Propiedad de Consistencia de las Distribuciones Elípticas

Autor:
Ricardo López Jiménez

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático

Director:
Dr. Raúl Alejandro Morán Vásquez

Universidad de Antioquia
Instituto de Matemáticas

2020

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi familia y esposa por todo su apoyo incondicional en mi vida, en particular durante el estudio. También quiero agradecer a todos y cada uno de mis compañeros y docentes que fueron parte de mi formación en el Pregrado de Matemáticas, todos ellos hicieron grandes aportes en mi formación académica y personal. Por último, y no menos importante, agradezco a mi asesor Raúl Alejandro Morán Vásquez por su buena voluntad y dedicación en la orientación de este trabajo de grado, también a mis compañeros Alejandro Quintero Mejía y Juan David Piedrahita por su compañía y amistad.

Dedicatoria especial a mi madre, que siempre ha soñado con un hijo profesional, es un honor ser el primero que le da esta alegría. También a mi hija que nació finalizando el pregrado alegrando mi vida.

Resumen

En este trabajo estudiamos una propiedad fundamental de las distribuciones elípticas, la propiedad de consistencia. En el primer capítulo, estudiamos resultados de álgebra lineal y probabilidad fundamentales para la comprensión de las distribuciones elípticas, las cuales tratamos en el segundo capítulo y mostramos sus principales propiedades. Centramos nuestro estudio en la subclase conformada por las distribuciones que son mezclas de distribuciones normales multivariadas, para la cual, analizamos la estructura de su función de densidad de probabilidad y estudiamos varios de sus miembros como por ejemplo las distribuciones normal, t, exponencial potencia y slash multivariadas. En el tercer capítulo, estudiamos la propiedad de consistencia, la cual consiste de una caracterización de las distribuciones que son mezclas de distribuciones normales multivariadas. Posterior a esto, mostramos ejemplos y conclusiones.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La estadística es una área de estudio que se encarga de buscar métodos para analizar e interpretar datos. Esta se ha convertido en una ciencia muy importante para profesionales de otras disciplinas. La estadística comienza como una técnica de conteo hasta que en el siglo XVII se comienza a desarrollar de forma teórica basándose en el análisis cuantitativo, logrando recoger, describir y analizar información, sin embargo, dicha área obtuvo su gran transformación cuando se vinculó al cálculo de probabilidades, logrando no sólo describir la realidad basándose en una recopilación de datos sino también para modelar a través de algunos métodos del análisis matemático [3] [10].

A partir de 1950 empieza la estadística moderna dando lugar a modelos más complejos, como los modelos dinámicos y multivariados. Dentro de los modelos multivariados, se encuentra la distribución normal multivariada [9], también llamada distribución gaussiana multivariada, la cual ha sido fundamental para el modelado de datos en diferentes áreas de estudio, sin embargo, los estadísticos se han dedicado a extender dicha teoría a casos más generales logrando así plantear nuevos modelos, como los modelos lineales generalizados. También, alrededor de 1970 se planteó la clase de distribuciones elípticas, la cual es una clase general de distribuciones que tiene como miembros a las distribuciones normal, t y slash multivariadas, entre muchas otras.

La clase de distribuciones elípticas proporciona una alternativa y una generalización de la distribución normal, dando origen a lo que hoy se denomina Análisis Multivariado Generalizado [9]. Como principal subclase de la clase de distribuciones elípticas esta la mezcla de escala de distribuciones normales multivariadas, la cual posee propiedades teóricas muy atractivas y tiene como miembros distribuciones de colas pesadas que facilitan la estimación de sus parámetros y permiten la manipulación de datos atípicos.

En este trabajo estudiamos la clase de distribuciones elípticas y profundizamos en la subclase de mezcla de escala de distribuciones normales multivariadas, cuya función de densidad de probabilidad es una combinación convexa de varias distribuciones. Mostramos varios ejemplos de algunas distribuciones que pertenecen a la clase de mezclas a escala de distribuciones normales multivariadas, entre las cuales están las distribuciones normal, t , slash y exponencial potencia para algunos valores de sus parámetros, entre otras.

Por ultimo estudiamos la propiedad de consistencia, la cual nos proporciona condiciones para que dentro de la clase elíptica se preserven familias bajo marginalización. Se prueba un teorema fundamental que permite verificar por medio del modelo de mezclas, cuando una distribución multivariada posee tal propiedad. Finalmente se muestran algunos ejemplos sobre la propiedad de consistencia.

Capítulo 2

Preliminares

En este capitulo introducimos notaciones y conceptos necesarios para el desarrollo teórico de este trabajo.

Las variables aleatorias se denotarán en letra latina mayúscula (por ejemplo X), los valores observados en letra minúscula (por ejemplo x), sin embargo, para una mayor facilidad y no causar una confusión, los vectores aleatorios se denotarán en letra mayúscula pero en negrilla (por ejemplo $\boldsymbol{X}$), y sus valores observados en letra minúscula en negrilla (por ejemplo $\boldsymbol{x}$).

2.1. Algunos Conceptos de Álgebra Lineal

A continuación definimos una serie de conceptos del álgebra lineal.

- Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, al vector $\boldsymbol{a}_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)'$, donde las componentes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales, lo llamaremos **vector $\boldsymbol{n}$-dimensional**. Cuando no hay ninguna confusión sobre la dimensión del vector usamos la notación $\boldsymbol{a}$. Denotamos por $\boldsymbol{a}_{-k}$ al vector $\boldsymbol{a}$ excluyendo su k-esima componente, es decir, $\boldsymbol{a}_{-k} \in \mathbb{R}^{n-1}$.

- Un vector de orden n cuyas componentes son todas iguales a uno es llamado **vector de unos** y se escribe $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n = (1, \ldots, 1)'$.

- Una **matriz** es un arreglo rectangular de números reales, donde las entradas de esta se ordenan en filas y columnas. A una matriz de n filas y p columnas se le denomina matriz de dimensión n por p $(n \times p)$ y se denota por

$$\boldsymbol{A}_{n\times p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = (a_{ij}),$$

cuando $n = p$ decimos que $\boldsymbol{A}$ (o $\boldsymbol{A}_n$) es una matriz cuadrada de orden n. Dada una matriz $\boldsymbol{A}$ de dimensión $n \times p$, la matriz que obtenemos al intercambiar filas por columnas (matriz de dimensión $p \times n$) la llamamos **matriz transpuesta** y la denotamos por $\boldsymbol{A}' = (a_{ji})$.

- El **vector cero** es un vector cuyas componentes son todas iguales a cero, denotado por $\mathbf{0} = (0, .., 0)'$. Similarmente, la **matriz cero** es una matriz cuyas entradas son todas iguales a cero, se denota por $\mathbf{0} = (0)_{ij}$.

- La **matriz identidad**, denotada por $\boldsymbol{I}$ o $\boldsymbol{I}_n$, es una matriz cuyas entradas a_{ij} son tales que $a_{ii} = 1$ y $a_{ij} = a_{ji} = 0$, para $i, j = 1, \ldots, n$.

- La **matriz inversa** de una matriz cuadrada no singular $\boldsymbol{A}$ de orden n ($\boldsymbol{A}$ es no singular si su determinante es no nulo), es una matriz de orden n denotada por $\boldsymbol{A}^{-1}$, tal que: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$.

- Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz (cuadrada o rectangular). $\boldsymbol{B}$ es una matriz **inversa generalizada** de $\boldsymbol{A}$, si $\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}$.

- La **traza** de una matriz cuadrada n-dimensional $\boldsymbol{A}$ se define como

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- La matriz n-dimensional $\boldsymbol{A}$ es **definida positiva** si para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0,$$

y se denota por $\boldsymbol{A} > 0$.

- La matriz n-dimensional $\boldsymbol{A}$ es **semidefinida positiva** si para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0,$$

y se denota por $\boldsymbol{A} \geq 0$.

- El **rango** de una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de orden n, es el número máximo de columnas (o filas) de $\boldsymbol{A}$ que son linealmente independientes (un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de ellos puede se puede escribir como una combinación lineal de los restantes.), y lo denotamos por $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

- El grupo ortogonal de matrices de orden n, denotado por $\mathcal{O}(n)$, es definido como $\mathcal{O}(n) = \{\boldsymbol{H}/\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}'\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}_n\}$. Recordemos que una matriz es ortogonal si su inversa y su traspuesta son iguales.

- La **función signo**, se define como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ x > 0. \\ 0, & \text{si } \ x = 0. \\ -1, & \text{si } \ x < 0. \end{cases}$$

2.2. Algunos Conceptos de Probabilidad

En esta sección nos centraremos en algunos conceptos importantes de probabilidad, las cuales son fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

- Denotamos el **valor esperado** de $\boldsymbol{X}$ por $\mathrm{E}(\boldsymbol{X})$. El valor esperado de un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, ...X_n)'$ es un vector n-dimensional donde las componentes son los respectivos valores esperados de cada variable de $\boldsymbol{X}$, es decir,

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = (\mathrm{E}(X_1), \ldots, \mathrm{E}(X_n))'.$$

- La **covarianza** entre las variables X e Y se denota por $\operatorname{Cov}(X, Y)$ y se define como

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])\right].$$

Es fácil mostrar que $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. La matriz de covarianzas de un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ es dada por

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \mathrm{Var}(X_n) \end{bmatrix}.$$

- El **momento** no central de orden α de una variable aleatoria X es dado por $m_\alpha = \mathrm{E}\left[X^\alpha\right]$, siempre y cuando el valor esperado exista.

