Grafos y Álgebras de Evolución.

Carlos Andrés Henao Acevedo.

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático.

Director(a):
PhD. Mary Luz Rodiño Montoya.

Universidad de Antioquia.
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
El Carmen de Viboral, Colombia
2020

Agradecimientos

Primero debo agradecer a mi madre y abuela, por ser la luz que ha guiado el camino de mi vida.

Quiero agradecer a todos los docentes que han contribuido a mi desarrollo profesional y me han mostrado el apasionante mundo de las matemática.

Finalmente quiero agradecer a mi asesora en este trabajo, la profesora Ph.D Mary Luz Rodiño Montoya, por mostrarme lo apasionante que puede llegar a ser la investigación matemática, permitiendo consolidar mi amor por las matemáticas.

Dedicatoria

A mi madre y abuela

Índice general

Resumen **IV**

Introduccion **V**

1 Nociones Básicas de Álgebras no Asociativas **1**
1.1 Álgebras 1
1.2 Subálgebras e Ideales 3
1.3 Álgebra Cociente 6
1.4 Homomorfismos entre álgebras 7

2 Álgebras de Evolución **9**
2.1 Álgebras de Evolución 9
2.2 Subálgebras de Evolución 11
2.3 Ideales de Evolución 12
2.4 Cociente y homomorfismos 13
2.5 Álgebras de evolución no degeneradas 14

3 Grafos **17**
3.1 Conceptos Básicos 17
3.2 Algunas familias de grafos. 21
3.3 Conexidad y Caminos. 26

4 Álgebras de evolución asociadas a un grafo **33**
4.1 Álgebras de evolución 33
4.2 Grafos regulares. 35
4.3 Grafos bipartitos completos 40
4.4 Grafos camino. 44
4.5 Grafos de la amistad. 53
4.6 Grafos rueda. 57
4.7 Grafos n-partitos completos. 63

Bibliografía **72**

Resumen

Las álgebras de evolución son un nuevo tipo de álgebras no asociativas que surgen como respuesta matemática al origen de la genética no mendeliana. Ellas fueron introducidas en el 2006 por J.P. Tian y P. Vojtechovsky y estudiadas más ampliamente por J.P. Tian en 2008. Estas álgebras presentan muchas conexiones con otros campos de las matemáticas entre ellos la teoría de grafos.

El objetivo de este trabajo es presentar la relación entre estas álgebras, los caminos aleatorios y los grafos. Más precisamente estudiar la relación entre el álgebra de evolución inducida por el camino aleatorio sobre el grafo y el álgebra de evolución inducida por el mismo grafo.

Introduccion

Las álgebras de evolución son un nuevo tipo de álgebras no asociativas que surgen como respuesta matemática al origen de la genética no mendeliana, por lo tanto para entender la historia de estas, debemos primero hablar un poco de la relación entre la genética mendeliana y las matemáticas.

El estudio matemático de la herencia genética inicia en la segunda mitad del siglo XIX con las investigaciones de Gregor Mendel y la formulación de sus leyes de la herencia. Mas tarde en las décadas de 1930 y 1940 se introdujeron las álgebras genéticas de una forma mas general. Serebrowsky[1] dió una formulación matemática a las leyes de Mendel, incluyendo una interpretación algebraica al signo “x”que indica la reprodución sexual y finalmente, el estudio sistemático de la genética desde el álgebra se le puede atribuir a Etherington, el cual en una serie de artículos [2] da una formulación precisa de las leyes de Mendel en términos de álgebras no asociativas, esto ayudó a que muchos otros matemáticos hicieran aportes en esta rama.

Sin embargo, a comienzos del siglo XX, en estudios biológicos se descubrieron varias situaciones hereditarias que no se comportan de acuerdo con las leyes de Mendel, lo cual da nacimiento a la genética no mendeliana, la cual en la actualidad es de gran importancia en genética molecular. Con la genética no mendeliana surge una nueva pregunta ¿Pueden las matemáticas describir la genética no mendeliana?

En el 2006 J.P. Tian y P. Vojtechovsky escriben una monografía [3] donde se responde afirmativamente a esta pregunta, presentando las álgebras de evolución. Posteriormente en 2008 J.P. Tian [4] presenta esta información de manera un poco mas amplia , mostrando que estas álgebras presentan muchas conexiones con otros campos de las matemáticas incluyendo teoría de grafos, teoría de grupos, cadenas de Markov, sistemas dinámicos, teoría de nudos, 3-variedades y el estudio de la función Zeta de Riemann.

A pesar de que las álgebras de evolución han sido introducidas recientemente, ya se han estudiado muchos aspectos de las mismas como lo son: Su relación con espacios funcionales determinados por medidas de Gibbs [5], con procesos dinámicos [6]; también se han estudiado las derivaciones de algunas álgebras de evolución [7] y se han usado para describir la herencia genética en poblaciones bisexuales [8].

Uno de los campos que se conecta con las álgebras de evolución, es el de la teoría de grafos. En particular un grafo tiene dos álgebras de evolución asociadas, la primera está asociada directamente al grafo y la segunda a el camino aleatorio regular sobre el grafo. El propósito de esta monografía es estudiar la relación entre estas álgebras de evolución, en algunas familias particulares de grafos.

A lo largo de esta monografía se puede encontrar un primer capítulo que abarca nociones como álgebras no asociativas, subálgebras e ideales de álgebras no asociativas, álgebra cociente y homomorfismo entre álgebras; estas son nociones básicas en el estudio de álgebras no asociativas.

El capítulo dos abarca las nociones fundamentales de las álgebras de evolución; mientras en el capítulo tres se desarrollan algunos conceptos de teoría de grafos.

En el último capítulo se presentan algunas familias particulares de grafos, las dos álgebras de evolución asociadas a ellos y la relación entre ellas en términos de isomorfismos entre álgebras.

CAPÍTULO 1

Nociones Básicas de Álgebras no Asociativas

El propósito de este capítulo es abordar los conceptos básicos de las álgebras no asociativas; para esto vamos a seguir [9, 10].

SECCION 1.1

Álgebras

Definición 1.1 *Un álgebra es un espacio vectorial* $\mathcal{A}$ *sobre un cuerpo* $\mathbb{F}$ *provisto de una aplicación bilineal* $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *dada por* $(a, b) \mapsto a \odot b$*, esto es, una aplicación que cumple las siguientes propiedades:*

- *Si* $a, b, c \in \mathcal{A}$*, entonces* $(a + b) \odot c = a \odot c + b \odot c$
- *Si* $a, b, c \in \mathcal{A}$*, entonces* $a \odot (b + c)\, c = a \odot b + a \odot c$
- *Si* $\alpha \in \mathbb{F}$ *y* $a, b \in \mathcal{A}$*, entonces* $\alpha\, (a \odot b) = (\alpha a) \odot b = a \odot (\alpha b)$

esta aplicación se llama ***multiplicación*** *o* ***producto*** *en* $\mathcal{A}$*.*

Entre los conceptos mas básicos de un álgebra se encuentran los siguientes:

- B es una **base** del álgebra $\mathcal{A}$, si B es base de $\mathcal{A}$ como espacio vectorial.
- La **dimensión** de un álgebra $\mathcal{A}$ es su dimensión como espacio vectorial.
- Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene **dimensión finita**, si como espacio vectorial, $\mathcal{A}$ tiene dimensión finita.

- Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene unidad a derecha (análogamente a izquierda) si existe un elemento en el álgebra 1_d (1_i), tal que para todo $x \in \mathcal{A}$ se cumple que $x \odot 1_d = x$ $(1_i \odot x = x)$.

- Las **constantes de estructura** de un álgebra $\mathcal{A}$, de dimensión finita n con base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, son las n^3 constantes λ_{ijk} que aparecen en los productos
$$v_i \odot v_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ijk} v_k \tag{1.1}$$
y a las n^2 ecuaciones en (1.1) se les llama **tabla de multiplicación** y se pueden organizar de la siguiente manera

	v_1	$\ldots$	v_j	$\ldots$	v_n
v_1	$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{11k} v_k$	$\ldots$	$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{1jk} v_k$	$\ldots$	$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{1nk} v_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_i	$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i1k} v_k$	$\ldots$	$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{ijk} v_k$	$\ldots$	$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{ink} v_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{n1k} v_k$	$\ldots$	$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{njk} v_k$	$\ldots$	$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nnk} v_k$

Por otro lado, si tenemos un espacio vectorial $\mathcal{A}$ y un conjunto de constantes de estructura, entonces podemos definir el producto de la siguiente manera: Dados $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \beta_i v_i$
$$\begin{aligned} x \odot y &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \left(v_i \odot v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \beta_j \lambda_{ijk} v_k \end{aligned}$$

Se puede verificar que con este producto obtenemos una estructura de álgebra.

Es muy importante observar que el producto en el álgebra $\mathcal{A}$ con base B está totalmente determinado por las constantes de estructura.

Entre las características mas importantes de un álgebra $\mathcal{A}$ se encuentran las siguientes:

- Si $a \odot b = b \odot a$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es **conmutativa**.

- Si $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$ para cada $a, b, c \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es **asociativa**.

Es fácil saber si un álgebra es conmutativa al ver su tabla de multiplicación, por otro lado esta tabla no nos dice nada sobre la asociatividad del producto, por lo cual verificar esta propiedad puede volverse bastante complejo incluso teniendo que recurrir a herramientas computacionales.

SECCION 1.2

Subálgebras e Ideales

Definición 1.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre un campo $\mathbb{F}$. Si $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, entonces*

$$\mathcal{BC} := \{bc \mid b \in \mathcal{B},\ c \in \mathcal{C}\}.$$

Definición 1.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre un campo $\mathbb{F}$. Decimos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ es un $\mathbb{F}$-**subálgebra** de $\mathcal{A}$, si*

- *$\mathcal{B}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}$.*
- *$\mathcal{BB} \subseteq \mathcal{B}$.*

Fácilmente podemos verificar que la intersección de subálgebras de $\mathcal{A}$ es un subálgebra de $\mathcal{A}$.

Otro concepto importante es el de subálgebra generada por un subconjunto.

Definición 1.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre un campo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ no vacío. Definimos* ***la subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{S}$****, como la menor subálgebra de $\mathcal{A}$ que contiene a $\mathcal{S}$. Esta subálgebra es denotada por $\langle \mathcal{S} \rangle$.*

Observaciones:

- Si $\langle \mathcal{S} \rangle$ es la subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{S}$, entonces

  $$\langle \mathcal{S} \rangle = \bigcap \{\mathcal{H} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{H},\ \mathcal{H}\, \text{subálgebra de}\, \mathcal{A}\}.$$

  Es decir, la subálgebra generada por $\mathcal{S}$ es la intersección de todas las subálgebra de $\mathcal{A}$ que contienen a $\mathcal{S}$.

- Cuando $\mathcal{S}$ es un conjunto finito, $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, escribimos $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ para la subálgebra generada por $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en lugar de $\langle \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \rangle$.

- Si $\mathcal{B}$ es un subálgebra de $\mathcal{A}$ tal que $\langle \mathcal{S} \rangle = \mathcal{B}$, decimos que $\mathcal{B}$ es la subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{S}$.

- Si $\mathcal{B}$ es la subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{S}$, con $\mathcal{S}$ un conjunto finito, decimos que $\mathcal{B}$ es finitamente generada.

Definición 1.5 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre un campo $\mathbb{F}$. Decimos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ es un $\mathbb{F}$-**ideal a izquierda (derecha)** de $\mathcal{A}$, si:*

- *$\mathcal{B}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}$.*
- $\mathcal{AB} \subseteq \mathcal{B}\,(\mathcal{BA} \subseteq \mathcal{B})$.

*Decimos que $\mathcal{B}$ es un $\mathbb{F}$-**ideal** de $\mathcal{A}$, si es un $\mathbb{F}$-ideal a izquierda y a derecha.*

En álgebras no asociativas también se puede hablar de potencias de un elemento.

Definición 1.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Para $x \in \mathcal{A}$ se define:*

1.

$$\begin{aligned} {}^{1}x &:= x \\ {}^{n+1}x &:= x\left({}^{n}x\right) \end{aligned}$$

*como **las potencias principales de x a izquierda**.*

2.

$$\begin{aligned} x^{1} &:= x \\ x^{n+1} &:= \left(x^{n}\right)x \end{aligned}$$

*como **las potencias principales de x a derecha**.*

Definición 1.7 *Dada un álgebra $\mathcal{A}$, se definen las siguientes potencias para el álgebra $\mathcal{A}$:*

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(0)} &= \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^{(n+1)} &= \mathcal{A}^{(n)}\mathcal{A}^{(n)}, && \text{para } n \geqslant 0, \end{aligned}$$

*llamadas **las potencias derivadas** del álgebra $\mathcal{A}$.*

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{1} &= \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}^{n+1-i}\mathcal{A}^{i} \\ &= \mathcal{A}^{n}\mathcal{A} + \mathcal{A}^{n-1}\mathcal{A}^{2} + \cdots + \mathcal{A}\mathcal{A}^{n}, && \text{para } n > 1, \end{aligned}$$

*llamadas **las potencias** del álgebra $\mathcal{A}$.*

Utilizando las dos potencias, definidas anteriormente, podemos definir los conceptos de solubilidad y nilpotencia de la siguiente manera:

Definición 1.8 *Dada una $\mathbb{F}$-álgebra $\mathcal{A}$, decimos que:*

1. *$\mathcal{A}$ es **soluble**, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathcal{A}^{(n)} = \{0_{\mathcal{A}}\}$$

*Si $\mathcal{A}$ es un $\mathbb{F}$-álgebra soluble, entonces definimos el **índice de solubilidad** de $\mathcal{A}$ como el menor natural s tal que*

$$\mathcal{A}^{(s)} = \{0_{\mathcal{A}}\}.$$

2. *$\mathcal{A}$ es **nilpotente**, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathcal{A}^{n} = \{0_{\mathcal{A}}\}$$

*Si $\mathcal{A}$ es un $\mathbb{F}$-álgebra nilpotente, entonces definimos el **índice de nilpotencia** de $\mathcal{A}$ como el menor natural s tal que*

$$\mathcal{A}^{s} = \{0_{\mathcal{A}}\}.$$

Es natural preguntarse si existe una relación entre álgebras solubles y nilpotentes, esta relación se puede observar en los siguientes resultados:

Teorema 1.1 *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces*

$$\mathcal{A}^{(n)} \subseteq \mathcal{A}^{2^n}.$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en [10, p. 82]. En otras palabras este teorema nos dice que, si $\mathcal{A}$ es un álgebra nilpotente con índice n, entonces $\mathcal{A}$ es soluble con índice no mayor a 2^n.

Corolario 1.1 *Toda álgebra nilpotente es soluble.*

Aunque toda álgebra nilpotente es soluble, no toda álgebra soluble es nilpotente, veamos un ejemplo de esto.

Ejemplo 1.1 *Sea $\mathcal{A}$ el álgebra generada por $\{e_1, e_2\}$, cuyos productos son dados por:*

$$e_1e_1 = e_2e_2 = 0 \ \ y \ \ e_1e_2 = -e_2e_1 = e_1.$$

Veamos que $\mathcal{A}$ es soluble:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{(1)} &= \mathcal{A}\mathcal{A} \\
&= \{x \odot y \mid x, y \in \mathcal{A}\} \\
&= \{(\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2) \odot (\alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2) \mid \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha_1\alpha_2 (e_1 \odot e_1) + \alpha_1\beta_2 (e_1 \odot e_2) + \beta_1\alpha_2 (e_2 \odot e_1) + \beta_1\beta_2 (e_2 \odot e_2)\} \\
&= \{(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) e_1 \mid \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\lambda e_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle e_1 \rangle .
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(2)} &= \mathcal{A}^{(1)}\mathcal{A}^{(1)} \\ &= \langle e_1\rangle\langle e_1\rangle \\ &= \{(\alpha e_1)\odot(\beta e_1) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha\beta\,(e_1\odot e_1) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \\ &= \{0\}\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{A}$ es soluble y su índice de solubilidad es 2.

Ahora veamos por inducción, que para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n>1$

$$\mathcal{A}^n = \langle e_1\rangle\,.$$

Paso Base: *Veamos que se cumple para $n=2$:*

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}+\mathcal{A}\mathcal{A} = \langle e_1\rangle + \langle e_1\rangle = \langle e_1\rangle\,.$$

Paso inductivo: *Supongamos que para todo $1<s<k$,*

$$\mathcal{A}^s = \langle e_1\rangle$$

y veamos que:

$$\mathcal{A}^k = \langle e_1\rangle\,.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^k &= \sum_{i=1}^{k-1}\mathcal{A}^{k-i}\mathcal{A}^i \\ &= \langle e_1\rangle\mathcal{A} + \langle e_1\rangle\langle e_1\rangle + \cdots + \langle e_1\rangle\langle e_1\rangle + \mathcal{A}\langle e_1\rangle \\ &= \langle e_1\rangle + \{0\} + \cdots + \{0\} + \langle e_1\rangle \\ &= \langle e_1\rangle\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{A}$ no es nilpotente.

SECCION 1.3

Álgebra Cociente

Definición 1.9 *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{F}$-álgebra y $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$. Definimos la siguiente relación de equivalencia entre los elementos de $\mathcal{A}$. Dados $a,b\in\mathcal{A}$ diremos que ellos están relacionados módulo $\mathcal{B}$, si $a-b\in\mathcal{B}$. Si a,b están relacionados módulo $\mathcal{B}$, lo denotaremos por $a\sim b$.*

Observaciones

- La clase de equivalencia de un elemento $a\in\mathcal{A}$ está dada por

$$\overline{a} = a+\mathcal{B} = \{a+b \mid b\in\mathcal{B}\}\,.$$

- El conjunto de clases de equivalencia se denota por $\mathcal{A}/\mathcal{B}$.
- El conjunto $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con las operaciones

$$+_1 : \mathcal{A}/\mathcal{B} \times \mathcal{A}/\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B} \quad \text{y}$$

$$\bullet_1 : \mathbb{F} \times \mathcal{A}/\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

definidas para $\alpha \in \mathbb{F}$ y $x + \mathcal{B}, y + \mathcal{B} \in \mathcal{A}/\mathcal{B}$, por:

$$(x + \mathcal{B}) +_1 (y + \mathcal{B}) = (x + y) + \mathcal{B} \quad \text{y}$$
$$\alpha \bullet_1 (x + \mathcal{B}) = \alpha \bullet x + \mathcal{B}$$

donde $+, \bullet$ son la suma y el producto por escalar en el $\mathbb{F}$-espacio vectorial $\mathcal{A}$, respectivamente. Este espacio vectorial se llama espacio cociente entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Definición 1.10 *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{F}$-álgebra y $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$. Definimos el producto entre clases de equivalencia de la siguiente manera:*

$$\overline{a} \odot_1 \overline{b} = (a + \mathcal{B}) \odot_1 (b + \mathcal{B}) = a \odot b + \mathcal{B} = \overline{a \odot b},$$

donde $a \odot b$ es el producto interno en $\mathcal{A}$.

Observación: Si $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{F}$-álgebra y $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$, el producto interno en $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ está bien definido, si y solo si, $\mathcal{B}$ es un ideal de $\mathcal{A}$.

Cuando este producto está bien definido, es decir, cuando $\mathcal{B}$ es un ideal de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ obtiene una estructura de $\mathbb{F}$-álgebra con las operaciones $+_1, \bullet_1, \odot_1$. Al álgebra $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ la llamamos $\mathbb{F}$-álgebra cociente entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

SECCION 1.4

Homomorfismos entre álgebras

Definición 1.11 *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathbb{F}$-Álgebras. Una transformación $\mathbb{F}$-lineal*

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

*se denomina $\mathbb{F}$**-homomorfismo**, si*

$$\phi(x \odot_1 y) = \phi(x) \odot_2 \phi(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Donde $\odot_1$ es el producto en $\mathcal{A}$ y $\odot_2$ es el producto en $\mathcal{B}$.

*Una transformación lineal se dice que es **algebraica** cuando cumple que:*

$$\phi(x \odot_1 y) = \phi(x) \odot_2 \phi(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

*El **núcleo o kernel** de ϕ es el conjunto*

$$Ker\,(\phi) := \{a \in \mathcal{A} \mid \phi\,(a) = 0_{\mathcal{B}}\}\,.$$

*La **Imagen** de ϕ es el conjunto*

$$Im\,(\phi) := \phi\,(\mathcal{A}) = \{\phi\,(a) \mid a \in \mathcal{A}\}$$

.
*Cuando ϕ es una biyección decimos que es un $\mathbb{F}$-**isomorfismo**, y que $\mathcal{A}$ es **isomorfa** a $\mathcal{B}$, lo cual denotamos por*

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Conocemos las relaciones entre kernel e imagen de un $\mathbb{F}$- homomorfismo y el espacio vectorial del dominio, estas relaciones se pueden extender en términos de $\mathbb{F}$-Álgebras.

