

CONVERGENCIA DÉBIL DE PASEOS ALEATORIOS

Mateo Ramírez Gaviria

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Asesor:

Dr. León Alexander Valencia Henao
Profesor del Instituto de Matemáticas

Línea de Investigación:
Probabilidad

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Instituto de Matemáticas
El Carmen de Viboral, Colombia
2020

*Dedicado
a mis padres, mi hermano y mi tío; sin su apoyo incondicional este proyecto no sería posible*

Agradecimientos

Este proyecto fue un gran reto a nivel personal y académico. Quiero agradecer en especial al Dr. León Alexander Valencia, por aceptar trabajar conmigo y encaminarme en esta parte tan maravillosa de la probabilidad; gracias por brindarme su apoyo, paciencia y conocimiento en todo este proceso. Quiero agradecer enormemente a todos los docentes que me formaron durante todo el pregrado de matemáticas haciendo mención a Natalia Cardona, Alejandro Roldán, Roberto Cruz, Jairo Castellanos y William Álvarez, gracias por su arduo esfuerzo y compartir sus conocimientos, sin duda aprendí mucho de ustedes; además de un gran cariño y a agradecimiento a Maria Vilma Meneses, mis compañeros de carrera y demás amistades que aportaron de una u otra forma a mi crecimiento personal y educativo, gracias por brindarme su apoyo y amistad. Gracias a toda mi familia por apoyarme incondicionalmente y todas las personas que estuvieron durante el desarrollo de mi carrera y a los ricos vasos de café.

Resumen

El estudio de procesos estocásticos y los teoremas límite han sido en los últimos años temas de interés en las ciencias matemáticas. A continuación se trabajará sobre dos procesos estocásticos: los paseos aleatorios y el movimiento browniano, desarrollando algunas de sus propiedades y también proporcionando una prueba detallada sobre como un paseo aleatorio converge débilmente hacia un movimiento browniano, esta convergencia es más conocida como el Teorema de Donsker; se mostraran los resultados necesarios para concluir dicha convergencia y se verificará el teorema mediante una simulación hecha en el software libre Python.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Introducción	V
1. Preliminares	1
1.1. Procesos Estocásticos	1
1.2. Paseo Aleatorio	2
1.3. Transitoriedad y Recurrencia	4
1.4. Primeros Tiempos de Pasada	8
1.5. Movimiento Browniano	10
2. Convergencia Débil en Espacios Métricos	13
2.1. Convergencia Débil	13
2.2. Rigidez en C	15
2.3. Funciones Aleatorias	17
3. Teorema de Donsker	20
3.1. Medida de Wiener	20
3.2. Teorema de Donsker	24
3.3. Teorema de Donsker (Modelado)	29
4. Conclusiones	33
Bibliografía	34

Introducción

Los teoremas límite son cruciales en el estudio del análisis estocástico, contribuyendo en áreas como estadísticas, biología, física, economía, entre otras; a continuación presentaremos una recopilación de resultados fundamentales para la convergencia débil de procesos estocásticos, centrándonos únicamente en la convergencia débil de paseos aleatorios.

Uno de los grandes precursores sobre la convergencias de procesos estocásticos fue el matemático Monroe David Donsker (1924-1991), quien en 1953 desarrolló el principio de invarianza de Donsker, también conocido como el Teorema de Donsker o Teorema del límite central funcional, que viene siendo una extensión del teorema del límite central clásico; siendo más precisos el Teorema de Donsker establece condiciones para que dada una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza finita, converja débilmente hacia un proceso estocástico con trayectorias en $C[0, 1]$ (espacio de funciones continuas en $[0,1]$) conocido como movimiento browniano.

Para alcanzar dicha convergencia se define el mapeo $\mathbf{X}^n : \Omega \rightarrow C[0, 1]$, interpolando los puntos generados por un paseo aleatorio y así tendiendo $n \rightarrow \infty$, obtenemos un movimiento browniano. Esta construcción viene acompañada de resultados y definiciones necesarias para poder concluir con el teorema de Donsker; entre ellas están los conceptos de paseo aleatorio y movimiento browniano, convergencia débil (convergencia en distribución) y propiedades, rigidez, funciones aleatorias, desigualdad de Chebychev, entre otros conceptos y consecuencias.

La tesis está dividida en tres capítulos. En el primer capítulo se desarrolla el concepto de proceso estocástico haciendo énfasis en el proceso denominado paseo aleatorio mostrando resultados sobre transitoriedad y recurrencia y sobre el principio de reflexión, y se define un segundo proceso estocástico llamado movimiento browniano. El estudio de este capítulo fue basado principalmente de los libros [1], [4], [6], [7].

En el segundo capítulo se presenta la noción de convergencia débil en espacios métricos, desarrollando propiedades necesarias de dicha convergencia; y se define los conceptos de rigidez en el espacio $C[0, 1]$, la proyección natural, funciones aleatorias, módulo de continuidad y consecuencias de estas, teniendo en cuenta su importancia en el desarrollo del teorema a trabajar. Se toma como base para este capítulo las siguientes referencias [2], [3], [4], [5].

En el tercer capítulo se introduce el concepto de medida de Wiener probando su unicidad en el espacio medible (C, \mathcal{C}) . Se define la función aleatoria de una variable coordinada (función coordinada) para probar que un proceso estocástico formado por dichas variables es precisamente un movimiento browniano, luego se construye el mapeo \mathbf{X}^n , para dar inicio a la demostración del

Teorema de Donsker y finalizando con una simulación de este mediante el software libre Python. La bibliografía utilizada para el desarrollo de este capítulo es [2], [3], [5].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Procesos Estocásticos

En esta sección daremos una ligera introducción del concepto de proceso estocástico en tiempo discreto y continuo.

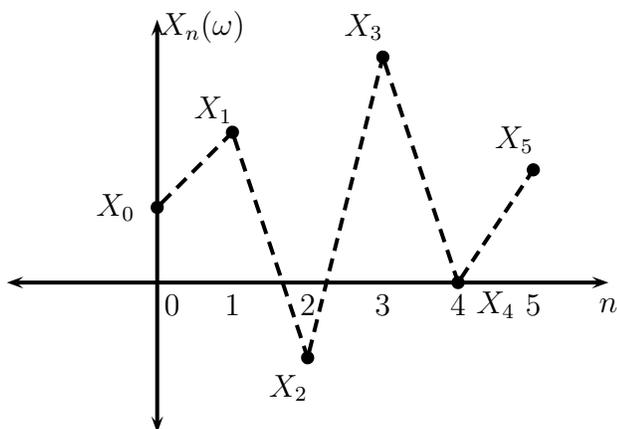
Definición 1.1.1. Un *Proceso Estocástico* es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$, definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. El conjunto T es llamado conjunto de índices(o tiempo) o espacio parametral y el conjunto de valores que toman las v.a (variables aleatorias) X_t es llamado espacio de estados y lo denotamos por S .

Definición 1.1.2. Para cada $\omega \in \Omega$, la función definida como

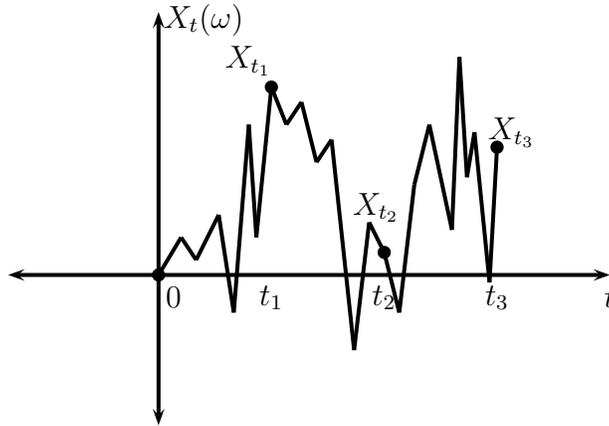
$$\begin{aligned} X(\omega) : T &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

es llamada trayectoria o realización del proceso estocástico, es decir, a cada $\omega \in \Omega$ le corresponde una trayectoria del proceso.

- Si consideramos $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ (interpretando los números como tiempos), decimos que el proceso es a tiempo discreto. Denotamos estos procesos por $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$.

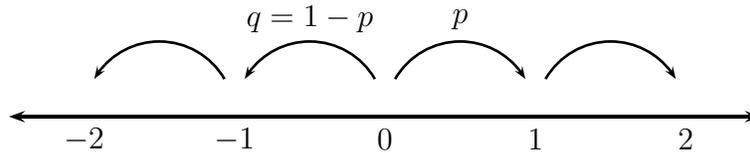


- Cuando consideramos $T = [0, \infty)$, decimos que el proceso es a tiempo continuo. Denotamos estos procesos como $\{X_t : t \geq 0\}$



1.2. Paseo Aleatorio

Pensemos en una partícula que se mueve aleatoriamente en los números enteros de la siguiente manera: en el momento $n = 0$ la partícula está en el origen; en el momento $n = 1$ se mueve la partícula una unidad hacia adelante (derecha) $(+1)$ con probabilidad p o una unidad hacia atrás (izquierda) (-1) con probabilidad $q = 1 - p$, como se ve en figura.



Ahora definimos $S_n :=$ "Posición de la partícula en el tiempo n " y asumamos que $S_0 = 0$.

Definición 1.2.1. (Paseo aleatorio simple) Sea X_1, X_2, \dots v.a (variables aleatorias); i.i.d (independientes e idénticamente distribuidas) con distribución $\mathbb{P}[X_n = 1] = p$ y $\mathbb{P}[X_n = -1] = q = 1 - p$ para cada $n \geq 1$. Sea $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + X_n$, $n \geq 1$.

El proceso estocástico $(S_n)_{n \geq 0}$ es llamado *paseo aleatorio simple*.

Y al proceso $S_n^x = S_n + x = \sum_{i=1}^n X_i + x$, se le denomina *paseo aleatorio simple que comienza en x* .

Observación 1.2.2. Definamos las probabilidades de transición de $(S_n)_{n \geq 0}$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}[S_{n+1} = j | S_n = i] = \begin{cases} p, & \text{si } j = i + 1, \\ 1 - p, & \text{si } j = i - 1, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

como estas probabilidades no dependen de n , se dicen que son homogéneas en el tiempo, es decir, son las mismas para cualquier valor de n .

