LA COMPRENSIÓN DELATASA DE VARIACIÓN PARA UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA. UN ANÁLISIS DESDE LA TEORÍA DE PIRIE Y KIEREN

JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA

Estudiante

Dr. CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ

Dr. PEDRO VICENTE ESTEBAN DUARTE

Asesores

Tesis para optar al título de Doctor en Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

MEDELLÍN

Reconocimientos

Esta tesis doctoral, si bien ha requerido de esfuerzo y entrega de mi parte y de mis asesores, no hubiese sido posible su finalización sin la colaboración productiva y desinteresada de todas y cada una de las personas que durante el proceso de realización aportaron con su paciencia y comprensión.

Primero y antes que todo agradecer a Dios por dejarme sentir su presencia en este proceso formativo y disponer de todos los espacios y personas que contribuyeron significativamente a lograr las metas propuestas al inicio de mi doctorado, incluso a generarme metas cada vez más ambiciosas por la calidad de saberes y experiencias que podían ofrecerme. De esta manera, quiero agradecer a los integrantes de los grupos de investigación en los que participé. Entre ellos, al grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) a sus coordinadores Carlos Mario y Pedro Vicente por las continuas críticas en mis aciertos y desaciertos, así mismo por permitirme dialogar y de esa manera fortalecer mi mirada y postura frente a la Educación Matemática. De igual forma, agradezco a Marcelo de C. Borba, coordinador del *Grupo de Pesquisa em Informática, outras mídias e Educação Matemática – GPIMEM* de la Universidad Estadual Paulista, en Rio Claro-SP, Brasil, quien puso su saber y experiencia a mi disposición de manera gratificante en lo personal y académico.

Un agradecimiento especial a mis amigos y en particular a todos los miembros de mi familia, a mi madre Genny, y a Alexandra, Mauricio, Liliana, Juan José, Julián, Santiago, Yadira y Giovani por su infinita comprensión, continuo apoyo y su voz de aliento en los momentos de desazón.

Un reconocimiento para el Instituto Colombiano de Ciencia, Tecnología e Innovación-COLCIENCIAS y al ICETEX por el apoyo financiero bridado para adelantar mis estudios doctorales a través de la Beca: “Créditos Condonables” en la convocatoria de 2007.

Resumen

Esta investigación se desarrolla en el marco del programa de Doctorado en Educación en la línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia. La investigación comienza con una amplia revisión de la literatura a luz del pensamiento variacional y de la enseñanza y el aprendizaje de algunos tópicos del cálculo. Basado en dicha revisión y en mi experiencia previa como investigador me permito presentar el problema de investigación el cual se formula a través de la siguiente pregunta: ***¿Cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada en estudiantes participantes de un curso de pre-cálculo?***

Tener como propósito indagar por el proceso de comprensión de un concepto matemático me implicó establecer algunas aproximaciones a lo que significa "la comprensión matemática"; para ello realizo una breve revisión de algunos marcos teóricos y justifico el por qué la *Teoría para la evaluación de la comprensión matemática de Pirie y Kieren* se muestra propicia para estudiar el objeto de estudio de esta tesis.

En la convergencia entre el marco teórico y la formulación de la pregunta de investigación se encuentra evidencia para justificar el *estudio de casos* como un método que permite abordar el estudio de la comprensión matemática en el tópico señalado. Es así como a través de observaciones, registros escritos, documentos, entrevistas, módulos de enseñanza, se obtiene la información que permite el estudio de la comprensión de la tasa de variación de cuatro estudiantes de un curso de precálculo.

Los resultados del estudio muestran que en el proceso de comprensión se presentan ciertas "imágenes arraigas" las cuales se convierten en un factor desencadenador de *folding back* con lo cual se genera un aporte sobre la naturaleza de esta característica de la comprensión matemática descrita por la Teoría de Pirie y Kieren. Otros factores que intervienen en la comprensión matemática son la interacción con diferentes medios, en el caso particular de este estudio, se muestra como a través de la interacción con software como el GeoGebra y

el Modellus las estudiantes participantes mostraron cierta evolución su comprensión matemática.

Desde los resultados de esta investigación se resalta aspectos como: la interacción entre las estudiantes, entre ellas y los medios, y con el investigador como factores que promueven la comprensión matemática. Otros aspectos sobre el papel de la representación matemática también son valorados en las conclusiones del este estudio.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

INTRODUCCIÓN

En este documento reporto el proceso de una investigación desarrollada en el marco del programa de Doctorado en Educación, en la línea de Educación Matemática orientada por el Grupo de investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) en la cual se aborda el proceso de comprensión de la noción de tasa de variación como una manera de aproximación al concepto de derivada.

La investigación comienza con una revisión de la literatura la cual desarrollo en el primer capítulo. A partir de dicha revisión pude observar la importancia de una comprensión de la tasa de variación como una componente trascendental en la interpretación de la derivada. De la misma manera, a pesar de existir una amplia gama de investigaciones y perspectivas en torno a la enseñanza y aprendizaje de conceptos del cálculo, desde la literatura muestro que todos estos esfuerzos son insuficientes para dar cuenta de la complejidad del fenómeno de comprensión de tales conceptos.

Basado en las consideraciones emanadas de la literatura y en los trabajos que como investigador había desarrollado previamente, en el segundo capítulo fundamento y formulo el problema de investigación el cual se resume en la siguiente pregunta: ***¿Cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse al concepto de derivada en estudiantes participantes de un curso de pre-cálculo?***

El capítulo tres es dedicado a una presentación de la Teoría para la evolución de la comprensión matemática de Pirie y Kieren. En dicho capítulo describo las características de tal Teoría así como los principales campos de investigación en los cuales ha sido usada y algunas de las extensiones que han sido propuestas.

Los trabajos de Borba y Araújo (2006) y Yin (2009) se convirtieron en el fundamento de la Metodología de la Investigación. Dichos fundamentos son descritos en el capítulo cuatro de este documento, en el que describo cómo el "estudio de casos" se muestra como un abordaje apropiado para responder a la pregunta que atañe a esta investigación.

En el capítulo cinco presento un análisis de los resultados de la investigación a la luz de marco teórico y en el capítulo seis realizo una triangulación con otros elementos teóricos. Particularmente es este capítulo muestro como la comprensión de la tasa de variación parece estar mediada por la interacción entre las estudiantes, los software *GeoGebra* y *Modellus* y el profesor.

Finalmente el capítulo siete presento las conclusiones de este trabajo. Allí muestro una serie de implicaciones que surgen tanto para el aula de clase como para el marco teórico usado en la investigación. Así mismo surgen algunas recomendaciones que podrían orientar futuras investigaciones.

Capítulo 1

1. REVISIÓN DE LA LITERATURA

La tasa de variación o razón de cambio ha sido un concepto que ha llamado la atención de diversos investigadores; en parte, porque se encuentra en relación con otros conceptos fundamentales del análisis matemático como la derivada (Dall'anese, 2006; Tall, 2009; Dolores C. , 2007) y el concepto de función (Posada y Villa, 2006a). En este capítulo, me dedicaré a presentar una revisión de la literatura producida en el campo de la Educación Matemática asociada a Cálculo diferencial, centrando la atención en las investigaciones que dan cuenta de la tasa de variación como una manera de aproximarse a la comprensión de la derivada.

1.1 Algunos estudios asociados al cálculo diferencial

En las últimas dos décadas la preocupación por el aprendizaje de conceptos, asociados al cálculo diferencial, ha venido consolidándose como un dominio de investigación con alto grado de aceptación. Como prueba de ello, puede revisarse las actas de eventos académicos y números especiales de algunos periódicos y revistas en temas asociados al llamado "Pensamiento Matemático Avanzado". Según Azcárate y Camacho (2003) es en 1985, en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education), cuando se forma un grupo de trabajo con los objetivos de estudiar la naturaleza del llamado "Pensamiento Matemático Avanzado" y, en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal.

En la literatura se encuentran muchas dificultades reportadas en relación con la enseñanza y aprendizaje de conceptos del cálculo. Particularmente Azcárate y Camacho (2003) señalan como dificultades esenciales:

> *[…] el concepto de límite y los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos de derivada e integral; se indican además otro tipo de*

> *dificultades que tienen que ver con el estudio de las funciones, la notación de Leibniz, el concepto de infinito, el uso y selección de las distintas representaciones, etc* (p. 142).

Este tipo de dificultades ponen en evidencia la complejidad inherente al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de cálculo diferencial, lo cual llama la atención de diversas comunidades investigativas. De manera particular, en este apartado ofrezco una visión más profunda de la producción académica de dos grupos de investigación, en los cuales he participado en mi formación doctoral. Ellos son el *Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia* (UdeA –Eafit) — EDUMATH y el *Grupo de Pesquisa em Informática, outras mídias e Educação Matemática* – GPIMEM de la Universidad Estadual Paulista, en Rio Claro-SP, Brasil.

Los principales aportes del GPIMEM a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo están enlazadas con el constructo teórico desarrollado por algunos de sus miembros: *Humans-with-Media* (Borba y Villarreal, 2005). Por otro lado, para algunos miembros del EDUMATHel interés se ha centrado en el razonamiento involucrado en los procesos de comprensión matemática y, para ello, han asumido como referente teórico al modelo de van Hiele, así como las ventajas que ofrece la entrevista de carácter socrático como fuente generadora de conocimiento (Navarro y Pérez, 2006; Navarro y Pérez, 2010; Esteban y Pérez, 2003; Esteban, 2003; Esteban y Llorens, 2003; Jaramillo, 2003; De la Torre, 2000, 2003a; 2003b).

En el constructo teórico *Humans-with-media* del GPIMEM, Borba y Villarrealasumen como premisa fundamental el hecho de que las herramientas informáticas no son sólo asistentes de los seres humanos para producir conocimiento, sino que al mismo tiempo, modifican su naturaleza, tanto del ser humano como del conocimiento producido. Esta premisa ha sido ampliamente validada desde la investigación, abordando el estudio de diversos conceptos del cálculo, por ejemplo: el concepto de derivada (Olimpo, 2006; Villarreal, 1999), ecuaciones diferenciales (Javaroni, 2007), funciones, límites y continuidad (Olimpo, 2006), la función compuesta y la regla de la cadena (Barbosa, 2009) y el teorema fundamental del cálculo (Scucuglia, 2006).

Uno de los aspectos más sobresalientes en cada una de las investigaciones del GPIMEM acerca de la naturaleza del conocimiento matemático, está relacionado con los procesos de visualización que se encuentran inmersos en la interacción con los *medios*. Dichos medios promueven un estudio de los elementos dinámicos que caracterizan algunos conceptos matemáticos; en este sentido, las investigaciones anteriormente citadas, sustentan que el proceso de visualización es potencializado por las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) que transforman el modo en que el conocimiento es producido, reorganizando la forma de interactuar y de pensar.

Particularmente, Barbosa (2009) afirma que el conocimiento es producido tanto, a través de las discusiones entre los estudiantes, como de un proceso de interpretación individual expresado en la forma oral, escrita y en la interacción con el computador. Para Barbosa, ese proceso individual no significa un estudiante aislado, sino en interacción con un colectivo que piensa con él.

En el caso de Javaroni (2007), el estudio del concepto de ecuaciones diferenciales se hace a través de un abordaje cualitativo de modelos matemáticos auxiliados por las TIC. La tesis de esta autora ofrece argumentos sobre la importancia de la visualización, ya que a través de los gráficos, los estudiantes pueden obtener informaciones desapercibidas.

El estudio de la recta tangente como una aproximación al concepto de derivada fue el foco de pesquisa de Villarreal (1999); en su investigación, caracteriza los procesos de pensamiento de los estudiantes en un ambiente computacional. Según la autora, dicho ambiente promovió la implementación de procesos de visualización de gráficos, articulándolos con la oralidad. A través de la interacción entre los estudiantes (seres humanos) y los computadores (medios) la autora afirma que el pensamiento matemático es permeado y reorganizado por los *medios* usados.

Olimpio (2006) investiga las compresiones producidas por estudiantes de primer año de matemáticas, que emergen de la integración oralidad, escrita (lenguaje natural) e informática (representada por medio de CAS MAPLE) sobre conceptos como: función, límite, continuidad y derivada, asumidos como básicos en el estudio del cálculo. Este autor sugiere que los conflictos emergentes en la transición de la matemática en la interfase

Bachillerato-Universidad tienen su génesis en una limitada comprensión del concepto de función. También sugiere una mayor e intensiva exploración de la naturaleza dinámica de los conceptos de cálculo.

Barbosa (2009), por su parte, cuestiona el excesivo énfasis que se hace en los libros de texto al trabajo algebraico de conceptos como función compuesta y la regla de la cadena. De esa manera, esta autora sugiere que los procesos de visualización posibilitan a los alumnos identificar y conjeturar propiedades de los conceptos matemáticos. Después de una amplia revisión de la literatura, Barbosa propone su propia interpretación de la visualización como un proceso que asocia la comprensión de los estudiantes, entre sí, y un medio externo. Basada en esta premisa, la autora propone un trabajo que involucra los procesos de visualización y las representaciones múltiples de los conceptos matemáticos. Al igual que Villarreal (1999) y Borba y Scheffer (2004), Barbosa (2009) resalta la importancia de trabajar con las representaciones múltiples tanto en la producción de conocimiento como en la atribución de nuevos significados a los contenidos por medio de las interacciones con el computador. Barbosa muestra cómo la producción de conocimientos asociados a la función compuesta y la regla de la cadena surge a través de conjeturas formuladas durante el proceso de visualización potencializado por las TIC. Tales conjeturas fueron confirmadas o refutadas teniendo en cuenta entrelazamientos de las representaciones múltiples (que permean todas las actividades) y por un colectivo pensante seres-humanos-con-medios, en el cual el ser humano transforma y es transformado por los medios en un proceso interactivo. Estas conclusiones confirman una vez más la necesidad que Villarreal (1999) había señalado sobre la coordinación entre representaciones a través de ambientes computacionales superando la dicotomía entre algunas de ellas.

Con respecto al EDUMATH pueden encontrarse aportes al enseñanza del cálculo diferencial, en particular con concepto de aproximación local (Esteban, 2003; Esteban y Pérez, 2003; 2002; Esteban y Llorens, 2003).

Esteban y Llorens (2003) presentan un estudio comparativo de dos colecciones de descriptores para el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente. Las colecciones de descriptores fueron establecidas a partir del modelo de van Hiele a través de dos mecanismos, el de *zoom* y el de *haz de secantes*. El estudio comparativo de estos investigadores arrojó algunas conclusiones acerca de la edad, las materias que los estudiantes estaban cursando, con las explicaciones previas del concepto de tangente, con el concepto de derivada y su interpretación geométrica, con el uso de programas de cálculo simbólico. De su comparación, estos investigadores concluyen que no existen diferencias entre las dos formas de abordar la fase de visualización del concepto y, por tanto, el nivel de razonamiento de los estudiantes es independiente de la forma de abordar el concepto.

En Esteban y Pérez (2003) se expone una metodología para abordar la enseñanza del concepto de aproximación local a través de su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto. La propuesta estuvo fundamentada en la visualización a través del software Derive (manipulación algebraica). Los elementos básicos que se resaltan en el estudio de la recta tangente son: punto-recta, punto-curva, recta-curva; a partir de ello, los autores retoman los planteamientos de Vinner (1991) en cuanto al *concepto imagen* para discutir los elementos particulares de la *recta tangente*. En ese sentido, estos investigadores señalan que para establecer la relación entre un haz de secante y la tangente, los estudiantes deben: (i) percibir que el concepto de recta tangente a una curva es más amplio que el de tangente a una circunferencia, (ii) entender la necesidad de un proceso de aproximación local para asegurarse cuándo una recta es tangente o no a una curva en un punto dado; y (iii) verbalizar una definición adecuada de tangente partiendo del mecanismo haz de secantes. En su propuesta, estos investigadores plantean que la asimilación de un concepto matemático pasa por dos fases: la de visualización y la de formalización. La propuesta de Esteban y Pérez se centra en la primera fase pues es en ella donde surgen muchas creaciones y a través del mecanismo de *haz de secantes* se deja a los estudiantes a la puesta de la formalización.

Por su parte, en la investigación de Jaramillo (2003) se propuso dotar de una componente visual geométrica al concepto de convergencia de una serie. A través de dicha componente se espera en el alumno mejorar su comprensión, centrándose en el aspecto fundamental del límite de una sucesión de acumulaciones parciales y no en lo que la palabra “convergencia” semánticamente parece sugerir. Para lograrlo determinó unos descriptores de niveles de razonamiento de la noción de serie convergente, en el marco del modelo de van Hiele. La visualización a través de la imagen de longitud de curvas planas, permitieron la caracterización del proceso de razonamiento infinito. En su propuesta Jaramillo usó la entrevista socrática, como el método adecuado para observar la evolución del razonamiento asociado a la comprensión de un concepto matemático y validarlo a la luz de los descriptores establecidos. Es importante resaltar que la investigación de Jaramillo (2003) tiene una fuerte relación con la noción de límite y que los zig-zags, elementos trabajados para abordar el concepto de convergencia, son figuras que podrían posibilitar la descripción de los niveles de razonamiento existentes en la elaboración y estudio de este concepto por parte del alumno.

Las investigaciones aquí presentadas han abordado cuestiones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos del cálculo usando las TIC; de igual manera, muestran la importancia de usar múltiples representaciones, colocando especial atención a las interacciones, producciones orales y escritas de los estudiantes como una herramienta para observar la naturaleza del aprendizaje construido. Más allá de ésto, también sugieren la necesidad de continuar investigando en aspectos dinámicos, asociados a los conceptos de cálculo, los cuales son potencializados a través de la visualización proporcionada por las TIC.

Desde la tradición de los grupos EDUMATH y GPIMEM es posible observar algunas aproximaciones significativas a la enseñanza de conceptos del cálculo a través del uso de la tecnología. Particularmente, se evidencia cómo a través de la visualización, el concepto de derivada puede ser introducido a través del concepto de aproximación local y del concepto de tangente a una curva mediante el mecanismo del “Zoom” y el “Haz de secantes” (Esteban y Llorens, 2003, Villarreal, 1999).

1.2 Investigaciones acerca del concepto de derivada

El concepto de derivada es uno de los conceptos clave del análisis matemático, y por lo tanto, se aborda en los cursos de cálculo diferencial, precedido, tradicionalmente, del estudio de conceptos como el de límite y función. Las dificultades relativas a su enseñanza y aprendizaje han sido reportadas por diversos investigadores en los últimos años, entre ellos, Dolores (2007) quien afirma que:

> La enseñanza del cálculo diferencial (CD) en el nivel medio superior, en muchos países enfrenta un problema generalizado: los estudiantes escasamente comprenden sus ideas básicas, especialmente las relacionadas con la derivada. Las evidencias mostradas […] son coincidentes al terminar sus cursos de CD cantidades significativas de estudiantes logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas pero difícilmente comprenden el significado de esos procedimientos. Incluso, difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales de variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto (p.I)[1]

Al revisarla literatura internacional puede evidenciarse la derivada como un concepto que tiene múltiples elementos, los cuales deben ser considerados dentro de su enseñanza, de tal manera que se posibilite su adecuada comprensión y de allí que se observe un significativo número de investigaciones que han abordado, como objeto de estudio,la comprensión de la derivada. Particularmente, el artículo de Sánchez-Matamoros, García, y Llinares (2008) presentan una revisión bibliográfica de este tema. En dicho documento, estos autores asumen como punto de partida la siguiente premisa: la comprensión de la noción de derivada presenta dificultades para los estudiantes en el bachillerato (Educación Media en el contexto colombiano) y primeros años de universidad. A partir de dicha premisa, los autores realizan una revisión de las investigaciones que abordan la comprensión del concepto de derivada y la organizan en tres tópicos, así: (1) lo que se conoce sobre la comprensión de la derivada de una función en un punto; (2) el papel que desempeñan los sistemas de representación, y (3) las características del desarrollo de esquema de la derivada.

1.2.1 Sobre las dificultades en el estudio del concepto de derivada

Artigue (1995, citada por Sánchez-Matamoros et al., 2008) afirma que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de la derivada y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro de análisis matemático. Dichas dificultades se manifiestan en el significado de la noción de derivada como límite de un cociente

[1] En esta cita, el subrayado no es original del texto. Se presenta en este documento para llamar la atención en las dificultades relativas a la comprensión del concepto de Derivada y en particular de su carácter variacional

incremental (representación analítica; $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).-f(x)}{\Delta x}$ ó$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) o en su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente.

Desde su investigación,Da Costa André (2008)comenta que algunas de las dificultades por las que atraviesan los estudiantes al abordar la derivada desde la perspectiva geométrica (sucesión de rectas secantes que se aproximan a tangentes) están enraizadas,tanto en la comprensión del concepto de límite como en las experiencias que los estudiantes tienen de la tangente antes de comenzar elestudio del cálculo, pues generalmente la noción de tangente está asociada a círculos y arcos, lo cual puede llevar a la idea que la tangente sólo puede cortar a la curva en un solo punto, y por tanto, no la puede atravesar en dicho punto.

Otra de las dificultades relativas a la comprensión de la derivada radica en la coordinación de los significados evidenciados entre las diferentes formas de representación de este concepto. En este sentido Habre y Abboud (2006) establecieron, a partir de una investigación con estudiantes de un curso de cálculo,diversas comprensiones de la derivada en la representación analítica que divergieron de las comprensiones en la representación gráfica. Así mismo,agregan que, en muchos estudiantes prevalece la representación algebraica (analítica), lo cual, en ocasiones, puede presentarse como un obstáculo en las mentes de los estudiantes cuando no se integra con las demás formas de representación.

Para Sánchez-Matamoros et al. (2008), la construcción de un significado parcial de la derivada puede conducir a dificultades para sudesempeño en los cursos de cálculo. Ello genera la necesidad de conocer los procesos mediante los cuales, los estudiantes dotan de significado al concepto de derivada. Por tanto, la investigación en este campo se hace bastante pertinente.

Otras de las dificultades, en lo relativo a la comprensión de la derivada, está asociada con la representación de algunos de los aspectos variacionales que emergen en situaciones, en la cuales, conceptos como la velocidad o la rapidez tienen lugar. En este aspecto, Dolores, Chi, Canul, Cantú, y Pastor (2009) presentan los resultados de una investigación que explora las representaciones gráficas que hacen los estudiantes sobre la rapidez. Estos autores afirman que, convencionalmente, la rapidez está asociada a la razón de dos magnitudes y vinculada, gráficamente, a la pendiente de la recta tangente a una curva que representa la función de dichas magnitudes; sin embargo, en esta investigación, los autores pudieron encontrar otro tipo de representaciones que son usadas por los estudiantes, en las cuales se presentaron características de cinco tipos: rectas, columnas, puntos, pictóricas y curvas. En la mayoría de este tipo de elaboraciones de los estudiantes, la rapidez y la comparación entre ellas, se asoció con características visuales de las gráficas, por ejemplo: el tamaño o longitud (una rapidez mayor que otra se asocia a una barra más larga que otra o a un punto más alto que el otro). Dolores et al. (2009) concluyen que "*la mayoría de los estudiantes dan representaciones gráficas de la rapidez asociándola con su magnitud, y no con la pendiente o cociente de magnitudes de los cambios como se prevé en el curriculum matemático escolar"* (p. 53). Estas concepciones erróneas las presentan los estudiantes, pese a que, desde la literatura, se evidencia la capacidad de los niños para tratar de manera informal la idea de rapidez o velocidad. Para Dolores y sus colaboradores, aunque la idea de rapidez se supone tradicionalmente en las clases de matemáticas, a través del estudio de la proporcionalidad y de la razón, adentrándose a su carácter funcional; muchos trabajos investigativos muestran que, en los estudiantes, persisten *concepciones alternativas* (erróneas) que no corresponde con las convencionales matemáticamente.

1.2.2 Algunos abordajes de la investigación en el concepto de derivada

El papel de las representaciones en la comprensión de la derivada, también ha sido objeto de estudio de múltiples investigaciones, Sánchez-Matamoros et al. (2008) resalta aquellas que estudian la conexión entre lo gráfico y lo analítico, la relación entre la gráfica de una función *f*y de su derivada *f´*. Así mismo, retoma el trabajode Badillo (2003) para llamar la atención sobre algunas inconsistencias que existen entre los significados de la derivada a nivel local y global. De esta manera afirma que:

> Los resultados del trabajo de Badillo señalaron que comprender la idea de función derivada en un punto, $f'(a)$, no implicaba comprender la idea de función derivada $f'(x)$. Sin embargo, aquellos sujetos que comprendían la idea de función derivada *f´(x)*, parecía que entendían la derivada de la función en un punto *f´(a)* (Sánchez-Matamoros et al., 2008, p. 283).

Ante este panorama, se abre una perspectiva de trabajo, ya que,como puntualizan Sánchez-Matamoros y sus colaboradores, el vínculo entre lo local y lo global, en el caso de la derivada, ha sido un tema poco investigado en Educación Matemática.

En su revisión bibliográfica, Sánchez-Matamoros et al. (2008) presentan un análisis del desarrollo de la comprensión del esquema de la derivada. Para ello,estos autores recurren a diversas investigaciones que han desarrollado el concepto de esquema introducido por Piaget (Trigueros, 2004; Baker et al. 2000; Sánchez-Matamoros, 2004, entre otros); de esto se puede decir que un esquema, a través de sus fases intra, inter y trans, se define como: *"La estructura matemática formada por las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos que constituyen una noción matemática y que puede ser evocado para la resolución de un problema"* (Piaget y García, 1983, 1989 citados por Sánchez-Matamoros et al., 2008, p.284). Entre los resultados que Sánchez-Matamoros y sus colegas resaltan en este aspecto, se tienen:

- El esquema gráfico del cálculo, varía de una persona a otra y puede evolucionar por caminos diferentes. En el caso de la derivada, es necesario comprender la primera derivada en sí misma como una función para poder entender la importancia de la segunda derivada (Baker et al., 2000).
- El desarrollo del esquema de derivada no es algo que esté necesariamente vinculado a conocer muchos elementos constitutivos del concepto, sino ser capaces de coordinarlos al resolver problemas (Sánchez-Matamoros, 2004).
- Hay una construcción progresiva del esquema y los modos de representación influyen en la constitución de los mecanismos de transición de un nivel al siguiente (Sánchez-Matamoros et al., 2006; Baker et al., 2000).

Después de una amplia revisión bibliográfica, Sánchez-Matamoros et al. (2008) logran concluir que los trabajos revisados en conjunto, permiten ahondar en dos ámbitos; a saber: (1) las características de los significados del concepto de derivada que elaboran los estudiantes, y (2), el desarrollo de tales significados. En relación con ésto, Sánchez-Matamoros y colegas afirman, entre otras cosas, que: "*la instrucción que se basa en las traslaciones entre distintos modos de representación y potencia el estudio de la variación desde contextos numéricos parece ayudar a la construcción del significado dela derivada*" (p. 290).

Los dos ámbitos identificados en la comprensión de la derivada, las características del significado construido y el desarrollo del esquema de derivada, le permiten a Sánchez-Matamoros et al. (2008) compartir con otros investigadores:

> […] la idea que una de las formas de empezar a conocer un concepto es a través de conexiones con otros conceptos (límites o funciones para el caso de la derivada); a través de diversos modos de representación (el gráfico y el analítico en la derivada) y a través de conocer sus diferentes propiedades y procesos (pp. 291-292).

Otros elementos que influyen en la compresión de la derivada, están asociados al contexto en el cual se desarrolla el estudio de tal concepto, por ejemplo Bingolbali, Monaghan, y Roper (2007) exploran la concepciones de un grupo de estudiantes de cálculo en un programa de ingeniería mecánica y realiza una comparación con algunos datos arrojados por estudiantes de pregrado en Matemáticas. Los datos en esta investigación fueron recogidos mediante pre-post test, entrevistas, y su análisis sugirió que los estudiantes de ingeniería mecánica conciben la derivada como una razón de cambio y ven las matemáticas como una herramienta, por tanto, prefieren los aspectos de aplicación de conceptos como la derivada; en contraste con ésto, el estudio estableció que los estudiantes de Matemáticas se muestran proclives a la interpretación de la derivada como tangentes. Según los autores, estas consideraciones están enraizadas en los diseños de los cursos de cálculo, ya que mientras en los cursos de Ingeniería se presta mayor tiempo al estudio de la razón de cambio, en los cursos de Matemáticas se dedica dicho tiempo al estudio de la pendiente de la tangente.

1.2.3 La derivada desde una perspectiva variacional

Son muchos los investigadores que defienden el sentido variacional de la derivada(Buendía y Ordóñez, 2009; Cantoral, Molina, y Sánchez, 2005; Dolores, 2007; Sánchez-Matamoros et al., 2008; Zandieh, 2000; Da Costa André, 2008; Herbert y Pierce, 2008).Buendía y Ordóñez (2009) señalan que "*estudiar qué es lo que varía –y cómo- en fenómenos cambiantes permite dotar a la derivada de significados que se alejan del manejo de fórmulas de derivación, hecho al cual se suele limitar su enseñanza*" (p. 8).

Uno de los argumentos que se tiene para abordar la derivada desde la variación, radica en las dificultades que los estudiantes poseen para establecer conexiones entre los conceptos cinemáticos, sus representaciones gráficas y el movimiento real de los objetos; en este sentido y a partir de mi experiencia como profesor, he podido confirmar que en muchos de mis estudiantes, prevalecen interpretaciones "icónicas" de las gráficas cartesianas, por ejemplo: la interpretación de una parábola cóncava hacia abajo como el recorrido de un móvil que sube y luego baja en una montaña.

Muchas de las dificultades reportadas en la comprensión de la derivada están enraizadas en el poco significado que en ésta tienen los elementos variacionales. En ese sentido, Herbert y Pierce (2008) mencionan que en las últimas tres décadas en la literatura se han reportado muchas de las dificultades que estudiantes de cursos introductorios al cálculo tienen con la comprensión de la tasa de variación.

Muchos de los significados asociados a la variación como la rapidez, velocidad, aceleración, entre otros; se han construido en una estrecha relación con el concepto de derivada. En coherencia con esta posición, Dolores (2007) afirma que la derivada es un concepto dinámico;

> […] en el sentido que cuantifica el cambio, y lo cuantifica de una manera muy especial, proporcionando un índice o razón de cambio, bien en un punto o en todo un intervalo. En la cuantificación del cambio encuentra su razón de ser los conceptos básicos del cálculo, por eso muchos matemáticos suelen caracterizar al cálculo y al análisis matemático en general, como la matemática del cambio (p. 26).

Y agrega:

> Hace falta pues diseñar nuevos materiales que coloquen a las ideas de la variación y el significado físico de los conceptos del cálculo, en especial de la derivada, como los elementos centrales de este curso y que a partir de las necesidades determinadas a partir de la explicación, modelación y predicción de los fenómenos de la variación se simplifiquen y determine el contenido pertinente (p. 27).

Por su parte, Cantoral, Molina, y Sánchez (2005) rescatan el papel de las prácticas sociales en el estudio de la derivada ya que, mediante este tipo de prácticas, la derivada se dota de significado. A partir de esta premisa, estos autores proponen la predicción como una práctica social que requiere profundizarse en el estudio de la derivada, entendiendo por predicción como la actividad racional que permite determinar un *estado futuro* a partir de un estudio sistemático de las causas y efectos que lo producen. En este sentido, Sánchez-Matamoros et al. (2008) retoman algunos de los trabajos de la socioepistemología (Cantoral y Farfán, 1998; Montiel, 2005) para afirmar que, desde esta perspectiva, se hace necesario iniciar la comprensión de la derivada como una organización de las variaciones sucesivas. Así,estos investigadores abandonan la visión de límite del cociente incremental y la recta secante que deviene de la tangente como aproximaciones iniciales a este concepto.

Otro de los enfoques relativos al estudio de la derivada, es la comprensión de la tasa de variación ya que, según Sánchez-Matamoros et al (2008),

> Si se considera que la derivada en un punto indica la velocidad de cambio, la comprensión de tal idea se apoya en el saber previo de la noción de la razón entre el incremento de *x* en relación al de *y* (p. 272).

Sánchez-Matamoros y sus colaboradores observaron, en los trabajos de Orton (1983) y Hart (1981), cómo la comprensión de la razón de cambio dependía del tipo de función utilizada. Así mismo, afirmaron que Orton indicó que las dificultades con la idea de razón de cambio y su vinculación al tipo de función, sea ésta lineal o cuadrática, podían tener su origen en una comprensión débil del concepto de función. También indican quelas causas por las cuales los estudiantes no alcanzan a comprender los aspectos variacionales asociados a la derivada son de diversa índole. Por ejemplo, Çetin (2009) señala que en los cursos de cálculo, con frecuencia se favorece la manipulación de representaciones algebraicas para enseñar reglas que permitan esbozar la gráfica de una función; en ese sentido para este autor, mientras los estudiantes calculan la derivada de una función por medio de una expresión algebraica con la ayuda de las reglas de derivación, no alcanzan a hacerse conscientes del hecho importante que constituye la interpretaciòn de la derivada como la razón de cambio instántanea de la función.

Por otro lado, Sánchez-Matamoros et al. (2008) destacan la importancia de los trabajos que abordan la relación entre la razón de cambio y el cociente incremental en la comprensión de la derivada. En consecuencia,estos investigadores resaltan el estudio de Azcárate (1990) en el cual se abordó la comprensión del concepto de derivada a nivel local y se caracterizaronlas dificultades, errores y esquemas conceptuales asociados a los conceptos de: *pendiente de una recta, velocidad instántanea de un movimiento variado, y la tasa de variación instántanea de una función*. Como consecuencia de este trabajo, se lograron identificar dos errores en los estudiantes;el primero, radica en la confusión que presentan los estudiantes entre la pendiene de una recta con su ordenada en el origen, y el segundo, en la asignación del valor de la ordenada en el origen como el valor de la pendiente de la recta (Sánchez-Matamoros et al., 2008).

Los trabajos de Tall (1989) sirvieron como base para que Da Costa André (2008) desarrollara una secuencia didáctica para la enseñanza de la derivada a través de la tasa de variación. La secuencia de esta autora presenta cuatro etapas, a saber: (i) la exploración de la idea de variación de una función a partir de ejemplos que permitan el desencadenamiento de tales ideas, (ii) conceptualizar la tasa de variación media en un intervalo del dominio como el coeficiente angular de la recta secante que pasa por los extremos de la función en los extremos del intervalo, (iii) introducir el concepto de tasa de variación instantánea; y (iv) conceptualizar la derivada de una función en un punto x_0 y la función derivada.

Algunos de los elementos desarrollados por Da Costa André (2008) habían sido sugeridos en el marco teórico desarrollado por Zandieh (2000) para explorar la comprensión de la derivada que tienen los estudiantes. Con dicho marco, Zandieh espera discutir y analizar sistemáticamente las preguntas relativas a la comprensión individual, su comparación con otras comprensiones, las estrategias de enseñanza, la efectividad de las prácticas pedagógicas y la evaluación de los materiales curriculares.

El marco teórico de Zandieh tiene dos componentes principales, a saber: las representaciones o contextos múltiples, y los niveles o pares de Proceso-Objeto[2]. En el primer caso afirma que el concepto de derivada puede representarse: (a) gráficamente como la pendiente de una recta tangentea una curva en un punto, (b) verbalmente como una razón de cambio instántanea, (c) físicamente como la rapidez o velocidad, y (d) simbólicamente como el límite del cociente de diferencias.

[2] El término, Proceso-Objeto es tomado de Zandieh en el contexto de las concepciones operacional y estructural de un concepto matemático presentados por Sfard (1991).

En esta investigación, asumo que una aproximación variacional a la derivada debe ir más allá del hecho de concebir la tasa de variación instantánea como una representación de la derivada de manera verbal; y al ser la tasa de variación una noción que está en el corazón de la derivada, debe cobrar sentido en las diferentes formas de representación.

Zandieh se pregunta por los elementos que cada una de las descripciones (verbal, gráfica y simbólica) tienen en común, por lo que se puedan llamar con el mismo término (derivada), y por las relaciones entre las diferentes representaciones o contextos. En su marco teórico, esta autora describe la estructura similar del concepto de derivada en cada contexto y prefiere, en algunas oportunidades, hablar de "contexto" en lugar de representación para indicar una manera más amplia desdela cual pensar la derivada. La siguiente tablamuestra los elementos que resumeel marco teórico propuesto por Zandieh (2000):

	Gráfica	Verbal	Paradigmática física	Simbólica	Otros
Nivel Procesos-Objeto	Pendiente	Razón	Velocidad	Cociente de diferencia	
Proporción (razón)					
Límite					
Función					

Tabla 1. Contorno del marco teórico del concepto de derivada (Zandieh, 2000).

Los términos *proporción, límite y función* son asumidos por Zandieh como niveles (Proceso-Objeto) en su marco teórico, puesto que son términos claves en la definición de derivada (*f '* es una **función** cuyo valor en un punto se define como el **límite** de una **razón**).

En la comparación con otros marcos teóricos, Zandieh llama la atención sobre los elementos variacionales que han de estar presentes en la comprensión de la derivada;de esta manera, retomando los trabajos de Thompson (1995b) Zandieh afirma que en la dualidad proceso-objeto, la visión de covariación de la derivada depende de la comprensión de la función como un proceso. Esta componente de covariación es enfatizada en el tercer nivel (función) presente en el marco teórico del propuesto por Zandieh, el cual puede observarse a través de un "*process of covariation, i.e. imagining 'running through' a continuum of domain values while noting each corresponding range value, paired with an object that is the function itself, the set of orderes pairs*" (p. 110).

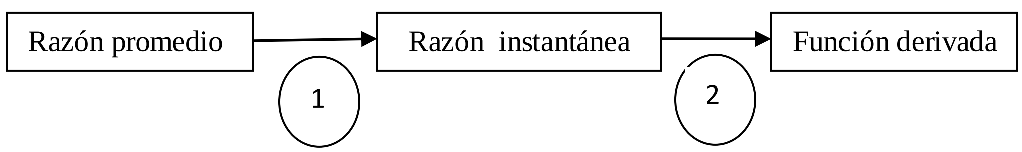
En una introducción a su marco teórico, Zandieh (2000, p. 110) describe los niveles de ***proceso-objeto*** para la razón de cambio usando la notación de Leibniz en los siguientestérminos:

> Considerar que un cociente de diferencia puede usarse para medir la razón de cambio promedio de la variable dependiente con respecto al cambio en la variable independiente. El cálculo de esta razón de diferencias es un proceso que se puede representar según la notación de Leibniz como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
>
> En el proceso consolidado, la razón promedio, puede usarse como un objeto en el segundo proceso, el proceso de cálculo de límite, el cual consiste en el análisis de una secuencia de razones de cambio promedio, de tal manera que la diferencia en el denominador tiende a cero. En la notación de Leibniz sería $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, lo cual se consolida en una razón de cambio instántanea representada por $\frac{dy}{dx}$.
>
> Este proceso consolidado, la razón de cambio instantánea en cada valor de entrada, se usa como un objeto en la construcción de la función derivada. El valor de la función en cada punto ya ha sido descrito en el cálculo de límite. El proceso de función enfatizado aquí es la covariación de los valores de entrada con los de salida o los valores de la razón de cambio instantánea.

Una de las interpretaciones clásicas de la derivada se da al analizar los procesos de cambio de una función posición con resprecto al tiempo (***velocidad*),**o al analizar los cambios de la función velocidad con respecto al tiempo (***aceleración)***. En estos contextos cinemáticos, Zandieh (2000, p. 112) ejemplifica cómo la tasa de variación atraviesa por los tres niveles, así:

El proceso en el primer nivel es la razón de cambio en la distancia (desplazamiento) en relación con el tiempo; el objeto es considerado en el primer nivel como la velocidad promedio;en el segundo nivel, el proceso consiste en observar la velocidad promedio en intervalos cada vez más cortos de tiempo y este proceso del cálculo del límite termina en una velocidad instantánea. En el tercernivel, el proceso consiste en imaginar el cálculo de límite consolidado ocurrido para cada momento en el tiempo, para que el resultado final sea una función a la cual se le asocia con cada momento en el tiempo, una velocidad instantánea. En este contexto, es propicio para ofrecer una interpretación de la derivada como “velocímetro”.

Se observa entonces, en el trabajo de Zandieh, cómo la interpretación variacional de la derivada atraviesa, acorde con sus niveles, por tres momentos así:



En el paso 1, de la razón de cambio promedio a la razónde cambio instantánea, se observa una fuerte influencia de los incrementos cada vez más pequeños en el denominador del cociente incremental, lo cual se asocia con la noción de límite. No es claro en la literatura cómo se efectúa el paso2, de la razón instantánea a la función derivada, es decir, de la derivada a nivel local o puntual a la derivada global. Sin embargo, se observa, tanto en Zandieh (2000) como en Sánchez-Matamoros et al. (2008), que dicho traslado no se hace de manera inmediata. Sánchez-Matamoros et al. (2008), retomando los trabajos de Badillo (2003), afirma que en el paso 2, descrito en el diagrama anterior, se presentan dificultades como:

- La confusión entre la derivada en un punto $x = a$,$f'(a)$, y la función derivada $f'(x)$.
- La reducción de la expresión simbólica de$f'(x)$a la ecuación de la recta tangente, y la gráfica de$f'(x)$a la de la recta tangente.
- La falta de justificaciones sobre el uso de las técnicas de derivación directas e indirectas, definición en término de límite y las reglas de derivación. (Sánchez-Matamoros et al., 2008, p. 283).

En la búsqueda de proporcionar una comprensión de la derivada, con fuertes vínculos asociados a la noción de variación, se han desarrollado algunas propuestas con gran éxito en la interdisciplinariedad entre el cálculo y la física. Una de estas propuestas la presenta Doorman y Gravemeijer (2009), quienes plantearon una secuencia basada en conceptos del cálculo y la cinemática para los cuales emergen situaciones de modelación que buscan apoyar a los estudiantes en el aprendizaje de los principios básicos de la razón de cambio y la velocidad.

En su investigación, Doorman y Gravemeijer usaron los elementos teóricos proporcionados por la Educación Matemática Realística para dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo pueden desarrollar los estudiantes principios básicos del cálculo y la cinemática en un proceso que implica un razonamiento en una situación específica hacia un razonamiento con conceptos generales? Estos investigadores usan algunos argumentos del desarrollo histórico del cálculo y de sus trabajos experimentales previos para rescatar la importancia de iniciar el estudio de las gráficas desde lo discreto. Estos autores presentan los resultados del diseño de una secuencia de instrucción, en la cual se valora la importancia de estudiar y describir el cambio, de tal manera que, se puedan discenir patrones y desarrollar la capacidad para elaborar predicciones. En el trabajo en mención, estos autores se focalizan en cómo las gráficas discretas pueden apoyar el desarrollo de los principios básicos del cálculo y de la cinemática.

A través de su trabajo, Doorman y Gravemeijer (2009) establecen que en el proceso de aprendizaje, los estudiantes inicialmente hacen uso de un lenguaje tentativo e inscripciones que no obedecen a las nociones matemáticas formales. Para los autores, este proceso de aprendizaje es similar al descrito por Goldin (2003) mediante tres estadios; a saber:

1. Estadio inventivo y semiótico,
2. De desarrollo estructural y establecimiento de relaciones y,
3. Estadio autónomo.

En el primer estadio los estudiantes, tentativamente, usan inscripciones y el lenguaje para comunicar las ideas desarrolladas. En el estadio autónomo el sistema puede funcionar de manera flexible en nuevos contextos. En este proceso el profesor juega un papel importante en el sentido en que direcciona las discusiones al interior de la clase y simultáneamente estimula a los estudiantes para presentar sus soluciones y focalizarse en las matemáticas necesarias para el estudio de futuros conceptos. Con base en este trabajo, los autores logran establecer que, una perspectiva de la Educación Matemática Realística permite que las elaboraciones y el lenguaje inicial de los estudiantes se desarrollen progresivamente desde lo local o situacional hacia lo general, a través de las situaciones implementadas en su secuencia de instrucción.

El diseño heurístico de modelación emergente asigna un papel a la modelación que difiere del papel didáctico tradicional de los modelos en Educación Matemática. En lugar de intentar concretizar el conocimiento matemático abstracto, el objetivo es intentar ayudar a los estudiantes a modelar su propia actividad matemática informal. Lo emergente se refiere tanto a las características de los procesos mediante los modelos que emergen con la Educación Matemáticas Realística como a los procesos, por medio de los cuales, estos modelos apoyan la emergencia (surgimiento) de maneras matemáticas formales del saber.

La modelación sirve, no sólo como una meta de instrucción, sino que también media en el apoyo a la reconstrucción de las matemáticas. A partir de su investigación Doorman y Gravemeijer (2009) indican que los problemas conceptuales de los estudiantes en las nociones de las matemáticas aplicadas en otros tópicos, pueden prevenirse mediante los procesos de enseñanza y de aprendizaje en el contexto de las aplicaciones. Sin embargo, creen que no todos los tópicos matemáticos pueden desarrollarse a través de una aproximación integrada, ya que algunos tópicos son esencialmente el resultado de un proceso de reorganización con o entre las estructuras matemáticas.

Uno de los trabajos más recientes que aborda el estudio de la derivada en relación con la comprensión de la tasa de variación se presenta en Navarro y Pérez (2010). En su artículo, estos investigadores reportan una experiencia educativa sobre el estudio de la tasa de variación en la cual, a través de un diálogo socrático y la manipulación de una herramienta de visualización generada por computador, proporciona una introducción al concepto de derivada de una función en un punto. Para estos autores el concepto moderno de tasa de variación instantánea (concepto local) requiere no sólo de las operaciones algebraicas habituales(resta y división), sino también una operación algebraica esencialmente diferentes, cuyo objetivo se soporta en un proceso dinámico y exige en su formulación cierta madurez lógico-algebraico que no siempre está disponible en nuestros estudiantes. Es en ese sentido que Navarro y Pérez se proponen describir una serie de acciones que deben aplicarse, antes de la instrucción matemática formal en el aula, con el propósito de promover la construcción de un concepto-imagen adecuado que no altere el concepto-definición deseando y que permita una transición fácil a la misma; así mismo, con dicha serie de acciones se proponen provocarla necesidad de un concepto-definición.

Basados teóricamente en el modelo de van Hiele, Navarro y Pérez (2010) comienzan la exploración de las nociones que el estudiante tiene sobre infinito en el campo numérico; por ejemplo, si el estudiante acepta que entre dos números existen infinitos números. La comprensión de nociones como la de variable y su abstracción en fenómenos reales, el reconocimiento de la dependencia que puede darse entre dos variables presentadas en un fenómenos físico y su modelación a través de funciones, son algunos de los conocimientos que marcan que el estudiante se encuentre en el nivel cero, abonando el terreno para su posterior avance en el razonamiento.

Para Navarro y Pérez (2010), el proceso de construcción de imágenes y el reconocimiento de las características visuales del cambio, determinan que un estudiante accede al primer nivel de razonamiento según el modelo de van Hiele; de este modo se espera que el estudiante pueda reconocer la dependencia entre variables y describir cualitativamente las correlaciones directa e inversa entre ellas; así mismo, debe ser capaz de abstraer clases de curvas de acuerdo a sus concavidades.

En el segundo nivel de razonamiento, el estudiante evidencia la capacidad para deducir propiedades de las funciones tomando como base las características visuales de las mismas. De manera particular, en este nivel se observa que el estudiante reconoce que el cambio de una variable se matematiza con la operación diferencia, así mismo que la covariación entre dos variables se representa por la razón entre las diferencias de las dos variables. En este nivel el estudiante también ha de ser capaz de usar valores numéricos para cuantificar los cambios y las tasas de variación mismas (Navarro y Pérez, 2010).

Aunque el modelo de van Hiele posee en total cinco niveles, Navarro y Pérez sólo se interesaron por describir los cuatro primeros. De ese modo, el último nivel que los autores describieron en la comprensión de la tasa de variación estuvo orientado al uso de las propiedades deducidas en el nivel anterior para obtener conclusiones acerca de la derivada de una función. Dicho nivel se materializa cuando reconoce la necesidad de usar herramientas algebraicas para el estudio de la tasa de variación; de igual manera, traduce sus conclusiones a la creación visual en términos de concavidades e interpreta los puntos máximos, mínimos y de inflexión.

Con base en los elementos presentados hasta aquí, se puede observar la importancia de una comprensión de la tasa de variación como una componente trascendental en la interpretación de la derivada.

En el siguiente apartado, me ocupo de rastrear en la literatura los elementos en los cuales se fundamenta una perspectiva variacional en Educación Matemática.