- Los momentos mixtos no centrales de un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ es dado por

$$m_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \mathrm{E}\left[X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_n^{\alpha_n}\right], \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

- La función de distribución acumulada (**FDA**) de X es dada por $F(x) = P(X \leq x)$.

- Dado $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$, la FDA de $\boldsymbol{X}$ es dada por

$$F(\boldsymbol{x}) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n).$$

- La función de densidad de probabilidad (**FDP**) de una variable aleatoria continua X es dada por $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x)$, donde $F(x)$ es la FDA de X.

- Dado $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$, la FDP de $\boldsymbol{X}$ es dada por

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1, \ldots, \partial x_n} F(\boldsymbol{x}),$$

donde $F(\boldsymbol{x})$ es la FDA de $\boldsymbol{X}$ y las derivadas parciales existen.

- Si X_1 y X_2 son variables aleatorias con FDP $f(x_1, x_2)$, entonces la función de densidad de probabilidad condicional (**FDP condicional**) de X_2 dado $X_1 = x_1$ es dada por

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)},$$

para valores de x_1 tales que $f_1(x_1) > 0$.

- La Función característica (**FC**) de una variable aleatoria X y un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ se define como

$$\phi_X(t) = \mathrm{E}(\exp(itX)), \qquad \phi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \mathrm{E}(\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X})),$$

respectivamente, siempre y cuando el valor esperado exista.

2.2.1. Algunas distribuciones de probabilidad

A continuación, se mencionan algunas algunas distribuciones de probabilidad que se serán necesarias a lo largo del texto.

1. Un vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ tiene distribución normal multivariada con vector de media $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ y matriz de covarianzas definida positiva $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, denotada por $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, si su FDP es dada por

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right], \tag{2.1}$$

donde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. El caso $n = 1$ corresponde a la FDP de una variable aleatoria X con distribución normal con media μ y varianza σ^2, denotada por $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

2. Una variable aleatoria X tiene distribución beta con parámetros α y β, denotada por $X \sim \mathrm{Be}(\alpha, \beta)$, si su FDP es dada por

$$\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad \alpha, \beta > 0, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

donde $\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ es la función beta, siendo $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ la función gamma.

3. Una variable aleatoria X tiene distribución gama con parámetros α y β, denotada por $X \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$, si su FDP es dada por

$$\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \alpha, \beta > 0, \qquad x \geq 0.$$

4. Una variable aleatoria X tiene distribución chi-cuadrado con n grados de libertad, denotada por $X \sim \chi^2_n$, si su FDP es dada por

$$f(x;n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{(n/2)-1} e^{-x/2} \qquad \text{para} \ \ x > 0.$$

5. Una variable aleatoria X tiene distribución t con n grados de libertad, denotada por $X \sim \mathrm{t}_n$, si su FDP es dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{(n\pi)}\Gamma(n/2)} (1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}. \tag{2.2}$$

6. Una variable aleatoria X tiene tiene distribución F con m y n grados de libertad, denotada por $X \sim \mathrm{F}_{m,n}$, si su FDP es dada por

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(\frac{mx}{mx+n}\right)^{m/2} \left(1 - \frac{mx}{mx+n}\right)^{n/2} x^{-1}.$$

   La distribución F se construye como sigue

$$\mathrm{F} = \frac{Z/m}{Y/n},$$

   donde $Z \sim \chi^2_m$ e $Y \sim \chi^2_n$, con Z e Y independientes. Cuando $X \sim \mathrm{F}_{1,n}$ entonces $X \sim (t_n)^2$.

2.2.2. El Operador $\overset{\mathrm{d}}{=}$

Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ tienen la misma distribución, escribimos $\boldsymbol{X} \overset{d}{=} \boldsymbol{Y}$. El operador $\overset{d}{=}$ nos permite tratar un problema directamente en términos de los vectores aleatorios en lugar de sus características o representaciones estocástica. Este operador será fundamental para el estudio de las distribuciones elípticas. A continuación se destacan algunas observaciones importantes de este operador.

1. Si $\boldsymbol{X} \overset{d}{=} \boldsymbol{Y}$ y $f_j(\cdot)$, $\ j = 1, 2, \ldots, m$, son funciones medibles, entonces

$$(f_1(\boldsymbol{X}), \ldots, f_m(\boldsymbol{X})) \overset{d}{=} (f_1(\boldsymbol{Y}), \ldots, f_m(\boldsymbol{Y})).$$

2. Sean $X, \quad Y, \quad Z$ tales que $X \stackrel{d}{=} Y$, entonces no necesariamente se satisface que $Z+X \stackrel{d}{=} Z+Y$, sin embargo, esto será cierto cuando Z es independiente de X e Y.

3. Sean $X, \quad Y, \quad Z$ tales que Z es independiente de X e Y, entonces no siempre es cierto que $X+Z \stackrel{d}{=} Y+Z$ implica que $X \stackrel{d}{=} Y$.

En el siguiente siguiente lema se muestra una condición para que 3 se satisfaga.

Lema 2.1. *Sean $X, \quad Y, \quad Z$ tales que Z es independiente de X e Y. Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

(i) $X \stackrel{d}{=} Y$ *implica* $X+Z \stackrel{d}{=} Y+Z$.

(ii) *Si* $\phi_Z(t) \neq 0$, *casi en todas partes o* $\phi_X(t) \in \mathbf{E}$, *entonces* $X+Z \stackrel{d}{=} Y+Z$ *implica* $X \stackrel{d}{=} Y$.

También están disponibles resultados relativos a productos de variables independientes.

Lema 2.2. *Sean $X, \quad Y, \quad Z$ tales que Z es independiente de X e Y. Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

(i) $X \stackrel{d}{=} Y$ *implica* $XZ \stackrel{d}{=} YZ$.

(ii) *Si* $E(Z^{it})$ *y* $E(|Z|^{it}\operatorname{sgn}(Z))$ *son distintas de cero para casi todo real* t*, entonces* $XZ \stackrel{d}{=} YZ$ *implica* $X \stackrel{d}{=} Y$.

(iii) *Si* $\mathbb{P}(Z>0)=1$, *la FC de* $\{\log X | X>0\}$ *y la FC de* $\{\log(-X) | X<0\}$ *pertenecen a* $\mathbf{E}$, *entonces* $XZ \stackrel{d}{=} YZ$ *implica* $X \stackrel{d}{=} Y$.

Capítulo 3

La Clase de Distribuciones Elípticas

3.1. Definición

La clase de distribuciones elípticas es una extensión de la distribución normal multivariada, que puede ser definida por medio de la distribución normal multivariada estándar como

$$\boldsymbol{X} \overset{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}, \tag{3.1}$$

donde $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$. Como caso particular está clase de distribuciones esféricas, la cuál es una extensión de la distribución normal multivariada estándar.

Primero definiremos la clase de distribuciones esféricas y posteriormente definiremos la clase de distribuciones elípticas.

Definición 3.1. ***(Distribución esférica)***. *Un vector aleatorio* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ *tiene una* ***distribución esférica*** *si para cara* $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathcal{O}(n)$

$$\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{X} \overset{d}{=} \boldsymbol{X}. \tag{3.2}$$

En el Teorema 3.1 presentamos caracterizaciones de las distribuciones esféricas por medio de su FC.

Teorema 3.1. *Un vector* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ *tiene una distribución esférica si y solo si, su función característica (FC)* $\psi(\boldsymbol{t})$ *cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:*

(i) $\psi(\mathbf{\Gamma}'\boldsymbol{t}) = \psi(\boldsymbol{t})$, *para algún* $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{O}(n)$.

(ii) Existe una función $\phi(\cdot)$ *de una variable escalar tal que* $\psi(\boldsymbol{t}) = \phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$.

De ahora en adelante, escribiremos $\boldsymbol{X} \sim S_n(\phi)$ para denotar que $\boldsymbol{X}$ tiene una FC de la forma $\phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$, donde $\phi(\cdot)$ es una función de una variable escalar llamada el **generador característico** de la distribución esférica.

Definición 3.2. ***(Partición de vectores)*** *Sean* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *y* $m < n$. *Los vectores* $\boldsymbol{X}^{(1)} = (X_1, \ldots, X_m)'$ *y* $\boldsymbol{X}^{(2)} = (X_{m+1}, \ldots, X_n)'$, *son una* ***partición*** *del vector* $\boldsymbol{X}$ *y se denota por*

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)})'.$$

De la misma manera se pueden hacer particiones de matrices.