Proposición 1.2.3. La distribución de S_n^0 es:

$$\mathbb{P}[S_n^0 = y] = \begin{cases} \binom{n}{\frac{1}{2}(n+y)} p^{\frac{1}{2}(n+y)} q^{\frac{1}{2}(n-y)}, & \text{si } |y| \leq n, \text{ si } n \text{ e } y \text{ son ambos pares o impares} \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Demostración: Supongamos que vemos el paseo aleatorio después de n pasos. Sea R_n el número de pasos realizados hacia la derecha y l_n el número de pasos realizados hacia la izquierda. Entonces vemos que $S_n = R_n - L_n$ y además $n = R_n + L_n$. Si sumamos estas dos expresiones obtenemos que $S_n = 2R_n - n$; de lo cual podemos decir que

$$R_n = \frac{1}{2}(S_n + n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(1 + X_i)$$

de lo anterior podemos ver que R_n es un número entero solo cuando n y S_n son ambos pares o ambos impares. Ahora como las v.a independientes X_i toman el valor $+1$ con probabilidad p ó el valor -1 con probabilidad q entonces las v.a independientes $\frac{1}{2}(1 + X_i)$ toman el valor de 1 con probabilidad p ó el valor 0 con probabilidad q . Esto nos lleva a que $R_n \sim \text{Bin}(n, p)$; así

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n^0 = y] &= \mathbb{P}[S_n = y | S_0 = 0] \\ &= \mathbb{P}[2R_n - n = y] \\ &= \mathbb{P}\left[R_n = \frac{1}{2}(y + n)\right] \\ &= \binom{n}{\frac{1}{2}(n+y)} p^{\frac{1}{2}(n+y)} q^{\frac{1}{2}(n-y)} \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.4. La distribución de S_n^x es:

$$\mathbb{P}[S_n^x = y] = \begin{cases} \binom{n}{\frac{1}{2}(n+y-x)} p^{\frac{1}{2}(n+y-x)} q^{\frac{1}{2}(n-y+x)}, & \text{si } |y-x| \leq n, \text{ si } n \text{ y } y-x \text{ son ambos pares o impares} \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Demostración: Por hipótesis sabemos que $S_0 = x$. Consideremos el proceso $Z_n = S_n - x$; entonces $Z_0 = S_0 - x = x - x = 0$, así $\{Z_n : n \geq 0\}$ es un paseo aleatorio que inicia en cero; por lo cual tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n^x = y] &= \mathbb{P}[S_n = y | S_0 = x] \\ &= \mathbb{P}[Z_n + x = y | Z_0 = 0] \\ &= \mathbb{P}[Z_n = y - x | Z_0 = 0] \end{aligned}$$

y por proposición anterior tenemos que

$$\mathbb{P}[S_n^x = y] = \begin{cases} \binom{n}{\frac{1}{2}(n+y-x)} p^{\frac{1}{2}(n+y-x)} q^{\frac{1}{2}(n-y+x)}, & \text{si } |y-x| \leq n, \text{ si } n \text{ y } y-x \text{ son ambos pares o impares} \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

□

1.3. Transitoriedad y Recurrencia

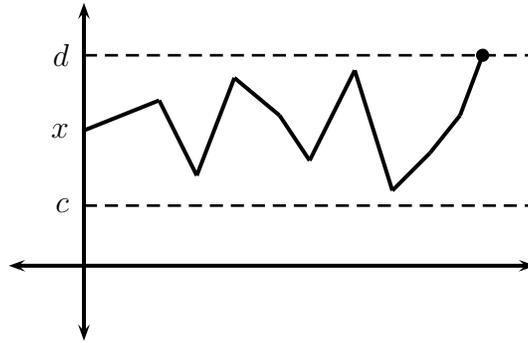
En esta sección daremos a conocer los conceptos de transitoriedad y recurrencia de un estado cualquiera y e un proceso estocástico.

Sea $(S_n^x)_{n \geq 0}$ un paseo aleatorio que comienza en el estado x .

Sea T_y^x la primera vez que el proceso que empieza en x alcanza a y , es decir,

$$T_y^x := \min\{n \geq 0 : S_n^x = y\}$$

Definición 1.3.1. Supongamos que $0 < p < 1$ y sea $c, d \in \mathbb{Z}$ tal que $c < d$ y definamos $\Phi(x) = \mathbb{P}[T_d^x < T_c^x]$, es decir, $\Phi(x)$ es la probabilidad de que la partícula que comienza en x alcance a d antes de llegar a c . Una posible representación esquemática del evento $T_d^x < T_c^x$ es la siguiente:



Proposición 1.3.2. Si $0 < p, q < 1$ y dado $c, d \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x-c}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{d-c}}, & \text{para } c \leq x \leq d, p \neq q, \\ \frac{x-c}{d-c}, & \text{para } c \leq x \leq d, p = q \end{cases}$$

Demostración: Analicemos el primer paso del paseo aleatorio.

veamos que en el primer paso, la partícula x se mueve a $x + 1$ con probabilidad p ó para $x - 1$ con probabilidad q ; así obtenemos que

$$\Phi(x) = p\Phi(x + 1) + q\Phi(x - 1) \quad (\text{T.Probabilidad Total})$$

como $p + q = 1$, entonces

$$(p + q)\Phi(x) = p\Phi(x + 1) + q\Phi(x) \quad (1.1)$$

$$\Phi(x + 1) - \Phi(x) = \frac{q}{p} (\Phi(x) - \Phi(x - 1)), \quad c + 1 \leq x \leq d - 1 \quad (1.2)$$

ahora por como esta definido $\Phi(x)$, tenemos

$$\Phi(c) = \mathbb{P}[T_d^c < T_c^c] = 0$$

$$\Phi(d) = \mathbb{P}[T_d^d < T_c^d] = 1$$

ahora para dar solución a $\Phi(x)$; escribimos $\Phi(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{y=c}^{x-1} \Phi(y+1) - \Phi(y) \\ &= \Phi(c+1) - \Phi(c) + \Phi(c+2) - \Phi(c+1) + \dots + \Phi(x) - \Phi(x-1)\end{aligned}$$

luego por la ecuación (1.2) tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(c+1) - \Phi(c) &= \left(\frac{q}{p}\right)^0 [\Phi(c+1) - \Phi(c)] \\ \Phi(c+2) - \Phi(c+1) &= \left(\frac{q}{p}\right)^1 [\Phi(c+1) - \Phi(c)] \\ \Phi(c+3) - \Phi(c+2) &= \left(\frac{q}{p}\right)^1 [\Phi(c+2) - \Phi(c+1)] \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^2 [\Phi(c+1) - \Phi(c)] \\ &\vdots \\ \Phi(x) - \Phi(x-1) &= \left(\frac{q}{p}\right)^{x-c-1} [\Phi(c+1) - \Phi(c)]\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{y=c}^{x-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{y-c} \Phi(c+1) - \Phi(c) \\ &= \Phi(c+1) \sum_{y=c}^{x-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{y-c} \\ &= \begin{cases} \Phi(c+1) \left[\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x-c}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \right], & \text{si } p \neq q, \\ \Phi(c+1)(x-c), & \text{si } p = q \end{cases}\end{aligned}$$

solo nos falta hallar el valor de $\Phi(c+1)$

- si $p \neq q$

$$1 = \Phi(d) = \Phi(c+1) \left[\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{d-c}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \right] \Rightarrow \Phi(c+1) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{d-c}}$$

- si $p = q$

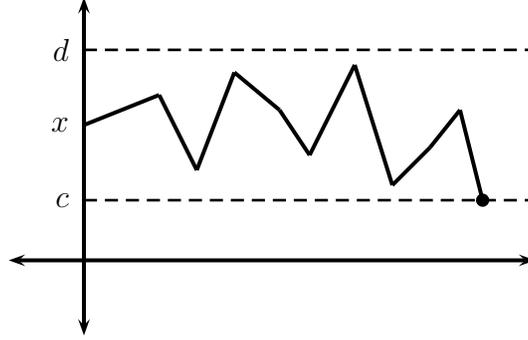
$$1 = \Phi(d) = \Phi(c+1)(d-c) \Rightarrow \Phi(c+1) = \frac{1}{d-c}$$

por tanto obtenemos que

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x-c}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{d-c}}, & \text{para } c \leq x \leq d, p \neq q, \\ \frac{x-c}{d-c}, & \text{para } c \leq x \leq d, p = q \end{cases}$$

□

Definición 1.3.3. Supongamos que $0 < p < 1$ y sea $c, d \in \mathbb{Z}$ tal que $c < d$ y definamos $\Psi(x) = \mathbb{P}[T_c^x < T_d^x]$, es decir, $\Psi(x)$ es la probabilidad de que la partícula que comienza en x alcance a c antes de llegar a d . Una posible representación esquemática del evento $T_c^x < T_d^x$ es la siguiente:



Proposición 1.3.4. Si $0 < p, q < 1$ y dado $c, d \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{d-x}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{d-c}}, & \text{para } c \leq x \leq d, p \neq q, \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{para } c \leq x \leq d, p = q \end{cases}$$

Demostración: Análogo a la proposición anterior.

Observaciones 1.3.5.

- De las proposiciones (1.3.3) y (1.3.4), vemos que $\Phi(x) + \Psi(x) = 1$. Esto prueba que el paseo aleatorio simple, comenzando en $x \in (c, d)$ "eventualmente" toca el nivel c ó el nivel d con probabilidad 1. Por lo que podemos concluir que $\mathbb{P}[T_c^x = T_d^x = +\infty]$, es decir, que la probabilidad de que la partícula que empieza en x no toque a c ni a d es cero.

2. Sea $c < x$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n^x = c, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}] &= \mathbb{P}[T_c^x < \infty] \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \mathbb{P}[T_c^x < T_d^x] \\ &= \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^{x-c}, & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ 1, & \text{si } p \leq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Sea $d > x$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n^x = d, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}] &= \mathbb{P}[T_d^x < \infty] \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \mathbb{P}[T_d^x < T_c^x] \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } p \geq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{p}{q}\right)^{d-x}, & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Por la ley fuerte de los grandes números:

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n^x}{n} = \frac{x + S_n}{n} \rightarrow p - q\right] = 1$$

por tanto

- Si $p > q$ entonces $S_n^x \rightarrow +\infty$, con probabilidad 1.
- Si $p < q$ entonces $S_n^x \rightarrow -\infty$, con probabilidad 1.

así

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}[S_n^x = y \text{ infinitas veces}] = 0, \text{ si } p \neq q \quad (1.3)$$

5. En el caso $p = q = \frac{1}{2}$, tenemos que no importa donde está inicialmente la partícula; esta eventualmente alcanza cualquier estado, con probabilidad 1 (por observación 2. y 3.)

por tanto

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}[S_n^x = y \text{ infinitas veces}] = 1, \text{ si } p = q = \frac{1}{2} \quad (1.4)$$

Definición 1.3.6.

- Decimos que el estado y es *transitorio* si satisface (1.3).
Si todos los estados son transitorios se dice que el proceso estocástico es un *proceso transitorio*.
- Decimos que el estado y es *recurrente* si satisface (1.4).
Si todos los estados son recurrentes se dice que el proceso estocástico es un *proceso recurrente*.

1.4. Primeros Tiempos de Pasada

Consideremos la v.a $T_y := T_y^0$, que representa la primera vez que el proceso que empieza en cero alcanza a y .

