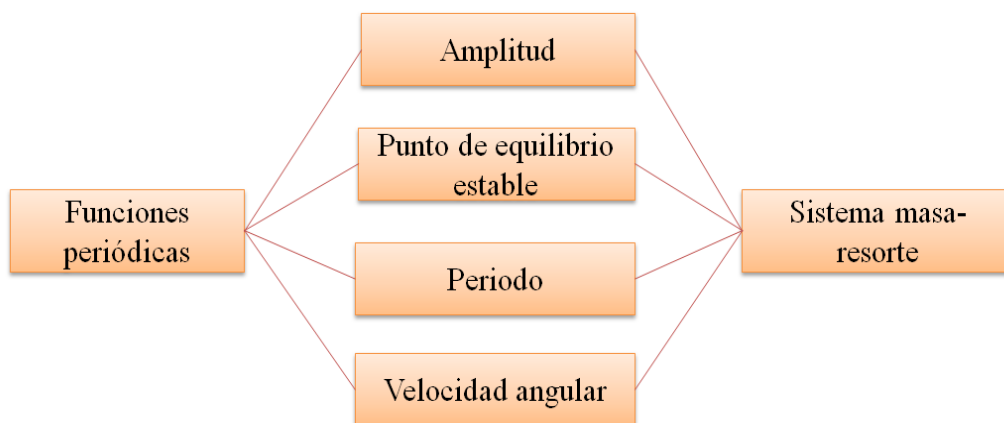


Figura 16. Relación funciones periódicas y MAS.

Elaboración propia.

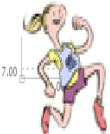
Los maestros en formación identificaron en esta categoría las conexiones que los estudiantes realizaron entre conocimientos conceptuales en matemáticas y en física, al menos en tres formas: que los participantes plantearon relaciones dotadas de significado y de interacción

entre dichas asignaturas, que los estudiantes relacionaron los conceptos de manera superficial, donde subordinaron un conocimiento respecto al otro, y que las relaciones que realizaban carecían de significado en el campo.

4.2 Relación entre conocimientos procedimentales en matemáticas y física

La categoría de relaciones entre conocimientos procedimentales en matemáticas y en física se centra en analizar los procedimientos que los estudiantes desarrollaron, tanto en asuntos matemáticos como físicos (realizar algoritmos, construir representaciones, hacer predicciones, reconocer el fenómeno físico, tomar datos, realizar experimentos controlados, etc.). Los maestros en formación observaron que algunos estudiantes identificaron las variables implicadas en algunas situaciones presentadas en el momento 2 de la fase 1 (Anexo B. Instrumento de implementación, p. 96), tal y como se presenta en la Tabla 5.

Tabla 5. *Relación entre variables y video*

| Video | Respuestas estudiantes | Comentarios |
|---|---|--|
|  | <p>“Aceleración: hubo cambio de velocidad”.</p> <p>“Desplazamiento: estaba en un punto y se movió”.</p> <p>“Si acelera se aplica fuerza”.</p> | <p>Los maestros en formación pidieron a los estudiantes observar los videos, teniendo en cuenta qué es lo que varía en cada uno de ellos. Sin embargo, se les dificultó identificar la variable tiempo. A su vez reconocieron que la aceleración depende de la velocidad, y que la aceleración de la fuerza.</p> |

La tabla anterior es un aspecto importante para desarrollar procesos de modelación. Por ejemplo, Camanera (2012) destaca en la construcción de modelos la necesidad de reconocer en la situación problema la identificación de variables e invariantes. A su vez, en la experimentación se destacan acciones como la identificación de regularidades que permiten el trabajo con variables. Es importante reconocer que existen procedimientos que no son propios de matemáticas o física, sino que son requeridos en ambas disciplinas, entre los que se encuentra la identificación de variables y la relación entre ellas.

Otra experiencia donde los estudiantes identificaron variables se dio a través de preguntas de selección múltiple entorno a unas secuencias de fotos (tomadas en iguales intervalos de tiempo) de un balón de básquetbol y de un balón de fútbol, con el fin de que el estudiante comparara un movimiento con otro. La Tabla 6 muestra sus respuestas.

Tabla 6. *Respuestas de las preguntas de selección múltiple de los grupos 11°1 y 11°2*

| PREGUNTAS | A | B | C | D |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|
| Pregunta 1 | 3 | 52 | 18 | 1 |
| Pregunta 2 | 46 | 12 | 4 | 8 |
| Pregunta 3 | 12 | 58 | 1 | 5 |
| Pregunta 4 | 64 | 4 | 7 | 1 |

En la tabla anterior, las respuestas que se resaltaron son correctas, lo que evidencia que la mayoría de los estudiantes significaron algunos conceptos físicos del movimiento armónico simple tales como la velocidad, la trayectoria recorrida por los balones, el tiempo involucrado, etc. A su vez, los participantes reconocieron cómo cambiaban magnitudes como la velocidad en el movimiento de los balones. Se resalta que, si bien eran preguntas de selección múltiple, los estudiantes presentaron algunas evidencias de la manera en que llegaron a sus respuestas. En este escenario llamó la atención el uso de representaciones para analizar la variación de las distancias de ambos balones en los mismos intervalos de tiempo. La Figura 17 muestra que:

1) Los estudiantes midieron distancias para establecer cambios referentes a la velocidad y aceleración entre los balones, posibilitando que encontraran relaciones directas e indirectas entre la velocidad y la distancia. Por ejemplo: “En mismos intervalos de tiempo a mayor distancia mayor velocidad” (Sofía, sesión 4, 13 de agosto del 2019). Al respecto, autores como Parra, Ávila y Ávila (2013) sostienen que la proporcionalidad es un asunto importante para el proceso de matematización de las ciencias, pues permite relacionar dos magnitudes covariantes. Agregan que: “la física nos puede servir como contexto para estudiar matemáticas, y a su vez los

significados de los Objetos Matemáticos (OM) nos sirven para la comprensión de fenómenos físicos” (p. 1242).

2) Los participantes buscaron patrones para comparar los movimientos de los balones, posibilitando observar cómo encontraban distinciones sobre los fenómenos sin necesidad de recurrir a mediciones de corte numérico.

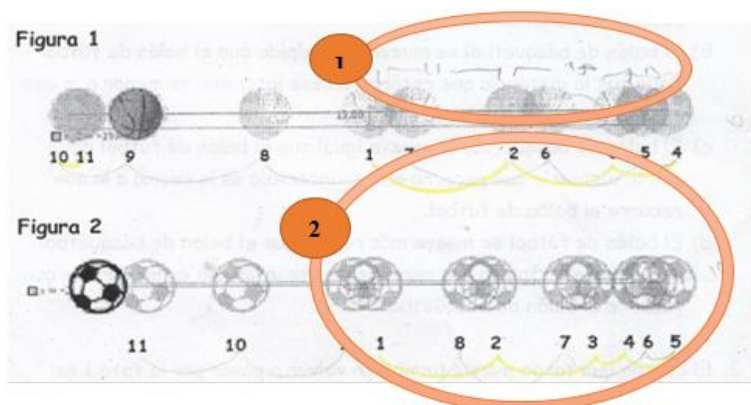


Figura 17. Respuesta de un estudiante.

Este momento también muestra que al controlar la variable tiempo, los estudiantes lograron centrar la atención en otras variables, incluso es posible que los estudiantes reconocieran, mediante la representación de los balones, la variación con mayor claridad que si se utiliza en otros registros como el tabular o el plano cartesiano. Esto se debe quizás a que la representación anterior permite controlar la variable tiempo, lo cual ayuda a los estudiantes a enfocarse sobre el cambio de la posición y con ello determinar la variación.

Otra evidencia de esta categoría se reflejó cuando los estudiantes modelaban la posición de una masa adherida a un resorte y otro de un péndulo, allí los estudiantes debieron realizar montajes experimentales, gráficas, tablas, etc. como lo presenta la Figura 18. No obstante los maestros en formación encontraron que, durante el proceso de implementación, los estudiantes no realizaron acciones que se describen en el Capítulo 2 (p. 26), como la simplificación, en el caso de reconocer e ignorar elementos del fenómeno a estudiar y la validación. Además, se identificó que algunos estudiantes utilizan la experimentación solo como un medio para la recolección de datos, es decir, subordinada a la modelación.



Figura 18. Práctica del sistema masa-resorte.

Las figuras 19, 20 y 21 muestran las gráficas que realizaron los estudiantes respecto al montaje del sistema masa-resorte propuesto en la fase 2 (Anexo B. Instrumento de implementación, p. 96). Se evidencia que:

1) Representaban el movimiento de la masa en el resorte a través de curvas, describieron el sistema con un movimiento continuo que es acelerado.

2) Representaban el movimiento del cuerpo a través de segmentos rectilíneos, describieron el sistema como un movimiento continuo; sin embargo, la masa se movía con velocidad constante en unos intervalos hasta que aceleró. Los observadores participantes preguntaron por qué unir los puntos con líneas y no con curvas, a lo que respondieron: “son con líneas porque no hay secuencia determinada en el movimiento, porque el tiempo es constante, entonces es lineal”. A partir de esta evidencia se identifica que, aunque los estudiantes pueden reconocer cuál es la variable dependiente e independiente en el fenómeno, no consideran este aspecto a la hora de realizar acciones como la graficación porque allí sólo se consideró una variación lineal del tiempo, más no una covariación entre el tiempo y la posición.

3) Representaban el movimiento del cuerpo a través de puntos, es decir, ubicaron algunas posiciones del cuerpo en función del tiempo que ellos midieron, pero no consideraron lo que ocurría en el sistema durante el tiempo que no registraron de manera tabular. Este hecho también se evidencia en la Figura 20, donde los estudiantes unieron los puntos sin considerar las

posiciones en que se encontraba el cuerpo entre los intervalos de tiempo registrados. En ese momento los maestros en formación realizaron algunos cuestionamientos que llevaron a los estudiantes a revisar sus producciones. Por ejemplo, se preguntó qué posición ocupaba el cuerpo en $t = 3$ según su gráfica y según el video que hicieron sobre la situación.

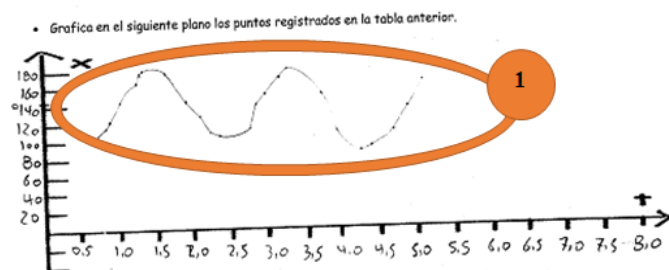


Figura 19. Gráfica de posición vs tiempo.

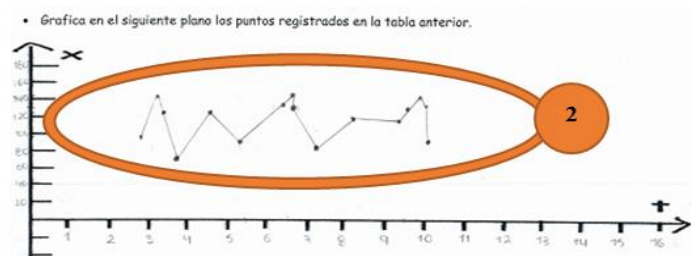


Figura 20. Gráfica de posición vs tiempo.