El Teorema 3.2 establece que cualquier subvector de un vector aleatorio con distribución esférica también tiene distribución esférica con el mismo generador característico.

Teorema 3.2. *Si* $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)})' \sim S_n(\phi)$, *con* $\boldsymbol{X}^{(1)} \in \mathbb{R}^m$ *con* $m < n$, *entonces* $\boldsymbol{X}^{(1)} \sim S_m(\phi)$ *y* $\boldsymbol{X}^{(2)} \sim S_{n-m}(\phi)$.

Ejemplo 3.1. ***(Distribución normal multivariada).*** *Sea* $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$. *Debido a que la FC de* X_1 *es* $\exp(-t_1^2/2)$, *entonces la FC de* $\boldsymbol{X}$ *es*

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(t_1^2 + \ldots + t_n^2)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}\right).$$

Por lo tanto, a partir del Teorema 3.1 $\boldsymbol{X} \sim S_n(\phi)$, *con generador característico* $\phi(u) = \exp(-u/2)$.

El Teorema 3.2 muestra que la FC de una distribución esférica es generada por alguna función escalar. Denotemos la familia de todos los posibles generadores característicos para un vector aleatorio $\mathbf{X}$ n-dimensional por

$$\Phi_n = \{\phi(\cdot) : \phi(t_1^2 + \cdots + t_n^2) \quad \text{es una FC } n\text{-dimensional}\}. \tag{3.3}$$

En el Teorema 3.3 presentamos una caracterización de los generadores característicos de un vector aleatorio con distribución en la clase esférica.

Teorema 3.3. *$\phi \in \Phi_n$ si y solo si*

$$\phi(x) = \int_0^\infty \Omega\left(xr^2\right) \mathrm{d}F(r), \tag{3.4}$$

donde $F(\cdot)$ es una FDA sobre $(0,\infty)$ y

$$\Omega_n(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}) = \frac{1}{S_n}\int_S \exp(i\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x})\mathrm{d}S,$$

siendo $S = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n / \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = 1\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y S_n el área de S, es decir, $\Omega_n(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$ es la FC de $\boldsymbol{u}^{(n)}$ ($\boldsymbol{u}^{(n)}$ es un vector aleatorio distribuido uniformemente sobre S).

Demostración. Supongamos que $\phi \in \Phi_n$, entonces $g(t_1,\ldots,t_n) = \phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$ es un FC de algún vector aleatorio $\boldsymbol{Y}$ con FDA $G(\boldsymbol{Y})$, así $g(t_1,\ldots,t_n)$es una función simétrica de $t_1,\ldots,t_n$.

Luego para cada $\boldsymbol{X}$ con $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = ||\boldsymbol{X}||^2 = 1$, tenemos que $g(t_1,\ldots,t_n) = \phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}) = g(||\boldsymbol{t}||X_1,\ldots,||\boldsymbol{t}||X_n)$ y

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}) &= \frac{1}{S_n}\int_S g(||\boldsymbol{t}||X_1,\ldots,||\boldsymbol{t}||X_n)\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{S_n}\int_S \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp(i||\boldsymbol{t}||\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y})\mathrm{d}G(\boldsymbol{Y})\right)\mathrm{d}S \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{S_n}\int_S \exp(i||\boldsymbol{t}||\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y})\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}G(\boldsymbol{Y}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\Omega_n\left(||\boldsymbol{t}||^2||\boldsymbol{Y}||^2\right)\mathrm{d}G(\boldsymbol{Y}).
\end{aligned}$$

Sea $F(u) = \int_{||\boldsymbol{Y}||<u}\mathrm{d}G(\boldsymbol{Y})$, entonces F es una FDA sobre $[0,\infty)$ y

$$\phi(x) = \int_0^\infty \Omega_n(xu^2)\mathrm{d}F(u).$$

Ahora, supongamos que ϕ puede expresarse de la forma (3.4), tomemos una variable aleatoria $r \sim F(x)$ que sea independiente de $\boldsymbol{u}^{(n)}$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\exp(i\boldsymbol{t}'r\boldsymbol{u}^{(n)})) &= \int_0^\infty \mathrm{E}(\exp(ir\boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}^{(n)})\mathrm{d}F(u) \\
&= \int_0^\infty \Omega_n(r^2||\boldsymbol{t}||^2)\mathrm{d}F(r) \\
&= \phi(||\boldsymbol{t}||^2),
\end{aligned}$$

es decir, $\phi(||\boldsymbol{t}||^2)$ es la FC de $r\boldsymbol{u}^{(n)}$ y $\phi \in \Phi_n$. □

El Teorema 3.4 presenta un resumen de los resultados para verificar si un vector aleatorio tiene distribución en la clase esférica.

Teorema 3.4. *Sea $\boldsymbol{X}$ un vector aleatorio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\Gamma X}$ *para cada* $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathcal{O}(n)$.

(ii) La FC de $\boldsymbol{X}$ *es de la forma* $\phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$ *para algún* $\phi \in \Phi_n$.

(iii) $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} r\boldsymbol{u}^n$, *para algún* $r \geq 0$ *que es independiente de* $\boldsymbol{u}^n$, *y* $r \sim F(x)$ *esta relacionado con* ϕ *a través de* (3.4).

(iv) Para cualquier $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X} = ||\boldsymbol{a}||X_1.$$

El Teorema 3.5 establece el valor esperado y la matriz de covarianzas de un vector aleatorio distribuido uniformemente sobre la esfera uniforme en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.5. *El vector de medias y la matriz de covarianzas de* $\boldsymbol{u}^{(n)}$ *son*

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{u}^{(n)}\right) = \boldsymbol{0} \quad y \quad \mathrm{Cov}\left(\boldsymbol{u}^{(n)}\right) = \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n,$$

respectivamente.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$, de esto tenemos que $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} ||\boldsymbol{X}||\boldsymbol{u}^{(n)}$, donde $||\boldsymbol{X}||$ es independiente de $\boldsymbol{u}^{(n)}$. Luego como $||\boldsymbol{X}|| \sim \chi_n^2$ y $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = 0$, entonces $\mathrm{E}(||\boldsymbol{X}||) > 0$, $\mathrm{E}(||\boldsymbol{X}||^2) = n$ y $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I}_n$. Así, llegamos inmediatamente a la afirmación del teorema.

□

El Corolario 3.5.1 establece el valor esperado y la matriz de covarianzas de un vector con distribución en la clase esférica.

Corolario 3.5.1. *Si* $\boldsymbol{X} = r\boldsymbol{u}^{(n)} \sim \mathrm{S}_n(\phi)$ *y* $\mathrm{E}\left(r^2\right) < \infty$, *entonces*

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{X}\right) = \boldsymbol{0} \quad y \quad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \frac{\mathrm{E}\left(r^2\right)}{n}\boldsymbol{I}_n.$$

En el Teorema 3.6 presentamos una caracterización de los momentos de un vector aleatorio esférico.

Teorema 3.6. *Los momentos de* $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} r\boldsymbol{u}^{(n)}$*, siempre que existan, se pueden expresar en términos de integrales unidimensionales. Para enteros pares* $2s_i \geq 0$*,* $i = 1, \ldots, n$ *, tenemos*

$$\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{2s_i}\right) = \mathrm{E}\left(r^{2s}\right)\pi^{-n/2}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+s)}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1/2+s_i),$$

donde $s = s_1 + \cdots + s_n$*.*

Un vector aleatorio $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{S}_n(\phi)$, en general, no necesariamente tiene una densidad. Sin embargo, del Teorema 3.1 se puede ver que la densidad de $\boldsymbol{X}$, en caso de que exista, debe ser de la forma $g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})$ (o $g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)$ cuando sea necesario indicar la dimensión del vector aleatorio) para alguna función no negativa $g(\cdot)$, de una variable positiva, en este caso tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^\infty y^{n/2-1}g(y)\mathrm{d}y = 1.$$

Por lo tanto, una función no negativa $g(\cdot)$ se puede usar para definir una densidad $cg(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})$ para alguna distribución esférica. De esta manera, la densidad de una distribución perteneciente a la clase esférica existe si y sólo si

$$\int_0^\infty y^{n/2-1}g(y)\mathrm{d}y < \infty. \tag{3.5}$$

En este caso, escribiremos $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{S}_n(g)$, en lugar de $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{S}_n(\phi)$ y llamamos a $g(\cdot)$ función generadora de densidades, o simplemente **generador de FDP**.

En la Definición 3.3 presentamos la clase de distribuciones elípticas.

Definición 3.3. ***(Distribución elíptica).*** *Se dice que un vector aleatorio* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ *tiene una* ***distribución elíptica*** *con vector de medias* μ *y matriz de dispersión* $\Sigma > 0$ *si*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}, \quad \boldsymbol{Y} \sim S_k(\phi), \tag{3.6}$$

donde $\boldsymbol{A}(k \times n)$ *es tal que* $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Sigma}$*, con* $rank(\boldsymbol{\Sigma}) = k$*. Escribimos* $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$*.*

EL Teorema 3.7 muestra la forma de la FC y de la representación estocástica de un vector con distribución elíptica.