Observaciones:

- El kernel y la imagen de un $\mathbb{F}$-homomorfismo no dependen del producto interno del álgebra, en lugar de esto son iguales al kernel y la imagen de la transformación $\mathbb{F}$- lineal.
- El kernel de un $\mathbb{F}$- homomorfismo es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}$, mas aun es un ideal de la $\mathbb{F}$-Álgebra $\mathcal{A}$.
- La imagen de un $\mathbb{F}$- homomorfismo es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}$, mas aun es una subálgebra de la $\mathbb{F}$-Álgebra $\mathcal{B}$.
- Si ϕ es un $\mathbb{F}$- homomorfismo, entonces $Ker\,(\phi) = \{0\}$, si y solo si, ϕ es inyectiva.
- Si ϕ es un $\mathbb{F}$- homomorfismo, entonces $\phi\,(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, si y solo si, ϕ es sobreyectiva.
- Todo ideal de un álgebra $\mathcal{A}$ es el kernel de un homomorfismo del álgebra $\mathcal{A}$.

En las álgebras, al igual que en los espacios vectoriales, se cumple el teorema de isomorfismo.

Teorema 1.2 ***Teorema de Isomorfismo***
Sea ϕ un $\mathbb{F}$-homomorfismo del álgebra $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.Entonces la función

$$\pi : \mathcal{A}/Ker\,(\phi) \longrightarrow \phi\,(\mathcal{A})$$

definida por

$$a + Ker\,(\phi) \mapsto \phi\,(a)$$

es un $\mathbb{F}$-isomorfismo, esto es

$$\mathcal{A}/Ker\,(\phi) \cong \phi\,(\mathcal{A})\,.$$

CAPÍTULO 2

Álgebras de Evolución

En este capítulo vamos a estudiar los conceptos fundamentales de las álgebras de evolución, las cuales fueron introducidas por J.P. Tian [3, 4] como una respuesta matemática a la genética no mendeliana. Algebraicamente las álgebras de evolución son un tipo particular de álgebras no asociativas que posee numerosas conexiones con otras ramas de las matemáticas como lo son: Teoría de grafos, procesos estocásticos, teoría de grupos, sistemas dinámicos y física matemática entre otros.

En este capítulo vamos a tomar las definiciones de [11, Seccion 1.2].

SECCION 2.1

Álgebras de Evolución

Definición 2.1 *Un álgebra de evolución en un campo $\mathbb{F}$, es una $\mathbb{F}$-álgebra $\mathcal{A}$ con una base $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ tal que $e_i e_j = 0$ cuando $i \neq j$. La base B se conoce como base natural de $\mathcal{A}$.*

Si B es una base natural de $\mathcal{A}$, decimos que los escalares $w_{ik} \in \mathbb{F}$ son las constantes de estructura de $\mathcal{A}$ con respecto a B, si para todo $i \in \Lambda$

$$e_i e_i = \sum_{k \in \Lambda} w_{ik} e_k$$

Decimos que la matriz $M_B = (w_{ik})$ es la matriz de estructura de $\mathcal{A}$ con respecto a B, si $w_{ki} \in \mathbb{F}$ son las constantes de estructura de $\mathcal{A}$ con respecto a B.

Aunque un álgebra de evolución puede ser de dimensión infinita, a lo largo de este trabajo solo vamos a considerar los casos en que su dimensión es finita.

Observaciones:

- Un álgebra $\mathcal{A}$ de dimensión n es una álgebra de evolución, si y solo si, tiene una base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ cuya tabla de multiplicación es de la forma

	e_1	$\ldots$	e_i	$\ldots$	e_n
e_1	$\sum_{k=1}^{n} w_{1k}e_k$	$\ldots$	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_i	0	$\ldots$	$\sum_{k=1}^{n} w_{ik}e_k$	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	0	$\ldots$	0	$\ldots$	$\sum_{k=1}^{n} w_{nk}e_k$

  En este caso la matriz de estructura de $\mathcal{A}$ con respecto a B es la siguiente

$$M_B = \begin{pmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

- Toda álgebra de evolución está completamente determinada por su matriz de estructura.

Ejemplo 2.1 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2\}$ y productos no nulos dados por:*

$$e_1e_1 = e_2e_2 = e_1.$$

Entonces la matriz de estructura de $\mathcal{A}$ con respecto a B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además podemos observar que esta álgebra no es asociativa pues

$$\begin{aligned} e_2^2e_2^2 = &\quad e_1e_1 &= e_1, \\ \left(e_2^2e_2\right)e_2 = &\quad (e_1e_2)\,e_2 &= 0. \end{aligned}$$

SECCION 2.2

Subálgebras de Evolución

Aunque es natural pensar que toda subálgebra, de un álgebra de evolución, es un álgebra de evolución, en [11, Ejemplo 1.4.1, p. 17] se muestra el siguiente contra-ejemplo:

Ejemplo 2.2 *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{F}$-álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y productos dados por:*

$$e_1^2 = e_1 + e_2 = -e_2^2, \qquad e_3^2 = -e_2 + e_3.$$

Si consideramos $u_1 := e_1 + e_2$ y $u_2 := e_1 + e_3$, es claro que u_1 y u_2 son L.I. y además obtenemos los siguientes productos:

$$\begin{aligned} u_1^2 = &\ e_1^2 + e_2^2 = &\ 0 \\ u_2^2 = &\ e_1^2 + e_3^2 = &\ e_1 + e_3 \\ u_1u_2 = &\ e_1^2 \qquad = &\ e_1 + e_2 \neq 0 \\ u_2u_1 = &\ e_1^2 \qquad = &\ e_1 + e_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Veamos que la subálgebra $\mathcal{S}$ generada por u_1, u_2 no es un álgebra de evolución. Si $\mathcal{S}$ fuese álgebra de evolución, entonces existiría una base natural $\{v_1, v_2\}$ de $\mathcal{S}$ y por lo tanto existirían $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}$ tales que

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2, \\ v_2 &= \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} v_1v_2 &= (\alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2)(\alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2) \\ &= (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(e_1 + e_2) + \beta_1\beta_2(e_1 + e_3) \\ &= (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\, u_1 + \beta_1\beta_2 u_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $v_1v_2 = 0$, entonces u_1 y u_2 serían L.D. lo cual es absurdo.

Definición 2.2 *Una* ***subálgebra de evolución*** *de un álgebra de evolución $\mathcal{A}$, es una subálgebra $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}_1$ es un álgebra de evolución, es decir, $\mathcal{A}_1$ tiene una base natural.*

Definición 2.3 *Una subálgebra de evolución $\mathcal{A}_1$ tiene la* ***propiedad de extensión****, si la base natural de $\mathcal{A}_1$ puede extenderse a una base natural de $\mathcal{A}$.*

Observación:

- Originalmente en [4, Definicion 4, p. 23] se define el concepto de subálgebra de evolución, como una subálgebra con una base natural que tiene la propiedad de extensión, pero por comodidad vamos a utilizar la definición que se encuentra en [11, Definicion 1.4.3, p. 18].

Aunque se puede pensar que toda subálgebra de evolución es un ideal, esto es falso, como se muestra en [11, Ejemplo 1.4.5, p. 19].

Ejemplo 2.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y productos dados por*

$$e_1^2 = e_2, \qquad e_2^2 = e_1, \qquad e_3^2 = e_3.$$

Entonces en la subálgebra $\mathcal{A}_1$ generada por $u_1 = e_1 + e_2$ y $u_2 = e_3$, se cumple que:

$$\begin{aligned} u_1^2 &= e_1^2 + e_2^2 &&= e_1 + e_2 \\ u_2^2 &= e_3^2 &&= e_3 \\ u_1u_2 &= e_1e_3 + e_2e_3 &&= 0 \\ u_2u_1 &= e_3e_1 + e_3e_2 &&= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{A}_1$ es una subálgebra de evolución con base natural $\{e_1 + e_2, e_3\}$, pero $e_1(e_1 + e_2) = e_2 \notin \mathcal{A}_1$, así $\mathcal{A}_1$ no es un ideal de $\mathcal{A}$.

SECCION 2.3

Ideales de Evolución

Hemos visto que una subálgebra de evolución no necesariamente es un ideal del álgebra, tampoco es cierto que todo ideal de un álgebra de evolución sea un álgebra de evolución como se muestra en [11, Ejemplo 1.4.6, p. 19]

Ejemplo 2.4 *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{F}$-álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y productos dados por:*

$$e_1^2 = e_2 + e_3, \qquad e_2^2 = e_1 + e_2, \qquad e_3^2 = -e_1 - e_2.$$

Si consideramos $u_1 := e_1^2$ y $u_2 := e_2^2$ y suponemos que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$, obtenemos que :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha u_1 + \beta u_2 \\ &= \alpha e_1^2 + \beta e_2^2 \\ &= \alpha(e_2 + e_3) + \beta(e_1 + e_2) \\ &= \beta e_1 + (\alpha + \beta) e_2 + \alpha e_3 \end{aligned}$$

esto muestra que u_1 y u_2 son L.I. pues e_1, e_2 y e_3 son L.I.
Así si consideramos el subespacio $\mathcal{I}$ generado por u_1 y u_2, tenemos que:

$$\begin{aligned} e_1u_1 &= 0, \qquad & e_2u_1 &= u_2, \qquad & e_3u_1 &= -u_2, \\ e_1u_2 &= u_1, \qquad & e_2u_2 &= u_2, \qquad & e_3u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo cual $\mathcal{I}$ es un ideal de $\mathcal{A}$, pero $\mathcal{I}$ no tiene una base natural.

De hecho, si $\{v_1, v_2\}$ *es una base natural de* $\mathcal{I}$*, entonces existen* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}$ *tales que:*

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2, \\ v_2 &= \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} v_1 = &\ \alpha_1 (e_2 + e_3) + \beta_1 (e_1 + e_2) = &\ \beta_1 e_1 + (\alpha_1 + \beta_1) e_2 + \alpha_1 e_3 \qquad (2.1) \\ v_2 = &\ \alpha_2 (e_2 + e_3) + \beta_2 (e_1 + e_2) = &\ \beta_2 e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \alpha_2 e_3 \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} 0 &= v_1 v_2 \\ &= (\alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2)(\alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2) \\ &= \alpha_1 \alpha_2 u_1^2 + \alpha_1 \beta_2 u_1 u_2 + \beta_1 \alpha_2 u_2 u_1 + \beta_1 \beta_2 u_2^2 \\ &= \beta_1 \beta_2 u_1 + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) u_2 \end{aligned}$$

por lo tanto $\beta_1 \beta_2 = 0$ *y* $\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0$*, de donde*

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \qquad ó \qquad \beta_1 = \alpha_1 = 0 \qquad ó \qquad \beta_2 = \alpha_2 = 0.$$

Remplazando cada uno de estos casos en (2.1) *obtenemos que:*

$$\alpha_2 v_1 = \alpha_1 v_2 \qquad ó \qquad v_1 = 0 \qquad ó \qquad v_2 = 0,$$

de donde v_1, v_2 *no son L.I y por lo tanto no pueden formar una base.*

Este ejemplo motiva la siguiente definición [11, Definicion 1.4.7, p. 20].

Definición 2.4 *Un Ideal de evolución de un álgebra de evolución* $\mathcal{A}$*, es un ideal* $\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{A}$ *que tiene una base natural.*

SECCION 2.4

Cociente y homomorfismos

Veamos ahora que las álgebras de evolución son cerradas bajo cocientes [11, Lemma 1.4.11]

Teorema 2.1 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra de evolución e* $\mathcal{I}$ *un ideal propio de* $\mathcal{A}$*. Entonces* $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ *con el producto natural es un álgebra de evolución.*

Demostración:
Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base natural de* $\mathcal{A}$*. Entonces el conjunto de clases* $B_1 = \{\overline{e_i} = e_i + \mathcal{I} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *genera* $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ *y* $\overline{e_i}\,\overline{e_j} = 0$ *para* $i \neq j$ *y por lo tanto* $\mathcal{B}_1$ *contiene una base natural para* $\mathcal{A}/\mathcal{I}$*.* $\square$

Notemos que el conjunto B_1 no necesariamente es una base para $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, porque puede ocurrir que el conjunto B_1 no sea L.I.

Ejemplo 2.5 *[11, Remark 1.4.12] Tomemos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{I}$ del ejemplo 2.4. Podemos observar que $e_1, e_2, e_3 \notin \mathcal{I}$, porque si $e_i \in \mathcal{I}$ para $i = 1, 2, 3$ se obtiene que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tales que:*

$$e_i = \alpha e_1 + (\alpha + \beta) e_2 + \beta e_3$$

de donde

$$\alpha = \beta = 0.$$

Además

$$dim(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = dim(\mathcal{A}) - dim(\mathcal{I}) = 3 - 2 = 1,$$

por lo tanto $B_1 = \{\overline{e_i} = e_i + \mathcal{I} \mid 1 \leqslant i \leqslant 3\}$ no es una base natural de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, pero por el teorema anterior, contiene una base natural de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$.

Teorema 2.2 *[11, Corollary 1.4.14] Sea $f : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ un homomorfismo entre las álgebras de evolución $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$. Entonces $Im(f)$ es una subálgebra de evolución de $\mathcal{A}_2$.*

Demostración:
Por el teorema anterior $\mathcal{A}_1/Ker(f)$ es un álgebra de evolución y por el teorema de isomorfismo 1.2

$$\mathcal{A}_1/Ker(f) \cong Im(f),$$

de donde, $Im(f)$ es un álgebra de evolución. □

En [4, Section 3.1] se da la definición de homomorfismo de álgebras de evolución.

Definición 2.5 *Sean dos $\mathbb{F}$-Álgebras de evolución $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Un homomorfismo*

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

*es un **homomorfismo de evolución**, si es algebraico y para una base natural $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$ de $\mathcal{A}$, $\{\phi(e_i) \mid i \in \Lambda\}$ puede ser completado a una base natural de $\mathcal{B}$. Además si un homomorfismo de evolución es inyectivo y sobreyectivo entonces es un **isomorfismo de evolución**.*

SECCION 2.5

Álgebras de evolución no degeneradas

Definición 2.6 *Un álgebra de evolución $\mathcal{A}$ es **no degenerada** si tiene una base natural $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ tal que $e_i^2 \neq 0$ para todo $i \in \Lambda$.*

Definición 2.7 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Se define el anulador de $\mathcal{A}$ de la siguiente manera:*

$$ann(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{A} = \{0\}\}$$

donde,

$$x\mathcal{A} := \{xa \mid a \in \mathcal{A}\}.$$

Queremos saber cuándo un álgebra es no degenerada en términos de su anulador, para esto vamos a utilizar el siguiente lemma [12, Lemma 2.7].

Teorema 2.3 *Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base natural de un álgebra de evolución $\mathcal{A}$. Entonces:*

$$ann\,(\mathcal{A}) = \left\langle e_i \mid e_i^2 = 0 \right\rangle.$$

Demostración:

- $ann\,(\mathcal{A}) \subseteq \langle e_i \mid e_i^2 = 0\rangle$.
  Si $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \neq 0$ y $x \in ann\,(\mathcal{A})$, entonces $x\mathcal{A} = \{0\}$, además si $\alpha_i \neq 0$ para algún i, entonces $0 = xe_i = \alpha_i e_i^2$ de donde $e_i^2 = 0$; por lo cual $x \in \langle e_i \mid e_i^2 = 0\rangle$.

- $\langle e_i \mid e_i^2 = 0\rangle \subseteq ann\,(\mathcal{A})$.
  Si $e_i^2 = 0$, entonces $e_i e_j = 0$ para todo j, y por lo tanto $e_i\mathcal{A} = \{0\}$. De donde si $x \in \langle e_i \mid e_i^2 = 0\rangle$, entonces, $x\mathcal{A} = \{0\}$. □

En [11, Proposicion 1.5.3, p.24] encontramos el siguiente teorema:

Teorema 2.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de evolución y $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ una base natural para $\mathcal{A}$. Definimos*

$$\Lambda_0\,(\mathcal{B}) := \left\{i \in \Lambda \mid e_i^2 = 0\right\}.$$

Entonces:

(I) $ann\,(\mathcal{A}) = \langle e_i \in \mathcal{B} \mid i \in \Lambda_0\,(\mathcal{B})\rangle$.

(II) $ann\,(\mathcal{A}) = \{0\}$, *si y solo si,* $\Lambda_0\,(\mathcal{B}) = \emptyset$.

(III) $ann\,(\mathcal{A})$ *es un ideal de evolución de* $\mathcal{A}$.

(IV) $|\Lambda_0\,(\mathcal{B})| = |\Lambda_0\,(\mathcal{B}^*)|$ *para toda base natural* $\mathcal{B}^*$ *de* $\mathcal{A}$.

Demostración:
I y III son consecuencia inmediata de que $ann\,(\mathcal{A}) = \langle e_i \mid e_i^2 = 0\rangle$. II es inmediato a partir de I y IV se sigue de que $|\Lambda_0\,(\mathcal{B})| = dim(ann\,(\mathcal{A}))$. □

A partir de este último teorema se puede deducir el siguiente corolario [11, Corolario 1.5.4, p.24]:

Corolario 2.1 *Un Álgebra de evolución $\mathcal{A}$ es no degenerada, si y solo si,*

$$ann\,(\mathcal{A}) = \{0\}.$$

Demostración:
$\mathcal{A}$ es no degenerada, si y solo si, $\Lambda_0 = \emptyset$, y esto es inmediato por el teorema anterior.
□

Podemos observar que la definición de álgebra de evolución no degenerada no depende de la elección de la base natural.

Observación:[11, Remark 1.5.5]
Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$. Definimos

$$\Lambda_1 := \left\{ i \in \Lambda \mid e_i^2 \neq 0 \right\}.$$

Entonces:

(i) $\mathcal{A}_1 := \langle e_i \in B \mid i \in \Lambda_1 \rangle$ no es necesariamente una subálgebra de $\mathcal{A}$.

(ii) $\mathcal{A}/Ann\,(\mathcal{A})$ no necesariamente es un álgebra de evolución no degenerada.

Ejemplo 2.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2\}$ y productos dados por:*

$$e_1^2 = 0, \qquad e_2^2 = e_1 + e_2.$$

Claramente $ann\,(\mathcal{A}) = \langle e_1 \rangle$ y $\Lambda_1 = \{2\}$, luego $\mathcal{A}_1 = \langle e_2 \rangle$ no es subálgebra de $\mathcal{A}$ porque $e_2^2 = e_1 + e_2 \notin \mathcal{A}_1$.

Ejemplo 2.7 *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{F}$-álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ y productos dados por:*

$$\begin{aligned} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0, &\qquad e_4^2 = e_1 + e_2, \\ e_5^2 = e_2, &\qquad e_6^2 = e_2 + e_5. \end{aligned}$$

Claramente

$$ann\,(\mathcal{A}) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle,$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{A}/ann\,(\mathcal{A}) &= \{x + ann\,(\mathcal{A}) \mid x \in \mathcal{A}\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{6} \alpha_i e_i + ann\,(\mathcal{A}) \mid \alpha_i \in \mathbb{F}, para\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \right\} \\ &= \{(\alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6) + ann\,(\mathcal{A}) \mid \alpha_i \in \mathbb{F}, para\ i = 4, 5, 6.\} \\ &= \langle \overline{e_4}, \overline{e_5}, \overline{e_6} \rangle. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \overline{e_4} \cdot \overline{e_4} &= \overline{e_4 \cdot e_4} = \overline{e_1 + e_2} = \overline{0} \\ \overline{e_5} \cdot \overline{e_5} &= \overline{e_5 \cdot e_5} = \overline{e_2} \qquad = \overline{0} \\ \overline{e_6} \cdot \overline{e_6} &= \overline{e_6 \cdot e_6} = \overline{e_2 + e_5} \ = \overline{e_5} \neq \overline{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $ann\,(\mathcal{A}/ann\,(\mathcal{A})) = \langle \overline{e_4}, \overline{e_5} \rangle$ y $\mathcal{A}/ann\,(\mathcal{A})$ no es no degenerada.