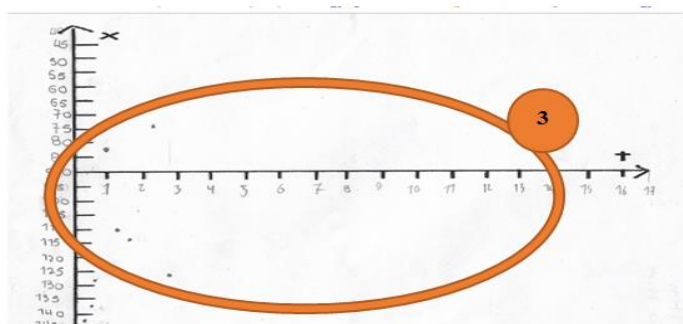


Figura 21. Gráfica de posición vs tiempo.

En las gráficas se destacaron las habilidades por parte de los estudiantes para ubicar un punto en el plano cartesiano y manejar la escala. A su vez, los maestros en formación

preguntaron qué papel cumplía el cronometro (celular) en el experimento. Los estudiantes respondieron que era para tener más precisión, tener intervalos pequeños y posiciones exactas; logrando evidenciar que el cronometro les permitía medir la unidad de tiempo.

Dentro de los aspectos de la modelación y la experimentación (Capítulo 2, p. 26) se encuentra el estudio de un fenómeno de interés que para este caso es el MAS de un péndulo. En ese sentido, en la fase 3 también se identificaron elementos en relación con la manera de proceder de los estudiantes; consultaron qué era un péndulo, cuáles son sus usos y variables involucradas. Esto permitió que contemplaran aspectos importantes para hacer un montaje experimental, incluso algunos estudiantes variaron la longitud de la cuerda y la masa que usaron para identificar su influencia en el estudio.

En el montaje experimental de la fase 3 se encontraron diferentes modelos físicos que se presentan en la Figura 22. Además, ciertos equipos de trabajo mencionaron los materiales utilizados, describieron y justificaron su manera de proceder, y presentaron los propósitos con los cuales realizaron la actividad. Dentro de sus planteamientos se encuentra que debieron usar dos soportes para dar mayor estabilidad y que analizaría el movimiento armónico simple “para comprobar ciertos aspectos [...]. La actividad salió de una forma exitosa ya que logramos comprobar todas nuestras dudas” (Camila, 2019). Otro equipo plantea que tuvieron dificultades con un trozo de madera que servía de base porque era muy delgado, así que debieron cambiarlo. Estas evidencias dan cuenta de la manera en que los estudiantes debieron transformar sus acciones iniciales para poder garantizar las condiciones de posibilidad del MAS y que se valieron de algunas hipótesis para orientar sus acciones.

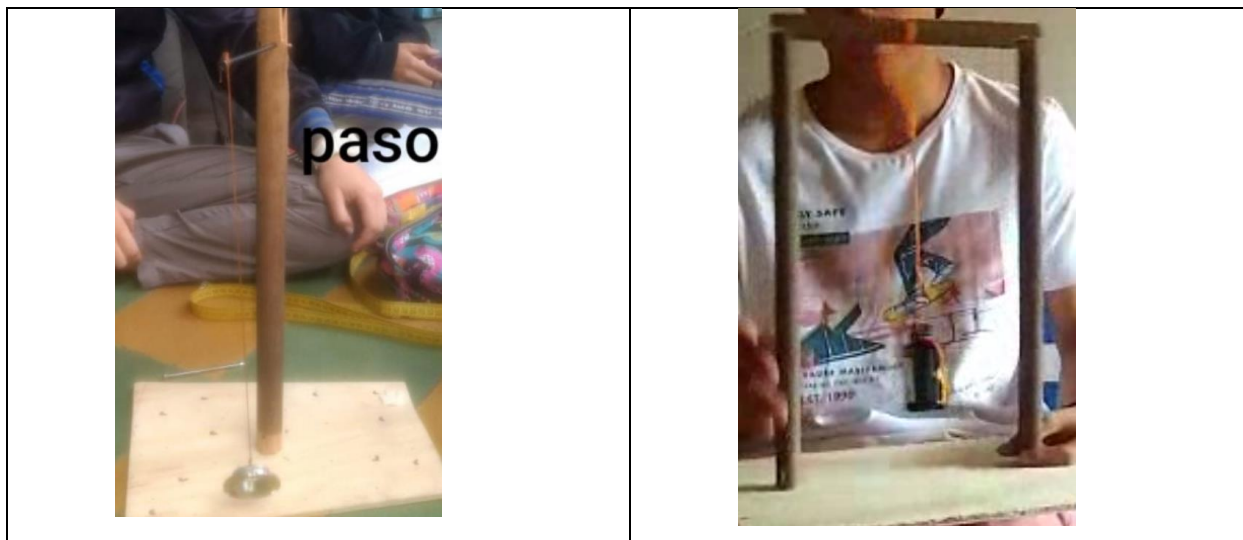


Figura 22. Experimento realizado por los estudiantes.

En esta categoría se evidencian al menos dos formas en las que los estudiantes relacionan conocimientos procedimentales en matemáticas y en física, la primera responde a una subordinación de la experimentación con respecto a la modelación, donde el uso del experimento permite encontrar los datos para que estos sean modelados; la segunda responde a experiencias donde la modelación y la experimentación permiten una comunicación entre la experiencia y el modelo. Esto permite que los procesos de representación matemática se complementen y se mejoren con la experiencia.

4.3 Relación entre conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y física

Los maestros en formación identificaron que los estudiantes entablaban discusiones que daban cuenta de esta relación. En especial, se destacan las reflexiones en torno al análisis de las gráficas que obtuvieron en correspondencia con el sentido físico. Al respecto, se destaca la abstracción reflexiva y el modelo iterativo como elementos que buscan perfeccionar las prácticas y conceptos mediante los cuestionamientos. Así, con la ayuda de los maestros en formación, los estudiantes realizaron nuevas gráficas que fueron analizadas de acuerdo con las preguntas de la Tabla 7. Se preguntó a los estudiantes por el tipo de función que asociaban con las gráficas obtenidas y, en su mayoría, defendieron que el movimiento describía funciones senoidales, lo que permitió abordar los conceptos de período, amplitud y velocidad angular desde las dos asignaturas.

Para abordar los conceptos anteriores en consideración con los procesos, los maestros en formación se apoyaron en medios como gráficos, preguntas orientadoras, GeoGebra y simuladores; en particular, el uso de las tecnologías se presentó, por un lado, porque se reconoce su importancia para abordar aspectos disciplinares y atender a necesidades de formación (Carmona-Mesa, Salazar y Villa-Ochoa, 2018) y, por otro lado, porque permiten la identificación y representación de la covariación (Rueda y Rico, 2016). De esa manera, se buscó encaminar a los estudiantes hacia la construcción de un modelo matemático para matematizar el fenómeno a abordar. En consideración con la abstracción reflexiva y el modelo iterativo, se preguntó a los estudiantes sobre los resultados obtenidos de manera que regresaran a sus ideas previas y reflexionaran sobre sus procedimientos (Lawson, 1994). Los estudiantes desarrollaban los conocimientos de manera complementaria, es decir, comprendían los conceptos en la medida que los relacionaban con los procesos de modelación y experimentación, pero también, tal y como lo sostiene Cracolice et al. (2008), necesitaron la aplicación de ambos tipos de conocimiento para resolver problemas. Algunas de las preguntas que se realizaron fueron:

- ¿En qué momento del movimiento del resorte el valor de la posición es máximo?
- ¿La función que describe el movimiento puede ser $x(t) = \text{sen } t$? ¿Por qué?
- ¿Qué pasa si la función $x(t) = \text{sen } t$ la multiplicamos por una constante?
- ¿Qué representa el punto de equilibrio estable?

En consideración con las discusiones abordadas por los maestros en formación, se identificaron dificultades por parte del estudiante para pasar de una gráfica a un modelo algebraico; sin embargo, se construyó de manera conjunta el modelo del péndulo y del sistema masa resorte como lo presenta la siguiente ecuación, donde A representa la amplitud, w la velocidad angular y P.E. la posición del punto de equilibrio estable.

$$f(t) = A \text{sen}(wt) + P.E.$$

En la fase 3 existen evidencias del establecimiento de relaciones entre el MAS y las funciones. Uno de los miembros de un grupo planteó que hicieron uso “de un cronómetro y de un

metro para poder llevar a cabo este experimento y este nos permitió **construir** una tabla y una gráfica de la cual luego sacamos una función que **explica**, que **resume** este experimento” (la negrita es nuestra; Carlos, 2019). En este fragmento se identifica que los estudiantes consideraron importante los instrumentos para construir sus modelos. Además, expresaron que las funciones les permitieron explicar y resumir el experimento; esto da cuenta del sentido que tiene el uso de las funciones en la práctica experimental.

En esta fase se reconoció cómo y porqué los estudiantes procedieron de cierta manera, por ejemplo, un equipo resumió su trabajo así:

El punto de equilibrio para nosotros fue de 18. Ya de ahí podemos comenzar a hacer la función ¿Cómo lo hicimos? Bueno, primero, en un determinado tiempo que fueron 12 segundos contamos 10 oscilaciones, después de esto para encontrar el T que sería el periodo lo dividimos. $12/10$ nos da 1.2 y ya de ahí pudimos encontrar la frecuencia angular que sería $2\pi rad / 1.2$ [...] y nos da un total de 5.23. Ya de ahí podemos encontrar la función.

Ahora tenemos que tener en cuenta la amplitud. La amplitud la usamos teniendo en cuenta que el punto máximo al que llegaba la gráfica era 40 y el punto de equilibrio era 18, así que lo restamos y dio 22, así que esa sería su amplitud [...] Si nos vamos a verificar si esta es la función, podemos ver que al cambiar t con 0.6 nos da un total de 18.

La Figura 23 presenta otras evidencias del mismo equipo de trabajo en relación con el proceso de graficación y construcción del modelo. Es importante resaltar el procedimiento de los estudiantes para determinar una escala apropiada en su representación gráfica; ellos hicieron un proceso de medición que se registró de manera tabular y observaron los valores máximos y mínimos medidos, de esa manera asignaron su escala, al aprovechar la cuadrícula de sus hojas.