Definamos $F_{N,y} = \{T_y = N\}$; que representa la primera vez que el proceso alcanza a y en el N -ésimo paso; por tanto

$$F_{N,y} = \{S_n \neq y \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots, N-1; S_N = y\}$$

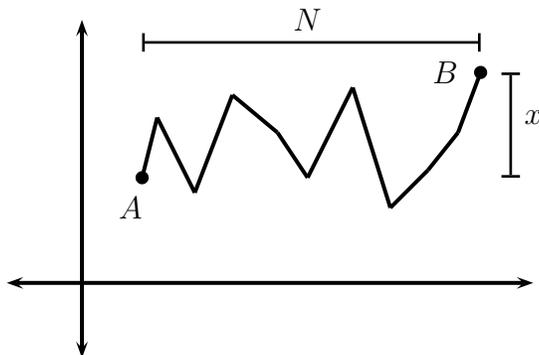
Así podemos encontrar el número de caminos que hay desde el punto $(0, 0)$ al punto (N, y) .

Proposición 1.4.1. El número de caminos de $(0, 0)$ a (N, y) es $\binom{N}{\frac{N+y}{2}}$.

Demostración: Sea N^+ el número de pasos $+1$ (arriba) y N^- el número de pasos -1 (abajo). Así $N = N^+ + N^-$ y $y = N^+ - N^-$ por lo tanto $N^+ = \frac{N+y}{2}$ y $N^- = \frac{N-y}{2}$; por lo que asumimos que $N+y$ es par. Ahora, hay tantos caminos que van desde $(0, 0)$ a (N, y) como maneras de elegir N^+ entre N , es decir, el número de caminos esta dado por

$$\binom{N}{N^+} = \binom{N}{\frac{N+y}{2}}$$

en general, si tenemos



el número de caminos de A a B es $\binom{N}{\frac{N+x}{2}}$. □

Queremos ahora calcular la distribución de T_y . Antes de esto enunciemos un lema que utilizaremos.

Lema 1.4.2. (Principio de reflexión) Sea $A = (n, s)$ y $B = (m, t)$ dos puntos, tales que $0 \leq n < m$ y $s, t > 0$. El número de caminos desde A hasta B que tocan o cruzan el eje de las abscisas es igual al número de caminos de $A' = (n, -s)$ hasta $B = (m, t)$.

Demostración: Consideremos $(S_n = s, S_{n+1}, \dots, S_m = t)$ un camino de A hasta B que toque el eje de las abscisas; sea T el primer instante en tocar el eje. Entonces $(-S_n = -s, -S_{n+1}, \dots, -S_{T-1}, S_T = 0, S_{T+1}, \dots, S_m = t)$ es un camino que va desde A' hasta B .

Como los caminos de A a T y de A' a T son reflexiones uno del otro, se sigue que existe una correspondencia uno a uno entre los caminos que van desde A' a B y los caminos que van de A a B ; esto implica que el número de caminos es el mismo. \square

Corolario 1.4.3. Sea $y > 0$. El número de caminos de $(0, 0)$ a $(N - 1, y - 1)$ que tocan o cruzan a y antes del tiempo $N - 1$ es igual al número de caminos de $(0, 0)$ a $(N - 1, y + 1)$.

Demostración: Se deduce del lema anterior.

Encontremos ahora la distribución de T_y .

Cada uno de los caminos de $(0, 0)$ a (N, y) tienen la misma probabilidad de ocurrencia; es decir $p^{(N+y)/2}q^{(N-y)/2}$; por lo tanto

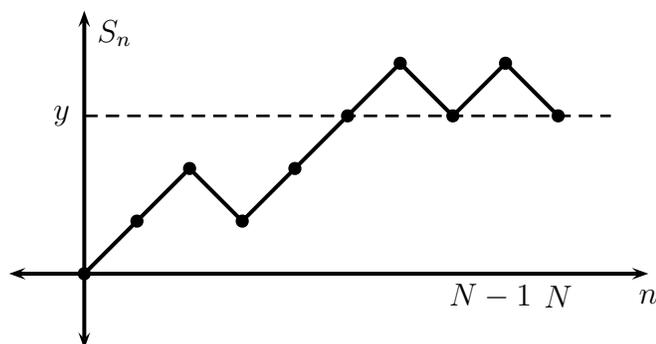
$$\mathbb{P}(T_y = N) = \mathbb{P}(F_{N,y}) = Lp^{(N+y)/2}q^{(N-y)/2}$$

donde L es el número de caminos desde $(0, 0)$ hasta (N, y) que no tocan a y antes del tiempo N . Para hallar el valor de L , consideremos L' como el número de caminos que si tocan a y antes del tiempo N ; así

$$L' = \binom{N}{\frac{N+y}{2}} - L$$

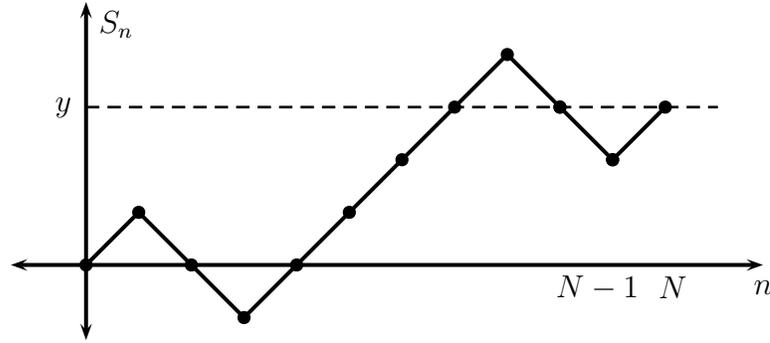
■ Sea $y > 0$; tenemos dos casos:

a) Los caminos desde $(0, 0)$ a (N, y) que alcanzan a y antes del tiempo N ; entonces $S_{N-1} = y + 1$



en este caso el número de caminos está dado por $\binom{N-1}{\frac{N+y}{2}}$.

b) Los caminos desde $(0, 0)$ a $(N - 1, y - 1)$ que tocan a y antes del tiempo $N - 1$ y $S_{N-1} = y - 1$



utilizando el corolario anterior (principio de reflexión), obtenemos que el número de caminos está dado por $\binom{N-1}{\frac{N+y}{2}}$.

Así, por a) y b) tenemos que $L' = 2 \binom{N-1}{\frac{N+y}{2}}$; por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_y = N) &= \mathbb{P}(F_{N,y}) = \left[\binom{N}{\frac{N+y}{2}} - 2 \binom{N-1}{\frac{N+y}{2}} \right] p^{(N+y)/2} q^{(N-y)/2} \\ &= \frac{y}{N} \binom{N}{\frac{N+y}{2}} p^{(N+y)/2} q^{(N-y)/2} \quad \text{para } N \geq y, N+y \text{ par, } y > 0 \end{aligned}$$

- Si $y < 0$ procedemos de manera similar y obtenemos que

$$\mathbb{P}(T_y = N) = \mathbb{P}(F_{N,y}) = -\frac{y}{N} \binom{N}{\frac{N+y}{2}} q^{(N-y)/2} p^{(N+y)/2}$$

Por tanto, para todo entero $y \neq 0$, tenemos

$$\mathbb{P}(T_y = N) = \mathbb{P}(F_{N,y}) = \frac{|y|}{N} \binom{N}{\frac{N+y}{2}} p^{(N+y)/2} q^{(N-y)/2} \quad \text{para } N = |y|, |y| + 2, |y| + 4, \dots$$

en particular si $p = q = \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\mathbb{P}(T_y = N) = \mathbb{P}(F_{N,y}) = \frac{|y|}{N} \binom{N}{\frac{N+y}{2}} \frac{1}{2^N} \quad \text{para } N = |y|, |y| + 2, |y| + 4, \dots$$

1.5. Movimiento Browniano

El movimiento browniano fue observado por primera vez por el botánico Robert Brown en 1828, mientras miraba a través de un microscopio el comportamiento de partículas de polen suspendidas en un líquido, y observó que las partículas se movían de forma errática. Brown hizo una

serie de experimentos que demostraron, entre otras cosas, que dicho movimiento no sucedía porque las partículas estuvieran vivas, como se había pensado antes. Unos años más tarde, cuando se conocieron las funciones no diferenciables de Weierstrass, se observó que el movimiento browniano parecía comportarse de manera muy similar.

El fenómeno fue finalmente explicado por Einstein en 1905, quien demostró que fue causado por el movimiento molecular[7]; las múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con las partículas de polen ocasionaban dicho movimiento errático; y Norbert Wiener en 1923 inició de forma independiente el desarrollo de la teoría matemática del movimiento browniano.

Mostraremos que una forma de definir el procesos estocástico *movimiento browniano*, es verlo como la forma limitante de un paseo aleatorio sin restricciones.

Recordemos que una trayectoria de un proceso estocástico, es una función $X(\omega) : T \rightarrow S$ tal que para cada $t \in T$, $X(\omega)(t) := X_t(\omega)$; donde $\omega \in \Omega$.

Veamos formalmente que es el movimiento browniano.

Definición 1.5.1. Un movimiento browniano unidimensional de parámetro σ^2 , es un proceso estocástico $W = \{W_t : t \geq 0\}$, que cumple las siguientes propiedades:

1. $W_0 = 0$.
2. Las trayectorias son continuas.
3. W tiene incrementos independientes; es decir, si $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ entonces $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, $1 \leq i \leq m$ son independientes.
4. Para cualesquiera tiempos $0 \leq s < t$, la variable incremento $W_t - W_s$ tiene distribución $N(0, \sigma^2(t - s))$

Nota 1.5.2. ▪ Se dice que un movimiento browniano es estándar cuando $\sigma^2 = 1$.

- Si $W_0 = x$, se dice que el movimiento browniano comienza en x .

Sea $t > 0$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$; se define la función de densidad de probabilidad del movimiento browniano con media x y varianza $\sigma^2 t$ como

$$\mathbb{P}(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-(y-x)^2/2\sigma^2 t}$$

Si el movimiento browniano tiene media cero, entonces $W_t \sim N(0, \sigma^2 t)$; y si el movimiento browniano es estándar $W_t \sim N(0, t)$.

Movimiento browniano como límite de paseos aleatorios.

Consideremos una secuencia de variables aleatorias i.i.d $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ y supongamos que $\mathbb{E}(\xi_n) = 0$ y $\text{Var}(\xi_n) = 1$.

Definamos el paseo aleatorio

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

así obtenemos que $\mathbb{E}(S_n) = 0$ y $\text{Var}(S_n) = n$.

Ahora queremos ver a este paseo aleatorio con una cantidad creciente de sumandos en un intervalo fijo, y parametrizado como el movimiento como el movimiento browniano; supongamos $t \in [0, 1]$.

Para conseguir lo anterior, consideremos $S_{[nt]}$, donde $[nt]$ es la parte entera de nt ; por ejemplo si tomamos el caso particular $t = 1$ obtenemos que $\text{Var}(S_{[n1]}) = \text{Var}(S_n) = n$. Definamos para cada valor del parámetro $n \geq 1$, el siguiente proceso estocástico

$$\mathbf{X}_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}}S_{[nt]} + (nt - [nt])\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{[nt]+1} \quad t \in [0, 1]$$

Entonces el teorema de Donsker (lo veremos en el siguiente capítulo) establece que $\{\mathbf{X}_t^n : t \in [0, 1]\}$ converge débilmente a un movimiento browniano.