CAPÍTULO 3

Grafos

SECCION 3.1

Conceptos Básicos

Definición 3.1 *Un **grafo** G es un par ordenado (V, E), donde*

- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$ *es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices.*
- $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ *es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V; los elementos de E se conocen como las aristas del grafo G.*

Observaciones:

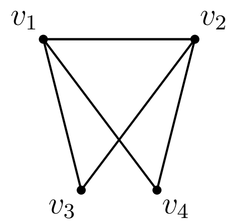
- Se denotan por $V(G)$ y $E(G)$ al conjunto de los vértices y al conjunto de las aristas de un grafo G, respectivamente.
- El número de vértices de un grafo se conoce como el **orden del grafo** y el número de aristas se conoce como el **tamaño del grafo**.
- El orden y tamaño de un grafo G se denota por $n(G)$ y $m(G)$, respectivamente.
- Un **lazo** en un grafo $G = (V, E)$, es un arista $e \in E$ tal que $e = \{v, v\}$, para algún $v \in V$.
- Cada grafo puede ser representado por un diagrama en el plano. En este diagrama cada vértice es representado por un punto y vértices diferentes son representados por puntos diferentes; además cada arista es representada por un segmento de recta o arco que une al par de puntos correspondientes a la arista.

En este trabajo nos vamos a limitar a grafos de orden finito y sin lazos.

Ejemplo 3.1 *Consideremos los conjuntos*

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ E &= \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\} \end{aligned}$$

El grafo $G(V, E)$ se puede representar por medio del siguiente diagrama:



El orden del grafo G es 4 y su tamaño es 5.

Observación: Un arista $\{u, v\}$ comúnmente se denota por uv, así el conjunto de aristas del grafo en el ejemplo anterior se puede escribir

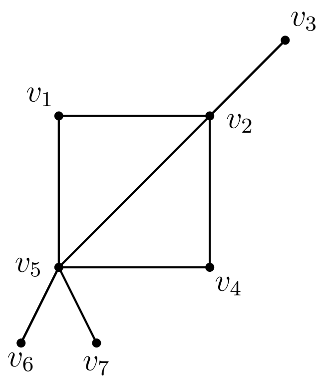
$$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$$

Definición 3.2 *Un grafo H es* ***subgrafo*** *de un grafo G, si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.*

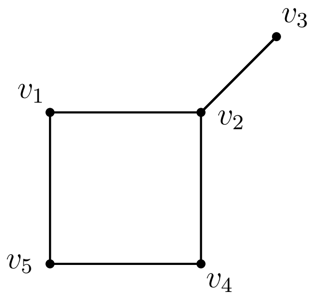
Definición 3.3 *Un subgrafo H de G es un* ***subgrafo inducido*** *en G, si toda arista $e = uv$ de G con $u, v \in V(H)$ es un arista de H.*

Definición 3.4 *Sea G un grafo y $U \subseteq V(G)$. Un subgrafo H de G es* ***inducido por*** *U, si H es un subgrafo inducido y $V(H) = U$.*

Ejemplo 3.2 *Consideremos el grafo G representado por el siguiente diagrama*



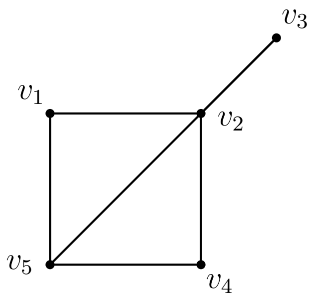
El grafo H_1 representado por el diagrama



es un subgrafo de G, porque

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \subseteq V(G) \quad y \quad \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_1\} \subseteq E(G),$$

pero no es un subgrafo inducido, ya que $v_2, v_5 \in V(H_1)$ y $v_2v_5 \in E(G)$, pero $v_2v_5 \notin E(H_1)$. Análogamente el grafo H_2 representado por el diagrama



es un subgrafo inducido en G, además H_2 es el subgrafo inducido por el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Definición 3.5 *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Decimos que:*

- *Los vértices $u, v \in V$ son **adyacentes** o vecinos, si uv es un arista de G, es decir, $uv \in E$.*
- *El arista $e \in E$ es **incidente** al vértice $u \in V$, si existe $v \in V$ tal que $e = uv$.*
- *Las aristas $e, f \in E$ son **adyacentes**, si existe un vértice $u \in V$ tal que e y f son incidentes a u; en este caso decimos que e y f tienen un vértice en común.*

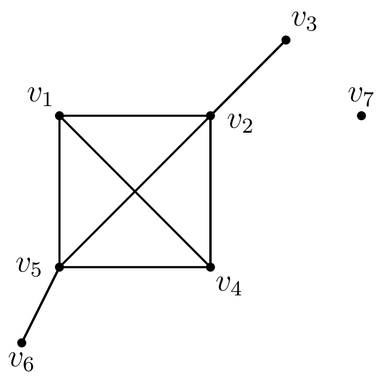
Ejemplo 3.3 *En el grafo G del ejemplo 3.2 los vértices v_1 y v_2 son adyacentes, las aristas v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4 y v_2v_5 son incidentes al vértices v_2 y por lo tanto son aristas adyacentes.*

Definición 3.6 *Sea $G = (V, E)$ un grafo:*

- *La **vecindad** de un vértice $v \in V$, es el conjunto de vecinos de v en el grafo G y se denota por $N_G(v)$.*
- *El **grado de un vértice** $v \in V$, es el número de vecinos de v en el grafo G y se denota por $d_G(v)$.*

- *Un vértice es **aislado**, si su grado es* 0.
- *Un vértice es **colgante**, si su grado es* 1.
- *Un arista es un **arista colgante**, si es incidente a un vértice colgante.*

Ejemplo 3.4 *Consideremos el grafo G representado por el siguiente diagrama*



en este grafo

$$\begin{array}{llll} N_G(v_1) = & \{v_2, v_4, v_5\}, & & N_G(v_5) = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}, \\ N_G(v_2) = & \{v_1, v_3, v_4, v_5\}, & & N_G(v_6) = \{v_5\}, \\ N_G(v_3) = & \{v_2\}, & & N_G(v_7) = \emptyset. \\ N_G(v_4) = & \{v_1, v_2, v_5\} & , & \end{array}$$

Podemos observar que, el vértice v_7 es un vértice aislado, los vértices v_3 y v_6 son vértices colgantes y por lo tanto las aristas v_5v_6 y v_2v_3 son aristas colgantes, los vértices v_1 y v_4 tienen grado 3 y los vértices v_2 y v_5 tienen grado 4.

El siguiente teorema nos muestra la relación entre el grado de los vértices y el tamaño del grafo.

Teorema 3.1 *La suma de los grados de los vértices de un grafo, es igual a dos veces el tamaño del grafo.*

Demostración:
Si u es un vértice de G, claramente $d_G(u)$ es el número de aristas incidentes al vértice u, y dado que cada arista incide en dos vértices diferentes, entonces, la suma de los grados de todos los vértices de G es igual a $2\,m(G)$.
Por lo tanto, si $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2\,m(G)$$

Corolario 3.1 *En un grafo G, el número de vértices de grado impar es par.*

Demostración: *Sea V el conjunto de vértices de el grafo G, definamos*

$$V_1 = \{v \in V \mid d(v) \text{ es par}\}, \qquad V_2 = \{v \in V \mid d(v) \text{ es impar}\}.$$

Para cada $v \in V_1$ existe $\alpha_v \in \mathbb{N}$ tal que $d(v) = 2\alpha_v$ y para cada $v \in V_2$ existe $\lambda_v \in \mathbb{N}$ tal que $d(v) = 2\lambda_v + 1$. Además por el teorema anterior

$$\begin{aligned} 2\,m(G) &= \sum_{v\in V} d(v) \\ &= \sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v) \\ &= \sum_{v\in V_1} 2\alpha_v + \sum_{v\in V_2} (2\lambda_v + 1) \\ &= 2\left(\sum_{v\in V_1} \alpha_v + \sum_{v\in V_2} \lambda_v\right) + |V_2| \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado.

Notemos que el número máximo de aristas en un grafo de n vértices es $\frac{n(n-1)}{2}$.

En los ejemplos anteriores hemos visto que un grafo se puede representar por medio de un dibujo o gráfico, otra forma de representar un grafo es por medio de una matriz [13, p. 29].

Definición 3.7 *La **matriz de adyacencia** de un grafo G con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$, es la matriz cuadrada $M(G) = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in E(G) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta matriz es simétrica.

SECCION 3.2

Algunas familias de grafos.

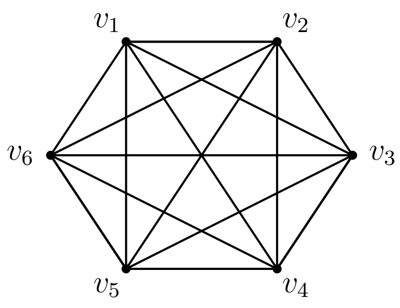
En esta sección vamos a presentar algunas familias de grafos.

Definición 3.8 *Decimos que un grafo G es **completo de orden** n y lo denotamos por K_n, si este tiene n vértices y $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas, es decir, todas sus aristas están conectadas.*

Ejemplo 3.5 *Consideremos el grafo completo K_6, entonces*

$$\begin{aligned} V(K_6) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \\ E(K_6) &= \{v_i v_j \mid 1 \leq i \lneq j \leq 6\}. \end{aligned}$$

K_6 se puede representar por medio del siguiente diagrama:



Este grafo tiene 15 *aristas y cada vértice tiene grado* 5*; además su matriz de adyacencia es:*

$$M(K_6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

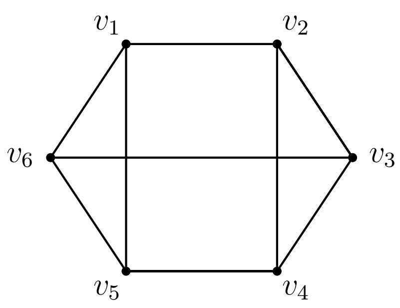
Definición 3.9 *Decimos que un grafo G es k-**regular**, si todos sus vértices tienen grado k.*

Notemos que K_{n+1} es n-regular.

Ejemplo 3.6 *Consideremos el grafo completo G con vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y matriz de adyacencia*

$$M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este grafo se puede representar por medio del siguiente diagrama:



Cada vértice de este grafo tiene grado 3*; además su tamaño viene dado por*

$$m(G) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} d_G(v_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} 3 = \frac{1}{2}(3)(6) = 9.$$

Podemos encontrar la siguiente caracterización de los grafos regulares en [14, p.12].

Teorema 3.2 *Para enteros r y n existe un grafo r-regular de grado n, si y solo si, $0 \leq r \leq n-1$ y r, n no son ambos impares.*

Definición 3.10 *Decimos que un grafo G es **bipartito**, si existen $X, Y \subset V(G)$ tal que:*

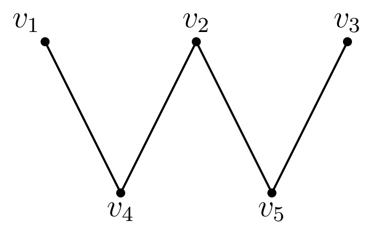
- *X, Y son no vacíos, $X \cup Y = V(G)$ y $X \cap Y = \emptyset$.*
- *Si $e = uv \in E(G)$, entonces $u \in X$, si y solamente si, $v \in Y$.*

En este caso decimos que (X, Y) es una partición de G.

Ejemplo 3.7 *Consideremos el grafo G, con conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y matriz de adyacencia*

$$M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este grafo se puede representar por medio del siguiente diagrama:



Dado que podemos particionar $V(G)$ en los siguientes conjuntos:

$$X = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad Y = \{v_4, v_5\}$$

y se puede observar que:

- *X, Y son no vacíos y $X \cup Y = V(G)$.*
- *Si $e = uv \in E(G)$, entonces $u \in X$, si y solamente si, $v \in Y$.*

Entonces G es un grafo bipartito, con partición (X, Y).

Definición 3.11 *Decimos que un grafo G es **bipartito completo**, si existen $X, Y \subset V(G)$ tal que*

- *(X, Y) es una partición de G.*
- *Si $u \in X$ y $v \in Y$, entonces $e = uv \in E(G)$.*

Si $|X| = s$ *y* $|Y| = t$*, entonces denotamos por* $K_{s,t}$ *al grafo bipartito completo* G*.*

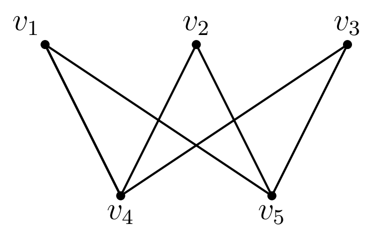
Observaciones:

- El grafo bipartito completo $K_{s,t}$ tiene orden $s + t$ y tamaño st.
- Aunque el grafo del ejemplo 3.7 es bipartito, no es bipartito completo. Para esto basta observar que $v_1 \in X$ y $v_5 \in Y$ pero $v_1v_5 \notin E(G)$.
- Un grafo bipartito completo de la forma $K_{1,n}$, es conocido como **grafo estrella**.

Ejemplo 3.8 *Consideremos el grafo* G*, con conjunto de vértices* $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *y matriz de adyacencia:*

$$M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este grafo se puede representar por medio del siguiente diagrama:



$V(G)$ *puede ser particionado en los siguientes conjuntos:*

$$X = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad Y = \{v_4, v_5\}$$

y se puede observar que:

- X, Y *son no vacíos y* $X \cup Y = V(G)$*.*
- *Si* $e = uv \in E(G)$*, entonces* $u \in X$*, si y solamente si,* $v \in Y$*.*
- *Si* $u \in X$ *y* $v \in Y$*, entonces* $e = uv \in E(G)$*.*

Por lo tanto $G = K_{3,2}$*.*

Los grafos bipartitos hacen parte de una familia mas grande de grafos, los grafos multipartitos que son estudiado en [14, p.16].

Definición 3.12 *Decimos que un grafo* G *es* k***-partito****, si existen* $V_1, V_2, \ldots, V_k \subset V(G)$ *tal que:*

- $V_i \neq \emptyset$ *para todo* $1 \leq i \leq k$*.*

- $V_i \cap V_j = \emptyset$ *para todo* $1 \leq i \lneq j \leq k$ *y* $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V(G)$.
- *Si* $e = uv \in E(G)$, *entonces existen* i, j *tal que* $u \in V_i$ *y* $v \in V_j$.

En este caso decimos que $(V_1, \ldots, V_k)$ *es una* ***partición*** *de* G.

Definición 3.13 *Decimos que un grafo* G *es* k***-partito completo****, si existen* $V_1, \ldots, V_k \subset V(G)$ *tal que:*

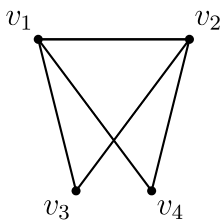
- $(V_1, \ldots, V_k)$ *es una partición de* G.
- *Si* $u \in V_i$ *y* $v \in V_j$, *entonces* $e = uv \in E(G)$.

Si $|V_i| = \alpha_i$, *entonces denotamos por* $K_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ *al grafo k-partito completo* G.

Ejemplo 3.9 *Consideremos el grafo* G, *con conjunto de vértices* $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *y matriz de adyacencia:*

$$M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este grafo se puede representar por medio del siguiente diagrama



Podemos particionar $V(G)$ *en los siguientes conjuntos*

$$X = \{v_3, v_4\}, \qquad Y = \{v_1\}, \qquad Z = \{v_2\}$$

y se puede observar que:

- X, Y, Z *son no vacíos, disjuntos dos a dos y* $X \cup Y \cup Z = V(G)$.
- *Si* $e = uv \in E(G)$, *entonces* $u \in X$, *si y solamente si,* u, v *no pertenecen al mismo conjunto.*

Por lo tanto $G = K_{1,1,2}$.

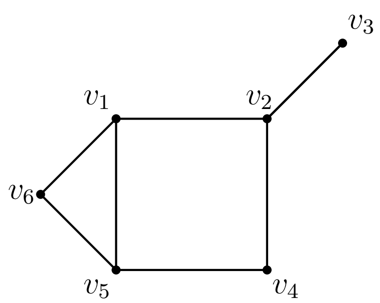
SECCION 3.3

Conexidad y Caminos.

Definición 3.14 *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Decimos que:*

- *Un **recorrido** en G es una sucesión de vértices $v_1v_2 \ldots v_n$ tal que, $v_iv_{i+1} \in E$ para todo i con $1 \leq i \leq n-1$. En este caso v_1 es el vértice inicial del recorrido y v_n es el vértice final del recorrido.*
- *Un recorrido $v_1v_2 \ldots v_n$ en G es **cerrado**, si $v_1 = v_n$, en otro caso el recorrido es **abierto**.*
- *Una **trayectoria** en G es un recorrido en G donde para cada par i, j con $i \neq j$, $v_iv_{i+1} \neq v_jv_{j+1}$.*
- *Un **camino** en G es un recorrido en G donde todos los vértices son diferentes.*
- *Un **ciclo** en G es un recorrido $v_1v_2 \ldots v_n$ en G tal que, $v_1v_2 \ldots v_{n-1}$ es un camino y $v_n = v_1$.*
- *La **longitud de un camino** es el número de vértices en él.*

Ejemplo 3.10 *Consideremos el grafo G representado por el siguiente diagrama:*



La sucesión $v_6v_1v_2v_4v_5v_1v_2v_3$ es un recorrido en G con vértice inicial v_6 y vértice final v_3, dado que estos dos vértices son diferentes el recorrido es abierto; mientras que la sucesión $v_6v_1v_2v_4v_5v_1v_6$ es un recorrido en G con vértice inicial v_6 y vértice final v_6, dado que estos dos vértices son iguales el recorrido es cerrado; en ambos casos se pasa dos veces por una misma arista, por lo tanto estos recorridos no son trayectorias.

También podemos considerar la sucesión $v_1v_2v_4v_5v_1v_6$, la cual es un recorrido con vértice inicial v_1 y vértice final v_6, que además no repite arista y por lo tanto es una trayectoria; pero no es camino porque $v_1v_2v_4v_5v_1$ repite el vértice v_1.

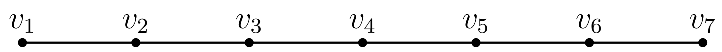
La sucesión $v_1v_2v_4v_5$ es un recorrido que no repite vértices, por lo tanto es un camino.

Finalmente la sucesión $v_1v_2v_4v_5v_6v_1$ cumple que $v_1v_2v_4v_5v_6$ es un camino y el vértice inicial v_1 es igual al vértice final v_1, por lo tanto es un ciclo.

Definición 3.15 *Sea $G = (V, E)$ un grafo, decimos que:*

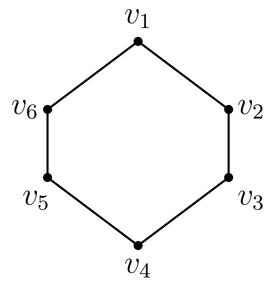
- *G es un* ***grafo camino*** *de k vértices y lo denotamos P_k, Si $n(G) = k$ y G es un camino en G.*
- *G es un* ***grafo ciclo*** *de k vértices y lo denotamos C_k, Si $n(G) = k$ y G es un ciclo en G.*

Ejemplo 3.11 *Consideremos el siguiente grafo G:*



Claramente $n(G) = 7$ y G es un camino en si mismo, por lo tanto $G = P_7$.

Ejemplo 3.12 *Consideremos el siguiente grafo G*

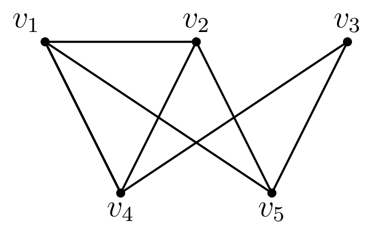


Claramente $n(G) = 6$ y G es un ciclo en si mismo, por lo tanto $G = C_6$.

El concepto de ciclo se puede utilizar para caracterizar los grafos bipartitos, dicha caracterización se encuentra en [15, p.15] y es dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.3 *Un grafo es bipartito, si y solo si, no contiene ciclos impares.*

Ejemplo 3.13 *El grafo representado por el diagrama*



contiene el ciclo $v_1v_2v_4v_1$ que tiene longitud impar, por lo tanto no es un grafo bipartito.

Definición 3.16 *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $u, v \in V$. Decimos que u y v están* ***conectadas****, si existe un camino $u_1u_2 \ldots u_n$ en G, tal que $u_1 = u$ y $u_2 = v$.*

Observaciones:

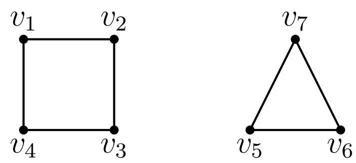
- En el conjunto de vértices de un grafo $G = (V, E)$ podemos definir la relación

$$u \sim v \iff u \text{ y } v \text{ están conectados.}$$

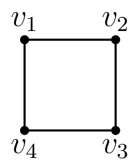
  Es fácil ver que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva; por lo tanto es una relación de equivalencia.