Hay elementos que llamaron la atención de los investigadores. Por ejemplo, en el vídeo que construyó el equipo se dio cuenta de una comprensión conceptual alrededor de los conceptos amplitud y punto de equilibrio estable, pero en la Figura 23 se observa que dicho punto se encuentra más alejado del $f(t)$ máximo que del mínimo, de la misma manera se determina un

valor para la amplitud, pero solo consideraron la distancia entre el punto de equilibrio estable y el máximo de la función. A diferencia de otros equipos que solo tuvieron en cuenta el registro gráfico para determinar el punto de equilibrio estable y la amplitud, este equipo recurrió a la experiencia, allí realizaron un proceso de observación para registrar los datos. Sin embargo, no consideraron la influencia de la posición en la cual realizaron el vídeo, lo cual hizo que registraran un $f(t)$ mayor (40 cm). Así, según la gráfica que construyeron, el objeto recorre una mayor distancia del punto de equilibrio al valor máximo de $f(t)$ que del punto de equilibrio al valor mínimo de $f(t)$, esto es, se consideran dos amplitudes diferentes. La Figura 23 muestra que el grupo identifica las relaciones entre las magnitudes para construir su función y realizan cálculos matemáticos para determinar las magnitudes desconocidas, aunque su función no corresponde debido al error cometido. Finalmente, frente al proceso de validación este grupo determinó el valor $f(0.6)$ para mencionar que la función era correcta.

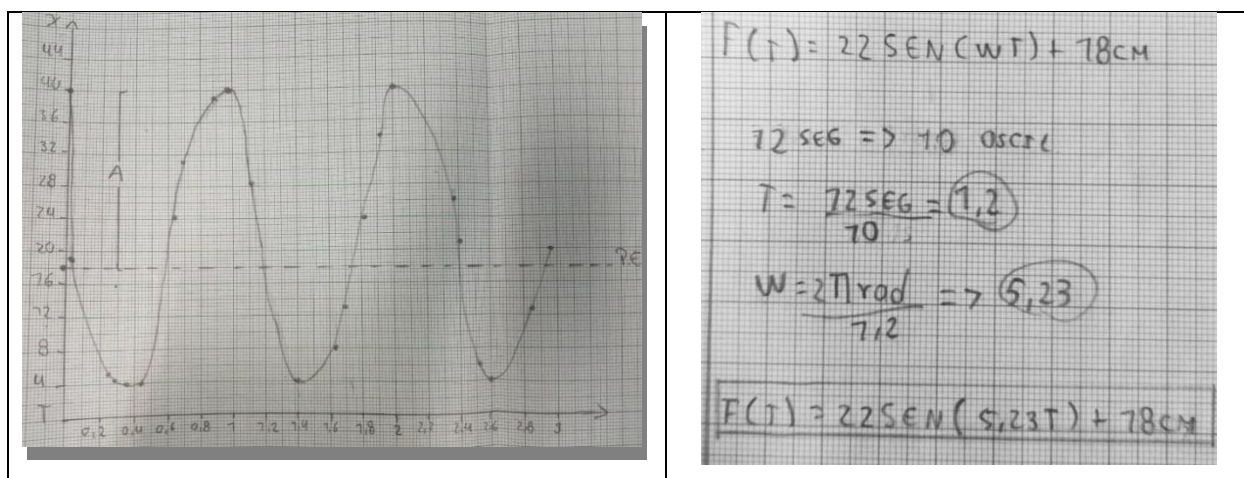


Figura 23. Registros de las construcciones hechas por los estudiantes.

El trabajo que realizó este grupo evidenció apropiación conceptual y procedimental en relación con los conocimientos en matemáticas y en física, incluso permitió identificar que la modelación y la experimentación fue de ayuda para promover interacciones entre conceptos físicos como el de periodo y la frecuencia angular con procedimientos matemáticos necesarios para calcularlos. En adición, las acciones de este equipo hacen parte del proceso de matematización reportado en el Capítulo 2 (p. 26), puesto que se tuvo en cuenta la identificación y manipulación de variables, se realizaron procesos de medición y la construcción de

representaciones tabulares, gráfica y algebraica que describe el fenómeno en estudio. En relación con la construcción del modelo y el uso de representaciones, la principal dificultad registrada en esta fase radica en el hecho de que los estudiantes acuden a la experiencia (registrada en un video) o a la gráfica, pero no interactúan con ambos elementos para observar las diferencias y similitudes y proyectar sus acciones.

4.4 Dificultades para la articulación entre conocimientos en matemáticas y en física

La categoría de dificultades para la articulación entre conocimientos en matemáticas y física se identificó cuando los estudiantes no relacionaron dichas asignaturas. Los maestros en formación identificaron esta categoría en tres aspectos: el primero, se relacionó con la debilidad para que algunos participantes reconocieran las variables implicadas en el movimiento periódico, el cual es un elemento esencial para el desarrollo del conocimiento procedimental, como también para la ejecución de actividades de modelación y de experimentación. El segundo, recayó en que algunos estudiantes no acudieron a su experiencia para acercarse a los fenómenos, al respecto se mencionó en el Capítulo 2 que el conocimiento común se vinculaba con el desarrollo del conocimiento conceptual, además la experiencia permite que los participantes entiendan la naturaleza de los fenómenos (conocimiento procedimental). En el tercer aspecto, se evidenció que algunos participantes, aunque reconocían la experiencia y las variables, presentaron el conocimiento de manera independiente sin relacionar conocimientos entre las matemáticas y la física, en un contexto en el cual podrían haberlo hecho con el fin de brindar argumentos más refinados.

En consideración al primer y segundo aspecto, los maestros en formación observaron que algunos de los participantes no se remitieron al contexto para identificar las variables presentes en el movimiento periódico, sino que partieron de algunos conceptos físicos al azar. La Figura 24 muestra que:

- 1) Los estudiantes utilizaron conceptos teóricos como átomo, sustancia y necesidad (que no son directos con la experiencia del sujeto), en términos de Lawson (1994), considerándolos como variables, sin serlo en el campo científico.

2) Los participantes vincularon términos como fuerza, energía y presión. Sin embargo, aludieron a definiciones o frases que carecen de sentido en el campo científico.

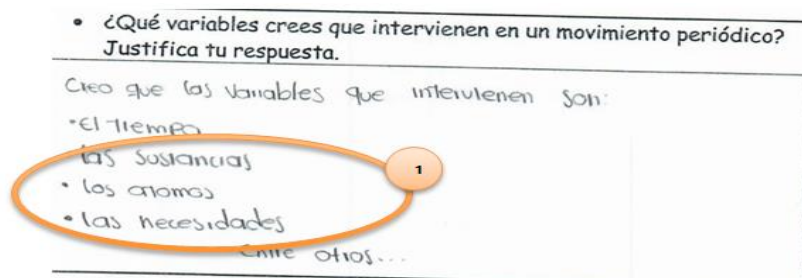


Figura 24. Variables del movimiento periódico.

El segundo aspecto refiere las dificultades por parte de algunos estudiantes para definir los conceptos físicos en términos de las ideas previas o esquemas mentales. Los maestros en formación identificaron una tendencia entre los grupos del grado undécimo al remitirse a sus apuntes de física para responder las preguntas, dado que manifestaron que la teoría va primero que la experiencia. Dicho asunto implicó que la realidad de los fenómenos físicos se subordinara respecto a las concepciones teóricas; los participantes hicieron disrupciones entre el conocimiento común y el conocimiento científico.

En el tercer aspecto se destaca que los participantes recurrieron a su experiencia, pero solo para establecer relaciones con un dominio de conocimiento, el físico. La Figura 25 muestra algunos casos donde los participantes identificaron el movimiento periódico con su contexto. Al respecto, la literatura reporta que el conocimiento común es un elemento para que los estudiantes accedan al conocimiento científico (MEN, 1998). De la misma manera Lawson (1994) sostiene que una de las destrezas que deben desarrollar los estudiantes en ciencias, es identificar apropiadamente la naturaleza, tal argumento permite que el estudiante describa los fenómenos en términos de observar, identificar variables y constantes y realizar predicciones.

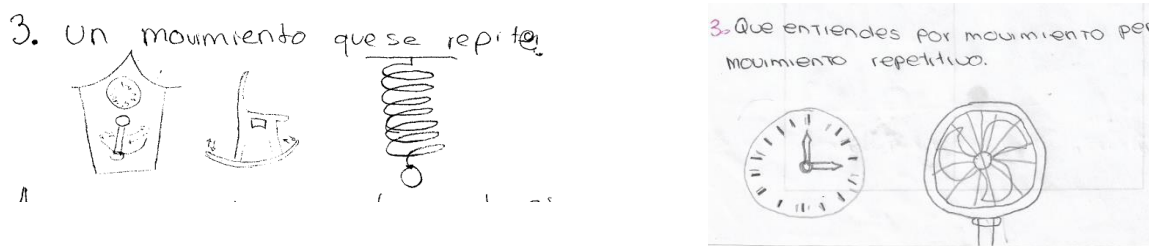


Figura 25. Respuestas de los estudiantes.

Los maestros en formación identificaron que algunos estudiantes relacionaron solo conceptos físicos. Por ejemplo, la Figura 26 muestra la respuesta que dio uno de ellos respecto a su entendimiento acerca del movimiento periódico al conectar sus comprensiones con algunas variables como el tiempo y la frecuencia, mediante un dibujo. Debido al proceder de la estudiante, se le preguntó qué quiso presentar con la ilustración, su respuesta fue: “*el de los muñequitos porque el movimiento pues periódico es algo que se repite frecuentemente por decirlo así, sino que no lo hice en la bolita para que se viera bien*” (Banessa, sesión 1, 6 de agosto del 2019). En ese sentido, la estudiante asoció el movimiento periódico con el movimiento circular, correspondencia que le permitió analizar ciertas relaciones que hizo sobre su conocimiento a priori en física. Adicionalmente, se identificó que la participante caracterizó el movimiento periódico como constante, pero no está de más aclarar que en ocasiones no se comporta de esta manera.



Figura 26. Respuesta de una estudiante.

Algunas dificultades que se encontraron en el proceso de implementación del instrumento articulador (evidenciadas en el momento 2 de la fase 2) reflejan inconvenientes por parte de los estudiantes para relacionar conceptos matemáticos con los conceptos físicos. En especial

inconvenientes por parte de los equipos para analizar si sus gráficas correspondían al movimiento que estudiaron.

La Tabla 7 da cuenta de algunas respuestas de los estudiantes referentes al uso de las representaciones gráficas que obtuvieron de un sistema masa resorte.

Tabla 7. *Afirmaciones respecto a las gráficas*

| Afirmación | Si (Equipo) | No (Equipo) |
|--|--------------------|--------------------|
| La gráfica obtenida representa una función | 1,3,4,5,7,9,10 | 2,6,8 |
| La gráfica representa una función periódica | 2,3,4,5,6,7,9 | 1,8,10 |
| En la gráfica se observa que el fenómeno se repite cada cierto intervalo de tiempo | 2,4,5,6,7,8,9 | 1,3,10 |
| Existe un valor máximo y un valor mínimo para la posición del cuerpo | 1,2,3,4,5,6,7,9,10 | 8 |

La mayoría de los grupos manifestaron que la gráfica que construyeron corresponde a una función matemática. Sin embargo, tres equipos afirmaron que sus representaciones no eran funciones, aunque sus gráficas efectivamente correspondían a la definición ya abordada, lo que mostró que a dichos equipos se les dificultó reconocer qué es una función o identificar estrategias para determinar si una gráfica es una función matemática. Además, los maestros en formación preguntaron qué significaba que la gráfica fuera una función hallando inconvenientes para relacionar sus representaciones con los conceptos físicos. Esta situación prueba que algunos equipos no reflexionaban sus procesos con sus conocimientos conceptuales.