Capítulo 2

Convergencia Débil en Espacios Métricos

En este capítulo presentaremos el concepto de convergencia débil en un espacio métrico dado, también conocida como convergencia en distribución, la cuál es clave en el estudio del teorema de Donsker. Y se trabajarán algunas propiedades del espacio $C[0, 1]$.

2.1. Convergencia Débil

Definición 2.1.1. Sea (S, ρ) un espacio métrico y $P, \{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, medidas de probabilidad en (S, \mathcal{S}) . Decimos que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a P y escribimos $P_n \Rightarrow P$ (ó $P_n \xrightarrow{w} P$); si para cada función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua tenemos

$$\int_S f dP_n \longrightarrow \int_S f dP.$$

Nota 2.1.2. Dado el espacio métrico (S, ρ) , denotamos con \mathcal{S} a la σ -álgebra de Borel en S y así denotamos por (S, \mathcal{S}) el espacio medible formado por S y por la σ -álgebra \mathcal{S} .

Definición 2.1.3. Sea (S, ρ) un espacio métrico y P una medida de probabilidad en (S, \mathcal{S}) . Un conjunto $A \in \mathcal{S}$ es llamado conjunto P -continuo (o conjunto de continuidad P) si $P(\partial(A)) = 0$. (Donde $\partial(A)$ denota la frontera del conjunto A).

Teorema 2.1.4. Sea (S, ρ) un espacio métrico y $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}, P$ medidas de probabilidad en (S, \mathcal{S}) . Las siguientes condiciones son equivalentes.

- i) $P_n \Rightarrow P$.
- ii) $\int_S f dP_n \longrightarrow \int_S f dP$ para todo $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, uniformemente continua.
- iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq P(F)$ para cada conjunto cerrado $F \in \mathcal{S}$.
- iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G) \geq P(G)$ para cada conjunto abierto $G \in \mathcal{S}$.
- v) $P_n(A) \longrightarrow P(A)$ para cada conjunto P -continuo $A \in \mathcal{S}$.

Demostración: La demostración se encuentra en [5].

Definición 2.1.5. (Convergencia en Distribución) Sea (Ω, \mathcal{F}, P) , $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ espacios de probabilidad, (S, ρ) un espacio métrico y $X : \Omega \rightarrow S$, $\{X_n : \Omega_n \rightarrow S\}_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias con sus respectivas distribuciones μ_X , $\{\mu_{X_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Decimos que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribución a X , si $\mu_{X_n} \Rightarrow \mu_X$ y escribimos $X_n \Rightarrow X$ (ó $X_n \xrightarrow{d} X$).

Teorema 2.1.6. Supongamos que (X_n, Y_n) son variables aleatorias de $S \times S$. Si $X_n \Rightarrow X$ y $\rho(X_n, Y_n) \Rightarrow 0$, entonces $Y_n \Rightarrow X$.

Demostración: Para un conjunto cerrado arbitrario $F \subseteq S$ y $\epsilon > 0$, definamos $F_\epsilon = \{x : \rho(x, F) \leq \epsilon\}$. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\omega \in \Omega$ tal que $Y_n(\omega) \in F$ y $X_n(\omega) \notin F_\epsilon$, entonces $\rho(Y_n(\omega), X_n(\omega)) > \epsilon$. Por lo tanto,

$$\{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \in F\} - \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \in F\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \rho(X_n(\omega), Y_n(\omega)) > \epsilon\}$$

entonces

$$P[Y_n \in F] \leq P[\rho(X_n, Y_n) > \epsilon] + P[X_n \in F_\epsilon]$$

Ahora como $\rho(X_n, Y_n) \Rightarrow 0$, $X_n \Rightarrow X$, F_ϵ es cerrado y por el teorema 2.1.4, obtenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} P[Y_n \in F] &\leq 0 + \limsup_{n \rightarrow \infty} P[X_n \in F_\epsilon] \\ &\leq P[X \in F_\epsilon] \end{aligned}$$

ahora si $\epsilon \rightarrow 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P[Y_n \in F] \leq P[X \in F]$$

y como F es cerrado, por teorema 2.1.4, $Y_n \Rightarrow X$. □

Corolario 2.1.7. Supongamos que (X, Y_n) son variables aleatorias de $S \times S$. Si $\rho(X, Y_n) \Rightarrow 0$, entonces $Y_n \Rightarrow X$

Demostración: Tomemos $X_n \equiv X$ y por el teorema anterior obtenemos lo deseado □

Teorema 2.1.8. Supongamos que (X_{un}, X_n) son variables aleatorias de $S \times S$. Si $X_{un} \Rightarrow_n Z_u \Rightarrow_u X$ y

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P[\rho(X_{un}, X_n) \geq \epsilon] = 0 \tag{2.1}$$

para cada ϵ , entonces $X_n \Rightarrow_n X$.

Nota 2.1.9. $X_{un} \Rightarrow_n Z_u$, indica una convergencia débil cuando $n \rightarrow \infty$, con u fijo.

Demostración: Nuevamente, para un conjunto cerrado arbitrario $F \subseteq S$ y $\epsilon > 0$, definamos $F_\epsilon = \{x : \rho(x, F) \leq \epsilon\}$, análogamente al teorema anterior tenemos que

$$P[X_n \in F] \leq P[\rho(X_{un}, X_n) \geq \epsilon] + P[X_{un} \in F_\epsilon]$$

ahora como $X_{un} \Rightarrow_n Z_u, F_\epsilon$ y por el teorema 2.1.4, obtenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} P [X_n \in F] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P [\rho(X_{un}, X_n) \geq \epsilon] + \limsup_{n \rightarrow \infty} P [X_{un} \in F_\epsilon] \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P [\rho(X_{un}, X_n) \geq \epsilon] + P [Z_u \in F_\epsilon] \end{aligned}$$

y como $Z_u \Rightarrow_u X$ y por hipótesis tenemos (2.1) y aplicando el teorema 2.1.4, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P [X_n \in F] &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P [\rho(X_{un}, X_n) \geq \epsilon] + \lim_{u \rightarrow \infty} P [Z_u \in F_\epsilon] \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} P [X_n \in F] &\leq P [X \in F_\epsilon] \end{aligned}$$

ahora si $\epsilon \rightarrow 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P [X_n \in F] \leq P [X \in F]$$

y como F es cerrado, por teorema 2.1.4 $X_n \Rightarrow X$

□

2.2. Rigidez en C

Definición 2.2.1. Sea $C = C[0, 1]$ el espacio de todas las funciones $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, y definamos la siguiente métrica sobre C ; $\rho : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x, y \in C$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|.$$

Así (C, ρ) es un espacio métrico. Denotaremos con \mathcal{C} a la σ -álgebra de Borel en C y con \mathcal{R}^k a la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^k para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.2. Un espacio métrico (X, d) se denomina completo si todas las sucesiones de Cauchy convergen.

Recordemos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy si dado $\epsilon > 0$ existe un entero $K > 0$ tal que si $m, n \geq K$ entonces $\|x_m - x_n\| < \epsilon$.

Definición 2.2.3. Diremos que un espacio (X, d) es separable, si incluye un subconjunto denso numerable.

Proposición 2.2.4. El espacio (C, ρ) es completo.

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de funciones de Cauchy en C . Por tanto, para cada $\epsilon > 0$ existe un entero $K > 0$, tal que si $n, m > K$, entonces $\|x_m - x_n\| < \epsilon$. En particular, para $t \in [0, 1]$,

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |x_m(t) - x_n(t)| = \|x_m - x_n\| < \epsilon,$$

por lo que tenemos que $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Ahora como \mathbb{R} con la métrica euclídea es un espacio completo, entonces para cada $t \in [0, 1]$, la sucesión $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite

x_t . Así mostramos que $x_n \rightarrow x$ con $x \in C$ y como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo visto anteriormente $|x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon$, por tanto tenemos

$$|x(t) - x_n(t)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |x_m(t) - x_n(t)| \leq \epsilon$$

para todo $t \in [0, 1]$; por tanto $\|x_n - x\| \leq \epsilon$, lo que prueba que $x_n \rightarrow x$ en C . □

Proposición 2.2.5. El espacio (C, ρ) es separable.

Demostración: Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $Q_k \subseteq C$ el conjunto de polinomios con coeficientes racionales de grado $k \in \mathbb{N}$, y tenemos que $|Q_k| \leq |\mathbb{Q}^k|$ (donde $|\cdot|$, denota la cardinalidad); así podemos afirmar que

$$Q := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$$

es un conjunto contable, ya que es unión contable de conjuntos contables.

Sea $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ un polinomio con coeficientes reales y de grado k . Ya que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , para cada $\epsilon > 0$ y $i < k$ existe $b_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_i - b_i| < \frac{\epsilon}{2(k+1)}$. Si definimos $q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_k t^k$, entonces para cada $t \in [0, 1]$ tenemos:

$$\begin{aligned} |p(t) - q(t)| &= \left| \sum_{i=0}^k (a_i - b_i) t^i \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^k |(a_i - b_i)| \\ &< \sum_{i=0}^k \frac{\epsilon}{2(k+1)} \\ &= \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Dado que lo anterior se cumple para cada $t \in [0, 1]$ y $k \in \mathbb{N}$, tenemos que para cada polinomio con coeficientes reales $p \in C$ y $\epsilon > 0$, existe un polinomio $q \in C$ con coeficientes racionales tales que $\rho(p, q) = \|p - q\| = \sup_{t \in [0, 1]} |p(t) - q(t)| < \epsilon/2$. Ahora por el teorema de aproximación de Weierstrass, para cualquier $\epsilon > 0$, y para cualquier $x \in C$ existe un polinomio p con coeficientes reales tales que $\rho(x, p) < \epsilon/2$. Por lo tanto para cada $x \in C$ y $\epsilon > 0$, existe un polinomio $p \in C$ con coeficientes reales y un polinomio $q \in Q$ con coeficientes racionales tales que

$$\rho(x, q) \leq \rho(x, p) + \rho(p, q) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

por tanto Q es denso en C . Y como $Q \subseteq C$ es contable entonces C es separable. □

Definición 2.2.6. Una medida de probabilidad P en (S, \mathcal{S}) es *rígida* si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto $K \in \mathcal{S}$ compacto tal que $P(K) > 1 - \epsilon$. Similarmente, un conjunto \mathcal{K} de medidas de probabilidad en (S, \mathcal{S}) es *rígida* si para cada $\epsilon > 0$, existe un conjunto $K \in \mathcal{S}$ tal que $P(K) > 1 - \epsilon$ para cada $P \in \mathcal{K}$.

Teorema 2.2.7. Si (S, ρ) es separable y completo entonces cada medida de probabilidad en (S, \mathcal{S}) es *rígida*.