Teorema 3.7. *Si* $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$*, con* $rank(\boldsymbol{\Sigma})$*, entonces*

(i) La FC de $\boldsymbol{X}$*,* $\psi(\boldsymbol{t}) = \mathrm{E}\left(\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X})\right)$ *es de la forma*

$$\psi(\boldsymbol{t}) = \exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu})\phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}),$$

para alguna función escalar ϕ*.*

(ii) $\boldsymbol{X}$ *tiene una representación estocástica*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{X} + r\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u}^{(n)},$$

donde $r \geq 0$ *es independiente de* $\boldsymbol{u}^{(n)}$ *y* $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$*.*

Ejemplo 3.2. ***(Distribución normal multivariada).*** *Si el vector aleatorio* $\boldsymbol{X}$ *tiene la siguiente descomposición*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y},$$

donde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$*,* $\boldsymbol{A}$ *tiene dimensión* $m \times n$ *e* $\boldsymbol{Y} \sim N_m(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_m)$*, entonces decimos que* $\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *con* $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$*.*

Además, a partir del Ejemplo 3.1 *tenemos que* $\boldsymbol{Y} \sim S_m(\phi)$*, con* $\phi(u) = \exp(-u/2)$*,* $u \geq 0$*. Por lo tanto,* $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ *o equivalentemente*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + r\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u}^{(k)},$$

con $r \stackrel{d}{=} ||\boldsymbol{Y}|| \sim \chi_n$*, donde* χ_n *es la raíz cuadrada de la distribución* χ_n^2*.*

Ejemplo 3.3. ***(Distribución t multivariada).*** *Sean* $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$ *y* $S \sim \chi_m$ *independientes. Sea*

$$\boldsymbol{Y} = m^{1/2}\boldsymbol{Z}/S. \tag{3.7}$$

Decimos que $\boldsymbol{Y}$ *tiene distribución t multivariada con* m *grados de libertad y escribimos* $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{t}_n(m, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$*. Podemos escribir* (3.7) como sigue

$$\boldsymbol{Y} \stackrel{d}{=} m^{1/2}r\boldsymbol{u}^{(n)}/S = r^*\boldsymbol{u}^{(n)},$$

donde $r \sim \chi_m$, S y $\boldsymbol{u}^{(n)}$ son independientes y $r^* = m^{1/2}r/S$ (r^*/n tiene distribución $F_{n,m}$), así $\boldsymbol{Y}$ tiene una distribución esférica. Sea

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y},$$

donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz de dimensión $n \times n$ y $\mu \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $\boldsymbol{X}$ tiene distribución t multivariada con vector de medias μ, matriz de dispersión Σ y parámetro de grados de libertad m, denotada por $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{t}_n(m, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

3.2. Propiedades

En esta sección exponemos algunas propiedades importantes sobre las distribuciones elípticas, entre ellas mostramos algunas propiedades distribucionales.

El Teorema 3.8 presenta una caracterización de las distribuciones elípticas por medio de su FC.

Teorema 3.8. *La función escalar $\phi(\cdot)$ determina la distribución del vector aleatorio $X \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ para cada $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\Sigma} \geq 0$, con rank$(\boldsymbol{\Sigma}) = k$ si y solo si $\phi \in \Phi_k$.*

El Corolario 3.8.1 muestra la representación estocástica de un vector con distribución elíptico.

Corolario 3.8.1. *$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ con rank$(\boldsymbol{\Sigma}) = k$ si y solo si*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + r\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u}^{(k)},$$

donde $r \geq 0$ es independiente de $\boldsymbol{u}^{(k)}$, $\phi \in \Phi_k$ y $\boldsymbol{A}(k \times n)$ es una matriz tal que $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$.

En el Corolario 3.8.2 se muestra una propiedad de la distancia de Mahalanobis de un vector aleatorio con distribución elíptica.

Corolario 3.8.2. *Si $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$, con rank$(\boldsymbol{\Sigma}) = k$, entonces*

$$Q(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \stackrel{d}{=} r^2, \tag{3.8}$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ es la inversa generalizada de $\boldsymbol{\Sigma}$.

$Q(\boldsymbol{x})$ definido en (3.8) se denomina **distancia de Mahalanobis**, la cual juega un papel importante en el diagnóstico de ajuste de modelos que involucran distribuciones elípticas.

El Teorema 3.9 muestra que $\boldsymbol{\Sigma}$, ϕ, r y $\boldsymbol{A}$ no son únicos a menos que impongamos la condición de que $|\boldsymbol{\Sigma}| = 1$ o que $|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}| = 1$.

Teorema 3.9. *Supongamos que la distribución de $\boldsymbol{X}$ es no-degenerada.*

(i) *Si $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ y $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*, \phi^*)$, entonces existe una constante real $c > 0$ tal que*

$$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\Sigma}^* = c\boldsymbol{\Sigma}, \quad y \quad \phi^*(u) = \phi(c^{-1}u).$$

(ii) *Si $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + r\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u}^{(l)} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu}^* + r^*\boldsymbol{A}^{*\prime}\boldsymbol{u}^{(l^*)}$ donde $l \geq l^*$, entonces existe una constante real $c > 0$ tal que*

$$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{A}^{*\prime}\boldsymbol{A}^* = c\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} \quad y \quad r^* \stackrel{d}{=} c^{-1/2}rb,$$

donde $b \geq 0$ es independiente de r, $b^2 \sim \mathrm{Be}\left(\frac{1}{2}l^*, \frac{1}{2}(l - l^*)\right)$, si $l > l^*$ y $b \equiv 1$, si $l = l^*$.

El Teorema 3.10 muestra que si un vector aleatorio presenta distribución elíptica, entonces cualquier transformación afín del vector también presenta distribución elíptica.

Teorema 3.10. *Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$, con rank($\boldsymbol{\Sigma}$) $= k$, y sean $\boldsymbol{B}(n \times m)$ y $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^m$ una matriz y un vector de constantes, respectivamente, entonces*

$$\boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n\left(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}, \phi\right).$$

De acuerdo la Definición 3.2 podemos particionar a $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ como sigue

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^{(1)} \\ \boldsymbol{X}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} \quad y \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{X}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ tienen dimensión $m \times 1$, $\boldsymbol{X}^{(2)}$ y $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ tienen dimensión $(n-m) \times 1$, $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ tiene dimensión $m \times m$ y $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ tiene dimensión $(n-m) \times (n-m)$ para algún $m < n$.

El Corolario 3.10.1 muestra que las distribuciones marginales de una distribución elíptica, se distribuyen de manera elíptica.

Corolario 3.10.1. *Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$, entonces*

$$\boldsymbol{X}^{(1)} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}, \phi) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{X}^{(2)} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{22}, \phi).$$

El Teorema 3.11 establece el valor esperado y la matriz de covarianzas de un vector con distribución en la clase elíptica.

Teorema 3.11. *Sea* $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ *y* $\mathrm{E}(r^2) < \infty$, *entonces*

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}, \quad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{E}(r^2)}{rank(\boldsymbol{\Sigma})}\boldsymbol{\Sigma} = -2\phi'(0)\boldsymbol{\Sigma},$$

$$\Gamma_2(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}') = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}' - 2\phi'(0)\boldsymbol{\Sigma},$$

donde $\phi'(0)$ *es la derivada de* ϕ *en el origen y*

$$\Gamma_1(\boldsymbol{X}) = i^{-1}\left.\frac{\partial\phi(\boldsymbol{t})}{\partial\boldsymbol{t}}\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}},$$

$$\Gamma_2(\boldsymbol{X}) = i^{-2}\left.\frac{\partial\phi(\boldsymbol{t})}{\partial\boldsymbol{t}\partial\boldsymbol{t}'}\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}}.$$

Como ocurre con las distribuciones esféricas las cuales son un caso particular de las distribuciones elípticas, en general, un vector aleatorio $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ no necesariamente posee densidad, sin embargo, una condición necesaria para que $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ posea una densidad es que $\boldsymbol{\Sigma} > 0$ (o equivalentemente que $rank(\boldsymbol{\Sigma}) = n$). En este caso, la representación estocástica está dada por

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y},$$

donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz no singular con $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Sigma}$ y $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{S}_n(\phi)$ (ver (3.6)).