Respecto a la segunda afirmación, los equipos que fueron resaltados con rojo en la tabla anterior mencionaron que su gráfica no correspondía a una función, no obstante, afirmaron que era una función periódica. Así mismo, en la tercera afirmación, el equipo 3 (en color verde) mencionó que la gráfica no se repetía en intervalos de tiempo (periodo) aun cuando afirmaron que era una función periódica; en matemáticas se alude a este término cuando se cumple la siguiente igualdad $f(x + T) = f(x)$. Esta situación evidencia dificultades para que los participantes identificaran que si una función se repite es porque tiene un periodo.

La última pregunta correspondía a conceptos de máximos y mínimos de la función. Se encontró que algunos equipos presentaban debilidades para identificar lo que los máximos y los mínimos representaban en el sistema masa resorte. Todo lo anterior da cuenta de dificultades por parte de algunos estudiantes para relacionar conceptos matemáticos con la experiencia física.

En la fase 3, frente al MAS un grupo planteó que “las causas del movimiento serían la fuerza de gravedad, la aceleración, la fuerza recuperadora” (Susana, 2019). Aunque los estudiantes reconocieron la existencia de una fuerza recuperadora y una gravitacional, llamó la atención el hecho de que no se relacionaron. Además, hubo confusión entre la causa del movimiento (fuerza) y su consecuencia (aceleración). Este aspecto hace parte de las dificultades que los maestros en formación identificaron para la articulación de conocimientos en matemáticas y física, en tanto que los estudiantes aluden a conceptos sin relacionarlos (como fuerza de gravedad y fuerza recuperadora), o sin comprender sus diferencias (como fuerza y aceleración).

En la fase 3 los estudiantes debieron usar instrumentos, graficar, construir modelos, describir sus procedimientos y justificarlos, e identificar tanto las variables y la dependencia entre ellas, como los conceptos que intervinieron en el fenómeno. Aunque los estudiantes construyeron en cada fase argumentos más refinados en comparación con fases anteriores y exhibieron mayores muestras de apropiación conceptual, es necesario mencionar algunas dificultades que pueden ser de interés para futuras investigaciones, entre ellas se encuentra la reflexión sobre el uso de los medios en las actividades de modelación y experimentación. Por ejemplo, los estudiantes en el marco del instrumento articulador realizaron un montaje experimental físico, pero no establecieron condiciones, posibilidades y limitaciones del registro audiovisual; hacerlo posibilitaría ampliar las comprensiones sobre el MAS y las funciones matemáticas, además de recopilar datos más precisos.

4.5 Categorías secundarias

En el marco del análisis de las categorías iniciales planteadas en este trabajo frente a la articulación entre conocimientos, fue posible identificar tres tipos de relaciones que los

estudiantes establecieron entre los conocimientos en matemáticas y física al realizar procesos de modelación y experimentación, estas son: la relación vacía, la relación de aplicación y la relación de complementariedad.

Como se mencionó en el Capítulo 3 (p. 50), se habla de una relación vacía cuando el estudiante reconoce que los conocimientos en matemáticas y física se encuentran conectados; sin embargo, las conexiones que ellos establecen carecen de sentido o son trabajadas de manera independiente. En el proceso de intervención se evidenciaron relaciones vacías entre conocimientos conceptuales en matemáticas y en física cuando los estudiantes relacionaban conceptos de dichas asignaturas de manera superficial sin trascender en su significado. Por ejemplo, si el participante menciona que la posición que ubica un cuerpo que cae libremente es descrita por una función, establece vínculos entre la caída libre y las funciones matemáticas; sin embargo, no alude a qué característica tiene la función y cómo se comporta. Además, la relación vacía entre conocimientos conceptuales también se evidencia cuando los estudiantes reconocen las relaciones entre conceptos matemáticos y físicos, pero los abordan de manera independiente.

Se puede identificar a su vez una relación vacía entre conocimientos procedimentales en matemáticas y física cuando el estudiante reconoce objetivos en pro a vincular dichos conocimientos, pero sus procesos no apuntan hacia esa intención. También se identifica en el momento en que el participante realiza procedimientos matemáticos y físicos que son inconscientes. Por ejemplo, un estudiante puede realizar mediciones de la posición de un cuerpo en un tiempo dado y después plantear una gráfica, aunque no considere las razones por las cuales desarrolló dichas acciones.

Las relaciones entre conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y en física dan cuenta de la relación vacía en el instante en que los participantes plantean la importancia de los conceptos para justificar sus procedimientos o viceversa, pero no lo hacen o los tratan de manera independiente.

La segunda categoría emergente se llama relación de aplicación. Esta se presenta cuando los estudiantes conectan los conocimientos en matemáticas y en física, pero uno subordinado al

otro. Se reconoce esta categoría en los conocimientos conceptuales en el momento en que los estudiantes relacionan un concepto de la asignatura con la otra, con la intención de ejemplificar.

La relación de aplicación se evidencia en las relaciones entre conocimientos procedimentales en matemáticas y física cuando un proceso de dicha disciplina se aplica de manera técnica en el otro, un ejemplo de ello es cuando el registro tabular de un fenómeno solo se usa para realizar graficas o se busca para hallar ciertos valores en un experimento con la finalidad de ser reemplazados en un modelo.

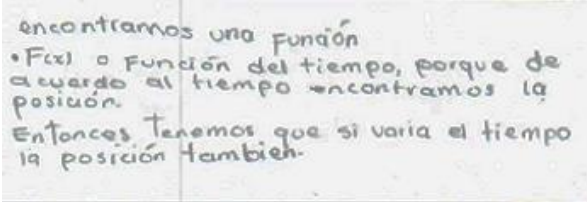
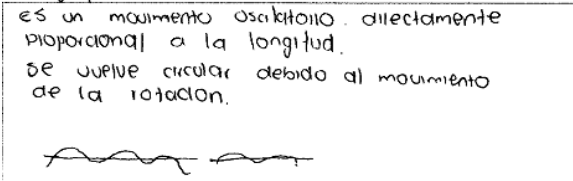


Una relación de aplicación entre conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y física se materializan como un asunto de verificabilidad donde los conceptos de dichas asignaturas buscan ser validados por los procedimientos o viceversa.

La tercera categoría es nombrada como relación de complementariedad, la cual sugiere una constante comunicación entre los conocimientos en matemáticas y en física, en otras palabras, cuando los argumentos o explicaciones que presentan los estudiantes involucran tantos aspectos matemáticos y físicos para ser válidos o para dar cuenta de una comprensión más amplia. Se evidencia una relación entre conocimientos conceptuales cuando trasciende la ejemplificación y los conceptos de dichas asignaturas se comunican, es decir, un concepto matemático complementa a un concepto físico y viceversa.

En una relación entre conocimientos procedimentales, la relación de complementariedad muestra que los procesos se desarrollan a la par, lo que posibilita la reflexión y la comunicación entre los procedimientos, en especial, cuando los estudiantes plantean metas u objetivos que requiere de procesos integrados como la modelación y la experimentación. Adicionalmente, se identifica una relación de complementariedad cuando los conceptos y los procesos posibilitan la abstracción reflexiva con el objetivo de perfeccionar sus prácticas y sus conceptualizaciones.

La Tabla 8 presenta algunas de las relaciones que se evidenciaron en el proceso de implementación.

Tabla 8. Evidencias de categorías secundarias.

| CATEGORÍAS INICIALES | EVIDENCIAS DE LOS ESTUDIANTES | CATEGORÍAS SECUNDARIAS |
|--|--|---|
| <p><i>Relaciones entre conocimientos conceptuales en matemáticas y en física</i></p> | <p>Evidencia #1</p>  | <p>Relación de aplicación</p> <p>Se evidencia que el estudiante relacionó los conceptos matemáticos con los físicos al ejemplificar la relación de dependencia e independencia de las variables del tiempo y la posición con el concepto de función. Se mostró el comportamiento de dichas variables en un contexto físico, pero no se llevó a cabo una profundización sobre el movimiento periódico que, en este caso, era el fenómeno que se debía analizar. Además, se evidencia que al estudiante le faltó relacionar el fenómeno físico con otros conceptos matemáticos y físicos que estaban involucrados como por ejemplo el de dominio y rango de una función.</p> |
| | <p>Evidencia #2</p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Qué entiendes por movimiento periódico? Menciona algunos ejemplos.   <ul style="list-style-type: none"> ¿Qué variables crees que intervienen en un movimiento periódico? Justifica tu respuesta.  | <p>Relación vacía</p> <p>Los estudiantes afirmaron que la reflexión, la rotación y la traslación de funciones influían en las variables del movimiento. Por tanto, se interpretó que los estudiantes establecieron una relación vacía entre los conocimientos conceptuales en matemáticas y en física, ya que estas carecieron de sentido. Las representaciones que realizaron no entraron en concordancia con la definición que dieron antes como se muestra en la evidencia #2.</p> |
| | <p>Evidencia #3</p> <p>“[...] Tenemos que tener en cuenta que el punto de equilibrio es el punto en el que queda completamente estable el péndulo, este</p> | <p>Relación de aplicación</p> <p>Se evidencia que los estudiantes, a partir del modelo que construyeron en conjunto con el maestro en formación, comenzaron a identificar los conceptos físicos necesarios para</p> |

*Relaciones entre
conocimientos
procedimentales
en matemáticas y
en física*

punto de equilibrio para nosotros fue de 18 ya de ahí podemos comenzar a hacer las funciones.

¿Cómo lo hicimos?

El punto de equilibrio para nosotros fue de 18. Ya de ahí podemos comenzar a hacer la función ¿Cómo lo hicimos? Bueno, primero, en un determinado tiempo que fueron 12 segundos contamos 10 oscilaciones, después de esto para encontrar el T que sería el periodo lo dividimos. $12/10$ nos da 1.2 y ya de ahí pudimos encontrar la frecuencia angular que sería $2\pi rad / 1.2$ [...] y nos da un total de 5.23. Ya de ahí podemos encontrar la función.

Ahora tenemos que tener en cuenta la amplitud. La amplitud la usamos teniendo en cuenta que el punto máximo al que llegaba la gráfica era 40 y el punto de equilibrio era 18, así que lo restamos y dio 22, así que esa sería su amplitud Ya para encontrar su función este sería

$$f(t) = 22 \text{ sen}(5,23)t + 18$$

Entonces con esto encontramos la función. Si nos vamos a verificar si esta es la función, podemos ver que al cambiar t con 0.6 nos da un total de 18.

llegar a la conformación del modelo. Así, en concordancia con el MEN (1998a), los estudiantes pudieron representar el fenómeno a través de gráficas, mediciones, funciones, etc. Sin embargo, se evidenció en este caso que la explicación del fenómeno pasó a un segundo plano para primar el hallazgo del modelo matemático. En este caso se presentó la desvinculación del fenómeno con la toma de datos, de los datos con la tabulación, de la tabulación con la graficación y esta última no se asoció con el modelo (El proceso de modelación se subordina con respecto a la experimentación).