Demostración: Como S es separable, hay para cada $k \in \mathbb{N}$ una secuencia de A_{k1}, A_{k2}, \dots de bolas abiertas de radio $1/k$ que cubre a S . Elijamos $n_k \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que $P\left(\bigcup_{i \leq n_k} A_{ki}\right) > 1 - \epsilon/2^k$. Ahora como S es completo el conjunto totalmente acotado $\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \leq n_k} A_{ki}$ tiene una clausura compacta K . Por lo tanto tenemos que $P(K) > 1 - \epsilon$; por lo que cada medida de probabilidad en (S, \mathcal{S}) es *rígida*. \square

Nota 2.2.8. Como (C, ρ) es separable y completo; por el teorema anterior tenemos que cada medida de probabilidad en (C, \mathcal{C}) es *rígida*.

2.3. Funciones Aleatorias

Definición 2.3.1. Para cada entero $k \geq 1$ y para $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$, definamos la proyección natural $\pi_{t_1 \dots t_k} : C \rightarrow \mathbb{R}^k$ por $\pi_{t_1 \dots t_k}(x) := (x(t_1), \dots, x(t_k))$, para cada $x \in C$.

Proposición 2.3.2. Sean los espacios (C, ρ) y (\mathbb{R}^k, d) (donde d es la métrica euclidiana). La proyección natural $\pi_{t_1 \dots t_k}$ es continua.

Demostración: Veamos que $\pi_{t_1 \dots t_k}$ es continua en $y \in C$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{k}}$, tal que para cada $x \in C$ con $\rho(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| < \delta$, se cumple

$$\begin{aligned} d(\pi_{t_1 \dots t_k}(x), \pi_{t_1 \dots t_k}(y)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^k |x(t_i) - y(t_i)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^k \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|^2} \\ &= \sqrt{k} \rho(x, y) \\ &< \sqrt{k} \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

\square

Definición 2.3.3. Un conjunto $A \subseteq C$ es llamado *finito-dimensional* si existe $H \in \mathcal{R}^k$, tal que $\pi_{t_1 \dots t_k}^{-1}(H) = A$. Y sea C_f la clase de todos los conjuntos finito-dimensional, es decir $C_f := \{\pi_{t_1 \dots t_k}^{-1}(H) : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1, H \in \mathcal{R}^k\}$.

Nota 2.3.4. Podemos ver que $C_f \subseteq \mathcal{C}$. Sea $A \in C_f$; entonces existe $H \in \mathcal{R}^k$ tal que $\pi_{t_1 \dots t_k}^{-1}(H) = A$ y como mostramos que $\pi_{t_1 \dots t_k}$ es continua, entonces $A \in \mathcal{C}$.

Definición 2.3.5. Sea $x \in C$. El *módulo de continuidad* de x se define como

$$w_x(\delta) = w(x, \delta) = \sup_{|t-s| \leq \delta} |x(t) - x(s)|, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Nota 2.3.6. Una condición necesaria y suficiente para que x sea uniformemente continua sobre $[0,1]$ es

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w_x(\delta) = 0.$$

Proposición 2.3.7. Para un $\delta > 0$ fijo, $w(\cdot, \delta) : C \rightarrow \mathbb{R}$, es continua.

Demostración: Sea $x \in C$ arbitrario y $t, s \in [0, 1]$ tal que $|t - s| < \delta$. Para cada $y \in C$, tenemos

$$\begin{aligned} |x(t) - x(s)| &= |x(t) - x(s) + y(t) - y(t) + y(s) - y(s)| \\ &\leq |x(t) - y(t)| + |y(s) - x(s)| + |y(t) - y(s)| \\ &\leq 2\|x - y\| + |y(t) - y(s)| \end{aligned}$$

si tomamos supremo a ambos lados de la desigualdad con respecto a $t, s \in [0, 1]$ tal que $|t - s| \leq \delta$, obtenemos

$$\sup_{|t-s| \leq \delta} |x(t) - x(s)| \leq 2\|x - y\| + \sup_{|t-s| \leq \delta} |y(t) - y(s)| \quad (2.2)$$

$$w(x, \delta) \leq 2\|x - y\| + w(y, \delta) \quad (2.3)$$

usando el argumento anterior, si intercambiamos x por y obtenemos

$$w(y, \delta) \leq 2\|x - y\| + w(x, \delta) \quad (2.4)$$

ahora, independientemente de que si $w(x, \delta) < w(y, \delta)$ ó $w(y, \delta) < w(x, \delta)$; de las ecuaciones (2.3) y (2.4) obtenemos que para cualquier $x \in C$

$$|w(x, \delta) - w(y, \delta)| \leq 2\|x - y\|.$$

Por tanto, para cada $x \in C$ y $\epsilon > 0$, existe $\eta = \epsilon/2$ tal que para cada $y \in C$ $\rho(x, y) < \eta$, se cumple

$$|w(x, \delta) - w(y, \delta)| \leq 2\rho(x, y) < 2\eta = \epsilon$$

por tanto $w(\cdot, \delta)$ es continua en x para todo $x \in C$. □

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sea $X : \Omega \rightarrow C$, donde $X(\omega)$ es un elemento de C con valor en t $X_t(\omega) = X(t, \omega)$. Para t fijo, sea $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X_t(\omega) \in \mathbb{R}$. Ahora X_t es la composición de $\pi_t \circ X$, donde π_t es la proyección natural definida anteriormente. Y sea $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ el mapeo de Ω en \mathbb{R}^k tal que $(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega)) = \pi_{t_1 \dots t_k}(X(\omega))$ en \mathbb{R}^k .

Ahora Dado lo anterior, decimos que X es una *función aleatoria* si y solo si $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) = \pi_{t_1 \dots t_k} \circ X$ es un vector aleatorio, y esto se cumple si y solo si cada X_t es una variable aleatoria.

Recordemos que si Y es una variable aleatoria, la distribución de Y es la medida de probabilidad $P = PY^{-1}$ en (S, \mathcal{S}) (en este caso en (C, \mathcal{C})) definida por

$$P(A) = P(Y^{-1}(A)) = P[\omega : Y(\omega) \in A] = P[Y \in A]$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} P[(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in H] &= P[\omega : (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega)) \in H] = P[\omega : (\pi_{t_1 \dots t_k} \circ X)(\omega) \in H] \\ &= P[(\pi_{t_1, \dots, t_k} \circ X)^{-1}(H)] = P[(X^{-1}(\pi_{t_1 \dots t_k}^{-1}(H)))] \\ &= P[\pi_{t_1 \dots t_k}^{-1}(H)] \end{aligned}$$

es la distribución de los vectores aleatorios $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$.

Supongamos de acá en adelante que X, X^1, X^2, \dots son funciones aleatorias.

Proposición 2.3.8. Sea P y P' medidas de probabilidad en (C, \mathcal{C}) . Si $P(A) = P'(A)$ para cada $A \in \mathcal{C}_f$ entonces $P = P'$.

Demostración: La demostración se encuentra en [2].

Teorema 2.3.9. Sea $X, \{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funciones aleatorias en C definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Si

$$(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \Rightarrow_n (X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \quad (2.5)$$

y para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} P[w(X^n, \delta) \geq \epsilon] \right) = 0 \quad (2.6)$$

entonces $X^n \Rightarrow_n X$.

Demostración: La demostración se encuentra en [2]. .

Capítulo 3

Teorema de Donsker

En el siguiente capítulo mostraremos el concepto de medida de Wiener y se construirá el mapeo adecuado para la demostración del teorema de Donsker.

3.1. Medida de Wiener

Definición 3.1.1. Una medida de probabilidad en (C, \mathcal{C}) , es llamada medida de Wiener si satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada $t \in [0, 1]$, la variable aleatoria x_t ($x_t = Z_t$); se distribuye normal con media cero y varianza t , es decir

$$W(x_t \leq \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2t} du \quad (3.1)$$

Si $t = 0$, tenemos $W(x_0 = 0) = 1$

2. El proceso estocástico $\{x_t : t \in [0, 1]\}$ tiene incrementos independientes, es decir, si

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1 \quad (3.2)$$

entonces las variables aleatorias

$$x_{t_1} - x_{t_0}, x_{t_2} - x_{t_1}, \dots, x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \quad (3.3)$$

son independientes.

La proyección definida por π_t definida por $\pi_t(x) = x(t) = x_t$ con $x \in C$ es una variable aleatoria sobre (C, \mathcal{C}) . Así $\{x_t : 0 \leq t \leq 1\}$ es un proceso estocástico y llamaremos a x_t función coordenada o variable coordenada.

Definimos la función aleatoria de la variable coordenada en (C, \mathcal{C}, W) , como

$$\begin{aligned} Z : C &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto Z(x) = x \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} x : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto Z_t(x) = x(t) = x_t \end{aligned}$$

Proposición 3.1.2. El proceso $\{Z_t : t \in [0, 1]\}$ (proceso de la variable coordenada) en (C, \mathcal{C}, W) es un movimiento browniano.

Demostración: Veamos que satisface las condiciones del movimiento browniano.

1. Por (3.1) tenemos que si $t = 0$ entonces $W(Z_0 = 0) = 1$
2. Como $\{Z_t : t \in [0, 1]\}$ son elementos de C , entonces $\forall t \in [0, 1]$ Z_t tienen trayectorias continuas.
3. Por (3.3) tenemos que $\{Z_t : t \in [0, 1]\}$ tiene incrementos independientes.
4. Veamos que para cualesquiera $0 \leq s < t \leq 1$, $Z_t - Z_s$ tiene distribución normal con media cero y varianza $t - s$.

La función característica φ_X de una variable aleatoria X , se define como $\varphi_X(t) = \mathbb{E} [e^{itX}]$. Veamos que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2 / 2}$

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E} [e^{itX}] = M_X(it) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} e^{itx} dx = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2 / 2}$$

Sea $0 \leq s < t \leq 1$; dado la definición de medida de Wiener y lo anterior tenemos que

$$\varphi_{Z_s}(u) = e^{-su^2/2} \quad \varphi_{Z_t}(u) = e^{-tu^2/2}$$

además

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_t}(u) &= \mathbb{E} [e^{iuZ_t}] \\ &= \mathbb{E} [e^{iu(Z_t - Z_s + Z_s)}] \\ &= \mathbb{E} [e^{iu(Z_t - Z_s)} e^{iuZ_s}] \\ &= \mathbb{E} [e^{iu(Z_t - Z_s)}] \mathbb{E} [e^{iuZ_s}] \quad (\text{independencia}) \\ &= \varphi_{Z_t - Z_s}(u) \varphi_{Z_s}(u) \end{aligned}$$

por tanto

$$\varphi_{Z_t - Z_s}(u) = \frac{\varphi_{Z_t}(u)}{\varphi_{Z_s}(u)} = \frac{e^{-tu^2/2}}{e^{-su^2/2}} = e^{-u^2(t-s)/2}$$

por tanto $\varphi_{Z_t - Z_s} \sim N(0, t - s)$

□

Proposición 3.1.3. Dada la existencia de la medida de Wiener en (C, \mathcal{C}) , esta es única.