- Si $V_1, \ldots, V_w$ son las clases de equivalencia determinadas por la relación anterior, entonces los subgrafos $G(V_1), \ldots G(V_w)$, inducidos por $V_1, \ldots V_w$ en G, son llamados **componentes conexas** de G.

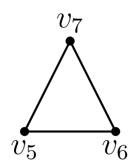
Ejemplo 3.14 *Consideremos el siguiente grafo G:*



en él las clases de equivalencia son $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $V_2 = \{v_5, v_6, v_7\}$, las cuales determinan dos componentes conexas. La componente $G(V_1)$ es:



y la componente $G(V_2)$ es:



Definición 3.17 *Un grafo G es **conexo**, cuando solo tiene una componente conexa.*

Podemos relacionar, como se ve en el teorema [15, p.14], la conexidad con el grado mínimo del grafo, este se define de la siguiente manera:

Definición 3.18 *Sea G un grafo con conjunto de vértices V. Definimos el **grado mínimo** del grafo, denotado por δ, por:*

$$\delta := \min_{v \in V} \{d_G(v)\}$$

Teorema 3.4 *Si G es un grafo y $\delta \geq \frac{n-1}{2}$, entonces G es conexo.*

Es natural pensar que a partir de dos o mas grafos se puede construir uno nuevo, una forma de hacer esto se puede encontrar en [15, p.25] y se presenta a continuación:

Definición 3.19 *Sean dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$. Definimos $G_1 \vee G_2$,* ***el join de*** *G_1* ***y*** *G_2, como el grafo con el conjunto de vértices*

$$V(G_1 \vee G_2) = V_1 \cup V_2$$

y el conjunto de aristas

$$E(G_1 \vee G_2) = E_1 \cup E_2 \cup \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}.$$

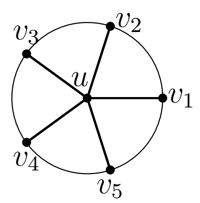
Ejemplo 3.15 *Consideremos el grafo ciclo C_5 y el grafo de un solo punto K_1, donde*

$$\begin{aligned} V(C_5) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, & V(K_1) = \{u\}, \\ E(C_5) &= \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}, & E(K_1) = \emptyset. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} V(C_5 \vee K_1) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u\} \\ E(C_5 \vee K_1) &= \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, v_1u, v_2u, v_3u, v_4u, v_5u\} \end{aligned}$$

y $C_5 \vee K_1$ se puede graficar de la siguiente manera:



Por su particular forma este grafo es llamado ***grafo rueda*** *y se denota por W_6. En general $C_n \vee K_1$ es un* ***grafo rueda con*** *$n+1$ vértices y se denota por W_{n+1}.*

Otro concepto importante en el estudio de los grafos es el de arista de corte y k-conexidad.

Definición 3.20 *Sea G un grafo conexo con conjunto de vértices V y $V_1 \subset V$. Denotamos por $G - V_1$ el grafo generado por el conjunto de vértices $V - V_1$.*
Si $V_1 = \{v\}$, entonces denotamos por $G - v$ al grafo $G - \{v\}$.

Definición 3.21 *Sea G un grafo conexo con conjunto de vértices V. El subconjunto $V_1 \subset V$ se llama* ***corte por vértices****, si $G - V_1$ es un grafo no conexo.*

Observaciones:

- Si G un grafo con conjunto de vértices V y $V_1 \subset V$, entonces el grafo $G - V_1$ es el subgrafo generado por el conjunto de vértices $V - V_1$.

- V_1 es un **k-corte por vértices**, si V_1 es un corte por vértices y $|V_1| = k$.

- $v \in V$ es un **vértice de corte**, si $V_1 = \{v\}$ es un corte por vértices.

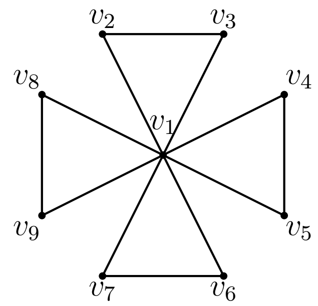
Ejemplo 3.16 *Consideremos el grafo G, con conjuntos de vértices*

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$$

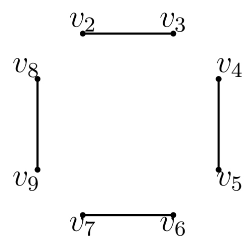
y matriz de adyacencia

$$M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este grafo se puede representar por medio del siguiente diagrama



Es fácil observar que si retiramos el vértice v_1, obtenemos el grafo



el cual no es conexo, por lo tanto v_1 es un vértice de corte.

Podemos observar que el grafo anterior se obtiene de unir 4 ciclos de orden 3 por un punto, en general denotamos por F_n al grafo resultante de unir n ciclos de orden 3.

Observaciones:

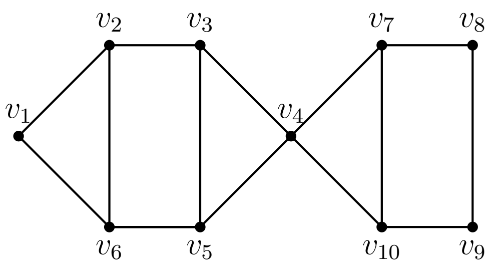
- El grafo F_n es conocido como **grafo de la amistad**, su orden es $2n + 1$ y su tamaño es $3n$.

- Si n es un número impar, denotamos por $\overline{F_n}$ al grafo de la amistad con n aristas.
- $F_n = \overline{F_{2n+1}}$

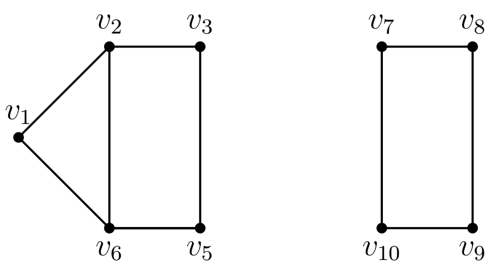
El grafo en el ejemplo 3.16, es un grafo de la amistad con 9 aristas, por lo tanto $G = F_4 = \overline{F_9}$.

Definición 3.22 *Un grafo G es k-**conexo**, si existe un k-corte por vértices en G y si para todo $0 \lneq t \lneq k$, no existe un t-corte por vértices en G.*

Ejemplo 3.17 *Consideremos el grafo G representado por el siguiente diagrama:*

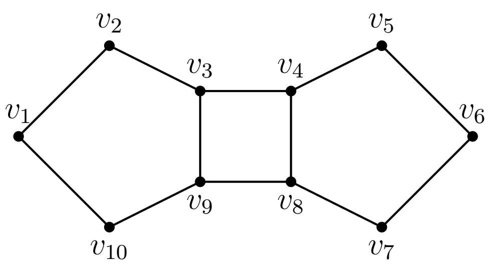


El grafo $G - v_4$ se puede representar de la siguiente manera:

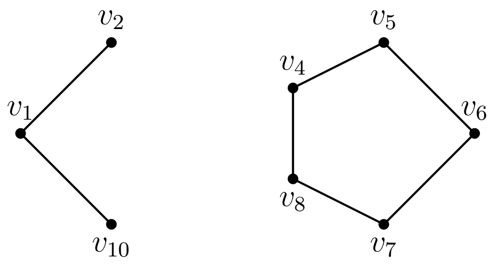


Claramente $G - v_4$ es un grafo no conexo, por lo tanto v_4 es un corte por vértices y G es 1-conexo.

Ejemplo 3.18 *Consideremos el grafo G representado por el siguiente diagrama:*



El grafo $G - \{v_3, v_9\}$ se puede representar de la siguiente manera:



el cual no es conexo, por lo tanto $\{v_3, v_9\}$ es un corte por vértices de cardinalidad 2. Se puede observar que G no tiene vértices de corte, por lo tanto G no es 1-conexo, pero si es 2-conexo.

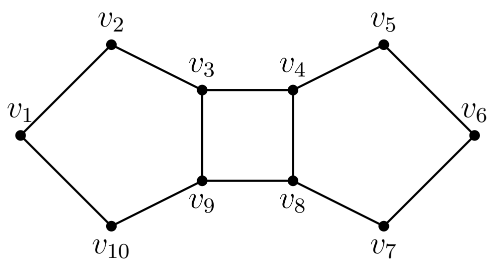
Definición 3.23 *Sea G un grafo.*

- *Dos caminos $P_1 = v_1v_2 \ldots v_n$ y $P_2 = u_1u_2 \ldots u_m$* ***son internamente disjuntos****, si $v_i \neq u_j$ para todo $1 \lneq i \lneq n$ y $1 \lneq j \lneq m$.*
- *Una familia de dos o mas caminos en G es* ***internamente disjunta****, si cualquier par de caminos diferentes son internamente disjuntos.*

La k-conexidad de un grafo se puede caracterizar por medio del concepto de caminos internamente disjuntos [15, p.68], como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 3.5 (Teorema de Whitney) *Un grafo G con $n(G) \geq k+1$ vértices es k-conexo, si y solo si, para cualquier par de vértices existen al menos $k+1$ caminos internamente disjuntos entre ellos.*

Ejemplo 3.19 *En el grafo*



podemos encontrar dos caminos internamente disjuntos entre el vértice v_1 y el vértice v_6, estos son $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ y $v_1v_{10}v_9v_8v_7v_6$, en el ejemplo 3.18 vimos que el grafo G es 2-conexo, entonces por el Teorema de Whitney, entre cualquier par de vértices de G existen dos caminos internamente disjuntos.

CAPÍTULO 4

Álgebras de evolución asociadas a un grafo

SECCION 4.1

Álgebras de evolución

Definición 4.1 *Si $G = (V, E)$ es un grafo con matriz de adyacencia $A = (a_{ij})$, el álgebra de evolución $\mathcal{A}(G)$ con base natural $S = \{e_i \mid i \in V\}$, y relaciones dadas por*

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_i &= \sum_{k \in V} a_{ik} e_k, \quad \textit{para todo } i \in V \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad\qquad\quad \textit{para } i \neq j, \end{aligned}$$

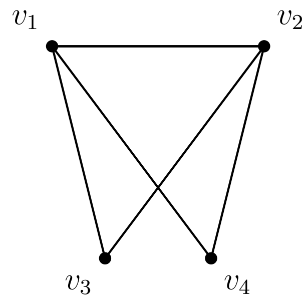
es el ***álgebra de evolución asociada al grafo*** *G.*

Definición 4.2 *Si $G = (V, E)$ es un grafo con matriz de adyacencia $A = (a_{ij})$, el álgebra de evolución $\mathcal{A}_{RW}(G)$ con base natural $S = \{e_i \mid i \in V\}$, y relaciones dadas por*

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_i &= \sum_{k \in V} \left(\frac{a_{ik}}{d_i} \right) e_k, \quad \textit{para todo } i \in V \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad \textit{para } i \neq j, \end{aligned}$$

donde d_i es el número de vecinos del vértice v_i; es el ***álgebra de evolución asociada al camino aleatorio sobre el grafo*** *G.*

Ejemplo 4.1 *Consideremos el grafo* $K_{1,1,2}$



con matriz de adyacencia

$$M\left(K_{1,1,2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *y las siguientes relaciones:*

$$\mathcal{A}\left(K_{1,1,2}\right) : \quad \begin{cases} e_1 \cdot e_1 &= e_2 + e_3 + e_4 \\ e_2 \cdot e_2 &= e_1 + e_3 + e_4 \\ e_3 \cdot e_3 &= e_1 + e_2 \\ e_4 \cdot e_4 &= e_1 + e_2 \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad\qquad \textit{para } i \neq j \end{cases}$$

y

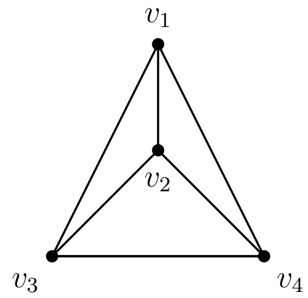
$$\mathcal{A}_{RW}\left(K_{1,1,2}\right) : \begin{cases} e_1 \odot e_1 &= \dfrac{1}{3}\left(e_2 + e_3 + e_4\right) \\ e_2 \odot e_2 &= \dfrac{1}{3}\left(e_1 + e_3 + e_4\right) \\ e_3 \odot e_3 &= \dfrac{1}{2}\left(e_1 + e_2\right) \\ e_4 \odot e_4 &= \dfrac{1}{2}\left(e_1 + e_2\right) \\ e_i \odot e_j &= 0, \qquad\qquad \textit{para } i \neq j\ . \end{cases}$$

El objetivo de este capítulo es encontrar las familias de grafos donde las dos álgebras de evolución sean isomorfas.

SECCION 4.2

Grafos regulares.

Ejemplo 4.2 *Consideremos el grafo regular* G_4



Entonces las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *y las siguientes relaciones:*

$$\mathcal{A}(G_4) : \quad \begin{cases} e_1 \cdot e_1 &= e_2 + e_3 + e_4 \\ e_2 \cdot e_2 &= e_1 + e_3 + e_4 \\ e_3 \cdot e_3 &= e_1 + e_2 + e_4 \\ e_4 \cdot e_4 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad\qquad \text{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}(G_4) : \begin{cases} e_1 \odot e_1 &= \frac{1}{3}(e_2 + e_3 + e_4) \\ e_2 \odot e_2 &= \frac{1}{3}(e_1 + e_3 + e_4) \\ e_3 \odot e_3 &= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_4) \\ e_4 \odot e_4 &= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ e_i \odot e_j &= 0, \qquad\qquad \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Claramente podemos definir la función $\overline{g} : S \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}(G_4)$ *por* $\overline{g}(e_i) = 3e_i$.
Esta función se puede extender a una transformación lineal $g : \mathcal{A}(G_4) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}(G_4)$, *de la siguiente manera:*

Si $x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i \in \mathcal{A}(G_4)$, *entonces:*

$$\begin{aligned} g(x) &= g\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{4} g(\alpha_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \overline{g}(e_i) = 3\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i = 3x. \end{aligned}$$

Veamos ahora que g es algebraica

$$\begin{aligned} g\left(e_1 \cdot e_1\right) &= g\left(e_2 + e_3 + e_4\right) \\ &= g(e_2) + g(e_3) + g(e_4) \\ &= 3\left(e_2 + e_3 + e_4\right) \\ &= 9\left(e_1 \odot e_1\right) \\ &= g\left(e_1\right) \odot g\left(e_1\right), \end{aligned}$$

análogamente se puede probar que

$$g\left(e_i \cdot e_i\right) = g\left(e_i\right) \odot g\left(e_i\right), \qquad \textit{para } i = 1, 2, 3, 4.$$

Por lo tanto, si $x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i \in \mathcal{A}\left(G_4\right)$, *entonces:*

$$\begin{aligned} g\left(x \cdot y\right) &= g\left(\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{4} \beta_j e_j\right)\right) \\ &= g\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \alpha_i \beta_j \left(e_i \cdot e_j\right)\right) \\ &= g\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \beta_i \left(e_i \cdot e_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \beta_i \left(g\left(e_i \cdot e_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \beta_i \left(e_i \odot e_i\right), \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} x \odot y &= \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i\right) \odot \left(\sum_{j=1}^{4} \beta_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \alpha_i \beta_j \left(e_i \odot e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \beta_i \left(e_i \odot e_i\right), \end{aligned}$$

por lo cual g es algebraica.

Para ver que g es sobreyectiva, basta observar que

$$\left\{g\left(e_1\right), g\left(e_2\right), g\left(e_3\right), g\left(e_4\right)\right\} = \left\{3e_1, 3e_2, 3e_3, 3e_4\right\},$$

es una base de $A_{RW}(G)$*, por lo cual* $dim(Im(g)) = dim(\mathcal{A}_{RW}(G_4)) = 4$.

Para la inyectividad basta recordar que

$$dim(\mathcal{A}(G_4)) = dim(Ker(g)) + dim(Im(g)),$$

por lo cual

$$dim(Ker(g)) = 0$$

de donde $Ker(g)$ *es nulo y por lo tanto* g *es inyectiva.*

Además

$$\{g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4)\} = \{3e_1, 3e_2, 3e_3, 3e_4\}$$

es una base natural de $\mathcal{A}_{RW}(G_4)$*, por lo tanto* g *es un isomorfismo de evolución entre* $\mathcal{A}(G_4)$ *y* $\mathcal{A}_{RW}(G_4)$*.*

Observación:
Para facilitar nuestros cálculos vamos a utilizar los siguientes resultados:

- Sean V y U dos espacios vectoriales, en donde V es de dimensión finita. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y sean $u_1, \ldots, u_n$ vectores cualesquiera de U. Existe una única transformación lineal

  $$T : V \longrightarrow U$$

  tal que $T(v_i) = u_i$, $i = 1, \ldots, n$ [16, Teorema 1.1 Capitulo 4].

- Sean V y U espacios vectoriales de dimensión finita tales que $dim(U) = dim(V)$ y $T : V \longrightarrow U$ una transformación lineal. T es isomorfismo, si y solo si, existe una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tal que $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de U. [16, Teorema 6.4 Capitulo 4].

- Sean V y U álgebras de evolución de dimensión finita con productos $\odot, \cdot$ respectivamente. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y

  $$T : V \longrightarrow U$$

  una transformación lineal tal que $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es una base natural de U y $T(v_i \odot v_i) = T(v_i) \cdot T(v_i)$ para $i = 1 \ldots, n$. Entonces, T es un isomorfismo de evolución.

Teorema 4.1 *Si* G_d *es un grafo d-regular, entonces* $\mathcal{A}(G_d)$ *y* $\mathcal{A}_{RW}(G_d)$ *son isomorfas como álgebras de evolución. [17]*

Demostración:
Si G_d *es un grafo d-regular con* n *vértices, entonces las dos álgebras de evolución*

vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y las siguientes relaciones:

$$\mathcal{A}(G_d): \begin{cases} e_i \cdot e_i &= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \qquad i = 1, \ldots, n \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad \text{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}(G_d): \begin{cases} e_i \odot e_i &= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{d}\right) e_j, \qquad i = 1, \ldots, n \\ e_i \odot e_j &= 0, \qquad \text{para } i \neq j \ . \end{cases}$$

Sea $g : \mathcal{A}(G_d) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}(G_d)$ la única transformación lineal tal que $g(e_i) = de_i$. Claramente g es una transformación lineal biyectiva y además

$$\begin{aligned} g(e_i \cdot e_i) &= g\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g(e_j) \\ &= d \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \\ &= d^2 (e_i \odot e_i) \\ &= g(e_i) \odot g(e_i) \end{aligned}$$

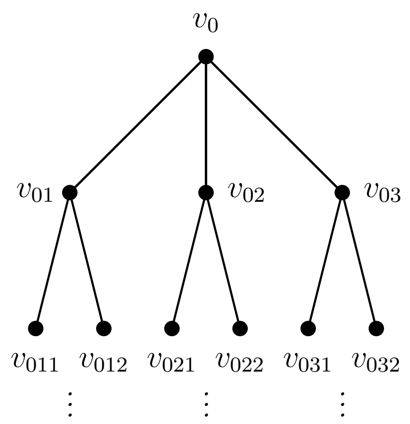
y

$$\{g(e_1), \ldots, g(e_n)\} = \{de_1, \ldots, de_n\}$$

es una base natural de $\mathcal{A}_{RW}(G_d)$, por lo tanto g es un isomorfismo de evolución entre $\mathcal{A}(G_d)$ y $\mathcal{A}_{RW}(G_d)$. □

Observación: Aunque el teorema anterior se demuestra para grafos regulares con n vértices, el razonamiento se puede utilizar para grafos regulares de infinitos vértices donde cada vértice tiene d vecinos, con d finito.