Sabemos que la densidad de $\boldsymbol{Y}$ es de la forma $g(\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y})$, donde $g(\cdot)$ es el generador de densidad. Luego como $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}$, entonces la densidad de $\boldsymbol{X}$ es de la forma

$$|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} g\left((\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})\right), \tag{3.9}$$

en ocasiones usaremos la notación $\mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$ en lugar de $\mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$. Cualquier función $g(\cdot)$ que satisfaga (3.5), define una densidad como en (3.9) de una distribución elíptica con una constante de normalización C_n, con

$$C_n = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}\int_0^\infty r^{n-1}g(r^2)\mathrm{d}r}, \tag{3.10}$$

de donde se sigue que una función no negativa $g(\cdot)$, se puede usar para definir una densidad para alguna distribución elíptica si y solo si

$$\int_0^\infty r^{n-1}g(r^2)\mathrm{d}r < \infty.$$

3.3. Mezclas de Distribuciones Normales

Existen varias subclases de las de las distribuciones elípticas como las distribuciones multiuniformes, distribuciones simétricas tipo Kotz, distribuciones multivariadas simétricas de Pearson tipo VII y tipo II, mezclas de distribuciones normales, entre otras. En esta sección hablaremos sobre las mezclas de distribuciones normales, ya que han aparecido muchos resultados para esta clase de distribuciones. Esto ha sido posible debido a que dicha clase de distribuciones tiene la ventaja de transferir fácilmente las propiedades de las distribuciones normales, además, hablaremos de las distribución normal, t, exponencial potencia y slah multivariadas, las cuáles se clasifican como miembros de las subclases anteriores.

Sea $n(\boldsymbol{x}; \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ la densidad de $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ y sea $w(\nu)$ una función de ponderación, es decir, $w(\nu) \geq 0$ es creciente y

$$\int_0^\infty \mathrm{d}w(\nu) = 1.$$

La clase de **mezclas de distribuciones normales** asociada con el peso $w(\cdot)$ se define por su FDP como sigue

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \int_0^\infty n\left(\boldsymbol{x}; \mathbf{0}, \frac{1}{\nu^2}\boldsymbol{I}\right) \mathrm{d}w(\nu) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}/\nu^2\right) \mathrm{d}w(\nu), \end{aligned} \tag{3.11}$$

de donde se sigue que $\boldsymbol{X}$ tiene una distribución elíptica y se obtiene que la clase de mezclas de distribuciones normales es una subclase de las distribuciones elípticas. Un vector n-dimensional $\boldsymbol{X}$ tiene una densidad $f(\boldsymbol{x})$ de la forma (3.11), si y solo si $\boldsymbol{X}$ puede descomponerse como

$$\boldsymbol{X} = w\boldsymbol{Y},$$

donde $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ y w son independientes y la FDA $w(\nu)$, con $w \geq 0$ es definida en $(0, \infty)$. La familia de todos los posibles generadores característicos para un vector aleatorio n-dimensional , Φ_n definido en (3.3), satisfacen que $\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \cdots$ lo cuál nos permite definir Φ_∞ como sigue

$$\Phi_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n.$$

Teorema 3.12. *$\phi \in \Phi_\infty$ si y solo si*

$$\phi(x) = \int_0^\infty \exp(-xr^2)\mathrm{d}F_\infty(r),$$

donde $F_\infty(\cdot)$ es una FDA sobre $(0, \infty)$.

En el corolario 3.12.1 se plantea una propiedad para verificar si un vector tiene una distribución de mezclas de escala de distribuciones normales.

Corolario 3.12.1. *$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{S}_n(\phi)$, con $\phi \in \Phi_\infty$ si y solo si*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} r\boldsymbol{Y},$$

donde $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n)$ es independiente de $r \geq 0$. Esto implica que la distribución de $\boldsymbol{X}$ es una mezcla de escalas de distribuciones normales.

De manera más general, decimos que $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$ posee distribución de mezclas de escalas de normales si su generador de densidad es de la forma

$$g(u) = (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty r^{-n/2} \exp\left(-\frac{u}{2r}\right) \mathrm{d}G(r), \tag{3.12}$$

donde G es una FDA sobre $(0, \infty)$.

3.3.1. Distribución Normal Multivariada

Recordemos que la distribución normal multivariada n-dimensional con vector medio $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$, la denotamos por $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Para encontrar la forma que tiene la densidad de la distribución normal multivariada definamos primero la distribución tipo Kotz.

Definición 3.4. *Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$, si el generador de densidad g es de la forma*

$$g(u) = C_n u^{N-1} \exp(-ru^s) \quad r, s > 0, \tag{3.13}$$

donde $2N + n > 2$ y C_n es una constante normalizada, decimos que $\boldsymbol{X}$ posee una distribución simétrica tipo Kotz.

Evaluando (3.13) en (3.9), se sigue que la densidad de $\boldsymbol{X}$ esta dada por

$$C_n|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})]^{N-1} \exp\{-r[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})]^s\}, \tag{3.14}$$

luego usando (3.10) y haciendo sustitución en la integral obtenemos que

$$\begin{aligned} C_n &= \Gamma(n/2)\pi^{-n/2}\left\{\int_0^\infty u^{n/2-1}u^{N-1}\exp(-ru^s)\mathrm{d}u\right\}^{-1} \\ &= \frac{s\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}\Gamma[(2N+n-2)/2s]}r^{(2N+n-2)/2s}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Cuando $s = 1$ se obtiene la distribución original de Kotz, esta familia de distribuciones es útil en la construcción de modelos en los que no es aplicable el supuesto de normalidad habitual. para más detalles de esta familia de distribuciones véase [8].

Para $N = 1$, $s = 1$ y $r = \frac{1}{2}$, la distribución tipo Kotz se reduce a una distribución normal mulrtivariada, por lo tanto, evaluando estos valores en (3.13) se obtiene que el generador de densidad g para las distribuciones normales multivariadas es de la forma $g(u) = C_n \exp(-\frac{1}{2}u)$ y reemplazando dichos valores en (3.15), la constante normalizada se convierte en

$$C_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} = (2\pi)^{-n/2}.$$

La igualdad anterior junto a los valores dados para N, s y r reemplazados en (3.14) nos permite concluir que la densidad de la distribución normal multivariada es de la forma

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right\}. \tag{3.16}$$

3.3.2. Distribución t Multivariada

La densidad de una distribución t univariada se presenta en (2.2), para encontrar la forma que tiene la densidad de la distribución t multivariada, vamos a definir primero la clase de distribuciones de Pearson tipo VII.

Definición 3.5. $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$ *tiene distribución de Pearson tipo VII multivariada denotada por* $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{MPVII}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$, *si* $\boldsymbol{X}$ *tiene un generador de densidad*

$$g(u) = C_n(1 + u/m)^{-N}, \quad N > n/2, \quad m > 0, \tag{3.17}$$

y la constante generalizada está dada por

$$C_n = \frac{\Gamma(N)}{(\pi m)^{n/2}\Gamma(N - n/2)}.$$

Teorema 3.13. *Si* $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{MPVII}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$*, entonces* $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ *con*

$$\phi(u^2) = \frac{2\Gamma(N - (n-1)/2)}{\pi^{n/2}\Gamma(N - n/2)} \int_0^\infty \cos(m^{1/2}tu)(1 + t^2)^{-N+(n-1)/2}\mathrm{d}u. \tag{3.18}$$

La clase de distribuciones de Pearson tipo VII multivariadas incluye varias distribuciones importantes como la distribución t multivariada y un caso particular de esta última, como lo es la distribución Cauchy multivariable. Haciendo $N = \frac{1}{2}(n + m)$, con m entero en (3.17) obtenemos la distribución t multivariada con m grados de libertad la cuál denotamos por $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{t}_n(m, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Además el generador de densidad y la constante normalizada son

$$g(u) = C_n(1 + u/m)^{-(n+m)/2} \quad y \quad C_n = \frac{\Gamma((n+m)/2)}{(\pi m)^{n/2}\Gamma(m/2)},$$

respectivamente, reemplazando lo anterior en (3.9) concluimos que la densidad de la distribución t multivariada con m grados de libertad es

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\Gamma((n+m)/2)}{(\pi m)^{n/2}\Gamma(m/2)|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}[1 + m^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})]^{-(n+m)/2}.$$

Sutradhar en 1986 calculó la integral (3.18) y encontró la FC de $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{t}_n(m, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, para más detalles vease [11]. La distribución Cauchy multivariada es un caso particular de la distribución t multivariada tomando $m = 1$ y se denota por $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{C}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Repitiendo el proceso anterior con $m = 1$, obtenemos que la densidad de la distribución Cauchy multivariada es

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}[1 + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})]^{-(n+1)/2}.$$

3.3.3. Distribución Exponencial Potencia Multivariada

Decimos que X tiene una distribución exponencial potencia univariada, si su FDP es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\beta}\right)2^{1+\frac{1}{2\beta}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left|\frac{x - \mu}{\sigma}\right|^{2\beta}\right\},$$

donde los parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in (0, \infty)$ son los parámetros de ubicación y de escala respectivamente, y $\beta \in (0, \infty)$. Cuando $\beta = 1$ la función de densidad anterior se convierte en la FDP de una distribución normal.