Demostración: Sea W y W' medidas de Wiener en (C, \mathcal{C}) , (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $\{N_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d, distribuidas Normal con media cero y varianza 1.

Sea $A \in C_f$ arbitrario, esto es que existe $H \in \mathcal{R}^k$ tal que $\pi_{t_1 \dots t_k}^{-1}(H) = A$. Así tenemos que

$$\begin{aligned}
W(A) &= W(\pi_{t_1 \dots t_k}^{-1}(H)) \\
&= W(\pi_{t_1 \dots t_k} \circ Z)^{-1}(H) \\
&= W[\omega : (\pi_{t_1 \dots t_k} \circ Z)(\omega) \in H] \\
&= W[(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_k}) \in H] \\
&= W \circ (Z_{t_1}, \dots, Z_{t_k})^{-1}(H) \\
&= P \circ \left(N_1 \sqrt{t_1}, N_1 \sqrt{t_1} + N_2 \sqrt{t_2 - t_1}, \dots, \sum_{i=1}^k N_i \sqrt{t_i - t_{i-1}} \right)^1 (H)
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
W'(A) &= W' \circ (Z_{t_1}, \dots, Z_{t_k})^{-1}(H) \\
&= P \circ \left(N_1 \sqrt{t_1}, N_1 \sqrt{t_1} + N_2 \sqrt{t_2 - t_1}, \dots, \sum_{i=1}^k N_i \sqrt{t_i - t_{i-1}} \right)^{-1} (H)
\end{aligned}$$

Así $W(A) = W'(A)$ para cada $A \in C_f$; y por la proposición 2.3.8 tenemos que $W = W'$, por lo que la medida de Wiener es única. □

Definición 3.1.4. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos el siguiente mapeo

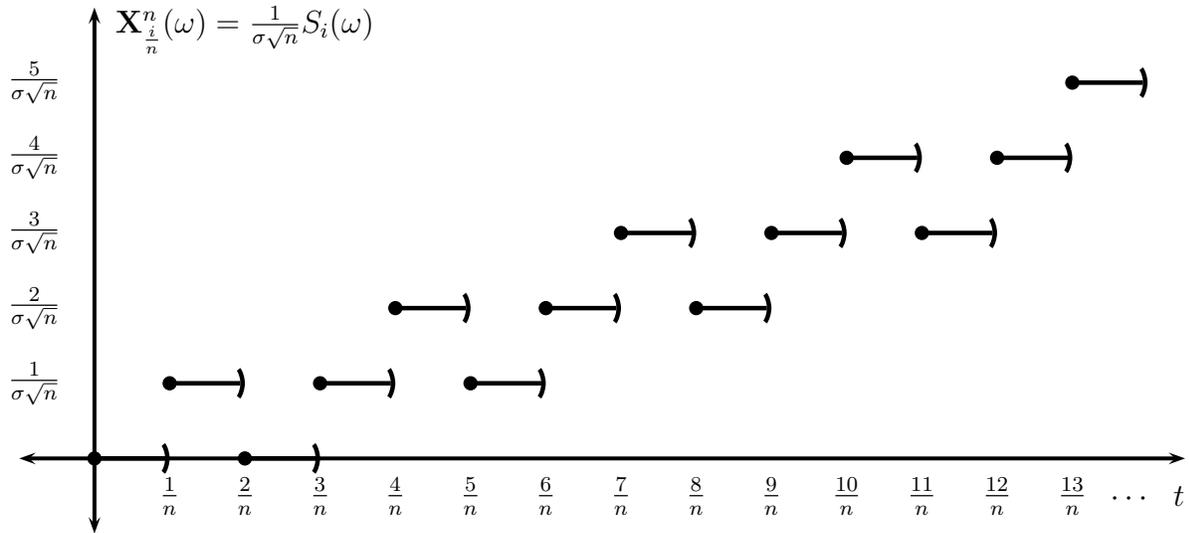
$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^n : \Omega &\longrightarrow C \\
\omega &\longmapsto \mathbf{X}^n(\omega)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^n(\omega) : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
t &\longmapsto \mathbf{X}_t^n(\omega)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Sea ξ_1, ξ_2, \dots , variables aleatorias i.i.d con media cero y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$ en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Sea $S_0 = 0$ y $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ un paseo aleatorio. Para $\frac{i}{n} \in [0, 1]$ definamos

$$\mathbf{X}_{\frac{i}{n}}^n(\omega) = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} S_i(\omega) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n$$



Ahora para $t \neq \frac{i}{n}$, se define $\mathbf{X}_t^n(\omega)$ por interpolación lineal de la siguiente manera:

Si $t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t^n(\omega) - \mathbf{X}_{\frac{i-1}{n}}^n(\omega) &= \frac{\mathbf{X}_{\frac{i}{n}}^n - \mathbf{X}_{\frac{i-1}{n}}^n(\omega)}{\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}} \left(t - \frac{(i-1)}{n} \right) \\ \mathbf{X}_t^n(\omega) &= \mathbf{X}_{\frac{i-1}{n}}^n(\omega) \left[\frac{-\left(t - \frac{(i-1)}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + 1 \right] + \mathbf{X}_{\frac{i}{n}}^n(\omega) \left[\frac{t - \frac{(i-1)}{n}}{\frac{1}{n}} \right] \\ \mathbf{X}_t^n(\omega) &= \mathbf{X}_{\frac{i-1}{n}}^n(\omega) n \left(\frac{i}{n} - t \right) + \mathbf{X}_{\frac{i}{n}}^n(\omega) \left[\frac{t - \frac{(i-1)}{n}}{\frac{1}{n}} \right] \end{aligned}$$

veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} n \left(\frac{i}{n} - t \right) \mathbf{X}_{\frac{i-1}{n}}^n(\omega) &= (i - nt - 1 + 1) \mathbf{X}_{\frac{i-1}{n}}^n(\omega) \\ &= -n \left(t - \frac{(i-1)}{n} \right) \frac{S_{i-1}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{S_{i-1}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} \end{aligned}$$

por lo tanto

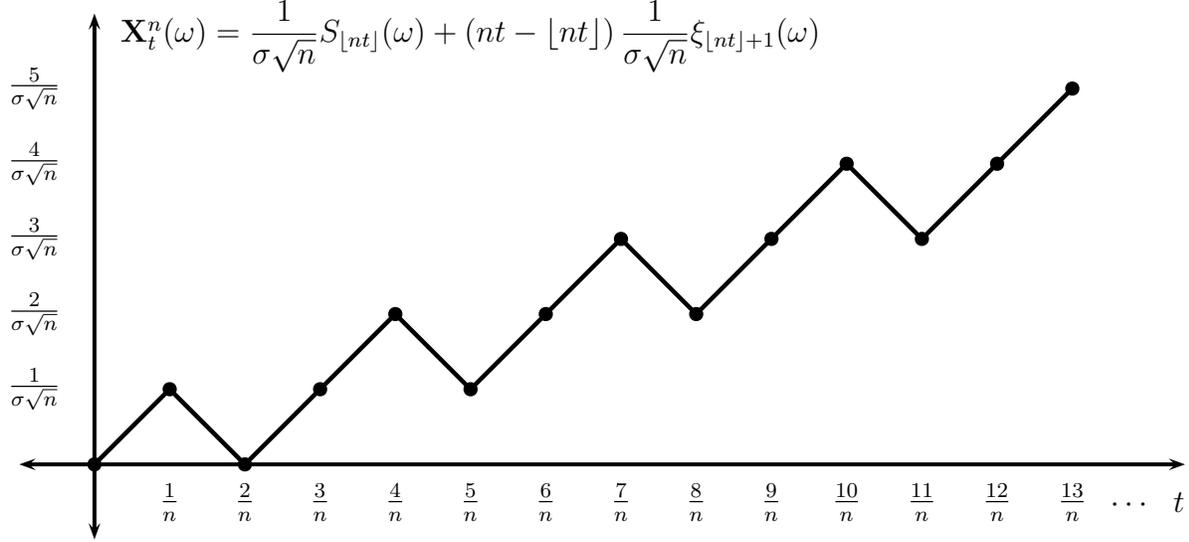
$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t^n(\omega) &= -n \left(t - \frac{(i-1)}{n} \right) \frac{S_{i-1}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{S_{i-1}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} + n \left(t - \frac{(i-1)}{n} \right) \frac{S_{i-1}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} + n \left(t - \frac{(i-1)}{n} \right) \frac{\xi_{i-1}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= \frac{S_{i-1}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} + n \left(t - \frac{(i-1)}{n} \right) \frac{\xi_{i-1}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} \end{aligned}$$

ahora bien, dado que $t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ entonces $i-1 = [nt]$ y por tanto tenemos

$$\mathbf{X}_t^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{[nt]+1}(\omega) \quad (3.6)$$

Así para cada $\omega \in \Omega$ y cada $n \in \mathbb{N}$, en cada subintervalo $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$, \mathbf{X}_t^n es una función lineal.

Como las ξ_i y las S_i son variables aleatorias, entonces (3.6) define una variable aleatoria para cada t , por tanto \mathbf{X}^n es una función aleatoria.



3.2. Teorema de Donsker

Lema 3.2.1. Sea $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d con media cero y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$ en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un paseo aleatorio y $\{\mathbf{X}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida como en (3.6). Si

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^2 P \left(\max_{i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n} \right) \right) = 0 \quad (3.7)$$

entonces el conjunto de distribuciones $\{\mu_{\mathbf{X}^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *rígida*.

Demostración: La demostración se encuentra en [2]

Teorema 3.2.2. (Teorema de Donsker) Sea $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d con media cero y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$ definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $\{\mathbf{X}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida como en (3.6). Si la medida de Wiener W existe, entonces $\{\mathbf{X}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribución a la función coordenada Z en (C, \mathcal{C}, W) ($\mathbf{X}^n \Rightarrow_n W$).

Demostración: Probaremos el teorema usando el teorema 2.3.8.