Ejemplo 4.3 *El árbol homogéneo d-dimensional $\mathbb{T}_d$ es un grafo infinito en que cada vértice tiene grado $d+1$, y todo par de vértices están conectado por un único camino.*



Árbol homogéneo 2-dimensional $\mathbb{T}_2$

Sea $\mathbb{T}_2 = (V, E)$*. Entonces las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores* $S = \{e_i \mid i \in V\}$ *y las siguientes relaciones:*

$$\mathcal{A}(\mathbb{T}_2) : \quad \begin{cases} e_i \cdot e_i = \sum_{j \in V} a_{ij} e_j, & i \in V \\ e_i \cdot e_j = 0, & para\ j \neq i \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}(\mathbb{T}_2) : \begin{cases} e_i \odot e_i = \sum_{j \in V} \left(\frac{a_{ij}}{3}\right) e_j, & i = 1, \ldots, n \\ e_i \odot e_j = 0, & para\ j \neq i\ . \end{cases}$$

Siguiendo la demostración anterior podemos definir la transformación

$$g : \mathcal{A}(\mathbb{T}_2) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}(\mathbb{T}_2)$$

por $g(e_i) = 3e_i$*. Claramente* g *es una transformación lineal biyectiva y además*

$$\begin{aligned} g(e_i \cdot e_i) &= g\left(\sum_{j \in V} a_{ij} e_j\right) \\ &= \sum_{j \in V} a_{ij} g(e_j) \\ &= 3 \sum_{j \in V} a_{ij} e_j \\ &= 9(e_i \odot e_i) \\ &= g(e_i) \odot g(e_i) \end{aligned}$$

y

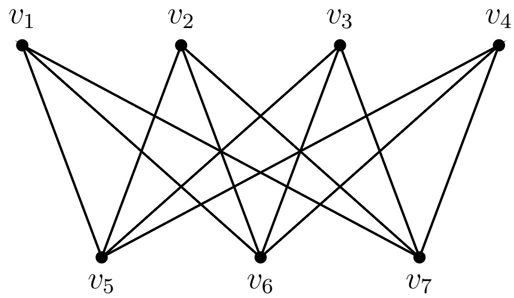
$$\{g(e_i) \mid i \in V\} = \{3e_i \mid i \in V\}$$

es una base natural de $\mathcal{A}_{RW}(\mathbb{T}_2)$*, por lo tanto* g *es un isomorfismo de evolución entre* $\mathcal{A}(\mathbb{T}_2)$ *y* $\mathcal{A}_{RW}(\mathbb{T}_2)$*.*

SECCION 4.3

Grafos bipartitos completos

Ejemplo 4.4 *Consideremos el siguiente grafo bipartito completo* $K_{4,3}$



Entonces las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ *y las siguientes relaciones:*

$$\mathcal{A}(K_{4,3}): \quad \begin{cases} e_i \cdot e_i = e_5 + e_6 + e_7, & \textit{para } i = 1,2,3,4 \\ e_i \cdot e_i = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, & \textit{para } i = 5,6,7 \\ e_i \cdot e_j = 0, & \textit{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}(K_{4,3}): \begin{cases} e_i \odot e_i = \frac{1}{3}(e_5 + e_6 + e_7) & \textit{para } i = 1,2,3,4 \\ e_i \odot e_i = \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) & \textit{para } i = 5,6,7 \\ e_i \odot e_j = 0, & \textit{para } i \neq j. \end{cases}$$

Supongamos que existe una transformación $g : \mathcal{A}(K_{4,3}) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}(K_{4,3})$ *dada por* $g(e_i) = \alpha_i e_i$ *con* $\alpha_i \neq 0$ *y además*

$$g(e_i \cdot e_i) = g(e_i) \odot g(e_i).$$

Por lo tanto para $i = 1, 2, 3, 4$

$$g(e_i \cdot e_i) = g(e_5 + e_6 + e_7) = g(e_5) + g(e_6) + g(e_7) = \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7 \tag{4.1}$$

y para $i = 5, 6, 7$

$$\begin{aligned} g(e_i \cdot e_i) &= g(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\ &= g(e_1) + g(e_2) + g(e_3) + g(e_4) \\ &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, \end{aligned} \tag{4.2}$$

además

$$g(e_i) \odot g(e_i) = \alpha_i^2 (e_i \odot e_i). \tag{4.3}$$

Así de (4.1), (4.2) *y* (4.3) *podemos concluir que:*

$$\begin{array}{c} \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 \qquad y \\ \alpha_5^2 = \alpha_6^2 = \alpha_7^2. \end{array}$$

Si tomamos

$$\begin{array}{c} \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \qquad y \\ \beta = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 \end{array}$$

tenemos de (4.1), (4.2) *y* (4.3) *que:*

$$\begin{aligned} \beta\left(e_5 + e_6 + e_7\right) &= \frac{\alpha^2}{3}\left(e_5 + e_6 + e_7\right) \quad y \\ \alpha\left(e_1 + e_2 + e_3 + e_4\right) &= \frac{\beta^2}{4}\left(e_1 + e_2 + e_3 + e_4\right) \end{aligned}$$

de donde,

$$\beta = \frac{\alpha^2}{3} \qquad y \qquad \alpha = \frac{\beta^2}{4}$$

concluyendo que:

$$\alpha = \sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{9} \quad y \qquad \beta = \sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{3}.$$

Entonces

$$g\left(e_i\right) = \begin{cases} \sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{9}e_i, & para\ i = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{3}e_i, & para\ i = 5, 6, 7. \end{cases}$$

Es fácil verificar que g es una aplicación lineal y que para $i = 1, 2, 3, 4$, se tiene que:

$$\begin{aligned} g\left(e_i \cdot e_i\right) &= g\left(e_5 + e_6 + e_7\right) \\ &= g(e_5) + g(e_6) + g(e_7) \\ &= \sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{3}\left(e_5 + e_6 + e_7\right) \\ &= 3\sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{3}\left(e_i \odot e_i\right) \\ &= 3\,\frac{\sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{9}\right)^2}\left(g\left(e_i\right) \odot g\left(e_i\right)\right) \\ &= g\left(e_i\right) \odot g\left(e_i\right) \end{aligned}$$

y para $i = 5, 6, 7$ se tiene que:

$$\begin{aligned} g\left(e_i \cdot e_i\right) &= g\left(e_1 + e_2 + e_3 + e_4\right) \\ &= g(e_1) + g(e_2) + g(e_3) + g(e_4) \\ &= \sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{9}\left(e_1 + e_2 + e_3 + e_4\right) \\ &= 4\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{9}\ \left(e_i \odot e_i\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4\frac{\sqrt[3]{4}\ \sqrt[3]{9}}{\left(\sqrt[3]{16}\ \sqrt[3]{3}\right)^2}\left(g\left(e_i\right)\odot g\left(e_i\right)\right) \\ &= g\left(e_i\right)\odot g\left(e_i\right) \end{aligned}$$

por lo tanto g es algebraica y

$$\left\{g\left(e_i\right) \mid i=1,\ldots,7\right\} = \left\{\sqrt[3]{4}\ \sqrt[3]{9}e_i \mid i=1,2,3,4\right\}\bigcup\left\{\sqrt[3]{16}\ \sqrt[3]{3}e_i \mid i=5,6,7\right\}$$

es una base natural de $\mathcal{A}_{RW}\left(K_{4,3}\right)$, por lo tanto g es un isomorfismo de evolución entre $\mathcal{A}\left(K_{4,3}\right)$ y $\mathcal{A}_{RW}\left(K_{4,3}\right)$.

Observación: Si $K_{m,n}$ es un grafo completo, entonces siguiendo el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior, un candidato a isomorfismo de evolución es

$$g : \mathcal{A}\left(K_{m,n}\right) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}\left(K_{m,n}\right)$$

dado por

$$g\left(e_i\right) = \begin{cases} m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{2}{3}}e_i, & \text{para } 1 \leqslant i \leqslant m \\ m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}e_i, & \text{para } m+1 \leqslant i \leqslant m+n. \end{cases}$$

Teorema 4.2 *Si $K_{m,n}$ es un grafo bipartito completo, entonces $\mathcal{A}\left(K_{m,n}\right)$ y $\mathcal{A}_{RW}\left(K_{m,n}\right)$ son isomorfas como álgebras de evolución. [17]*

Demostración:
Si $K_{m,n}$ es un grafo bipartito completo, entonces las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots e_{m+n}\}$ y las siguientes relaciones:

$$\mathcal{A}\left(K_{m,n}\right) : \quad \begin{cases} e_i \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n} e_{m+j}, & \textit{para } i=1,\ldots,m \\ e_i \cdot e_i = \sum_{j=1}^{m} e_j, & \textit{para } i=m+1,\ldots,m+n \\ e_i \cdot e_j = 0, & \textit{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$A_{RW}\left(K_{m,n}\right) : \begin{cases} e_i \odot e_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}e_{m+j}, & \textit{para } i=1,\ldots,m \\ e_i \odot e_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m}e_j, & \textit{para } i=m+1,\ldots,m+n \\ e_i \odot e_j = 0, & \textit{para } i \neq j. \end{cases}$$

Definimos la transformación $g : \mathcal{A}(K_{m,n}) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}(K_{m,n})$ *por*

$$g(e_i) = \begin{cases} m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}} e_i, & \text{para } 1 \leqslant i \leqslant m \\ m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}} e_i, & \text{para } m+1 \leqslant i \leqslant m+n. \end{cases}$$

Claramente g *es una transformación lineal biyectiva y para* $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} g(e_i \cdot e_i) &= g\left(\sum_{j=1}^{n} e_{m+j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(e_{m+j}) \\ &= \left(m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{m+j}\right) \\ &= \left(m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{4}{3}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\, e_{m+j}\right) \\ &= \left(m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{4}{3}}\right)(e_i \odot e_i) \\ &= \left(\frac{m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{4}{3}}}{\left(m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}\right)^2}\right)(g(e_i) \odot g(e_i)) \\ &= g(e_i) \odot g(e_i) \end{aligned}$$

análogamente para $i = m+1, \ldots, m+n$

$$g(e_i \cdot e_i) = g(e_i) \odot g(e_i),$$

por lo tanto g *es algebraica y*

$$\{g(e_i) \mid i = 1, \ldots, m+n\} = \left\{m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}} e_1, \ldots, m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}} e_m, m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}} e_{m+1}, \ldots, m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}} e_{m+n}\right\}$$

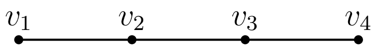
es una base natural de $\mathcal{A}_{RW}(K_{m,n})$*, por lo tanto* g *es un isomorfismo de evolución entre* $\mathcal{A}(K_{m,n})$ *y* $\mathcal{A}_{RW}(K_{m,n})$*.*

SECCION 4.4

Grafos camino.

Claramente un grafo camino con menos de cuatro vértices se puede ver como un grafo regular o un grafo bipartito completo, por lo tanto nos van a interesar los grafos caminos P_n con n mayor o igual a 4. A continuación analizaremos los homomorfismos para P_4 que muestran el comportamiento para n par y los homomorfismos para P_5 que muestran el comportamiento para n impar.

Ejemplo 4.5 *Consideremos el grafo camino P_4*



Entonces las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y las siguientes relaciones:

$$\mathcal{A}(P_4): \qquad \begin{cases} e_1 \cdot e_1 &= e_2 \\ e_2 \cdot e_2 &= e_1 + e_3 \\ e_3 \cdot e_3 &= e_2 + e_4 \\ e_4 \cdot e_4 &= e_3 \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad \text{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}(P_4): \qquad \begin{cases} e_1 \odot e_1 &= e_2 \\ e_2 \odot e_2 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_3) \\ e_3 \odot e_3 &= \frac{1}{2}(e_2 + e_4) \\ e_4 \odot e_4 &= e_3 \\ e_i \odot e_j &= 0, \qquad \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Supongamos que existe una transformación $g : \mathcal{A}(P_4) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}(P_4)$ tal que para $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$g(e_i) = \sum_{k=1}^{4} t_{ik} e_k \quad y \quad g(e_i \cdot e_j) = g(e_i) \odot g(e_j).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} g(e_i \cdot e_j) &= \left(\sum_{k=1}^{4} t_{ik} e_k\right) \odot \left(\sum_{k=1}^{4} t_{jk} e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{4} (t_{ik} t_{jk}) (e_k \odot e_k) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}t_{i2}t_{j2}e_1 + \left(t_{i1}t_{j1} + \frac{1}{2}t_{i3}t_{j3}\right)e_2 + \left(t_{i4}t_{j4} + \frac{1}{2}t_{i2}t_{j2}\right)e_3 + \frac{1}{2}t_{i3}t_{j3}e_4$$

y si $j \neq i$, entonces

$$\begin{aligned} t_{i2}t_{j2} &= 0, & t_{i1}t_{j1} + \frac{1}{2}t_{i3}t_{j3} &= 0, \\ t_{i3}t_{j3} &= 0, & t_{i4}t_{j4} + \frac{1}{2}t_{i2}t_{j2} &= 0. \end{aligned}$$

De esto se sigue que

$$t_{il}t_{jl} = 0, \qquad \textit{para } i, j, l \in \{1,2,3,4\} \textit{ con } i \neq j,$$

lo que implica que para cualquier k, $t_{ik} \neq 0$ a lo sumo para un valor de i, luego

$$g(e_i) = \sum_{k=1}^{4} t_{ik}e_k = \alpha_i e_{\sigma(i)}, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R},\ \sigma \in \mathbf{S}_4$$

por tanto

$$g(e_i \cdot e_i) = g(e_i) \odot g(e_i) = \alpha_i^2 \left(e_{\sigma(i)} \odot e_{\sigma(i)}\right). \tag{4.4}$$

En particular para $i = 1$

$$\begin{aligned} g(e_1 \cdot e_1) &= \alpha_1^2 \left(e_{\sigma(1)} \odot e_{\sigma(1)}\right) \qquad y \\ g(e_1 \cdot e_1) &= g(e_2) = \alpha_2 e_{\sigma(2)} \end{aligned}$$

de donde, $\left(e_{\sigma(1)} \odot e_{\sigma(1)}\right) = e_{\sigma(2)}$ y recordando que los únicos vértices con un solo vecino son v_1 y v_4 entonces

$$\sigma(1) \in \{1,4\}, \qquad y \qquad \alpha_2 = \alpha_1^2. \tag{4.5}$$

Análogamente tomando $i = 4$ en (4.4)

$$\begin{aligned} g(e_4 \cdot e_4) &= \alpha_4^2 \left(e_{\sigma(4)} \odot e_{\sigma(4)}\right) \qquad y \\ g(e_4 \cdot e_4) &= g(e_3) = \alpha_3 e_{\sigma(3)} \end{aligned}$$

de donde, $\left(e_{\sigma(4)} \odot e_{\sigma(4)}\right) = e_{\sigma(3)}$ y por lo tanto

$$\sigma(4) \in \{1,4\} \qquad y \qquad \alpha_3 = \alpha_4^2.$$

Luego para $i = 2, 3$, $\sigma(i) \in \{2,3\}$ y remplazando en (4.4)

$$\begin{aligned} g(e_i \cdot e_i) &= \alpha_i^2 \left(e_{\sigma(i)} \odot e_{\sigma(i)}\right) = \frac{\alpha_i^2}{2}\left(e_{\sigma(i-1)} + e_{\sigma(i+1)}\right) \qquad y \\ g(e_i \cdot e_i) &= g(e_{i-1} + e_{i+1}) \quad = g(e_{i-1}) + g(e_{i+1}) \\ &= \alpha_{i-1}e_{\sigma(i-1)} + \alpha_{i+1}e_{\sigma(i+1)} \end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{\alpha_i^2}{2}e_{\sigma(i-1)} + \frac{\alpha_i^2}{2}e_{\sigma(i+1)} = \alpha_{i-1}e_{\sigma(i-1)} + \alpha_{i+1}e_{\sigma(i+1)}$$

así para $i = 2, 3$

$$\frac{\alpha_i^2}{2} = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$$

es decir

$$\frac{\alpha_2^2}{2} = \alpha_1 = \alpha_3, \qquad \frac{\alpha_3^2}{2} = \alpha_2 = \alpha_4 \tag{4.6}$$

de donde

$$\alpha_2 \;=\; \frac{\alpha_3^2}{2} = \frac{\left(\frac{\alpha_2^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{\alpha_2^4}{8}.$$

Así

$$\alpha_2^4 - 8\alpha_2 = \alpha_2\left(\alpha_2^3 - 8\right) = 0.$$

Si $(\alpha_2^3 - 8) = 0$, *entonces* $\alpha_2 = 2$ *y por* (4.5)

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_2} = \sqrt{2}$$

y por (4.6)

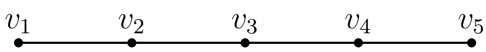
$$\alpha_1 = \frac{\alpha_2^2}{2} = 2,$$

esto es absurdo, y por lo tanto $\alpha_2 = 0$, *y así*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

de donde g *es el homomorfismo nulo.*

Ejemplo 4.6 *Consideremos el grafo camino* P_5



Entonces las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *y las siguientes relaciones:*

$$\mathcal{A}(P_5): \quad \begin{cases} e_1 \cdot e_1 &= e_2 \\ e_2 \cdot e_2 &= e_1 + e_3 \\ e_3 \cdot e_3 &= e_2 + e_4 \\ e_4 \cdot e_4 &= e_3 + e_5 \\ e_5 \cdot e_5 &= e_4 \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad \text{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}\left(P_5\right): \quad \begin{cases} e_1 \odot e_1 &= e_2 \\ e_2 \odot e_2 &= \frac{1}{2}\left(e_1+e_3\right) \\ e_3 \odot e_3 &= \frac{1}{2}\left(e_2+e_4\right) \\ e_4 \odot e_4 &= \frac{1}{2}\left(e_3+e_5\right) \\ e_5 \odot e_5 &= e_4 \\ e_i \odot e_j &= 0, \qquad \textit{para } i \neq j. \end{cases}$$

Supongamos que existe una transformación $g : \mathcal{A}\left(P_5\right) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}\left(P_5\right)$ *tal que para cada* $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$

$$g(e_i) = \sum_{k=1}^{5} t_{ik} e_k \quad y \quad g(e_i \cdot e_j) = g(e_i) \odot g(e_j), \tag{4.7}$$

veamos que g *es el homomorfismo nulo.*

Para esto vamos a dividir la prueba en varios pasos:

Paso 1:
Primero veamos que para $i \neq j$ *y* l *par:*

$$t_{il} t_{jl} = 0.$$

De (4.7) *obtenemos*

$$\begin{aligned} g\left(e_i \cdot e_j\right) &= \left(\sum_{k=1}^{5} t_{ik} e_k\right) \odot \left(\sum_{k=1}^{5} t_{jk} e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{5} \left(t_{ik} t_{jk}\right)\left(e_k \odot e_k\right) \qquad (4.8) \\ &= \frac{1}{2} t_{i2} t_{j2} e_1 + \left(t_{i1} t_{j1} + \frac{1}{2} t_{i3} t_{j3}\right) e_2 + \left(\frac{t_{i2} t_{j2} + t_{i4} t_{j4}}{2}\right) e_3 + \\ &\quad \left(t_{i5} t_{j5} + \frac{1}{2} t_{i3} t_{j3}\right) e_4 + \frac{1}{2} t_{i4} t_{j4} e_5 \end{aligned}$$

y entonces para $i \neq j$:

$$\begin{aligned} t_{i2} t_{j2} &= 0 \\ t_{i1} t_{j1} + \frac{1}{2} t_{i3} t_{j3} &= 0 \qquad (4.9) \\ t_{i2} t_{j2} + t_{i4} t_{j4} &= 0 \qquad (4.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{i5}t_{j5}+\frac{1}{2}t_{i3}t_{j3} &= 0 \\ t_{i4}t_{j4} &= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

y se sigue que

$$t_{i2}t_{j2}=t_{i4}t_{j4}=0. \tag{4.12}$$

Paso 2:
Veamos ahora que para $i \neq j$ se tiene:

$$t_{i1}t_{j1}=0.$$

De (4.12) se tiene que $t_{i2} \neq 0$ a lo sumo para un valor de i. Supongamos que $t_{i_0 2} \neq 0$, entonces

$$t_{k2}=0, \qquad \textit{para} \quad k \neq i_0. \tag{4.13}$$

Además,

$$\begin{aligned} g(e_1 \cdot e_1) &= g(e_2)=\sum_{k=1}^{n} t_{2k}e_k, && (4.14)\\ g(e_i \cdot e_i) &= g(e_{i-1})+g(e_{i+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(t_{(i-1)k}+t_{(i+1)k}\right)e_k, \quad \textit{para } i=2,3,4 && (4.15)\\ g(e_5 \cdot e_5) &= g(e_4)=\sum_{k=1}^{n} t_{4k}e_k. && (4.16) \end{aligned}$$

Al hacer $i=j$ en (4.8) y comparar los términos que acompañan a e_2 con los términos que acompañan al mismo en (4.14), (4.15) y (4.16) se obtiene que

$$t_{j1}^2+\frac{1}{2}t_{j3}^2= \begin{cases} t_{22} & j=1 \\ t_{(j-1)2}+t_{(j+1)2} & j=2,3,4 \\ t_{42} & j=5 \end{cases} \tag{4.17}$$

en particular para $j=i_0$

$$t_{i_0 1}^2+\frac{1}{2}t_{i_0 3}^2= \begin{cases} t_{22} & i_0=1 \\ t_{(i_0-1)2}+t_{(i_0+1)2} & i_0=2,3,4 \\ t_{42} & i_0=5. \end{cases} \tag{4.18}$$

Se puede observar que el lado derecho de (4.18) siempre es de la forma $t_{k_1 2}+\alpha t_{k_2 2}$, donde $\alpha \in \{0,1\}$, $k_1 \neq i_0$ y $k_2 \neq i_0$. Entonces por (4.13) el lado derecho de (4.18) siempre es nulo, además el lado izquierdo de (4.18) es suma de términos positivos, de donde cada término debe ser nulo, por lo tanto

$$t_{i_0 1}=0. \tag{4.19}$$

Al analizar (4.17) para los v_j que no son vecinos de v_{i_0} se puede observar que el lado derecho siempre es de la forma $t_{k_1 2}+\alpha t_{k_2 2}$, donde $\alpha \in \{0,1\}$, $k_1 \neq i_0$ y

$k_2 \neq i_0$. *Entonces por* (4.13) *el lado derecho de* (4.17) *siempre es nulo, además el lado izquierdo de* (4.17) *es suma de términos positivos, de donde cada término debe ser nulo, por lo tanto*

$$t_{j1} = 0, \qquad \textit{para } v_j \textit{ no vecino de } v_{i_0}. \tag{4.20}$$

Ahora vamos a analizar los posibles valores de i_0 *para ver que* $t_{i1}t_{j1} = 0$, *si* $j \neq i$.