1.3 Algunos elementos asociados a una perspectiva variacional.

En la literatura nacional e internacional, frecuentemente se establece que el desarrollo del pensamiento matemático involucra el desarrollo de otros de sus componentes, entre ellos el "pensamiento variacional". Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

El estudio de la variación ha llamado la atención de varios investigadores (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, 2003; Dolores y Cuevas, 2007; Posada y Villa-Ochoa, 2006a;Villa-Ochoa y Mesa, 2009) desde diferentes enfoques y aproximaciones.Algunas de ellas se presentan a continuación.

1.3.1 El estudio de la variación desde el punto de vista cognitivo

Se reconocen en esta categoría los trabajos de Carlson, et al. (2003); quienes desarrollan un marco conceptual que tiene sus fundamentos en las teorías de Piaget. El marco conceptual en mención ha sido usadoen algunos de mis trabajos previos, como puede observarse en Villa-Ochoa y Mesa (2009) yVilla-Ochoa (2011).

Carlson et al. (2003, pp. 122-123) afirman que los estudiantes ingresan a la universidad con una comprensión deficiente sobre las funciones; así mismo, recogen resultados de algunas investigaciones previas que demostraron que, estudiantes académicamente talentosos tienen dificultad para modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando ésta varía continuamente en una relación dependiente con otra variable. En su trabajo, Carlson et al. (2003, p. 123) retoma las investigaciones de Kaput (1994), Rasmussen (2000), Zandieh (2000) entre otras, para llamar principalmente la atención sobre la importancia de modelación de relaciones funcionales para la interpretación de modelos de eventos dinámicos y para la comprensión de los conceptos principales del cálculo. En su estudio, Carlson y sus colegas definen al *"razonamiento covariacional como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"* (p. 124). Con base en esta definición, proponen un marco conceptual en el que establecen un conjunto de cinco acciones mentales y cinco niveles de razonamiento, las que se consolidan como un medio para clasificar los comportamientos de los estudiantes cuando se ven enfrentados a tareas de covariación. Las acciones mentales se muestran en la Tabla 2y los niveles de razonamiento pueden ser observados en la Tabla 3.

Acción mental	**Descripción de la acción mental**	**Comportamiento**
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.

AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos.

Tabla 2. Acciones mentales del Marco conceptual para la covariación. Tomado de Carlson et al. (2003, p.128).

Con base en estas acciones mentales Carlson et al. (2003, p.128) clasifican a los estudiantes en niveles (ver Tabla 3) de acuerdo con la imagen global que parece sustentar a las varias acciones mentales que esa persona exhibe en el contexto de un problema o tarea.

Niveles	**Características**
Nivel 1 (N1). Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación Cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.
Nivel 5 (N5) Razón de cambio instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5.

Tabla 3. Marco conceptual para los niveles de la covariación. Tomado de Carlson et al. (2003, p. 129)**.**

En el diseño de este marco conceptual pueden identificarse características como la *jerarquización*, recursividad y el desarrollo del razonamiento como un *proceso creciente*, puesto que la ubicación de un estudiante en un nivel determinado, supone el desarrollo de las acciones mentales previas al nivel. En palabras de Carlson et al. (2003, p. 130) "*a medida que la imagen de covariación que tiene un individuo se desarrolla, ella sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado*".

Como una aplicación a su marco conceptual, Carlson y sus colaboradores realizan un estudio con veinte estudiantes que habían terminado recientemente un curso de cálculo con desempeño sobresaliente. Para el estudio, estos investigadores diseñaron un instrumento con cinco ítems correspondientes a tareas de covariación y posteriormente realizaron una entrevista a seis estudiantes. Los resultados del estudio muestran que estos estudiantes tuvieron "*dificultades para construir imágenes de una razón que cambia de manera continua y en particular, dificultades para representar e interpretar imágenes de una razón decreciente o creciente para una situación física* (p. 147)" y aunque los estudiantes tuvieron un desempeño favorable asociado a los niveles 1, 2 y 3 del marco conceptual, "*pareció persistir su dificultad para ver una razón instantánea imaginando refinamientos más y más pequeños de la razón de cambio promedio* (p.148)" Esta investigación pone en evidencia que en estudiantes que han completado un curso de cálculo con desempeño sobresaliente, persisten dificultades para una comprensión de la tasa de variación instantánea en lo cual se encuentran los cimientos para una compresión de la derivada. Por tanto, una compresión de concepto de derivada puede verse como un proceso complejo, no inmediato y su comprensión involucra un avance en la comprensión de la tasa de variación mediaa la tasa de variación instantánea.

1.3.2 El estudio de la variación desde el punto de vista socioepistemológico

Uno de los programas para el estudio de la variación que ha ganado fuerza en Latinoamérica es el "*Pensamiento y Lenguaje Variacional*" establecido por el CLAME (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa). En este programa se aborda el concepto de variación, y en general, a la Matemática Educativa desde un enfoque "socioepistemológico". Cantoral (2004, p. 1) sostiene "*que el conocimiento matemático, aún aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas*", y con base en esta premisa puntualiza que:

> *La socioepistemología, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple, pues articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza* (p. 1).

De esta manera, el programa Pensamiento y Lenguaje Variacionales entendido como una línea de investigación que, ubicada en el seno del acercamiento socioepistemológico, permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral yFarfán, 1998). Desde este misma perspectiva, Buendía y Ordóñez (2009)afirman que desde la Socioepistemología se "*ha dado evidencia de que el desarrollo de estrategias propias de un pensamiento y lenguaje variacional genera bases de significación para diferentes conceptos del cálculo y precálculo, entre ellos, la derivada*" (p. 8).

Algunos de los trabajos desarrollados desde la perspectiva Socioepistemológica se presentan en Reséndiz (2006), Diaz (2005), Dolores y Cuevas (2007), Farfán (1997), Cantoral (2004), Buendía y Ordóñez (2009).

El trabajo de Diaz(2005) analiza modos de pensar que los estudiantes ponen en juego a la hora de enfrentar el estudio de la variación. Como propósito, Díaz abordó "*la pregunta por aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias de las representaciones cotidianas de variación y aquellas de las matemáticas, que favorecen u obstaculizan los aprendizajes tendientes a la formación de un pensamiento variacional en los estudiantes y las estudiantes*" (p. 147). Su trabajo coloca en evidencia las complejidades de las *epistemes* de las que somos portadores tanto los estudiantes, como los profesores y especialistas mostrando lo desafiante que es la construcción de ideas variacionales que dialoguen con las *epistemes* asociadas y que generen redes de significados entre ellas. Entre las *epistemes* asociadas a la variación, Díaz (2005) describe: *visual de variación; representaciones del tiempo; y, una metáfora didáctica para lo inverso*.

Por otro lado, Reséndiz (2006) presenta una investigación en la cual, el papel lo ocupa *el discurso de los profesores en la clase de matemáticas* cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados a la noción de variación en los primeros cursos de cálculo diferencial en ingeniería, en particular, centra la atención en los conceptos de función y derivada como modelos para el estudio de la variación. "*El discurso constituye el espacio donde se construyen, negocian e interpretan los significados en la interacción social que se realiza en la escuela, por lo tanto construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente"*(p. 435).

Por su parte, Dolores y Cuevas (2007, pp. 75-76) establecen la importancia del estudio de la variación en la interpretación de gráficas y afirman que "*las gráficas cartesianas [...] son una herramienta útil porque posibilita la detección de tendencias, facilita las comparaciones y se constituye en un medio idóneo para analizar el comportamiento de fenómenos de variación*". A partir de esta idea establecen cinco acciones para el análisis de funciones, las cuales se expresan mediante las siguientes preguntas: ¿Qué cambia?, ¿Cuánto cambia?, ¿Cómo cambia?, ¿Qué tan rápido cambia? y ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?

El estudio de la relación entre una función y sus derivadas para el caso de funciones periódicas fue centro de la investigación de Buendía y Ordóñez (2009). En su investigación estos autores asumieron la perspectiva de prácticas sociales para proponer elementos que resignifiquen tal relación en un contexto de variación. Desde la investigación, estos investigadores discuten algunas "falsas herencias" que parecen instaurarse en los discuros escolares, en el estudio de la relación entre funciones periódicas y sus derivadas (i.e: *una función es periódica sí y sólo si su derivada es periódica*). Los resultados de la investigación sugieron a través de prácticas como: graficar, modelar o predecir, adquieren mayores significados los comportamientos periódicos en las variaciones de las funciones. Otro elemento que Buendía y Ordóñez presentan para la discusión, radica en el uso de las gráficas para el desarrollo de un conocimiento de la variación de un movimiento de manera simultánea –y no posterior- a los desarrollos análiticos correspondientes. Citando a Suárez (2008), Buendía y Ordóñezseñalan que las gráficas son las herramientas que permiten modelar el cambio intrínseco de las funciones posición, velocidad y aceleración.

La literatura reportada en este capítulo muestra un particular interés en el estudio de conceptos del cálculo, y en particular, cómo puede abordarse el estudio de dichos conceptos de tal manera que se reconozcan elementos propios de su epistemología. Particularmente para el concepto de derivada, se pone de relieve la necesidad de comprender la tasa de variación (media e instantánea) como una manera de interpretarla desde una perspectiva variacional.

A pesar de existir una amplia gama de investigaciones y perspectivas en torno a la enseñanza y aprendizaje de conceptos del cálculo, desde la literatura se muestra que todos estos esfuerzos son insuficientes para dar cuenta de la complejidad del fenómeno de comprensión de tales conceptos. Basado en estas consideraciones se observa cómo surge una necesidad de indagar por el proceso de comprensión de la tasa de variación como una vía alternativa para interpretar la derivada. Dicha necesidad, también ha sido observada desde algunos de mis trabajos investigativos en el campo del pensamiento variacional; es desde la articulación de la literatura y desde mi experiencia como investigador como ha surgido el problema de investigación. La articulación mencionada, se muestra en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

2. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La preocupación por el estudio de conceptos matemáticos desde una perspectiva variacional ha estado presente desde hace varios años en mi formación como investigador. En la convergencia entre dicha preocupación y los elementos que emanaron de la revisión de la literatura dio origen al problema de investigación al que me ocupo en esta investigación.

En este capítulo me propongo presentar la pregunta de investigación, para ello contextualizo la denominada “perspectiva variacional” desde el ámbito colombiano y reporto algunas de las construcciones propias, establecidas en investigaciones previas desde esta perspectiva.

2.1 El estudio de la variación en Colombia

En Colombia, con la publicación del documento *Lineamientos Curriculares* para el área de Matemáticas (MEN, 1998), se propone explícitamente el estudio de la variación como un elemento fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional. El desarrollo de este pensamiento, a su vez, hace parte de uno de los propósitos de las matemáticas escolares en la Educación Básica y Media en Colombia que, más allá del desarrollo de sofisticados sistemas conceptuales y procedimentales, procura el desarrollo del pensamiento matemático.

A pesar que los *Lineamientos Curriculares* presentan de manera explícita la necesidad de desarrollo del pensamiento variacional, no son lo suficientemente claros en los elementos que se implican en dicho pensamiento y en su desarrollo.Con respecto al pensamiento variacion, Vasco (2006)ofrece una descripción en los siguientes términos:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de las misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (p. 139).

Esta noción de presentada por Vasco, ubica al pensamiento variacional en estrecha relación con el proceso de Modelación Matemática, en este sentido afirma que:

> El objeto del pensamiento variacional es entonces la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad (Vasco, p. 139).

A pesar que los estrechos vínculos entre el pensamiento variacional y la Modelación matemática han sido ampliamente defendidos en mis reflexiones sobre la Modelación (Villa-Ochoa J. A., 2007), encuentro en ella una limitación hacia el estudio de la variación cuando no se encuentra asociado directamente a un proceso de modelación (i.e, relaciones dinámicas en un análisis gráfico a través de software educativo). En otras palabras, si bien el pensamiento variacional pone su acento en el estudio sistemático de la noción de variación en diferentes escenarios de otras ciencias, de la vida cotidiana y de la misma matemática, su desarrollo no debe estar restringido de manera exclusivamente a la implementación de procesos de modelación matemática[3].

El MEN (2006) presenta algunos elementos para la caracterización del pensamiento variacional. En ese sentido afirma que:

> [El pensamiento variacional] tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (p.66).

[3] La modelación matemática como un proceso en el aula de clase, ha sido foco de múltiples investigaciones en las tres últimas décadas, desarrollándose así diversas orientaciones y perspectivas. En este sentido, cuando aquí hablo de modelación matemática, me estoy refiriendo a los términos presentados en Villa-Ochoa, Bustamante y Berrío (2010). Desde otras perspectivas, los planteamientos aquí presentados pueden redireccionarse o incluso carecer de sentido.

En esta descripción del MEN (2006), el énfasis se pone con la noción de variación y cambio, que al estar asociado a diferentes contextos, recoge los significados de la variación desde su interpretación en fenómenos físicos.

Para el MEN (2006) el desarrollo de un pensamiento variacional debe comenzar desde los primeros grados de escolaridad, es así que afirma:

> Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (p. 66).

Se observa en esta aserción la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento variacional a través de la comprensión de conceptos matemáticos, particularmente, es interés de la investigación reportada en este documento el concepto de derivada, colocando especial énfasis en su interpretación variacional a través de algunas de sus representaciones matemática; de esta manera, concuerdo con Posada y Obando cuando señalan que:

> El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación -gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales – para permitir,a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión (Posada y Obando, 2006,p. 16)

Otras reflexiones, sobre la importancia de abordar conceptos matemáticos desde una perspectiva variacional han sido fruto de dos investigaciones que he realizado en los últimos años. En la siguiente sección dedicaré un espacio a detallar un poco algunos de los principales aportes de tales investigaciones.

2.2 Antecedentes investigativos

La investigación que presento en este documento ofrece continuidad a otras dos investigaciones previas en las cuales participé. La primera *"una aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional"*(Posada y Villa-Ochoa, 2006a)se desarrolló en el marco de la Maestría en Educación de la UdeA. La segunda investigación tuvo como nombre "*El concepto de función en las matemáticas escolares. El caso de la función cuadrática"* y fue financiada por el Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas de la ASDEM.

En Posada y Villa-Ochoa (2006a; 2006b) se fundamentó la importancia de una aproximación variacional a la función lineal. El estudio llama la atención sobre la necesidad de que converjan elementos asociados a los sistemas de representación y la modelación, a la hora de una didáctica del concepto de función lineal a partir del estudio de la variación. De manera particular, en esta investigación introduce la noción de *sentido variacional* la cual se describe como:

> […] aquella apreciación del cambio en una o varias variables dependiendo del cambio de otra u otras, y a la noción de correlación como la posibilidad de expresar dicha variación a través de un modelo funcional, entonces el problema es encontrar, si es posible, una función que exprese la variación entre dichas variables (Posada y Villa-Ochoa, 2006b, p. 129).

Basados en la noción anterior, Posada y Villa-Ochoa, (2006b) llaman la atención sobre la necesidad de promover el paso del *sentido variacional* a la determinación de una expresión que modela la relación de variación entre las variables que intervienen en un fenómeno.

En su investigación, estos autores proponen que el estudio de la función lineal debe comenzar a través de la construcción de situaciones que involucren el estudio de la razón de cambio constante entre las cantidades de magnitud, de tal manera que este tipo de función pueda surgir como "*la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante"* (Posada y Villa-Ochoa, 2006a, p. 96).

Con base en los resultados de la investigación de Posada y Villa-Ochoa, realicé un segundo estudio que dio cuenta de una manera de abordar el concepto de función cuadrática desde una perspectiva variacional. Los resultados de este trabajo fundamentan un enfoque variacional para la función cuadrática desde argumentos de tipo histórico, epistemológico y didáctico los cuales puede consultarse en Mesa y Villa-Ochoa (2007; 2008; 2009) y Villa-Ochoa (2008).

De manera especial, en este documento retomo aquellos aspectos que en Villa-Ochoa (2008) presenté como característicos de un entendimiento de la función cuadrática desde una perspectiva variacional, a saber:

1. *La descripción cualitativa del cambio a partir de la identificación de características de su gráfica.*
2. *La identificación del cambio de la razón de cambio como una constante.*
3. *La identificación del producto de dos cantidades que varía linealmente.*
4. *La construcción de una función de la cual se conoce que su razón de cambio varía linealmente.*
5. *La construcción de una función lineal a partir de una función constante y, a partir de ella, una función cuadrática de la cual puede provenir.*
6. *Asumir una función cuadrática y a partir de ella encontrar la función lineal que representa su cambio y a su vez la función constante que hace referencia al cambio de segundo orden.*
7. *La asociación de la forma como varía el cambio con las concavidades de la gráfica de la función.*
8. *La generalización de un patrón cuadrático a partir de la interpolación de un conjunto de datos en una tabla.*(Villa-Ochoa, 2008, pp. 248-249)

Adicionalmente en Villa-Ochoa y Mesa (2009)se señaló la importancia de discriminar la representación gráfica de una parábola de otro tipo de curvas con aspecto semejante (i.e. $y=x^4$, $y=senh(x)$).

En el marco de esta segunda investigación realicé un estudio de caso en el cual usé el marco conceptual de Carlson et al. (2003) para describir el proceso de razonamiento de un estudiante cuando aborda situaciones relativas a la variación cuadrática (situaciones de variación asociadas a funciones cuadráticas). Los resultados del estudio dan cuenta que, aunque el marco conceptual de Carlson y sus colaboradores no ofrece elementos para describir la evolución del razonamiento covariacional, sí puede usarse como una herramienta para describir las niveles por los cuales los estudiantes, *grosso modo*, pueden atravesar. Como resultado de dicho estudio en Villa-Ochoa (en prensa) se resaltandos aspectos importantes que promueven el razonamiento covariacional del estudiante,a saber: la pregunta y el uso del software dinámico. En el primer caso, a través de un diálogo entre el investigador y el estudiante fueron surgiendo preguntas que permitieron al estudiante ir contruyendo reflexiones y enfocandose en los aspectos asociados al comportamiento de las cantidades involucradas en las situaciones analizadas. En el segundo caso, el software permitió visualizar la naturaleza dinámica de las situaciones, posibilitando en el estudiante la identificación de regularidades y su aproximación a un nivel más avanzado de su razonamiento covariacional.

En caso reportado en Villa-Ochoa y Mesa (2009a) permitió identificar algunas características asociadas al proceso de razonamiento covariacional. Por ejemplo, en la evolución hacia niveles más sofisticados de razonamiento, el estudiante avanza de manera no lineal, lo cual se hizo evidente en la manera en que el estudiante retrocedía recurrentemente a niveles previos de razonamiento. Estas características se observaron cuando el estudiante:

> […] evidenció comportamientos en los que se remitía a acciones mentales pertenecientes niveles precedentes, sin embargo, este hecho en lugar de interpretarse como un retroceso en el nivel de razonamiento parece ser una actividad con la cual el estudiante revisa y fortalece su entendimiento de la variación para continuar avanzando en sus niveles de razonamiento covariacional (p. 9).

Adicionalmente en Villa-Ochoa (2011) se analizan dos episodios delestudio de caso, mostrando que existen estudiantes que pueden aproximarse al estudio de las gráficas cartesianas realizando una interpretación variacional de las concavidades. A través del uso de un mecanismo de “triángulos” (verIlustración 1) se pudo analizar discretamente los cambios de la tasa de variación media de la gráfica.

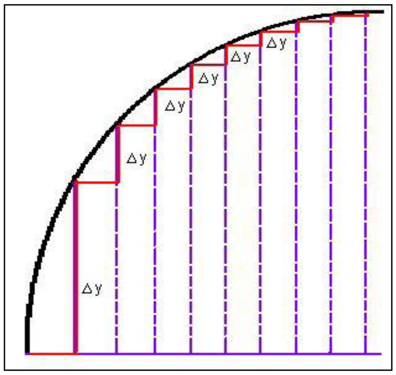


Ilustración 1. Mecanismo para el análisis discreto de la variación

Los resultados de este estudio confirman los hallazgos de Carlson et al. (2003) en cuanto a la dificultad que tienen los estudiantes para evolucionar desde un entendimiento de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea. Sin embargo, en Villa-Ochoa (2011)se muestra cómo esta dificultad no se limita sólo a un entendimiento de las concavidades de la gráfica de la función como indicadores de la manera en que cambia la tasa de variación, puesto que pudo observarse empíricamente que existen estudiantesque pueden interpretar cualitativamente, tanto el crecimiento e decrecimiento de función como las concavidades previo al estudio formal delcálculo. Así mismo, en Villa-Ochoa (2011) muestro que existen algunas características del razonamiento covariacional (i.e. el establecimiento de relaciones inversas entre la tasa de variación media y la función) que el marco conceptual de Carlson y sus colaboradores no alcanza a desarrollar como un nivel propio de dicho razonamiento.

2.3 Planteamiento del problema

Basado en los planteamientos presentados el primer capítulo, puede interpretarse la necesidad de profundizar, a través de la investigación, en aspectos variacionales inmersos en conceptos matemáticos. Así por ejemplo, en el caso de la Educación Básica colombiana la variación está presente en temáticas como: las operaciones básicas aritméticas, la razón, la proporcionalidad, el concepto de variable y de función; así mismo, en la interfase bachillerato-universidad y en la Educación Superior, se manifiesta en conceptos como razón de cambio, derivada de primer y segundo orden, integral, derivadas parciales y ecuación diferenciales, entre otros; todas estas últimas, relativas al análisis matemático.

De modo general el cálculo y particularmente, la tasa de variación y la derivada, han sido objeto de múltiples investigaciones; asumiendo en cada una de ellas, enfoques y aproximaciones diferentes; sin embargo, desde la literatura revisada, aún se observa un vacío relacionado con la compresión de la tasa de variación, especialmente en el paso de la tasa de variación media a la instantánea.

Tanto en el primer capítulo como en la sección anterior me propuse llamar la atención sobre la pertinencia de adoptar una perspectiva variacional en el estudio de algunos conceptos matemáticos. Particularmente, retomo los planteamientos de Carlson y sus colaboradores cuando, apoyados en la investigación de algunos de sus colegas, señalan que "*el razonamiento covariacional es fundamental para comprender conceptos principales del cálculo y que los currículos convencionales no han sido efectivos para promover esta habilidad de razonamiento en los estudiantes"*(p. 127). En este orden de ideas, la importancia de una comprensión de los conceptos matemáticos desde una perspectiva variacional radica en la conexión que se presenta con la modelación matemática y el planteamiento y resolución de problemas; además, es fundamental para la comprensión de otros conceptos cuya naturaleza deviene de la variación; así por ejemplo, la visión de la función como covariación es esencial para la comprensión de conceptos del cálculo, (Carlson et al., 2003).

En el caso de la derivada, la literatura reporta que este concepto, observado como una función, actúa como un proceso de pasar (hipotéticamente) a través de una infinidad valores de entrada y para cada uno de ellos determinar un valor de salida dado por el límite del cociente de diferencias en ese punto (Zandieh, 2000). Esta interpretación enfatiza en la noción de que la derivada resulta de covariarlos valores de entrada de la función con los valores de la razón de cambio de la función original (Carlson et al., 2003).

Con base en las ideas presentadas anteriormente y dada la trascendencia que el concepto de derivada tiene en las matemáticas escolares, surge la necesidad de profundizar en los elementos que den cuenta de cómo puede darse una aproximación al concepto de derivada a través de la comprensión de la tasa de variación. Por tanto, el propósito de esta investigación implica ofrecer una respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada en estudiantes participantes de un curso de pre-cálculo?

2.4 Objetivos

- Identificar características que describen la comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse al concepto de derivada.
- Determinar los elementos que promueven la comprensión de la tasa de variación en estudiantes de un curso de precálculo.

Foco de la investigación:

En esta investigación, se centra la atención, de manera explícita, sobre **la comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse al concepto de derivada desde una perspectiva variacional**.

Capítulo 3

3. LA TEORÍA DE PIRIE Y KIEREN COMO MARCO TEÓRICOPARA ANALIZAR LA EVOLUCIÓN DE LA COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Conforme lo he venido presentando en los capítulos anteriores, en esta investigación me ocupé de indagar por la manera en que se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse a una interpretación variacional de la derivada. Esta indagación me exigió profundizar la mirada sobre el significado de la "comprensión matemática" pues, si bien es cierto que éste es un término usado con bastante frecuencia en los contextos de las matemáticas escolares, también es cierto que no existe una comprensión homogénea de dicho término al interior de la Educación Matemática.

En este capítulo, inicio con una descripción de algunos de los marcos teóricos que se han desarrollado en el seno de la Educación Matemática sobre la comprensión, y profundizaré en la Teoría de Pirie y Kieren, la cual fue asumida como marco teórico para el desarrollo de esta investigación.

3.1 Marcos teóricos para describir e interpretar la comprensión matemática

Los esfuerzos por entender el significado de la "comprensión de una idea o un concepto matemático" ha llamado la atención de educadores, psicólogos e investigadores en los últimos cincuenta años (Meel, 2003). Como producto de tales esfuerzos, se han construido diversos marcos teóricos que han contribuido a esclarecer el significado, las acciones y las características relativas a la "comprensión matemática". De ese modo, se ha posibilitado a educadores e investigadores una manera de estructurar los análisis e interpretaciones del pensamiento de los estudiantes.

Diversas perspectivas teóricas enfocadas en identificar la manera en que los estudiantes comprenden y dan significado a las matemáticas, han venido desarrollándose en los últimos años al interior de la Educación Matemática. Al respecto, Meel (2003) hace una presentación de los principales marcos teóricos referidos a la comprensión, entre los cuales resalta:

- **La Comprensión entendida como la superación de obstáculos cognitivos**. Meel (2003, p. 227) retoma a Cornu (1991) para establecer que los obstáculos cognitivos ayudan a identificar las dificultades que presentan los estudiantes, ya que se relaciona con el aprendizaje y después se utilizan para construir mejores estrategias de aprendizaje. Los obstáculos cognitivos se clasifican en *genéticos, didácticos y epistemológicos.* En este sentido Sierpinska (1990, citada por Meel, 2003. p 227) asume la compresión como un acto relacionado con el proceso de interpretación, desde esta perspectiva la compresión deriva su fundamento en las ideologías, predisposiciones, preconcepciones y esquemas de pensamiento no percibidos por el estudiante.

- **La comprensión como generador de imágenes de un concepto y la definición del concepto:** Los pioneros de este marco teórico son Tall y Vinner quienes, según Meel (2003, p. 228), afirman que el estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del mismo. Por *imagen del concepto* o *concepto imagen* Tall y Vinner entienden a "*la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, lo cual incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados*" (Meel, 2003, p.228), se considera entonces, que una imagen del concepto puede diferir de la definición formal del concepto. La comprensión surge cuando existe coherencia entre la imagen del concepto construida por el estudiante y la definición formal del concepto. Algunos trabajos desarrollados en el concepto de aproximación local y la derivada usando la perspectiva de Tall y Vinner son presentados en Esteban y Llorens (2003)

- **La comprensión como elemento de procesos de representación:** Meel (2003, p. 230) utiliza la tesis de Kaput (1989) para afirmar que la energía cognitiva existe en representaciones múltiples y vinculadas, las cuales proporcionan una redundancia mientras permiten al estudiante suprimir algunos aspectos e ideas complejas y enfatizar en otras. Para Kaput (1987), las representaciones matemáticas o sistemas simbólicos son sistemas de representaciones especiales en los que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representante es un esquema de símbolo que contiene correspondencias especiales (Meel, 2003, p. 231). Desde este punto de vista la comprensión está asociada con la construcción de significado, el cual a su vez, evoluciona en la construcción y la utilización de representaciones y simbolizaciones. Algunos trabajos que usan la perspectiva de las representaciones múltiples en torno al uso de la tecnología para estudiar el movimiento, se observan en Borba y Scheffer (2001; 2004),y para estudiar el concepto de derivada en Villarreal (1999).

- **Dualidad entre las concepciones *estructural y operacional:*** Sfard (1991) establece que los conceptos matemáticos radican en una dualidad de concepción, la concepción operacional y la estructural. Una concepción operacional permite una mirada dinámica y secuencial a los conceptos, se relaciona con los algoritmos, procesos y acciones que ocurren a nivel físico o mental. De otro modo, una concepción estructural ofrece una mirada estática e instantánea al concepto, es más abstracta y menos detallada que la mirada operacional. Según Sfard, el paso de una concepción operacional a una estructural se da a partir de un proceso de reificación. Meel (2003, p. 233) considera que la comprensión en Sfard llega más allá de una capacidad para resolver problemas o de probar teoremas, la comprensión de conceptos da con la construcción de vínculos entre los símbolos y el desarrollo de una concepción estructural. Los trabajos de Sfard (1991) sirvieron como soporte para que Zandieh (2000) lograra desarrollar el marco conceptual presentado en el primer capítulo de este documento.

- **La compresión desde la teoría ACCIÓN-PROCESO-OBJETO-ESQUEMA (APOE).** Meel (2003, p.244) describe el modelo de comprensión liderado por Dubinsky quien ofrece una visión del concepto de *Esquema* que trasciende la noción de *entidad estática*. Según Meel, la piedra angular para la comprensión es la *acción* (similar a los esquemas de acción de Piaget). Asiala (1996, retomado por Meel, 2003, p. 244) identifica que la comprensión de un concepto matemático se origina mediante la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones.

El modelo teórico de APOE está constituido por los siguientes elementos:

Acción: Una acción se equipara con cualquier operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico o mental.

Proceso: Conforme una acción se interioriza, a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma, la acción ya no se maneja por influencias externas, pues se vuelve una construcción interna llamada *proceso* (Similar al concepto de operación en Piaget).

Esquema: Es considerado dentro de la Teoría de APOE como una colección de procesos y objetos que puede ser más o menos coherente, pero el estudiante la utiliza para organizarse, comprender y crear sentido del fenómeno o concepto observado. En la Ilustración 2 se muestra una representación gráfica de la teoría de APOE.

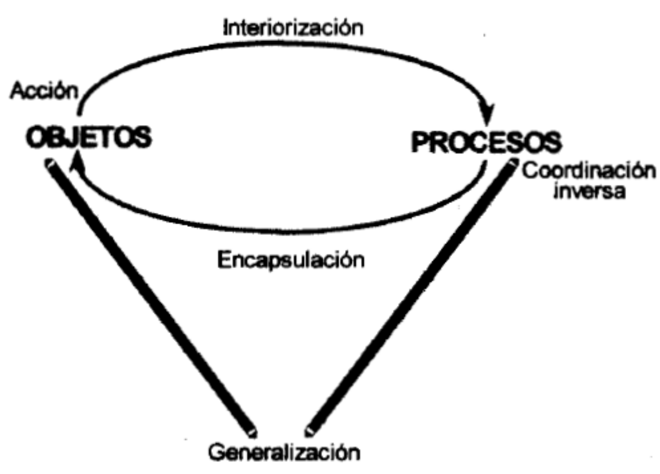


Ilustración 2. Visión de Esquemas y su construcción. Tomada de Meel (2003, p. 244)

La teoría de APOE fue usada como soporte teórico de los trabajos en torno al cálculo de Baker, Cooley, y Trigueros (2000) y, en particular, sobre la comprensión gráfica del concepto de derivada reportados por Asiala, Cottrill, Dubinsky, y Schwingendorf (1997).

Se observa cómo cada uno de estos marcos ha inspirado trabajos en el desarrollo de la comprensión de la derivada; sin embargo, aunque algunos de ellos resaltan la importancia sobre los aspectos variacionales de la derivada, al parecer, se hace necesario reflexionar con más profundidad sobre el tema.

En los capítulos precedentes presenté algunos argumentos que, desde la literatura, justifican la importancia de un abordaje variacional para el estudio de los conceptos de cálculo. Así mismo en el segundo capítulo de este documento mostré que, desde mi experiencia investigativa (Villa-Ochoa y Mesa, 2009, Villa-Ochoa, en prensa; Villa-Ochoa, 2011),he podido observar que el proceso de estudio de la función cuadrática desde una perspectiva variacional es un proceso *no lineal* y contrario a ello, es un fenómeno *recursivo*. Esta *recursividad* se evidenció cuando el estudiante, reportado como caso, mostró algunos comportamientos en los que se remitía a acciones mentales pertenecientes a niveles precedentes. Con dicho retroceso el estudiante revisó y fortaleció su entendimiento de la variación para continuar avanzando en sus niveles posteriores.

Después de revisar diversos marcos teóricos para la comprensión de conceptos matemáticos, pude constatar la característica de *recursividad*, evidente en el comportamiento de *retroceder para avanzar* reportado por Villa-Ochoa y Mesa (2009), es equiparable directamente con la característica del *folding back* presente en la teoría de la evolución de la comprensión matemática de Pirie y Kieren. Este hecho, aunado con el continuo interés del Grupo EDUMATH en revisar de manera crítica los procesos de comprensión asociados a las matemáticas, hicieron que adoptara la Teoría de Pirie y Kieren como marco teórico para interpretar el proceso de comprensión de la tasa de variación.

En los siguientes apartados de este capítulo, presento con profundidad las características de la teoría de Pirie y Kieren para la evolución de la comprensión matemática.

3.2 La teoría para la evolución de la comprensión matemática de Pirie y Kieren

La teoría para la evolución de la comprensión tiene sus orígenes en un enfoque constructivista para la comprensión matemática. Esta teoría asume como base la definición de comprensión proporcionada por Von Glasersfeld la cual se presenta en los siguientes términos:

> El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe… entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión (Meel, 2003, p.235).

Basados en esta definición Pirie y Kieren (1994)llegan a considerar la comprensión como un *todo dinámico, estratificado, recursivo, no lineal y jerarquizado* de una reorganización de las estructuras del conocimiento. La teoría de Pirie y Kieren se constituye en una herramienta que actúa como una lente a través del cual puede observarse el proceso de evolución de la compresión matemática de un individuo o de un grupo individuos.

3.2.1 Los estratos del modelo

La teoría Pirie y Kieren considera que la comprensión matemática evoluciona a través de ocho estratos, los cuales se modelan en el diagraman de la Ilustración 3.

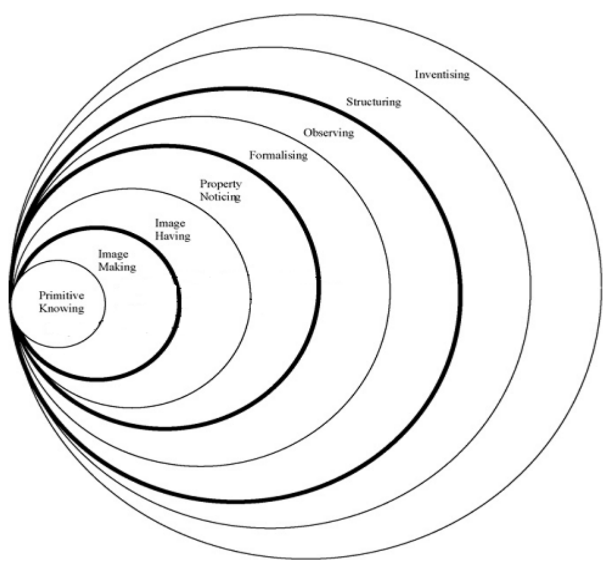


Ilustración 3. Diagrama que representa el modelo para la evolución de la comprensión de Pirie yKieren.

El modelo representa los ocho estratos por medio de un conjunto de elipses con un punto en común que a su vez, pretenden dar cuenta de las características *creciente e inacabada* de la comprensión matemática. La teoría se puede utilizar para describir no sólo estos niveles de comprensión, sino también para trazar las conexiones entre los conceptos y el crecimiento del entendimiento en el tiempo, así mismo, para enfatizar en que cada estrato de comprensión está contenido en los niveles sucesivos (Thom y Pirie, 2006).

Thom y Pirie (2006) afirman que el modelo no está pensado para ser utilizado como una herramienta con la que se puede categorizar, ubicar en estrato, o como una secuencia de formas de conocimiento matemático en abstracto, sino que está pensado para ofrecer una manera alternativa de conceptualizar y describir las complejidades inherentes a la comprensión matemática. A continuación, describiré los elementos con los que Pirie y Kieren han caracterizado cada uno de los ocho estratos de la comprensión.

- ***Estrato 1. Conocimiento primitivo (Primitive Knowing).***

El "conocimiento primitivo" hace referencia al conocimiento inicial, primordial o básico. Thom y Pirie (2006) afirman que con este término no se pretende transmitir ningún juicio en cuanto al nivel de sofisticación de las matemáticas o, de hecho, cualquier otro conocimiento que la persona posee. Este conocimiento está conformado por todo lo que una persona trae "en su mente" a la tarea actual; por ejemplo, sus experiencias en la situaciones reales, sus ideas y concepciones frente a la matemática y al concepto mismo. El adjetivo primitivo no quiere decir conocimiento precario o nivel de conocimiento matemático bajo.

Thom y Pirie (2006) mencionan que, como observadores, nunca podremos saber exactamente el conocimiento primitivo de otra persona; sin embargo, podemos construir diversas interpretaciones a partir de la evidencia de que se ponga a nuestra disposición a través unas acciones físicas, verbales o escritas.

- ***Estrato 2. Construcción de la Imagen (Image Making).***

Un primer momento en la comprensión de un concepto surge cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto (Thom y Pirie, 2006). Para Pirie y Kieren (1994) en este segundo estrato, el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este estrato involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos.

Thom y Pirie (2006) afirman que en este estrato se comienza la evolución de la comprensión al hacer distinciones matemáticas a través de las acciones, todo sobre la base del conocimiento primitivo. La intención del trabajo en este estrato radica en que se da lugar a la creación de nuevas imágenes matemáticas que puedan existir en su forma mental, verbal, escrita o física.

- ***Estrato 3. Comprensión de la Imagen (Image Having).***

Pirie y Kieren (1992) afirman que las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares. Para Pirie y Kieren estos objetos mentales han sido discutidos con los nombres de "concepto imagen", "marcos", "representación de estructuras de conocimiento" y "esquemas alternativos de los estudiantes". El aprendiz puede usar estas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

Hasta acá, los dos últimos estratos evocan el término "imagen" el cual, Pirie y Kieren (1994), usan para significar cualquier idea que el estudiante pueda tener sobre algún tópico en particular, cualquier representación "mental", no necesariamente visual o pictórica. Esta teoría postula que en la evolución de la comprensión matemática sobre un tópico particular un estudiante elabora, sostiene y extiende imágenes particulares.

- **Estrato 4. Captación de la propiedad (Property Noticing).**

Una vez que el estudiante haya construido varias imágenes, puede examinarlas, establecer conexiones y distinciones entre ellas. En palabras de Thom y Kieren (2006, p. 190)este estrato es una forma de "caminar atrás[4]" y reflexionar sobre la comprensión existente a fin de promover ese entendimiento. Meel (2003, p.337) afirma que en este estrato se observan

[4]Utilizo el término "caminar atrás" como una interpretación del término "*standing back*" presentada por los autores en el texto original en inglés.

las propiedades construidas hasta el momento, las cuales se combinan para construir definiciones que pueden evolucionar y definir características particulares, mientras que se ignoran otros elementos del concepto.

De acuerdo con Pirie y Kieren, la diferencia entre *Image Having* y *Property Noticing* es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión. Quizás en este nivel, el aprendiz resalta generalidades de varias imágenes y desarrolla un concepto definición que incorpora imágenes múltiples.

- **Estrato 5. Formalización (Formalising).**

En este estrato, el aprendiz es capaz de conocer las propiedades para abstraer características comunes de clases de imágenes. El lenguaje usado para describir un concepto no tiene que ser un lenguaje matemático formal; sin embargo, las descripciones generales suministradas por los estudiantes deben ser equivalentes a la definición matemática apropiada. En palabras de Meel (2003):

> El estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona.[...] la descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas (p.238).

- **Estrato 6. Observación (Observing).**

Este estrato se supone que el estudiante posee la habilidad para considerar y consultar su propio razonamiento (aspecto metacognitivo) formal. Él es capaz de observar, estructurar y organizar procesos personales de pensamiento como también, reconocer las ramificaciones de tales procesos. Así mismo, en este nivel el estudiante ha progresado a la producción de verbalizaciones de los conocimientos del concepto formalizado.

El proceso de observación implica reflexionar sobre la coordinación de unas actividades de las matemáticas formales. Thom y Pirie (2006, p. 191) presentan una analogía entre estadios, así: *“Observing is to Formalising as Property Noticing is to Image Having”*

- ***Estrato 7. Estructuración (Structuring).***

En este estrato, el aprendiz llega a tomar consciencia de las proposiciones y asociaciones y, entonces, las relaciones provenientes de las observaciones pueden ser explicadas por un sistema axiomático. Habiendo logrado este estrato, el estudiante no está preocupado por un tópico en particular, sino más bien, él ha ubicado su entendimiento en una gran estructura, él sería capaz de concebir pruebas de propiedades asociadas con un concepto y examinar acciones desarrolladas en el concepto que provienen de otras propiedades lógicas. Siguiendo a Thom y Pirie (2006, p. 194) la *Estructuración* implica ser capaz de explicar o teorizar unas observaciones formales en términos de una estructura lógica. Se trata de un estrato en el que las observaciones generales sobre formalización de un tema objeto de estudio, se incluyen en una estructura matemática y ya no necesitan ser tratados como casos específicos de esa estructura.

- ***Estrato 8. Invención (Inventising).***

Retomando los planteamientos de Thom y Pirie (2006, p. 194)la *Invención* requiere que el estudiante rompa con las preconcepciones que surgieron en la comprensión temprana, con el fin de plantear nuevas preguntas que pueden dar lugar al surgimiento de un concepto totalmente diferente.

El hecho de que este estrato sea denominado “invención” no quiere decir que en los estratos precedentes no puedan emerger creaciones o invenciones por parte de los estudiantes. En este estrato, el entendimiento matemático del estudiante se ve sin límites, imaginando y buscando más allá de la estructura corriente y contemplando la pregunta “¿qué pasa sí?” Este cuestionamiento resulta del uso del conocimiento estructurado del aprendiz y que se toma como conocimiento primitivo para investigar preguntas que están más allá del dominio inicial de la investigación.

Con respecto a su Teoría, Pirie y Kieren (1991) señalan que es importante ser conscientes que los estadios, por sí mismos, no constituyen la comprensión, dichos estadios se nombran partes de un fenómeno dinámico en cual no tiene existencia independiente fuera de la observación de la compresión de una persona particular de un tópico específico de las matemáticas.

3.2.2 Características del Modelo

Pirie y Kieren plantean un modelo dinámico que se refleja en sus diversos componentes, para ello describe cuatro características del modelo, a saber: la fractalidad, el redoblado, los límites de la no necesidad y las complementariedades de acción y expresión las cuales describiré a continuación:

a. **Característica de la Fractalidad:** Con base en el planteamiento anteriormente expuesto, Pirie y Kieren (1994) introducen en su teoría una de las características más importantes que permiten argumentar la idea que la comprensión "no es limitada, ni finita". Dicha característica puede recibir el nombre de fractalidad. En palabras de sus creadores:

> […] Por ejemplo, se podría observar a una persona en el nivel de invención como si tuviera su comprensión previa como una nueva acción primitiva [Conocimiento Primitivo]. Una consecuencia principal de esta línea de pensamiento es que, para un observador, la comprensión tiene una cualidad fractal. Se puede observar la comprensión de una persona "dentro" de la acción primitiva y observar la misma estructura nivelada. (p.240).

A continuación muestro una representación gráfica de la característica de *fractalidad* de la teoría de Pirie y Kieren, la cual hace evidente que el estrato "conocimiento primitivo" puede ser a su vez la composición de una comprensión de un concepto previo, desarrollada con anterioridad.

.

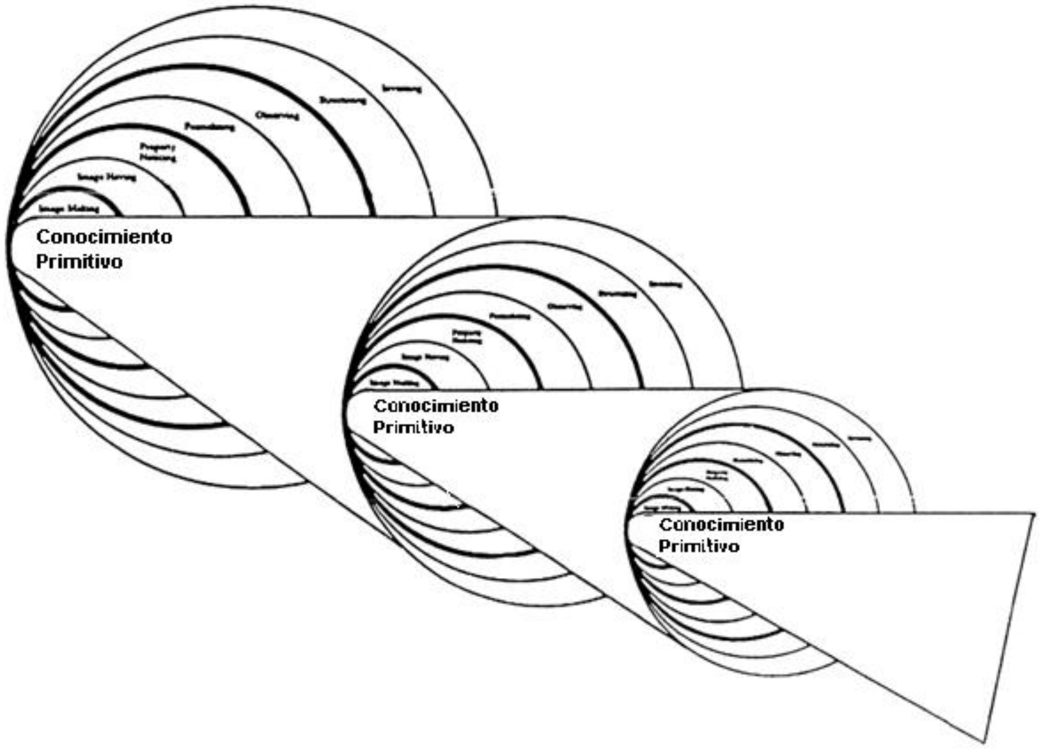


Ilustración 4. Diagrama de la característica Fractal del modelo de Pirie Kieren.

b. Característica del redoblado (*Folding Back*)

Pirie y Kieren (1992, p. 508) afirman que cada uno de los ocho estadios de comprensión se encajan uno en el otro, pero siempre permitiendo un acceso a todos los estadios anteriores. Consideran la evolución de la comprensión de una persona con respecto a un tema objeto de estudio, como un movimiento de avance y retorno entre actividades de los diferentes estadios. A este proceso de adelantar y retroceder los autores lo denominan *"Folding Back"* o *Redoblado*.

Para Pirie y Kieren (1991),el *folding back* es una de las características más importantes de la teoría, ya que representa un aspecto dinámico y no monodireccional de la comprensión.Pirie y Kieren(1994, p. 173)creen que cuando un estudiante se enfrenta con un problema, que no se puede solucionar de inmediato, él / ella puede necesitar volver a un estrato interior de comprensión, de este modo, el *folding back* permite la reexaminación de la comprensión en un estrato de una forma mucho más enriquecida a la presentada inicialmente, cuando se trabajó en ese estrato.

Pirie y Kieren (1991, 1994) resaltan la importancia del *Redoblado* para promover la evolución de la comprensión; afirman que de esta forma, el avance se presenta doblando de nuevo hasta que repetidamente se reconstruya y reorganice el conocimiento del estrato interno de la persona y, de esta manera, extienda o amplíe la comprensión para lograr el estrato externo. En este sentido Meel (2003) afirma que:

> […] la extensión de una persona no es simplemente un producto de la generalización de actividades de los estratos determinados, ni una consecuencia de la abstracción reflexiva de la comprensión de la persona para obtener un nuevo estrato externo, sino que la extensión de la compresión se obtiene redoblando repetidamente hasta que se construya y reorganice el conocimiento del estrato interno de la persona y de esta manera se extienda aun más la comprensión al estrato externo (p. 241).

Pirie y Kieren (1991) afirma que la comprensión es un fenómeno tanto profundo como amplio y por tanto requiere del redoblado para reconstruir las bases de los estratos externos de comprensión.

En una mirada más profunda del *folding back*, Cavey y Berenson (2005) se apoyan en el trabajo de Martin (1999) para revelar la naturaleza compleja de este proceso. En particular, estos investigadores llaman la atención en que no todos los actos de redoblado son necesariamente efectivos para la extensión de la comprensión matemática. La efectividad del redoblado depende tanto de la estructura del ambiente como del aprendiz; el redoblado tiende a ser más efectivo cuando el aprendiz siente la necesidad de redoblar para recolectar información específica. Como producto de la investigación, Martin (2008) realiza una extensión de la teoría de Pirie y Kieren, la cual será abordada en el apartado 3.2.4.

c. *Límites de la no necesidad*

Otra de las características fundamentales del modelo está basada en la afirmación de Pirie y Kieren (1994, p. 172)para quienes un límite de falta de necesidad puede interpretarse con una frontera en los estratos en el cual, más allá de las fronteras, el alumno es capaz de trabajar con conceptos que ya no están obviamente vinculadas a las formas de comprensión previas, sin embargo dichas comprensiones previas, se insertan en el nuevo nivel de comprensión y presentan un fácil acceso en caso de ser necesarios .En la Ilustración 5puede observarse los tres límites de necesidad establecidos por el modelo, los cuales se encuentran resaltados con los anillos en negrita.