Primero mostremos que \mathbf{X}^n y Z satisfacen (2.5), es decir, $(\mathbf{X}_{t_1}^n, \dots, \mathbf{X}_{t_k}^n) \Rightarrow_n (Z_{t_1}, \dots, Z_{t_k})$; esto es

$$\pi_{t_1 \dots t_k} \circ \mathbf{X}^n \xrightarrow{d} \pi_{t_1 \dots t_k} \circ Z.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0, 1]$, definamos

$$\phi_{n,t} := \frac{S_{[nt]}(\omega)}{\sigma \sqrt{n}} \quad \psi_{n,t}(\omega) := \frac{nt - [nt]}{\sigma \sqrt{n}} \xi_{[nt]+1}(\omega)$$

Sea $0 \leq s < t \leq 1$ y $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Ahora como

$$\mathbf{X}_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]} + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{[nt]+1} \quad (3.8)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t^n - \mathbf{X}_s^n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]} + (nt - [nt])\frac{1}{\sigma}\xi_{[nt]+1} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[ns]} + (ns - [ns])\frac{1}{\sigma}\xi_{[ns]+1} \\ &= \phi_{n,t} + \psi_{n,t} - \phi_{n,s} - \psi_{n,s} \\ &= (\phi_{n,t} - \phi_{n,s}) - (\psi_{n,t} - \psi_{n,s}) \end{aligned}$$

como los ξ_i tienen medida cero, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi_{n,t} - \psi_{n,s}] &= \mathbb{E}[\psi_{n,t}] - \mathbb{E}[\psi_{n,s}] \\ &= \int_{\Omega} \psi_{n,t} dP - \int_{\Omega} \psi_{n,s} dP \\ &= \frac{(nt - [nt])}{\sigma\sqrt{n}} \int_{\Omega} \xi_{[nt]+1} dP - \frac{(ns - [ns])}{\sigma\sqrt{n}} \int_{\Omega} \xi_{[ns]+1} dP \\ &= \frac{(nt - [nt])}{\sigma\sqrt{n}} \mathbb{E}[\xi_{[nt]+1}] - \frac{(ns - [ns])}{\sigma\sqrt{n}} \mathbb{E}[\xi_{[ns]+1}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\psi_{n,t} - \psi_{n,s}] &= \mathbb{E}[(\psi_{n,t} - \psi_{n,s})^2] - \mathbb{E}[\psi_{n,t} - \psi_{n,s}]^2 \\ &= \mathbb{E}[\psi_{n,t}^2 - 2\psi_{n,t}\psi_{n,s} + \psi_{n,s}^2] - 0 \\ &= \mathbb{E}[\psi_{n,t}^2] - 2\mathbb{E}[\psi_{n,t}\psi_{n,s}] + \mathbb{E}[\psi_{n,s}^2] \end{aligned}$$

por hipótesis tenemos que

$$\sigma^2 = \text{Var}[\xi_{[nt]+1}] = \mathbb{E}[\xi_{[nt]+1}^2] - \mathbb{E}[\xi_{[nt]+1}]^2 = \mathbb{E}[\xi_{[nt]+1}^2]$$

así

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi_{n,t}^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{(nt - [nt])^2}{\sigma^2 n} \xi_{[nt]+1}^2\right] \\ &= \frac{(nt - [nt])^2}{\sigma^2 n} \mathbb{E}[\xi_{[nt]+1}^2] \\ &= \frac{(nt - [nt])^2}{\sigma^2 n} \sigma^2 \\ &= \frac{(nt - [nt])^2}{n} \\ &< \frac{1}{n} \quad (\text{pues } \forall x \in \mathbb{R} \ x - [x] < 1) \end{aligned}$$

Similarmente $\mathbb{E}[\psi_{n,s}^2] < \frac{1}{n}$.

Ahora

$$\begin{aligned}
 -2\mathbb{E} [\psi_{n,t} \psi_{n,s}] &= -2\mathbb{E} \left[\frac{(nt - \lfloor nt \rfloor)}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \frac{(ns - \lfloor ns \rfloor)}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{\lfloor ns \rfloor + 1} \right] \\
 &= \frac{-2(nt - \lfloor nt \rfloor) (ns - \lfloor ns \rfloor)}{\sigma^2 n} \int_{\Omega} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \xi_{\lfloor ns \rfloor + 1} d\mathbb{P} \\
 &= \frac{-2(nt - \lfloor nt \rfloor) (ns - \lfloor ns \rfloor)}{\sigma^2 n} \mathbb{E} [\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}]
 \end{aligned}$$

- Si $\lfloor nt \rfloor + 1 = \lfloor ns \rfloor + 1$ entonces $\mathbb{E} [\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}^2] = \sigma^2 > 0$
y así

$$\begin{aligned}
 -2\mathbb{E} [\psi_{n,t} \psi_{n,s}] &= \frac{-2(nt - \lfloor nt \rfloor) (ns - \lfloor ns \rfloor)}{\sigma^2 n} \sigma^2 \\
 &= \frac{-2(nt - \lfloor nt \rfloor) (ns - \lfloor ns \rfloor)}{n} \\
 &< \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

- Si $\lfloor nt \rfloor + 1 \neq \lfloor ns \rfloor + 1$ entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}] &= \mathbb{E} [\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}] \mathbb{E} [\xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}] && \text{(pues los } \xi_i \text{ son i.i.d)} \\
 &= 0 * 0 = 0
 \end{aligned}$$

por lo que obtenemos que $\mathbb{E} [\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}] \geq 0$ y así $-2\mathbb{E} [\psi_{n,t} \psi_{n,s}] \leq 0 < \frac{1}{n}$, $n > 0$.

por tanto $\text{Var}[\psi_{n,t} - \psi_{n,s}] < \frac{3}{n}$

Veamos que $\psi_{n,t} \xrightarrow{p} 0$

Sea $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} (|\psi_{n,t} - \psi_{n,s} - 0| < \epsilon) &= 1 - \mathbb{P} (|\psi_{n,t} - \psi_{n,s} - 0| \geq \epsilon) \\
 &> 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} && \text{(desigualdad de Chebychev)} \\
 &> 1 - \frac{3}{\epsilon^2 n} \\
 &\rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

esto es que $\psi_{n,t} - \psi_{n,s} \xrightarrow{p} 0$ lo que implica que $\psi_{n,t} - \psi_{n,s} \xrightarrow{d} 0$.

Ahora

$$\begin{aligned}
\phi_{n,t} - \phi_{n,s} &= \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{S_{[ns]}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]} - S_{[ns]}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{[nt]} \xi_i - \sum_{j=1}^{[ns]} \xi_j}{\sigma\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} \xi_j}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{j=1}^{[nt]-[ns]} \xi_j}{\sigma\sqrt{n}} \quad (\text{las } \xi_i \text{ son estacionarias}) \\
&= \frac{S_{[nt]-[ns]}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{[nt]-[ns]}}{\sqrt{n}} \frac{S_{[nt]-[ns]}}{\sigma\sqrt{[nt]-[ns]}}
\end{aligned}$$

vemos que por el teorema del límite central $\frac{S_{[nt]-[ns]}}{\sigma\sqrt{[nt]-[ns]}}$ converge en distribución a una

$$\begin{aligned}
N(0, 1) := N \text{ y como } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{[nt]-[ns]}}{\sqrt{n}} &= \sqrt{t-s} \text{ (convergencia casi-segura), entonces} \\
\frac{\sqrt{[nt]-[ns]}}{\sqrt{n}} &\xrightarrow{p} \sqrt{t-s}.
\end{aligned}$$

Por teorema de Slutsky tenemos que $\phi_{n,t} - \phi_{n,s} \xrightarrow{d} N\sqrt{t-s}$ y de nuevo aplicando Slutsky se tiene que $\mathbf{X}_t^n - \mathbf{X}_s^n \xrightarrow{d} N\sqrt{t-s} + 0$.

Si tomamos $s = 0$, obtenemos que $\mathbf{X}_t^n - \mathbf{X}_0^n = \mathbf{X}_t^n - 0 \xrightarrow{d} N\sqrt{t}$.

Sea $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1$ Ahora

$$(\mathbf{X}_{t_1}^n, \mathbf{X}_{t_2}^n - \mathbf{X}_{t_1}^n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (S_{[nt_1]}, S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}) + (\psi_{n,t_1}, \psi_{n,t_2} - \psi_{n,t_1}) \xrightarrow{d} (N_1, N_2)$$

Donde N_1, N_2 son independientes y normales con media cero y varianzas t_1 y $t_2 - t_1$ respectivamente. Haciendo esto inductivamente hasta t_k obtenemos que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}_{t_1}^n, \dots, \mathbf{X}_{t_k}^n) &= (\mathbf{X}_{t_1}^n, \mathbf{X}_{t_2}^n - \mathbf{X}_{t_1}^n, \mathbf{X}_{t_3}^n - \mathbf{X}_{t_2}^n, \dots, \mathbf{X}_{t_k}^n - \mathbf{X}_{t_{k-1}}^n) + (0, \mathbf{X}_{t_1}^n, \mathbf{X}_{t_2}^n, \dots, \mathbf{X}_{t_{k-1}}^n) \\
&\xrightarrow{d} (Z_{t_1}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, Z_{t_3} - Z_{t_2}, \dots, Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}) + (0, Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_{k-1}}) \\
&= (Z_{t_1}, Z_{t_2}, Z_{t_3}, \dots, Z_{t_k})
\end{aligned}$$

y esto es

$$\pi_{t_1 \dots t_k} \circ \mathbf{X}^n \xrightarrow{d} \pi_{t_1 \dots t_k} \circ Z$$

Veamos ahora que se cumple (2.6); es decir que para cada $\epsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [w(X^n, \delta) \geq \epsilon] = 0 \tag{3.9}$$

Para esto veamos primero que se cumple (3.7).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea μ_n la distribución de la variable aleatoria $S_n/\sigma\sqrt{n}$. Ahora

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[\xi_1] + \mathbb{E}[\xi_2] + \dots + \mathbb{E}[\xi_n] = 0 \quad (\text{las } \mathbb{E}[\xi_i] = 0)$$

Ahora claramente por el teorema del limite central vemos que $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N$ donde $N = N(0, 1)$; así tenemos que $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_N$.

Para cada $\lambda > 0$, sea $R_\lambda = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \lambda\}$. Podemos ver que $\partial(R_\lambda) = \{x \in \mathbb{R} : |x| = \lambda\}$ por tanto

$$\begin{aligned} \mu_N(\partial(R_\lambda)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\partial(R_\lambda)} e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{-\lambda\}} e^{-u^2/2} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{\lambda\}} e^{-u^2/2} du \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{\lambda\}} e^{-u^2/2} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{\lambda\}} e^{-u^2/2} du \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que para cada $\lambda > 0$, R_λ es un conjunto μ_N -continuo y por teorema 2.1.4 (para distribuciones) tenemos que

$$\mu_k(R_\lambda) \longrightarrow \mu_N(R_\lambda) \quad (3.10)$$

Ahora dado $\lambda > 0$ y N una normal estándar, veamos que $P(|N| \geq \lambda) < 3\lambda^{-4}$.

Sea $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} P(|N| \leq \lambda) &= P(|N| = \lambda) + P(|N| > \lambda) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{-\lambda, \lambda\}} e^{-u^2/2} du + P(|N| > \lambda) \\ &= 0 + P(|N| > \lambda) \end{aligned}$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N^{n+1}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^{n+1} e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^n \left(u e^{-u^2/2} \right) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^{n-1} e^{-u^2/2} du \quad (\text{integrando por partes}) \\ &= n \mathbb{E}[N^{n-1}] \end{aligned}$$

por tanto $\mathbb{E}[|N|^4] = \mathbb{E}[N^4] = 3\mathbb{E}[N^2] = 3(1 \mathbb{E}[N^0]) = 3$.