Evidencia #4

Relación de complementariedad

“En las actividades del sistema masa-resorte, les preguntábamos a los estudiantes sobre sus mediciones y sus representaciones para que aludieran algunos conceptos y procesos y pudieran reformar y perfeccionar sus acciones. Así se les cuestionó sobre sus resultados; algunas preguntas que realizamos eran: ¿por qué la cinta métrica va en vertical?, ¿qué función cumple el cronómetro?, ¿por qué las gráficas se realizaron con trazos rectilíneos o curvilíneos (según fuera el caso)?, ¿la gráfica muestra que el sistema es acelerado o constante?, ¿cuál es el periodo de la gráfica y el resorte, deben ser iguales? estas preguntas los llevo a remitirse a su experiencia, a sus conocimientos en matemáticas y en física” (Diario de campo, sección 28 de agosto del 2019).

El estudiante establece una relación de complementariedad al adoptar modelos iterativos y hacer uso de la abstracción reflexiva, la cual según Lawson (1994) se da cuando los estudiantes reflexionan sobre los conceptos y procedimientos realizados para así estar seguros de sus resultados. En esta categoría se pretende que existan relaciones entre el conocimiento conceptual y procedimental de las matemáticas y la física, que exista una comunicación constante entre estas disciplinas y que los estudiantes requieran de los conceptos o procedimientos de una de ellas para construir argumentos, justificar y comunicar sus ideas.

En la Evidencia # 4 se puede observar que el estudiante desarrolló un proceso de abstracción reflexiva a través de las preguntas que realizó el maestro en formación, esto permitió, por ejemplo, dar cuenta de que la amplitud del sistema masa-resorte era la máxima estiración del resorte.

Relaciones entre conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y en física

Evidencia #5

“[...] Experimentaría para sustentar la teoría...en los experimentos se estudia la teoría... ¿Qué hacemos cuando experimentamos? Reafirmar una teoría o las creamos, confirmamos”

Relación de aplicación

Se puede evidenciar que algunos estudiantes subordinan el experimento con la teoría. Hay presencia de una perspectiva verificacionista del experimento.

Evidencia #6

“[...] La gráfica la construimos con líneas curvas debido a que sería imposible construirla solamente con puntos, ya que el

Relación vacía

Los estudiantes intentaron responder a la pregunta ¿por qué construyeron la gráfica con líneas curvas? A lo que respondieron que la construyeron con líneas curvas ya que era

movimiento solamente con puntos es cuando cogemos el frasco y lo ponemos en unos puntos específicos”

imposible construirla con solo puntos porque el movimiento se vería interrumpido y sería contradictorio con lo que observaron en el experimento, puesto que no se evidenciaba que el péndulo interrumpiera su movimiento en algún punto. No obstante, hay presencia de una relación vacía al asociar los conocimientos conceptuales y los conocimientos procedimentales en matemáticas y física, ya que los estudiantes dijeron que este movimiento del péndulo era constante, pero la explicación careció de significado al relacionar la gráfica con solo puntos, puesto que esto no significa que el péndulo paró en ciertos momentos sino que indicaría que se transportaría, es decir, que el péndulo aparece en un punto y desaparece para aparecer en otro. Los estudiantes no relacionaron esta última circunstancia de manera correcta.

5. CONCLUSIONES Y DISCUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones que responden a la pregunta de investigación y permitieron alcanzar los objetivos propuestos, de acuerdo con los hallazgos encontrados en el Capítulo 4. Estas respuestas y alcances se evidencian en las categorías iniciales y en las categorías secundarias, en donde se identificaron particularidades en torno a las relaciones que establecieron los estudiantes al realizar actividades de modelación y de experimentación. En este sentido, en los siguientes apartados se exponen las principales conclusiones de este trabajo y algunas discusiones que podrían ser de interés para futuras investigaciones en el campo educativo, que vinculen los conocimientos en matemáticas y física y procesos como la modelación y la experimentación.

Relación entre conocimientos conceptuales en matemáticas y en física

Gracias a las actividades y preguntas que se realizaron en el instrumento articulador se pudo analizar las diferentes relaciones que los estudiantes establecieron entre los conocimientos en matemáticas y física a través de la modelación y la experimentación en el marco del estudio del MAS. Estas articulaciones se evidenciaron en la conceptualización de algunas magnitudes variables, el establecimiento de relaciones con otras y el análisis sobre su variación. Así, el estudio de las variables involucradas en un fenómeno físico puede ser un insumo para promover conceptualizaciones en matemáticas y física (por ejemplo, del concepto de función y de la frecuencia angular). A pesar de que en la mayoría de las ocasiones los estudiantes relacionaron los conocimientos conceptuales en matemáticas y física como un asunto aplicativo.

Relación entre conocimientos procedimentales en matemáticas y en física

En esta categoría se pudo concluir que los estudiantes realizaron con mayor frecuencia relaciones de aplicación y relaciones vacías entre los conocimientos procedimentales de ambas disciplinas. Con respecto a las primeras, realizaron los procesos de modelación y de experimentación para encontrar el modelo que explicaba el fenómeno; no obstante, se dio una subordinación de procesos, ya que la explicación del movimiento periódico pasó a un segundo

plano para primar el hallazgo del modelo matemático. Con respecto a las segundas relaciones, se puede concluir que algunos de los equipos de trabajo tuvieron dificultades en el proceso de matematización al realizar los procesos de modelación y de experimentación, porque se trató de recurrir a un tipo de registro en particular (tabla o gráfica), pero no se usaron los diferentes recursos disponibles (vídeos sobre la experiencia, tablas y gráficas) para tener más información alrededor del fenómeno. Esto hizo que en ocasiones perdieran de vista lo que debían hacer.

En consecuencia, los maestros en formación concluyeron que los procesos de modelación y experimentación no pueden ser entendidos sin considerar los medios en los cuales se realizan. En este sentido, es necesario promover acciones donde los estudiantes vinculen los diferentes tipos de registro (tabular, gráfico y algebraico) con el fenómeno mismo, con la toma de datos y con los medios audiovisuales que se utilizan. De esa manera, los argumentos o explicaciones que presentan los estudiantes tendrían más evidencias que los soporten, podrían contrastarse y contribuirían a la emisión de nuevas hipótesis.

Relación entre conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas y en física

De acuerdo con lo reportado en el Capítulo 4, se observó que establecer relaciones de complementariedad entre conceptos y procedimientos en matemáticas y física es un aspecto complejo. Diversas investigaciones presentan evidencia de dificultades de los estudiantes para relacionar conceptos y procedimientos de una disciplina (como las matemáticas). Establecer este tipo de relaciones entre dos dominios de conocimiento (matemáticas y física) es todo un reto para los estudiantes y educadores y, sin embargo, es necesario. Según los estudiantes, esto posibilita que las matemáticas sean dotadas de sentido las matemáticas y se aprendan de mejor forma.

Una manera de promover relaciones entre conceptos y procedimientos es a través de la adopción de la modelación y la experimentación. Sin embargo, se observó que los estudiantes establecieron relaciones de aplicación por sí mismos, pero con el apoyo de los profesores lograron establecer una relación de complementariedad. En este sentido, el contexto en que se

desarrolló esta investigación sugiere que el profesor debe orientar algunas acciones y problematizar las producciones de los estudiantes para que se den articulaciones entre los conocimientos en matemáticas y física.

Dificultades para la articulación de conocimientos

Esta categoría permitió evidenciar las dificultades que tenían los estudiantes para articular dichos conocimientos. Los maestros en formación concluyeron tres aspectos a partir de lo que se reportó en el Capítulo 4. El primero es la falta de reconocimiento de las variables implicadas en el movimiento periódico; el segundo consistió en que se presentaran casos en donde no se evidenciaron relaciones de ningún tipo; y el tercero se dio cuando los estudiantes hicieron relaciones entre conceptos o procesos solo al interior de las matemáticas o de la física mas no entre ambas.

Una de las principales dificultades para la articulación entre conocimientos tuvo que ver con el poco acercamiento que los estudiantes tuvieron en experiencias previas a acciones involucradas en los procesos de modelación y experimentación como la medición, la identificación de variables y sus relaciones y la matematización. Asimismo, se relacionan con las visiones que tienen sobre la física y las matemáticas, las cuales condicionan sus acciones; esto se evidencia cuando plantean que hacen uso de la modelación y la experimentación para verificar o corroborar. Finalmente, se sugiere algunos aspectos que deben ser incorporados en los procesos de enseñanza y tienen que ver con la simplificación de una situación o fenómeno, el control de variables, la observación intencionada, la toma de datos y la matematización.

La mayoría de los estudiantes relacionaron los conocimientos en matemáticas y física a través de la aplicación tanto en los conceptos como en los procesos, a partir de las actividades de modelación y de experimentación que se propusieron en el instrumento articulador. En este sentido, esta investigación contribuyó a la caracterización de tres tipos de relaciones que los estudiantes establecen entre dichos conocimientos y que se convierten en incentivos para promover articulaciones entre estos conocimientos.

Este trabajo de grado deja motiva a otras investigaciones para profundizar en cada una de las tres categorías secundarias construidas, determinar cómo influye su visión sobre las ciencias en el establecimiento de este tipo de relaciones y en el establecimiento de condiciones que posibiliten la articulación de conocimientos entre estas disciplinas con el uso de la modelación y la experimentación. Finalmente, deja la apertura a la investigación de las posibles causas de las dificultades que los estudiantes presentaron para establecer relaciones entre los conocimientos.

Se concluye que tanto la modelación como la experimentación promueven en la mayoría de los estudiantes relaciones entre conocimientos matemáticos y físicos. Además, el tipo de relaciones que se promueve en el aula depende del tipo de tareas, preguntas, acciones y medios que estudiantes y profesores movilicen.

REFERENCIAS

- Alís, J. C., Gil-Pérez, D., Peña, A. V., & Valdez, P. (2006). Papel de la actividad experimental en la educación científica. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 23(2), 157-181.
- André, T., & Ding, P. (1991). Student misconceptions, declarative knowledge, stimulus conditions, and problem solving in basic electricity. *Contemporary Educational Psychology*, 16(4), 303-313.
- Arévalo, D., & Terrazzan, E. (2015). Diferencias trascendentales entre matematización de la física y matematización para la enseñanza de la física. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, 38(38).
- Aragón, P. A., & Marín, C. (2012). El pensamiento físico-matemático como un objeto de estudio de la didáctica de la física. In *Grupo de Investigación Enseñanza de La Física, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá*. Recuperado de: http://www.chubut.edu.ar/descargas/secundaria/congreso/COMPETENCIASBASICAS/RLE3162_Aragon.Pdf.
- Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, 16(2).
- Bonilla, E., & Rodríguez, P. (1997). Más allá de los métodos. La investigación en ciencias sociales. *Ed Norma, Colombia*, 118.
- Bravo, B., & Rocha, A. (2008). Los modos de conocer de los alumnos acerca de la visión y el color: síntesis de resultados. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 582-596.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lester, A. Wallby, & K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). Göteborg University: National Center for Mathematics Education.
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15-30). Springer, Dordrecht.