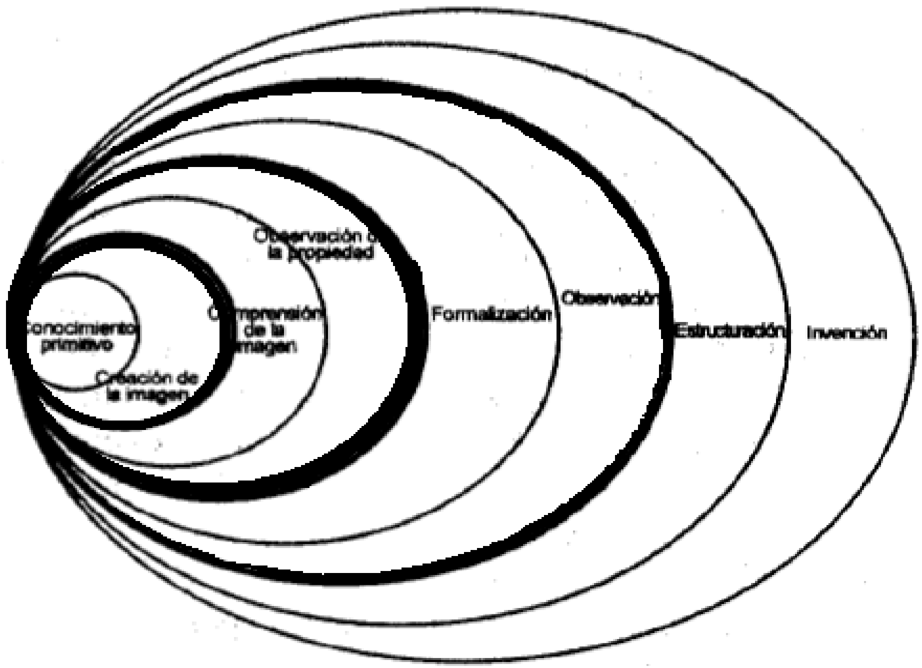


Ilustración 5. Característica de los límites de falta de necesidad del modelo de PirieyKieren.

d. Complementariedad entre las actuaciones y las expresiones

Meel (2003) afirma que inicialmente Pirie y Kieren habían propuesto *una complementariedad de un proceso y la acción orientada a la forma*. En esta complementariedad las acciones orientadas a la forma

> […] se presentan como una demostración de un agente externo que intenta determinar el estrato de comprensión en el que un estudiante se encuentra operando. Por lo tanto la ausencia de la acción complementaria que se presenta en el estrato no demuestra que un estudiante esté trabajando en una [un] estrato en particular” (p.241).

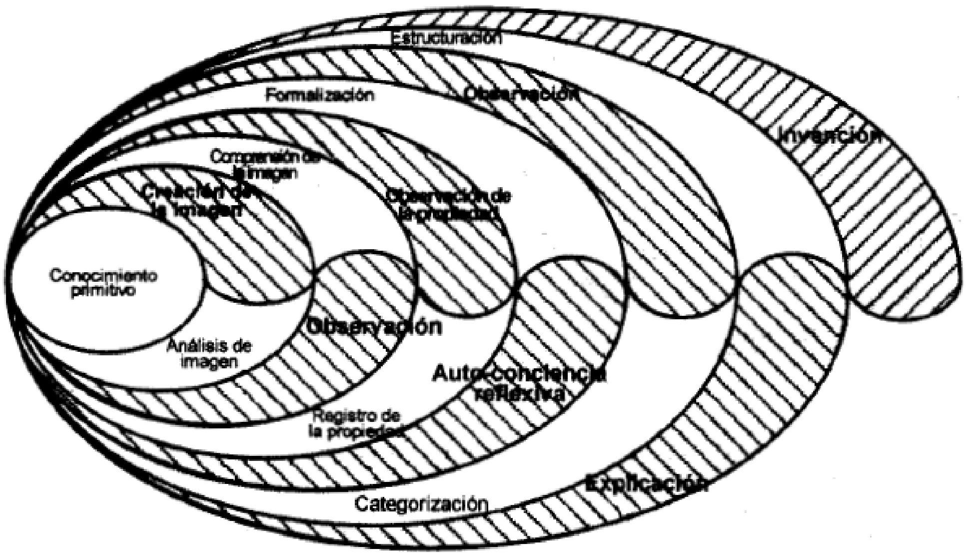


Ilustración 6. Los elementos complementarios de nivel interno. Tomado de Meel (2003, p. 241)

Meel (2003, p. 241) señala que, en 1991 Pirie y Kieren ampliaron la noción orientadora a la forma, re-etiquetando el diagrama, dando como resultado el presentado en la Ilustración 7. De esta manera, se tiene una forma más sencilla de analizar los estratos mezclados, mostrando de igual manera los complementos de *actuación* y *expresión* de los estratos.

La característica de complementariedad de acción y expresión, se presentó en Pirie y Kieren (1994, p. 175). Ellos consideran que cada estrato (excepto el de conocimiento primitivo)está conformado por una complementariedad entre las *actuaciones* (*acciones)* y las *expresiones,* y cada uno de estos aspectos de la evolución de la comprensión son necesarios antes de pasar de cualquier estrato a otro. En la Ilustración 7 puede observarse los estadios que tienen actuaciones y expresiones complementarias.

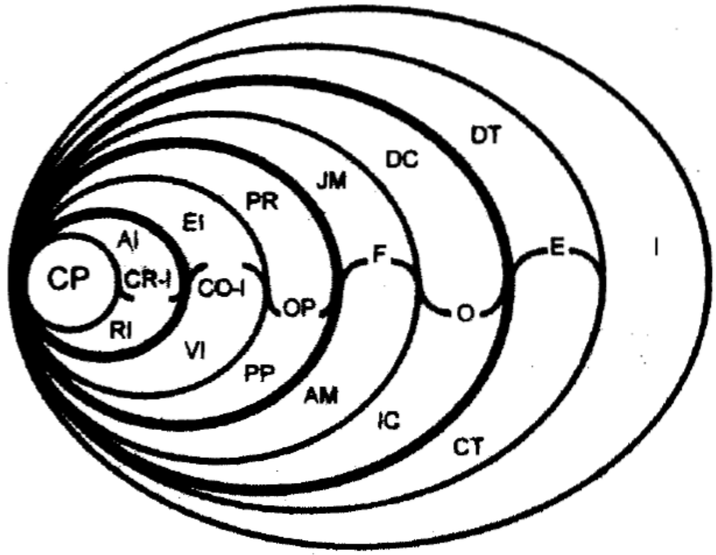


Ilustración 7. Anillos con complementos de *Acción y Expresión* tomada de Meel (2003, 242)

CP: Conocimiento Primitivo.
CR-I: Creación de la Imagen.
CO-I: Comprensión de la Imagen.
OP: Observación de la propiedad.
F: Formalización.
O: Observación.
E: Estructuración.
I: Invención.

ABREV	NOMBRE		ABREV.	NOMBRE
AI:	Análisis de la Imagen	…….	**RI:**	Realización de la Imagen
EI:	Expresión de la Imagen	…….	**VI:**	Visualización de la Imagen
RP:	Registro de la Propiedad	…….	**PP:**	Predicción de la Propiedad
JM:	Justificación del Método	…….	**AM:**	Aplicación del Método
DC:	Descripción de las características	…….	**IC:**	Identificación de las características
DT:	Demostración de un teorema	…….	**CT:**	Conjetura de un teorema

Meel (2003, pp. 241-243) describe sucintamente las características de cada complemento según el estrato. Así:

El estrato 2, **creación de imagen,** se encuentra compuesto por los elementos complementarios llamados *realización de la imagen y análisis de la imagen*. El estudiante que crea una imagen, observa el trabajo previo como un trabajo completo, y no regresará a él, mientras que, un estudiante que revisa una imagen se relaciona con la conducta anterior, sin que necesariamente siga un patrón (Pirie y Kieren, 1991, citado en Meel, 2003, p.242). La realización de una imagen puede parecer en un inicio más definida, debido a que la ocupación en cualquier actividad pareciera una realización de imagen, de acuerdo con Pirie y Kieren (1994), consta sólo de acciones potencialmente fructíferas relacionadas con la realización intencional de algún tipo de imágenes para un concepto.

En el estrato 3, **comprensión de una imagen,** se tiene dos elementos complementarios, *visualización de una imagen y expresión de una imagen*. El acto de la expresión de una imagen, ha unido ejemplos previos y tiene un patrón, mientras que la conducta de expresión de la imagen articula el patrón asociado con una imagen (Pirie y Kieren 1991, retomado por Meel 2003, p. 242). En particular, cuando se actúa en la visualización de una imagen, un estudiante identifica un elemento discrepante como un elemento no relacionado con la imagen mental, pero no es capaz de expresar el por qué; por otro lado, la expresión de la imagen relaciona la articulación de la imagen y el razonamiento que provoca el elemento discrepante que no se adecúa a ella (Pirie y Kieren, 1994).

Seguidamente, el estrato 4, **observación de la propiedad**, presenta dos complementariedades: el *Registro de la Propiedad* y *la predicción de la propiedad.* El acto de la predicción de la propiedad relaciona la imagen con una propiedad observada por el estudiante, en tanto que el registro de la propiedad es un acto que incorpora dentro de la estructura cognitiva del estudiante la propiedad observada como algo que existe y parece funcionar. De acuerdo con Pirie y Kieren (1994, p.178), tanto el estrato de la obtención de la imagen como el de la observación de la propiedad tienen una característica particular que los distingue de otros estratos. En estos dos estratos, las nociones de "actuación" producen comprensiones temporales, es decir, comprensiones que pueden disminuir a través del tiempo si no se coordinan con sus nociones de "expresión" complementaria. Como resultado, la falta de una actividad de "expresión" parece limitar la evolución más allá de sus imágenes previas y, por lo tanto, de los estratos más elevados de su modelo Pirie y Kieren (1994).

En el estrato 5, **de formalización,** *la aplicación del método y la justificación del método* son dos elementos complementarios, mientras que el estrato 6, **de observación,** contiene las complementariedades de *la identificación de las características y descripción de las características* (Pirie y Kieren, 1994, p.179). El último estrato contiene la conjetura de un teorema y la demostración de un teorema. Pirie y Kieren (1994, p.180) definen las complementariedades para estos tres estratos sin ninguna otra descripción más allá de la presentación de términos ilustrativos.

3.2.3 El campo de aplicación de la teoría de Pirie y Kieren

La teoría de Pirie y Kieren se ha usado para estudiar la comprensión de diversos conceptos e ideas matemáticas; por ejemplo, en el campo numérico (Pirie & Kieren, 1994; Thom & Pirie, 2006), conceptos de cálculo (Meel D. , 1998), Estadística (Warner, 2008), Álgebra y funciones (Pirie y Kieren, 1994; Pirie y Martin, 1997; Borgen y Stan Mana, 2002);así mismo, ha sido aplicado en otros campos, entre ellos en formación de profesores (Droujkova, Berenson, Slate, y Tombes, 2005; Cavey y Berenson, 2005).

Las primeras investigaciones en las que el modelo de Pirie y Kieren tuvo aplicaciones estuvieron relacionadas con la comprensión de las fracciones. En su publicación de 1994, Pirie y Kieren reportan el caso de Teresa, una niñaque evidenciaba capacidades para plantear fracciones equivalentes; sin embargo, como la mayoría de los estudiantes de su clase, no alcanzaba a realizar operaciones entre ellas. A Teresa se le proporcionó un *Kit* de rectángulos equivalentes a diversas fracciones de una hoja de papel (medios, tercios, cuartos, octavos, doceavos y veinticuatroavos).

A través del uso del *kit,* la estudiante tenía la tarea de hallar tantas cantidades o combinaciones de cantidades que pueden hacerse "exactamente" con las piezas de papel proporcionadas (i.e: tres cuartos se forma con un medio y un cuarto). Seguidamente, se le solicitó a Teresa dibujar diagramas de cada uno de sus resultados. En su artículo, Pirie y Kieren (1994) describen la manera en que ella avanza en la comprensión y la interpretan a la luz del marco teórico planteado en el modelo en cuestión.

Por otro lado, Thom y Pirie (2006)indagan por la comprensión que tienen dos niños de tercer grado del concepto de número. El estudio se enmarca en una investigación más amplia en cuyo contexto ponen a niños de segundo y tercer grado a jugar a las adivinanzas con números; en parejas, los estudiantes deben crear ciertas pistas para que otra pareja pueda descubrir el número oculto. En este trabajo, Thom y Pirie reportan el caso de una pareja de niños que abordan el número 72. Los niños atravesaron los ocho estadios del modelo y adicionalmente redobladon y superaron en segundo límite de la no necesidad.Los resultados del estudio revelan que la comprensión delos números naturales de los dos estudiantes es conceptualmente compleja y existe en diferentes ámbitos del modelo de Pirie y Kieren. Así mismo, los autores llegaron a considerar que una “buena” comprensión matemática vincula la integración de conocimiento matemático formal e informal, conocimiento que es flexible y fluido.

Con respecto a la formación de profesores, Cavey y Berenson (2005) realizan una extensión de la teoría de Pirie y Kieren al campo de las estrategias de enseñanza. En su trabajo asumen los planteamientos de Shulman cuando consideran tres componentes del *conocimiento* para la enseñanza de un tópico específico; a saber: conocimiento del contenido temático, conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento curricular. En su investigación, Cavey y Berenson asumen el *estudio del plan de clase*[5] (Lesson Plan Study, LPS)como una secuencia de actividades designada para comprometer a los profesores en una ampliación y profundización de su comprensión de las matemáticas escolares y las estrategias de enseñanza.

En su publicación de 2005, Cavey y Berenson presentan el caso de una estudiante de profesorado en matemáticas (futura profesora) a quien observaron en la realización de LPS en el tema particular de la trigonometría del triángulo rectángulo. Para estos autores, las matemáticas, el aprendizaje de las mismas y las estrategias para su enseñanza son tres “comprensiones” a las cuales los profesores probablemente acceden cuando se comprometen en tareas de enseñanza tales como LPS. De esta manera, tales comprensiones hacen parte del conocimiento primitivo de una comprensión de la enseñanza de las matemáticas. En la siguiente ilustración se modela esta relación:

[5] El *estudio del plan de clase* es un método adaptado del método japonés: *estudio de clase*

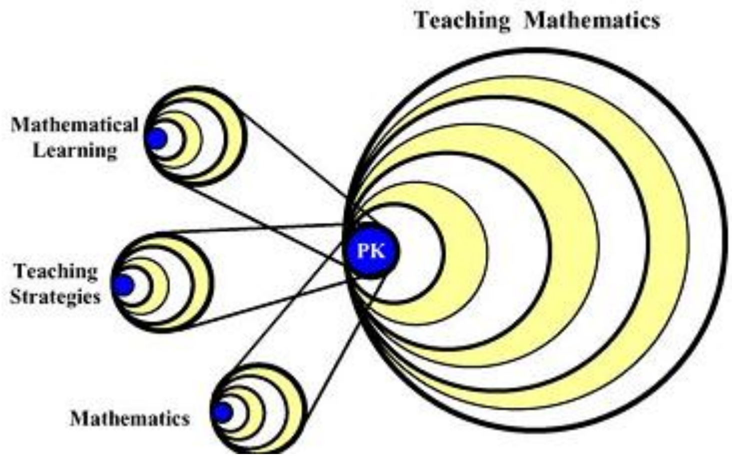


Ilustración 8 Dominios del conocimiento primitivo durante LPS **(Cavey & Berenson, 2005, p. 176)**

Entre los principales resultados del estudio reportado por Cavey y Berenson (2005) se tiene que fueron *las múltiples oportunidades y contextos con los cuales compartió la comprensión de las matemáticas escolares* quienes condujeron hacia una evolución significativa de la comprensión de la trigonometría del triángulo rectángulo. Esta evolución de las ideas matemáticas asociadas a la trigonometría proporcionó, a su vez, un crecimiento de la comprensión de las estrategias de enseñanza. En otras palabras, este resultado indica que la evolución de la comprensión de las matemáticas escolares (qué enseñar)conduce hacia el crecimiento de la comprensión de las estrategias de enseñanza (cómo enseñar) en el contexto del LPS.

Por otro lado, Droujkova et al. (2005) presentan un marco conceptual para el estudio de mecanismos metafóricos del crecimiento de la comprensión colectiva entre profesores de matemática de *middle* y *high school*. Este marco combina la teoría para la evolución de la comprensión matemática de Pirie y Kieren con otras contribuciones de marcos en el campo de la metáfora y la comprensión. Particularmente, el estudio de Droujkova y sus colaboradores centra la atención en la evolución de la comprensión del conocimiento del contenido pedagógico,lo cual se establece en la comprensión matemática. Estos autores señalan que la teoría de Pirie y Kieren ayuda a trazar lo que está ocurriendo con la comprensión, mientras que las metáforas, describen cómo está ocurriendo. Los autores, a través de *los experimentos de enseñanza*, desarrollan su marco conceptual en el que establecen una correspondencia entre el mecanismo en que funciona la metáfora y la teoría de Pirie y Kieren. En la siguiente tabla se observa tal correspondencia:

Stage	Metaphor birth from grounding	Inseparably, target *is* source	Metaphor into simile: target is *like* source	Metaphor death: self-sustained target
Actions	Image Making	Image Having	Property Noticing	Formalising
Example	"Multitude of representations"		"Learning differences are like contradicting instructional uses of representations"	"Learner diversity"

Tabla 4. Co-ocurrencia de estadios entre el desarrollo de la metáfora y la comprensión matemática. Droujkova et al. **(2005, p. 295)**

La teoría de Pirie y Kieren también ha sido aplicada a algunos conceptos del cálculo diferencial e integral, por ejemplo Meel (1998) reporta una investigación en la que compara la comprensión de estudiantes de honor (sobresalientes) de tercer semestre de la asignatura cálculo. En este estudio participaron 16 estudiantes de un curso con un currículo especial (Calculus and Mathematica-*C&M*) y 10 estudiantes de un curso con currículo tradicional (*TRAD*). El currículo C&M integró un sistema algebraico computarizado denominado *Mathematica*[TM] mientras que el curso que siguió el currículo tradicional se orientó a desarrollar actividades de lápiz y papel con base en la segunda edición del libro de Stewart con el cual se pretendía que los estudiantes aprendieran los conceptos centrales del cálculo como una disciplina matemática abstracta, y tuvieran capacidades para modelar en contextos como los negocios, las ciencias y las aplicaciones en ingeniería.

Para indagar por la comprensión de los estudiantes con respecto a los conceptos de límite, diferenciación e integración, Meel diseñó tres instrumentos, a saber:

a) Una tecnología restricta, test escritos (10 ítems con lápiz y papel)
b) Una entrevista en solución de problemas en la que se permitía tecnología
c) Una entrevista de comprensión.

Las preguntas que abordó Meel en su estudio fueron:

- ¿Cuáles son las diferencias y semejanzas entre los dos grupos, en relación con el desempeño en los ítems del instrumento con lápiz y papel?
- ¿Cuál es la naturaleza de las diferencias y semejanzas cognitivas entre los dos grupos en relación con el desempeño en los ítems del instrumento con lápiz y papel?
- ¿Cuáles son las diferencias entre los grupos, en cuanto a esquemas globales, estrategias, modos de representación, calidad de la justificación matemática, y errores, con relación al desempeño en la solución de cuatro test con preguntas de aplicación apoyados con herramientas tecnológicas?
- ¿Cuáles son las diferencias en la comprensión de conceptos históricamente centrales del cálculo (límites, diferenciación, integración) que se evidencia en las respuestas a las preguntas inmersas en la entrevista de comprensión?

Paralelo a estas cuatro preguntas, el estudio de Meel examinó algunos aspectos de los dos currículos en los cuales se pudieron observar tanto ventajas como desventajas para los estudiantes. Los resultados de este estudio se muestran mediante (a) un análisis cuantitativo de las respuestas de los estudiantes a los ítems correspondiente al instrumento de lápiz y papel, (b) un análisis cualitativo del mismo instrumento, (c) de los datos obtenidos en las entrevistas de la solución de problemas (d) y de las entrevistas de comprensión. Cada uno de estos cuatro secciones correspondientes a cada una de las preguntas de investigación presentadas anteriormente.

Con respecto al análisis cuantitativo del instrumento de lápiz y papel, se pudieron obtener dos comparaciones adicionales; el primero con respecto a los ítems en formato sólo texto o texto y pictórico y, el segundo, orientado a evaluar la comprensión conceptual o el conocimiento procedimental de los estudiantes. Con respecto a los ítems presentados en formato sólo texto, Meel encontró que los estudiantes de currículo *TRAD* tienen desempeños significativamente mejores que los estudiantes de *C&M*, mientras que en los ítems presentados en formato texto y pictórico los estudiantes de ambos currículos presentan desempeños similares. En ambos grupos, se observó un mejor desempeño en los ítems de texto y pictórico que en los de texto solamente. De otro modo, al observar los datos arrojados por los ítems asociados al concepto de límite, Meel encontró que los estudiantes de *TRAD* tenían desempeños significativamente mejores que los estudiantes de

C&M. Con base en estos resultados Meel concluye que los estudiantes de *TRAD* están más capacitados que los del *C&M* en tareas con y sin componentes pictóricas y además que los estudiantes de C&M requieren de mayores componentes pictóricos cuando enfrentan un instrumento sin apoyo tecnológico.

En cuanto al análisis cualitativo del instrumento de lápiz y papel, Meel presenta un análisis detallado de los ítems correspondientes a cada uno de los tres conceptos abordados en este estudio (límites, diferenciación e integración). Sus análisis revelaron que los estudiantes de *C&M* se aproximaron a las definiciones de los conceptos matemáticos y proporcionaron explicaciones con un kit de herramientas del lenguaje informal y de visualización. De otro modo, los estudiantes de *TRAD* estuvieron más familiarizados con formulaciones simbólicas precisas; sin embargo, en muchos casos, estos estudiantes se redujeron a discutir estas definiciones formales usando lenguaje informal, el cual tenía muchos de los mismas características erróneas asociadas con los estudiantes de *C&M*.

Con respecto a los protocolos de solución de problemas, la investigación de Meel muestra que los estudiantes de C&M evidenciaron mayor flexibilidad en la búsqueda de estrategias que los estudiantes TRAD. Aunque algunos estudiantes de ambos tipos tuvieron dificultades en la determinación inicial de una estrategia de solución, los estudiantes de TRAD fueron más rígidos en la aplicación de la estrategia seleccionada así condujera a resultados poco razonables, mientras que los estudiantes de C&M fueron capaces de revisar y analizar el problema desde múltiples perspectivas.

Los análisis de Meel correspondiente a los protocolos de comprensión evidencian que los estudiantes de ambos currículos tienen diferencias poco significativas en sus compresiones de los conceptos de límites, derivada e integral.

Finalmente, Meel afirma que por medio de su investigación, particularmente a través de las cuestiones que emergieron en la entrevista de comprensión, los estudiantes de ambos currículos conciben los conceptos de límite y diferenciación de tal manera que no alcanzan a capturar completamente su esencia, sin embargo con respecto a la integración, los estudiantes evidencia una comprensión compatible con la definición formal de integración.

Con base en los reportes presentados en esta sección, se puede observar cómo la teoría de Pirie y Kieren ha llamado la atención de cierto número de investigadores realizando estudios en diferentes campos de las matemáticas y mostrando la teoría como una herramienta pertinente para la descripción de la comprensión matemática

3.2.4 Extensiones de la teoría de Pirie y Kieren

La teoría de Pirie y Kieren ha sido ampliamente aplicada para describir la comprensión de diferentes conceptos. Algunas de las investigaciones realizadas han requerido nuevos desarrollos del modelo lo cual ha originado algunas extensiones, convirtiéndola de esa manera enuna teoría dinámica y susceptible de ser falseada, características que son propias de una teoría formalmente constituida (Schoenlfeld, 2000; citado por Meel, 2003). A continuación presentaré algunas de estas extensiones.

Martin, Towers, y Pirie (2006)ofrecen una discusión sobre el crecimiento de la comprensión matemática desde *una perspectiva colectiva*. Estos autores señalan que aunque el trabajo de Pirie y Kieren (1994) ofrece un poderoso marco teórico para la observación del crecimiento de la comprensión matemática como un proceso dinámico y que es un modelo que básicamente permite abordar dicho proceso de manera individual; podrían usarse algunos elementos de tal teoría para observar la evolución de la comprensión matemática colectiva. En ese sentido, Martin et al. (2006) señalan que:

> […] consistent with Pirie and Kieren's perspective on personal mathematical understanding, we view collective mathematical understanding as constantly changing and emerging. In particular, it is the recursive aspect of their theory that we draw on here when considering collective understanding and how this might be observed (p. 150).

Para Martin et al. (2006) la evolución de la comprensión ocurre en contextos y, por tanto, un estudio de dicho crecimiento necesariamente debe tener en cuenta las interacciones que una persona tiene con tales contextos, incluyendo la interacciones con los materiales, otros compañeros y profesores. Martin y sus colaboradores retoman los trabajos de Cobb, Cobby Yackel sobre la "improvisation" y junto con la teoría de Pirie y Kieren provee una poderosa manera de coordinar los análisis individuales con los colectivos. Sin embargo, Martin y sus colaboradores, señalan que *"we also recognize that an analysis of the growth of understanding at the individual and the collective level may not be either possible or* *appropriate* (p. 154)*"*. Para el desarrollo de su propuesta, estos investigadores introducen el término coacción (*coaction*) el cual describen del siguiente modo:

> We use the term coaction as a means to describe a particular kind of mathematical action, one that whilst obviously in execution is still being carried out by an individual, is also dependent and contingent upon the actions of the others in the group. Thus, a coaction is a mathematical action that can only be meaningfully interpreted in light of, and with careful reference to, the interdependent actions of the others in the group (Martin, Towers, & Pirie, 2006, p. 156).

Los autores eligieron el término co-acción en lugar de interacción para enfatizar la noción de actuación en relación con las ideas y acciones de otros y de manera conjunta. En su artículo, Martin y sus colaboradores presentan la Comprensión como un proceso colectivo que tiene implicaciones para el aula de clase y para el contexto de las tareas de clase.

Otra extensión más reciente de la teoría de Pirie y Kieren la presenta Martin (2008). En su trabajo, Martin examina en detalle el aspecto clave del *folding back* (redoblado), de esta manera alcanza a desarrollar elementos teóricos de categorías y subcategorías que describen más completamente dicho fenómeno. Martin (2008) reconoce que aunque el redoblado es una característica esencial de la teoría de Pirie y Kieren, la definición ofrecida por sus creadores es poco elaborada y poco desarrollada; así mismo señala que había una falta de datos sustanciales que demostraran el redoblado y un entendimiento limitado del cómo y por qué éste ocurre.

En su investigación, Martin desarrolló una *teoría fundamentada* en los términos de Glaser y Strauss, de tal manera que le permitiera reelaborar la teoría ya existente. En dicha indagación participaron siete pequeños grupos de estudiantes que hacían parte de diferentes niveles educativos (desde primer año de educación secundaria, hasta estudiantes de posgrado en formación de profesores) los cuales abordaron diferentes tareas matemáticas.

En la Ilustración 9se presenta un diagrama en el que resume la propuesta de Martin para profundizar en la naturaleza del redoblado.

Mediante el análisis de los resultados emergieron tres categorías de niveles superiores que caracterizaron en redoblado, los cuales, a su vez, poseen un abanico más general de subcategorías. Las tres categorías superiores son: la fuente de la intervención, la forma del redoblado y los resultados de dicho redoblado. Estas tres categorías puede evidenciarse en la **Ilustración 9**, a través de las siguientes tres preguntas, ¿cuál es la fuente de la intervención? ¿Cuál es la forma de redoblado? ¿Cuál es el resultado del redoblado?

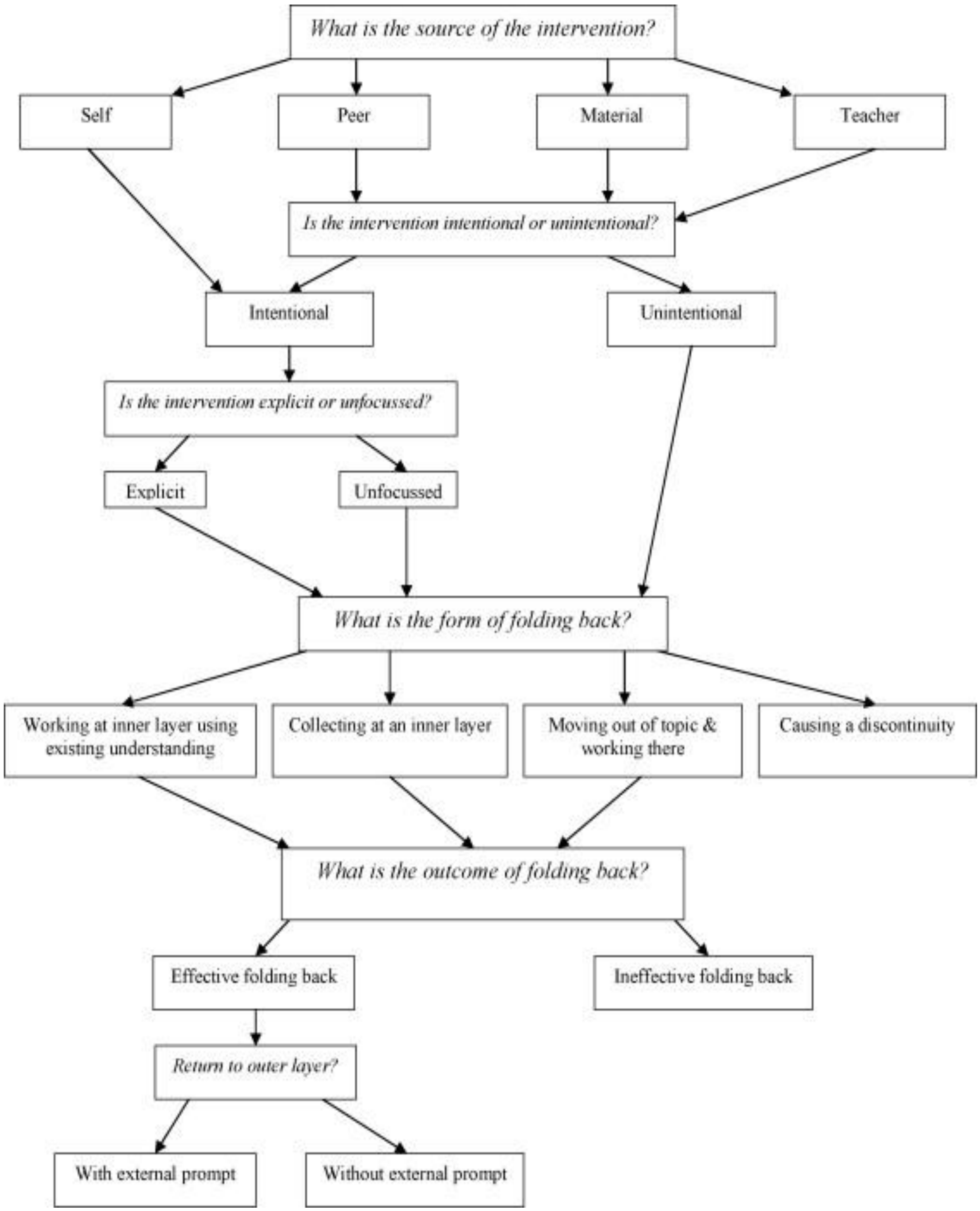


Ilustración 9. El marco teórico de Martin (2008, p. 72).

La primera categoría, Martin (2008) la nombra *la fuente del redoblado* (*the source of folding back*) la cual se denominó así, ya que el redoblado puede ser motivado por la intervención del profesor (*teacher intervention*), de un estudiante (*peer intervention*), por algunos materiales curriculares (*material intervention*), o incluso por el mismo estudiante (*self invoked*). En esta primera categoría se pueden desprender algunas subcategorías dependiendo de la intencionalidad o no de la intervención. En caso que la intervención haya sido intencional, dos nuevas categorías emergen de acuerdo a que tal intervención sea o no focalizada. Con excepción de los tipos de redoblado "intervención del material intencional explícita" e "intervención del material intencional no focalizada" hay un ejemplo para cada uno de los restantes nueve tipos de redoblado en Martin (2008, pp. 73-76)

La segunda categoría que caracteriza un acto de redoblado es denominada por Martin como *forma* y se relaciona con el tipo de acciones con las que el estudiante se compromete en respuesta a la intervención proveniente de la *fuente*. Aparecen cuatro subcategorías, a saber:

- *Trabajando en estrato interno y usando una comprensión existente:* En esta subcategoría se involucran algunas alteraciones del trabajo del estudiante de una manera menos sofisticada o matemáticamente menos formal. Esto ocurre a través de la posesión o uso de un grado de autoconsciencia acerca de las limitaciones de sus comprensiones existentes en un nivel externo. Esta forma de redoblado involucra al estudiante, sea en la extensión de su actual comprensión mediante cambios en sus primeros constructos del concepto, o a través de la generación de nuevas comprensiones.
- *Recolectando en un nivel interno*: Este tipo de redoblado implica retomar un conocimiento previo para un propósito específico y revisarlo o releerlo a la luz de las necesidades de las actuales acciones matemáticas. Tal *recolección* no es un simple acto de evocar o re-llamar un conocimiento previo sino una manera de *afinar o engrosar*[6]el redoblado. Este fenómeno ocurre cuando los estudiantes saben que ellos conocen lo que necesitan.

[6] Uso los términos *afinar o engrosar* como una traducción de "thickening" usado en el texto en inglés de Martin.

- *Movingout & working there* :El reconocimiento, por parte del estudiante de una comprensión inadecuada, se acompaña de una actividad en un estrato interno, la cual al mismo tiempo no es sólo una extensión de su comprensión sino que requiere del desarrollo y refinamiento de los conceptos desde un área diferente de las matemáticas. Esta actividad se desarrolla de manera intencionada y proviene de la necesidad de realizar el *folding back*. El propósito del *folding back* y *moving out* es trabajar en un *Primitive Knowing* para posteriormente estar en la capacidad de trabajar en un nivel externo.
- *Causando una discontinuidad (Dicotomía):* Esto ocurre cuando una intervención se toma como evocativa y la respuesta del estudiante permite retornar hacia un nivel interior o comprensión y trabajar en él. Sin embargo, ese retorno el estudiante "reinicia (*begins again*)" tal vez para hacer una nueva imagen sin relación con su comprensión actual. A pesar de que la comprensión ha sido evocativa, ésta ha causado una ruptura en el desarrollo de la compresión de estudiante.

El tercer elemento de un acto de redoblado, se relaciona con lo que ocurre después de que el estudiante se compromete en una de las forma del redoblado. En esta categoría puede ocurrir que el redoblado haya sido efectivo y que extienda la comprensión y se use para la superación de algún obstáculo. En este caso, el estudiante puede retornar al nivel externo inicial suscitado por elementos externos o por sí mismo. Otro hecho posible en esta categoría es que el redoblado no haya sido efectivo, por tanto, el estudiante no extiende su comprensión para su trabajo o solución de un problema.

Teniendo en cuenta que el redoblado es un poderoso mecanismo por medio del cual la comprensión matemática de un estudiante puede evolucionar, Martin (2008) estudia de manera más detallada dicho mecanismo de tal manera que se pueda describir y comprender un acto particular de la comprensión y predecir el tipo de acciones que un estudiante pueda necesitar para comprometerse en la evolución de su comprensión. Asimismo, "*the particular strength and power of the framework developed in this study is its facility to allow a teacher or researcher to focus in detail on understanding as it is seen to emerge and grow moment by moment*" (Martin L. , 2008, p. 83).

Los elementos presentados en este capítulo permiten observar la comprensión de un concepto o idea matemática como un proceso evolutivo, dinámico y recursivo; y que a pesar que desde sus inicios se enfocó en la compresión individual del estudiante, ya ha habido desarrollos teóricos y empíricos que permiten observarla en colectivos de personas.

Tanto desde la ampliación del campo de aplicación, como de la extensión elementos teóricos de la teoría, la literatura reportada en este capítulo se convierte en evidencia del creciente interés por la teoría de Pirie y Kieren y de su pertinencia para abordar fenómenos como el que se indagó en esta investigación.

Capítulo 4

4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo parto de la idea que en el desarrollo de toda investigación no sólo se requiere de la definición de etapas, selección herramientas, técnicas y procedimientos para la recolección de datos, sino que también son necesarios otros fundamentos, que articulados, constituyen el alma de la investigación; por ejemplo, fundamentos que reflejen la manera en que el investigador asume y construye el conocimiento (Borba y Araújo, 2006).

En la misma dirección Lincoln y Guba (1985), Alves-Mazzotti (1998),Borba y Araújo (2006) señalan que para que una investigación pueda ser conducida de manera significativa y sus descubrimientos e interpretaciones no presenten discordancias, contradicciones y problemas de credibilidad es necesario que haya cierta *resonancia* o armonía entre la investigación realizada, la visión epistemológica subyacente y la metodología utilizada. En este sentido, en la primera sección de este capítulo me dedicaré a presentar algunas de las ideas que me condujeron a optar por un abordaje cualitativo de la investigación, fundamentándome en la experiencia del grupo de investigación EDUMATH, al cual se encuentra adscrita la presente investigación. Seguidamente, explicaré cómo el método de casos se convierte en una herramienta útil para lograr el objetivo planteado en este estudio, para finalmente, mostrar las fases, instrumentos, participantes, análisis de los datos y demás elementos implicados en el *desing* de la investigación.

4.1 El camino metodológico

El grupo de investigación EDUMATH, desde hace más de diez años viene adelantando investigaciones en torno a los procesos de comprensión de algunos conceptos matemáticos, principalmente de la interfase Bachillerato-Universidad. En sus trabajos Esteban y Pérez (2002), Esteban (2003), Jaramillo (2003), Esteban y Llorens (2003), de la Torre (2003a;

2003b; 2000), todos miembros del EDUMATH, han delimitado algunos caminos para la comprensión de conceptos de la Educación Superior. Partiendo de sus investigaciones, estos autores han asumido posiciones críticas frente a los marcos teóricos adoptados y haciendo de la construcción del conocimiento un proceso colectivo y reflexivo. De manera explícita, estos investigadores han presentado una visión de la Educación Matemática como:

> […] un sistema social heterogéneo y complejo, en el cual se distinguen al menos dos campos:
>
> 1. La acción práctica reflexiva sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este es el campo propio del profesor y se realiza principalmente en las instituciones escolares.
> 2. La Didáctica de las Matemáticas, que es una disciplina científica autónoma en la cual las matemáticas constituyen el saber que se quiere transmitir. Este campo se compone, a su vez, de dos áreas de investigación, a saber:
>   - La investigación científica, que trata de entender la naturaleza del pensamiento matemático y de explicar el funcionamiento de los sistemas didácticos.
>   - La investigación aplicada a la tecnología didáctica. (De la Torre A. , 2002)

Desde esta mirada, la Educación Matemática para EDUMATH se ofrece como un espacio para el análisis crítico de los fenómenos asociados a la matemática escolar, de lo que se hace y se actúa desde una perspectiva ética y epistemológica. Es decir, si bien no se niega que el conocimiento matemático involucra “objetos” con sus respectivas reglas sintácticas y semánticas, relaciones, operaciones y aplicaciones, en las investigaciones del Grupo se busca ir más allá, indagando por las formas de construcción que se efectúa de tal matemática en las aulas escolares, así como de las formas en que los sujetos se relacionan con ella y con el contexto.

Desde esta perspectiva, EDUMATH ha establecido un conjunto de líneas de investigación con diferentes focos y perspectivas desde las cuales ha venido construyendo conocimiento científico en el marco de la Educación Matemática. La construcción del conocimiento es entendida como un proceso que se involucra en las interacciones sociales entre lo individual y grupal; es decir, si bien el proceso de apropiación del conocimiento puede ser individual, también es cierto que su construcción obedece a las relaciones y acciones que se generan entre un colectivo y en un contexto determinado.

Una de las líneas con mayor producción de conocimiento en el EDUMATH se denomina, *pensamiento matemático avanzado* que, *grosso modo*, se inserta en la línea de trabajo iniciada desde 1985 en el marco del PME cuyo objetivo primordial, para aquel entonces, fue investigar por los procesos cognitivos asociados al cálculo infinitesimal. En esta línea, el EDUMATH se ha centrándose continuamente por algunos de los procesos involucrados en la comprensión de un concepto matemático preocupándose particularmente en aquellos asuntos asociados a lo visual-geométrico y del paso al concepto del límite.

La presente investigación realiza una conjunción entre los elementos propios de la revisión de la literatura (capítulo 1) y los desarrollos alcanzados por el EDUMATH. Apoyado en los elementos emanados de tal conjunción surgió la necesidad de profundizar en lo que significa "*comprender* el concepto de tasa de variación como una manera de aproximarse a una interpretación variacional de la derivada", y desde tal enfoque, pensé una investigación que diera cuenta de manera profunda y específica de este hecho.

Es así como al indagar por un proceso de comprensión en los estudiantes se exige por parte del investigador una mirada atenta a la forma en que parece ocurrir esos procesos en su contexto propio. Así mismo, implica procesos de interpretación y revisión continua de los hechos que van surgiendo durante todo el estudio de fenómeno escolar. Este tipo de exigencias, me llevaron a orientarme por un abordaje cualitativo de la investigación, ya que según Bogdan y Biklen (1994), la investigación desde un abordaje cualitativo implica:

1. Que la fuente directa de datos sea el ambiente natural ,
2. Que la investigación tenga un fuerte componente descriptivo;
3. Que los investigadores se preocupen más por los procesos que por los resultados
4. Una tendencia a analizar los datos de forma inductiva;
5. Y el significado se convierte en un elemento de importancia capital dentro de la investigación.

En la convergencia de estas consideraciones con el propósito de esta investigación y las características del marco teórico surgió el *estudio de casos* como un método apropiado para abordar el problema de esta investigación. En el siguiente apartado, presento algunos elementos sobre dicho método.

4.2 El método

Conforme he mencionado en diferentes apartados, en esta investigación abordo el estudio de la comprensión de la tasa de variación ofreciendo una respuesta a la pregunta:

¿Cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse al concepto de derivada en estudiantes participantes de un curso de pre-cálculo?

Abordar esta pregunta implicó profundizar, desde el punto de vista teórico, en el significado del término *comprensión*, así mismo, en cómo estos elementos teóricos pueden confrontarse empíricamente con el trabajo de estudiantes al abordar dicho proceso de comprensión.

Responder a un *"cómo se desarrolla un proceso…"*demandaba por parte del investigador una inmersión detallada y profunda en el estudio del fenómeno de comprensión. De ese modo, seleccioné el *estudio de casos* como método de investigación, ya que en palabras de Goldenberd (2007), a través de una inmersión profunda y exhaustiva de un objeto delimitado, el estudio de caso posibilita la penetración en la realidad social no necesariamente lograda con un análisis estadístico.

Por su parte, Yin (2009) puntualiza que aunque no existe una fórmula que permita elegir el método de estudios de casos; dicha elección está en coherencia con la(s) pregunta(s) de investigación. Este investigador agrega que las preguntas que se enfocan en el "cómo" o el "por qué" de un fenómeno social son especialmente un indicador para optar por el estudio de casos como método de investigación.

El estudio de casos es un método de investigación defendido por diversos autores; por ejemplo Salkind (1999, p. 211) lo define como el "*método empleado para estudiar a un individuo o una institución* [en nuestro caso un fenómeno educativo] *en un entorno o* *situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible*". Así mismo, Yin (2009) establece un estudio de caso como una indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo con profundidad en su contexto real de existencia; especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes. En ese mismo sentido, Hernández, Fernández, y Baptista (2006, p. 223) apoyados en los trabajos de Mertens (2005) afirma que "[un estudio de caso] *constituye un método para aprender respecto a una instancia compleja, basado en un entendimiento comprehensivo de esta instancia como un 'todo' y su contexto, mediante datos e información obtenidos por descripciones y análisis extensivos*".

Otros elementos que Yin (2009) proporciona para la caracterización del *estudio de caso* como método de investigación radica en que es una indagación que hace frente a situaciones técnicamente distintas en las cuales habrá muchas más variables de interés que datos puntuales; los resultados se basan por tanto, en múltiples recursos de evidencia, por lo cual se hace necesario un proceso de triangulación. Yin señala otros beneficios del estudio de casos tanto en el desarrollo de orientaciones teóricas previas, como en la orientación para la recolección de datos y su respectivo análisis.

Todo estudio de casos debe obedecer, implícita o explícitamente, a un diseño. Para Yin (2009) el diseño de un estudio de casos puede considerarse de manera coloquial como un *plan lógico* que se direcciona desde un *aquí* hasta un *allá*. El *aquí* tiene que ver con el conjunto inicial de preguntas que se propone responder y el *allá* puede asumirse como el conjunto de conclusiones (respuestas) acerca de tales preguntas. Entre el *aquí* y el *allá* pueden encontrarse un número de pasos importantes que incluyen la recolección y análisis de los datos. Sobre este conjunto de pasos, Yin (2009) señala que más importante que el problema logístico es el problema lógico que está inmerso en la consecución del plan.

Conforme explicitaré en el siguiente apartado, el diseño en esta investigación no se asume como una suma de procedimientos de obtener información, sino como un *conjunto articulado y no rígido* de medios que están en resonancia con las fuentes de información y los propósitos de la investigación.

4.3 El diseño

El diseño que orientó el desarrollo de esta investigación tuvo en cuenta las orientaciones presentadas por Yin (2009) en cuanto a las preguntas del estudio, las proposiciones, las unidades de análisis, la lógica que vincula los datos y las proposiciones; y finalmente, los criterios para la interpretación y análisis de los hallazgos, lo cual presentaré de manera implícita en los siguientes apartados.

4.3.1 La pregunta y las proposiciones

Tal y como fue presentado en los capítulos anteriores, la pregunta de esta investigación se centra en el estudio de un fenómeno educativo el cual he denominado *la comprensión del concepto de tasa de variación como una aproximación a una interpretación variacional de la derivada*. Aunque la pregunta tuvo su génesis en mi experiencia previa como profesor e investigador, también es cierto que fue producto de un refinamiento que resultó de la continúa confrontación con la revisión de la literatura. Como producto de dicha confrontación surgió la necesidad de adoptar un marco teórico que permitiera una interpretación de la comprensión matemática como un proceso evolutivo, dinámico y no lineal; por lo tanto la Teoría de Pirie y Kieren posee unas características interesantes que responden de manera directa a la pregunta de investigación planteada en este estudio.

En la conjunción entre los aspectos que mencioné en el párrafo anterior surgieron algunas orientaciones (proposiciones en los términos de Yin, 2009) las cuales, fueron analizadas dentro de la esfera de acción del estudio. Dichas orientaciones se enmarcan en los siguientes enunciados:

1. Prestar especial atención a las diferentes maneras en que los estudiantes verbalizan, representan, gesticulan, etc., ya que mediante ese tipo de exteriorizaciones se puede ofrecer una interpretación de la compresión matemática y la forma en que ésta va evolucionando.
2. La *comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse a una interpretación variacional de la derivada* supone que los estudiantes estén implicados en situaciones cuyo contexto involucre el estudio de relaciones dinámicas entre variables.

Yin (2009) señala que algunos estudios, principalmente aquellos en los cuales el tópico es objeto de exploración, han legitimado razones para no establecer proposiciones; sin embargo para este mismo autor, tales estudios deben hacer explícito sus propósitos y los criterios con los cuales serán juzgados con éxito.

4.3.2 El contexto

Las *unidades de análisis* son una componente de los estudios de caso relacionadas estrechamente con el problema fundamental de establecer el caso a estudiar (Yin, 2009). En este sentido, presentaré en este apartado el contexto en el cual se aplicó el trabajo de campo y las razones por las cuales se seleccionaron las comprensiones de cuatro estudiantes como unidades de análisis.

Las cuatro participantes de esta investigación eran estudiantes de un curso de Matemáticas Operativas (precálculo) de primer año de universidad. Este curso de Matemáticas es ofrecido, regularmente, por el Instituto de Matemática de la Universidad de Antioquia, a otras dependencias de la misma Universidad y fue servido por el investigador quien asumió el rol de docente y a la vez de investigador.