La distribución exponencial potencia multivariada es una amplia clase de distribuciones que extiende la clase de distribuciones normales. Un vector aleatorio $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$, se dice que tiene una distribución exponencial potencia n-dimensional con parámetros, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\Sigma}$ una matriz simétrica definida positiva de orden n y $\beta \in (0, \infty)$ si su generador de densidad es de la forma

$$g(u) = C_n \exp\left(-\frac{1}{2}u^{\beta}\right), \tag{3.19}$$

y la constante normalizada C_n esta dada por

$$C_n = \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}\Gamma\left(1 + \frac{n}{2\beta}\right) 2^{1+(n/2\beta)}}.$$

Para decir que $\boldsymbol{X}$ posee una distribución exponencial potencia multivariada, usamos la notación $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EP}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \beta)$.

Reemplazando la ecuación (3.19) en (3.9) obtenemos que la FDP de la distribución exponencial potencia multivariada es de la forma

$$f(\boldsymbol{x}) = C_n|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}))^{\beta}\right\}. \tag{3.20}$$

El parámetro β es llamado **parámetro de kurtosis**, notemos que haciendo $\beta = 1$ en todo lo anterior obtenemos la FDP de la distribución normal multivariada. Basados en lo visto hasta hora, decimos que $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EP}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \beta)$ si y solo si $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{EC}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$, siendo g definido como en (3.19).

3.3.4. Distribución slash multivariada

La distribución slash es el cociente de la distribución de una variable que tiene distribución normal estándar y una variable que tiene distribución uniforme estándar las cuales son independientes. En otras palabras, si la variable aleatoria Z tiene una distribución normal con media cero y varianza unitaria, la variable aleatoria U tiene una distribución uniforme en [0,1] y además son independientes, entonces la variable aleatoria $X = Z/U$ tiene distribución slash.

Un vector aleatorio $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene una distribución slash n-dimensional con parámetro de ubicación $\boldsymbol{\mu}$, matriz de escala definida positiva $\boldsymbol{\Sigma}$ y parámetro de cola $q > 0$ si

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\frac{\boldsymbol{Y}}{U^{1/q}} + \boldsymbol{\mu}, \tag{3.21}$$

donde $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$ es independiente de $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ y lo denotamos por $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SL}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, q)$; cuando $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{X}$ en (3.21) tiene una distribución slash estándar multivariada. La densidad de la distribución slash mutivariada es

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= q\int_0^1 u^{q+n-1}\phi_n\left(u\boldsymbol{x}, u\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 qu^{q+n-1}(2\pi)^{-n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(u\boldsymbol{x}-u\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(u\boldsymbol{x}-u\boldsymbol{\mu})\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 qu^{q-1}|u^{-2}\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'(u^{-2}\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 qu^{q-1}\phi_n\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, u^{-2}\boldsymbol{\Sigma}\right)\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

donde qu^{q-1} es la FDP de una distribución beta con parámetros q y 1 ($\mathrm{Be}(q,1)$) y $\phi_n(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ representa la FDP de la distribución normal multivariada dada en (3.16).

Se puede deducir un forma más simple para calcular la FDP de la distribución slash mediante el método de integración de montecarlo. Aplicando dicho método a la anterior integral tenemos

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \int_0^1 qu^{q-1}\phi_n\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, u^{-2}\boldsymbol{\Sigma}\right)\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{E}\left(\phi_n\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, U^{-2}\boldsymbol{\Sigma}\right)\right) \\
&\approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi_n\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, u_i^{-2}\boldsymbol{\Sigma}\right),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $u_1, \ldots, u_n$ es una muestra aleatoria de $U \sim \mathrm{Be}(q,1)$.

Capítulo 4

Propiedad de Consistencia

En este capitulo se introduce y se demuestra la propiedad de consistencia de distribuciones multivariadas, adicionalmente se mostrarán ejemplos donde se estudia que familias de distribuciones elípticas satisfacen esta propiedad.

4.1. Consistencia de las Distribuciones Elípticas

Sea n un entero positivo y sea $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ un vector aleatorio elíptico n-dimensional cuya función de densidad de probabilidad en caso de existir es de la forma

$$g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n), \tag{4.1}$$

donde n representa la dimensión del vector, recordemos que la ultima forma como se dijo anteriormente se usa cuando no es clara la dimensión del vector aleatorio. Recordemos también que en (4.1), la función $g(u) = g(u, n)$ es llamado el generador de densidad.

Consideremos una familia de generadores de densidad dada por

$$\{g(u, n)/n \in \mathbb{N}\}. \tag{4.2}$$

La propiedad de consistencia (PC) intuitivamente nos dice que preserva la familia inducida por la función generadora de densidad g bajo marginalización, es decir, se preserva la familia de distribuciones en las marginales. La propiedad de consistencia es importante para un uso apropiado de las distribuciones multivariadas, por lo tanto, diremos que la familia definida en (4.2) posee una propiedad de consistencia (o que la familia es consistente) si y solo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n+1)\mathrm{d}x_{n+1} = g(\boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)}, n), \tag{4.3}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y casi todo $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$.

En el teorema 4.1 se muestran las propiedades para demostrar si una clase de distribuciones satisfacen la propiedad de consistencia,

Teorema 4.1. *Sea $g(u,n)$ el generador de densidad de un n-vector aleatorio elíptico $\boldsymbol{X}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Las siguientes 5 condiciones son equivalentes.*

(i) *La familia $\{g(u,n)/n \in \mathbb{N}\}$ posee la propiedad de consistencia definida en* (4.3).

(ii) $g(u,n) = \int_u^{\infty}(y-u)^{-1/2}g(y,n+1)\mathrm{d}y$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y casi todo $u \geq 0$.

(iii) La función característica $\phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$ no tiene relación con n.

(iv) En la representación estocástica dada en el item (iii) del teorema 3.4, existe una variable aleatoria $\xi > 0$, no relacionada con n, tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $r \stackrel{d}{=} \chi_n/\sqrt{\xi}$ y ξ, χ_n y $\boldsymbol{u}^{(n)}$ se distribuyen mutuamente independientes.

(v) Existe una variable aleatoria $\xi > 0$, no relacionada con n, tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Z}/\sqrt{\xi}, \tag{4.4}$$

donde $\boldsymbol{Z}$ es un vector aleatorio normal estándar n-dimensional y se distribuye independientemente de ξ, es decir, para casi todo $u \geq 0$ se satisface la ecuación (3.12) con $r = 1/\xi$, esto es

$$g(u,n) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-u\xi/2}\mathrm{d}F(\xi), \tag{4.5}$$

donde $F(\cdot)$ no relacionado con n, es la FDP de ξ y $F(0) = 0$.

Los resultados del (ii) al (iv) son condiciones para la propiedad de consistencia en términos de densidades, funciones características y representaciones estocásticas, respectivamente. El resultado (v) es equivalente a decir que $\boldsymbol{X}$ tiene distribución de mezclas de escalas de normales, la variable ξ en (4.4) es llamada **variable de mezcla** (**o composición**).

El teorema afirma que las distribuciones elípticas con la propiedad de consistencia deben ser una mezcla de escalas de distribuciones normales con una variable de mezcla, no relacionada con n; notemos también que $g(u,n)$ con soporte finito no puede construir una familia consistente. Andrews y Mallows en 1974 presentaron un criterio para probar si una distribución elíptica es una mezcla de escala de distribuciones normales, el criterio es el siguiente (para mas detalles vease [1])

$$(-1)^k g^{(k)}(u,n) \geq 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

donde $g^{(k)}(u,n)$ representa la k-ésima derivada de la función $g(u,n)$. Sin embargo, nadie a prestado atención a si la variable de mezcla depende de la dimensión n del vector aleatorio, la ecuación (4.6) no garantiza que una familia elíptica posea la propiedad de consistencia porque la variable de mezcla ξ puede depender de n.

Cuando la relación en (ii) es aplicada recursivamente, tenemos

$$g(u,n) = \pi \int_u^\infty g(y, n+2)\mathrm{d}y \quad \text{o} \quad \frac{\partial}{\partial u} g(u,n) = -\pi g(u, n+2),$$

que es justo una condición necesaria pero se verifica mas fácilmente para demostrar que una familia es inconsistente.

Demostración. (*Teorema 2.1*) (*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*) Consideremos la integral en (ii), es decir, consideremos

$$g(u,n) = \int_u^\infty (y-u)^{-1/2} g(y, n+1)\mathrm{d}y,$$

haciendo la sustitución $u = \boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)}$ con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ en la integral anterior, obtenemos

$$g(\boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)}, n) = \int_{\boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)}}^\infty (y - \boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)})^{-1/2} g(y, n+1)\mathrm{d}y,$$

luego hacemos $y = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)} + x_{n+1}^2$, de donde se sigue que $\mathrm{d}y = 2x_{n+1}\mathrm{d}x_{n+1}$, y por tanto, cuando $y \to \infty$ se tiene que $x_{n+1} \to \infty$ y cuando $y \to \boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)}$ se tiene que $x_{n+1} \to 0$. Así, por cambio variables tenemos

$$\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)}, n) &= \int_{\boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)}}^\infty (y - \boldsymbol{x}'_{-(n+1)}\boldsymbol{x}_{-(n+1)})^{-1/2} g(y, n+1)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty x_{n+1}^{-1} g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n+1) 2x_{n+1}\mathrm{d}x_{n+1} \\
&= 2\int_0^\infty g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n+1)\mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \int_{-\infty}^\infty g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n+1)\mathrm{d}x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que la familia de generadores de densidad $\{g(u,n)/n \in \mathbb{N}\}$ es consistente.