- Blum, W. & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.) *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp 222 – 231). Chichester: Horwood Publishing.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.
- Búa, J. B., & Fernández, M. T. (2015). Dos ejemplos de modelización matemática funcional basadas en fenómenos físicos. In *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.
- Camanera, P. (2012). La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*.
- Carmona-Mesa, J. A., Salazar, J. V. F., & Villa-Ochoa, J. (2018). Uso de calculadoras simples y videojuegos en un curso de formación de profesores. *Uni-pluriversidad*, 18(1), 13-24.
- Caron, F., & Pineau, K. (2017). L'Hospital's Weight Problem: Testing the Boundaries Between Mathematics and Physics and Between Application and Modelling. In *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 59-69). Springer, Cham.
- Castro, Á., Prat, M., & Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación1 Conceptual and procedural knowledge in mathematics: their development after decades of research. *Revista de Educación*, 374, 43-68.
- Cracolice, M. S., Deming, J. C., y Ehlert, B. (2008). Concept learning versus problem solving: A cognitive difference. *Journal of Chemical Education*, 85(6), 873.
- Díaz, F., y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo* (Vol. 2). México: McGraw-Hill.
- Domínguez, A., de la Garza, J., & Zavala, G. (2015). Models and modelling in an integrated physics and mathematics course. In *Mathematical Modelling in Education Research and Practice* (pp. 513-522). Springer, Cham.

- Dounas-Frazer, D. R., y Lewandowski, H. J. (2018). The Modelling Framework for Experimental Physics: description, development, and applications. *European Journal of Physics*, 39(6), 064005.
- Driver, R. (1989). Students' conceptions and the learning of science. *International journal of science education*, 11(5), 481-490.
- Fernández, A. y Roldán, E. (2012). El diario pedagógico como herramienta para la investigación. *Itinerario educativo*, 26(60), 117-128.
- Ferreirós, J., y Ordóñez, J. (2002). Hacia una filosofía de la experimentación. *Crítica, revista hispanoamericana de filosofía*, 34(102), 47-86.
- García, E., Gil, J., & Rodríguez, G. (1999). Metodología de la investigación cualitativa. *Málaga, España: Aljibe*.
- García, J., y Rentería, E. (2011). Modelización de problemas para desarrollar habilidades de experimentación. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (29), 44-64.
- García, J. & Rentería, E. (2013). Resolver problemas y modelizar: un modelo de interacción. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 5 (11), 297-333. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=281028437003>
- Gilbert, J. K., & Justi, R. (2018). Introducing Modelling into School Science. In *Science Education Research and Practice in Asia-Pacific and Beyond* (pp. 25-38). Springer, Singapore.
- González-Tejero, Pons, R. & Ortiz, M. E. (2011). El desarrollo del conocimiento matemático. *Psicogente*, 14(26), 269-293.
- Guber, R. (2001). *La etnografía: método, campo y reflexividad* (Vol. 11). Editorial Norma.
- Research (Vol. 1, pp. 15–30). Springer Netherlands.
- Guerrero, G. (2012). Datos, fenómenos y teorías. *Estudios de Filosofía*, (45), 9-32.
- Hammer, D. (1994). Students' beliefs about conceptual knowledge in introductory physics. *International Journal of Science Education*, 16(4), 385-403.

- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta edición. México: McGraw-Hill.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, 2, 1-27.
- IEPLAC. (2019). Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa. Recuperado 18 de febrero de 2019, de IEPLAC website: //ieplac.wixsite.com/ieplac
- Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa. (2012a). *Plan de área: Matemáticas*. Caldas-Antioquia.
- Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa. (2012b). *Plan de área: Ciencias Naturales*. Caldas-Antioquia.
- Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa. (2012c). *Proyecto Educativo Institucional (PEI)*. Caldas-Antioquia.
- Izquierdo, M., Sanmartí, N., & Espinet, M. (1999). Caracterización y diseño de las prácticas escolares deficiencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 79-92.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lauritzen, P. (2012). *Conceptual and procedural knowledge of mathematical functions*. University of Eastern Finland.
- Lawson, A. E. (1994). Uso de los ciclos de aprendizaje para la enseñanza de destrezas de razonamiento científico y de sistemas conceptuales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 12(2), 165-187.
- Lévy-Leblond, J. M. (1988). Física y matemáticas. In *Pensar la matemática* (pp. 75-92). Tusquets editores.
- Malagón, F., Ayala, M., & Sandoval, S. (2011). El experimento en el aula. Comprensión de fenomenologías y construcción de magnitudes. *Centro de investigaciones Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá*.

- Malagón, F., Sandoval, S., & Ayala, M. M. (2013). La actividad experimental: construcción de fenomenologías y procesos de formalización. *Praxis Filosófica*, 119-138.
- Mazzitelli, C., Maturano, C., Núñez, G., & Pereira, R. (2005). Dificultades conceptuales y procedimentales en temas relacionados con la presión y los fluidos en equilibrio. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 4(2), 1-26.
- Meli, D. B. (2006). *Thinking with objects: The transformation of mechanics in the seventeenth century*. JHU Press.
- Millar, R., Lubben, F., Got, R., & Duggan, S. (1994). Investigating in the school science laboratory: conceptual and procedural knowledge and their influence on performance. *Research Papers in Education*, 9(2), 207-248.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Segunda Versión. Bogotá DC.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998a). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998b). Lineamientos Curriculares: Ciencias Naturales. Bogotá: Magisterio.
- Molina-Mora, J. A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia*, 31(2), 19-36.
- Parra, F., Ávila, R., & Ávila, J. (2013). El significado del objeto matemático proporcionalidad. Su origen y desarrollo.
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3-21.
- Redish, E., y Gupta, A. (2009). Making meaning with math in physics: A semantic analysis. *GIREP-EPEC & PHEC 2009*, 244.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona, Horsori.

- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. *Oxford handbook of numerical cognition*, 1118-1134.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561.
- Rodríguez Gallegos, R., & Quiroz Rivera, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación matemática*, 28(3), 91-110.
- Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S* (Doctoral dissertation).
- Romero, Á. (Ed.). (2017). La experimentación en la clase de ciencias: aportes a una enseñanza de las ciencias contextualizada con reflexiones metacientíficas. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia
- Romero, A., Aguilar, Y., & Mejía, L. (2016). Naturaleza de las ciencias y formación de profesores de física. El caso de la experimentación. *CPU-e. Revista de Investigación Educativa*, (23), 75-98.
- Romero, Á. E., & Rodríguez, O. L. D. (2003). La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 55-67.
- Romero, A., & Aguilar, Y. (2013). La experimentación y el desarrollo del pensamiento físico. Un análisis histórico y epistemológico con fines didácticos. *Universidad de Antioquia*.
- Rueda, N. J. R., & Rico, S. E. P. (2016). Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por Ambientes de Geometría Dinámica. *Uni-pluriversidad*, 16(1).
- Schoner, G., & Wilimzig, C. (2005). Conceptual and procedural knowledge of a mathematics problem: Their measurement and their causal interrelations. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (Vol. 27, No. 27).
- Serway, R. A., Jewett, J. W., & González, S. R. C. (2015). *Física para ciencias e ingeniería. Vol. 1*. CENGAGE Learning.

- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 404-411.
- Star, J. R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169-181.
- Sudarmani, S., Pujianto, P. y Daban, R. (2018). Lesson Learned: Improving Students' Procedural and Conceptual Knowledge through Physics Instruction with Media of Wave, Sound, and Ligh Lesson. DOI: 10.1088/1742-6596/1097/1/012033.
- Okono, E. O., Sati, P. L., & Awuor, M. F. (2015). Experimental approach as a methodology in teaching physics in secondary schools. *International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences*, 6(5), 457-474.
- Vega-Malagón, G., Ávila-Morales, J., Vega-Malagón, A. J., Camacho-Calderón, N., Becerril-Santos, A., & Leo-Amador, G. E. (2014). Paradigmas en la investigación. Enfoque cuantitativo y cualitativo. *European scientific journal, ESJ*, 10(15).
- Hiebert, E., & Castilla, E. (2013). Desarrollo de la competencia de “modelación matemática” a través del aprendizaje por proyectos en el contexto de la física experimental. En *WEEF 2013 Cartagena*.
- Villa-Ochoa, J. A., & Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. En G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning* (pp. 241–250). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_19

ANEXOS

Anexo A. Formato de Diario Pedagógico

FACULTAD DE EDUCACIÓN
Departamento Enseñanza de las Ciencias y Artes
Licenciatura Matemáticas y Física
Práctica Pedagógica

| | | |
|---------------------------------------|--------------|--|
| Nombre del Centro de Práctica: | DANE | |
| Nombre del Estudiante: | C.C. | |
| Fecha: | Curso | |
| Hora: | Área | |

| |
|---|
| Tema/Tópico/Idea Central |
| |
| Objeto/Intención/Propósito/Fines de la clase |
| |
| Planeación de la clase |
| |
| Observación de la sesión de clase |
| |
| Reflexiones |
| |

Movimiento armónico simple

Sebastián Mejía Arango, Alexander Castrillón Yepes y Ana Carolina González
Grisales

1. Introducción

Los momentos presentados en esta fase buscan un acercamiento al movimiento armónico simple.

Objetivo

Reconocer las características del movimiento armónico simple.



Momento 1. Pensemos en movimiento

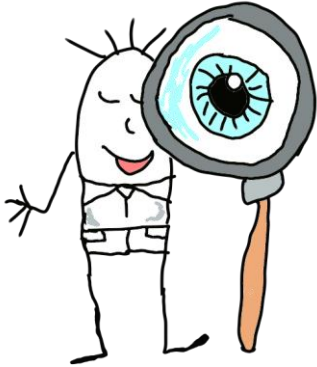
En este momento encontrarás una serie de preguntas que responderás de manera individual.

- ¿Qué entiendes por movimiento?

- ¿En qué piensas cuando te dicen que algo tiene un comportamiento periódico?


- ¿Qué entiendes por movimiento periódico?, menciona algunos ejemplos.

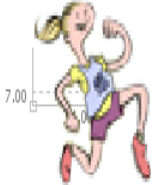

- ¿Qué variables crees que intervienen en un movimiento periódico?
Justifica tu respuesta.



Momento 2. ¿Qué observas?