Así usando la desigualdad de Markov obtenemos que

$$P(|N| \geq \lambda) = P(|N|^4 \geq \lambda^4) < \frac{3}{\lambda^4} = 3\lambda^{-4}$$

y tenemos

$$\mu_N(R_\lambda) = P(|N| \geq \lambda) < 3\lambda^{-4}$$

y por (3.10) tenemos que para cada $\lambda > 0$, existe $k_\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_\lambda$, entonces

$$\mu_N(R_\lambda) = \mu_k(R_\lambda) = \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_k}{\sigma\sqrt{n}} \right| \geq \lambda \right) = \mathbb{P} (|S_k| \geq \sigma\sqrt{n}\lambda) < 3\lambda^{-4} \quad (3.11)$$

Tomando $n \geq k_\lambda$ y $1 \leq k \leq n$ tenemos dos casos

- Si $1 \leq k < k_\lambda$. Así tenemos.

$\text{Var}(S_k) = k\sigma^2$ (pues las ξ_i son i.i.d), y por desigualdad de Chebychev tenemos que

$$\mathbb{P} (|S_k - \mathbb{E}[S_k]| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) = \mathbb{P} (|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) \leq \frac{k\sigma^2}{\lambda^2\sigma^2n} = \frac{k}{\lambda^2n} < \frac{k_\lambda}{\lambda^2n}$$

- Si $k_\lambda \leq k \leq n$. Se tiene por la monotonicidad de las medidas y de (3.11)

$$\mathbb{P} (|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) \leq \mathbb{P} (|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{k}) < 3\lambda^{-4}$$

Así

$$\max_{i \leq n} \mathbb{P} (|S_i| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) < \max \left\{ \frac{k_\lambda}{n\lambda^2}, \frac{3}{\lambda^4} \right\}$$

y multiplicando por λ^2 tenemos

$$\lambda^2 \max_{i \leq n} \mathbb{P} (|S_i| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) < \max \left\{ \frac{k_\lambda}{n}, \frac{3}{\lambda^2} \right\}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda^2 \max_{i \leq n} \mathbb{P} (|S_i| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) \right) < \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\max \left\{ \frac{k_\lambda}{n}, \frac{3}{\lambda^2} \right\} \right) = \frac{3}{\lambda^2}$$

y finalmente si tendemos $\lambda \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda^2 \max_{i \leq n} \mathbb{P} (|S_i| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}) \right) \right] = 0$$

Así obtenemos la rigidez de $\{\mu_{\mathbf{X}^n}\}$ y por la demostración del lema 3.1.5 obtenemos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [w(X^n, \delta) \geq \epsilon] \right) = 0 \quad (3.12)$$

Así tenemos que $\mathbf{X}^n \xrightarrow{d} Z$ ($\mathbf{X}^n \Rightarrow_n W$).

□

3.3. Teorema de Donsker (Modelado)

En la sección anterior mostramos de que manera un paseo aleatorio converge débilmente a un movimiento browniano (teorema de Donsker).

En esta sección, se expondrá un programa hecho en el lenguaje Python el cual verificara la convergencia débil de los paseos aleatorios.

Recordemos que para cumplir las hipótesis del teorema de Donsker, necesitamos que las $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sean variables aleatorias i.i.d con media cero y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$. Para la simulación del teorema usaremos las siguientes distribuciones:

D	Distribución de las ξ_n
1	Normal con media 0 y varianza $a > 0$
2	Uniforme en $[-a, a]$, ($a > 0$)
3	T de student con parámetro $a > 2$
4	Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$

El código de la convergencia débil de paseos aleatorios es el siguiente:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def Grafica(D,n,a):
    if D==1:
        L=np.random.normal(0,a,n) # Normal
        m=0
        v=a
    if D==2:
        L=np.random.uniform(-a,a,n) # Uniforme
        v=((2*a)**2/12)

    if D==3:
        L=np.random.standard_t(a,n) # T de student
        v=a/(a-2)

    if D==4:
        L=np.random.binomial(1,0.5,n) # Bernoulli

        for i in range(len(L)):
            if L[i]==0:
                L[i]=-1
        v=1

    L=L/(np.sqrt(v*n))
    Xn=np.zeros(len(L)+1)
    Xn[1:]=np.cumsum(L)

    x=np.arange(0,n+1,1)
    x=x/n

    plt.plot(x,Xn)
    plt.plot(x,Xn,"o")

    print(Grafica(D,n,a))

```

Vemos que D representa el tipo de distribución que queremos utilizar. Luego L es el valor que toma la distribución ($L = np.random.normal(0, a, n)$), es decir $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ y definimos $L = \frac{L}{\sqrt{\sigma^2 n}} = \frac{L}{\sigma\sqrt{n}}$, donde $\sigma^2=v$ (varianza) y n es el tamaño de la muestra, obteniendo así

$$L = \left(\frac{\xi_1}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{\xi_2}{\sigma\sqrt{n}}, \dots, \frac{\xi_n}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

Creamos un vector lleno de ceros de longitud L para luego aplicar la función *cumsum* de tal forma que

$$X_n = \left(0, \frac{S_1}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{S_2}{\sigma\sqrt{n}}, \dots, \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

La primera coordenada es 0, para iniciar en el origen. Finalmente definimos x como la partición $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right)$. La función *plot(x, X_n, "o")* nos imprime el conjunto de puntos

$$\left\{ \left(\frac{i}{n}, \frac{S_i(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right\}_{i=0}^n$$

y la función *plot(x, X_n)* nos imprime una interpolación de dichos puntos.

Mostremos ahora gráficamente el funcionamiento del algoritmo:

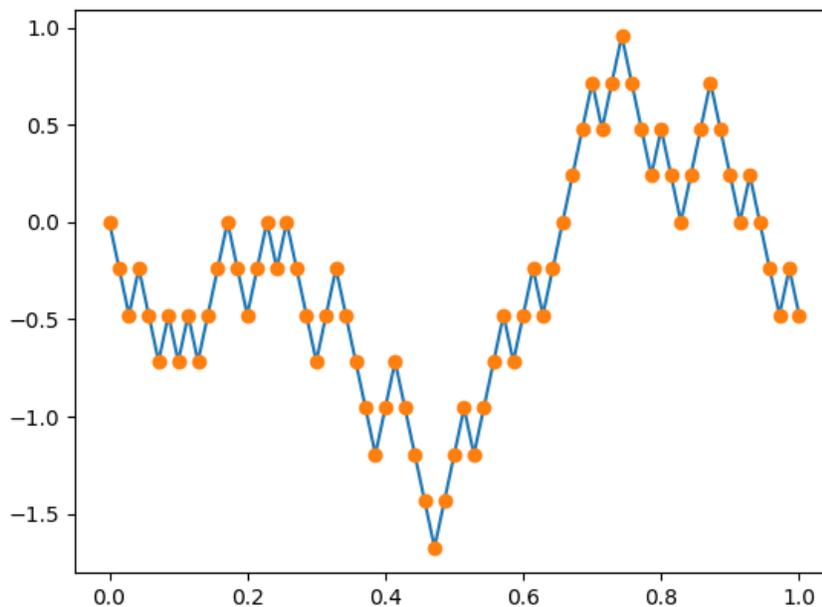


Figura 3.1: D=4, n=70, Bernoulli

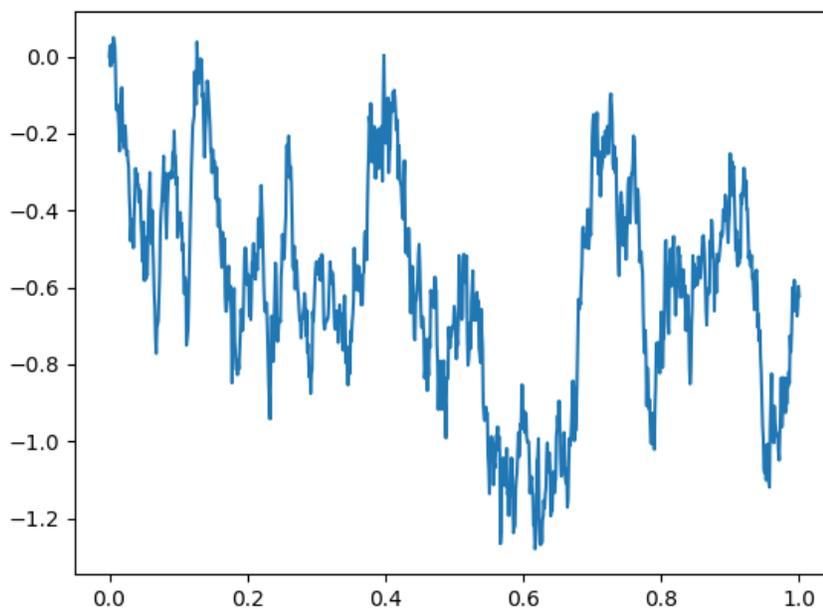


Figura 3.2: $D=1$, $n=1000$, $a=4$, Normal

- En la figura 3.1, caso donde tomamos la distribución Bernoulli "a" puede tomar cualquier valor, pues en esta parte no se trabaja con ella.
- En la figura 3.2, caso donde tomamos la distribución Normal, vemos que si tomamos n mucho mas grande, se plasma con mayor claridad el movimiento browniano.

Capítulo 4

Conclusiones

- Los resultados de transitoriedad y recurrencia nos ofrecen una clasificación de los estados de un paseo aleatorio. Si

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}[S_n^x = y \text{ infinitas veces}] = 0, \text{ si } p \neq q,$$

el estado y es transitorio.

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}[S_n^x = y \text{ infinitas veces}] = 1, \text{ si } p = q = \frac{1}{2}, \quad (4.1)$$

el estado y es recurrente

- En vista que el **teorema 2.3.9** es indispensable en la demostración del teorema de Donsker, es necesario definir el *módulo de continuidad* x , ya que dicho teorema depende de este.
- Al definir $\mathbf{X}_{\frac{1}{n}}^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_t(\omega)$, se construye por interpolación lineal la función

$$\mathbf{X}_t^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{[nt]+1}(\omega)$$

la cual hace converger débilmente el paseo aleatorio hacia un movimiento browniano.

- La simulación nos muestra que tomando datos reales que puedan estimarse bajo una distribución conocida, el teorema de Donsker funciona sin ningún problema.

Bibliografía

- [1] Rabi N Bhattacharya y Edward C Waymire. *Stochastic processes with applications*. Vol. 61. Siam, 2009.
- [2] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, 2013.
- [3] Liliana Blanco y Myriam Muñoz. «Análisis estocástico». En: *Colombia: Unibiblos Universidad Nacional* (2003).
- [4] Liliana Blanco Castañeda, Viswanathan Arunachalam y Selvamuthu Dharmaraja. *Introduction to probability and stochastic processes with applications*. Wiley Online Library, 2012.
- [5] Pierre Yves Gaudreau Lamarre. «Donskers Theorem». En: *Universidad de Ottawa* (2012).
- [6] Luis Rincón. «Introducción a los procesos estocásticos». En: *Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México* (2012).
- [7] John B Walsh. *Knowing the odds: an introduction to probability*. Vol. 139. American Mathematical Soc., 2012.