- ***Caso 1:*** *Si* $i_0 = 1$, *entonces* v_3, v_4 *y* v_5 *no son vecinos de* v_{i_0}, *y por* (4.19) *y* (4.20)
$$t_{11} = t_{31} = t_{41} = t_{51} = 0,$$
y por lo tanto
$$t_{i1}t_{j1} = 0, \qquad \textit{para } i \neq j.$$

- ***Caso 2:*** *Si* $i_0 = 2$, *entonces* v_4 *y* v_5 *no son vecinos de* v_{i_0}, *y por* (4.19) *y* (4.20)
$$t_{21} = t_{41} = t_{51} = 0,$$
además por (4.8) *y* (4.15) *el primer coeficiente de* $g\left(e_4 \cdot e_4\right)$ *debe satisfacer que*
$$\frac{t_{42}^2}{2} = t_{31} + t_{51}$$
pero $t_{42} = 0$ *por* (4.13) *y* $t_{31} = 0$ *por* (4.20), *lo que implica que* $t_{51} = 0$, *de donde*
$$t_{11} = t_{31} = t_{41} = t_{51} = 0$$
y por lo tanto
$$t_{i1}t_{j1} = 0, \qquad \textit{para } i \neq j.$$

- ***Caso 3:*** *Si* $i_0 = 3$, *entonces* v_1 *y* v_5 *no son vecinos de* v_{i_0}, *y por* (4.19) *y* (4.20)
$$t_{11} = t_{31} = t_{51} = 0.$$
Además por (4.8) *y* (4.15) *el primer coeficiente de* $g\left(e_1 \cdot e_1\right)$ *debe satisfacer que*
$$\frac{t_{12}^2}{2} = t_{21}$$
pero $t_{12} = 0$ *por* (4.13), *lo que implica que* $t_{21} = 0$, *de donde*
$$t_{11} = t_{21} = t_{31} = t_{51} = 0$$
y por lo tanto
$$t_{i1}t_{j1} = 0, \qquad \textit{para } i \neq j.$$

- ***Caso 4:*** *Si* $i_0 = 4$, *entonces* v_1 *y* v_2 *no son vecinos de* v_{i_0}, *y por* (4.19) *y* (4.20)
$$t_{11} = t_{21} = t_{41} = 0.$$

Además por (4.8) *y* (4.15) *el primer coeficiente de* $g(e_2 \cdot e_2)$ *debe satisfacer que*

$$\frac{t_{22}^2}{2} = t_{11} + t_{31},$$

pero $t_{22} = 0$ *por* (4.12) *y* $t_{11} = 0$ *por* (4.20)*, lo que implica que* $t_{31} = 0$*, de donde*

$$t_{11} = t_{21} = t_{31} = t_{41} = 0$$

y por lo tanto

$$t_{i1}t_{j1} = 0, \qquad \text{para } i \neq j.$$

- ***Caso 5:*** *Si* $i_0 = 5$*, entonces* v_1, v_2 *y* v_3 *no son vecinos de* v_{i_0}*, y por* (4.19) *y* (4.20)

  $$t_{11} = t_{21} = t_{31} = t_{51} = 0$$

  y por lo tanto

  $$t_{i1}t_{j1} = 0, \qquad \text{para } i \neq j$$

De los cinco caso anteriores, concluimos que:

$$t_{i1}t_{j1} = 0, \qquad \text{para } i \neq j. \tag{4.21}$$

Paso 3:
Veamos ahora que para $i \neq j$ *y* $l = 1, 2, \ldots, 5$ *se tiene*

$$t_{il}t_{jl} = 0.$$

De (4.21), (4.9), (4.10) *y* (4.11)

$$\begin{aligned} t_{i1}t_{j1} &= 0 \\ t_{i1}t_{j1} + \frac{t_{i3}t_{j3}}{2} &= 0 \\ \frac{t_{i3}t_{j3}}{2} + t_{i5}t_{j5} &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$t_{il}t_{jl} = 0, \qquad \text{para } i \neq j \text{ y } l \text{ impar.}$$

De lo anterior y (4.12) *se sigue que:*

$$t_{il}t_{jl} = 0, \qquad \text{para } i \neq j \quad \text{y} \quad l \in \{1, 2, \ldots, 5\}. \tag{4.22}$$

Paso 4:
Ahora veamos que para todo i, j :

$$t_{ij} = 0.$$

La igualdad (4.22) *implica que para cualquier k, $t_{ik} \neq 0$ a lo sumo para un valor de i, así:*

$$g(e_i) = \sum_{k=1}^{5} t_{ik} e_k = \alpha_i e_{\sigma(i)}, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R},\ \sigma \in \mathbf{S}_5,$$

que junto con (4.7) *nos lleva a:*

$$g(e_i \cdot e_i) = g(e_i) \odot g(e_i) = \alpha_i^2 \left(e_{\sigma(i)} \odot e_{\sigma(i)}\right). \tag{4.23}$$

En particular para $i = 1$,

$$\begin{aligned} g(e_1 \cdot e_1) &= \alpha_1^2 \left(e_{\sigma(1)} \odot e_{\sigma(1)}\right) \\ g(e_1 \cdot e_1) &= g(e_2) \\ &= \alpha_2 e_{\sigma(2)} \end{aligned}$$

de donde $\left(e_{\sigma(1)} \odot e_{\sigma(1)}\right) = e_{\sigma(2)}$ *y recordando que los únicos vértices con un solo vecino son v_1 y v_5, entonces*

$$\sigma(1) \in \{1, 5\} \qquad y \qquad \alpha_2 = \alpha_1^2. \tag{4.24}$$

Análogamente remplazando $i = 5$ en (4.23),

$$\begin{aligned} g(e_5 \cdot e_5) &= \alpha_5^2 \left(e_{\sigma(5)} \odot e_{\sigma(5)}\right) \qquad y \\ g(e_5 \cdot e_5) &= g(e_4) \\ &= \alpha_4 e_{\sigma(4)} \end{aligned}$$

de donde $\left(e_{\sigma(5)} \odot e_{\sigma(5)}\right) = e_{\sigma(4)}$ *y por lo tanto*

$$\sigma(5) \in \{1, 5\} \qquad y \qquad \alpha_4 = \alpha_5^2.$$

Luego para $i = 2, 3, 4$, $\sigma(i) \in \{2, 3, 4\}$ y remplazando en (4.23)

$$\begin{aligned} g(e_i \cdot e_i) &= \alpha_i^2 \left(e_{\sigma(i)} \odot e_{\sigma(i)}\right) = \frac{\alpha_i^2}{2} \left(e_{\sigma(i-1)} + e_{\sigma(i+1)}\right) \qquad y \\ g(e_i \cdot e_i) &= g(e_{i-1} + e_{i+1}) \quad = g(e_{i-1}) + g(e_{i+1}) \\ &= \alpha_{i-1} e_{\sigma(i-1)} + \alpha_{i+1} e_{\sigma(i+1)} \end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{\alpha_i^2}{2} e_{\sigma(i-1)} + \frac{\alpha_i^2}{2} e_{\sigma(i+1)} = \alpha_{i-1} e_{\sigma(i-1)} + \alpha_{i+1} e_{\sigma(i+1)}$$

así, para $i = 2, 3, 4$

$$\frac{\alpha_i^2}{2} = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$$

es decir,

$$\frac{\alpha_2^2}{2} = \alpha_1 = \alpha_3, \qquad \frac{\alpha_3^2}{2} = \alpha_2 = \alpha_4, \qquad \frac{\alpha_4^2}{2} = \alpha_3 = \alpha_5 \tag{4.25}$$

de donde,

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_3^2}{2} = \frac{\left(\frac{\alpha_2^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{\alpha_2^4}{8}$$

Así

$$\alpha_2^4 - 8\alpha_2 = \alpha_2\left(\alpha_2^3 - 8\right) = 0.$$

Si $(\alpha_2^3 - 8) = 0$*, entonces* $\alpha_2 = 2$ *y por* (4.24)

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_2} = \sqrt{2},$$

y por (4.25)

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_2^2}{2} = 2,$$

esto es absurdo, por lo tanto $\alpha_2 = 0$*, y así:*

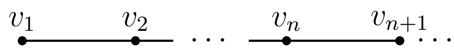
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0,$$

de donde g *es el homomorfismo nulo.*

Este resultado se generaliza en la Proposición 3 de [17] de la siguiente manera:

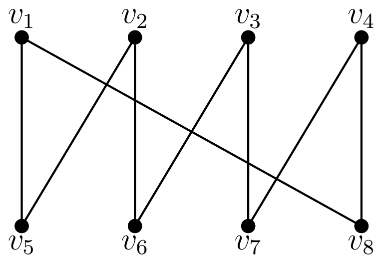
Teorema 4.3 *Sea* P_n *un grafo camino con* $n \gneqq 3$*. Entonces, el único homomorfismo de evolución entre* $\mathcal{A}(P_n)$ *y* $\mathcal{A}_{RW}(P_n)$ *es el nulo. En particular* $\mathcal{A}(P_n) \ncong \mathcal{A}_{RW}(P_n)$ *como álgebras de evolución.*

Observación: El teorema anterior tambien se cumple para un camino infinito con vertices $\{v_1, v_2, \dots\}$ [17, Remark 3.1].



Otra familia que se estudia con frecuencia es la de los grafos bipartitos en general, no solo los bipartitos completos; a diferencia de las familias anteriores los miembros de esta familia no preservan el comportamiento con respecto a las álgebras de evolución; es decir existen miembros de la misma donde el isomorfismo existe y otros donde no existe.[17, Remark 3.2]

Ejemplo 4.7 *Consideremos el siguiente grafo*

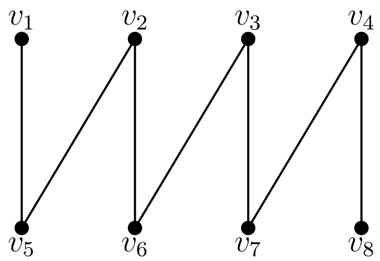


Claramente es un grafo bipartito no completo con partición

$$X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad Y = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}.$$

Pero también es un grafo 2-regular con 8 vértices, entonces por el teorema 4.1 las respectivas álgebras de evolución son isomorfas.

Ejemplo 4.8 *Consideremos el siguiente grafo*



Claramente es un grafo bipartito no completo con partición

$$X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad Y = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}.$$

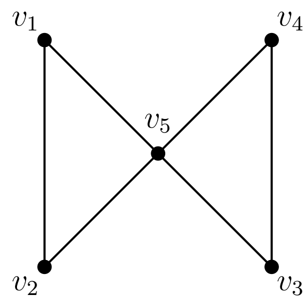
Pero también es un grafo camino con 8 vértices, entonces por el teorema 4.3 las respectivas álgebras de evolución no son isomorfas.

SECCION 4.5

Grafos de la amistad.

Un grafo de la amistad con 3 vértices es un grafo regular, por lo tanto las respectivas álgebras de evolución son isomorfas; por lo visto en el ejemplo 3.16 no existe un grafo de la amistad con 4 vértices, ahora veamos que pasa con un grafo de la amistad de 5 vértices:

Ejemplo 4.9 *Consideremos el grafo de la amistad* $\overline{F_5}$



Entonces las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y las siguientes relaciones:

$$\mathcal{A}\left(\overline{F_5}\right) \quad : \quad \begin{cases} e_1 \cdot e_1 &= e_2 + e_5 \\ e_2 \cdot e_2 &= e_1 + e_5 \\ e_3 \cdot e_3 &= e_4 + e_5 \\ e_4 \cdot e_4 &= e_3 + e_5 \\ e_5 \cdot e_5 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad\qquad \text{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}\left(\overline{F_5}\right) : \quad \begin{cases} e_1 \odot e_1 &= \frac{1}{2}(e_2 + e_5) \\ e_2 \odot e_2 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_5) \\ e_3 \odot e_3 &= \frac{1}{2}(e_4 + e_5) \\ e_4 \odot e_4 &= \frac{1}{2}(e_3 + e_5) \\ e_5 \odot e_5 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\ e_i \odot e_j &= 0, \qquad\qquad \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Supongamos que existe una transformación $g : \mathcal{A}\left(\overline{F_5}\right) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}\left(\overline{F_5}\right)$ tal que para cada i, j

$$g(e_i) = \sum_{k=1}^{5} t_{ik} e_k \quad y \quad g(e_i \cdot e_j) = g(e_j) \odot g(e_i).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} g(e_i \cdot e_j) &= \left(\sum_{k=1}^{5} t_{ik} e_k\right) \odot \left(\sum_{k=1}^{5} t_{jk} e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{5} (t_{ik} t_{jk})(e_k \odot e_k) \\ &= \frac{t_{i1}t_{j1}}{2}(e_2 + e_5) + \frac{t_{i2}t_{j2}}{2}(e_1 + e_5) + \frac{t_{i3}t_{j3}}{2}(e_4 + e_5) + \frac{t_{i4}t_{j4}}{2}(e_3 + e_5) + \\ &\quad \frac{t_{i5}t_{j5}}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\ &= \left(\frac{t_{i2}t_{j2}}{2} + \frac{t_{i5}t_{j5}}{4}\right) e_1 + \left(\frac{t_{i1}t_{j1}}{2} + \frac{t_{i5}t_{j5}}{4}\right) e_2 + \left(\frac{t_{i4}t_{j4}}{2} + \frac{t_{i5}t_{j5}}{4}\right) e_3 + \\ &\quad \left(\frac{t_{i3}t_{j3}}{2} + \frac{t_{i5}t_{j5}}{4}\right) e_4 + \frac{1}{2}(t_{i1}t_{j1} + t_{i2}t_{j2} + t_{i3}t_{j3} + t_{i4}t_{j4}) e_5 \end{aligned}$$

y así para $i \neq j$, obtenemos

$$\frac{t_{i2}t_{j2}}{2} + \frac{t_{i5}t_{j5}}{4} = 0 \tag{4.26}$$

$$\frac{t_{i1}t_{j1}}{2} + \frac{t_{i5}t_{j5}}{4} = 0 \qquad (4.27)$$
$$\frac{t_{i4}t_{j4}}{2} + \frac{t_{i5}t_{j5}}{4} = 0 \qquad (4.28)$$
$$\frac{t_{i3}t_{j3}}{2} + \frac{t_{i5}t_{j5}}{4} = 0 \qquad (4.29)$$
$$\sum_{k=1}^{4} t_{ik}t_{jk} = 0 \qquad (4.30)$$

al sumar (4.26), (4.27),(4.28) *y* (4.29) *obtenemos:*

$$\frac{1}{2}\left(t_{i1}t_{j1} + t_{i2}t_{j2} + t_{i3}t_{j3} + t_{i4}t_{j4}\right) = -t_{i5}t_{j5}$$

y al igualar con (4.30) *obtenemos:*

$$t_{i5}t_{j5} = 0, \qquad \textit{para } i \neq j$$

que al remplazarlo en (4.26), (4.27), (4.28) *y* (4.29) *nos lleva a:*

$$t_{il}t_{jl} = 0, \qquad \textit{para } \ i, j, l \in \{1, \ldots, 5\} \ \textit{con } i \neq j$$

esto implica que para cualquier k, $t_{ik} \neq 0$ *a lo sumo para un valor de* i, *luego*

$$g(e_i) = \sum_{k=1}^{5} t_{ik}e_k = \alpha_i e_{\sigma(i)}, \qquad \textit{con } \ \alpha_i \in \mathbb{R} \ \textit{y} \ \sigma \in \mathbf{S}_5.$$

Además,

$$g(e_i \cdot e_i) = g(e_i) \odot g(e_i) = \alpha_i^2 \left(e_{\sigma(i)} \odot e_{\sigma(i)}\right) \qquad (4.31)$$

y para $i \neq 5$

$$g(e_i \cdot e_i) = g\left(e_{i+t(i)} + e_5\right) = \alpha_{i+t(i)}e_{\sigma(i+t(i))} + \alpha_5 e_5 \qquad (4.32)$$

donde

$$t(i) = \begin{cases} 1, & \textit{para } i \textit{ impar} \\ -1, & \textit{para } i \textit{ par} \end{cases}$$

e igualando (4.31) *y* (4.32) *obtenemos:*

$$\alpha_i^2 \left(e_{\sigma(i)} \odot e_{\sigma(i)}\right) = \alpha_{i+t(i)}e_{\sigma(i+t(i))} + \alpha_5 e_5, \qquad \textit{para } i \neq 5.$$

Veamos que pasa si $\sigma(5) = 5$. *En este caso* $\sigma(i) \neq 5$ *para* $i \neq 5$,*y por* (4.31) *y* (4.32)

$$\alpha_i^2 \left(e_{\sigma(i)} \odot e_{\sigma(i)}\right) = \alpha_{i+t(i)}e_{\sigma(i+t(i))} + \alpha_5 e_5.$$

Además,

$$\alpha_i^2 \left(e_{\sigma(i)} \odot e_{\sigma(i)}\right) = \frac{\alpha_i^2}{2}\left(e_{\sigma(i)+t(\sigma(i))} + e_5\right)$$

donde $\sigma(i), \sigma(i)+t(\sigma(i)) \in \{1,2,3,4\}$*, entonces*

$$\frac{\alpha_i^2}{2}\left(e_{\sigma(i)+t(\sigma(i))}+e_5\right)=\alpha_{i+t(i)}e_{\sigma(i+t(i))}+\alpha_5 e_5$$

y por lo tanto

$$\alpha_5=\frac{\alpha_i^2}{2}=\alpha_{i+t(i)}$$

es decir,

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5$$

y así $\alpha_i=\frac{\alpha_i^2}{2}$ *de donde* $\alpha_i(\alpha_i-2)=0$.
Si $\alpha_i=2$ *para todo* i*, entonces*

$$g(e_5\cdot e_5)=\alpha_5^2(e_5\odot e_5)=e_1+e_2+e_3+e_4$$

y

$$g(e_5\cdot e_5)=g(e_1+e_2+e_3+e_4)=2\left(e_{\sigma(1)}+e_{\sigma(2)}+e_{\sigma(3)}+e_{\sigma(4)}\right)=2(e_1+e_2+e_3+e_4)$$

lo cual es absurdo.