En este momento te encontrarás con una serie de videos que representan diversas situaciones cercanas al mundo real. Debes completar la siguiente tabla. La actividad se realizará de manera individual.

| Video | ¿El movimiento presentado en el video es periódico? Justifique | ¿Qué variables intervienen en el movimiento? |
|---|--|--|
|  | | |

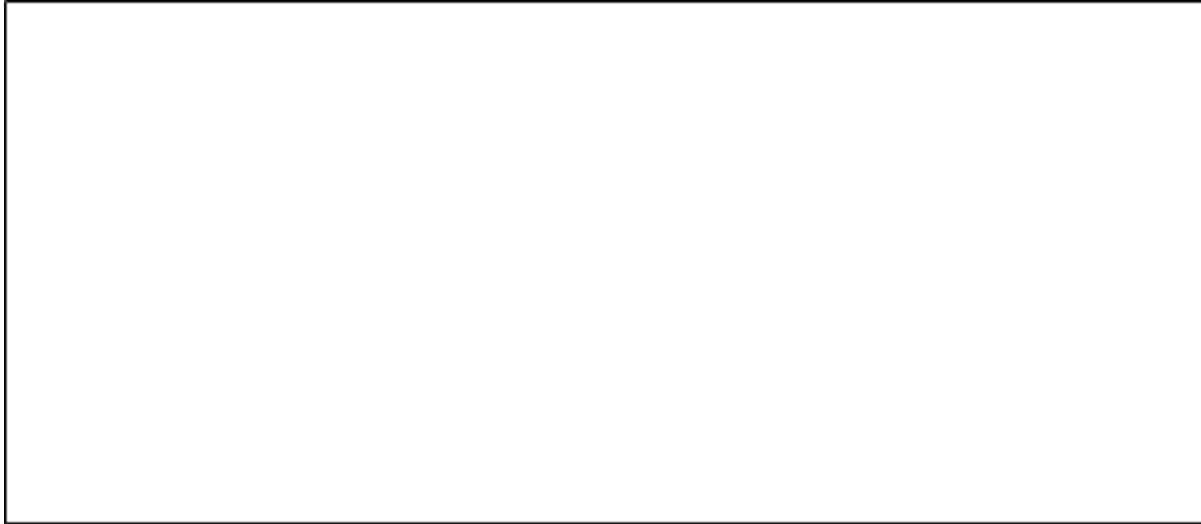
| | | |
|---|--|--|
|  | | |
|  | | |

Momento 3. Discusión

En este momento se enumerarán del 1 al 5 para conformar 5 grupos donde cada integrante debe de discutir lo que encontró y respondió en los momentos anteriores. Una vez hayan dialogado, cada equipo deberá diligenciar la siguiente tabla:

| | Similitudes entre sus planteamientos | Diferencias entre sus planteamientos |
|-----------------------------|---|---|
| Movimiento periódico | | |
| Variables | | |

De acuerdo con la tabla anterior, construyan una definición de movimiento periódico y las variables que intervienen en el movimiento, la cual se debatirá con los demás equipos de trabajo.



Fase 2. Exploración

En esta fase se busca que puedas reconocer características de un movimiento armónico simple como las variables involucradas en él.

Objetivos:

Construir el modelo de un movimiento armónico simple a partir de las variables involucradas en la experiencia.



Momento 1. Estudiemos el Movimiento Armónico Simple

A continuación, se presenta una secuencia de fotos que se tomaron en iguales intervalos de tiempo. Las figuras presentan una enumeración que corresponde al orden en que se tomaron las fotos al moverse los balones, donde el movimiento inicia en la captura 1. La actividad se realizará de manera individual.

Figura 1



Figura 2



Para hacer el análisis del movimiento de los objetos presentados en las figuras anteriores deberá responder a las siguientes preguntas de selección múltiple con única respuesta (marque la opción correcta con una x)



1. La velocidad en cada intervalo de tiempo de la figura 1 es:
 - a) La misma porque las fotos se tomaron en los mismos intervalos de tiempo.
 - b) Variable porque la distancia recorrida en cada intervalo de tiempo es diferente.
 - c) Diferente porque la distancia cambia constantemente, lo que hace que siempre disminuya.
 - d) Diferente porque cambia constantemente la posición del cuerpo.

2. En el trayecto de la foto 1 a la foto 2:
 - a) El balón de básquetbol se mueve más rápido que el balón de fútbol dado que la distancia que recorre en ese intervalo es mayor a la que recorre el balón de fútbol.
 - b) El balón de básquetbol se mueve más rápido que el balón de fútbol dado que la distancia que recorre en ese intervalo es menor a la que recorre el balón de fútbol.
 - c) El balón de básquetbol se mueve igual que el balón de fútbol dado que la distancia que recorre en ese intervalo es la misma a la que recorre el balón de fútbol.
 - d) El balón de fútbol se mueve más rápido que el balón de básquetbol dado que la distancia que recorre en ese intervalo es menor a la que recorre el balón de básquetbol.

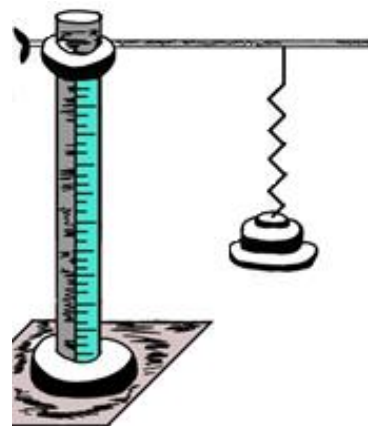
3. El cuerpo que tarda menos tiempo en volver a pasar por la foto 1 es:

- a) El balón de fútbol dado que para volver a pasar por la foto 1 requiere menos intervalos de tiempo que el balón de básquetbol.
 - b) El balón de básquetbol dado que para volver a pasar por la foto 1 requiere menos intervalos de tiempo que el balón de fútbol.
 - c) Ambos balones requieren de los mismos intervalos de tiempo para volver a pasar por la posición que ubica el cuerpo en la foto 1.
 - d) Ninguna de las anteriores.
4. El movimiento de los balones se caracteriza por ser:
- a) Periódico, tiene un movimiento de vaivén y tiene una velocidad variable.
 - b) Periódico, no tiene un movimiento de vaivén y tiene una velocidad constante.
 - c) No periodo, pasa por la foto 1 y tiene una velocidad variable.
 - d) No periódico, pasa por la foto 1 y tiene una velocidad constante.

Momento 2. Acerquémonos a un modelo

Ahora realizarás un estudio de un sistema masa-resorte. Para ello deben llevar a cabo procesos de observación, de toma de datos, de análisis del fenómeno y de variables que intervengan. La actividad se hará en equipos de trabajo (Máximo 8 estudiantes).

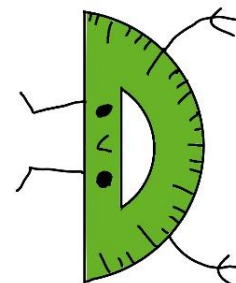
Construyan el montaje que se muestra en la figura 1, para esto es necesario tener a la mano: un resorte, un trípode, una regla, un cronómetro, una masa y la app Slow Motión video FX.



Estiren el resorte, coloquen el cronómetro al lado del trípode y registren los movimientos de la masa con la ayuda del aplicativo. Recuerden que el cronómetro debe activarse a la hora que se empieza a grabar el movimiento del resorte.

- Registren en la siguiente tabla las posiciones obtenidas en los intervalos de tiempo.

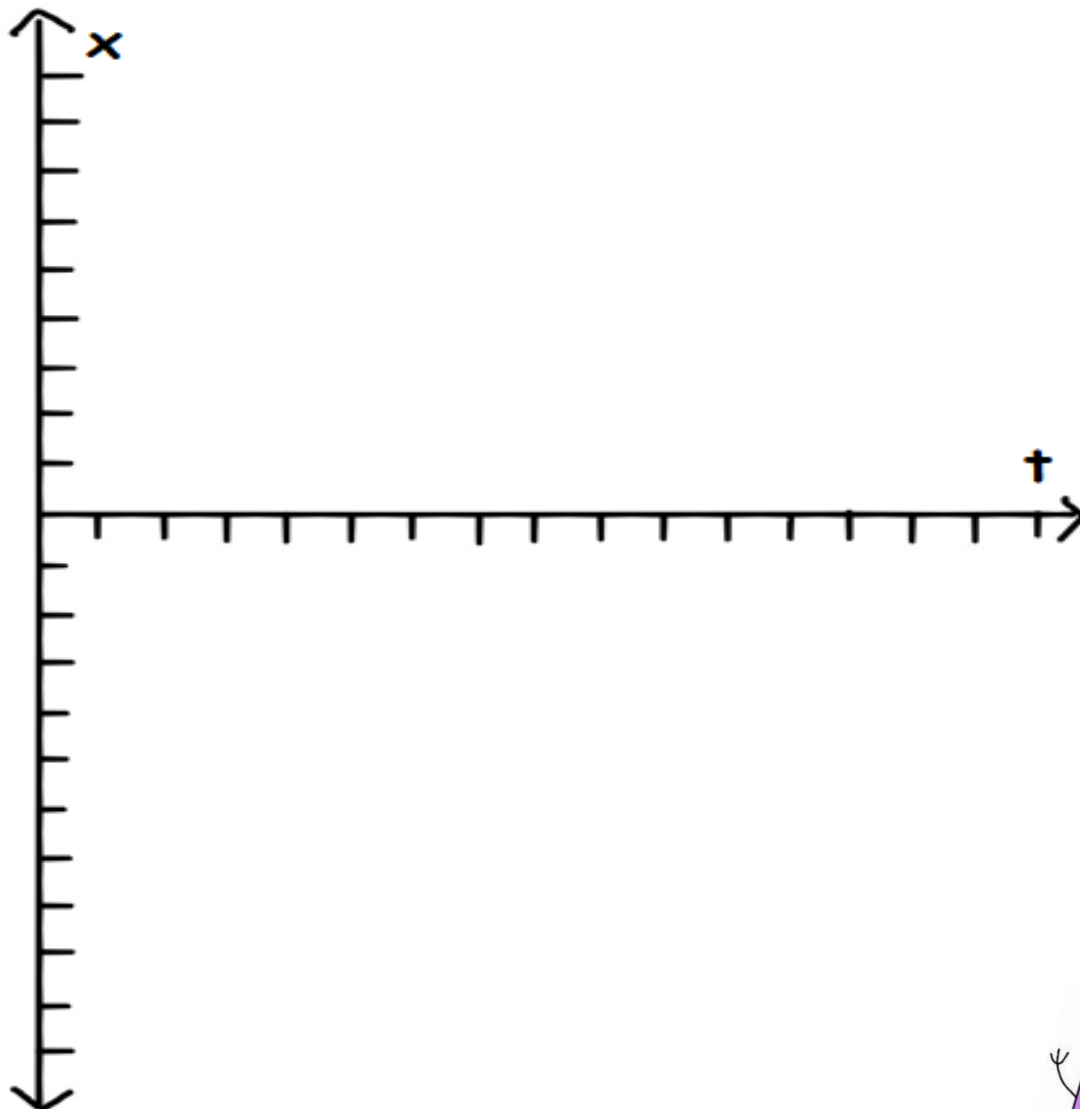
| | | | | | | | | | | | | |
|-------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| t(s) | | | | | | | | | | | | |
| x(cm) | | | | | | | | | | | | |



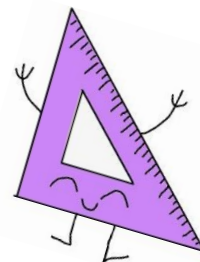
| | | | | | | | | | | | |
|-------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| t(s) | | | | | | | | | | | |
| x(cm) | | | | | | | | | | | |

- Gráfica en el siguiente plano los puntos registrados en la tabla anterior, ¿Puedes encontrar alguna relación? ¿Cuál es la variable dependiente y la independiente? Explica.





- Según el gráfico anterior, cuál crees que sería la posición del resorte en el momento igual a 20 segundos. Justifique.



- Mencionen qué pasa en el sistema masa-resorte cuando la gráfica corta el eje t.