El programa del curso constaba de 14 unidades temáticas con un marcado énfasis en el desarrollo de habilidades de tipo procedimental en el álgebra escolar. Entre las temáticas que se encontraban en el programa del curso, se tienen: la proporcionalidad, las expresiones algebraicas (polinómicas y racionales), sus operaciones y relaciones, las ecuaciones lineales y cuadráticas con sus respectivos ejercicios de aplicación, fracciones parciales, para finalizar con las nociones de funciones exponenciales y trigonométricas. El curso se desarrolló durante el primer semestre académico del año 2010 y en su transcurrir acontecieron diversos factores endógenos a la dinámica universitaria, lo cual, no sólo afectó la continuidad del procesos de enseñanza, sino también la poca asistencia al curso y la comunicación entre los estudiantes y entre algunos de ellos y el profesor.

Por estas razones invité a participar de la investigación a cuatro de los estudiantes que desde los primeros meses del curso evidenciaron interés, motivación y mayor grado de continuidad en su proceso educativo. Adicionalmente, estas cuatro estudiantes mostraron actitudes favorables para la participación en las actividades de clase y habilidades para comunicar de manera oral y escrita sus diversas inquietudes y avances en sus comprensión, lo cual está en coherencia con una de las *proposiciones* establecidas en el diseño de este estudio de casos; es decir, conforme lo planteado por la Teoría de Pirie y Kieren, una interpretación de la comprensión matemática sólo es posible a través de las diferentes manifestaciones externas que los estudiantes puedan evidenciar.

Tres de las cuatro estudiantes estaban asistiendo paralelamente a un curso de cálculo diferencial lo cual permitió la reflexión e interacción entre el conocimiento construido en dicho curso y la presente investigación.

4.3.3 Las fuentes y los procedimientos

En este apartado presento los medios e instrumentos que permitieron obtener los datos respectivos; dichos medios se plantearon en relación directa con los propósitos de la investigación. Por ser una investigación de corte cualitativo, se hizo necesario hacer alusión a una de sus características más importantes la cual es la multimetodología; esto quiere decir, que se pueden usar una gran variedad de procedimientos e instrumentos para la recolección de los datos. Investigadores como Borba y Araújo (2006) y Alves-Mazzotti (1998)y Yin (2009) rescatan la importancia de esta multiplicidad de procedimientos para darle solidez a los resultados de la investigación, en cuanto a que es importante valorar cualquier detalle o situación que emerja durante el proceso de recolección y análisis de la información.

Para la obtención de los datos empíricos se desarrollaron dos fases en las cuales están en relación con las proposiciones presentadas en la sección 4.3.1. A continuación describiré las fuentes que se usaron en la investigación para la obtención de la información:

- **Observación- participante**

  Para Yin (2009) la observación-participante es un especial modo de observación en el cual el investigador no es sólo un observador pasivo.

Para el caso de la investigación reportada en este documento, actué bajo los roles de profesor e investigador. El rol de profesor me posibilitó conocer el contexto con una mayor profundidad, conocer las fortalezas y debilidades del grupo con el cual estuve trabajando; dicho conocimiento del grupo jugó un papel determinante a la hora de seleccionar los casos a estudiar, además de establecer continuamente relaciones entre los conceptos y procedimientos abordados en clase y las comprensiones que se iban desarrollando en el transcurso de la investigación.

Yin (2009) señala que la observación-participante presenta muchas inusuales ventajas para la recolección de los datos en un estudio de casos, pero a su vez también presenta ciertas desventajas. Entre las ventajas, se encuentra el mayor conocimiento del contexto y otras oportunidades que pueden ser fuente de información (i.e. pequeñas reuniones), pero la principal desventaja consiste en sesgos y prejuicios que pueden producirse al interior de la investigación pues el investigador tiene menor habilidad para ubicarse como un observador externo (Yin, 2009). Para aminorar los efectos de esta desventaja, se recurrió a un diálogo continuo entre las observaciones del investigador y el marco teórico lo cual fue posteriormente confrontado con otras fuentes de evidencia. Las discusiones académicas desarrolladas en el seno del EDUMATH también fueron determinantes para aminorar los efectos de tales de ventajas, pues contar con los puntos de vista de otros investigadores, aportó elementos para ampliar la mirada, que como investigador, se iba desarrollando sobre el fenómeno objeto de estudio.

El rol de observador-participante se desarrolló básicamente al interior de las sesiones de clase; como resultado de este hecho se tuvo la selección de los casos o unidades de análisis de esta investigación. Posteriormente, cuando se desarrolló el módulo de enseñanza, se llevó un registro de las observaciones a través de un diario de campo; también, se hicieron grabaciones en video para su análisis posterior.

- **Documentos**

  Según Alves-Mazzotti (1998) puede considerarse como un documento cualquier registro escrito que pueda ser usado como fuente de información. En el caso de esta investigación, se usaron las producciones escritas elaboradas por las estudiantes en el transcurso del trabajo de campo, particularmente, los documentos proporcionados por ellas cuando resolvieron el cuestionario y las anotaciones que realizaron en la medida que iban desarrollando las activiades del módulo de enseñanza.

  Este análisis de documentos presenta, entre otras, la ventaja que permite confirmar evidencias proporcionadas por la observación-participante y por las entrevistas.

- **Cuestionarios**

  En el caso de esta investigación usé un cuestionario con el cual inicié el proceso de recolección de la información. Dicho cuestionario indagó por la manera en que las estudiantes abordaron situaciones en las que se involucraba la variación (Ver anexo 1).

- **Entrevista**

  La entrevista ha sido considerada como una fuente esencial para la obtención de información en un estudio de casos. Para Yin (2009) una entrevista debe concebirse como una conversación guiada, más que una consulta estructurada; es decir, aunque se persigue una consistente línea de indagación, las preguntas deben surgir de manera fluida y no de una manera rígida.

  Con respecto al papel del entrevistador, Yin (2009) señala que debe operar desde dos actividades a la vez; o sea, satisfaciendo las necesidades de su línea de indagación mientras a la vez pone atención a la manera "amigable" y no "amenazante" de proponer las preguntas. Existen diferentes tipos de entrevistas; sin embargo, considerando el objeto de esta investigación la asumí como un diálogo emergente de los contextos en los cuales se indaga por la comprensión. En ese sentido, las entrevistas estuvieron integradas en toda la implementación del módulo de enseñanza convirtiéndose en parte fundamental de éste.

Adicionalmente en la tercera sesión se realizó una entrevista individual en la que el investigador profundizó en las maneras particulares que en las estudiantes había abordado la situación "rectángulo inscrito" y poder así identificar las principales características de su comprensión.

4.3.4 Las fases del desarrollo del trabajo de campo

El trabajo de campo de esta investigación se desarrolló en dos fases. La primera de ellas, la denominé fase de inmersión; en ella conseguí hacer un reconocimiento de diversas características del contexto. La segunda fase, la denominé de profundización, pues fue en ella en la cual pude determinar diferentes maneras en que las estudiantes consiguieron aproximarse a la comprensión de la tasa de variación. A continuación describo, de manera más detallada, cada una de estas dos fases:

Fase 1: Fase de inmersión.

Conforme mencioné anteriormente, esta fase tuvo su inicio con el reconocimiento de las características del grupo de estudiantes del curso, la selección de las cuatro estudiantes y la implementación de un cuestionario el cual describo a continuación.

- **El cuestionario**

El cuestionario estuvo compuesto de cinco problemas cuyo propósito general fue identificar las principales comprensiones de los estudiantes sobre el concepto de función, particularmente, en cómo a través de algunas de sus características se pueden representar ciertos comportamientos de cantidades que covarían. Este cuestionario surgió al observar que la comprensión del concepto de la tasa de variación (media e instantánea) está involucrada en el estudio del concepto de función desde una perspectiva variacional. Por otro lado, este cuestionario se mostró bastante pertinente en la tarea de identificar los conocimientos que las estudiantes deberían tener en el nivel *primitive knowing* en el marco de la Teoría de Pirie y Kieren.

Los cinco problemas fueron presentados a las estudiantes en un documento escrito que contenía los respectivos enunciados y las preguntas abiertas, es decir, preguntas en la que los estudiantes podían describir ampliamente los procedimientos y los argumentos que encontraban en cada pregunta (ver anexo 1).Con el ánimo de aportar mayor información a los elementos que emergieron del cuestionario, realicé una sesión de trabajo grupal de dos horas en la cual pude discutir con las estudiantes sobre las respuestas que proporcionaron en el cuestionario, de esa manera pude obtener mayores evidencias sobre las respuestas ofrecidas por las estudiantes, y a través de preguntas, conseguí profundizar en las maneras en cómo estaban comprendiendo los elementos variacionales que intervinieron en el cuestionario.

Fase 2. Profundización

En esta fase se implementaron las actividades del módulo de enseñanza las cuales describiré a continuación:

- **El módulo de Enseñanza**

El módulo de enseñanza al que hago alusión en esta investigación, fue concebido como un conjunto *flexible e intencionado de estrategias* (situaciones, contextos, actividades, herramientas, diálogos-entrevistas, etc.) interrelacionadas entre sí. En este conjunto de estrategias, el diálogo continuo entre las estudiantes, y entre ellas y el investigador cumplió un papel determinante para profundizar en los modos en que las estudiantes estaban adentrándose en el proceso de comprensión de la tasa de variación. Las preguntas que iban emergiendo de la "interacción" se asemejaban, en su conjunto, a una entrevista en profundidad, en la cual el investigador pregunta a los "entrevistados" por elementos claves acerca del tema en cuestión o incluso, acerca de sus opiniones sobre un hecho o evento (Yin, 2009). Según Yin, el entrevistado debe considerarse como un "informante" más que un simple "contestador".

La característica de "flexibilidad" del módulo de enseñanza a la que hice alusión en el párrafo anterior, significa que las estrategias empleadas se iban modificando y adecuando, e incluso, permitían el surgimiento de nuevas actividades de acuerdo con los requerimientos y particularidades que fueron emergiendo a la luz de su implementación con las estudiantes.

En total, el módulo se desarrolló en cuatro sesiones de dos horas cada una. Las sesiones se describen a continuación:

Sesión 1. Rectángulo inscrito: En esta situación se usó el software GeoGebra para presentar una nueva versión del trabajo: "Rectángulo Inscrito" presentado en Villa-Ochoa y Mesa (2009) y Villa-Ochoa (2011). Para analizar la tasa de variación de las cantidades que se incluían en la situación, usé las opciones del software para construir una herramienta que permitiera la visualización dinámica de la tasa de variación media, y en la que simultáneamente intervinieran sus registros gráficos, numéricos y algebraicos. La "herramienta" construida, permitió una aproximación desde la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea mediante la determinación de intervalos de variación cada vez más pequeños. En la Ilustración 10 se recrea el ambiente en el que se desarrolló la situación "rectángulo inscrito".

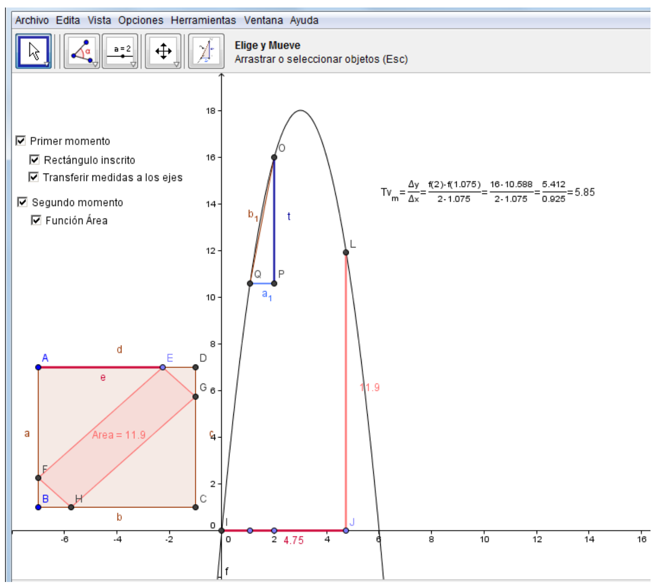


Ilustración 10. Ambiente de la situación desarrollada en la sesión 1

Sesión 2. La velocidad y la aceleración: Las actividades de esta sesión surgieron desde la necesidad que se hizo explícita en la sesión 1, en la cual las estudiantes se aproximaron a la noción de tasa de variación instantánea como el límite de la tasa de variación media, pero consideraban dicho valor como una "suposición" o inferencia y no aceptaban su existencia.

Las actividades diseñadas para esta sesión estuvieron basadas en la simulación de movimiento uniforme y acelerado a través del software "Modellus" versión 4.01. Se hizo uso de las opciones gráfico, tabla y modelo, para establecer relaciones entre la simulación del movimiento y las representaciones matemáticas de la misma. Otras gráficas se construyeron para validar las inferencias de las estudiantes con respecto a la aceleración. En la Ilustración 11 se muestra el ambiente de la simulación.

Ilustración 11. Simulación de un movimiento con el software Modellus.

Sesión 3. Análisis de la función *tasa de variación*: Para esta sesión desarrollé una “herramienta” en el software GeoGebra; con dicha herramienta se pueden observar múltiples triángulos que permiten dar la idea de la tasa de variación como una función. La herramienta fue usada para analizar el comportamiento de la tasa de variación de varias funciones. En la Ilustración 12 se muestra una de ellas.

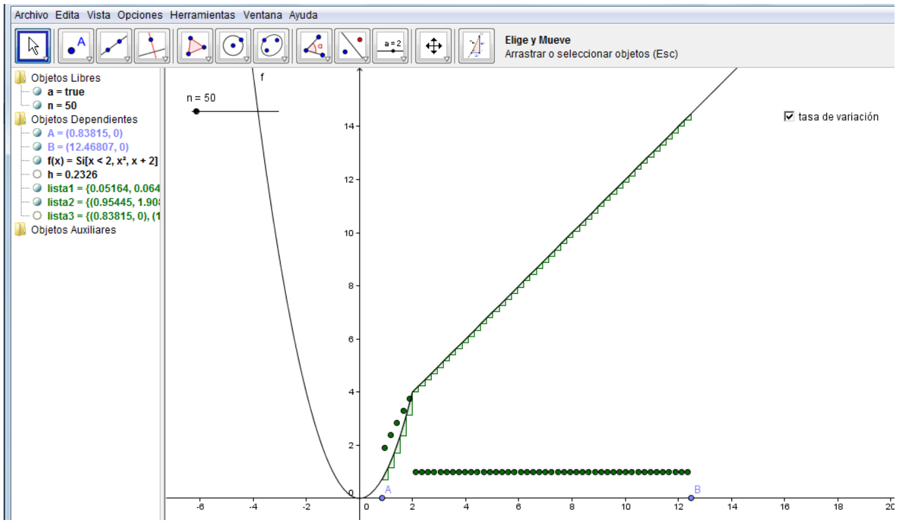


Ilustración 12. Ambiente de la herramienta para estudiar la función tasa de variación

En la ilustración anterior se tiene una función definida en dos tramos y los triángulos que se muestran se forman en el intervalo definido por los puntos A y B de acuerdo al valor del deslizador *n*. Los puntos que se muestran en la ilustración representan los valores de la tasa de variación de cada uno de los triángulos.

Sesión 4. Descarga de un archivo: En esta situación se usa la grabación de la manera en que se descarga un archivo, para indagar por la forma como las estudiantes comprenden las tasas de variación que se involucran en ella. La grabación se hizo con el software Camtasia cuando se estaba descargando un archivo de internet con el software VDownloader cuyo fin fue identificar y estudiar la "tasa de transferencia" o velocidad con la cual se descarga el archivo, así como los cambios de ésta misma (aceleración). En la Ilustración 13se presenta el ambiente de la situación.

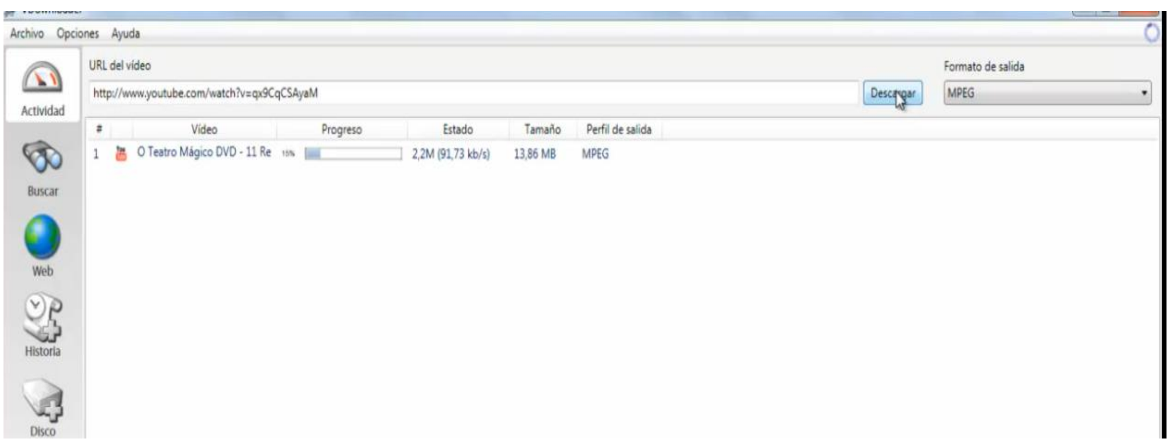


Ilustración 13. Ambiente de la situación, descarga de un archivo

En todas las etapas del módulo de enseñanza, estuve atento a las diversas manifestaciones de las estudiantes en las que dieran indicios sobre su comprensión; de ese modo, emergieron preguntas con las cuales se promovieron discusiones y socializaciones sobre las producciones de las alumnas. Las preguntas emergentes (tipo entrevista) tuvieron un papel clave para poder profundizar en la manera como ellas se adentraban en la comprensión de la tasa de variación; así mismo, para promover espacios alternativos en los cuales las estudiantes evidenciaban otros formatos para materializar sus comprensiones.

Las fuentes de información en esta segunda fase de la investigación fueron todas las producciones (orales, gestuales y escritas) de las estudiantes al enfrentarse a un *módulo de* *enseñanza*. La información fue registrada a través de diarios de campo elaborados por el investigador, los documentos escritos producidos por las estudiantes y a través de video y audio usando el software *Camtasia*; este software registraba en video todos los movimientos realizados por las estudiantes en la pantalla del computador; así mismo, el software usaba la cámara de video y el micrófono para registrar las acciones, gestos y verbalizaciones que ellas realizaban en su interacción con el módulo de enseñanza.

4.3.5 Análisis de la información

En el análisis de la información se observa la lógica a la que Yin (2009) hace referencia, y la cual permitió establecer los vínculos entre la información recogida, las proposiciones presentadas en la sección 4.3.1,y la pregunta y objetivos de esta investigación. En ese sentido, el análisis atendió a los siguientes momentos:

- ***Análisis paralelo:*** Consiste en un primer acercamiento a los datos recogidos simultáneamente a su recolección. Este tipo de análisis ha sido sugerido por Creswell, (2008)y para este estudio permitió obtener un "sentido general" de la información. En esta investigación, este análisis se realizó de la siguiente manera:

Una vez realizado el primer cuestionario, hice un primer análisis de los elementos que en él se presentaban; de esa manera, pude determinar la necesidad de realizar una sesión de trabajo grupal en la cual se profundizó en las comprensiones de las estudiantes. Del mismo modo, al finalizar cada sesión del módulo de enseñanza, revisé las anotaciones hechas durante la sesión, los videos y los documentos de las estudiantes, y basado en los elementos que surgían de dicha revisión, preparaba el material para la siguiente sesión. El trabajo y las discusiones con el colectivo de investigadores adscrito al EDUMATH fue determinante en las primeras interpretaciones y diseño de las sesiones del módulo de enseñanza.

- ***Organización del material:*** Durante todo el proceso de recolección de los datos, los documentos producidos por las estudiantes fueron duplicados y digitalizados. Así mismo, los diarios de campo, los videos y audios fueron duplicados y *agrupados por caso*, es decir, dado que las unidades de análisis declaradas para este estudio fueron las comprensiones de cada estudiante, organicé el material de acuerdo con la información presentada por cada una de las estudiantes y así poder realizar en análisis del proceso de comprensión de cada una de ellas. De esta manera se abrió el camino para realizar la categorización individual que se muestra a continuación.

- ***Categorización individual:*** Las categorías individuales fueron *a priori*, las cuales surgieron de la interpretación del marco teórico adoptado para esta investigación. En esta fase desarrolla en dos momentos, a saber:

> **Análisis inicial:** El material fue revisado con el ánimo de detectar las manifestaciones de las estudiantes que dieran cuenta del nivel de comprensión en el cual se encontraban, así como los elementos que pudieron ocasionar dicha comprensión. De este análisis pude detectar los "fragmentos" que ejemplificaban la información buscada y los organicé y codifiqué en una matriz que tuvo en cuenta los siguientes aspectos: *nombre del material* (archivo, documento, video, audio), *descripción fragmento*, y *código para identificarlo en el material* (tiempo en el que se presenta para el caso de los videos y audios; o una marca para el caso de los documentos, y diarios de campo).

> **Transcripción y categorización de segundo orden:** Una vez obtenida la matriz para cada caso, la tarea a seguir fue transcribir los fragmentos, e interpretarlos a la luz del marco teórico; de este modo de análisis emergieron tres subcategorías, a saber: *Estratos de comprensión*, *elementos involucrados en la evolución de la comprensión*, y *la relación con otros conceptos matemáticos*. Las dos primeras subcategorías están cada una en correspondencia con los objetivos de la investigación descritos en el capítulo 2 de este documento; por su parte, la tercera categoría surgió al observar cómo en el proceso de comprensión de la tasa de variación eran evocados otros conceptos matemáticos. En esta categorización se hizo una primera triangulación entre las diferentes fuentes de evidencia y la teoría de Pirie y Kieren.

- ***Estudio transversal de los casos.*** Consistió analizar los hallazgos de cada uno de los casos reportados en la *categorización individual* y confrontarlos. En dicha confrontación se detectaron dos nuevas subcategorías, a saber: *Procesos* y *dificultades*, las cuales fueron interpretadas a la luz del marco teórico y la revisión de la literatura presentada en el primer capítulo de este documento.

Finalmente, analicé las diferentes categorías (*apriori* y emergentes) con las cuales se detectaron relaciones entre ellas y se jerarquizaron entre sí. Según Creswell (2008) este tipo de análisis puede aportar al "rigor" y ofrecer nuevas ideas o "luces" al estudio.

Al confrontar las comprensiones de cada una de las estudiantes se materializó otro tipo de triangulación denominada "triangulación de casos"

- *Escritura y discusión de interpretaciones:* este momento consistió en el diseño un cuadro de categorías que daba cuenta de las jerarquías y demás relaciones entre las categorías, así mismo, este cuadro incluyó las principales inferencias y algunos ejemplos de las evidencias que las soportaban. Dicho cuadro de categorías, fue presentado y discutido con el colectivo de investigadores adscrito al EDUMATH. De las discusiones surgieron nuevos *insight* para el refinamiento, profundización y reescritura de los análisis y conclusiones.

Al realizar las confrontaciones entre las diferentes fuentes de información, y de éstas con el marco teórico y el colectivo de investigación, se pudo desarrollar la línea convergente de indagación a la que Yin (2009) hace referencia en su texto. De esta forma, hubo mayores evidencias y, por tanto, el grado de confiabilidad en las interpretaciones y resultados aumentó.

4.4 Validez y Limitaciones del estudio

Una de las críticas que frecuentemente se le hacen a los estudios de caso radica en la pregunta: ¿Hasta qué punto, los casos seleccionados son representativos de una comunidad?; pregunta que tiene su origen en la idea de generalización de los resultados a partir de una muestra, para todo un conjunto social.

En este sentido y dado que esta investigación indagó por el proceso de comprensión de un concepto particular de las matemáticas, se hizo necesario profundizar en la manera en que emergen las *imágenes*, relaciones y propiedades del concepto abordado; por tanto, los resultados deben ofrecer una explicación del desarrollo de tal comprensión; sin pretender con ello establecer algún tipo de generalización, ni extrapolación a contextos donde probablemente existan condiciones diferentes a las presentadas en esta investigación. A pesar de ello, las conclusiones de este estudio, permiten generar reflexiones y otros elementos que, tanto docentes como investigadores, puedan usar para sus diseños particulares en investigación o en el aula de clase.

Capítulo 5

5. LA COMPRESIÓN DE LA TASA DE VARIACIÓN. UNANÁLISIS DESDE LA TEORÍA DE PIRIE Y KIEREN

En este capítulo, me propongo mostrar y analizar los resultados de la investigación en la cuanto a la evolución la comprensión que desarrollaron las estudiantes de la noción de tasa de variación. Las cuatro estudiantes las he denominado con los seudónimos de Marcela, Alexandra, Estefanía y Cristina.

Conforme lo mencionado en el capítulo relativo la revisión de la literatura, la comprensión de la tasa de variación está en los cimientos de una interpretación variacional de la derivada. De igual manera, la literatura también indica que las dificultades con el concepto de tasa de variación y su vinculación al tipo de función (lineal o cuadrática) podían tener su origen en una comprensión débil del concepto de función (Orton, 1983). Partiendo de estas consideraciones, encontré necesario indagar por las comprensiones que las estudiantes tenían frente a los conceptos de función y razón, y así identificar el *Primitive Knowledge* que las estudiantes tenían para iniciar la comprensión de la tasa de variación.

5.1 El conocimiento primitivo asociado a la comprensión de la tasa de variación

La información que presento en este apartado fue obtenida de la implementación del cuestionario (ver anexo 1) y de su respectiva confrontación con una sesión de trabajo grupal desarrollada entre las estudiantes y el investigador.

A nivel general, la Tabla 5muestra los principales rasgos encontrados en las comprensiones de las estudiantes en aspectos asociados a la noción de tasa de variación en funciones. Para cada estudiante se muestran los ítems correspondientes a la situación del cuestionario; así por ejemplo, S3b, significa el ítem b de la situación 3 del cuestionario 1.

Indicadores	Marcela	Cristina	Alexandra	Estefanía
No realiza la actividad		S2b, S2c, S2e		
Verbalizaciones de correlaciones directa e inversamente proporcional		S1c, S2a, S3b	S2a, S2b, S2c,	
Percepción y/o determinación de la tasa de variación constante	S1b, S1c, S2a, S2b, S2c, S2d, S2e	S5a, S1b	S1b, S1c, S2, a, S2b, S5a, S5b	S1a, S1b, S1c, S2 a, S2e, S5a, S5b,
Percepción de la tasa de variación no constante			S2d	S2b, S2c, S2d
Percepción concavidad y los cambios en la tasa de variación			S4a, S4b	S4a, S4b

Tabla 5. Resultados globales del primer cuestionario

Estas percepciones de la tasa de variación asociadas al concepto de función se convirtieron en el ***Primitive Knowing*** que las estudiantes poseían. A continuación presentaré un análisis más detallado de estos resultados, así como su triangulación con la sesión de trabajo grupal que se hizo posterior a la aplicación del cuestionario.

5.1.1 Una comprensión cualitativa de la variación

El movimiento es un estado continuo en la naturaleza; y el intento por comprenderlo y modelarlo dio origen en la historia al concepto de función. Al respecto Aleksandrov et al. (1981) afirman que:

> Todas las cosas de la naturaleza, desde las más pequeñas partículas hasta los cuerpos de mayor masa están en un estado de eterna creación y aniquilación, en un flujo perpetuo, en un movimiento y cambio incesantes. En último término toda ciencia natural estudia algún aspecto de este movimiento. El análisis [y el concepto de función como elemento de ella] es la rama de la matemática que proporciona métodos para la investigación cuantitativa de los distintos procesos de cambio, movimiento y dependencia de una magnitud, respecto de otras (p.92).

En ese sentido parece lógico que, tanto en desde la interacción cotidiana con el movimiento como desde las experiencias en las aulas de clase, los seres humanos hayamos alcanzado cierto nivel de percepción o *sentido variacional* (Posada y Villa-Ochoa, 2006).

Las estudiantes involucradas en esta investigación identificaron ciertas correlaciones entre las cantidades que intervinieron en cada una de las situaciones propuestas en la primera fase de la investigación. Enunciados como "*a mayor tiempo más poca agua en el tanque*" en el S1 o "[…] *eso depende del tiempo transcurrido*" en el S5 se convierten en evidencia de la presencia de cierta "intuición" para el reconocimiento de covariaciones.

En el desarrollo de las diferentes actividades del cuestionario 1 prevaleció la identificación de relaciones proporcionales como una manera de describir la covariación entre cantidades. Este hecho es coherente con las respuestas proporcionadas por las cuatro estudiantes a los diferentes ítems del cuestionario que correspondían a funciones lineales. En este tipo de funciones, Alexandra, Marcela y Estefanía consiguieron ir más allá de las descripciones cualitativas que daban cuenta de la manera en cómo se relacionaban las cantidades; ellas lograron realizar algunos cálculos numéricos en los casos que eran requeridos. Cristina, por su parte, consiguió identificar relaciones proporcionales como las descritas anteriormente, pero no presentó evidencia de establecer cálculos aritméticos para justificar sus afirmaciones.

Cuando las relaciones entre las cantidades no correspondían a funciones lineales, por ejemplo en S2b y S2c, tanto Cristina y Marcela como Alexandra se limitaron a hacer afirmaciones que daban cuenta de la identificación de relaciones directa e inversa de covariación. En los ítems S2b y S2c se indagaba por relaciones de tipo cuadrático; en ellos, las estudiantes respondieron con enunciados como: "*para que el volumen se triplique es necesario que el radio también se triplique",* o, "*si el radio se duplica, la altura debe reducirse a la mitad para que el volumen permanezca constante"*, los cuales muestran un predominio de la variación proporcional, aún, en situaciones donde no tiene pueden aplicarse estas nociones. Este resultado sugiere que las estudiantes al abordar la pregunta centraron su atención en los aspectos de la situación que cambian y en una aproximación cualitativa para describir cómo cambia. En esta parte del desarrollo de las actividades no hubo indicios de que las estudiantes intentaran cuantificar aspectos asociados a la covariación.

Contrario a sus compañeras, Estefanía se apoyó en la expresión algebraica del *volumen* (S2) para asignar valores numéricos a las variables que en ella intervienen y, así, analizar la relación entre el volumen y el radio del cilindro. Esta manera de analizar el problema le permitió a Estefanía observar que la tasa de variación entre el volumen y el radio estaba cambiando. Sus respuestas a los ítems preguntas S2b y S2c estuvieron enfocadas en ejemplo particulares como: "*El radio debe aumentar* 1 *y* ½ =3/2" y "*La altura debe pasar de* 4 *a* 1*"*. Sin embargo, esta estudiante no alcanzó a establecer proposiciones generales sobre el comportamiento global de la variación entre tales cantidades, ni de la manera en cómo estaban variando.

Con las preguntas S2d y S2e me propuse indagar por la manera cómo las participantes representaban gráficamente la relación entre el volumen y el radio del cilindro. Los gráficos que construyeron Alexandra, Estefanía y Marcela (Cristina no los realizó) dan cuenta de una diversidad de maneras de abordar la situación y, por tanto, de comprender la correlación entre las cantidades.

Marcela esboza tanto para S2d como para S2e líneas rectas con pendiente positiva lo que confirma que ella continua asociando las relaciones entre las cantidades involucradas en el volumen a comportamientos proporcionales. En los casos de Alexandra y Estefanía se encontró una gráfica curva cóncava hacia arriba, representando la relación entre el volumen y el radio cuando la altura es constante. Las gráficas elaboradas por dichas estudiantes se presentan en la Ilustración 14 (a) y (b) respectivamente.

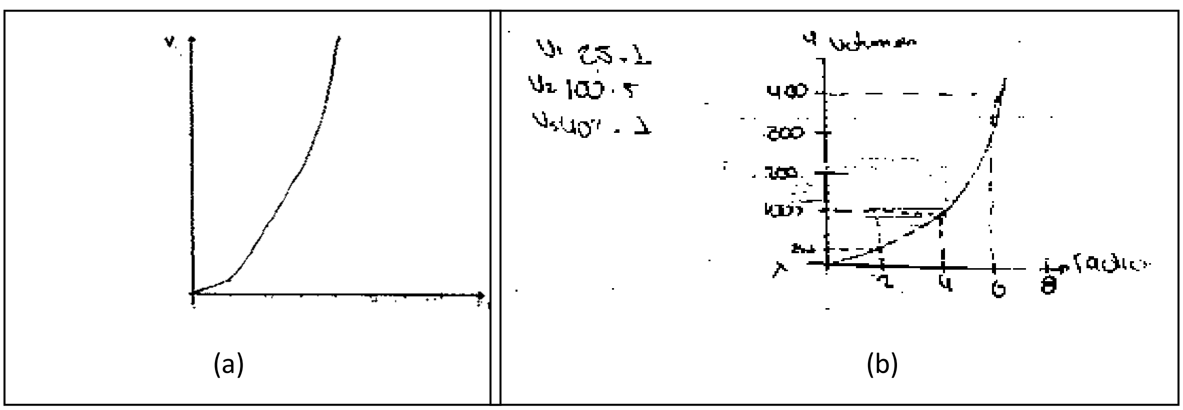


Ilustración 14. Gráfico de la relación entre volumen y radio de un cilindro por Alexandra y Estefanía

A pesar de que Alexandra y Estefanía presentaron gráficos similares, una mirada a la manera cómo los construyeron y a sus argumentaciones dan cuenta de comprensiones diferentes. A continuación analizo cada una de estas dos maneras de construir sus gráficas.

La comprensión de variaciones no lineales en Alexandra y Estefanía

Desde un primer acercamiento a la información proporcionada por Alexandra, parecía no haber correspondencia entre las relaciones que la estudiante representó a nivel escrito y los gráficos que produjo; puesto que, a nivel verbal, la estudiante observa relaciones de proporcionalidad directa (lineal) pero en la gráfica cartesiana parece representar a una relación cuadrática (Ver S2b y S2d en la Tabla 5).

Aparentemente Alexandra podría haber comparado V y r^2 y no V y r como se le solicitaba en la actividad, esta idea surgió del registro algebraico que la estudiante hizo en ese ítem $(3r^2)$; sin embargo, esta consideración se descartó posteriormente cuando en el ítem S2c, que indagaba por la relación inversa entre el radio y la altura, la estudiante respondió que al duplicarse el radio la altura tenía que disminuirse a la mitad $(\frac{1}{2}H)$. Contrario a lo expresado por escrito, Alexandra comenzó a graficar una línea recta, pero ligeramente se dio cuenta que la relación entre el radio y el volumen no era lineal y, por tanto, trazó una la curva cóncava hacia arriba (Ilustración 14(a)).

Tanto en la respuesta al cuestionario como en la sesión grupal, Estefanía evidenció haberse apoyado en un conjunto de cálculos numéricos con los cuales determinó tres puntos del gráfico y trazó la curva "suave" que pasara por ellos. Se observa que su manera cuantitativa se convirtió en un apoyo para desvirtuar la idea de linealidad y proporcionalidad de los datos; sin embargo, por medio de la sesión grupal fue posible confirmar que la construcción de la gráfica correspondió a la ubicación de puntos coordenados y no a un reconocimiento de la tasa de variación que en ella se involucra.

Para profundizar en las comprensiones de las estudiantes, desarrollé una sesión de trabajo en la que participaron las cuatro estudiantes y el investigador. A continuación describo el episodio en el cual Alexandra y el investigador generan un diálogo con base en la gráfica construida por esta estudiante (Ilustración 14(a)).

Investigador	:	*Bueno, vamos a hablar un poco sobre el trabajo del cilindro, ¿lo recuerdas?*
Alexandra	:	*Si*
Investigador	:	*¿Recuerdas tu gráfica?*
Alexandra	:	[la estudiante observa el documento]*Si*

Investigador	:	*¿De dónde salió ese gráfico?*
Alexandra	:	*Pues era volumen sobre el radio, ¿cierto? entonces,… yo dije que así, porque el radio es al cuadrado; entonces yo despejé, uhmmmm espere yo veo.*
Investigador	:	*Porque yo veo que hiciste un intento de hacer un segmentico, una recta.*
Alexandra	:	*Si, un poquito! es que intenté que me quedara como coherente, uhmmm*
Investigador	:	*¿Cómo una recta?*
Alexandra	:	*Si*
Investigador	:	*¿Qué viste en el problema que…*[la estudiante no dejó terminar la pregunta y paralelo al profesor respondió lo que sigue en la siguiente línea]
Alexandra	:	*Porque al… al radio aumentar al cuadrado no me daba algo como para crecer así* [dibuja en el tablero un segmento de recta oblicuo con centro en el origen de un eje coordenado]

En este diálogo, Alexandra expresa que inicialmente pretendía graficar una recta para ser coherente con sus interpretaciones proporcionales previas, pero al detallar la expresión algebraica, ella observó una relación cuadrática y por tanto, dibujó una curva. A pesar del reconocimiento de esta relación cuadrática, la estudiante no corrigió las descripciones proporcionales que había presentado en los ítems anteriores, con lo cual se observa como ciertos "juicios contradictorios" pueden hacer presencia en una misma situación a través de dos sistemas de representación diferente. Analizar una situación a través de la descripción cualitativa de las relaciones proporcionales fue el "procedimiento" que, en las estudiantes, se mostró predominante para iniciar el estudio de las demás de variación implicadas en este estudio.

Este resultado es coherente con la experiencia que las estudiantes obtuvieron en el desarrollo del curso "matemáticas operativas" en el que la proporcionalidad fue la única temática que se desarrolló haciendo énfasis en las relaciones variacionales; pues, gran parte de las temáticas del curso estuvieron enfocadas al desarrollo de habilidades de tipo procedimental.

5.1.2 Noción de razón y tasa de variación promedio

Las nociones de razón y tasa de variación promedio hicieron presencia de manera no homogénea en las comprensiones de las estudiantes; es decir, a través de sus respuestas se puedo observar una diversidad de aproximaciones a estas nociones.

Cristina por ejemplo no consiguió reconocer la noción de razón ni de tasa de variación en la situación 1 (cuestionario 1), esto se evidencia en las respuestas que presentó en los ítems S1b y S1c. En el primero de ellos, la estudiante escribió: "*el tanque* 2 *está derramando mayor cantidad de agua por unidad de tiempo";* sin embargo, esta respuesta parece no obedecer al reconocimiento de alguna característica de la variación en el gráfico, pues por un lado, es el tanque 1 quien tiene la mayor tasa de variación en el gráfico de S1 y, por otro lado, la pregunta presentada en S1c indagaba por el reconocimiento de la tasa de variación en cada tanque a lo que la estudiante respondió : "*a mayor volumen mayor agua se derrama y a mayor tiempo más agua se derrama"*. Esta respuesta puede considerarse como una descripción cualitativa que no corresponde con la pregunta formulada. Así mismo, en S5 la estudiante sólo se limitó a describir la cantidad de Kb al tiempo, pero no los relacionó con la velocidad, a pesar que la situación lo solicitaba de manera explícita. En la sesión grupal, el investigador solicitó a Cristina describir el comportamiento de los dos archivos. Durante el diálogo, el investigador le formuló las preguntas: *¿Entre el* 5*seg y* 6 *seg, qué pasa en el archivo A? ¿Cuánto descarga?*, la estudiante responde "60 *kb*". Después de interactuar con sus compañeras Cristina corrige su respuesta y dice "70 *kb*". Ante su respuesta, el investigador replica *¿en cuánto tiempo?* A lo que la estudiante responde "*70 kilobytes en* 1 *segundo*" A pesar que esta declaración de la estudiante es consistente con una representación retórica de la tasa de variación, no puede catalogarse como una manera de interpretar dicho concepto, pues la estudiante sólo está describiendo dos cantidades como respuesta a las dos preguntas hechas por el investigador y no como una razón, ni como una "nueva" cantidad de magnitud (velocidad de descarga) que emerge de la comparación de la cantidad de Kb descargados por unidad de tiempo.

Por su parte, Marcela, Alexandra y Estefanía presentaron diferentes aproximaciones a la tasa de variación; por ejemplo, Marcela preguntó en el ítem S1c por el significado de la palabra razón, y, al igual que Alexandra, en la S1 del primer cuestionario la estudiante calculó las tasas de variación (de los gráficos lineales) usando los extremos de los segmentos allí representados; una muestra de ello se observa en que, para el tanque 2, Marcela y Alexandra representaron la tasa de variación con la fracción $\frac{4}{12}$ y, posteriormente en la sesión grupal, se determinó que dicha fracción se calculó a través de la lectura de los puntos (0,4) y (12,0) que hacían parte de los extremos del segmento que representa el comportamiento de dicho tanque. No hubo registro de una fracción más simplificada ni de las unidades correspondientes a las cantidades de magnitud, que intervienen en esa situación.

Estefanía, por su parte, presentó las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$ para describir las tasas de variación de los tanques T1 y T2 respectivamente. Según lo expresó verbalmente en la sesión grupal, Estefanía trazó líneas horizontales y verticales que convergía en puntos de las gráficas para calcular dichas tasas de variación.

En la situación 5 del primer cuestionario, Estefanía, Alexandra y Marcela calcularon las tasas de variación como una manera de interpretar la "velocidad con la que se descarga un archivo". Dado que dos datos estaban presentados en un registro tabular, predominó el cálculo de dichas tasas a través del cociente de diferencias en cada intervalo (1 seg). Sin embargo, no dieron ningún indicio que permitiera comparar dichas velocidades para dar cuenta de la "manera" como se estaban descargando en general los archivos.

En estas tres estudiantes, la tasa de variación promedio aparece como una nueva *"cantidad de magnitud"* la cual puede compararse entre sí; enunciados como "*del segundo 2 al 7 los archivos se descargaron a la misma rapidez, al igual que del segundo 8 al 9"* se convierten en evidencia de este hecho.

Con excepción de Cristina, las estudiantes interpretan tasa de variación (velocidad de descarga, o tasa de transferencia) se observa como un "resultado" que surge en la comparación dos estados (inicial y final) y cuantificado a través del cociente de diferencias; sin embargo, la preocupación por lo que puede o no decir dicha tasa sobre el comportamiento al interior del intervalo no apareció de manera explícita en las comprensiones de estas estudiantes.

En ausencia de gráficos cartesianos, la tasa de variación promedio parece interpretarse como una constante en todo el interior del intervalo, una muestra de ello, se observa en el siguiente diálogo retomado de la sesión grupal:

Investigador	:	*¿Qué quiere decir* 50 *kb/seg acá?*[refiriéndose al intervalo entre 1 seg y 2 seg del archivo A]
Estefanía	:	*Quiere decir que baja 50 kilobytes en cada segundo*
Investigador	:	*¿En dónde?*
Alexandra	:	*En todo ese segundo*
Marcela	:	*Ahí dentro*
Investigador	:	*O sea ¿en cualquier fracción de segundo entre 1 y 2?*
Simultáneamente las tres estudiantes responden	:	*Si*

Sin embargo, en presencia de gráficos cartesianos dicha interpretación cambia como puede observarse en el siguiente episodio:

Investigador	:	*¿Cómo identificaron las velocidades en el problema de los tanques?*[S1del cuestionario 1]
Alexandra	:	*Por ejemplo yo hice como la relación entre el volumen y el tiempo y puse uno sobre el otro, en el tanque 1 yo dije que la relación era ocho sobre seis*
Investigador	:	*Ahhhja,¿por qué ocho sobre seis?*
Alexandra	:	*Porque en ocho,…, pues al llenar ocho metros cúbicos…*
Estefanía	:	*Seis hora*
Marcela	:	*Se vaciaba*
Alexandra	:	*Sí, seis hora*

En este momento el investigador ejemplifica en el tablero lo que Alexandra expresó dibujando un gráfico cartesiano, ubicando los puntos (0,8) y (6,0) y trazando la recta. Posteriormente el investigador traza una curva cóncava hacia abajo con extremo en los mismos puntos y pregunta:

Investigador	:	*Entonces acá* [en el gráfico]*¿cuál sería esa velocidad?*
Alexandra	:	*Uhhh, ya tendríamos que mirar cada, mmmm, cada…*
Marcela	:	*Intervalo*
Alexandra	:	*Intervalo* [confirmando lo expresado por Marcela]
Investigador	:	*Por qué cada intervalo? ¿Cómo lo harías?*

En este momento, Alexandra intenta describir, con algo de inseguridad, un procedimiento que consistió en trazar líneas horizontales por cada número natural entre cero y ocho el eje de las ordenas (y). Este episodio evidencia que los gráficos cartesianos proporcionaron una visualización que permitió llamar la atención sobre las diferentes maneras como puede ocurrir la variación al interior de un intervalo, y que no siempre se puede inferir con la determinación de la tasa de variación media.

Los resultados de este apartado muestran entonces las diferentes maneras cómo la tasa de variación apareció en las comprensiones de las estudiantes; particularmente, se observó que verbalizaciones como "*4metros por 3segundo*" no necesariamente se están refiriendo a una razón, sino que puede aludir a un conteo o descripción de datos en cuyo caso sería interpretación estática, puesto que no está relacionando la manera cómo covarían dos cantidades de magnitud. Se observa la necesidad de que Cristina avance hacia el reconocimiento de la razónla fracción y el reconocimiento de una "unidad" en la comparación de dichas cantidades de magnitud.

Hubo otras formas de interpretación de la tasa de variación, la cual está relacionada con una generalización de dicho concepto a un comportamiento "uniforme" en un intervalo a partir de su cálculo usando los extremos de éste. Se hizo necesario promover actividades en las que las estudiantes interpretaran la tasa de variación media como un "valor relativo", es decir, un dato que proporciona cierta información sobre la manera como covarian las cantidades de magnitud, pero no siempre determina el comportamiento "absoluto" en el interior del intervalo.

En la siguiente tabla, resumo las principales características del conocimiento primitivo de las cuatro estudiantes implicadas en este estudio:

	Cristina	Estefania	Marcela	Alexandra
El concepto de variable	Reconoce los símbolos que corresponden a las variables una expresión algebraica.	Identifica cambios en las variables y las representa a través de la operación diferencia. Representa mediante símbolos, el cambio de algunas cantidades de magnitud variables.	Identifica cambios en las variables y las representa a través de la operación diferencia. Reconoce que la variación puede ser representada por variables en que posteriormente se relacionan a través de funciones.	Identifica cambios en las variables y las representa a través de la operación diferencia. Representa mediante simbolos, el cambio de algunas cantidades de magnitud variables.
Concepto de función	Identifica las cantidades que se involucran en una situación. Interpreta los ejes y los puntos de coordenadas. Observa cualitativamente la correlaciones entre dos variables. Describe algunas tendencias entre las variables.	Analiza las expresiones algebraicas mediante valores numéricos para determinar tendencias en el comportamiento de la función. Explica algunos hechos o fenómenos a patir de la representación gráfica de los mismos. Analiza algunos comportamientos en las funciones a través de los valores puntuales en ellos.	Establece conexiones entre comportamientos de correlación directa e inversa en funciones con comportamientos proporcioanles en la misma. Explica algunos hechos o fenómenos a patir de la representación gráfica de los mismos.	Usa e interpreta la representación gráfica para describir comportamientos de covariación. Establece conexiones entre comportamientos de correlación directa e inversa en funciones con comportamientos proporcioanles en la misma. Explica algunos hechos o fenómenos a patir de la representación gráfica de los mismos.
Tasa de	Usa la tasa de variación constante para describir	Reconoce la tasa de variación constante en las represetaciones gráfica y tabular de funciones	Determina la tasa de variación únicamente como el cociente de diferencias entre los extremos	Reconoce la tasa de variación constante en relaciones lineales entre cantidades de magnitud y la

variacion promedio constante	algunos comportamientos entre las variables; sin embargo, no alcanza a determinarla cuando no se presenta de manera explícita en un enunciado.	lineales. Usa la tasa de variación constante para describir comportamientos entre las variables que interviene en una situación. Interpreta la tasa de variación promedio como un resultado que da cuenta del comportamiento global de las cantidades de magnutud en un intervalo. Reconoce la tasa de variación como la rapidez en contextos en los cuales esta cantidad de magnitud tiene sentido.	de un intervalo. Reconoce la tasa de variación constante en las represetaciones gráfica y tabular de funciones. Usa la tasa de variación constante para describir comportamientos entre las variables que interviene en una situación. Interpreta la tasa de variación promedio como un resultado que da cuenta del comportamiento global de las cantidades de magnitud en un intervalo.	usa para describir algunos comportamientos entre ellas. Interpreta la tasa de variación promedio como un resultado que da cuenta del comportamiento global de las cantidades de magnutud en un intervalo. Reconoce la tasa de variación como la rapidez en contextos en los cuales esta cantidad de magnitud tiene sentido.
Tasa de variación promedio no constante	No reconoce la tasa de variación en situaciones en las cuales ella varía.	Reconoce que en algunas situaciones la tasa de variación no es constante y por tanto, las gráficas corresponden a funciones no lineales.	No reconoce la tasa de variación en situaciones en las cuales ella varía.	Reconoce que en algunas situaciones la tasa de variación no es constante y asocia esta caracteristica con el hecho que las gráficas sean funciones no lineales.