Si $\alpha_i=0$ *para todo* i*, entonces* g *es el homomorfismo nulo.*

Veamos ahora que pasa si $\sigma(5)\neq 5$*. En este caso existe* $i\neq 5$ *tal que* $\sigma(i+t(i))=5$ *y* $\sigma(i)\neq 5$*, además*

$$\begin{aligned} g\left(\left(e_{\sigma(i+t(i))}\right)\cdot\left(e_{\sigma(i+t(i))}\right)\right) &= g(e_5\cdot e_5)\\ &= g(e_1+e_2+e_3+e_4)\\ &= \alpha_1 e_{\sigma(1)}+\alpha_2 e_{\sigma(2)}+\alpha_3 e_{\sigma(3)}+\alpha_4 e_{\sigma(4)} \end{aligned} \tag{4.33}$$

y

$$\begin{aligned} g\left(\left(e_{\sigma(i+t(i))}\right)\cdot\left(e_{\sigma(i+t(i))}\right)\right) &= g(e_5\cdot e_5)\\ &= g(e_5)\odot g(e_5)\\ &= \alpha_5^2\left(e_{\sigma(5)}\odot e_{\sigma(5)}\right)\\ &= \frac{\alpha_5^2}{2}\left(e_{\sigma(5)+t(\sigma(5))}+e_5\right) \end{aligned} \tag{4.34}$$

igualando (4.33) *y* (4.34) *obtenemos:*

$$\frac{\alpha_5^2}{2}\left(e_{\sigma(5)+t(\sigma(5))}+e_5\right)=\alpha_1 e_{\sigma(1)}+\alpha_2 e_{\sigma(2)}+\alpha_3 e_{\sigma(3)}+\alpha_4 e_{\sigma(4)} \tag{4.35}$$

de donde existen $k_1,k_2\in\{1,2,3,4\}$ *tal que* $\alpha_{k_1}=\alpha_{k_2}=0$*,* $\sigma(k_1)\neq 5$ *y* $\sigma(k_2)\neq 5$*; por lo tanto existe* $k\in\{1,2,3,4\}$ *tal que:*

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 0 && (4.36)\\ \sigma(k) &\neq 5\\ \sigma(k+t(k)) &\neq 5, && (4.37) \end{aligned}$$

entonces por (4.36)

$$g(e_k \cdot e_k) = g(e_k) \odot (e_k) = \alpha_k^2 \left(e_{\sigma(k)} \odot e_{\sigma(k)}\right) = 0 \tag{4.38}$$

además por (4.32)

$$g(e_k \cdot e_k) = g\left(e_{k+t(k)} + e_5\right) = \alpha_{k+t(k)} e_{\sigma(k+t(k))} + \alpha_5 e_5 \tag{4.39}$$

ahora igualando (4.38) *con* (4.39) *y utilizando* (4.37), *podemos concluir que*

$$\alpha_5 = 0$$

y finalmente por (4.35)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0,$$

por lo tanto g *es el homomorfismo nulo.*

Este resultado se puede generalizar en el siguiente teorema [17, Proposition 3.4].

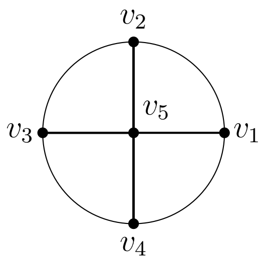
Teorema 4.4 *Sea* $\overline{F_n}$ *un grafo de la amistad con* n *vértices,* $n > 4$. *Entonces el único homomorfismo de evolución entre* $\mathcal{A}\left(\overline{F_n}\right)$ *y* $\mathcal{A}_{RW}\left(\overline{F_n}\right)$ *es el nulo; por lo tanto* $\mathcal{A}\left(\overline{F_n}\right) \ncong \mathcal{A}_{RW}\left(\overline{F_n}\right)$ *como álgebras de evolución.*

SECCION 4.6

Grafos rueda.

Ahora vamos a analizar los grafos rueda, claramente el grafo rueda de 4 vértices es un grafo regular, por lo tanto vamos a iniciar analizando el grafo rueda de 5 vértices:

Ejemplo 4.10 *Consideremos el grafo de la amistad* W_5



Entonces las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *y las siguientes relaciones:*

$$\mathcal{A}(W_5): \quad \begin{cases} e_1 \cdot e_1 &= e_2 + e_4 + e_5 \\ e_2 \cdot e_2 &= e_1 + e_3 + e_5 \\ e_3 \cdot e_3 &= e_2 + e_4 + e_5 \\ e_4 \cdot e_4 &= e_1 + e_3 + e_5 \\ e_5 \cdot e_5 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad \textit{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}\left(W_5\right):\quad\left\{\begin{array}{rcll} e_1\odot e_1 &=& \frac{1}{3}\left(e_2+e_4+e_5\right) & \\ e_2\odot e_2 &=& \frac{1}{3}\left(e_1+e_3+e_5\right) & \\ e_3\odot e_3 &=& \frac{1}{3}\left(e_2+e_4+e_5\right) & \\ e_4\odot e_4 &=& \frac{1}{3}\left(e_1+e_3+e_5\right) & \\ e_5\odot e_5 &=& \frac{1}{4}\left(e_1+e_2+e_3+e_4\right) & \\ e_i\odot e_j &=& 0, & \text{para } i\neq j. \end{array}\right.$$

Supongamos que existe una transformación $g:\mathcal{A}\left(W_5\right)\longrightarrow\mathcal{A}_{RW}\left(W_5\right)$ *tal que para cada* i,j

$$g(e_i)=\sum_{k=1}^{5}t_{ik}e_k,\quad y\quad g(e_i\cdot e_j)=g(e_i)\odot g(e_j).$$

Entonces

$$\begin{aligned} g\left(e_i\cdot e_j\right) &= \left(\sum_{k=1}^{5}t_{ik}e_k\right)\odot\left(\sum_{k=1}^{5}t_{jk}e_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{5}\left(t_{ik}t_{jk}\right)\left(e_k\odot e_k\right)\\ &= \frac{t_{i1}t_{j1}}{3}\left(e_2+e_4+e_5\right)+\frac{t_{i2}t_{j2}}{3}\left(e_1+e_3+e_5\right)+\frac{t_{i3}t_{j3}}{3}\left(e_2+e_4+e_5\right)+\\ &\quad \frac{t_{i4}t_{j4}}{3}\left(e_1+e_3+e_5\right)+\frac{t_{i5}t_{j5}}{4}\left(e_1+e_2+e_3+e_4\right)\\ &= \left(\frac{t_{i2}t_{j2}}{3}+\frac{t_{i4}t_{j4}}{3}+\frac{t_{i5}t_{j5}}{4}\right)e_1+\left(\frac{t_{i1}t_{j1}}{3}+\frac{t_{i3}t_{j3}}{3}+\frac{t_{i5}t_{j5}}{4}\right)e_2+\\ &\quad \left(\frac{t_{i2}t_{j2}}{3}+\frac{t_{i4}t_{j4}}{3}+\frac{t_{i5}t_{j5}}{4}\right)e_3+\left(\frac{t_{i1}t_{j1}}{3}+\frac{t_{i3}t_{j3}}{3}+\frac{t_{i5}t_{j5}}{4}\right)e_4+\\ &\quad \frac{1}{3}\left(t_{i1}t_{j1}+t_{i2}t_{j2}+t_{i3}t_{j3}+t_{i4}t_{j4}\right)e_5 \end{aligned}\tag{4.40}$$

de lo anterior para $i\neq j$*, obtenemos:*

$$\frac{t_{i2}t_{j2}}{3}+\frac{t_{i4}t_{j4}}{3}+\frac{t_{i5}t_{j5}}{4} = 0 \tag{4.41}$$

$$\frac{t_{i1}t_{j1}}{3}+\frac{t_{i3}t_{j3}}{3}+\frac{t_{i5}t_{j5}}{4} = 0 \tag{4.42}$$

$$\frac{t_{i2}t_{j2}}{3}+\frac{t_{i4}t_{j4}}{3}+\frac{t_{i5}t_{j5}}{4} = 0 \tag{4.43}$$

$$\frac{t_{i1}t_{j1}}{3}+\frac{t_{i3}t_{j3}}{3}+\frac{t_{i5}t_{j5}}{4} = 0 \tag{4.44}$$

$$\sum_{k=1}^{4} t_{ik}t_{jk} = 0 \tag{4.45}$$

al sumar (4.41), (4.42), (4.43) *y* (4.44), *obtenemos:*

$$\frac{2}{3}\left(t_{i1}t_{j1}+t_{i2}t_{j2}+t_{i3}t_{j3}+t_{i4}t_{j4}\right)=-t_{i5}t_{j5}$$

y al igualar con (4.45), *obtenemos:*

$$t_{i5}t_{j5}=0, \qquad \textit{para } \ i\neq j. \tag{4.46}$$

Además

$$g(e_i{\cdot}e_i)=\begin{cases} g(e_{l_1(i)}+e_{l_2(i)}+e_5) = \sum_{k=1}^{5}\left(t_{l_1(i)k}+t_{l_2(i)k}+t_{5k}\right)e_k, & i=1,2,3,4\\ g\left(\sum_{j=1}^{4}e_j\right) = \sum_{k=1}^{5}\left(t_{1k}+t_{2k}+t_{3k}+t_{4k}\right)e_k, & i=5,\end{cases} \tag{4.47}$$

donde $v_{l_1(i)}$ *y* $v_{l_2(i)}$ *son los vecinos de* v_i *diferentes a* v_5.

Note que:

$$l_1(i)=\begin{cases} i-1, & i\in\{2,3,4\}\\ 4, & i=1\end{cases}$$

$$l_2(i)=\begin{cases} i+1, & i\in\{1,2,3\}\\ 1, & i=4\end{cases}$$

luego de (4.40) *sabemos que la última coordenada de* $g(e_i\odot e_i)$ *es:*

$$\frac{t_{i1}^2}{3}+\frac{t_{i2}^2}{3}+\frac{t_{i3}^2}{3}+\frac{t_{i4}^2}{3}, \qquad \textit{para } i\in\{1,2,3,4\}$$

que igualando con la última coordenada en (4.47), *nos lleva a:*

$$\frac{t_{i1}^2}{3}+\frac{t_{i2}^2}{3}+\frac{t_{i3}^2}{3}+\frac{t_{i4}^2}{3} = t_{l_1(i)5}+t_{l_2(i)5}+t_{55}, \qquad i\in\{1,2,3,4\} \tag{4.48}$$

$$\frac{t_{51}^2}{3}+\frac{t_{52}^2}{3}+\frac{t_{53}^2}{3}+\frac{t_{54}^2}{3} = t_{15}+t_{25}+t_{35}+t_{45}, \qquad i=5. \tag{4.49}$$

Supongamos que $t_{55}\neq 0$. *Entonces por* (4.46)

$$t_{i5}=0, \qquad \textit{para } i=1,2,3,4, \tag{4.50}$$

y por (4.49)

$$t_{51}=t_{52}=t_{53}=t_{54}=0. \tag{4.51}$$

Al remplazar $i=1,2,3,4$ *en* (4.48), *sumar los resultados y usar* (4.50), *llegamos a:*

$$\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}t_{jk}^{2}=4t_{55}. \tag{4.52}$$

Sustituyendo (4.50) *en* (4.40), *obtenemos:*

$$\begin{aligned} g\left(e_i\cdot e_i\right) &= \left(\frac{t_{i2}^2}{3}+\frac{t_{i4}^2}{3}\right)e_1+\left(\frac{t_{i1}^2}{3}+\frac{t_{i3}^2}{3}\right)e_2+\left(\frac{t_{i2}^2}{3}+\frac{t_{i4}^2}{3}\right)e_3+ \\ & \left(\frac{t_{i1}^2}{3}+\frac{t_{i3}^2}{3}\right)e_4+\frac{1}{3}\left(t_{i1}^2+t_{i2}^2+t_{i3}^2+t_{i4}^2\right)e_5. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Tomando $i\neq 5$ *e igualando las primeras cuatro componentes en* (4.47) *y* (4.53), *y luego sumándolas, obtenemos:*

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\left(t_{11}^2+t_{12}^2+t_{13}^2+t_{14}^2\right) &= t_{21}+t_{22}+t_{23}+t_{24}+t_{41}+t_{42}+t_{43}+t_{44}, \\ \frac{2}{3}\left(t_{21}^2+t_{22}^2+t_{23}^2+t_{24}^2\right) &= t_{11}+t_{12}+t_{13}+t_{14}+t_{31}+t_{32}+t_{33}+t_{34}, \\ \frac{2}{3}\left(t_{31}^2+t_{32}^2+t_{33}^2+t_{34}^2\right) &= t_{21}+t_{22}+t_{23}+t_{24}+t_{41}+t_{42}+t_{43}+t_{44}, \\ \frac{2}{3}\left(t_{41}^2+t_{42}^2+t_{43}^2+t_{44}^2\right) &= t_{11}+t_{12}+t_{13}+t_{14}+t_{31}+t_{32}+t_{33}+t_{34}. \end{aligned}$$

Sumando todas las ecuaciones anteriores:

$$\sum_{l=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}t_{lk}^{2}=3\sum_{l=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}t_{lk} \tag{4.54}$$

y remplazando $i=5$ *en* (4.40) *y* (4.47), *y usando* (4.51), *obtenemos:*

$$\begin{aligned} g\left(e_5\odot e_5\right) &= \frac{t_{55}^2}{4}\left(e_1+e_2+e_3+e_4\right) \\ g\left(e_5\odot e_5\right) &= \sum_{k=1}^{5}\left(\sum_{l=1}^{4}t_{lk}\right)e_k. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Igualando las primeras 4 *componentes y sumándolas, obtenemos:*

$$t_{55}^2=\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}t_{lk},$$

y utilizando, (4.52) *y* (4.54) *obtenemos:*

$$t_{55}^2=\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}t_{lk}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}t_{lk}^2=\frac{1}{3}\left(12t_{55}\right)$$

y dado que $t_{55}\neq 0$, *entonces:*

$$t_{55}=4$$

y por (4.40)*:*

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}t_{ij}^{2}=4t_{55}=16,$$

luego por (4.55)

$$\begin{aligned} g\left(e_5\odot e_5\right) &= 4\left(e_1+e_2+e_3+e_4\right) \\ g\left(e_5\odot e_5\right) &= \sum_{k=1}^{5}\left(t_{1k}+t_{2k}+t_{3k}+t_{4k}\right)e_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $k=1,2,3,4$*:*

$$t_{1k}+t_{2k}+t_{3k}+t_{4k}=4$$

y

$$\left(t_{1k}+t_{2k}+t_{3k}+t_{4k}\right)^2=16,$$

y por (4.42)*,* (4.43) *y* (4.46)

$$64=\sum_{k=1}^{4}\left(t_{1k}+t_{2k}+t_{3k}+t_{4k}\right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}t_{lk}^{2}+2\left(\sum_{k=1}^{4}\sum_{l\neq k}\left(t_{l2}t_{k2}+t_{l4}t_{k4}\right)\right)+2\left(\sum_{k=1}^{4}\sum_{l\neq k}\left(t_{l1}t_{k1}+t_{l3}t_{k3}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}t_{lk}^{2}=48 \end{aligned}$$

la última igualdad por (4.52)*, lo cual es absurdo; y por lo tanto* $t_{55}=0$*.*

Ahora, si para todo i*,* $t_{i5}=0$*, entonces por* (4.48) *y* (4.49)

$$t_{jk}=0, \qquad para\ j,k\in\{1,2,3,4,5\},$$

y por lo tanto, g *es el homomorfismo nulo.*

Por el contrario, si existe $i_0\in\{1,2,3,4\}$ *tal que* $t_{i_05}\neq 0$*; entonces por* (4.46)*, si* $j\neq i_0$*,*

$$t_{j5}=0, \tag{4.56}$$

y remplazando esto en (4.48)*:*

$$t_{i_01}=t_{i_02}=t_{i_03}=t_{i_04}=0,$$

y por lo tanto:

$$g\left(e_{i_0}\right)=\sum_{k=1}^{5}t_{i_0k}e_k=t_{i_05}e_5. \tag{4.57}$$

Además existe $j\in\{1,2,3,4\}$ *tal que:*

- *$j \neq i_0$ y v_j no vecino de v_{i_0}; entonces los vecinos de v_j son diferentes a v_{i_0}; es decir:*
$$l_1(j) \neq i_0 \quad y \quad l_2(j) \neq i_0,$$
por lo tanto,
$$t_{l_1(j)5} = t_{l_2(j)5} = 0. \tag{4.58}$$

- *v_j y v_{i_0} tienen los mismos vecinos, es decir*
$$l_1(i_0) = l_2(j) \quad y \quad l_2(i_0) = l_1(j),$$
por lo tanto,
$$\begin{aligned} g(e_{i_0} \cdot e_{i_0}) &= g\left(e_{l_1(i_0)} + e_{l_2(i_0)} + e_5\right) \\ &= g\left(e_{l_1(j)} + e_{l_2(j)} + e_5\right) \\ &= g(e_j \cdot e_j). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Luego por (4.48), (4.56) *y* (4.58)
$$t_{j1} = t_{j2} = t_{j3} = t_{j4} = t_{j5} = 0$$
y por lo tanto
$$g(e_j) = \sum_{k=1}^{5} t_{jk} e_k = 0.$$
Así, por (4.57) *y* (4.59)
$$\begin{aligned} 0 &= g(e_j) \odot g(e_j) \\ &= g(e_{i_0}) \odot g(e_{i_0}) \\ &= t_{i_05}^2 (e_5 \odot e_5) \\ &= \frac{t_{i_05}^2}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \end{aligned}$$
de donde $t_{i_05} = 0$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto la única opción es que g sea el homomorfismo nulo.

Este resultado se puede generalizar en el siguiente teorema [17, Proposition 3.5].

Teorema 4.5 *Sea W_n un grafo rueda con n vértices, $n > 4$. Entonces el único homomorfismo de evolución entre $\mathcal{A}(W_n)$ y $\mathcal{A}_{RW}(W_n)$ es el nulo; por lo tanto $\mathcal{A}(W_n) \ncong \mathcal{A}_{RW}(W_n)$ como álgebras de evolución.*

SECCION 4.7

Grafos n-partitos completos.

Si tenemos el grafo n-partito completo $K_{a_1,a_2,\dots,a_n}$ y $s=\sum_{k=1}^{n} a_k$, entonces el álgebra de evolución $\mathcal{A}\left(K_{a_1,a_2,\dots,a_n}\right)$ viene dada por el conjunto de generadores

$$S=\{e_1,\dots,e_{a_1},e_{a_1+1},\dots,e_{a_1+a_2},\dots,e_{a_1+a_2+\dots+a_n}\}$$

y las relaciones:

- para $i\in\{1,\dots,a_1\}$:

$$e_i\cdot e_i=\sum_{j=1}^{a_2+\dots+a_n} e_{a_1+j}$$

- para $t\in\{2,\dots,n-1\}$ e $i\in\{1,\dots,a_t\}$:

$$\left(e_{a_1+\dots+a_{t-1}+i}\right)\cdot\left(e_{a_1+\dots+a_{t-1}+i}\right)=\sum_{j=1}^{a_1+\dots+a_{t-1}} e_j+\sum_{j=1}^{a_{t+1}+\dots a_n} e_{a_1+\dots+a_t+j}$$

- para $i\in\{1,\dots,a_n\}$:

$$\left(e_{a_1+\dots+a_{n-1}+i}\right)\cdot\left(e_{a_1+\dots+a_{n-1}+i}\right)=\sum_{j=1}^{a_1+\dots+a_{n-1}} e_j$$

- para $i\neq j$:

$$e_i\cdot e_j=0.$$

Análogamente el álgebra de evolución $\mathcal{A}_{RW}\left(K_{a_1,a_2,\dots,a_n}\right)$ viene dada por el conjunto de generadores

$$S=\{e_1,\dots,e_{a_1},e_{a_1+1},\dots,e_{a_1+a_2},\dots,e_{a_1+a_2+\dots+a_n}\}$$

y las relaciones:

- para $i\in\{1,\dots,a_1\}$:

$$e_i\odot e_i=\frac{1}{s-a_1}\left(\sum_{j=1}^{a_2+\dots+a_n} e_{a_1+j}\right)$$

- para $t\in\{2,\dots,n-1\}$ e $i\in\{1,\dots,a_t\}$:

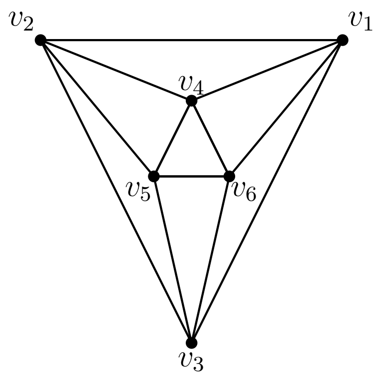
$$\left(e_{a_1+\dots+a_{t-1}+i}\right)\odot\left(e_{a_1+\dots+a_{t-1}+i}\right)=\frac{1}{s-a_t}\left(\sum_{j=1}^{a_1+\dots+a_{t-1}} e_j+\sum_{j=1}^{a_{t+1}+\dots a_n} e_{a_1+\dots+a_t+j}\right)$$

- para $i\in\{1,\dots,a_n\}$:

$$\left(e_{a_1+\dots+a_{n-1}+i}\right)\odot\left(e_{a_1+\dots+a_{n-1}+i}\right)=\frac{1}{s-a_n}\left(\sum_{j=1}^{a_1+\dots+a_{n-1}} e_j\right)$$

- para $i \neq j$:
$$e_i \odot e_j = 0.$$

Ejemplo 4.11 *Consideremos el grafo tripartito completo* $K_{2,2,2}$



con particiones

$$X = \{v_1, v_5\}, \quad Y = \{v_2, v_6\}, \quad Z = \{v_3, v_4\}$$

cada una de tamaño 2.
Las dos álgebras de evolución de $K_{2,2,2}$ *vienen dadas por el conjunto de generadores* $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ *y las siguientes relaciones:*

$$\mathcal{A}(K_{2,2,2}) : \quad \begin{cases} e_1 \cdot e_1 &= e_2 + e_3 + e_4 + e_6 \\ e_2 \cdot e_2 &= e_1 + e_3 + e_4 + e_5 \\ e_3 \cdot e_3 &= e_1 + e_2 + e_5 + e_6 \\ e_4 \cdot e_4 &= e_1 + e_2 + e_5 + e_6 \\ e_5 \cdot e_5 &= e_2 + e_3 + e_4 + e_6 \\ e_6 \cdot e_6 &= e_1 + e_3 + e_4 + e_5 \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad\qquad \textit{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}(K_{2,2,2}) : \quad \begin{cases} e_1 \odot e_1 &= \frac{1}{4}(e_2 + e_3 + e_4 + e_6) \\ e_2 \odot e_2 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_3 + e_4 + e_5) \\ e_3 \odot e_3 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_5 + e_6) \\ e_4 \odot e_4 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_5 + e_6) \\ e_5 \odot e_5 &= \frac{1}{4}(e_2 + e_3 + e_4 + e_6) \\ e_6 \odot e_6 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_3 + e_4 + e_5) \\ e_i \odot e_j &= 0, \qquad\qquad \textit{para } i \neq j. \end{cases}$$

Podemos observar que $K_{2,2,2}$ *es un grafo regular de orden* 4*, luego por teorema 4.1,*

$$\mathcal{A}(K_{2,2,2}) \cong \mathcal{A}_{RW}(K_{2,2,2}).$$

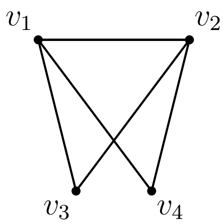
Observaciones:

- Si para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_i = d$ para algún $d > 2$, entonces por teorema 4.1:
$$\mathcal{A}\left(K_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right) \cong \mathcal{A}_{RW}\left(K_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right),$$
esto porque cada vértice tiene grado $d\,(n-1)$, es decir el grafo es regular.