- De acuerdo con la gráfica y la expresión obtenida responda la siguiente lista de chequeo. Marque con una x las características que consideren que cumplen.

| CARACTERÍSTICAS | SI | NO |
|---|----|----|
| ¿La gráfica de la función tiene un valor máximo o un valor mínimo en la posición? | | |
| ¿La función obtenida se repite cada cierto tiempo? | | |

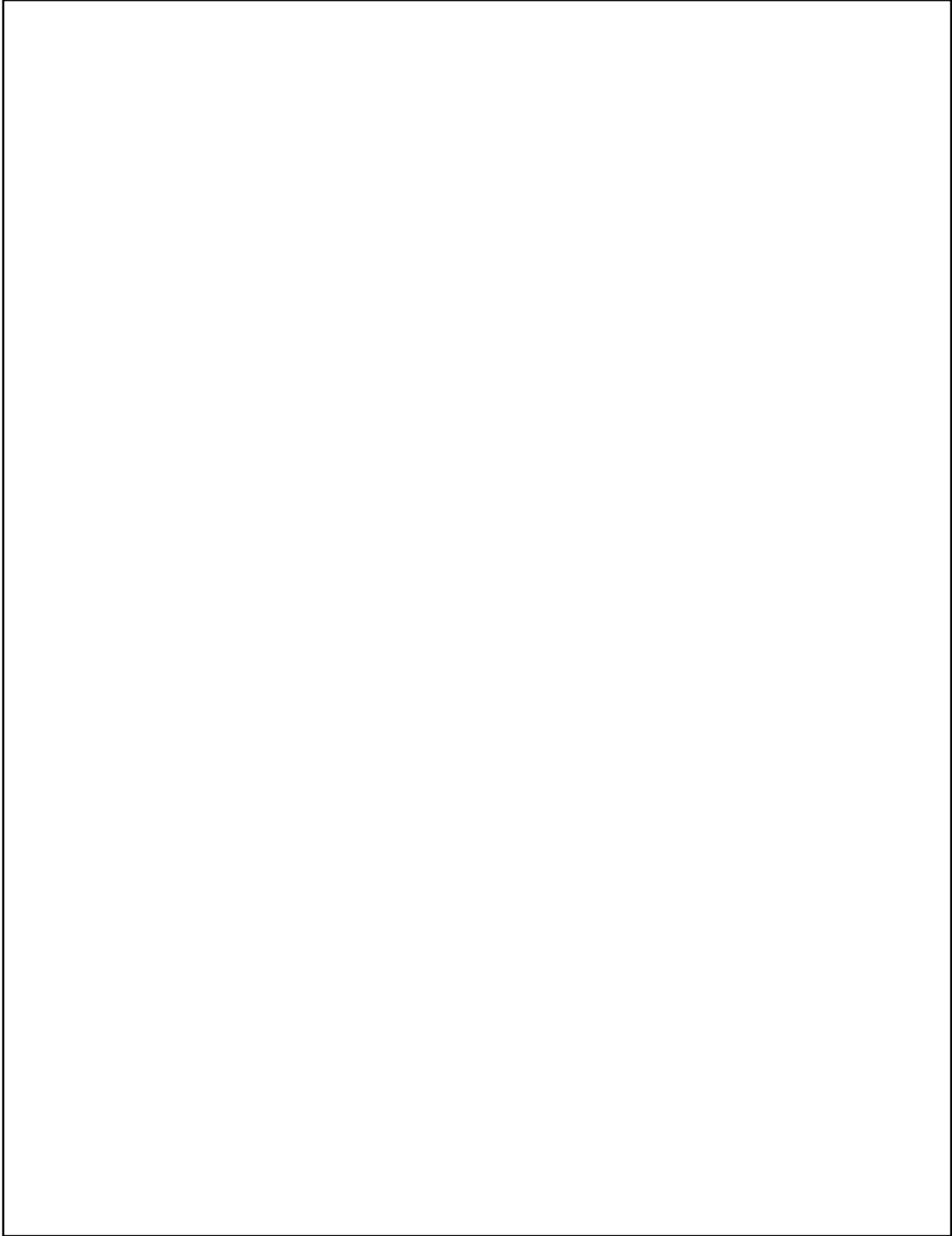
Momento 3. Discusión

En este momento se realizará una discusión sobre el comportamiento del sistema masa-resorte.

Momento 4. Construcción de un modelo matemático

En los mismos equipos de trabajo busquen una expresión matemática que pueda generalizar la posición del resorte en cualquier intervalo de

tiempo. Describan qué elementos y estrategias utilizaron para llegar a dicha expresión.



Fase 3. Reflexionando.

En esta fase se busca construir reflexiones a partir de actividades experimentales y procesos de modelación con relación al movimiento armónico simple.

Objetivo

Estudiar las funciones periódicas a través del movimiento armónico simple.

Estándares básicos de competencias:

- *Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.*
- *Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.*



Descripción de la actividad

En los mismos equipos de trabajo consolidados en la fase 2 realizarán un trabajo sobre el Movimiento Armónico Simple de un péndulo. Para ello deberán realizar consultas sobre el mismo, sus usos y aplicaciones. Además, llevarán materiales a la siguiente clase para realizar procesos de experimentación y modelación con el fin de mostrar la apropiación conceptual y procedimental en relación con el fenómeno, esto deberá presentarse en un vídeo. Deberá tener en cuenta aspectos como:

- El video no debe superar los 8 minutos de duración, debe tener buena imagen, audio y gráficos de manera que sean entendibles para quien lo observa.
- Se deben presentar evidencias del trabajo tanto en el vídeo como de manera física (vídeo del fenómeno, tablas, gráficas y modelos construidos).
- El contenido del video debe considerar: Identificación y relación entre variables, descripción de los procedimientos realizados, y explicaciones sobre el comportamiento de la situación, tipo de

función considerada y sobre los conceptos que intervienen en el fenómeno.

Anexo C. Fases del proceso de implementación

| Fase | Momento | Tiempo | Papel del maestro en formación | Propósito de la fase | Conocimientos | Aspectos de modelación | Aspectos de experimentación | ¿Cómo se hizo? |
|--------|---------------------------------|---|--|---|--|---|--|---|
| Fase 1 | M1. Pensemos en el movimiento . | 15-20 minutos. | Resolver las inquietudes que tengan los estudiantes. | Reconocer las características del movimiento armónico simple. | -Conocimiento conceptual en matemáticas y física. | Determinación de una situación y de las variables que intervienen en el movimiento periódico. | Observación intencionada sobre el movimiento periódico e identificación de variables involucradas. | Los estudiantes responden de manera individual las diferentes preguntas. |
| | M2. ¿Qué observar? | 20-25 minutos. | Presentar los videos e indicar la actividad. | | - Conocimiento conceptual en matemáticas y física. | Caracterización del movimiento, determinación de variables. | Observación intencionada, determinación de variables. | Ver los videos y completar la tabla de manera individual. |
| | M3. Discusión. | 50min-1h (30min actividad y 30 de discusión). | Cuestionar los argumentos y consensos, realizar las aclaraciones necesarias. | | - Conocimiento conceptual en matemáticas y física. | Caracterización del movimiento, determinación de variables. | Observación intencionada, determinación de variables. | Se discute en grupos los momentos anteriores y se realiza un diálogo con el profesor. |

| | | | | | | | | |
|---------------|--|------------------|---|--|---|--|--|--|
| Fase 2 | M1. Estudiaremos el movimiento armónico simple. | 20min. | Resolver inquietudes y hacer seguimiento del momento. | Construir el modelo de un movimiento armónico simple a partir de las variables involucradas en la experiencia. | - Conocimiento conceptual en matemáticas y física. | Dar claridad en las variables que intervienen en un movimiento. | Realizar procesos de medición e identificación de variables e invariantes. | Se responde de manera individual preguntas de selección múltiple con base en una serie de fotografías. |
| | M2. Acerquémonos a un modelo. | 2h- 2h y 30 min. | Dar indicaciones de la actividad experimental a resolver. | Construir el modelo de un movimiento armónico simple a partir de las variables involucradas en la experiencia. | -Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas y física. | Representación gráfica de acuerdo al movimiento y análisis del sistema masa-resorte. | Observación del sistema masa-resorte, cambios de variables durante la experiencia, toma de datos, etc. | En equipos de trabajo deben analizar un sistema masa-resorte y de acuerdo con este responder una serie de preguntas, hacer una representación gráfica y responder un check-list. |
| | M3. Discusión. | 30min. | Media la discusión, problematiza y al final concluye y hace | | -Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas y física. | Discusión de las representaciones realizadas. | Interpretación e interacción con el fenómeno, en este caso, el sistema masa-resorte. | Se realizará una discusión sobre el comportamiento del sistema masa-resorte de acuerdo a |

| | | | | | | | | |
|---------------|--|------------|--|---|--|---|--|--|
| | | | aclaraciones según las discusiones que se presenten. | | | | | lo encontrado por cada equipo de trabajo. |
| | M4. Construcción de un modelo matemático. | 20min. | Contribuye a la construcción de una expresión matemática según los gráficos que se realizaron. | - Estudiar las funciones periódicas a través del movimiento armónico simple | - Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas y física. | Perfeccionamiento de la gráfica, construir un modelo y validarlo. | Se recurría al video para tomar y analizar datos. También se remitían al video para volver a analizar la experiencia en concordancia con la gráfica. | En los mismos equipos de trabajo del M3 los estudiantes deben buscar una expresión matemática que pueda generalizar la posición del resorte en cualquier intervalo de tiempo con la ayuda del profesor y explicar dicha expresión. |
| Fase 3 | M1. | Una semana | El profesor debe de dar asesorías a los estudiante | El estudiante indaga y construye la representación gráfica del modelo | -Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas y física. | Creación del modelo. | Estudio péndulo simple a partir de la experimentación. | Se realiza en equipos de trabajo. Se investiga sobre el tema asignado, las variables |

| | | | | | | | | |
|--|--|--|-------------------|--|--|--|--|--|
| | | | s si lo ameritan. | del fenómeno de péndulos y lo expone a través de un video. | | | | implicadas y se construye un modelo que dé cuenta del fenómeno y su relación con el conocimiento matemático. |
|--|--|--|-------------------|--|--|--|--|--|

Anexo D. Formato de consentimiento informado

**Consentimiento informado para padres de familia
Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa
Área de matemáticas y Ciencias Naturales
Grado décimo y once**

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN, DIFUSIÓN Y USO DE MATERIAL.

Yo _____
identificado(a) con CC. _____ de _____, en calidad de
acudiente responsable por el (o la) estudiante _____,

identificado(a) con _____ número _____ de _____ autorizo
usar, publicar, difundir el material derivado del proceso de práctica pedagógica que se realiza en
los grados décimo o undécimo en las asignaturas de Matemáticas y Física de la Institución
Educativa Pedro Luis Álvarez Correa. Lo anterior se realiza con el ánimo de apoyar los procesos
académicos, bajo el derecho al honor, a la intimidad, al respeto de la privacidad y a la propia
imagen del (de la) estudiante mencionado(a) con anterioridad.

Nombre del [de la] estudiante: _____

Documento de identidad: _____

Firma: _____

Nombre del acudiente: _____

CC. _____

Teléfono de contacto: _____

Firma: _____