Tabla 6. Características del conocimiento primitivo de las estudiantes

5.2 La comprensión de la tasa de variación. Unos primeros pasos en su evolución

En el último diálogo descrito en el apartado anterior, presenté la discusión que surgió en el grupo frente a la manera cómo podría describirse la velocidad (tasa de variación) en una gráfica cartesiana cóncava hacia abajo con extremos en los puntos (0,8) y (6,0). Dicha pregunta exigió que las estudiantes analizaran de alguna manera las gráficas. Alexandra inició su estudio marcando en cada uno de los ejes los puntos que representaría los números naturales entre 0 y 6 para el eje *x*, y entre 0 y 8 para el eje *y*. Partiendo de los valores marcados sobre el eje de las ordenadas, Alexandra trazó líneas horizontales que unen los extremos de los intervalos con puntos de la gráfica tal y como se muestran en la Ilustración 15.

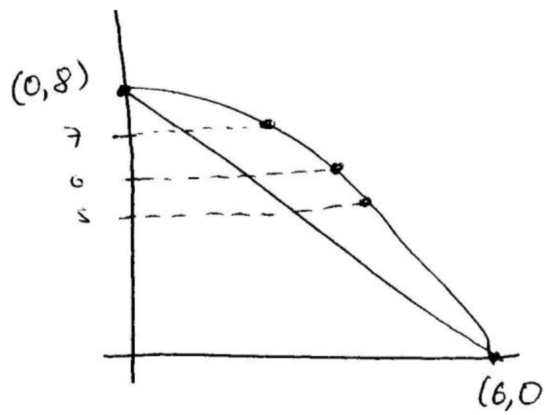


Ilustración 15. Comparación entre la variación lineal y no lineal

La pregunta reiterada del investigador por la tasa de variación, suscitó en las estudiantes una estimación de los valores de *x* que correspondería a cada valor de *y* marcado en la gráfica. Por ejemplo, Alexandra decía *"en siete está más o menos en tres, o sea que bajó uno en tres minutos*" y luego *"en seis está más o en cuatro punto cinco, o sea que bajó uno en un minuto y medio"*

En las verbalizaciones de Alexandra, pude observar que ella hace estimaciones de algunos valores para señalar la manera cómo se derrama el agua en el tanque, dependiendo de la variable tiempo. Posteriormente, con la ayuda de sus compañeras, Alexandra comienza a trazar algunas líneas paralelas y unos triángulos sobre la gráfica anterior (ver Ilustración 16) con la cual las estudiantes observaron que la tasa de variación decrecía pero no de manera constante.

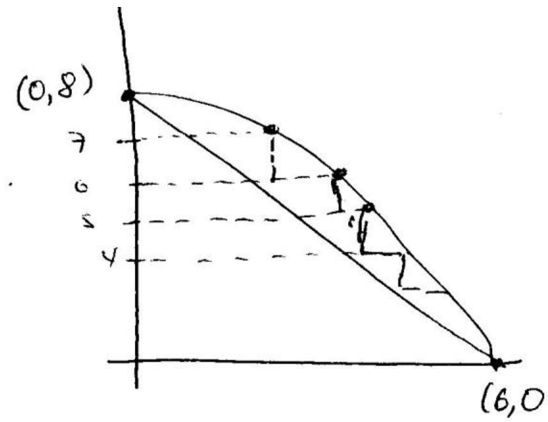


Ilustración 16. Procedimiento para describir la tasa de variación en funciones no lineales

Con base en el "procedimiento", Alexandra y Estefanía encontraron en la tasa de variación una manera para explicar que el comportamiento de las cantidades involucradas en el gráfico no eran directamente proporcionales; sin embargo, no alcanzaron a establecer alguna regularidad en la manera cómo cambia la tasa de variación, ni relacionarla con la gráfica.

El trazo de segmentos paralelos a los ejes, la lectura de los valores en los puntos de corte y la comparación de dichos valores, fueron elementos que caracterizaron el procedimiento que desarrollaron Alexandra y Estefanía para intentar describir el comportamiento de la tasa de variación en gráfico de funciones no lineales. Este procedimiento rápidamente fue asumido también por sus otras dos compañeras, convirtiéndose en el punto de partida para el análisis del comportamiento de la tasa de variación. Estas acciones realizadas por Alexandra y Estefanía se observan como un intento de formarse una idea de la noción de tasa de variación para en gráficos de funciones no lineales, y de esta manera, también se convierten en un primer paso en la evolución hacia el estrato *Image Making* de la comprensión de la tasa de variación conforme ha descrito por la Teoría de Pirie y Kieren. Este primer momento, la comprensión de un concepto se genera cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto (Thom y Pirie, 2006). Para Pirie y Kieren (1994) en este segundo estrato, el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este estrato involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos.

En el estudio de una situación posterior, el investigador retomó el procedimiento descrito anteriormente y fue reorientado para hacer énfasis en los triángulos que pueden construirse, y en la interpretación de la tasa de variación como la razón entre dicho segmentos. Una imagen de este procedimiento ya fue presentado en la Ilustración 1de este documento y discutido en Villa-Ochoa y Mesa (2009) y Villa-Ochoa (2011).

En las descripciones anteriores puede observarse que, a través la pregunta por el comportamiento de la tasa de variación en un gráfico no lineal, las estudiantes se comprometieron en buscar estrategias con las cuales fueron capaces de hacer distinciones entre la tasa de variación en funciones lineales y no lineales (Estrato IM), llegando finalmente a la construcción de la *imagen*, la cual se hizo evidente cuando las estudiantes afirmaban que la *tasa de variación en funciones no lineales no se comporta de manera constante* (Estrato IH). Según Pirie y Kieren (1994), estas imágenes le permiten al estudiante reconocer propiedades globales de los objetos matemáticos.

A pesar de que Alexandra había observado tipos de variación diferente a la lineal y había desarrollado un procedimiento para estudiar el comportamiento de la tasa de variación, la nociones de proporcionalidad directa e inversa seguían emergiendo, como una manera de describir la correlación directa o inversa entre cantidades. En la Ilustración 18(b), se presenta de manera diagramática la evolución de la comprensión de Alexandra en los niveles iniciales, y particularmente, se muestra el primer *folding back* producido por el "*llamado*" recurrente de las nociones de proporcionalidad[7]. Este hecho también se presentó en la primera situación (rectángulo inscrito) en donde el investigador sugirió a las estudiantes que desplazaran el punto E a lo largo del lado AD del cuadrado ABCD (ver Ilustración 17).

[7] En el apartado 5.6 mostraré cómo en varias oportunidades, las estudiantes, en particular Alexandra, realiza *folding backs* hacia nociones de la proporcionalidad.

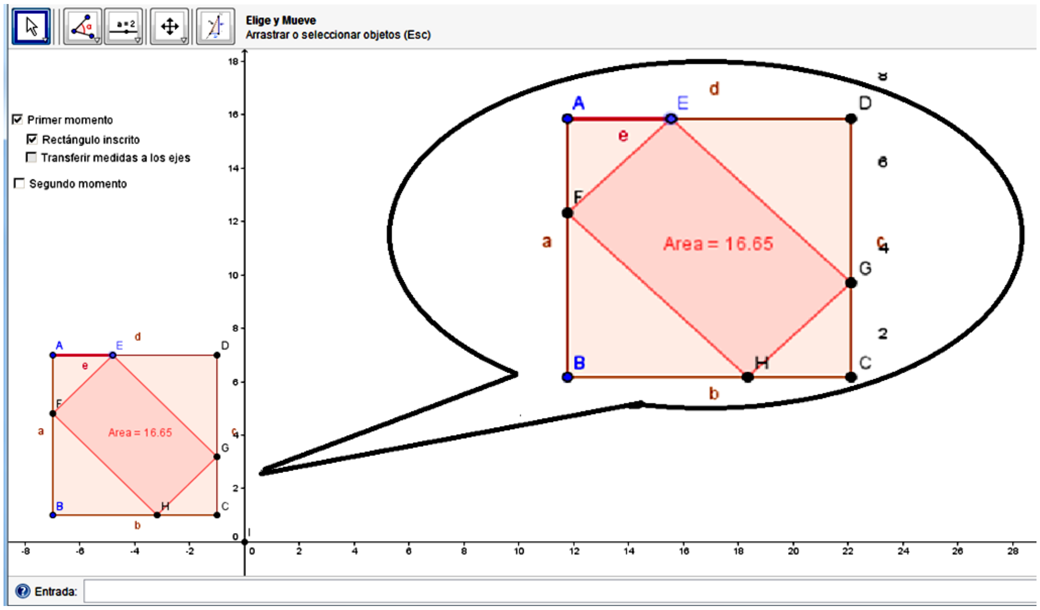


Ilustración 17. Momento 1 de la situación "Rectángulo inscrito"

Partiendo de esta experimentación, se generó el siguiente diálogo.

Investigador : *¿Cuáles cantidades interviene en la situación?*
Alexandra : *El área de las figuras, la medidas de los lados*
Investigador : *Y ¿cuáles de ellas cambian?*
Simultáneamente Cristina y Alexandra : *El área*
Investigador : *¿Cuál área?*
Cristina : *La de adentro* [refiriéndose al área del rectángulo inscrito]
Investigador : *Y ¿de qué depende esa área?*

Simultáneamente las estudiantes respondieron a esta pregunta:

Estefanía : *Del punto E*
Cristina : *De donde esté E*
Alexandra : *Del segmento* [refiriéndose al segmento AE]
Marcela : *De E*

El diálogo continuó en los siguientes términos:

Investigador : *¿Cómo es esa dependencia?*[hubo un momento de silencio que indicó que las estudiantes no habían comprendido la pregunta], *Pues, ¿cómo cambian estas dos cantidades?*
Alexandra : *Cuando el segmento aumenta, el área aumenta*

Investigador	:	*¿Siempre aumenta?*
Alexandra	:	*Siiii,¿nooo?*[el tono de la voz reflejaba duda]
Cristina	:	*No, solo hasta la mitad*
Investigador	:	*Y ¿qué pasa en la mitad?*
Cristina	:	*Baja de nuevo*
Investigador	:	*Entonces, ¿cómo es el comportamiento de esas dos cantidades?*
Alexandra	:	*Directa e inversamente proporcionales* [con una de sus manos realiza un gesto de cómo sería la gráfica, representado una especie de "V" invertida]
Investigador	:	*¿Están seguras?*

Ante esta pregunta hubo un momento de silencio, ninguna de las estudiantes se atrevió confirmar lo que decía Alexandra, pues la pregunta del profesor, les trasmitía que algo de lo que dicha estudiante había afirmado no era cierto. De nuevo, en este aspecto hubo un *folding back* en las cuatro estudiantes, aunque en esta oportunidad fue producido por diferentes fuentes, pues para el caso de Alexandra, este redoblado fue producto de las "imágenes arraigadas" de la proporcionalidad como la principal manera de describir la correlación directa e inversa (*auto-invocado*, Martin, 2008) y para el caso de Marcela, Cristina y Estefanía, fue un *folding back no intencional producida por un colega*(Martin, 2008). La Ilustración 18muestra el *folding back*exibido por las estudiantes que fue dirigido hacia las imágenes construidas previamente sobre la proporcionalidad.

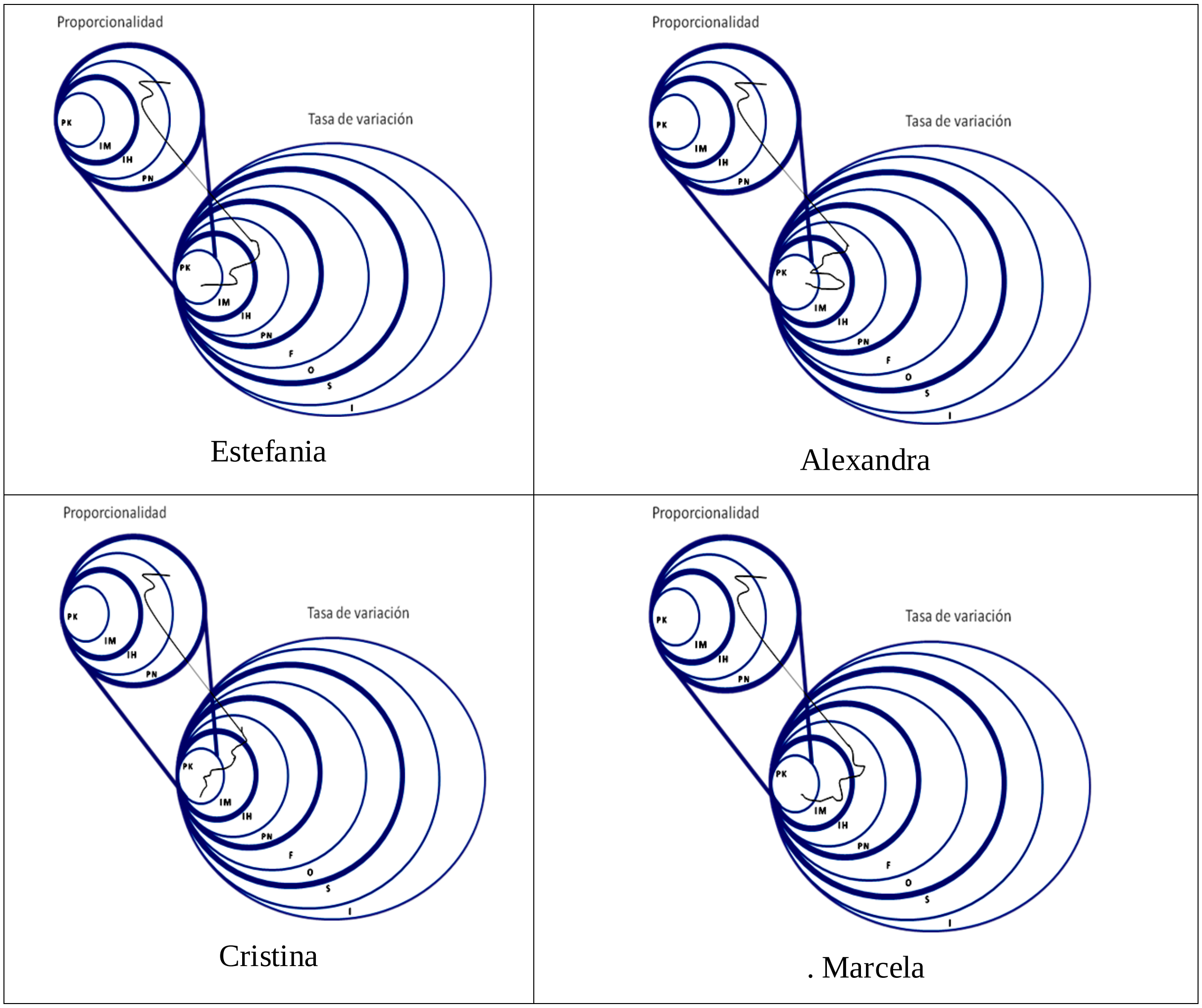


Ilustración 18. Evolución inicial de la comprensión en los estudiantes

Ante esta situación, el investigador propuso a las estudiantes que activaran la opción *“transferir medidas a los ejes”*. Dicha opción representa sobre eje de las abscisas la medida del segmento AE, en las ordenadas presenta el área, y el punto L representa el punto de coordenadas de estos dos valores. Tal punto L deja “rastro” a medida que se desplaza el punto E (Ver **Ilustración 19**).

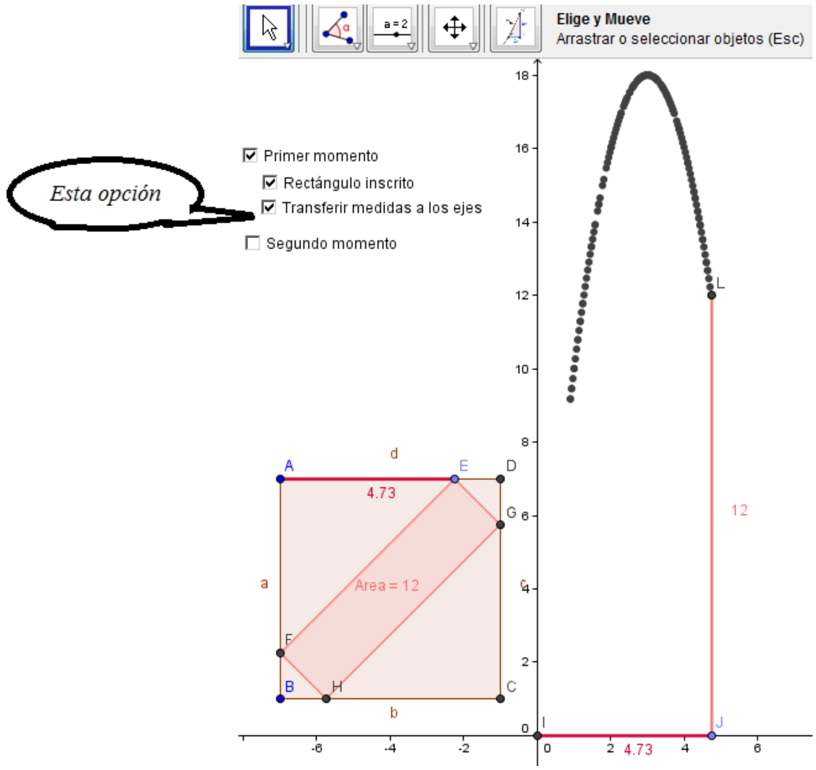


Ilustración 19. Transferencia de medidas a los ejes en la situación 1

En el momento que las estudiantes observan la secuencia de puntos obtenida por el rastro del punto L, de inmediato tanto Alexandra como Estefanía afirman rotundamente que es "*una cuadrática*". Ante esta afirmación, el investigador solicita argumentos del porqué de una función cuadrática, para lo cual Cristina se apoya en la forma de la gráfica y Estefanía en el hecho que la gráfica representa la función área y que, como tal, debe ser una cuadrática. Ante ello, el investigador sugiere el reconocimiento de las variables y les solicita usen el rectángulo para determinar la expresión algebraica del área. Nociones del teorema de Pitágoras, variables, área, entre otros; surgieron sin ningún tipo de inconveniente para determinar que la expresión del área está dada por la expresión $A(x) = 2x(6-x)$.

Una vez confirmado que la función correspondía a una cuadrática, el investigador retoma la discusión sobre la proporcionalidad, generándose el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Entonces, ¿sí es directamente proporcional?*
Marcela	:	*No,*
Investigador	:	*¿Por qué?*

Simultáneamente, responden Marcela y Alexandra

Marcela	:	*Porque no es lineal*
Alexandra	:	*Porque es cuadrática*
Investigador	:	*Entonces ¿cómo analizamos la tasa de variación?*
Alexandra	:	*Con los triangulitos de la última vez* [refiriéndose al procedimiento descrito en la sesión anterior]

Según lo descrito anteriormente, las estudiantes, a pesar de encontrarse en el estrato 3 (IH), evocaron de nuevo algunos elementos del estrato 1(*Primitive Knowing*). En el caso de Alexandra, estos elementos surgen como manifestación de un aprendizaje que la estudiante tienen de la proporcionalidad y que se muestra como "arraigado" y como producto de una sobre-generalización o extensión a campos en el cual no es aplicable (Villa-Ochoa, Jaramillo, & Esteban, 2011).

Para el caso de este *folding back*, el conocimiento que emergió ("arraigado" y "sobre-generalizado" de la proporcionalidad) se mostró como un conocimiento limitaba la comprensión de la tasa de variación y, por tanto, requería ser abordado y modificado, permitiendo así una avance en la comprensión de la noción en mención. Estos elementos, confirman una vez más lo que Cavey y Berenson (2005) puntualizan acerca de la naturaleza compleja del proceso del *folding back* señalando, que no todos los actos de redoblado son necesariamente efectivos para la extensión de la comprensión matemática y que, por tanto, la efectividad del redoblado depende tanto de la estructura del contexto como del estudiante.

Cabe anotar que el "procedimiento de triángulos" para estudiar el comportamiento de la noción de tasa de variación, que se había introducido con anterioridad, se desarrolló en un ambiente gráfico. Dicho procedimiento surgió ante la necesidad de describir algunas características de esta noción en funciones no lineales. En el caso del episodio descrito anteriormente, tanto Alexandra como sus compañeras estaban estudiando algunos comportamientos presentados entre cantidades de una situación de movimiento particular, y solo hasta cuando el software sugirió un ambiente gráfico (no lineal), Alexandra consiguió evocar nuevamente dicho "procedimiento de triángulos" y revertir sus argumentos a favor de la proporcionalidad.

5.3 La tasa de variación media como razón aritmética

Continuando en la situación “rectángulo inscrito”, el investigador introdujo la herramienta “*tasa de variación en intervalo*” la cual fue diseñada de tal manera que promoviera la comprensión de las estudiantes a través de un ambiente que combinara las representaciones gráficas y numéricas.

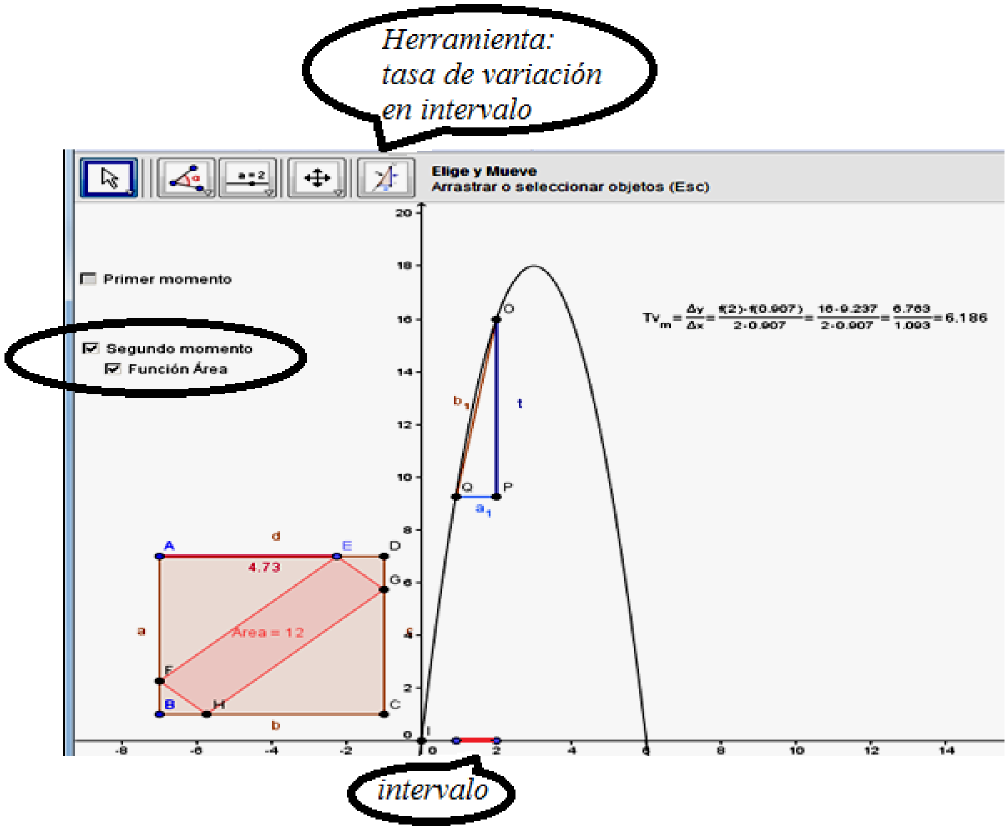


Ilustración 20. Segundo momento de la situación “rectángulo inscrito”

Conforme se muestra en la Ilustración 20, la herramienta *“tasa de variación en intervalo”* fue diseñada de tal manera que permitiera trazar un triángulo rectángulo que describiera la tasa de variación en un intervalo dado. De igual manera, la herramienta muestra el “texto dinámico” en el cual se registran los valores de cociente incremental a medida que se cambian los extremos del intervalo.

Las estudiantes se comprometieron en esta actividad y consiguieron usar la herramienta “*tasa de variación en intervalo*” para determinar el valor de la tasa de variación en tantos intervalos como preguntas hacia el investigador; sin embargo, no alcanzaron a determinar regularidades entre dichos valores. Estas acciones confirman nuevamente que las estudiantes avanzaron nuevamente hacia el estrato 2 (IM); y a su vez, condujeron a la construcción de una *imagen* de la tasa de variación como el resultado proporcionado por el software de una división entre "valores" del área y valores respectivos del segmento; en este sentido, las estudiantes parecían estar coordinando el movimiento del segmento en el contexto dinámico del rectángulo inscrito con los valores numéricos proporcionados por el software en la expresión Tv_m (ver Ilustración 21). Para ilustrar esta aserción presento el siguiente diálogo:

Investigador	:	*¿Cuál es la tasa de variación entre uno y dos?*
Cristina y Alexandra	:	*Seis*
Investigador	:	*Y ¿entre tres y cinco?*

Las estudiantes comenzaron a mover los puntos en el eje *x* hasta ubicarlos respectivamente en tres y cinco. A su debido tiempo las estudiantes ofrecieron la respuesta: *-4*

Investigador	:	*¿Por qué menos cuatro?*
Marcela	:	*Porque eso da la división*
Investigador	:	*¿La división de qué?*
Marcela	:	*De lo que cambia el área y el segmento*
Investigador	:	*¿Qué dicen ustedes?*[preguntando al equipo formado por Estefanía y Alexandra]
Estefanía	:	*Pues sí, de la división*
Alexandra	:	*¿No profe?*

Conforme fue confirmado posteriormente en la entrevista individual, las estudiantes no habían alcanzado a coordinar los valores numéricos de la expresión (Tv_m) con los cambios en los segmentos del triángulo (ver Ilustración 21).

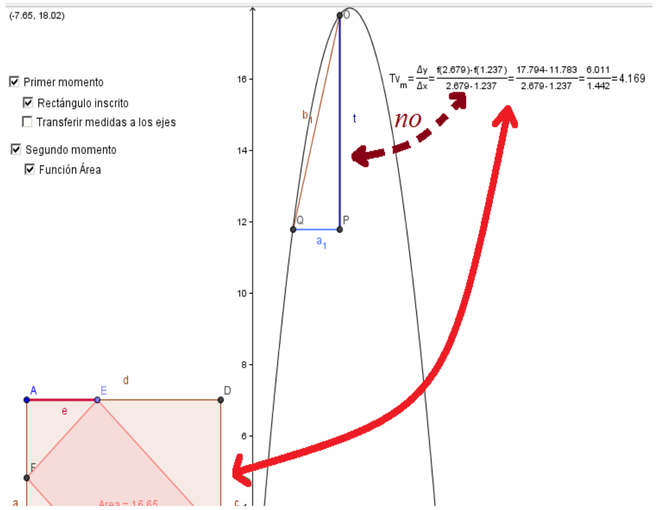


Ilustración 21. No coordinación entre los segmentos del triángulo y el registro numérico.

Con el ánimo de promover la identificación de algunas regularidades para el comportamiento de la tasa de variación, el investigador propuso a las estudiantes comenzar a determinar las tasas de variación de valores cercanos a *x=2; g*enerándose así el siguiente diálogo:

Investigador	:	*¿Cuál es la tasa de variación entre 1 y 2*
Estudiantes	:	*Seis*
Investigador	:	*¿Y entre 1,5 y 2?*
Estudiantes	:	*Cinco*
Investigador	:	*Ok, entonces sin usar la herramienta del GeoGebra, ¿cuál sería la tasa de variación entre 1 y 1,5?*
Cristina, Estefanía y Alexandra	:	*Uno*
Investigador	:	*¿Por qué uno?*
Alexandra	:	*Porque entre uno y dos fue 6, ahora entre uno con cinco y dos es cinco, o sea que en el anterior debe ser uno… ¿no?*
Investigador	:	*Verifíquenlo en el software*

Las estudiantes usan la herramienta "tasa de variación en intervalo" para calcular el valor solicitado; y agregan:

Cristina	:	*¡Ahyyyyy no!*
Marcela	:	*Da siete*
Estefanía, Marcela y	:	*¿Por qué profe?*

Alexandra
Alexandra : *¿No debería dar uno?*
Investigador : *No sé… díganme ustedes!*

En el diálogo se hace evidente cómo el razonamiento de tipo aditivo prevalece en las estudiantes. Con el ánimo buscar alguna explicación para ese hecho las estudiantes usaron varias veces la herramienta "*tasa de variación en intervalo*" construyendo simultáneamente varios triángulos y sus respectivas valores de la tasa media de variación. La Ilustración 22presenta la construcción realizada por Cristina y Marcela, la cual fue tomada del software Camtasia (Se aplicaron algunos efectos a la imagen de tal manera de no revelar la identidad de las estudiantes).

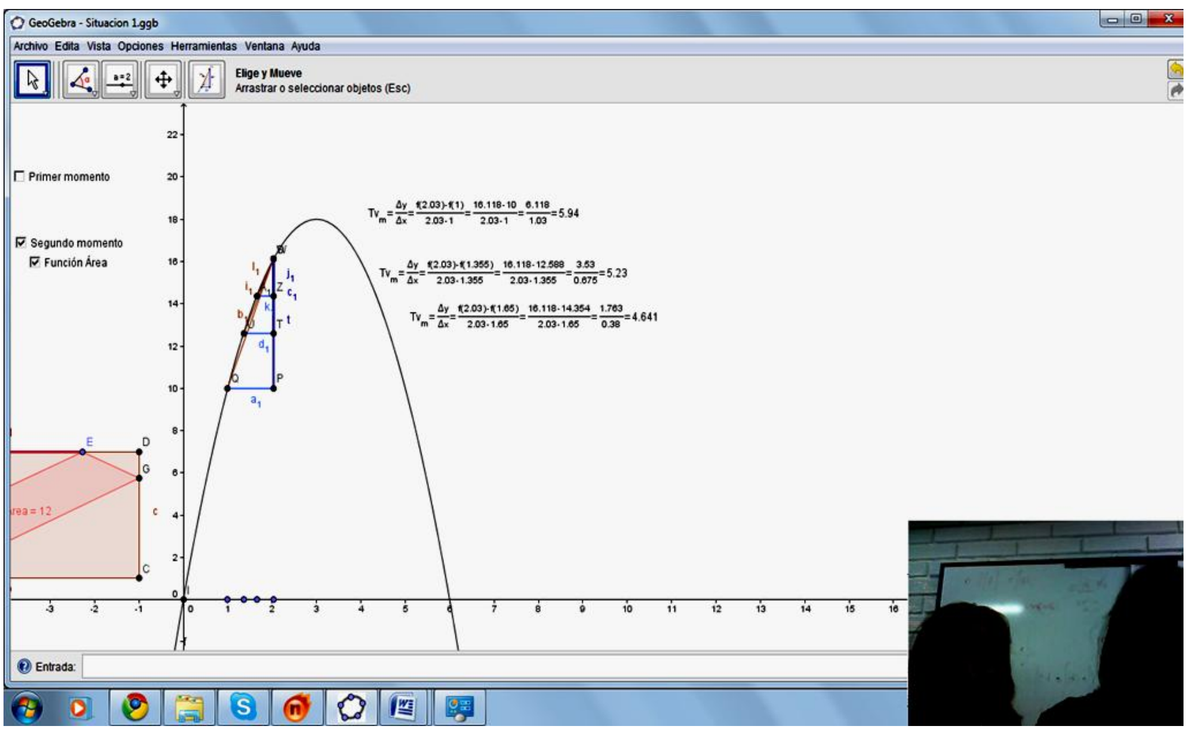


Ilustración 22. Construcción de Cristina y Marcela en la Situación rectángulo inscrito.

En esta oportunidad, la interacción de las estudiantes con la herramienta "*tasa de variación en intervalo*" construida en el software GeoGebra se convirtió en una posibilidad para que las estudiantes rompieran con esa "lógica aditiva" y visualizaran otras maneras de concebir este tipo de comportamientos. En la entrevista que se hizo posterior, Alexandra reveló que el hecho de ver ese comportamiento no aditivo, le había llamado la atención pues era algo en lo cual no había pensado y para lo cual aún seguía buscando explicación.

Con el surgimiento de estas relaciones aditivas y el aporte del software en la visualización de nuevas maneras se observa un nuevo *folding back* y una nueva evolución hacia el estrato 3 (IH) de la comprensión de la tasa de variación.

5.4 Refinamiento de una imagen

Continuando con el desarrollo de la actividad "rectángulo inscrito", el investigador promovió un diálogo en el cual las estudiantes usaban la herramienta "*tasa de variación en intervalo*" para calcular la tasa de variación media en intervalos cada vez pequeños y cercanos a *x=2*. En este aspecto, la herramienta *zoom* del software junto a la pregunta "*¿cuál es la tasa de variación entre…?*" se convirtieron en un motor que impulsó la consolidación de un vínculo entre la *imagen* de la tasa de variación como una razón aritmética y los extremos del intervalo sobre el cual se calculaba. Dicho vínculo pareció emerger como una generalización que las estudiantes hicieron de su experiencia en el uso intensificado de la herramienta *"tasa de variación en intervalo"* pues, conforme lo descrito anteriormente, la herramienta proporcionaba la tasa de variación dados los extremos de un intervalo y; por tanto, las estudiantes parecieron vincular *la existencia de la tasa de variación solo a los extremos de un intervalo*.

La evocación de esta imagen se presentaba recurrentemente cuando el investigador preguntaba por la tasa de variación en un punto (tasa de variación instantánea). Por ejemplo, cuando el investigador preguntaba por la tasa de variación en *x=2*, las estudiantes ofrecían respuestas como: "*de dos a qué?*", "*entre dos y quién más?*". El siguiente diagrama pretende ilustrar esta evolución de la comprensión al interior del estrato 3 (IH).

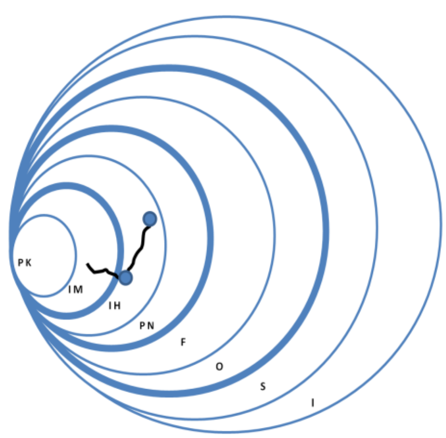


Ilustración 23. "Refinamiento" de la imagen *razón aritmética* de la tasa de variación

5.5 Hacia la noción de tasa de variación instantánea

En el desarrollo de la situación *rectángulo inscrito* surge un diálogo en cual el investigador cuestiona a las estudiantes por el valor de la tasa de variación en los intervalos [1,5, 2], [1,7, 2], [1,9, 2], [1,99, 2], Marcela y Cristina expresaron que la tasa de variación en cada intervalo decrecía, tal y como se muestra en el siguiente diálogo:

Investigador	:	*¿Cómo se está comportando ese resultado?*
Cristina	:	*Baja*
Marcela	:	*Decrece, ¿no?* [Simultáneamente]
Investigador	:	*¿Hasta dónde decrece?*
Estefanía	:	*Hasta uno*
Investigador	:	*¿Seguras?*

Las estudiantes continúan usando la herramienta "*tasa de variación en intervalo*" para calcular los valores de la tasa en intervalos cada vez más pequeños (con 2 en el extremo derecho del intervalo). El investigador preguntó de nuevo: ¿seguras que decrece hasta cero? A lo que las Cristina y Estefanía respondieron con gestos que indicaban su respuesta negativa. Seguidamente el profesor preguntó: ¿Entonces, cuál es el valor al que nos acercamos cuando el punto se acerca a 2? Simultáneamente las cuatro estudiantes respondieron "*cuatro". Este hecho se convierte en evidencia de la presencia de una imagen del concepto de límite, el cual fue observado como "tendencia"; sin embargo, un *"choque conceptual"* se produjo cuando Marcela superpuso los puntos en el dominio y observó que en el *texto dinámico* el valor de la tasa de variación se no se presentaba y, en su lugar, solo aparecía un interrogante (Ilustración 24). Este hecho propició en Marcela la creación de una imagen del límite como "*una tendencia*" el cual adquiría un estatus de *"supuesto"* pero no de *"existencia"*. Para ilustrar este hecho, transcribo el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Entones, ¿cuál es la tasa de tasa de variación en 2?*
Marcela	:	*No existe!*
Investigador	:	*¿Por qué no existe?*
Marcela	:	*Porque cero sobre cero no existe!*
Estefanía	:	*Es indeterminado!*
Investigador	:	*Y entonces, ¿qué significa ese cuatro que encontraron?*

[refiriéndose al valor del límite inferido por medio de la aproximación]

Marcela : *Pero dijimos que daba cuatro porque nos aproximábamos, pero no es cuatro, porque en dos se anula.*

Las demás compañeras se limitaron a escuchar y observar la pantalla del computador evidenciado una actitud de extrañeza.

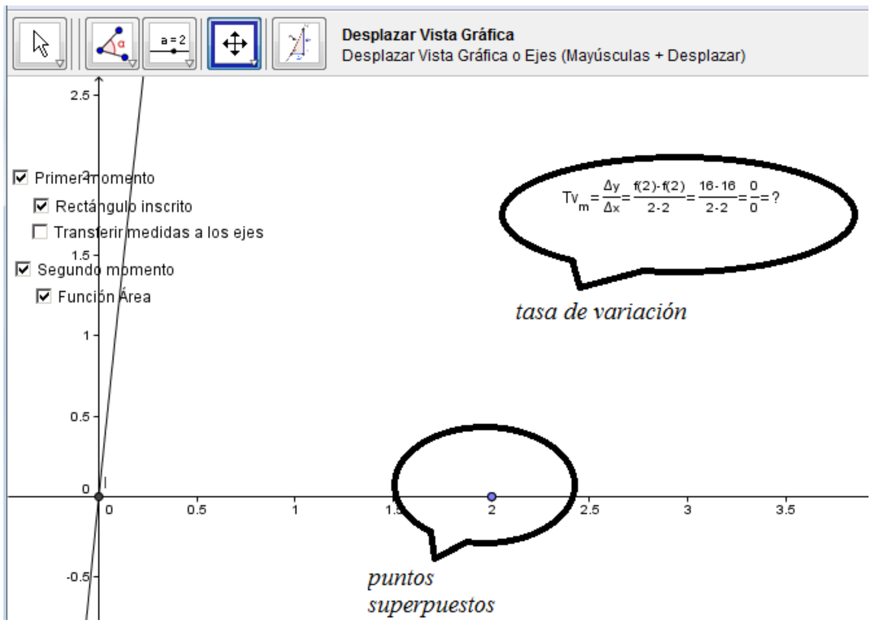


Ilustración 24. Estrategia para el cálculo de la tasa de variación instantánea realizada por Marcela

Para profundizar en la manera cómo las estudiantes estaban interpretando el concepto de límite, se propuso una entrevista individual con cada una de las participantes la cual se realizó en una sesión posterior. En dicha entrevista, el investigador retoma la experiencia de cálculo del límite de la situación “rectángulo inscrito”; en el caso de Marcela se presenta el siguiente diálogo:

Investigador : *Entonces vamos nuevamente a mirar aquí la pregunta que de la situación de la clase pasada. ¿Cuánto fue que nos dio en 2?*

Marcela : *En dos?...*

Investigador : *La variable en 2, exactamente en 2*

[*]Marcela : *De 2 a…*[evocó nuevamente la imagen de la tasa de variación media]

Investigador : *No, en 2!*

Marcela : *Ahhhhh, en 2!*

Investigador : *Esa fue la pregunta que…* [Marcela de inmediato respondió dejando el comentario del investigador inconcluso]

Marcela : *Ahh, en 2 daba infinito, daba indeterminado*

Investigador : *¿Daba indeterminado?*

Marcela : *Pues, cuando yo lo pongo directo,… Los dos puntos en 2.*

Investigador	:	*ujum…Daba indeterminado ¿ por qué era que te daba indeterminado?*
[**]Marcela	:	*Porque…. Porque por estas restas daba 0 sobre 0. Porque cuando el área está,…, el área es,…, porque cuando el segmento está en 2, el área es 16 y si lo vamos a comparar, pues, si...no me acuerdo!*[silencio]*Daba indeterminada, porque este segmento….*[señalando el segmento variable del cuadrado. Hay un momento de silencio]

Se observa en la línea marcada con [*] en el diálogo anterior cómo Marcela, a pesar de haber usado la noción de límite como tendencia, evoca nuevamente la imagen de la tasa de variación en intervalo tal y como fue descrito en el apartado anterior. En la línea marcada con [**] Marcela evidencia a través de sus dos momentos de silencio, que no alcanza a determinar argumentos para justificar, desde el contexto del rectángulo inscrito, por qué la tasa de variación en dicho punto es "indeterminada". Continuando con el diálogo, el investigador le dice a la estudiante "*O sea que yo no puedo decir ¿cómo cambió el área cuando cambió el segmento?"*, a lo cual la estudiante responde: "*Noooo pues el área es 16, puede decir eso, pero no lo puedo comparar con otro punto"*

Las respuesta de Marcela, muestran que para evolucionar en la comprensión de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea, se hace necesario superar la imagen de asociada a los extremos de un intervalo.

La noción de límite, que la estudiante había desarrollado en sus cursos de cálculo diferencial, parece ubicarse en el estrato 3 *Image Having* (IH) de la Teoría de Pirie y Kieren, pues imágenes las imágenes como "tendencia" no parecían haber sido superadas a pesar de tener un excelente desempeño algebraico para el cálculo de los mismos. Otras imágenes de la noción de límite *"valor supuesto"* o *"tendencia sin llegar"* se hacen evidentes en el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Ante la pregunta nuevamente, ¿Cuánto cambia exactamente cuando yo llego a dos? ¿Cuál era la respuesta?*
Marcela	:	*Cuatro*
Investigador	:	*Pero hace un momentico me dijiste que era indeterminado? ¿Qué era lo que pasaba ahí, entonces?*
Marcela	:	*¿Cómo así que qué pasaba? ¿Por qué acá no puede aparecer cuatro exacto? O ¿qué?*
Investigador	:	*No,¿ por qué me dijiste que indeterminado ahorita?*
Marcela	:	*Porque….*

Investigador : *Yo te pregunté cuánto daba en dos, y me contestaste: da indeterminado,*
Marcela : *¿En 2?*
Investigador : *Y aquí me estás diciendo que da 4*
Marcela : *Pues, o sea,* ***ese cuatro lo sacamos como de suponer*** *porque cada vez se va acercando,* ***se va a cercando, se va acercando pero no puede tocar al dos.***
Investigador : *Y entonces eso ¿Qué es?*
Marcela : *Una asíntota*[una discusión para aclarar este término fue necesaria]

En los casos de Marcela y Alexandra se evidencia cierta resistencia a aceptar la "existencia" de la tasa de variación instantánea. El caso de Estefanía, no fue la excepción; el siguiente diálogo se convierte en evidencia de este hecho.

Investigador : *Bueno Estefanía, ahí me estás diciendo que entre 1,003 y 2 está cambiando a esto, 5.994. Pero la pregunta inicial era, ¿Cuánto cambia en dos?*
Estefanía : *En dos solito* [aparece la imagen de la tasa de variación en intervalo]
Investigador : *En dos solito, exactamente!*
Estefanía : *Corramos el punto* [mueve el extremo izquierdo del intervalo, como se muestra en la Ilustración 25, al observar la ecuación exclama lo que se presenta en la siguiente línea.]
Estefanía : *Haaa!, no crece!* [lo dice con tono de voz agraciado]
Investigador : [con una carcajada] *¿No crece? ¿Por qué no crece?*
Estefanía : *Porque da cero!, porque se supone que el crecimiento da por la pendiente, y ahí no hay pendiente. Pero, ¡ahí si hay pendiente!*
Investigador : *¿Entonces?*
Estefanía : *Uhmm, no sé.*

Después de pensar un momento ella dice:

Estefanía : *No sé, porque es que por acá si crece* [señalando los puntos a la izquierda de dos] *y por acá también* [señalando los puntos ala derecha de dos]

A pesar que se hizo nuevamente la aproximación de los puntos, continuaba en la estudiante la idea de que la tasa de variación *"no existe"* en dos.

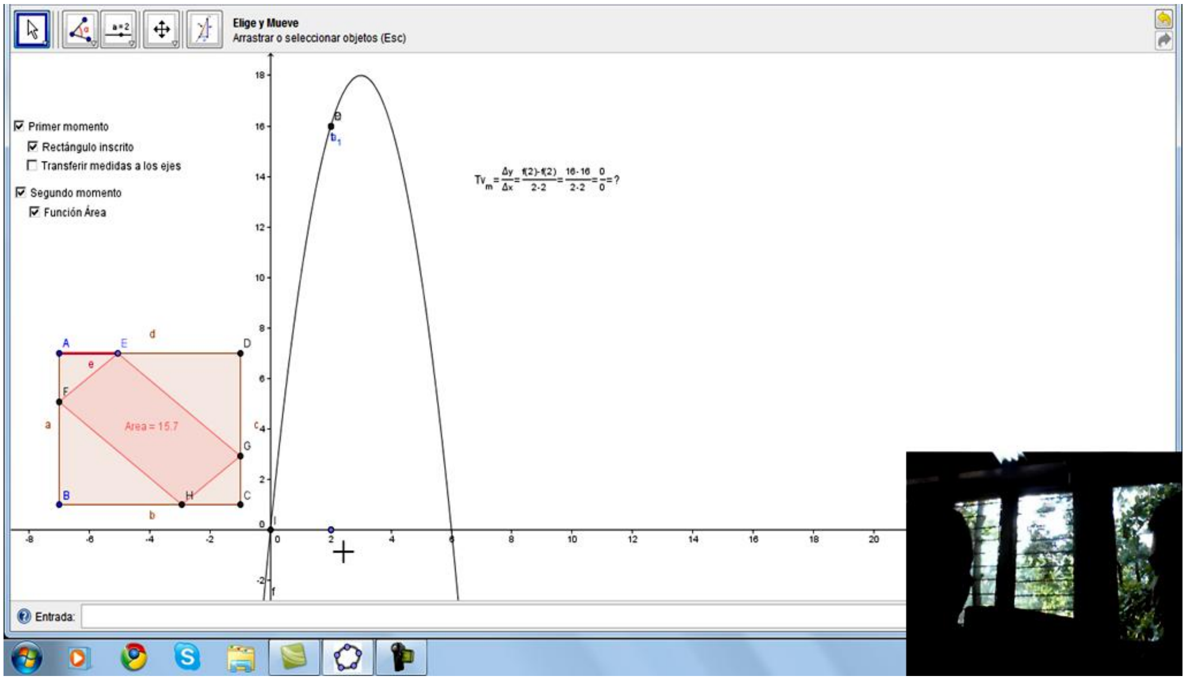


Ilustración 25. Manera como Estefanía calcula la tasa de variación instantánea

Se observa en Cristina que, a través de la mediación del software, alcanzó identificar la noción de límite como una tendencia, pero al igual que sus compañeras, sólo observó el valor del límite como una inferencia o una suposición, lo cual fue confirmado de igual manera en la entrevista.

Como se puede observar, la construcción de la tasa de variación instantánea evocó ciertas imágenes de la noción de límite, mostrando una comprensión muy básica de dicho concepto.

Con excepción de Alexandra, las demás estudiantes encontraron en la aproximación numérica, la única manera para calcular el límite, aún cuando la expresión algebraica hubiera sido encontrada en una sesión anterior. Alexandra por su parte, dijo que "*por medio de la ecuación"* ella podría calcular el límite sin necesidad de usar las aproximaciones del computador.

Con Marcela, Estefanía y Cristina se hizo necesario promover un *folding back* hacia la noción de variable; para ello, el investigador, en cada entrevista, comprometió a las estudiantes con el movimiento del punto izquierdo acercándose al punto ubicado en *x=2* y observando las coordenadas que en la ecuación $Tv_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\quad)-f(2)}{(\quad)-2} = \cdots$ A través de preguntas;*¿qué varia en la ecuación a medida que acerco el punto hacia dos?*, *¿qué permanece constante?, ¿Cómo representar esos valores variables*?, etc. Las estudiantes fueron tomando consciencia de cómo la noción de variable sugería el uso de la función *f(x)= 2x(6-x)* para reemplazarse en la ecuación de Tv_m.

Con excepción de Cristina (que no tenía ningún conocimiento previo del cálculo) todas las demás estudiantes realizaron, sin ningún inconveniente, los procedimientos algebraicos para determinar que $\lim_{x\to 2}\frac{2x(6-x)-16}{x-2} = 4$.