(*i*) $\Rightarrow$ (*iii*) La función FC de una distribución elíptica es de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\sum_{j=1}^n t_j x_j\right) g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_n = \phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}) = \phi\left(\sum_{j=1}^n t_j^2\right).$$

Sea $t_n = 0$, luego tenemos

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n-1} t_j x_j\right) g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n-1} t_j x_j\right) g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{-n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n-1} t_j x_j\right) g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)\mathrm{d}x_n\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{-n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n-1} t_j x_j\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{-n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n-1} t_j x_j\right) g(\boldsymbol{x}_{-n}'\boldsymbol{x}_{-n}, n-1)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{-n} \quad \text{(PC)} \\
&= \phi\left(\boldsymbol{t}_{-n}'\boldsymbol{t}_{-n}\right).
\end{aligned}$$

Lo cual nos permite concluir que la FC $\phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$ no depende de n.

$(iii) \Rightarrow (v)$ Sea $\phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}) = \phi\left(\sum_{j=1}^{n} t_j^2\right)$ una FC de una distribución elíptica n-dimensional. Así por teorema 3.12, se sigue que

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{-x\xi^2}\mathrm{d}F(\xi),$$

con $F(\cdot)$ no relacionado con n, lo que implica que $g(u) = g(u, n)$ es representado como en (3.12) haciendo $r = 1/\xi$. Luego como $\boldsymbol{X}$ posee FDP entonces $F(0) = 0$ y por tanto se satisface (4.4).

$(v) \Rightarrow (i)$ Reescribiendo la ecuación (4.5) con $u = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$ tenemos

$$g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\xi/2}\mathrm{d}F(\xi),$$

luego integrando a ambos lados con respecto a x_n tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)\mathrm{d}x_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{n/2}\exp\left(-\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\xi/2\right)\mathrm{d}F(\xi)\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{n/2}\exp\left(-\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\xi/2\right)\mathrm{d}x_n\mathrm{d}F(\xi)$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{n/2}\exp\left(-\boldsymbol{x}'_{-n}\boldsymbol{x}_{-n}\xi/2\right)\exp\left(-x_n^2\xi/2\right)\mathrm{d}x_n\mathrm{d}F(\xi)$$

$$= \int_{0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{n/2}\exp\left(-\boldsymbol{x}'_{-n}\boldsymbol{x}_{-n}\xi/2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x_n^2\xi/2\right)\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}F(\xi)$$

$$= \int_{0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{n/2}\exp\left(-\boldsymbol{x}'_{-n}\boldsymbol{x}_{-n}\xi/2\right)\sqrt{\frac{2\pi}{\xi}}\mathrm{d}F(\xi)$$

$$= \int_{0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}\exp\left(-\boldsymbol{x}'_{-n}\boldsymbol{x}_{-n}\xi/2\right)\mathrm{d}F(\xi)$$

$$= g(\boldsymbol{x}'_{-n}\boldsymbol{x}_{-n}, n-1).$$

Por tanto se concluye que la familia $\{g(u,n)/n \in \mathbb{N}\}$ es consistente.

$(iv) \Leftrightarrow (v)$ La representación estocástica para una distribución elíptica n-dimensional es de la forma

$$\boldsymbol{X} \overset{d}{=} r\boldsymbol{u}^{(n)},$$

donde $r \geq 0$ es una variable aleatoria que se distribuye independientemente de $\boldsymbol{u}^{(n)}$, además de (iv) tenemos que

$$\boldsymbol{X} \overset{d}{=} \boldsymbol{Z}/\sqrt{\xi},$$

donde $\boldsymbol{Z}$ es un vector aleatorio normal estándar n-dimensional que se distribuye independientemente de $xi > 0$. Así de lo anterior se sigue que

$$\boldsymbol{Z}/\sqrt{\xi} \overset{d}{=} r\boldsymbol{u}^{(n)},$$

donde ξ, r y $\boldsymbol{u}^{(n)}$ se distribuyen mutuamente independientes. Luego como la representación estocástica para la distribución normal estándar n-dimensional $\boldsymbol{Z}$ es

$$\boldsymbol{Z} \overset{d}{=} \chi_n\boldsymbol{u}^{(n)},$$

donde $\boldsymbol{u}^{(n)}$ se distribuye independiente de χ_n, la raíz cuadrada de la distribución chi-cuadrado con n grados de libertad y por propiedades del operador $\overset{d}{=}$ tenemos que

$$\boldsymbol{Z}/\sqrt{\xi} \stackrel{d}{=} \chi_n \boldsymbol{u}^{(n)}/\sqrt{\xi},$$

y por tanto $r\boldsymbol{u}^{(n)} \stackrel{d}{=} \chi_n \boldsymbol{u}^{(n)}/\sqrt{\xi}$ lo que nos permite concluir que

$$r \stackrel{d}{=} \chi_n/\sqrt{\xi},$$

donde ξ, χ_n y $\boldsymbol{u}^{(n)}$ se distribuyen mutuamente independientes. $\square$

El teorema 4.2 presenta una condición en términos de los momentos, denotemos por $\mathrm{E}[\cdot, n]$ la esperanza en términos de $g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)$.

Teorema 4.2. *Sea $g(u,n)$ el generador de densidad de un n-vector aleatorio elíptico $\boldsymbol{X}$. Sea $u = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$, asuma que $E(u^m, n)$ es finito y la serie*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E[u^m, n]}{m!} t^m,$$

es absolutamente convergente pata algún $t > 0$. Entonces, la familia $\{g(u,n)/n \in \mathbb{N}\}$ es consistente si y solo si todos los momentos son independientes de n, es decir,

$$E\left[\left(X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}\right), n\right] = E\left[\left(X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}\right), n'\right],$$

para todo $n < n'$ y $m_j \geq 0$.

Demostración. Supongamos que la familia $\{g(u,n)/n \in \mathbb{N}\}$ es consistente, es decir, se satisface que

$$g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2, n)\mathrm{d}x_{n+1},$$

luego multiplicando a ambos lados por $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m$ e integrando n veces a ambos lados, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2, n+1)\mathrm{d}x_{n+1}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2, n+1)\mathrm{d}x_{n+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2, n+1)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2, n+1)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}x_{n+1}.
\end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\mathrm{E}\left[\left(X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}\right), n\right] = \mathrm{E}\left[\left(X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}\right), n+1\right],$$

para todo $m_j > 0$. De nuevo por la propiedad de consistencia, tenemos

$$g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2, n+1) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2, n+2)\mathrm{d}x_{n+2},$$

y repitiendo el proceso anterior pero integrando $n+1$ veces a ambos lados, se sigue que

$$\mathrm{E}\left[\left(X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}\right), n\right] = \mathrm{E}\left[\left(X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}\right), n+2\right],$$

para todo $m_j > 0$. Así, mediante un argumento recursivo concluimos que

$$\mathrm{E}\left[\left(X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}\right), n-1\right] = \mathrm{E}\left[\left(X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}\right), n'\right],$$

para todo $n-1 < n'$ y $m_j > 0$.

($\Leftarrow$) Del hecho de que todos los momentos son independientes de n se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}, n)\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2, n+1)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \int_{\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2, n+1)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^m \left(\int_{\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}^2, n+1)\mathrm{d}x_{n+1}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Luego por suposición, todos los momentos de $u = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$ determinan únicamente la distribución de u, por lo tanto

$$g(u, n) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u + x_{n+1}^2, n+1)\mathrm{d}x_{n+1},$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y casi todo $u \geq 0$, lo que nos permite concluir que la familia $\{g(u,n)/n \in \mathbb{N}\}$ es consistente. $\square$

4.2. Ejemplos

En esta sección se mostrarán algunos ejemplos de distribuciones multivariables que satisfacen la propiedad de consistencia y también se mostrará un ejemplo donde no se satisface la propiedad de consistencia.

Ejemplo 4.1. *Consideremos la distribución normal n-dimensional con parámetros $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$, denotado por $\mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, sabemos que la función generadora de densidad de esta distribución es de la forma*

$$g(u, n) = C_n \exp\left(-\frac{1}{2}u\right),$$

para mayor facilidad no consideraremos la constante normalizada C_n, debido a que esta no afecta el proceso a seguir; por lo tanto consideramos

$$g(u, n) = \exp\left(-\frac{1}{2}u\right).$$

Luego derivando esta función, tenemos

$$g'(u, n) = -\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right),$$

$$g^{(2)}(u, n) = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right),$$

$$g^{(3)}(u, n) = -\frac{1}{8}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right),$$

$$g^{(4)}(u, n) = \frac{1}{16}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right),$$

continuando así con este proceso, obtenemos que

$$g^{(k)}(u, n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \exp\left(-\frac{1}{2}u\right),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. De donde se sigue que

$$\begin{aligned}(-1)^k g^{(k)}(u, n) &= (-1)^k \left(-\frac{1}{2}\right)^k \exp\left(-\frac{1}{2}u\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \exp\left(-\frac{1}{2}u\right) \geq 0,\end{aligned}$$

para todo $u \geq 0$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Luego en virtud de la propiedad dada en (4.6), tenemos que la distribución normal multivariada es mezcla de escala de distribuciones normales multivariadas y por el Teorema 4.1 se concluye que esta distribución satisface la propiedad de consistencia.