- Si $n = 2$, entonces por teorema 4.2
$$A\left(K_{a_1,a_2}\right) \cong A_{RW}\left(K_{a_1,a_2}\right)$$

En el siguiente ejemplo vamos a mostrar que no siempre es cierto que
$$A\left(K_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right) \cong A_{RW}\left(K_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right) [17].$$

Ejemplo 4.12 *Consideremos el grafo tripartito completo* $K_{1,1,2}$



con particiones
$$X = \{v_1, v_2\}, \quad Y = \{v_3\}, \quad Z = \{v_4\}$$
de tamaños $2, 1$ *y* 1 *respectivamente.*

Las dos álgebras de evolución vienen dadas por el conjunto de generadores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *y las siguientes relaciones:*

$$\mathcal{A}\left(K_{1,1,2}\right): \quad \begin{cases} e_1 \cdot e_1 &= e_2 + e_3 + e_4 \\ e_2 \cdot e_2 &= e_1 + e_3 + e_4 \\ e_3 \cdot e_3 &= e_1 + e_2 \\ e_4 \cdot e_4 &= e_1 + e_2 \\ e_i \cdot e_j &= 0, \qquad\qquad \textit{para } i \neq j \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}_{RW}\left(K_{1,1,2}\right): \begin{cases} e_1 \odot e_1 &= \frac{1}{3}\left(e_2 + e_3 + e_4\right) \\ e_2 \odot e_2 &= \frac{1}{3}\left(e_1 + e_3 + e_4\right) \\ e_3 \odot e_3 &= \frac{1}{2}\left(e_1 + e_2\right) \\ e_4 \odot e_4 &= \frac{1}{2}\left(e_1 + e_2\right) \\ e_i \odot e_j &= 0, \qquad\qquad \textit{para } i \neq j. \end{cases}$$

Supongamos que existe una transformación $g : \mathcal{A}\left(K_{1,1,2}\right) \longrightarrow \mathcal{A}_{RW}\left(K_{1,1,2}\right)$ *tal que para cada* i, j

$$g(e_i) = \sum_{k=1}^{4} t_{ik} e_k, \quad y \quad g(e_i \cdot e_j) = g(e_i) \odot g(e_j),$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
g\left(e_i \cdot e_j\right) &= \left(\sum_{k=1}^{4} t_{ik} e_k\right) \odot \left(\sum_{k=1}^{4} t_{jk} e_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{4} \left(t_{ik} t_{jk}\right)\left(e_k \odot e_k\right) \\
&= \frac{t_{i1}t_{j1}}{3}\left(e_2 + e_3 + e_4\right) + \frac{t_{i2}t_{j2}}{3}\left(e_1 + e_3 + e_4\right) + \frac{t_{i3}t_{j3}}{2}\left(e_1 + e_2\right) + \frac{t_{i4}t_{j4}}{2}\left(e_1 + e_2\right) \\
&= \left(\frac{t_{i2}t_{j2}}{3} + \frac{t_{i3}t_{j3}}{2} + \frac{t_{i4}t_{j4}}{2}\right) e_1 + \left(\frac{t_{i1}t_{j1}}{3} + \frac{t_{i3}t_{j3}}{2} + \frac{t_{i4}t_{j4}}{2}\right) e_2 + \\
&\quad \left(\frac{t_{i1}t_{j1}}{3} + \frac{t_{i2}t_{j2}}{3}\right) e_3 + \left(\frac{t_{i1}t_{j1}}{3} + \frac{t_{i2}t_{j2}}{3}\right) e_4
\end{aligned}$$

de lo anterior, para $i \neq j$*, tenemos que:*

$$\frac{t_{i2}t_{j2}}{3} + \frac{t_{i3}t_{j3}}{2} + \frac{t_{i4}t_{j4}}{2} = 0 \tag{4.60}$$

$$\frac{t_{i1}t_{j1}}{3} + \frac{t_{i3}t_{j3}}{2} + \frac{t_{i4}t_{j4}}{2} = 0 \tag{4.61}$$

$$t_{i1}t_{j1} + t_{i2}t_{j2} = 0. \tag{4.62}$$

Al sumar (4.60) *y* (4.61)*, llegamos a:*

$$\frac{1}{3}\left(t_{i1}t_{j1} + t_{i2}t_{j2}\right) + t_{i3}t_{j3} + t_{i4}t_{j4} = 0,$$

y al igualar con (4.62)*, obtenemos:*

$$t_{i3}t_{j3} + t_{i4}t_{j4} = 0, \qquad \textit{para } i \neq j, \tag{4.63}$$

que sustituido en (4.60) *y* (4.62) *implica que:*

$$t_{i1}t_{j1} = t_{i2}t_{j2} = 0, \qquad \textit{para } i \neq j. \tag{4.64}$$

Además

$$\begin{aligned}
g\left(e_1\right) \odot g\left(e_1\right) &= \left(\frac{t_{12}^2}{3} + \frac{t_{13}^2}{2} + \frac{t_{14}^2}{2}\right) e_1 + \left(\frac{t_{11}^2}{3} + \frac{t_{13}^2}{2} + \frac{t_{14}^2}{2}\right) e_2 + \\
&\quad \left(\frac{t_{11}^2}{3} + \frac{t_{12}^2}{3}\right) e_3 + \left(\frac{t_{11}^2}{3} + \frac{t_{12}^2}{3}\right) e_4
\end{aligned}$$

y $\qquad g\left(e_1 \cdot e_1\right) = g\left(e_2 + e_3 + e_4\right) = \sum_{k=1}^{4}\left(t_{2k} + t_{3k} + t_{4k}\right) e_k.$

Igualando las respectivas coordenadas, obtenemos:

$$\frac{t_{12}^2}{3}+\frac{t_{13}^2}{2}+\frac{t_{14}^2}{2} = t_{21}+t_{31}+t_{41} \tag{4.65}$$

$$\frac{t_{11}^2}{3}+\frac{t_{13}^2}{2}+\frac{t_{14}^2}{2} = t_{22}+t_{32}+t_{42} \tag{4.66}$$

$$\frac{t_{11}^2}{3}+\frac{t_{12}^2}{3} = t_{23}+t_{33}+t_{43}=t_{24}+t_{34}+t_{44}. \tag{4.67}$$

Aplicando el mismo procedimiento para $i \in \{2,3,4\}$ y dado que:

$$\begin{aligned}
g(e_i)\odot g(e_i) &= \left(\frac{t_{i2}^2}{3}+\frac{t_{i3}^2}{2}+\frac{t_{i4}^2}{2}\right)e_1+\left(\frac{t_{i1}^2}{3}+\frac{t_{i3}^2}{2}+\frac{t_{i4}^2}{2}\right)e_2+\\
&\quad \left(\frac{t_{i1}^2}{3}+\frac{t_{i2}^2}{3}\right)e_3+\left(\frac{t_{i1}^2}{3}+\frac{t_{i2}^2}{3}\right)e_4,\\
g(e_2\cdot e_2) &= g(e_1+e_3+e_4)=\sum_{k=1}^{4}(t_{1k}+t_{3k}+t_{4k})\,e_k, \qquad (4.68)\\
g(e_3\cdot e_3) &= g(e_4\cdot e_4)=g(e_1+e_2)=\sum_{k=1}^{4}(t_{1k}+t_{2k})\,e_k,
\end{aligned}$$

podemos obtener:

$$t_{11}+t_{31}+t_{41} = \frac{t_{22}^2}{3}+\frac{t_{23}^2}{2}+\frac{t_{24}^2}{2} \tag{4.69}$$

$$t_{12}+t_{32}+t_{42} = \frac{t_{21}^2}{3}+\frac{t_{23}^2}{2}+\frac{t_{24}^2}{2} \tag{4.70}$$

$$t_{11}+t_{21} = \frac{t_{32}^2}{3}+\frac{t_{33}^2}{2}+\frac{t_{34}^2}{2}=\frac{t_{42}^2}{3}+\frac{t_{43}^2}{2}+\frac{t_{44}^2}{2} \tag{4.71}$$

$$t_{12}+t_{22} = \frac{t_{31}^2}{3}+\frac{t_{33}^2}{2}+\frac{t_{34}^2}{2}=\frac{t_{41}^2}{3}+\frac{t_{43}^2}{2}+\frac{t_{44}^2}{2} \tag{4.72}$$

$$t_{14}+t_{24} = t_{13}+t_{23}=\frac{t_{31}^2}{3}+\frac{t_{32}^2}{3}=\frac{t_{41}^2}{3}+\frac{t_{42}^2}{3}. \tag{4.73}$$

Note que (4.69) *y* (4.70) *se obtienen de* (4.68) *igualando las primeras dos componentes de $g(e_2)\odot g(e_2)$ y $g(e_2\cdot e_2)$;* (4.71), (4.72) *y* (4.73) *se obtienen de* (4.68) *igualando todas las componentes de $g(e_3)\odot g(e_3)$ y $g(e_3\cdot e_3)$ y las de $g(e_4)\odot g(e_4)$ y $g(e_4\cdot e_4)$.*

Por (4.64), *$t_{i1}\neq 0$ a lo sumo para un valor de i, por lo tanto podemos analizar* 4 *casos:*

Caso 1: $t_{11}=t_{21}=t_{31}=t_{41}=0$. *En este caso, por* (4.65)

$$t_{12}=t_{13}=t_{14}=0,$$

y por (4.69)

$$t_{22} = t_{23} = t_{24} = 0,$$

y finalmente por (4.71)

$$t_{32} = t_{33} = t_{34} = t_{42} = t_{43} = t_{44} = 0.$$

De donde se concluye que g es el homomorfismo nulo.

Caso 2: $t_{31} \neq 0$ *ó* $t_{41} \neq 0$. *Entonces por* (4.64)

$$t_{11} = t_{21} = 0,$$

luego por (4.71)

$$t_{32} = t_{33} = t_{34} = t_{42} = t_{43} = t_{44} = 0,$$

lo cual implica, por (4.72), *que* $t_{31}^2 = t_{41}^2$, *además por* (4.64) $t_{31}t_{41} = 0$, *por lo tanto* $t_{31} = t_{41} = 0$, *lo cual es una contradicción.*

Caso 3: $t_{11} \neq 0$. *Entonces por* (4.64)

$$t_{21} = t_{31} = t_{41} = 0, \tag{4.74}$$

(4.65) *y* (4.74) *implican que:*

$$t_{12} = t_{13} = t_{14} = 0,$$

además (4.73) *y* (4.74),*implican que* $t_{32}^2 = t_{42}^2$, *es decir ambos son nulos ó ambos son no nulos, pero por* (4.64),

$$t_{32} = t_{42} = 0. \tag{4.75}$$

Ahora por (4.70)

$$t_{23} = t_{24} = 0,$$

que sustituida en (4.66), *nos lleva a*

$$\frac{t_{11}^2}{3} = t_{22},$$

y dado que $t_{11} \neq 0$, *entonces* $t_{22} \neq 0$, *esto en* (4.69) *implica que:*

$$t_{11} = \frac{t_{22}^2}{3},$$

por lo tanto ,

$$t_{22} = \frac{t_{11}^2}{3} = \frac{\left(\frac{t_{22}^2}{3}\right)^2}{3} = \frac{t_{22}^4}{27},$$

así:

$$t_{11} = t_{22} = 3.$$

Sustituyendo en (4.71) *y recordando, por* (4.74) *y* (4.75)*, que* $t_{21} = t_{32} = t_{42} = 0$, *obtenemos:*

$$t_{33}^2 + t_{34}^2 = t_{43}^2 + t_{44}^2 = 6$$

por lo tanto,

$$t_{33}^2 + t_{34}^2 + t_{43}^2 + t_{44}^2 = 12. \tag{4.76}$$

Además por (4.67)

$$t_{33} + t_{43} = t_{34} + t_{44} = 3,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\left(t_{33}^2 + t_{34}^2\right) + \left(t_{43}^2 + t_{44}^2\right) + 2\left(t_{33}t_{43} + t_{34}t_{44}\right) &= \left(t_{33} + t_{43}\right)^2 + \left(t_{34} + t_{44}\right)^2 \\ &= 18 \end{aligned} \tag{4.77}$$

pero por (4.63)

$$t_{33}t_{43} + t_{34}t_{44} = 0,$$

que al remplazar en (4.77) *da:*

$$t_{33}^2 + t_{34}^2 + t_{43}^2 + t_{44}^2 = 18,$$

lo cual es absurdo por (4.76).

Caso 4: $t_{21} \neq 0$. *Entonces por* (4.64)

$$t_{11} = t_{31} = t_{41} = 0. \tag{4.78}$$

Lo cual implica, por (4.73) *que* $t_{32}^2 = t_{42}^2$, *de donde ambos son nulos ó no nulos, pero* (4.64) *implica que:*

$$t_{32} = t_{42} = 0.$$

Luego por (4.69) *y* (4.78)

$$t_{22} = t_{23} = t_{24} = 0.$$

Ahora por (4.66)

$$t_{13} = t_{14} = 0,$$

que sustituyendo en (4.65) *nos lleva a:*

$$\frac{t_{12}^2}{3} = t_{21},$$

y dado que $t_{21} \neq 0$, *entonces* $t_{12} \neq 0$, *esto en* (4.70) *implica que*

$$t_{12} = \frac{t_{21}^2}{3},$$

por lo tanto,

$$t_{12} = \frac{t_{21}^2}{3} = \frac{\left(\frac{t_{12}^2}{3}\right)^2}{3} = \frac{t_{12}^4}{27}$$

y así:

$$t_{12} = t_{21} = 3.$$

Sustituyendo esto en (4.71)*:*

$$t_{33}^2 + t_{34}^2 = t_{43}^2 + t_{44}^2 = 6$$

y por lo tanto

$$t_{33}^2 + t_{34}^2 + t_{43}^2 + t_{44}^2 = 12. \tag{4.79}$$

Además por (4.67)

$$t_{33} + t_{43} = t_{34} + t_{44} = 3,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left(t_{33}^2 + t_{34}^2\right) + \left(t_{43}^2 + t_{44}^2\right) + 2\left(t_{33}t_{43} + t_{34}t_{44}\right) &= \left(t_{33} + t_{43}\right)^2 + \left(t_{34} + t_{44}\right)^2 \\ &= 18 \qquad (4.80)\end{aligned}$$

pero por (4.63)

$$t_{33}t_{43} + t_{34}t_{44} = 0$$

que al remplazarlo en (4.80) *da*

$$t_{33}^2 + t_{34}^2 + t_{43}^2 + t_{44}^2 = 18,$$

lo cual es absurdo por (4.79)*.*

Con esto hemos visto que el único caso posible es el caso 1, por lo tanto g es el homomorfismo nulo.

En esta sección vimos que una condición suficiente para que

$$\mathcal{A}\left(K_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right) \cong \mathcal{A}_{RW}\left(K_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right),$$

es que $n = 2$ ó que todos los a_i sean iguales, el artículo [17] cierra con la siguiente conjetura:

Conjetura
Sea $K_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ un grafo n-partito completo, entonces

$$\mathcal{A}\left(K_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right) \cong \mathcal{A}_{RW}\left(K_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right),$$

si y solo si, se cumple una de las siguientes condiciones:

- $n = 2$,
- $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

La cual es aun un problema abierto a futuras investigaciones.

Bibliografía

[1] A. Serebrovskij. On the properties of the Mendelian equations. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.*, 1934(2):33–39, 1934.

[2] I. M. H. Etherington. Non-associative algebra and the symbolism of genetics. *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. B, Biol.*, 61:24–42, 1941.

[3] Jianjun Paul Tian and Petr Vojtechovsky. Mathematical concepts of evolution algebras in non-mendelian genetics. *Quasigroups Related Systems*, 14(1):111–122, 2006.

[4] Jianjun Paul Tian. *Evolution algebras and their applications*, volume 1921 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2008.

[5] U. A. Rozikov and J. P. Tian. Evolution algebras generated by Gibbs measures. *Lobachevskii J. Math.*, 32(4):270–277, 2011.

[6] Sh. N. Murodov. Classification dynamics of two-dimensional chains of evolution algebras. *Int. J. Math.*, 25(2):23, 2014. Id/No 1450012.

[7] Paula Cadavid, Mary Luz Rodiño Montoya, and Pablo M. Rodriguez. Characterization theorems for the spaces of derivations of evolution algebras associated to graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, 07 2018.

[8] A. Dzhumadil'daev, B. A. Omirov, and U. A. Rozikov. Constrained evolution algebras and dynamical systems of a bisexual population. *Linear Algebra Appl.*, 496:351–380, 2016.

[9] Richard D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*. Dover Publications, Inc., New York, 1995. Corrected reprint of the 1966 original.

[10] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin‘kov, I. P. Shestakov, and A. I. Shirshov. *Rings that are nearly associative*, volume 104 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1982. Translated from the Russian by Harry F. Smith.

[11] Yolanda Cabrera Casado. *Evolution algebras*. PhD thesis, Universidad de Malaga, 2016.

[12] Alberto Elduque and Alicia Labra. Evolution algebras and graphs. *J. Algebra Appl.*, 14(7):1550103, 10, 2015.

[13] Ulrich Knauer and Kolja Knauer. *Algebraic graph theory. Morphisms, monoids and matrices. 2nd revised and extended edition.*, volume 41. Berlin: De Gruyter, 2nd revised and extended edition edition, 2019.

[14] Gary Chartrand, Linda Lesniak, and Ping Zhang. *Graphs and Digraphs*. Chapman and Hall/CRC, 6th edition, 2015.

[15] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. *A textbook of graph theory*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2012.

[16] C.P. Ruiz and F.V. Badillo. *Algebra lineal*. McGraw-Hill, 1991.

[17] Paula Cadavid, Mary Luz Rodiño Montoya, and Pablo M. Rodriguez. The connection between evolution algebras, random walks and graphs. *Journal of Algebra and Its Applications*, 119(2):2050023, 2020.