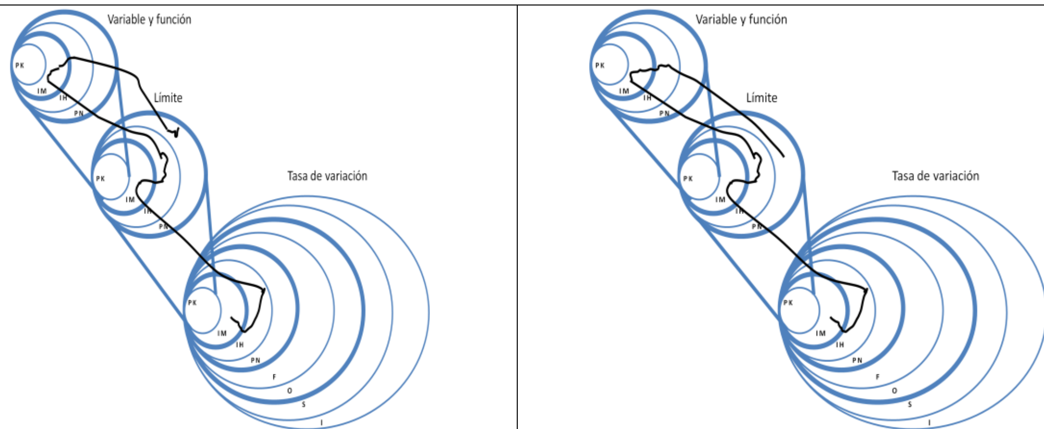
Sin embargo, se pudo observar, sólo en Marcela y Estefanía, una evolución hacia el estrato 4 (PN) de la noción de límite. Para el caso de Alexandra, ese procedimiento sólo tiene sentido para observar una manera de determinar el valor del límite; pero dicho valor, aun sigue siendo un supuesto.

El siguiente diálogo se presenta entre el investigador y Alexandra cuando discuten sobre la tendencia del área hacia cuatro, cuando el segmento se acerca a dos:

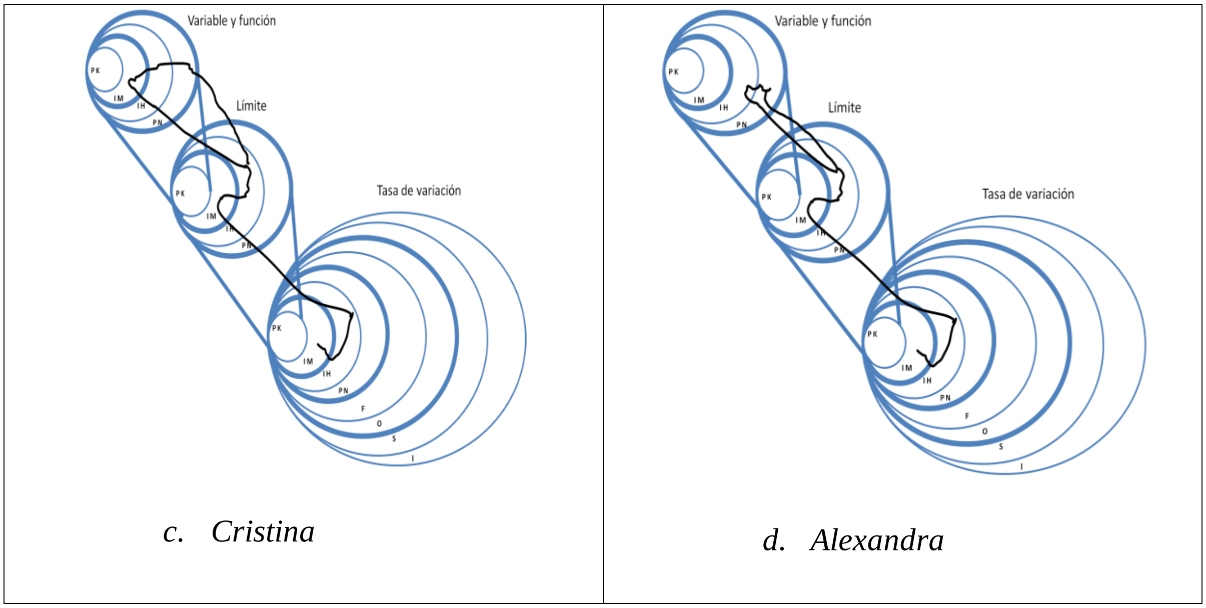
Investigador	:	[Ésto] *significa, que si me acerco otro tricito* [pedacito]*a dos, ya la rapidez sería de 4. 004, o sea el cambio con respecto al otro. Cierto?*
Alexandra	:	*Ujum* [sonido confirmativo]
Investigador	:	*Y que cuando me acerco otro* [poco]; *cuando paso por ahí; cuando el segmento pase por 2 ¿sería cuánto el límite?*
Alexandra	:	*Sería cero*
Investigador	:	*¿Y por qué cero?*
Alexandra	:	*Porque ahí estoy evaluando el área en el punto 2, pues, los dos puntos están en 2*
Investigador	:	*¿pero yo si estoy evaluando?*
Alexandra	:	*No, está midiendo la… seria como…*[no completa sus ideas y evidencia dudas en sus razonamientos]
Investigador	:	*¿ yo necesito reemplazar para poder saber si me da 4?*
Alexandra	:	*Sí, pero si uno reemplaza no te da 4. Da cero. Porque sería restar, arriba sería restar… 16 menos 16 y da cero; y abajo estaríamos evaluando el punto… Y también me da cero porque es 2 menos 2. Y eso me daría indeterminado.*
Investigador	:	*Y cuando yo reemplazo el 2,…,, y en el otro también remplazo en 2 ¿si estoy encontrando esa tendencia? ¿o estoy encontrando el "valor exacto" ahí?*
Alexandra	:	*Yo creo que la tendencia*
Investigador	:	*¿Si es la tendencia? ¿Por qué la tendencia?*

Alexandra	:	*Yo creo que es la tendencia porque es hacia dónde se va acercando, hacia qué número va llegando cuando te estás acercando al 2.*
Investigador	:	*Y entonces para poderme acercar ¿tengo que montarlo encima?*
Alexandra	:	*No, no necesariamente. Muy muy cerquita muy cerquita puede ser 1. 9999 y también acercarse con 2.0001 y ahí se va produciendo la tendencia, o sea números muy cercanos y no tiene que ser el número exacto,¿ no?*
Investigador	:	*Ujum. Ok Alexandra.*

Conforme he mostrado hasta acá, en la compresión de la noción de tasa de variación instantánea, las estudiantes registraron un *folding back, el cual consistió en evocar* algunas imágenes de la noción de límite, lo que al mismo tiempo, exigió un *folding back* hacia la nociones de variable y función. En la Ilustración 26,se representa de manera diagramática la evolución de la comprensión en cada estudiante hasta este momento.



a. Marcela | *b. Estefanía*



c. Cristina *d. Alexandra*

Ilustración 26. Folding back hacia las nociones de variable, función y límite

5.6 Nociones "arraigadas" de la proporcionalidad directa. Un factor desencadenador de *folding backs*

Posterior a la entrevista, las estudiantes se comprometieron en el desarrollo de una actividad en la cual, a través del software *Modellus*, se simulaba el movimiento de un vehículo, obedeciendo a la misma ecuación usada en la en la situación del triángulo inscrito.

Las estudiantes se comprometieron con la simulación y rápidamente encontraron algunas relaciones entre los elementos que allí se implicaban. Después de explorar el movimiento, el investigador pregunta:

Investigador : *¿Qué pasa con la gráfica cuando se devuelve?* [refiriéndose a móvil mostrado en la simulación],

Estefanía : *Comienza a decrecer*

Investigador : *En el momento que el carro para* [se detiene], *¿Qué puedo decir ahí?*

Estefanía : *Que su velocidad es cero.*

Investigador : *¿Sí? ¿Si estamos de acuerdo?* [preguntando al resto del grupo]

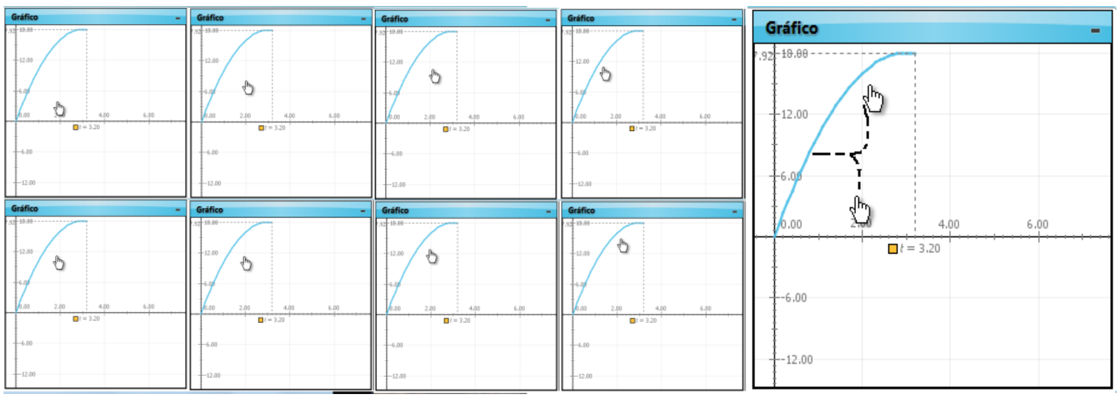
Marcela y Cristina : *Siiii,*

Estefanía : *Se supone que la tasa de crecimiento es la tangente y la tangente en ese punto es cero, o sea que la velocidad en ese punto sí sería cero.*

Investigador : *Entonces, ¿cuál sería la tasa de crecimiento en dos?*

En ese momento, las estudiantes responden simultáneamente con cierto tono de asombro en su voz *¿en dos?* Y de inmediato se acercan a la pantalla del computador evidenciando más aún una actitud de estar cuestionadas.

En ese momento, Alexandra le dice a Estefanía: *"mirálo ahí!"* Estefanía de inmediato se da a la tarea de hacer un movimiento con el cursor del mouse que da cuenta del triángulo trabajado en las sesiones anteriores para estudiar la tasa de variación. La **Ilustración 27**(a) muestra una secuencia de imágenes que describen el movimiento realizado por las estudiantes, así mismo, la **Ilustración 27** (b) presenta un resumen dicho movimiento. Dicho movimiento fue realizado por las estudiantes tres veces.



(a) (b)

Ilustración 27. Secuencia de movimientos realizados por Estefanía y Alexandra

Sin embargo, la presencia de esta imagen en las estudiantes, no fue suficiente para que usaran la herramienta "triángulo incremental" para calcular la tasa de variación, semejante a como se había realizado en la sesión anterior. Contrario a ello, emergió de nuevo aspectos asociados a la proporcionalidad. El siguiente diálogo presenta evidencia de este hecho:

Investigador	:	*¿Qué es la velocidad?*
Alexandra	:	*La velocidad…*
Marcela	:	*La distancia sobre el tiempo*
Alexandra	:	*distancia sobre el tiempo*
Investigador	:	*¿Tendrá algo que ver con la razón de cambio?*
Estefania	:	*¿La distancia? Siiii*
Marcela	:	*¿Qué? ¿La distancia?*
Investigador	:	*Siiii* [también hace un gesto afirmativo con la cabeza]

Alexandra : *No, la distancia no creo que influya mucho!*
Investigador : *Pueden también usar la tabla!*

En ese momento, Alexandra y Estefanía comenzaron a animar en la pantalla del computador "paso a paso" el trayecto del vehículo, y observaron los valores de la tabla que ofrece el software. En este instante, el investigador pregunta a las estudiantes cuál sería la velocidad en *t=2*; las estudiantes inicialmente leen los valores de la gráfica y responde 16, lo que da cuenta que ellas aún no han alcanzado abstraer la relación tasa de variación de la gráfica, pues dicha cantidad no se observa directamente en la gráfica. El siguiente diálogo se convierte en evidencia de este hecho:

Investigador : *En el momento en que el tiempo es dos, ¿Cuál es la velocidad?*
Alexandra : *Essss….*
Estefanía : *Tiempo* 2 *segundos la velocidad es* 16
Investigador : ¿16*? O a una distancia* 16*?*
Alexandra : *Noo, el tiempo es* 16
Marcela : 16…
Cristina : *Noooo*
Estefanía : *El tiempo son* 2 *segundo y la distancia es* 16
Marcela : *La distancia es 16.*
Alexandra y Marcela simultáneamente : *La velocidad es 16*
Marcela : *La velocidad es* 16 *en* 2 *segundos*

Seguidamente se desencadenó una discusión sobre la ecuación de la velocidad, concluyendo que es *"distancia sobre tiempo"* de esa manera leyeron los datos de la tabla y calcularon que la velocidad era "8 cm/seg" obtenido del cociente entre 16 y 2. El investigador cuestionó de nuevo este resultado, pero las estudiantes, en su conjunto, se mostraban muy seguras de ese resultado.

Es posible observar que nuevamente emergen imágenes previas de la proporcionalidad, pues las estudiantes, a pesar de observar que la velocidad no es constante, siguen estableciéndola como la razón entre la distancia y el tiempo, y no como la razón entre los cambios entre ellas. Este hecho constituye mayor evidencia que confirma una vez más los planteamientos de Villa-Ochoa et al. (2011, p. 10) cuando señalan que "*existen estudiantes en los cuales hay aspectos 'arraigados' y que se muestran como producto de una sobre-*

generalización de las propiedades de la proporcionalidad”, en este caso, de la proporcionalidad directa.

Ante este hecho, como investigador propuse a las estudiantes realizar un cambio en la ecuación que se estaba trabajando y convertirla en una ecuación lineal, de esa manera las estudiantes pudieron observar que el vehículo *“se fue a velocidad constante”*, y calcularon la velocidad en este caso. Una imagen de la animación obtenida por una de las parejas de las estudiantes se puede observar en la **Ilustración 28**.

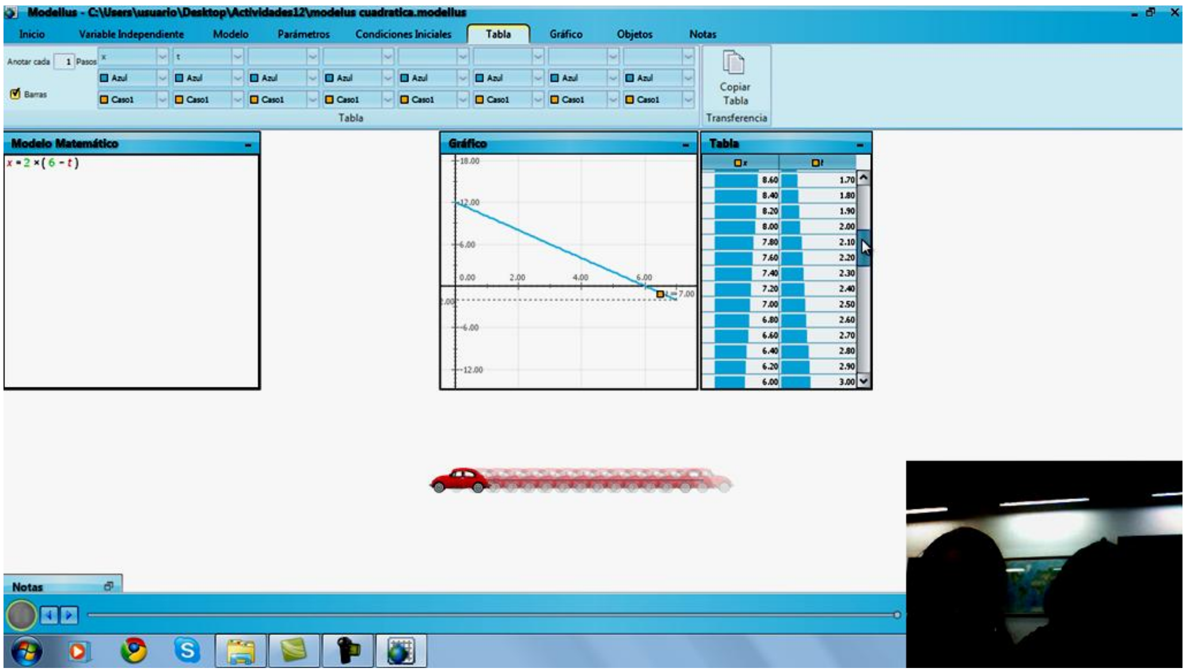


Ilustración 28. Movimiento de un vehículo usando el software *Modellus*.

En el momento que las estudiantes observaron que el movimiento del vehículo era constante, el investigador preguntó por la velocidad en ese caso, presentándose el siguiente diálogo.

Investigador : *Entonces, ¿a qué velocidad va ahí?*
Alexandra : *Ahora si aplicaríamos la* [simultáneamente Cristina dice *“la fórmula*”] *la fórmula! Y diríamos que,* [risas], *en un segundo son…*
Marcela : *10 metros por segundo?*
Investigador : *¿En todo momento?*
Marcela : *Sí*
Investigador : *¿Por qué si?*
Alexandra : *Noooo, ¿Si es diez?* [simultáneamente Marcela responde: *porque es constante*]

El anterior diálogo muestra cómo Marcela, una vez más, establece que la tasa de variación constante supone un movimiento uniforme y, aunque ella no encontró el valor preciso de dicha velocidad, si estableció diferencia este movimiento uniforme y el acelerado cuando la tasa de variación es o no constante. Esta diferenciación permite señalar que Marcela evolucionó hacia el estrato de *Property Noticing (PN)* en la comprensión de la proporcionalidad directa; ya que, según Pirie y Kieren (1994), una vez que el estudiante haya construido varias imágenes, puede examinarlas, establecer conexiones y distinciones entre ellas.

A pesar que Marcela había alcanzado el estadio de PN, este no fue el caso de las demás compañeras, y contrariamente continuaba la duda y hubo la necesidad de seguir con la exploración del software identificar las regularidades en los valores de la tabla.

Ante la duda de las estudiantes, Estefanía fue a su cuaderno para buscar información, el investigador le preguntó *"Estefanía, ¿qué estás haciendo?"* a lo que ella respondió "buscando en el cuaderno de cálculo" y posteriormente agregó *"la fórmula de la velocidad instantánea"*. Sin embargo, en el análisis del video se observa que tanto Estefanía como Alexandra se comprometen con la identificación de cómo la derivada podría ayudarla a calcular la velocidad instantánea, pero el sólo análisis no fue suficiente para extrapolar hacia la identificación de la velocidad en la función cuadrática con la que se había comenzando la situación;, y, rápidamente, se dejaron influenciar por las otras compañeras en el cálculo de la velocidad a través del análisis de los valores de la tabla obteniendo que la velocidad era de $-2\,{}^{m}/_{s}$. Se infiere que este intento de *folding back* autoinvocado no fue efectivo (Martin L. , 2008), pues rápidamente fue abandonado por la estudiante (ver línea punteada en la Ilustración 31(b))

Adicionalmente, con esta experiencia las estudiantes identificaron que la ecuación "distancia sobre tiempo" se desprende del hecho que la velocidad es constante. De igual modo, que dicha ecuación no podría ser usada en el caso inicial (cuya ecuación de posición es *2t(6-t)* ya que la velocidad allí variaba). Este hecho puede observarse cuando el investigador pregunta: "*En este problema*,[refiriéndose al movimiento uniforme del vehículo] *¿valdría la ecuación que tenemos de distancia sobre tiempo?"* y las estudiantes responden simultáneamente:

Cristina : *Siii!*

Alexandra : *Claro que sí!, la velocidad es constante* [manejando un tono de voz como si fuera obvio]

Marcela : *Es constante*

Estefanía : *Si, es constante*

El diálogo continuar en los siguientes términos:

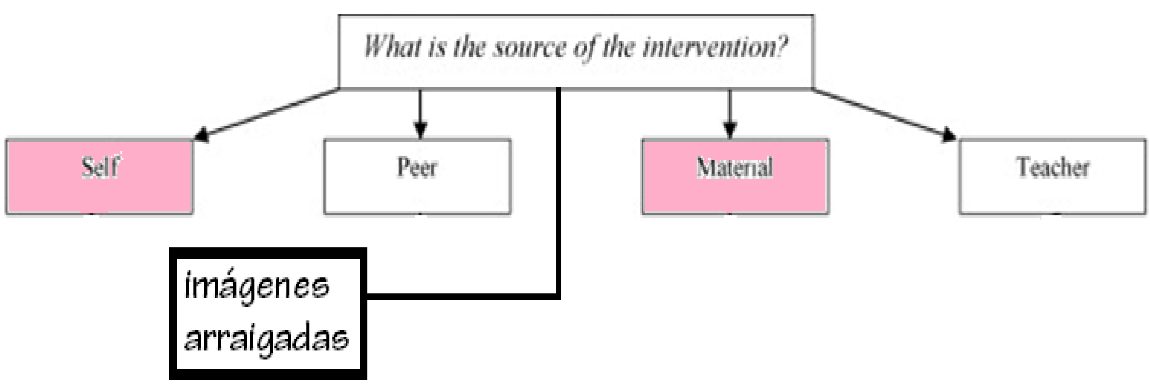
Investigador : *Y ¿en el otro entonces?*[refiriéndose al movimiento acelerado que se produjo al simular la ecuación $2t(6-t)$]

Alexandra y Estefanía : *Nooo,*

Alexandra : *Porque no es constante!*

Basado en estos episodios es posible señalar que en el proceso de comprensión de las estudiantes realizaron diferentes *folding backs* hacia nociones de la proporcionalidad y, una vez allí, su comprensión evolucionó hacia el estrato de *Property Noticing* de tales nociones (ver Ilustración 31).

Según he mencionado en los párrafos anteriores, la presencia de ciertas imágenes arraigadas de la proporcionalidad fueron desencadenadoras de *folding back;* este hecho permite observar un factor adicional a los reportados por Martin (2008) como fuentes de *folding back.* En la siguiente ilustración se ubica este factor como un complementa el aporte de Martin (2008) en la teoría de Pirie y Kieren.



La imagen de la linealidad estuvo presente en todos los momentos del desarrollo del módulo de enseñanza; sin embargo en las últimas situaciones no se mostró como una "limitante" de la comprensión sino como una información que en caso de obtenerse permitiría abordar con mayor propiedad la situación. Particularmente en la situación final "descarga de un archivo" las cuatro estudiantes evocaron dichas imágenes pero en esta oportunidad como una posibilidad de ofrecer una respuesta más acertada a las para responder a la pregunta sobre la cantidad de archivo descargado. En el siguiente diálogo, marcela y Cristina hacen explícito este hecho:

Investigador	:	*¿Cuál sería la cantidad de archivo descargado?*
Marcela	:	*No se puede saber*
Investigador	:	*¿Por qué?*
Marcela	:	*Porque no es constante*
Investigador	:	*¿No es constante qué?*
Cristina	:	*La velocidad*

Este episodio presenta algunos aspectos fundamentales que son precisos de resaltar:

- El surgimiento de nociones asociadas a la proporcionalidad, extrapoladas a contextos donde no son aplicables.
- El papel que desempeñó el software *Modellus* en la (re) construcción de algunas imágenes asociadas a la proporcionalidad directa en un contexto dinámico.
- El "intento" de *folding back* que Estefanía hizo con respecto a algunas aplicaciones del concepto de derivada y que, a pesar de haber involucrado a Alexandra, finalmente no se consolidó en un avance hacia la comprensión de la tasa de variación como un límite.
- El reconocimiento de la necesidad de buscar una manera diferente de analizar la velocidad cuando no es constante.

En este último aspecto el papel del software *Modellus* fue trascendental para promover la evolución de la comprensión de la tasa de variación instantánea como un límite, ese hecho será abordado en el siguiente apartado.

5.7 Los estadios *Property Noticing* (PK) *y Formalising* (F) en la comprensión de la tasa de variación

Después que las estudiantes reconocieron las cantidades que intervenían en el movimiento del vehículo, el investigador promovió un espacio en el que buscó que las estudiantes comparan los elementos de las situaciones: "rectángulo inscrito" y "movimiento de un vehículo"; y a partir de tal comparación, pudieran identificar algunas relaciones entre ellas. Los hallazgos en este aspecto muestran que, a pesar de que en ambos casos se abordó la misma función y se hizo un análisis de la tasa de variación de forma semejantes, las estudiantes no hicieron una "transferencia automática" de las características de un problema a otro; así por ejemplo, al preguntarles por lo que significaba la cantidad A (área del rectángulo inscrito) en la situación Nº1 y *X* en la simulación del movimiento del vehículo, ellas no conseguían identificar la misma variables para ambos contextos. Intentando hacer una analogía entre ambos contexto, Estefanía afirma que: *"en el problema, mientras crece el segmento el área crecía o disminuía*" y estuvo de acuerdo cuando el investigador señaló que el comportamiento de las cantidades era semejante en ambos casos.

Investigador	:	*Lo que allá era el segmento* [refiriéndose a la situación Nº1] ¿qué es aquí?
Estefanía	:	*La distancia*
Alexandra	:	*El…*[interrumpe Marcela y dice que el movimiento del carro] movimiento del carro
Cristina	:	*El movimiento del carro*
Investigador	:	*El movimiento del carro…¿Seguras?*
Estefanía y Alexandra	:	*Si!*
Investigador	:	*Y lo que allá era el área, ¿qué es aquí?*
Estefanía y Alexandra	:	*La velocidad*
Investigador	:	*Seguras*
Cristina	:	*La distancia*
Alexandra	:	*A mí me parece que es la velocidad, ¿no?*

En vista que la respuesta de Cristina estaba en coherencia con los dos valores, se le cuestionó sobre el porqué de su respuesta; pero no dio justificación alguna. Ante este panorama, el investigador escribió en el tablero las ecuaciones:

$A = 2x(6-x)$	$X = 2t(6-t)$
para la situación Nº1. Rectángulo inscrito	para la situación de movimiento del vehículo

El investigador cuestionó de nuevo, *¿Son iguales estas ecuaciones?* A lo que simultáneamente las estudiantes respondieron: *"sí"*. Y partiendo de la comparación entre *A* y *X*; *x* y *t*, ellas, con excepción de Cristina, lograron concluir que:

> *El incremento de A sobre incremento de x,* [en la situación "rectángulo inscrito"] *es análoga a "triangulito* [incremento] *de x sobre incremento de t".*
> Simultáneamente el investigador escribió en el tablero la ecuación $\frac{\Delta X}{\Delta t}$.

Ante esta respuesta, mientras el investigador señalaba el cociente incremental escrito en el tablero, preguntó: *¿qué sería el cambio de la distancia con respecto al cambio del tiempo?* A lo que simultáneamente, Alexandra y Marcela respondieron: *"la velocidad"*. Nuevamente el investigador replica *¿Qué es la velocidad?* Y Marcela responde: "la relación entre la velocidad y el tiempo"; Alexandra complementa diciendo *"la variación de la distancia con respecto a la variación del tiempo"*.

Las evidencias presentadas en este apartado, muestran que tanto Estefanía, como Alexandra y Marcela establecieron conexiones entre las imágenes construidas en las dos situaciones, lo cual da cuenta que estas estudiantes alcanzaron el estrato 4 (PN), y, como Pirie y Kieren señalan, la diferencia entre *Image Having* y *Property Noticing* es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión.

Tal y como había mencionado en los apartados anteriores, aunque en la situación: "rectángulo inscrito" las estudiantes reconocieron la noción de límite como una tendencia, ellas no consiguieron aceptar su existencia, en parte, por el valor de 0/0 que se presenta en el momento. En este aspecto, la simulación del movimiento de un vehículo, a través del software *Modellus*, se mostró como un elemento fundamental para la que las estudiantes consiguieran aceptar la existencia de dicho límite.

Para iniciar en el reconocimiento de la tasa variación instantánea, el investigador formula la pregunta: *¿Cuál es la velocidad en dos?* Y, aunque se esperaba que las estudiantes respondiera de inmediato "cuatro", fueron diversas las aproximaciones en cada una de ellas, por ejemplo: Estefanía se mostró pensativa y respondió "16" mostrando así que estaba focalizada en la posición y no en la velocidad. Por su parte Alexandra, señaló que era necesario hacer los cálculos nuevamente con los triangulitos o sacar el límite; después de unos segundos, la estudiante dice con sorpresa, *"ey, no sería también cuatro";* ante esto el investigador pregunta: *¿Porqué cuatro?* Y de inmediato, Estefanía y Marcela argumentaron que porque era la misma ecuación y la misma tendencia. Esto se convierte en evidencia de un movimiento de la comprensión al interior del estadio PN, pues las estudiantes llegan a la conclusión que:

> *En la situación Nº1, cuando x (el segmento) se acercaba a dos, cociente incremental del área con respecto al segmento se acercaba a cuatro. Es análogo a que, en la situación actual, cuando el tiempo se acerca a dos, la velocidad se acerca a cuatro.*

En este momento, el profesor les recordó a las estudiantes que en la sesión anterior, ellas afirmaban que la tasa de variación cerca de dos era cuatro, pero que exactamente en dos, ellas decían que no existía porque les daba cero sobre cero. En este momento, el investigador retoma la analogía del problema del movimiento del vehículo y genera el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Yo puedo preguntar: ¿cuál es la velocidad que lleva el carro en dos?*
Alexandra	:	*Si*

Ante el silencio de las otras tres compañeras, el investigador simula con su cuerpo el movimiento del vehículo, cuenta el tiempo y para cuando dice "dos". Luego pregunta:

Investigador	:	*Exactamente en dos, ¿Cuál es la velocidad?*
Simultáneamente Marcela y Alexandra responde	:	*Ocho* [mientras sus compañeras responden, Estefanía se muestra preocupada, y pensando]
Investigador	:	*¿Por qué ocho?*
Marcela	:	*Porque son 16 centímetros digamos, en 2 segundos!*[Estefanía sigue en la actitud pensativa]
Investigador	:	*¿Pero ahí no tendríamos un supuesto?*
Marcela	:	*Pero, ¿usted no nos lo está preguntando en ese punto?*
Investigador	:	*Sí, les estoy preguntando por la velocidad exactamente en dos!*
Estefanía	:	*¡Cuatro!* [La estudiante rompió su silencio y ofreció esta respuesta

con ahínco]

Alexandra : *¿Si sería cuatro?*

Investigador : *¿Por qué cuatro?*

Estefanía : *No sé*

Nuevamente, se observa que tanto en Marcela como en Alexandra evocaron imágenes de la relación de proporcionalidad directa entre la posición y el tiempo, la cual fue revisada una vez que el investigador afirmó que eso implicaba un supuesto.

Unos segundos después de diálogo anterior, Alexandra tuvo ciertos *insight* que fueron evidenciados en el tono enérgico con el que verbalizó *"si, es que es la tendencia"*. Y argumentó en el acercamiento por medio de intervalos. Sin embargo, Marcela no alcanzó a entender lo que Alexandra afirmó y replicó: *¿O sea que es cuatro? ¿Siempre va a ser cuatro?* A lo que Alexandra le contestó: *"Cuando se acerca a dos, es cuatro; ya en otro punto sería otro valor"*.

Para apoyar las conclusiones de Alexandra, el investigador propuso que analizar la el cociente incremental a través del software y registrar su comportamiento en la tabla (ver **Ilustración 29**).

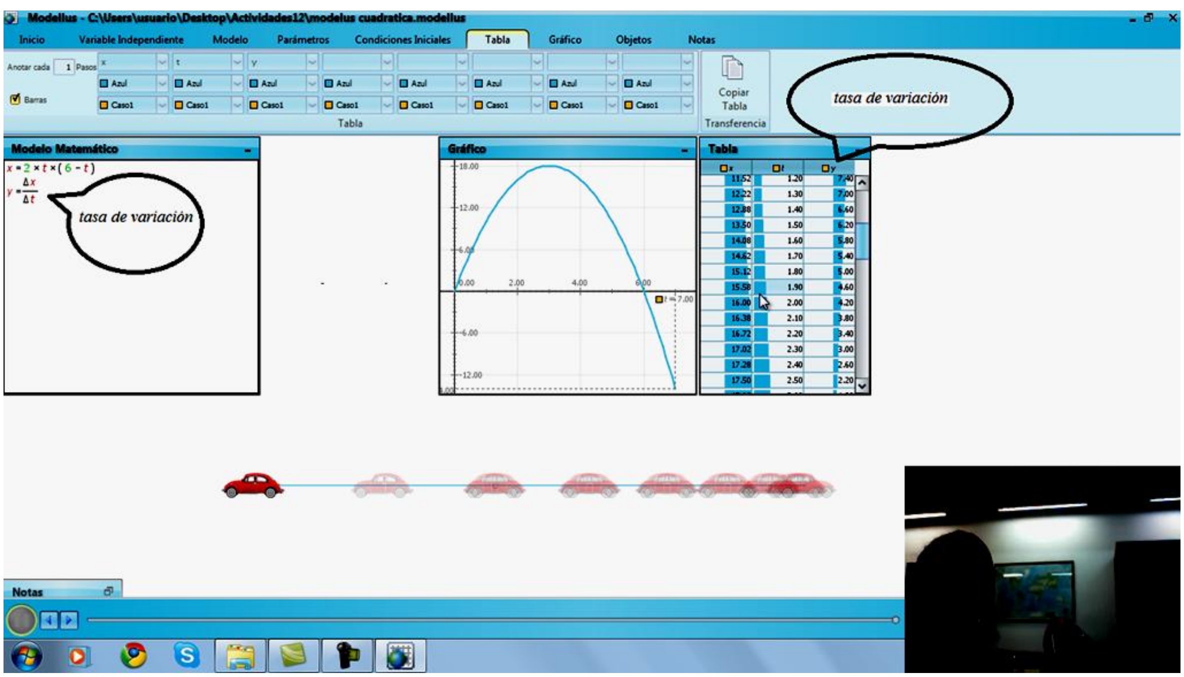


Ilustración 29. Tasa de variación en el software Modellus

Esta experiencia con el software, fue determinante para que las estudiantes, en particular Marcela y Cristina, pudieran visualizar nuevamente la tendencia de la velocidad en el tiempo: 2 segundos (ver **Ilustración 30**).

Tabla

x	t	y
14.62	1.70	5.40
15.12	1.80	5.00
15.58	1.90	4.60
16.00	2.00	4.20
16.38	2.10	3.80
16.72	2.20	3.40
17.02	2.30	3.00
17.28	2.40	2.60
17.50	2.50	2.20
17.68	2.60	1.80
17.82	2.70	1.40
17.92	2.80	1.00
17.98	2.90	0.60
18.00	3.00	0.20

Ilustración 30. Tabla de la tasa de variación en el software *Modellus*.

En el trabajo a seguir, se verifican algunos valores cercanos a *t=2*, y cómo la tasa de variación está cada vez más cerca de cuatro, confirmando así lo que se presenta en la tabla de valores.

Nuevamente, la imagen del límite como una tendencia apareció cuando las estudiantes verbalizaron: *"mientras más me acerco a dos, la velocidad está más cerca de cuatro";* Pero en esta oportunidad, la pregunta por la velocidad en dos, ofrecía como respuesta cuatro, contrario a lo que acontecía en el mismo caso, en la situación "rectángulo inscrito" cuando ante la misma pregunta, las estudiantes respondía: "no existe". El siguiente diálogo se convierte en evidencia de este hecho:

Investigador	:	*Cuando el tiempo está cerquita de dos, la velocidad va estar cerquita de:*
Estudiantes	:	*Cuatro*
Investigador	:	*Y exactamente en dos, ¿Cuál va a ser la velocidad?*
Alexandra, Marcela, y Estefanía	:	*Cuatro*
Investigador	:	*¿Tiene sentido hablar de cuatro?*
Estefanía y	:	*Sí.*

Alexandra

Investigador	:	*Hay algún problema si yo, con GeoGebra montara* [superpusiera] *el punto y me diera cero sobre cero?*
Estefanía	:	*No!*
Alexandra	:	*No, porque se puede calcular por límites!*
Estefanía	:	*Se pueda hallar por límites.*

En este punto, el investigador hace la reflexión con las estudiantes sobre "su resistencia a aceptar la existencia del límite, y que para ellas solo era una suposición". Ante lo cual las estudiantes señalaron que *"sería como decir que en dos, el carro no tendría velocidad"* y es claro que si la tiene.

Es evidente en estos episodios que las estudiantes Alexandra, Estefanía y Marcela, consiguieron abstraer la existencia del límite, a partir de la abstracción de diferentes imágenes de la tasa de variación media. Este tipo de abstracciones les permitió a las estudiantes reconocer la propiedad:

$$Tv_{instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y}$$

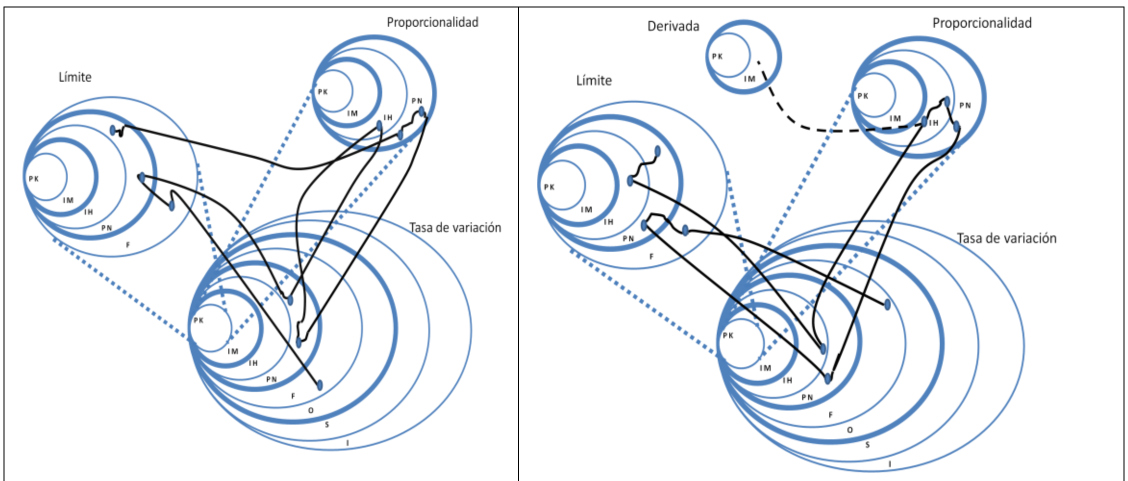
Superar la idea de límite como un "supuesto", para reconocerlo como un valor numérico que existe y que da cuenta de la tasa de variación instantánea, permite ubicar a las estudiante en el estrato de *formalising* (F), ya que, en palabras de Pirie y Kieren, en este estrato, el estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer características comunes de clases de imágenes. Según estos investigadores, el lenguaje usado para describir un concepto no tiene que ser un lenguaje matemático formal; sin embargo, las descripciones generales suministradas por los estudiantes deben ser equivalentes a la definición matemática apropiada.

En la superación de la imagen de límite como "supuesto" hubo al menos dos aspectos que vale la pena reconocer y discutir, a saber:

- El uso de una cantidad de magnitud como la velocidad para interpretar la tasa de variación (desde el contexto de la física) parece haber sido un factor que potenció la existencia del límite. Verbalizaciones como *"sería como decir que en dos, el carro no tendría velocidad"* se convierten en evidencia de la necesidad de involucrar ciertos contextos en el estudio de conceptos matemáticos. La tasa de variación instantánea en la situación del rectángulo inscrito, no se mostró natural, ni fácil de entender para los estudiantes, quizás porque la cantidad que se obtenía por medio de la tasa de variación “$\frac{cm^2}{cm}$” no es una magnitud físicamente tangible, ni cotidianamente perceptible, contrario a ello, es un poco artificiosa, más aun, cuando en la muchos casos, los contextos de área y perímetro, son usados para determinar máximos y mínimos, pero pocas veces, para determinar tasas de variación.

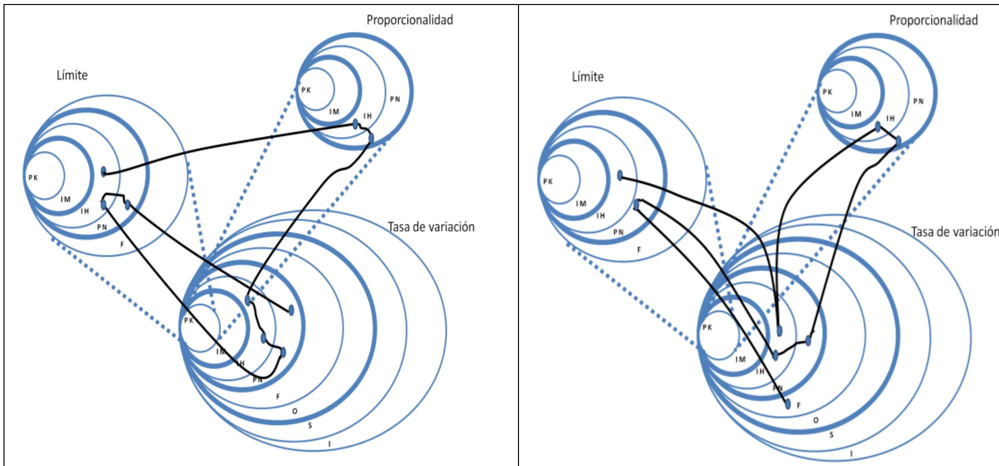
- El papel del software *Modellus* fue fundamental, no sólo para recrear el ambiente de un movimiento uniforme y acelerado, sino también porque mediante su manipulación, las estudiantes pudieron observar diferentes registros de representación de manera simultánea y así poder aproximarse a una comprensión de la tasa de variación instantánea.

En la **Ilustración 26** se mostró cómo transcurría la comprensión de la tasa de variación. En dicha ilustración, Marcela y Estefanía habían alcanzado el estrato PN de la noción de límite, de otro modo, Cristina y Alexandra, solo habían alcanzado al estrato IH de dicho concepto. Estos elementos se convierten en el punto de partida del proceso que se muestra en la Ilustración 31. Dicha ilustración pretender recoger los elementos de los apartados 5.6 y 5.7 que describe en proceso de evolución de la comprensión de la noción tasa de variación:



(a) Marcela

(b) Estefanía



(c) Cristina

(d) Alexandra

Ilustración 31. Representación diagramática de la comprensión de las estudiantes

5.8 La comprensión de la función tasa de variación

En el apartado anterior fue posible observar que a través de la interacción con un fenómeno de movimiento simulado con el software *Modellus*, las estudiantes consiguieron superar sus imágenes de límite como un “supuesto”, para aceptar su existencia como tasa de variación instantánea. En este apartado presento mayor evidencia de este hecho; de igual forma, muestro la manera en que las estudiantes consiguieron extender la idea de tasa de variación como una noción local (tasa de variación en un punto), hacia la noción de “función tasa de variación” que posteriormente se convirtió en un eslabón para introducir la función derivada.

Este proceso comenzó con el cálculo de la velocidad instantánea de algunos valores del dominio de la función; fue así como las estudiantes calcularon la tasa de variación en $t=1$, $t=3$, $t=4$ y $t=5$, las cuales rápidamente conjeturaron como una secuencia lineal y decreciente de números. Para ofrecer mayores argumentos visuales a dicha conjetura, el investigador propuso usar el software para representar la tasa de variación, tal y como se muestra en la Ilustración 32.

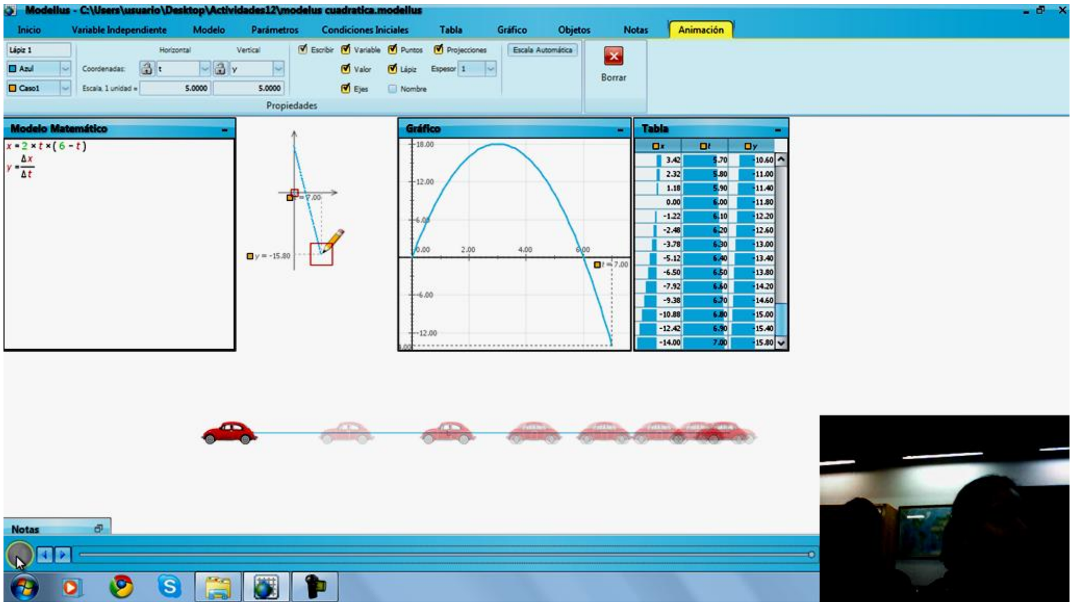


Ilustración 32. Función tasa de variación en *Modellus*

Al realizar el gráfico cartesiano de la velocidad (ver la parte central de la **Ilustración 32**)el investigador nuevamente hizo la analogía con la situación N°1 (rectángulo inscrito). Sin ninguna dificultad, las estudiantes respondieron que dicha recta *"representan la tasa variación entre el área y los cambios en la longitud del lado"*. En ese momento, el investigador escribe en el tablero la ecuación $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, y sobre ella genera el siguiente diálogo:

Investigador	:	*¿Qué representa esta ecuación?*
Alexandra	:	*El número cuatro*
Cristina	:	*La variación*
Investigador	:	*¿Cuál variación?*
Cristina	:	*La de f con respecto de x*
Investigador	:	*Sí, pero en este problema quienes son f y x*
Estefanía	:	*La posición y el tiempo*
Investigador	:	*Entonces, ¿qué es este límite?*
Simultáneamente Estefanía y Alexandra	:	*La velocidad*
Investigador	:	*Bien, y ¿qué es la velocidad de la posición?*
Estefanía	:	*¿Cómo así?*
Alexandra	:	*No entiendo!*
Marcela y Cristina	:	[silencio]

Investigador	:	*Pues! Como obtengo la velocidad de la posición?¿Qué relación hay entre ellas?*
Estefanía	:	*Es la tasa de variación!*
Marcela	:	*Ahhhh!, es la derivada*
Investigador	:	*¿Cuál derivada?*
Marcela	:	*La derivada en un punto*

Las demás compañeras atendieron el comentario de Marcela e hicieron gestos que confirmaban dicho comentario. El diálogo continúa en los siguientes términos:

Investigador	:	*Entonces qué es la velocidad acá* [señalando *t=1*]
Simultáneamente Marcela, Alexandra y Estefanía	:	*¡La derivada!*[Cristina respondió: "*la tasa de variación"*]
Investigador	:	*La derivada ¿en dónde?*
Estudiantes	:	*En un punto*
Investigador	:	*¿En cuál punto?*
Estudiantes	:	*En uno*
Investigador	:	*Y acá?* [señalando t=3]
Marcela y Estefanía	:	*La derivada en 3* [su tono de voz parecía que daban cuenta de algo obvio]

Estefanía, Marcela y Alexandra respondieron de igual manera cuando el investigador les preguntó por el valor en *t=4* y *t=5*. Ante este panorama el investigador preguntó, *¿Entonces, esta gráfica a qué corresponde?*, a lo que ellas respondieron casi en simultáneamente: *"a la derivada"* (Cristina guardaba silencio).

Investigador	:	*Entonces, está gráfica a qué corresponde?* [señalando la grafica de la velocidad]
Estudiantes simultáneamente	:	*A la derivada* [El tono de la voz y los gestos Alexandra y Marcela, dieron cuenta de ciertos *insights* en su comprensión].
Investigador	:	*O sea que en cuando yo pido, en otro problema, el cambio de una cosa con respecto al cambio en otra en un punto, ¿de qué estoy hablando?*
Marcela y Alexandra	:	*De la derivada*
Marcela	:	*¡Ahhhh, esa derivada es mi ídola!*
Investigador	:	[risas, risas, risas]*, ¡tu ídola!…¿por qué es tu ídola?*
Marcela	:	*No pues, me parece chévere!, como con una misma cosa, decir derivada, se puede relacionar con muchas cosas.*

El diálogo anterior muestra que Alexandra, Marcela y Estefanía consiguieron construir una interpretación de la derivada como una tasa de variación instantánea, de esa manera generaron algunos vínculos entre las nociones abordadas paralelamente en el curso de cálculo, con problemas en los cuales la derivada puede interpretarse como tasa de variación. En el análisis de los videos correspondientes al diálogo anterior se pudo observar cómo los *gestos* de las estudiantes y el *tono de su voz* daban cuenta haber *"descubierto"* ciertos vínculos entre las nociones abordadas en el curso paralelo de cálculo y las situaciones variacionales que se abordaron en este estudio. En dichos vínculos se materializa una comprensión de la tasa de variación instantánea como la derivada de una función en un punto.