Ejemplo 4.2. *Consideremos la distribución* t *multivariada con* m *grados de libertad y parámetros* $\boldsymbol{\mu}$ *y* $\boldsymbol{\Sigma}$, *denotada por* $\mathrm{t}_n(m, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. *La función generadora de densidad de esta distribución tiene la forma*

$$g(u, n) = C_n(1 + u/m)^{-(n+m)/2},$$

igual que en el ejemplo anterior no consideraremos la constante normalizada para mas facilidad, así, la función generadora de densidad es

$$g(u, n) = (1 + u/m)^{-(n+m)/2}.$$

Ahora derivando esta función, tenemos

$$g'(u.n) = \frac{-(n+m)(1+u/m)^{-(n+m+2)/2}}{2m},$$

$$g^{(2)}(u, n) = \frac{(n+m)(n+m+2)(1+u/m)^{-(n+m+4)/2}}{4m^2},$$

$$g^{(3)}(u, n) = \frac{-(n+m)(n+m+2)(n+m+4)(1+u/m)^{-(n+m+6)/2}}{8m^3},$$

$$g^{(4)}(u, n) = \frac{(n+m)(n+m+2)(n+m+4)(n+m+6)(1+u/m)^{-(n+m+8)/2}}{16m^4}.$$

Continuando así con este proceso obtenemos que

$$g^{(k)}(u, n) = (-1)^k \frac{(n+m)(n+m+2(1)) \cdots (n+m+2(k))(1+u/m)^{-(n+m+2k)/2}}{(2m)^k},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. *Luego tenemos que para todo* $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} (-1)^k g^{(k)}(u, n) &= \frac{(n+m)(n+m+2(1)) \cdots (n+m+2(k))(1+u/m)^{-(n+m+2k)/2}}{(2m)^k} \\ &\geq 0, \quad \textit{para todo } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así por la propiedad dada en (4.6), se sigue que la distribución t *multivariada es mezcla de escala de distribuciones normales multivariadas y por el Teorema 4.1 se concluye que esta distribución satisface la propiedad de consistencia.*

Ejemplo 4.3. *Consideremos la distribución slash multivariada con parámetros* $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ *y* $q > 0$, *denotada por* $\mathrm{SL}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, q)$. *La función generadora de densidad de esta distribución es de la forma*

$$g(x, n) = \int_0^1 q u^{q-1} g^*(x, n) \mathrm{d}u,$$

donde qu^{q-1} *es la FDP de una distribución beta con parámetros q y 1* $(Be(q,1))$ *y* $g^*(x,n)$ *es la función generadora de densidad de la distribución normal multivariada, Así, la función de densidad de esta distribución se obtiene haciendo* $x = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'(u^{-2}\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ *en la formula anterior.*

Ahora por la regla de Leibniz para la derivación bajo la integral tenemos que

$$
\begin{aligned}
(-1)^k g^{(k)}(x,n) &= (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\int_0^1 qu^{q-1}g^*(x,n)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} qu^{q-1}g^*(x,n)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 qu^{q-1}(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} g^*(x,n)\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Como $q > 0$ *y* $u \in [0,1]$ *entonces* $qu^{q-1} \geq 0$ *y del ejemplo 4.1, se tiene que*

$$(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} g^*(x,n)\mathrm{d}u \geq 0, \ \textit{para todo } k \in \mathbb{N} \textit{ y para todo } x \geq 0,$$

por tanto, toda la expresión dentro de la integral es mayor o igual a 0 *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y para todo* $u \geq 0$. *Luego por monotonía de la integral se sigue que*

$$(-1)^k g^{(k)}(x,n), \ \textit{para todo } k \in \mathbb{N} \textit{ y para todo } x \geq 0.$$

Así, de la propiedad dada en (4.6), se sigue que la distribución slash multivariada es mezcla de escala de distribuciones normales multivariadas y por lo tanto, del Teorema 4.1 concluimos que la distribución slash multivariada satisface la propiedad de consistencia.

Ejemplo 4.4. *Veamos que la distribución exponencial potencia multivariada para* $\beta > 1$, *no satisface la propiedad de consistencia. La función generadora de densidad de esta distribución sin considerar la constante normalizada* C_n *es de la forma*

$$g(u,n) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^\beta\right),$$

la segunda derivada de esta función esta dada por

$$
\begin{aligned}
g^{(2)}(u,n) &= \frac{1}{4}\beta^2 u^{2\beta-2}\exp\left(-\frac{1}{2}u^\beta\right) - \frac{1}{2}\beta(\beta-1)u^{\beta-2}\exp\left(-\frac{1}{2}u^\beta\right) \\
&= \frac{1}{2}\beta u^{\beta-2}\exp\left(-\frac{1}{2}u^\beta\right)\left[\frac{1}{2}\beta u^\beta - \beta + 1\right].
\end{aligned}
$$

Claramente el termino $\frac{1}{2}\beta u^{\beta-2}\exp\left(-\frac{1}{2}u^{\beta}\right) \geq 0$ *para todo* $u \geq 0$*, sin embargo,*

$$\lim_{u \longrightarrow 0}\left(\frac{1}{2}\beta u^{\beta} - \beta + 1\right) = -\beta + 1 < 0.$$

Lo anterior implica que existe al menos un $u > 0$ *tal que* $g^{(2)}(u, n) < 0$*. Así, por la propiedad dada en* (4.6), se tiene que la distribución exponencial potencia multivariada para $\beta > 1$ no es mezcla de escala de distribuciones normales multivariadas y por tanto no satisface la propiedad de consistencia.

Observación 4.1. *Hay otras distribuciones las cuales se pueden verificar que satisfacen la propiedad de consistencia, entre estas, se encuentra se encuentra la distribución exponencial potencia multivariada con* $\beta \in (0, 1]$

Conclusiones

Se demostraron algunas de las propiedades más importantes de las distribuciones elípticas, luego a partir de estas propiedades y una vez dada a conocer la forma del generador de densidad de la distribución de mezclas de escala de distribuciones normales, se logró encontrar la función de densidad de algunas distribuciones multivariadas.

Se demostró el teorema de la propiedad de consistencia y se dio a conocer una propiedad importante para verificar si una distribución es mezcla de escala de distribuciones multivariadas, a partir de estas propiedades se demostró a través de ejemplos cuales de las distribuciones dadas en el capitulo 3 satisfacen la propiedad de consistencia y cuales no.

Bibliografía

[1] David F Andrews and Colin L Mallows. Scale mixtures of normal distributions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 36(1):99–102, 1974.

[2] Lee J. Bain and Max Engelhardt. Introduction to probability and mathematical statistics. *Brooks/Cole Cengage Learning*, 2, 1992.

[3] Raquel Caro and Fernando García. Historias de Matemáticas ¡Qué Historia esto de la Estadística! *Pensamiento Matemático*, (0):1–9, 2011.

[4] Clécio da Silva Ferreira, Heleno Bolfarine, and Víctor H Lachos. Skew scale mixtures of normal distributions: Properties and estimation. *Statistical Methodology*, 8(2):154–171, 2011.

[5] E Gómez-Sánchez-Manzano, MA Gómez-Villegas, and JM Marín. Multivariate exponential power distributions as mixtures of normal distributions with bayesian applications. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 37(6):972–985, 2008.

[6] Kai Tai Fang, Samuel Kotz, Kai Wai Ng. *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman and Hall/CRC, 1990.

[7] Yutaka Kano. Consistency property of elliptic probability density functions. *Journal of Multivariate Analysis*, 51(1):139–147, 1994.

[8] Samuel Kotz. Multivariate distributions at a cross road. In *A Modern Course on Statistical Distributions in Scientific Work. 1*, pages 247–270. Springer, 1975.

[9] Sánchez Leiva and José A Días. Distribuciones Elípticas Multivariadas Singulares y no Singulares. *Notas de clase. Universidad Valparaíso*, 2001.

[10] José Maria Riobóo, Pilar González, and MERCEDES Tato. Resumen histórico de la evolución de la estadística. *Estudios de Economía Aplicada*, (8):141–162, 1997.

[11] Brajendra C Sutradhar. On the characteristic function of multivariate student t-distribution. *The Canadian Journal of Statistics/La Revue Canadienne de Statistique*, pages 329–337, 1986.

[12] Jing Wang and Marc G. Genton. The multivariate skew-slash distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136(1):209 – 220, 2006.