Para el caso de Marcela, el hecho de comprender la derivada como una tasa de variación instantánea, la llevó a resaltar, emotivamente, "*¡Ahhhh, esa derivada es mi ídola!*" y lo que posteriormente la llevó a revisar su proceso de aprendizaje del cálculo, afirmando que "*ahhhj, es que ese profesor es muy pegado de las definiciones y las operaciones, y uno no alcanza a ver todo*". Marcela consiguió observar que la noción de derivada va mucho más allá de la manipulación algebraica de símbolos, y como tal, tiene sus aplicaciones en aquellas situaciones en las cuales la variación tiene un papel fundamental. Estos elementos, se convierten en evidencia que Marcela alcanzó el estrato *Observing* de la teoría de Pirie y Kieren ya que según estos autores, este estrato supone la habilidad para considerar y consultar su propio razonamiento (aspecto metacognitivo) formal. En el estrato *Observing* el estudiante es capaz de observar, estructurar y organizar procesos personales de pensamiento como también, reconocer las ramificaciones de procesos de pensamiento. Del mismo modo, ha progresado hacia la producción de verbalizaciones de los conocimientos del concepto formalizado. El siguiente diálogo se convierte en evidencia adicional, a los elementos acá planteados.

Investigador	:	[…]*si tengo una expresión que da cuenta del número de clientes que voy teniendo de acuerdo al precio que le pongo a un producto,*
Marcela	:	*¿Una función?*
Investigador		*Sí, y si yo quiero saber cómo cambia la cantidad de personas con respecto al precio, para determinado precio, ¿qué debo hacer?*[8]

[8] Aunque en este ejemplo, se debe suponer continuidad para poder resolverlo usando las "derivadas", no se hizo discusión al respecto por salirse del foco de la discusión en ese momento.

Marcela : *Derivar*

Alexandra : *Hallar la derivada*

Investigar : *Queda claro que una interpretación de la derivada es:*

Estefanía : *Las tasas de crecimiento en funciones*

Investigador : *En este problema*[refiriéndose a la situación del movimiento de vehículo en el software Modellus] *la tasa de variación se llama:*

Estudiantes simultáneamente : *Velocidad*

Investigador : *Y, ¿en el problema anterior?*[refiriéndose al problema del rectángulo inscrito]

Marcela : *Se llamaba variación del área con respecto al segmento.*

Contrario a sus compañeras, Cristina sólo alcanzó determinar *la velocidad instantánea como la tasa de variación de la función posición con respecto al tiempo*, lo cual es perfectamente claro, dado que esta estudiante no había estudiado paralelamente las nociones del cálculo; de este modo, Cristina consiguió alcanzar el estrato *Property Noticing* según la teoría de Pirie y Kieren.

Para profundizar en el estudio de la tasa de variación como una función, se diseñó una herramienta con el software GeoGebra que permite construir un conjunto variable de triángulos (dependiendo del deslizador *n*) y mostrar los puntos que representan los tasa de variación en cada intervalo (ver Ilustración 33).

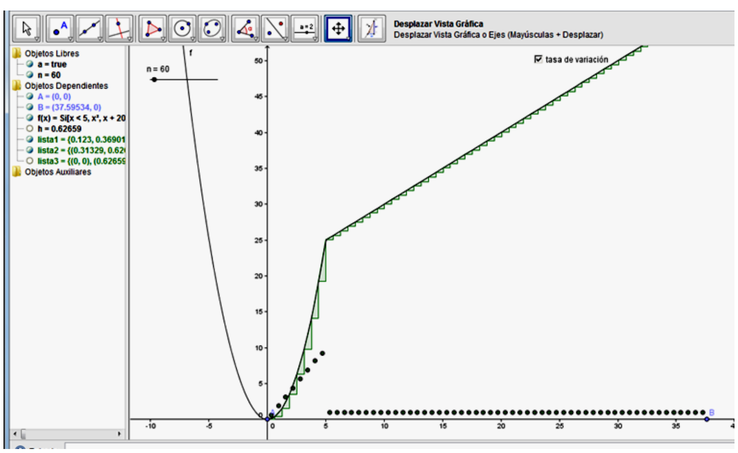


Ilustración 33. Herramienta: Tasa de variación en funciones

El trabajo con las estudiantes se inició con el estudio de la función $f(x) = 2x(6 - x)$ y mostrando sólo los triángulos de la tasa de variación (los puntos que representan la tasa de variación estuvieron ocultos para un estudio posterior, verIlustración 34).

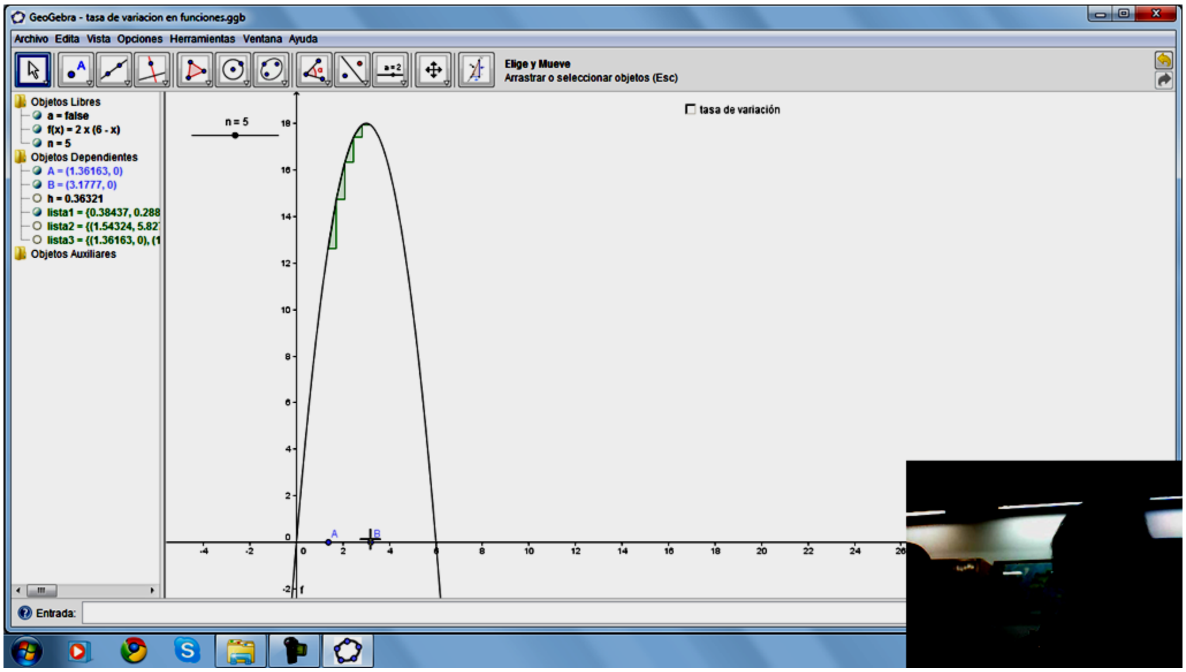


Ilustración 34. Ambiente de la herramienta "tasa de variación en funciones" diseñada en GeoGebra

A través de la interacción con esta herramienta emergieron algunas imágenes relacionadas con el "procedimiento de triángulos" (descrito al inicio de este capítulo) para estudiar en comportamiento de la tasa de variación. De esta manera, al preguntarse ¿cómo se está comportando la tasa de variación?, las estudiantes afirmaron:

Alexandra: *inicialmente va más lento, ..., después aumenta negativamente*

Estefanía y Marcela: *cada vez va más lento*

Cristina: *disminuye*.

Estas imágenes fueron producto de visualizar, a través del software GeoGebra, que para incrementos horizontales uniforme, hay crecimientos verticales cada vez más pequeños (ver Ilustración 35)

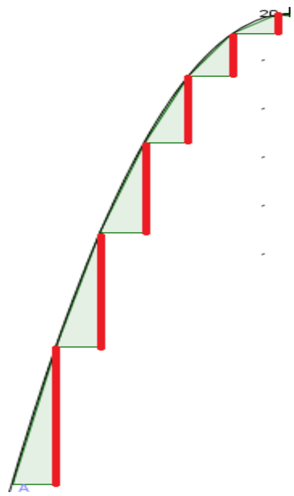


Ilustración 35. Análisis de la tasa de variación media

El trabajo a seguir, fue usar la herramienta “tasa de variación en funciones” para describir el comportamiento de la tasa de variación en tales funciones. Se observa en las verbalizaciones de las estudiantes que ellas asocian correctamente las concavidades de las funciones a los comportamientos de la tasa de variación. El siguiente diálogo ocurre entre el investigador y las estudiantes después de haber analizado el comportamiento de la tasa de variación de la función presentada en la ilustración anterior.

Investigador	:	*Y si yo hubiera hecho una gráfica al contrario* [dibuja en el tablero un tramo de grafica cóncava hacia arriba]*¿cómo darían los incrementos?*
Marcela	:	*Mayor, mayor, mayor*
Alexandra	:	*Mayor y mayor hasta que, …uhhhh, hasta que se acabe la gráfica.*

Estefanía y Cristina guardaron silencio, pero estuvieron atentas a lo que acontecía entre Alexandra, Marcela y el investigador, los gestos realizados con su cabeza, dan cuenta que están de acuerdo con lo que está aconteciendo. El diálogo continúa de la siguiente manera:

Investigador	:	*O sea que ese cambió ¿tendrá que ver con la forma de la gráfica*
simultáneamente Alexandra y Marcela	:	*¡Claro!* [el tono de la voz muestra que ellas concibe este hecho como obvio]
Cristina	:	*Sí*
Investigador	:	*¿qué tendrá que ver?*
Marcela	:	*La concavidad*
Cristina	:	*Sí, porque llega hasta cierto punto y, …*[interrumpe y deja que Estefanía termine el comentario]
Estefanía	:	*Si va hacia arriba o si va hacia abajo*

Investigador : *¿Cuándo es cóncava hacia arriba?*
Marcela : *Cuando es positiva*
Investigador : *¿Positiva quién?*
Marcela : *La segunda derivada*

Se observa en el diálogo que Marcela acude a sus nociones de cálculo para justificar la concavidad de las gráficas; por el contrario, Alexandra, Cristina y Estefanía presentan argumentos desde la experiencia trabajada para decir que "*la función es cóncava hacia arriba si la tasa de variación crece".* Este hecho pudo confirmarse una vez más cuando las estudiantes abordaron la situación "descarga de un archivo" en la cual tomaron algunos valores discretos para formarse una imagen del comportamiento de la tasa de variación, y posteriormente de manera cualitativa se aproximaron a las gráficos cartesianos a través del descripciones cualitativas de los cambios de la tasa de variación (ver numeral 5.9).

Continuando con el episodio anterior, se le pide a las estudiantes que activen la opción tasa de variación y de esa manera, alcanza a confirmar el comportamiento decreciente de la tasa de variación que habían inferido anteriormente.

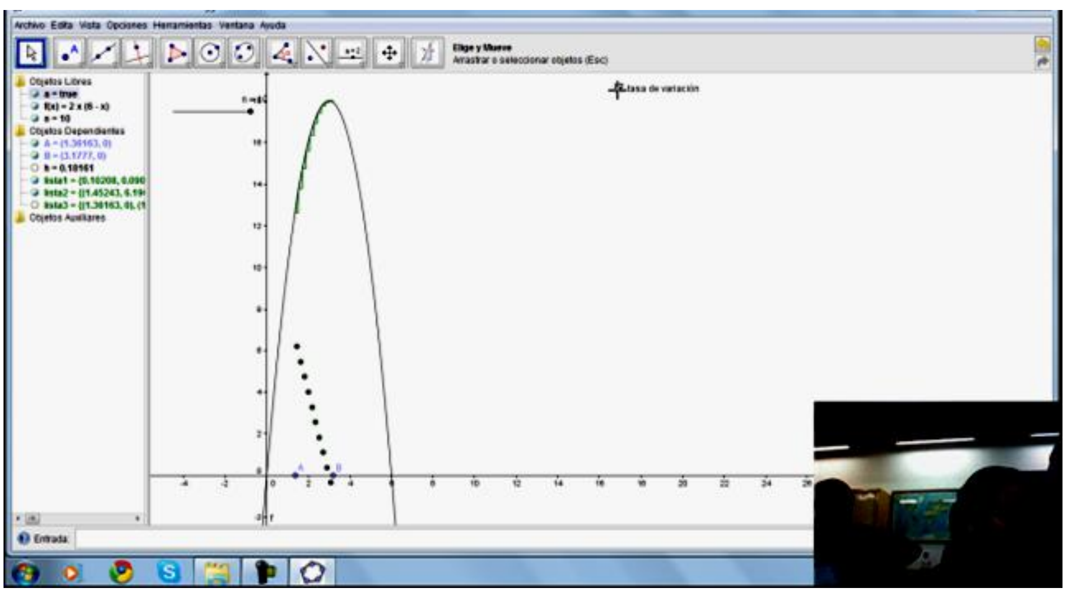


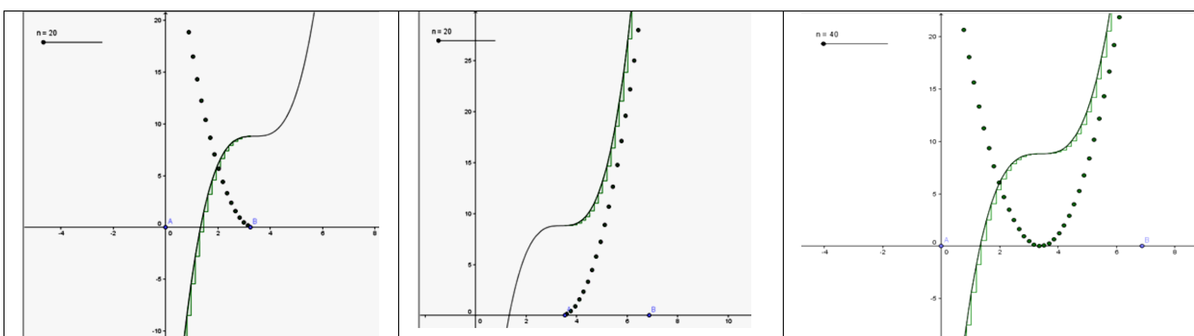
Ilustración 36. Gráfica de algunos valores de la función: tasa de variación

En este momento del desarrollo de la situación, continuó la discusión a través de las pregunta que el investigador iba proponiendo. Preguntas como: ¿Por qué es decreciente? A que corresponde esta gráfica?, fueron direccionando la discusión que se presenta a continuación:

Investigador	:	*¿Por qué me da para abajo esta?*[refiriéndose a la secuencia decreciente de puntos]
Estefanía	:	*Porque el crecimiento está disminuyendo*
Marcela	:	*Porque* [la tasa de variación]*estádisminuyendo*
Investigador	:	*Exactamente; la gráfica está creciendo, pero la rapidez o la variación está…* [el investigador pone un tono de voz, de tal manera que las estudiantes completen la frase que él está diciendo]
Todas las estudiantes	:	*Está disminuyendo*
Investigador	:	*Entonces, esta es la gráfica de la…*
Estefanía, Marcela y Alexandra	:	*Derivada*

El diálogo anterior pone de relieve que las estudiantes hicieron un *folding back* hacia una imagen de la derivada como tasa de variación, pero descuidaron un aspecto de esta noción como es el límite; es decir, la secuencia de puntos correspondía a la descripción de la tasa de variación media, pero para poder afirmar que es la derivada, se hace s necesario el hecho de hacer tender cada incremento a cero.

Con la idea imprecisa que la secuencia de puntos representa la grafica de la derivada, las estudiantes continuaron estudiando el comportamiento de las gráficas. En la Ilustración 37, se muestra la secuencia de gráficos estudiados.



(a) (b) (c)

Ilustración 37. Secuencia de gráficos para estudiar el cambio de la tasa de variación

Con respecto a la secuencia de gráficas presentada en la Ilustración 37, Estefanía afirmó:

> "*Ahí la derivada va bajando ya que el crecimiento se va haciendo más pequeño, ¿cierto?. Pero si lo aumentamos* [refiriéndose a mover los puntos

para formar la Ilustración 37(b)]*ella también va a aumentar, el crecimiento va a ser más grande. Va a ser cóncava hacía arriba".*

Las demás compañeras evidenciaron estar de acuerdo con los planteamientos de Estefanía. En ese momento, el investigador pregunta por el significado del punto donde la tasa de variación cambia de ser decreciente a creciente. Sin embargo, las estudiantes no dieron cuenta de asignarle un significado a tal punto. Fue así como el investigador realizó con su cuerpo una simulación del movimiento descrito por la función presentada en Ilustración 37. A través de un desplazamiento en el aula de clase, el investigador mostró un movimiento en el cual la velocidad decrecía hasta que se hacía cero, para posteriormente arrancar de nuevo aumentando su velocidad. Con esa simulación cinemática las estudiantes alcanzaron a señalar que en dicho punto *"la velocidad es cero"* y con la ayuda del profesor lograron verbalizar que en dicho punto la velocidad cambia de "*ser decreciente a ser creciente"*. Reiteradamente, el profesor preguntó por el nombre de ese punto, sin embargo las estudiantes manifestaron no conocerlo; finalmente el investigador les informó que dicho punto se llama "punto de inflexión" y de inmediato, *Marcela y Alexandra* evidenciaron recordar dicha noción como el cambio en las concavidades.

En la discusión sobre la interpretación de dicho punto, el investigador pregunto:

Investigador	:	*En el problema del movimiento que yo hice, ¿Dónde está el punto de inflexión?*
Estefanía	:	*¡En el cero!*
Alexandra	:	*Cuando para* [se detiene]
Marcela	:	*Cuando para* [se detiene]
Investigador	:	*Ok, entonces, ¿Qué es un punto de inflexión? Un punto de inflexión es cuando la variación cambia de…*[el investigador deja la frase inconclusa y maneja un tono de voz de pregunta de tal manera que promovió en las estudiantes terminar la oración]
Estefanía y Alexandra	:	*Crecer a decrecer*
Marcela	:	*O de decrecer a crecer*
Investigador	:	*Muy bien, ¿Cómo sería el movimiento al contrario?. Voy cada vez más…*
Alexandra	:	*más rápido, y,…, va a comenzar a decrecer*

En el anterior episodio, puede evidenciarse como a pesar que Marcela, Alexandra y Estefanía habían estudiado previamente la noción de punto de inflexión, esta sólo se había asociado a una “definición” como el cambio de concavidades sin que ello implicara una transferencia para interpretarse desde los fenómenos de variación.

La construcción de una imagen del punto de inflexión asociada al cambio en la tasa de variación permitió que Alexandra, Marcela y Estefanía fueran capaces de abstraer propiedades en el comportamiento de la tasa de variación, por tanto según la teoría de Pirie y Kieren, estas estudiantes experimentaron un avance en la comprensión de esta noción el interior del estrato *formalisig*.

Según lo presentado anteriormente, esta evolución en la tasa de comprensión ocurrió en un contexto en el cual las estudiantes asociaban la función tasa de variación promedio con la función derivada. Ante este hecho, el investigador propuso a las estudiantes graficar la función *f(x)=sen(x)* la cual había sido analizada algebraicamente en el curso de Matemáticas Operativas, en el que estaban matriculadas las estudiantes. El profesor pregunta, ¿Cómo va a ser la tasa de variación de dicha función? Ante lo cual las estudiantes comienzan a hacer descripciones verbales como: *“va creciendo hasta aquí*”, “*por acá decrece”*, *“va a ser para el lado contrario* (esta verbalización evoca una imagen visual que tiene la estudiante frente a la gráfica de la función seno y coseno)”, etc. Dichas verbalizaciones atendieron a la relación observada anteriormente entre la tasa de variación y la concavidad. Después de un momento, Marcela dice: *“ahh pues profe, la derivada del seno es el coseno”,* de esta manera el diálogo sigue en los siguiente términos:

Investigador	:	*Entonces ¿Cómo va a ser la gráfica de la tasa de variación?*
Estefanía	:	*Pues la función coseno*
Alexandra	:	*Ah por eso yo decía que era como inversa*

El investigador solicita a las estudiantes aumentar el valor del deslizador y trazar usar el software para graficar la función *f(x)= cos(x)*. En la Ilustración 38 se muestra la construcción elaborada por Marcela y Cristina.

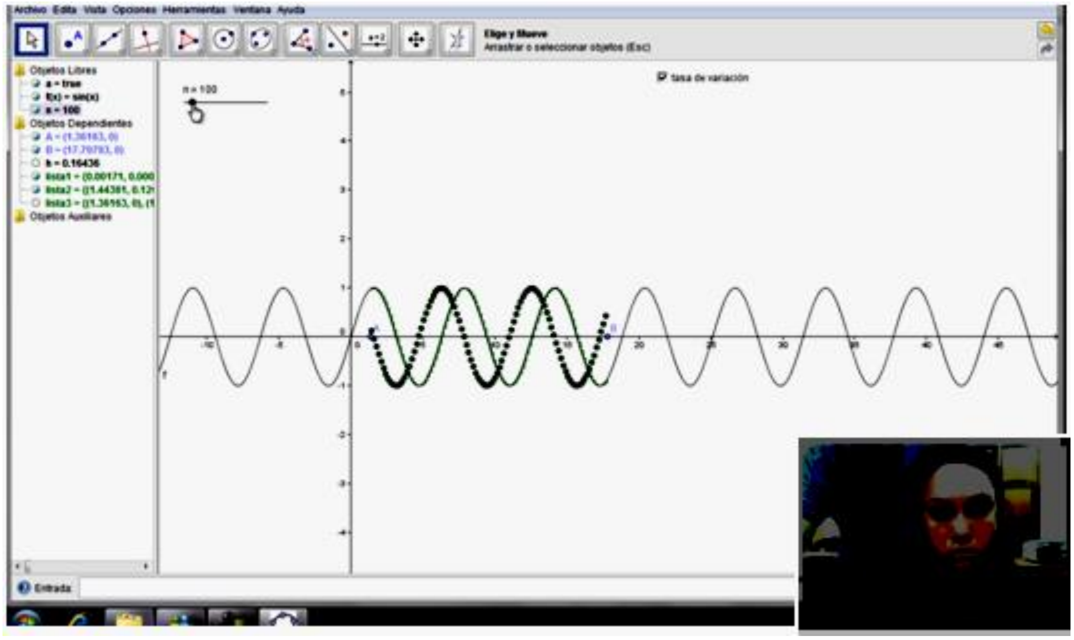


Ilustración 38. Análisis de la tasa de variación de *f(x)=sen(x)*

Una vez que Marcela y Cristina construyeron la gráfica que se muestra en la Ilustración 38, el investigador comenzó a cuestionarlas generando el siguiente diálogo.

Investigador	:	*a medida que yo aumento esto* [deslizador *n* del software] los puntos se van aumentando también, ¿cierto?, ésta grafiquita que se está formando acá con esos puntos cuál es?
Marcela	:	*La variación*
Investigador	:	*La variación, bien. Las niñas de allí* [refiriéndose al equipo de Alexandra y Estefanía]*me dijeron que era el coseno. ¿es el coseno o no es el coseno?*
Marcela	:	*Pues se supone que los puntos de variación son el coseno, ehhhh*[corrige] *son la derivada y la derivada del seno es coseno. Entonces si es.*

Respuesta similar obtuvieron Alexandra y Estefanía. Ante ello, el investigador les propuso que graficaran la función *f(x)=cos (x)* y que compararan la secuencia de puntos con dicha función. De esa manera, las dos parejas de estudiantes obtuvieron un gráfico semejante la que se presenta en la Ilustración 39.

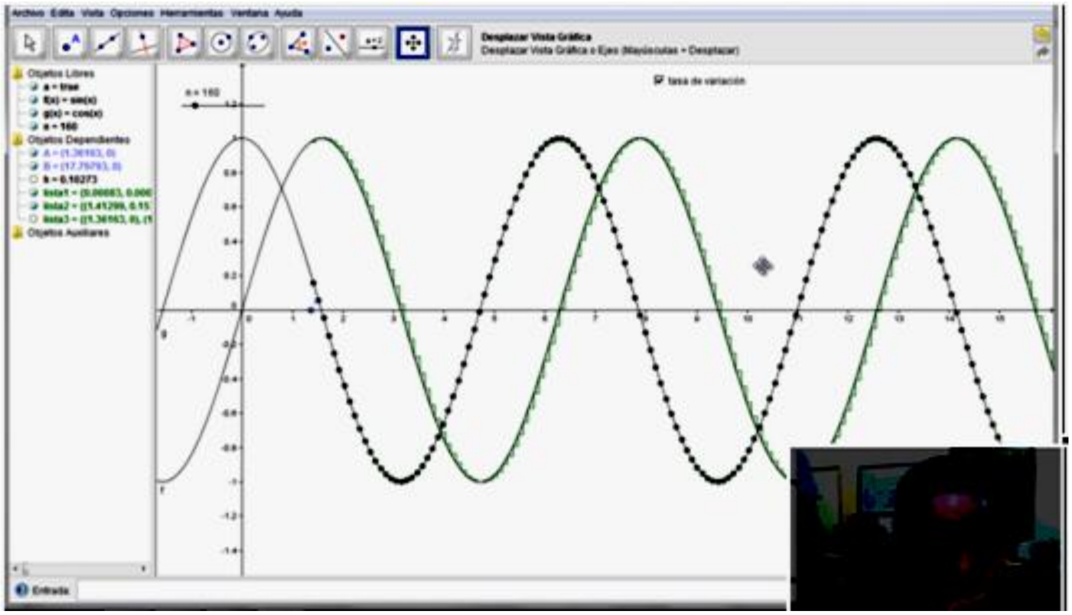


Ilustración 39. Gráfica construida por Marcela y Cristina de *f(x)=sen (x)*, *g(x)=cos(x)* y de la tasa de variación de *f(x)*

Ante estas imágenes las estudiantes respondieron simultáneamente: *"son iguales"*, *"coinciden, perfectamente"*. En ese momento, el investigador les solicita que usen la herramienta zoom del software para acercarse significativamente a los puntos. Rápidamente, las estudiantes se comprometieron con esta actividad, observando que en un zoom bastante cercano a los puntos, ellos no coinciden con la función coseno. El tono de la voz de las estudiantes reflejaban cierta emoción y los gestos de sus rostros mostraban un alto grado de sorpresa (ver Ilustración 40).

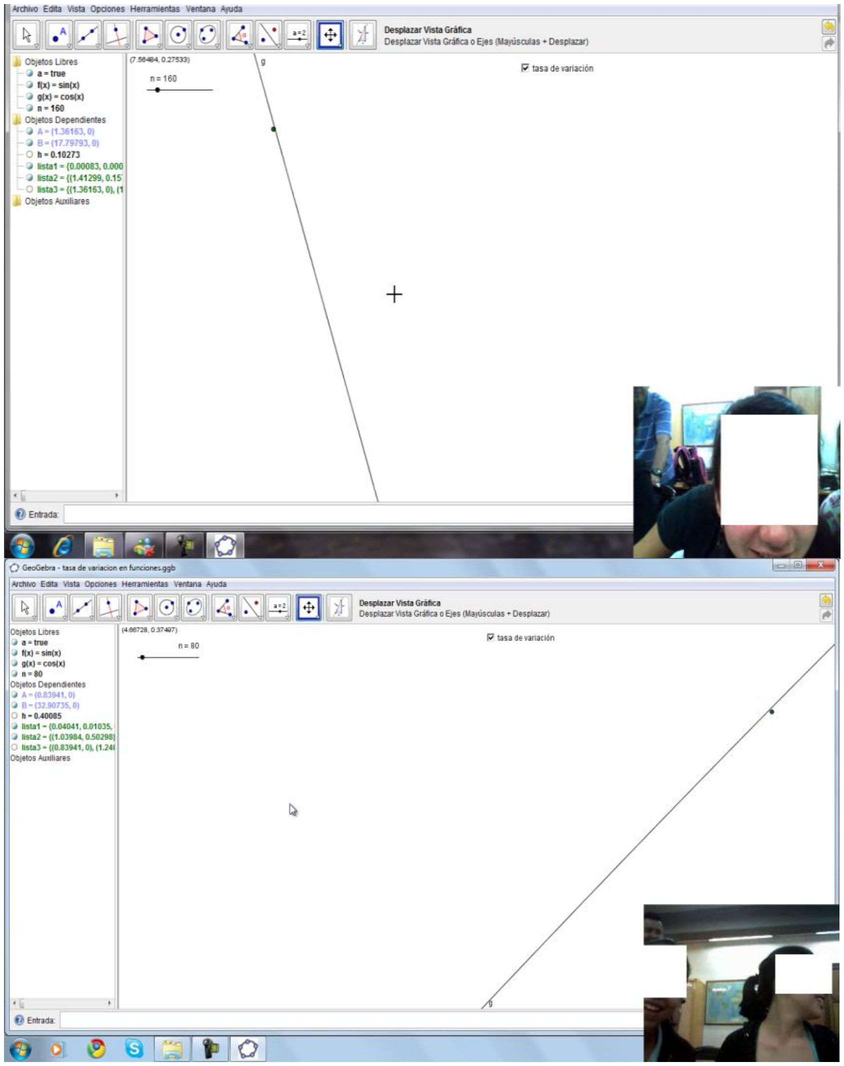


Ilustración 40. Marcela observa que los puntos de la tasa de variación no coinciden con la función derivada

Al preguntarles el porqué de ese acontecimiento, se generó el siguiente diálogo.

Investigador	:	*¿Por qué no es el coseno?*
Marcela	:	*Por que no da, no coincide exactamente!. (risas risas risas) engañados, engañados!*
Estefanía	:	*Que nos engañaron porque nos dijeron que la derivada del seno era el coseno*
Investigador	:	*¿Seguras que las engañaron?*

La estudiantes intentaron presentar un argumento que justificara este hecho, sin embargo no lograron encontrarlo; afirmaban: *"de primer ojazo coincide""jummm, como de cincuenta mil ojazos coinciden, pero no da*". Las estudiantes seguían bastante motivadas y solicitaron al investigador una explicación del hecho; ante ello, el investigador les pidió que, una vez los puntos se observen separados, aumentaran el valor del deslizador (ver Ilustración 41)

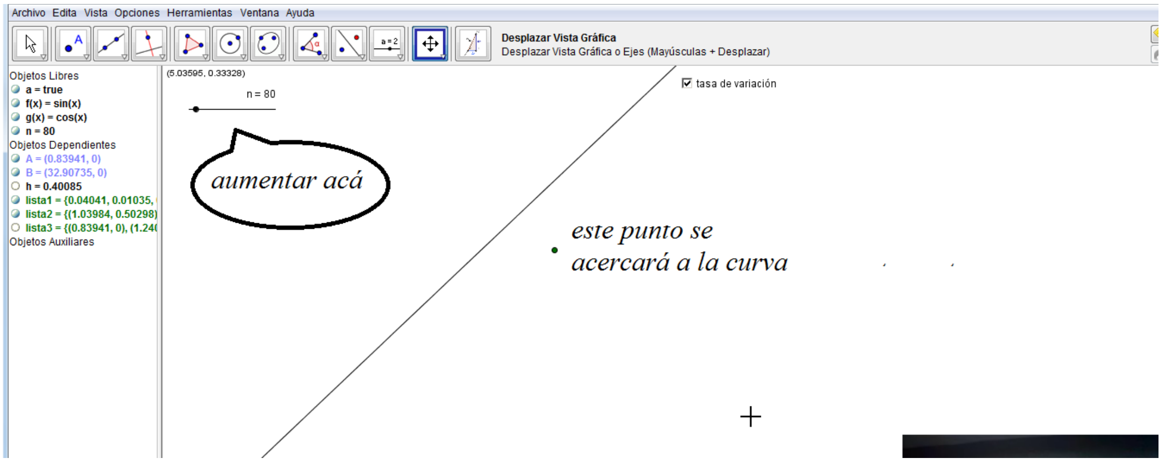


Ilustración 41. Procedimiento para observar la relación entre las funciones: tasa de variación y derivada

El uso reiterado de este procedimiento permitió que Cristina verbalizara: *"a medida que n aumenta el punto se acerca a la función"*. A pesar de ello, una explicación de tal fenómeno, aun era necesario. En las inquietudes de las estudiantes, se formulan algunas preguntas que conducen a una justificación.

Marcela	:	*Profe! Pero por qué no da? Si se supone que la tasa de variación es la derivada!*
Investigador	:	*Bien, ¿cuál tasa de variación es la derivada?*
Estudiantes	:	*Uhhhhhmmmmmm*
Marcela	:	*La tasa de variación instantánea,*
Investigador	:	*¿Entonces?*
Estudiantes	:	[silencio]
Investigador	:	*Acá, ¿esta es la derivada? [señalando un triangulito de la gráfica]*
Estefanía	:	*No, porque es la tasa de variación media*
Investigador	:	*Entonces, ¿ese punto es la derivada?*
Marcela y Cristina	:	*Es la tasa de variación media*
Investigador	:	*Entonces para que fuera la derivada que tiene que pasar*
Alexandra	:	*Para que fuera la derivada tenía que hacerlo en el punto.*
Investigador	:	*Y para ello ¿qué necesito?*
Estudiantes	:	*Uhmmmmm*
Estefanía	:	*Acercase más!*
Investigación	:	*Y eso ¿cómo se hace?*
Alexandra	:	*¿Aumentando n?*
Investigación	:	*Exacto, entonces, ¿esta gráfica que tengo acá es la gráfica de la*

		derivada?
Estudiantes	:	*Noooo*
Investigador	:	*Es la ¿gráfica de quién?*
Alexandra	:	*De la tasa de variación media*
Investigador	:	*Y para obtener la derivada que tiene que pasar*
Alexandra	:	*Acercarse más!*

En ese momento, el investigador explica el por qué ese acercamiento ocurre cuando se aumenta el deslizador *n*. así las estudiantes consiguen observar la propiedad

> *"El límite de la función tasa de variación media cuando los segmenticos* [distancia horizontal de los triángulos que representan la tasa de variación media] *se acercan a cero, es la derivada de la función"*

Se observa en este último episodio que, a pesar de haber relacionado la noción de tasa de variación instantánea con la noción de límite para obtener la derivada, fácilmente se desvincularon de dicha noción, obteniendo así el vínculo entre la función tasa de variación no instantánea y la derivada. En ese sentido, cuando el zoom del software posibilitó la confrontación entre sus nociones erróneas y la derivada se propició un movimiento en el proceso de comprensión hacia el establecimiento de una "propiedad" que le asocia al límite de la función tasa de variación, la función derivada (ver Ilustración 42)

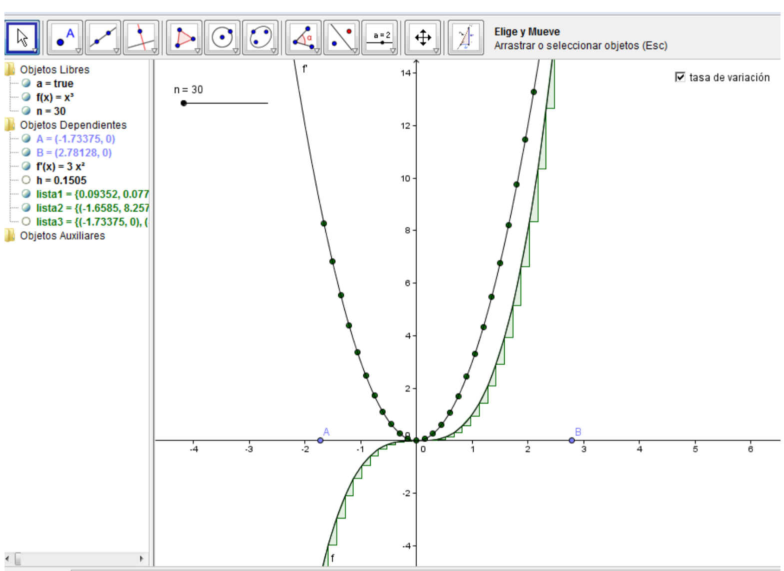


Ilustración 42. Relación entre la función tasa de variación y la función derivada

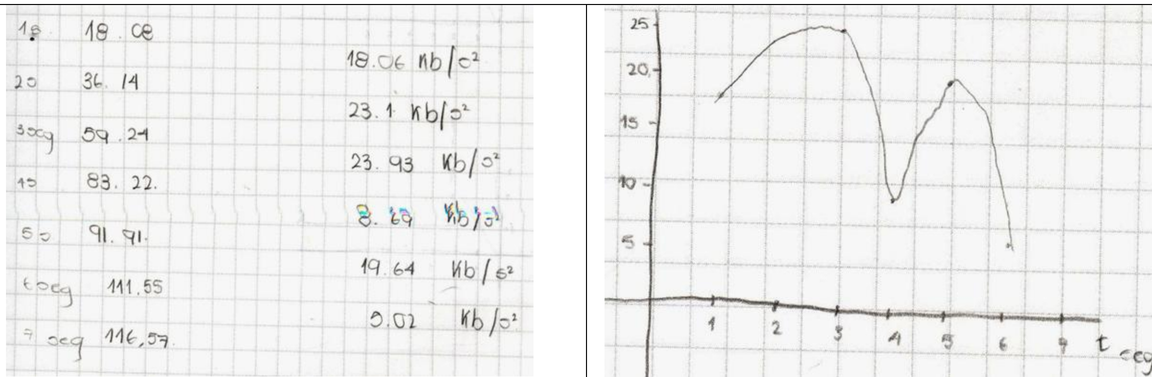
5.9 Imágenes asociadas al cambio de la tasa de variación

En el apartado anterior presenté evidencia de cómo las estudiantes consiguieron asociar cualitativamente los cambios de la tasa de variación con las concavidades. A pesar que Marcela había presentado argumentos con respecto a la segunda derivada, su abordaje de la situación "*descarga de un archivo*" dio cuenta que, al igual que sus compañeras, inicia con una descripción del cambio de la tasa de variación asociado con las concavidades.

Para formarsen una idea de cómo cambia la rapidez con la que descarga el archivo, las estudiantes construyeron un registro numérico de algunos datos de la descarga del archivo y a partir de allí generaron descripciones como "va mas rápido", "en este intervalo se vuelve más lenta" etc. y simplificaron algunos datos generaron una tabla

Marcela	:	*Empieza muy rápido*
Cristina	:	*Empieza como de una profe!*[indicando un cambió demasiado rápido]
Investigador	:	*Si empieza de una es porque qué?*
Cristina	:	*Empieza muy ligero a descargar*
Marcela	:	*Empieza demasiado rápido*
Investigador	:	*Ok, empieza demasiado rápido, ¿Y luego?*
Marcela	:	*Luego disminuye mucho*
Cristina	:	*Ujummm [confirmando lo que había dicho Marcela]. O sea, es como que de 12 salta como a 13 y luego como a 20.*
Investigador	:	*Ustedes me dijeron que ahí había una aceleración ¿cierto?*
Estudiantes	:	*Sí*
Investigador	:	*Esa aceleración es cada vez más rápida o ¿qué?*
Marcela	:	*Empezó como fát* [muy rápido] *y ya empezó como a bajar*
Investigador	:	*Con eso que me acaban de decir, ¿Cómo sería la gráfica en ese pedacito de tiempo?*

La **Ilustración 43** se muestra el primer acercamiento que tuvieron Cristina y Marcela a la comprensión de la tasa de variación involucrada en la situación "Descarga de un archivo"



(a) (b)

Ilustración 43. Registro numérico y gráfico de la tasa de variación elaborado por Cristina y Marcela

Por su parte, Estefanía y Alexandra dieron cuenta que haberse enfocado inicialmente en los crecimientos y decrecimientos más que en las concavidades. En las siguientes ilustraciones se muestra la gráfica construida por Alexandra y la secuencia de acciones físicas que Estefanía hizo con sus manos para expresar la forma de la gráfica que representaba la descarga del archivo. Fue así como a través de la pregunta: "*¿Cómo cambia esa rapidez?*" estas dos estudiantes también comenzaron a observar mayor cantidad de valores del comportamiento de la descarga y así decir *"va más lento, por eso la grafica es así"* describiendo una concavidad hacia abajo.

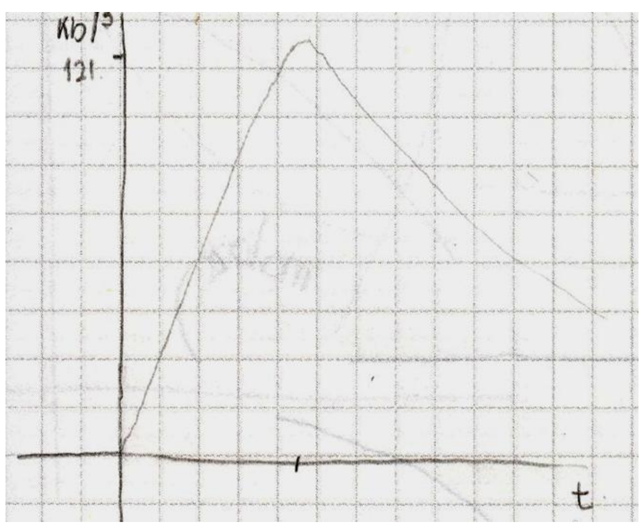


Ilustración 44.Gráfica construida por Alexandra

Ilustración 45. Secuencia de acciones físicas mostradas por Estefanía

En un segundo momento de la situación: “descarga de un archivo” las estudiantes se involucraron en la descripción de la manera como se descargaría un archivo dada la gráfica de la relación *velocidad vs tiempo*. La gráfica considerada corresponde a una función por tramos (ver **Ilustración 46**) presentada a través del software GeoGebra.

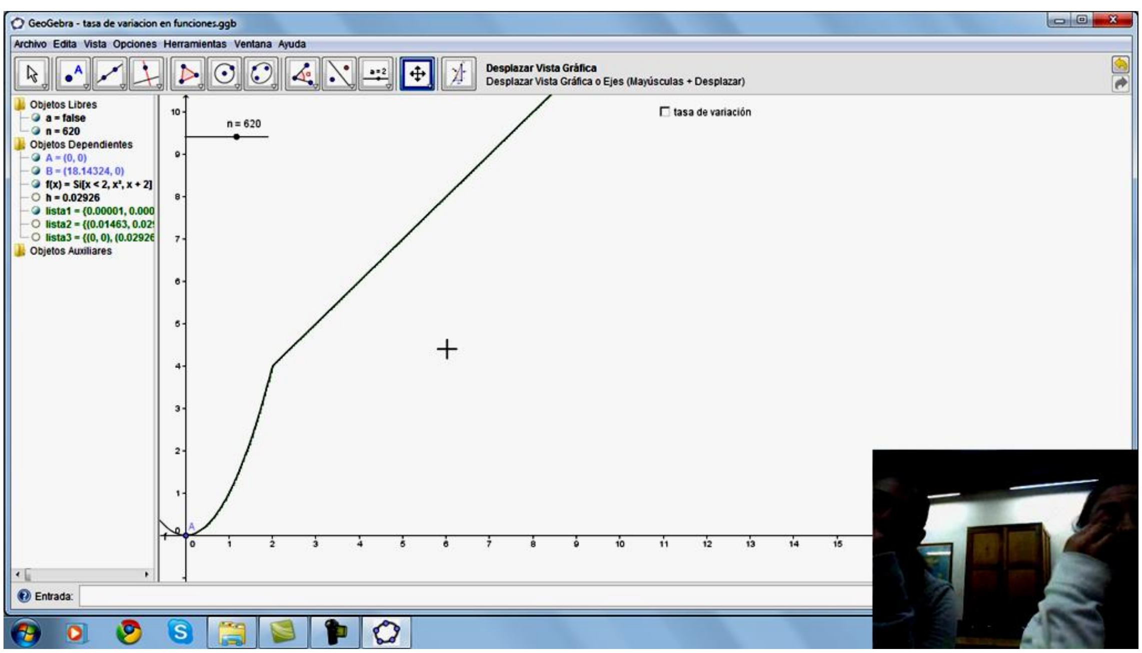


Ilustración 46. Ambiente del segundo momento de la situación “descarga de un archivo”

En esta parte de la situación las cuatro estudiantes mayores evidencias de establecer las relaciones entre concavidades y la manera en que cambia la tasa de variación. Por ejemplo, en la medida que Cristina y Marcela iban desplazando el cursor del mouse sobre la curva (**Ilustración 47**) iban diciendo "acá va más rápido" con lo cual evidenciaba haber reconocido que en la medida que la gráfica cóncava hacia arriba crece, la tasa de variación cambia cada vez más.

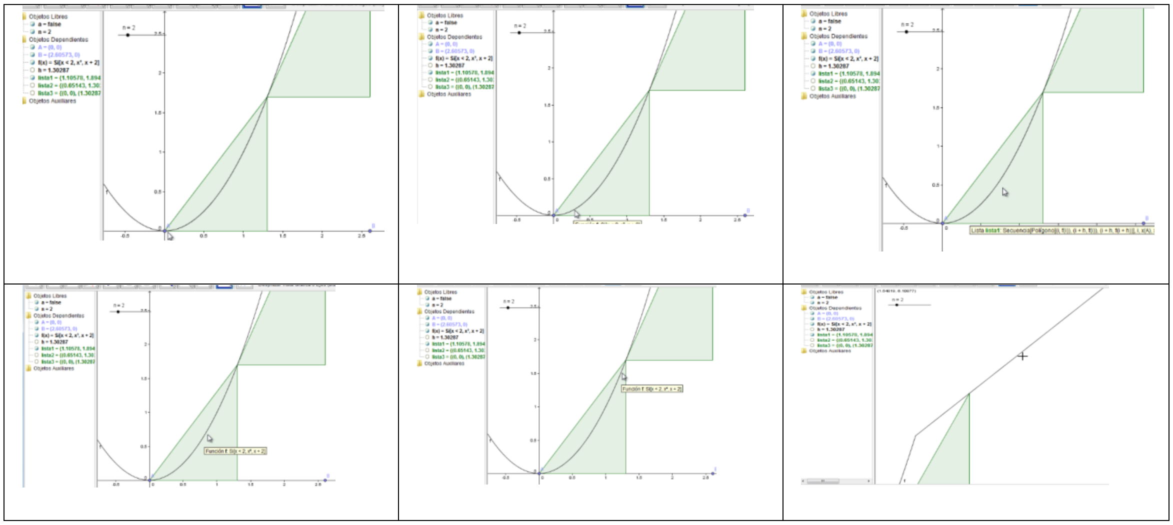


Ilustración 47. Secuencia de movimientos realizados por Cristina y Marcela en el desarrollo de la situación

Los elementos acá expuestos presentan mayor evidencia a los planteamientos de Villa-Ochoa (2011) quien señala que, aun cuando algunos estudiantes no hayan desarrollado nociones del formales del cálculo, pueden establecen relaciones entre la manera como cambia la tasa de variación y las concavidades de la gráfica.

Observando la gráfica de la función por tramos de la **Ilustración 46**, Estefanía y Alexandra determinaron el cambio en el comportamiento de la función en el punto x=2. El investigador las cuestionó frente al comportamiento de la variación de la función, y ellas de manera discreta, calcularon algunos valores de la tasa de variación media en cada tramo de la función. A partir de sus cálculos aritméticos determinaron que la tasa de variación del tramo cuadrático correspondía a una recta y que en el punto x=2 la tasa de variación también cambiaba. En la **Ilustración 48** Alexandra representa con sus manos el punto en cual hay un cambio en la manera como se comporta la tasa de variación.

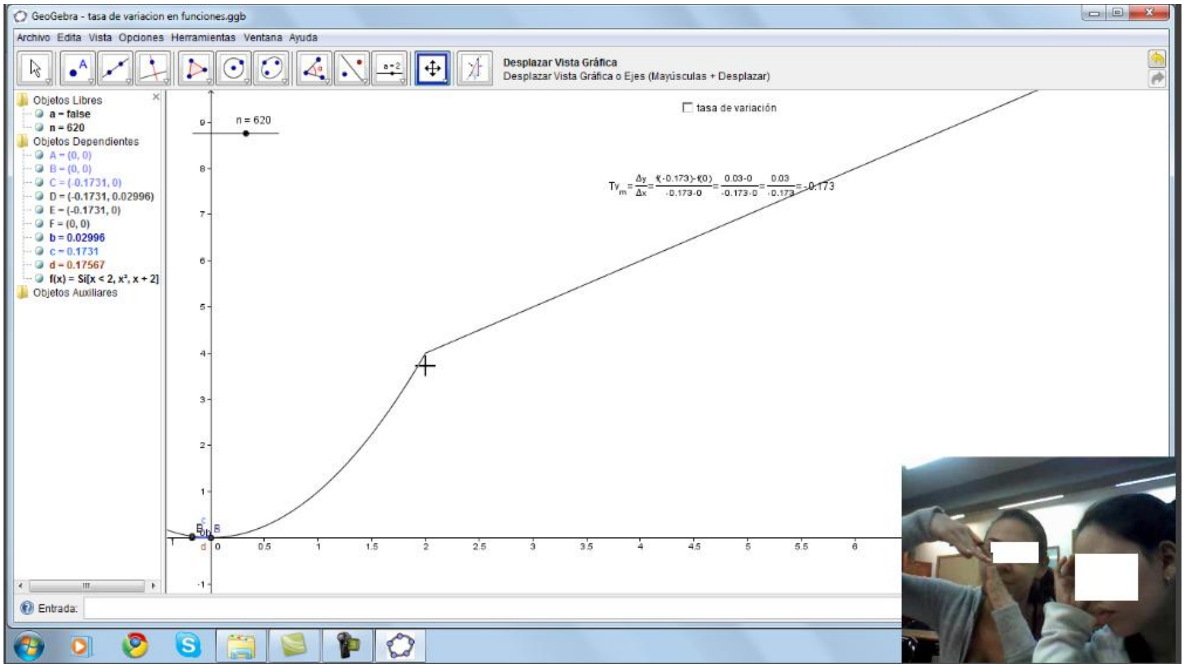


Ilustración 48. Representación de Alexandra del cambio de tramo de la función.

El cambio del comportamiento de la función tasa de variación de un tramo lineal (oblicuo) un tramo de un función constante hacia que las estudiantes se sintieran cuestionadas y dudosas de tal comportamiento. El siguiente diálogo se convierte en evidencia de este hecho:

Alexandra : *Hace una diferencita, pero muy chiquita, ¿si me entiende?* [ver gestos en la ilustración 48]*Pero, del dos para allá se vuelve recta* [constante].

Estefanía : *Porque cada vez va creciendo uno, pues es constante*

Investigador : *¿Es constante quién?*

Alexandra : *La tasa de variación, y tiene una pendiente de dos antes de dos y luego es recta* [constante].

Después de revisar los valores discretos que las estudiantes habían calculado, Alexandra pregunta:

Alexandra : *Profe ven, pero tengo una pregunta: hasta dos va una recta, pero del dos al tres comienza en uno, entonces ¿empiezo de aquí un recta así pa' allá?*[refiriéndose a la manera de dibujar la discontinuidad de la derivada]

Investigador : *Y ¿Cuál es la duda?*

Alexandra : *Que…¿eso si queda así tan raro?*

Investigador : *¿Por qué ese salto tan raro?*

Estefanía : *Porque no es continúa*

Investigador : *Y ¿por qué tendría que ser continúa?*

Alexandra : *Porque es no es normal, rsrsrsrsrs*

Investigador : *Ahora viene entonces una pregunta que todavía…*[sin terminar la pregunta Estefanía interrumpe y dice:]

Estefanía : *En el dos...* [reflejaba cierto grado de cansancio]

Investigador : *Sí, que pasa entonces en el dos? ¿Cómo es la tasa de variación en dos?*

Estefanía : *No hay!*

Alexandra : *Si hay, nos toca hallarla con el límite*

Investigador : *Aja*

Estefanía : *Pero… el límite…*

Alexandra : *El límite no existe porque cuando se acerca por derecha… ahí yo siempre me confundo, derecha o izquierda en la gráfica, mmmm, bueno, cuando me acerco por derecha tiene a tres pero cuando me acerco por izquierda tiene a uno.*

Investigador : *Entonces, ¿Cuál es la tasa de variación en dos?*

Estefanía : *No existe!*

Alexandra : *No*

Estefanía : *No existe porque los límites laterales no existen*

Investigador : *Y eso ¿cómo se ve en la gráfica?*

Estefanía : *Discontínua*

En ese momento las estudiantes construyen la gráfica que se presenta en la Ilustración 49

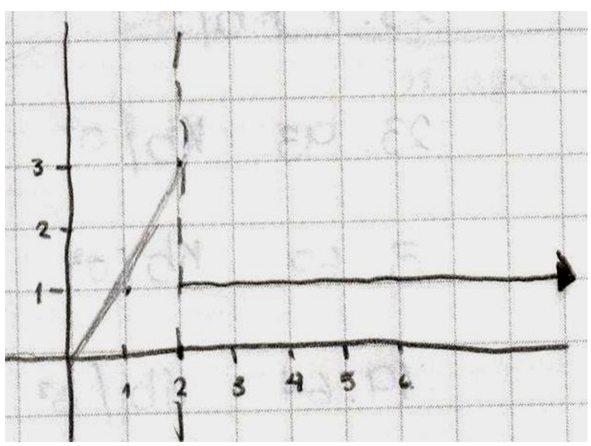


Ilustración 49. Gráfica construida por Alexandra en el segundo momento de la situación “descarga de un archivo”

Esta acción de establecer relaciones entre las concavidades y la manera como cambia la tasa de variación, puede interpretarse como un indicador del estrato cinco

(*Formalising*)pues, en palabras de Pirie y Kieren, en este estrato el estudiante está en la capacidad de conocer las propiedades para abstraer características comunes de clases de imágenes, y aunque el lenguaje no sea estrictamente un lenguaje matemático formal las indicaciones de los estudiantes deben ser equivalentes a la definición matemática apropiada.

Un elemento adicional que confirma la presencia de estas estudiantes en el estrato del *Formalising* fue que ellas pudieron usar algunas de las propiedades de conocimientos previos como el de límite, para visualizar algunas propiedades de la función tasa de variación. En este caso, la definición de la existencia de un límite a partir de la comparación de los límites laterales se convirtió en un conocimiento previo que permitió comprender la discontinuidad en la función tasa de variación y la no existencia de la tasa de variación instantánea en un punto de "pico" de una función puesto que hay un cambio brusco en la función tasa de variación.

Con el desarrollo de estas actividades se observa como el proceso de comprensión de las estudiantes transcurre de maneras diferentes y a través del uso de las herramientas y medios que se convierten en "motor" de comprensión. En el siguiente capítulo, me dedicaré a realizar algunos análisis adicionales frente a los medios y demás aspectos que intervinieron en el proceso de comprensión.

Capítulo 6

6. LA COMPRENSIÓN DE LA TASA DE VARIACIÓN. ALGUNOS ANÁLISIS ADICIONALES

En el capítulo anterior se observó cómo en el desarrollo del módulo de enseñanza, las cuatro estudiantes que participaron de este estudio, iban evolucionando de diversas maneras en la comprensión de la tasa de variación. En este capítulo, me dedicaré a presentar algunos de los elementos que promovieron la evolución de dicha comprensión y los analizaré enmarcado en otros desarrollos teóricos sobre el tema.

6.1 El papel de los software: *GeoGebra* y *Modellus* en la evolución de la comprensión de la tasa de variación

Actualmente en Educación Matemática existen diversas investigaciones que aportan elementos teóricos y empíricos acerca del uso de la tecnología en las aulas de clase. Algunos de estos elementos han permeado, con diferentes niveles de profundidad, las teorías, enfoques y perspectivas desarrolladas en el seno de la Educación Matemática.

En el caso particular de la teoría de Pirie y Kieren, investigadores como Martin y Pirie (2003) han generado algunas reflexiones en torno a cómo el uso de herramientas tecnológicas puede contribuir a la evolución de la comprensión matemática. En su artículo, Martin y Pirie mencionan el trabajo de Borba y Villarreal (1998) cuando afirman que el verdadero poder de la computadora es reorganizar la actividad humana y el pensamiento; y, por lo tanto, se hacen importantes a la hora de diseñar tareas que deliberadamente aprovechen la energía de la computadora con el fin de evitar que no sólo sea utilizada para la "verificación de los resultados o la ilustración de un tema determinado".

Como pudo evidenciarse en los capítulos precedentes, para esta investigación se diseñó un módulo de enseñanza el cual estuvo orientado por situaciones en las cuales los software: *GeoGebra* y *Modellus* recrearon procesos de variación dinamizando la comprensión de la noción de tasa de variación. El uso de software educativo se convirtió en uno de los elementos que promovió en las estudiantes la comprensión de la tasa la tasa de variación; para ilustrar este hecho analizó en las secciones 6.1.1, 6.1.2 y 6.1.3 algunos episodios en los cuales el uso de software fue un elemento primordial para la evolución de la comprensión de dicha noción.

6.1.1 La representación simultánea ofrecida por el software GeoGebra

Tal y como se observó en el capítulo anterior, en la situación "rectángulo inscrito" el software GeoGebra proporcionó una visualización de un proceso dinámico en el cual el área de un rectángulo variaba conforme se movía uno de los vértices del mismo. La situación involucró una simultáneamente las representaciones: cinemática (la situación en movimiento), cartesiana y numérica del fenómeno dinámico. Esta simultaneidad de representaciones se obtuvo como resultado de los análisis obtenidos en el apartado 5.1 en donde se mostró que la comprensión de las estudiantes divergía de acuerdo con la representación que se estuviera usando. Es decir, las estudiantes tenían imágenes de un mismo concepto que, al depender de la representación usada, se daban cuenta de diferentes estratos de comprensión paralelamente.

A pesar que el software proporcionaba la simultaneidad de las representaciones, pudo observarse en los apartados 5.2 y 5.3que no hubo una coordinación automática entre algunas de ellas. En la Ilustración 50se presenta el ambiente con el cual se inició el estudio del movimiento de la situación "rectángulo inscrito"; en ella puede observarse de manera general los momentos por los cuales las estudiantes pasaron de la representación cinemática a la gráfica. Particularmente, el segundo momento: "transferencia de medidas" mostró que el movimiento de los segmentos IJ y JL dependía del movimiento realizado en el punto E del cuadrado. Las estudiantes rápidamente asociaron el segmento IJ al *segmento e* y JL al *área A* del rectángulo inscrito; de la misma manera, la opción traza permitió establecer la relación entre el gráfico de la función cuadrática y la representación cinemática. Después de activar el momento correspondiente a la "transferencia de medidas" se presentó el siguiente diálogo:

Investigador : *Que significan esos dos segmentos* [refiriéndose a IJ y JL]
Estefanía : *¿Son el punto?*

Investigador	:	*¿Cuál punto?*
Estudiantes	:	[silencio y continuaban moviendo en punto E]
Alexandra	:	*Son el área y el punto E*
Investigador	:	*¿Por qué Alexandra?*
Cristina	:	*Mire que tienes los mismos valores*
Marcela	:	*Sí, tiene los mismo valores*

Estas verbalizaciones de las estudiantes se convirtieron en evidencia de que las estudiantes observaron que las variables dependiente e independiente estaban en correspondencia tanto en la representación cinemática como en la gráfica. Estos elementos parecieron ser suficientes para que coordinación entre estas dos representaciones se mostrara más natural.

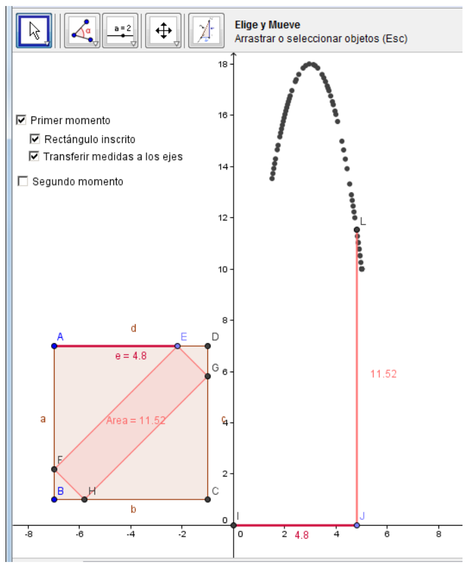


Ilustración 50. Coordinación de las representaciones cinemáticas y gráfica

La coordinación entre las representaciones geométrica (triángulo incremental) y numérica (la ecuación numérica representada por el "texto dinámico", ver Ilustración 51) no se presentó. Tal y como se observó en el apartado 5.3, en las entrevistas dieron cuenta de la necesidad de un diálogo que promoviera tal coordinación. Esta falta de coordinación, pudo ser consecuencia de la ausencia de indicaciones en la situación que sugirieran en las estudiantes centrar la atención en la conexión entre dichas representaciones.

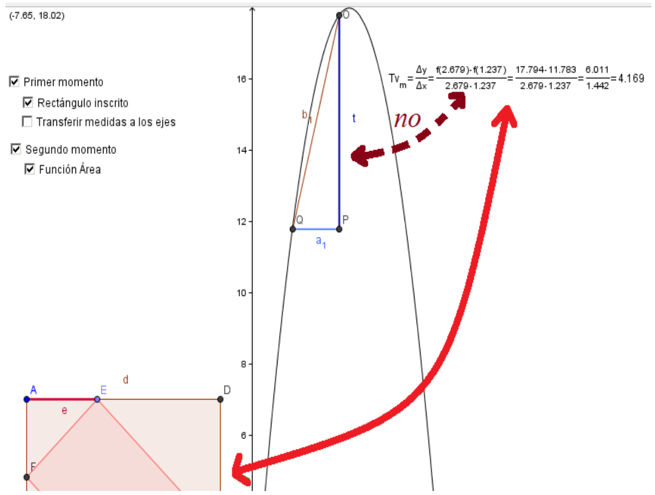


Ilustración 51. Coordinación entre las representaciones proporcionadas por GeoGebra

Estos resultados sugieren que aunque el software GeoGebra proporciona una simultaneidad de representaciones, no es suficiente con ello para lograr que las estudiantes a coordinarlas de manera inmediata. De ese modo, se confirma una vez los planteamientos de Villarreal (1999) cuando reporta la necesidad de coordinar representaciones a través de ambientes computacionales superando la dicotomía entre algunas de ellas.

Con el diseño de orientaciones que se propongan promover la coordinación entre las diferentes representaciones que intervienen en una situación como la discutida en este apartado, se espera obtener mayores oportunidades que permitan sustentar las ideas planteadas por Villa-Ochoa y Ruiz (2010) quienes señalan que:

> "[…] la representación matemática proporcionada por el software GeoGebra […] más que una suma de representaciones [cinemáticas], algebraicas, numéricas y geométricas, puede considerarse como una Unidad en la cual los registros están armonizados, es decir dinámicamente relacionados, promoviendo la coordinación y la comprensión de los objetos matemáticos (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p. 527).

6.1.2 GeoGebra y Modellus en la comprensión de la tasa de variación Instantánea

En el apartado 5.5 se mostró como a través de la interacción con el software GeoGebra, las estudiantes alcanzaron a construir una imagen del concepto de límite. Particularmente llama a atención el caso de Cristina, quien era la única estudiante que no estaba cursando la asignatura Cálculo pues ella, junto con sus compañeras, consiguió “inferir” el valor del límite de la función a través de acercamientos sucesivos a $x=2$. La presencia del “texto dinámico”(ver Ilustración 52) en el ambiente de la situación jugó un papel fundamental para observar que la imagen de límite construida a través de la aproximación numérica no era suficiente para ofrecer a dicho valor un estatus de “existencia”, pues sólo a través de ese procedimiento el límite sólo es un valor “supuesto”.

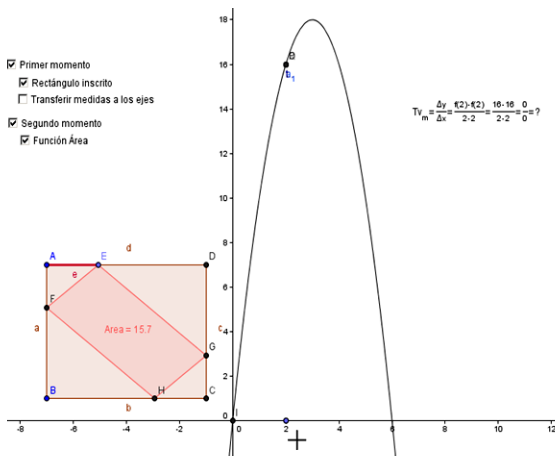


Ilustración 52. Ambiente de la situación *“rectángulo inscrito”*

En el apartado 5.7 se presentaron los diferentes momentos por los cuales atravesaron las estudiantes hasta llegar a comprender la tasa de variación instantánea (velocidad instantánea). En este proceso, el software *Modellus* posibilitó la visualización simultánea de las representaciones cinemática, gráfica, simbólica y tabular. Ello, aunado con el hecho de observar la noción de límite como una velocidad instantánea (cantidad de magnitud física con un estatus de existencia) ofreció elementos para superar la noción de límite como “supuesto” y poder así aceptarlo como un valor “real”. Como evidencia de este hecho retomo el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Cuando el tiempo está cerquita de dos, la velocidad va estar cerquita de:*
Estudiantes	:	*Cuatro*
Investigador	:	*Y exactamente en dos, ¿Cuál va a ser la velocidad?*
Alexandra, Marcela, y Estefanía	:	*Cuatro*
Investigador	:	*¿Tiene sentido hablar de cuatro?*
Estefanía y Alexandra	:	*Sí.*
Investigador	:	*Hay algún problema si yo, con GeoGebra montara* [superpusiera] *el punto y me diera cero sobre cero?*

Estefanía : *No!*

Alexandra : *No, porque se puede calcular por límites!*
Estefanía : *Se pueda hallar por límites.*

6.1.3 GeoGebra y Modellus en la comprensión de las funciones derivada y tasa de variación

El uso de los software GeoGebra y Modellus promovió en las estudiantes una evolución de la comprensión que, para que caso de la función tasa de variación, estuvo comandada por procesos de razonamiento inductivo de los cuales se obtuvo como resultados la función tasa de variación.

Conforme fue descrito en el apartado 5.8, después que las estudiantes construyeron la noción de tasa de variación instantánea comenzó el proceso hacia la construcción de la noción de función de tasa de variación. Dicho proceso se inició con el cálculo de la velocidad instantánea de algunos valores del dominio de la función usando el software *Modellus*; de este modo, las estudiantes calcularon las velocidades instantáneas en t=1, t=3, t=4 y t=5, obteniendo las velocidades v=8, v=0, v=-4 y v=-8 respectivamente. Al observar esta secuencia de velocidades las estudiantes rápidamente conjeturaron que era una secuencia lineal y decreciente de números. En este aspecto, las gráfica proporcionada por el software *Modellus* se convirtió en una herramienta que ofreció argumentos visuales para validar dicha conjetura (ver Ilustración 32).

El uso "ingenuo" de software como el GeoGebra puede proporcionar en los estudiantes la visualización de algunos comportamientos que, en ocasiones, conllevan a la formulación de "propiedades" que son falsas generando así posibles errores de tipo conceptual. Este riesgo pudo evidenciarse cuando al estudiar la función tasa de variación las estudiantes la asumieron como equivalente a la función derivada. En la medida que las estudiantes interactuaban con el software visualizaban que los puntos de la función *tasa de variación* "coincidían" con la gráfica de la función derivada. En la Ilustración 53 la secuencia de puntos negros representa la tasa de variación y la otras dos funciones corresponden a las funciones *f(x)= sen(x)* y *f'(x)=cos (x)*.

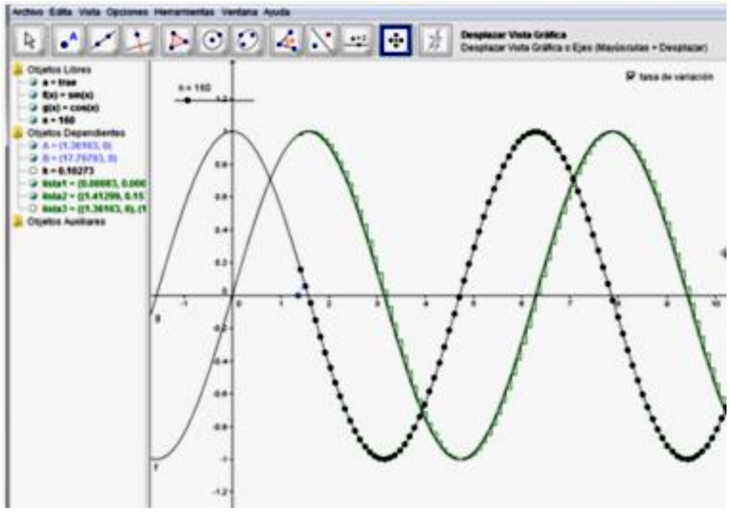


Ilustración 53. Función tasa de variación y función derivada de *f(x)=sen(x)*

En el caso de esta investigación, este tipo de visualizaciones condujo a que las estudiantes omitieran la noción de límite e hicieran una igualdad entre la función tasa de variación y la función derivada. Sin embargo, el mismo software propició las posibilidades para que con el uso adecuado de algunas herramientas, se pueda ofrecer argumentos para demostrar la invalidez de tales conjeturas. Fue así como al finalizar el apartado 5.8, a través de la herramienta *zoom*, las estudiantes pudieron visualizar que los puntos se separaban de la gráfica de la función derivada. Esto condujo a una discusión en la que se concluyó la importancia de la noción de límite para una definición entre las funciones tasa de variación y derivada.

Los dos episodios presentados en los numerales 6.1.1 y 6.1.2, son sólo una muestra del papel que jugó el uso de los software: *GeoGebra y Modellus* en la evolución de la comprensión matemática de la tasa de variación. Todo ello se convierte en evidencia de que dicho proceso de comprensión fue *mediado* por las diversas potencialidades del software y, a su vez, ofrece elementos para apoyar las ideas presentadas por Martin y Pirie (2003) cuando afirman que para el promover la evolución de la compresión matemática no es suficiente con exponer a los estudiantes a la tecnología, sin proporcionar intervenciones apropiadas de enseñanza de acompañamiento, aunque inicialmente puede ser un elemento motivador y fructífero, puede también actuar para limitar y reducir las posibilidades de un entorno en el que los estudiantes, el ordenador y profesor podrían ser compañeros de ocasión y promulgar el crecimiento de la comprensión matemática.

A pesar de lo anterior, los elementos discutidos en este capítulo también permiten contrariar los postulados de los mismos autores cuando afirman que *la computadora o calculadora son sólo una herramienta, nada más. Su valor radica en la forma en que complementa el ambiente total de aprendizaje* (Martin & Pirie, 2003).Contrario a ello, se observa en varios apartes del capítulo 5 cómo el uso de la tecnología fue creando caminos en ese proceso de comprensión confirmando así los posicionamientos de Villarreal y Borba (2010) cuando afirman que la separación entre seres humanos y medios no tiene sentido, pues los medios son componentes del sujeto epistémico, no son simples auxiliares ni complementos, sino una parte esencial y constitutiva de éste. Para estos investigadores, los *medios* son tan relevantes que el uso de diferentes tipos de ellos conduce a la producción de diferentes tipos conocimiento.

Un los productos que se deriva de esta tesis doctoral es el trabajo que se desarrolla en el marco de la Maestría en Educación titulado: *"Génesis instrumental en el estudio de las cónicas como lugares geométricos: el caso de GeoGebra*" En dicho trabajo, su autor bajo mi asesoría, analizamos los aspectos dinámicos que emergen en el estudio de las cónicas, y análogo a lo que acontece con la comprensión de la tasa de variación, se observa que el uso del software GeoGebra posibilita la creación de un ambiente en que se permite reorganizar la actividad humana y el pensamiento. Como producto de ambas investigaciones en Villa-Ochoa y Ruiz (2010) (ver anexo 3) discutimos cómo a través de la visualización proporcionada por el software GeoGebra nuevas relaciones matemáticas van emergiendo de tal manera que promueven nuevos elementos para la comprensión matemática.

En el artículo mencionado anteriormente usamos los elementos teóricos de Borba y Villarreal (2005) quienes presentan un constructo teórico denominado *Humans–with–media* en el cual se discute cómo el conocimiento matemático es el resultado de una construcción de un colectivo pensante de *seres-humanos-con-medios*. Estos autores puntualizan que los medios empleados para comunicar, representar y para producir ideas matemáticas condicionan el tipo de matemáticas que son construidas y el tipo de pensamiento a ser desarrollado en esos procesos.

El constructo teórico de estos investigadores está fundamentado epistemológicamente en los planteamientos de Lévy (1993) quien, según Borba y Villarreal (2005), afirma que la tecnología y los artefactos deben ser vistos en interrelación con los seres humanos, de dicha interrelación depende la manera en que producimos conocimiento; según Lévy, las bibliotecas, las ciudades y los artefactos son parte de la manera en que conocemos (Villa-Ochoa & Ruiz, 2010, p. 517).

Los elementos plateados en este apartado ofrecen evidencia de cómo la evolución de la comprensión de la tasa de variación fue un proceso mediado por los medios proporcionados por el ambiente en el cual se desarrolló (software educativo, tablero, lápiz y papel, profesor); esto crea la necesidad reformular aquellos posicionamientos filosófico que asumen la tecnología como simples herramientas, para ofrecerles, más que ello, un estatus de reorganizadores del proceso de comprensión.

6.2 La comprensión de la tasa de variación. Una mirada desde la literatura

Desde la revisión de la literatura presentada en el primer capítulo de este documento se observó que, aunque el concepto de derivada ha sido objeto de investigación desde múltiples acercamientos, aun los procesos de comprensión asociados a este concepto por la vía de la variación son un campo abierto y fructífero de investigación. En este apartado ofreceré una mirada a los resultados presentados en el capítulo anterior desde las principales investigaciones reportadas en el primera parte de esta tesis.

6.2.1 Momentos conceptuales en la comprensión de la tasa de variación

En esta investigación se pueden identificar tres grandes momentos conceptuales asociados a la comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse al concepto de derivada; ellos son: la comprensión de la tasa de variación media, de la tasa de variación instantánea y de la función tasa de variación. Estos tres grandes momentos, están en coherencia con los planteamientos de Zandieh (2000), Carlson et al. (2003), Dall'anese (2006), Sánchez-Matamorros et al. (2008), Navarro y Pérez (2010), entre otros; sin embargo, es esta pesquisa estos tres momentos no fueron mutuamente excluyentes, sino que, por el contrario, en la medida que la comprensión de la tasa de variación iba evolucionando requería de *imágenes* asociadas a los momentos precedentes.

A continuación describiré cómo se dio el desarrollo de estos tres momentos en el marco de esta investigación.

Momento 1. La tasa de variación media de variación

Basado en las evidencias presentadas en el capitulo anterior, el momento de la tasa de variación media (razón de cambio promedio) estuvo caracterizada por creación y obtención diferentes imágenes, por ejemplo: *uso de descripciones cualitativas, comparación aritmética de dos estados, cantidad magnitud que describe el cambio promedio de una cantidad por unidad de cambio de la otra unidad*; cada una de estas imágenes estuvieron comprometidas en los estratos 1, 2 y 3 de la teoría de Pirie y Kieren y a su vez, estuvieron precedidas por nociones como las de razón, proporción, variable, función y por la capacidad de aceptar la noción de función como una manera de matematizar una relación de variación en un contexto dinámico. Estos elementos son en buena parte coherentes con los planteamientos de Navarro y Pérez (2010) cuando determinan los prerrequisitos que los estudiantes deben tener para iniciar el estudio de la tasa de variación (Nivel 0, en el modelo de van Hiele).

En el marco del modelo de van Hiele, Navarro y Pérez (2010) puntualizan que en la conversión de las palabras en imágenes y en el comienzo del proceso de reconocimiento de las características visuales del cambio se presenta la evolución al nivel 1. En coherencia con ello, en esta tesis pudo observarse un proceso análogo al descrito por estos investigadores; por ejemplo, cuando las estudiantes se comprometieron en buscar algún procedimiento para describir el comportamiento de la tasa de variación en funciones no lineales (ver **Ilustración 16**); sin embargo, estas imágenes estuvieron disponibles en diferentes momentos del desarrollo de la investigación y fueron evocadas en repetidas ocasiones a través de la característica *folding back* de la teoría de Pirie y Kieren.

Otro elemento, en el cual el estudio de Navarro y Pérez (2010) y esta investigación coinciden, está asociado con la idea de geometrizar la tasa de variación, es decir, construir imágenes visuales que permita una interpretación geométrica de la tasa de variación. La importancia de ofrecer elementos visuales para el estudio de la variación y la derivada también ha sido recomendada por diversos investigadores (Carlson et al., 2003; Dolores, 2007, Dolores et al., 2009; Villa-Ochoa, 2011) y cuya implementación en este estudio surgió de los trabajos previos reportados en Mesa y Villa-Ochoa (2007)y Villa-Ochoa y Mesa (2009) en donde proponemos el uso del mecanismo de triángulos (ver Ilustración 16 e **Ilustración 35**) para atender la necesidad de estudiar la variación en términos de su razón de cambio y la relación con sus formas gráficas en cuanto al crecimiento y concavidad. La propuesta de Navarro y Pérez (2009) armoniza con la de Carlson et al (2003) cuando llaman la atención sobre la necesidad de que los estudiantes construyan gráficas a partir de la comprensión del fenómeno, sin ecuaciones y sin números; por ejemplo, la forma como varía el nivel de un recipiente cuando en él fluye agua (ver situación 3 del cuestionario 1 en el anexo 1 de este documento).

Cuando las estudiantes consiguieron observar la tasa de variación media como una invariante que en un conjunto de situaciones responde a la pregunta *¿a qué tasa varían?* (apartado5.7) se generaron conexiones entre las diferentes imágenes que posibilitaron una evolución hacia el estrato 4 (PN) de la teoría de Pirie y Kieren. Previo a ello, los estudiantes ya habían explorado la noción de límite y la habían entendido como un valor "supuesto" que se infería de un proceso de aproximación.

Momento 2. La tasa de variación instantánea

Superar la idea de límite como un "supuesto", para reconocerlo como un valor numérico que existe y que da cuenta de la tasa de variación instantánea implicó un movimiento hacia el estrato de *formalising* (F) pues, en palabras de Pirie y Kieren, en este estrato, el estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer características comunes de clases de imágenes.

Según los resultados presentados en las secciones 5.5 y 5.7, el estatus de "existencia" de la noción de límite fue promovido por el estudio de un fenómeno de movimiento simulado por el software GeoGebra. El reconocimiento de la tasa de variación instantánea en una cantidad de magnitud física se mostró bastante importante para la superación de la evolución de la imagen de límite como un "supuesto". Este tipo de abordajes de la derivada a través del estudio de la cinemática han sido recomendados por Zandieh (2000, p. 112) quien señala que este tipo de contextos son propicios para ofrecer una interpretación de la derivada como “velocímetro”.

Si bien es cierto que en esta investigación se hizo énfasis principalmente en los aspectos visuales de la variación y la tasa de variación, también es cierto que dichos aspectos siempre estuvieron simultáneamente apoyados de una representación cinemática, numérica y una algébrica; ésto contribuyó a que desde su génesis, el proceso de comprensión estuviera mediado por este tipo de representaciones. A través de la interacción con el software GeoGebra, las estudiantes, desde sus primeras experiencias con el software, tuvieron la oportunidad es observar que el cambio de una variable se mide por la operación algebraica de la diferencia y, de la misma manera, que la tasa de variación entre dos variables está dado por la razón del cambio de la segunda variable con respecto a la primera. En este sentido, estos resultados se alejan de los planteamientos de Navarro y Pérez (2010) quienes señalan que dicha observación es uno de los descriptores del nivel 2 para el caso de la tasa de variación según el modelo de van Hiele.

Momento 3. Las funciones: derivada y tasa de variación

Para ubicarse en momento conceptual de comprensión de la función tasa de variación se observó en el apartado 5.8 que las estudiantes regresaron a los estratos iniciales (IM, IH) de la tasa de variación media y a partir de allí consiguieron construir, a través de un proceso inductivo, la noción de función tasa de variación que posteriormente, con las imágenes de concepto de límite, condujo a la función derivada posibilitándose nuevamente un movimiento hacia el estrato F. Puede observarse entonces que el proceso de comprensión reportado en esta tesis atraviesa por ciertos estratos, que contrario a las ideas presentadas en otros modelos, no se asumen como niveles que etiquetan de manera categórica y absoluta a un proceso de comprensión sino que contrariamente, desde la misma definición de comprensión de Pirie y Kieren, la comprensión se observa como un fenómeno no lineal y recursivo.

6.2.2 Algunas dificultades en la comprensión de la noción de tasa de variación

Conforme mencioné en el primer capítulo de esta tesis, algunos autores han reportado algunas dificultades en la comprensión de la noción de derivada. Por ejemplo, Artigue (citada por Sánchez-Matamorros et al., 2008) señala que hay dificultades que se manifiestan en el significado de la noción de derivada como límite de un cociente incremental (representación analítica; $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).-f(x)}{\Delta x}$ ó $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) o en su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente. Con respecto a estos elementos, en esta investigación las dificultades que se presentaron estuvieron basadas en dos aspectos; el primero de ellos tiene que ver con la omisión frecuente de la noción de límite que se evidenciaba en la ecuación de la derivada en un punto; y la segunda, está asociada al uso del concepto de variable como una representación de una cantidad que varía.

Con respecto al primer elemento, pudo evidenciarse en las discusiones del apartado 5.2que tres de las participantes de esta investigación ya tenían una imagen de la ecuación derivada en un punto. Este hecho se hizo evidente en la situación "rectángulo inscrito" cuando la herramienta diseñada para estudiar la tasa de variación presentaba el "texto dinámico" que artimetizaba dicha tasa. Cuando Estefanía y Marcela vieron el texto de la ilustración 20, de imediato dijeron: ¡*la derivada*!. Sin embargo, al preguntarles el porqué de la derivada, ninguna de ellas ofreció respuesta alguna, y a pesar que Estefanía consultó su cuaderno de cálculo, no alcazó de determinar que la diferencia entre la expresión presentada en el la pantalla del computador ($\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) difería de la derivada en la noción de límite. Conforme fue desarrollado en el apartado 5.8, las estudiantes aun después de haber superado la imagen de límite como "supuesto" continuaron omitiendo dicho expresión en la función tasa de variación.

Con respecto a este aspecto, vale la pena notar que no sólo fue una dificultad en la notación, sino que mas allá de ello, esta omisión reflejó una subordinación de los procesos infinitos inmersos en dicho proceso. Una prueba feaciente de este hecho se observó en el estudio de la función tasa de variación; cuando las estudiantes después de observar a través del zoom que la tasa de variación no coincidia con la derivada, dijeron: *"nos engañaron"* , *"la derivada del seno no es el coseno"*. Sin embargo, tal y como fue presentado a comienzo de este capítulo, la confrontación entre la imaginario de las estudiantes y la visualización del software reivindió nuevamente la importancia de esta noción en la comprensión de la derivada.

La noción de variable también presentó dificultades en las estudiantes, lo que a su vez contribuyó para que ellas no coordinaran las representación algebraica con la gráfica y cinemática.Esa poca coordinación entre las representaciones, ya había sido reportada por Habre y Abboud (2006) cuando, a través de su investigación, establecieron que diversas comprensiones de la derivada en la representación analítica divergen de las comprensiones en la representación gráfica. Esta falta de coordinación entre las representaciones de la función fue obsercada en los resultados que Alexandra proporcionó al primer cuestionario. De igual manera, en la situación “rectángulo inscrito” también se hicieron evidentes esa falta de coordinación entre las reprentaciones cinemática, numérica y geométrica. Ante este hecho en casi todos los momentos en los que intervinieron los software GeoGebra y Modellus se implicaron simultaneamente varias representaciones, hecho que ya fue presentado en la primera parte de este capítulo.

Finalmente, un elemento que también fue recurrente y se mostró como dificultoso de superar fue la imagen “arraigada” de correlación, que en la mayoría de los casos era asociada con la noción de proporcionalidad. Esta los efectos de estas nociones “arraigadas” fueron presentadas en el capítulo 5 y discutidas en Villa-Ochoa et al. (2011).

Capítulo 7

7. CONCLUSIONES

En el primer capítulo de esta investigación presenté una revisión bibliográfica desde la cual mostré que, a pesar de que existen gran cantidad de artículos discutiendo sobre el concepto de derivada, la investigación en este campo sigue siendo pertinente. Particularmente, se observó como en muchos de los casos, el estudio de la derivada desde una perspectiva geométrica esta hegemonizada por la interpretación de la tasa de variación media e instantánea como la pendiente de una recta secante y tangente respectivamente. Particularmente como lo afirma Tall (1989, citadoDa Costa André, 2008) esta noción es intuitiva, de ese modo, esta investigación se dedicó al estudio de la tasa de variación observada desde un mecanismo de triángulos como había sugerido en algunos de mis trabajos previos (Posada y Villa-Ochoa, 2006a, 2006b, Mesa y Villa-Ochoa, 2007; Villa-Ochoa y Mesa, 2009 y Villa-Ochoa, 2011). Con la implementación de este mecanismo no pretendo abolir la presentación clásica de la derivada como la pendiente de la recta tangente, contrario a ello, considero que un posterior abordaje desde esta perspectiva podría ser más fructífero en la comprensión del concepto de derivada.

El mecanismo de triángulo se mostró como un elemento que promueve una interpretación alternativa a la tasa de variación puesto que al usar simultáneamente representaciones geométricas, numéricas y cinemáticas los estudiantes pueden hacerse una imagen directa del crecimiento de una variable con respecto al crecimiento de la otra, idea que puede resultar más artificiosa en la recta tangente. De esta manera, en esta investigación pudo observarse que dicho mecanismo aportó elementos para la interpretación dinámicas de las concavidades de gráficas cartesianas confirmando los elementos reportados en Villa-Ochoa y Mesa (2009) y Villa-Ochoa (2011) lo cual presenté en el segundo capítulo.

Con respecto al proceso de evolución de la comprensión de la noción de tasa de variación, pudo observarse en los casos de Alexandra, Estefanía y Marcela que una instrucción enfocada en los aspectos procedimentales y algebraicos del cálculo, no garantiza una transferencia de dichos elementos para generar una mayor compresión matemática. Estos casos ponen en evidencia la necesidad de involucrar situaciones en el aula que promuevan diferentes aproximaciones e interpretaciones de un tópico matemático, de esa manera, se van construyendo imágenes, relaciones e interpretaciones nuevas que redundan en una mayor comprensión de tal tópico.

El caso de Cristina pone de relieve que aun cuando un estudiante no ha desarrollado nociones formales del cálculo, puede visualizar imágenes sobre tales nociones, Particularmente, se observó que a través del desarrollo de la primera situación (rectángulo inscrito) ella alcanzó a construir una imagen de la noción de límite como una tendencia y como un "supuesto". De igual manera, a través de las visualizaciones proporcionadas por el *GeoGebra*y el *Modellus* esta estudiante *observó* algunas propiedades de las gráficas de funciones que relaciona el cambio de la tasa de variación con las concavidades de la gráfica. De este modo, se proporcionó mayores evidencias que confirman los elementos expuestos en Villa-Ochoa (2011) cuando señala que, aun cuando los estudiantes no hayan desarrollado una comprensión de la noción de límite, ni de la tasa de variación instantánea, se pueden ofrecer interpretaciones de las concavidades desde una función.

Basado en las evidencias presentadas en esta investigación, presento una primera implicación para el aula de clase la cual tiene que ver con el estudio de las concavidades de las funciones en los cursos previos al cálculo donde generalmente prima una secuencia didáctica que se inicia en la definición y termina en las aplicaciones, pero que exiguamente hace alguna referencia a las concavidades (Villa-Ochoa, 2011). En este sentido, más allá del estudio de las propiedades de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función no lineal, puede realizarse una interpretación de sus concavidades a través del estudio del cambio de la tasa de la variación media.

Con respecto al marco teórico presentado en el capitulo tres pudo observarse, en esta investigación, que la teoría de Pirie y Kieren se mostró apropiada para describir algunos aspectos de la comprensión de las estudiantes. De manera particular, el *folding back* evidenció que el proceso de comprensión es un camino complejo de "ir y venir" sin que ello implique una involución en dicho proceso; contrariamente, como lo puntualizan Pirie y Kieren, cuando los estudiantes retornan a los estratos precedentes lo hacen con el conocimiento construido hasta el momento de donde se desprende mayor riqueza conceptual en dichos estratos previos.

Los casos reportados en esta investigación, pero en especial el caso de Alexandra, evidencian que existen estudiantes en los cuales tienen presencia algunas imágenes arraigadas de conceptos matemáticos (i.e. la proporcionalidad) que al no evolucionar pueden convertirse en desencadenadores de *folding backs* que son poco efectivos para promover la comprensión; de esa manera, los elementos presentados en este investigación permiten apoyar la idea de Cavey y Berenson (2005) quienes señalan que no todos los actos de *folding back* son necesariamente efectivos para la extensión de la comprensión matemática.

En su artículo de 2008, Martín presenta una clasificación de los actos de *folding back* encontrados en su investigación, dicha clasificación atendió inicialmente a tres categorías generales, a saber: la fuente de la intervención que produce el *folding back*, la forma del mismo y los resultados que este tiene para la comprensión. Para Martin, todos los actos de *folding back*, cuya fuente es el mismo estudiante, son voluntarios; sin embargo en esta investigación, el caso de Alexandra evidencia que las imágenes de proporcionalidad son para ella misma una fuente que desencadena *folding back* pero que no se muestran como un acto voluntario, sino que por el contrario, están en relación con el nivel de "arraigamiento" que dichas imágenes tienen en la estudiante.

Tales imágenes "arraigadas" permiten discutir sobre dos nuevas implicaciones, en este caso una para la teoría de Pirie y Kieren y una más para el aula de clase.

- Con respecto a la teoría puede observarse en Alexandra un acto de *folding back* cuya fuente es el mismo estudiante pero no voluntario; así mismo, dicho acto se muestra como poco efectivo en la promoción de la comprensión de la noción que se aborda como objeto de estudio. Este hecho aporta nuevas evidencias para complementar la extensión de la teoría de Pirie y Kieren que Martin (2008) ya había propuesto.
- De otro modo, las evidencias de este estudio muestran que es necesario propiciar experiencias en el aula de clase en las cuales los estudiantes vayan construyendo su comprensión sobre determinados tópicos matemáticas, pero en las cuales se

> incluyan "modos de comparación" de otras situaciones en quienes dichas imágenes no se muestren extrapolables; así por ejemplo: en el aprendizaje de la proporcionalidad es importante que las estudiantes entren en contacto con cantidades variables que son directa o inversamente correlacionadas; pero al mismo tiempo, se hace importante el análisis de situaciones en las cuales, a pesar de estar correlacionadas, no son directa ni inversamente proporcionales.

La compresión de la tasa de variación implicó en las estudiantes evolucionar por imágenes como: razón, tasa de variación media, tasa de variación en un intervalo, tasa de variación instantánea y de éstos al concepto de derivada como noción local y como una función. A lo largo de este proceso otras nociones fueron requeridas, por ejemplo: variable, función, límites. Los casos reportados en esta investigación se convierten en evidencia que algunas de estas nociones no fueron producto de un "simple llamado" para avanzar en la comprensión del tópico que se asume como foco de comprensión, sino que por el contrario, dicha comprensión exige la evolución paralela de las otras nociones. Particularmente resalto cómo la noción de límite se vio involucrada en la comprensión de la noción de tasa de variación, sin embargo se mostró como un hecho en el cual la comprensión de este últimoatravezó por diferentes estratos (límite como aproximación, como supuesto, como valor que existe). La siguiente ilustración, en la que se muestra el proceso de evolución de la comprensión de Cristina se convierte en un elemento que da fuerza a dicha aserción.

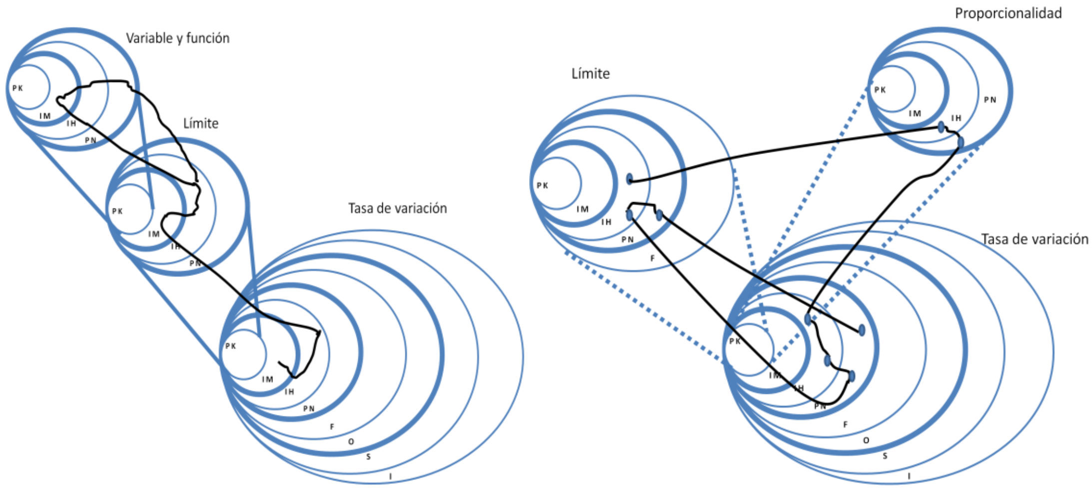


Ilustración 54. Evolución de la comprensión de Cristina

Estos elementos se convierte en argumentos para observar que, existen casos en los que la comprensión matemática no es un proceso mono-conceptual, es decir, aunque en esta investigación la atención estuvo centrada a la manera cómo las estudiantes comprendía la noción de tasa de variación, fue necesario hacer *folding backs* hacia otros conceptos en los cuales las estudiantes paralelamente iban evolucionando en su comprensión. Es así como los resultados de esta investigación sugieren elementos adicionales para caracterizar la noción de *comprensión* propuesta por Pirie y Kieren. En ese orden de ideas, la comprensión matemática, más allá de ser "todo" estratificado y no lineal, también es un proceso que involucra relaciones dinámicas no sólo intra-conceptuales sino también inter-conceptuales en las cuales la comprensión de otros tópicos de la matemáticas evolucionan de manera recursiva y no lineal.

La noción de comprensión como un "todo" puede acarrear una semántica absolutista, no relativa, de la comprensión y quizás atendiendo a una evolución de la comprensión en términos de las relaciones intra-conceptuales. La comprensión como un *conjunto de relaciones dinámicas* se enmarca en una concepción de la comprensión que atiende a las individualidades, aleatoriedad y condicionamientos entre el sujeto, las matemáticas y los contextos en los cuales surgen dichas comprensiones. Además, parece recrear de manera más amplia la idea de Pirie y Kieren en cuanto a que la comprensión es un proceso inacabado y va evolucionando de acuerdo a diferentes niveles de sofistificación.

Con respecto al desarrollo del pensamiento variacional, pudo observarse en esta investigación que en el proceso comprensión de la tasa de variación las estudiantes atravesaron por diferentes momentos que parecen involucrarse en el desarrollo del tal pensamiento; a saber: *captación y descripción de una relación (IM, IH, PN), creación de una estrategia (IM), surgimiento de conjeturas (PN, O), construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones (PN, O), la confrontación de refutación (O).* Tales momentos fueron dinamizados en la interacción entre las estudiantes y de ellas mismas con el investigador y los software *Geogebra* y *Modellus*. Aunque el lápiz y el papel fueron necesarios para apoyar los análisis de las estudiantes, siempre estuvo subordinado por las imágenes que fueron emergiendo de la visualización proporcionada por el software. Estos elementos ponen de manifiesto que la visualización es un proceso que va más allá del simple acto de mostrar una imagen, ni mucho menos una herramienta adicional u opcional en el proceso de comprensión, pues como afirman Borba y Villarreal (2005), los medios hacen parte de nuestra naturaleza y de esa manera el proceso de aprendizaje se observa como una unidad donde la separación entre lo interno y externo no tiene sentido, ya que dicha dicotomía carece de valor puesto que los límites entre ellos no son claros para el ser cognitivo.

Basado en los anteriores elementos, la visualización proporcionada por los software *GeoGebra* y *Modellus* se convirtió en un agente promotor de la comprensión de la noción de tasa de variación. De igual manera, otros factores que influyeron fueron:

- La interacción entre las estudiantes: con excepción de la entrevista, en todas las actividades las estudiantes estuvieron abordando las situaciones en trabajo colectivo. En dicho trabajo, el diálogo entre ellas mismas y con el investigador fue un elemento primordial para generación de *folding back* confirmando una vez más los planteamientos de Martin (2008) cuando señala que algunas veces un colega o el profesor mismo se convierten en fuentes de tal característica.

- En el caso de esta investigación, la interacción entre el investigador y las estudiantes estuvo marcada por la presencia de preguntas que emergían en la medida que las estudiantes avanzaban en su proceso de comprensión. Dichas preguntas tuvieron un papel importante como promotores de comprensión pues, fue a través de ellas, cómo las estudiantes profundizaban en los *por qué* de sus conclusiones y tomaban consciencia de las relaciones que se establecían entre las imágenes del tópico matemático estudiado. En este sentido, esta investigación aporta mayores elementos para sustentar la importancia que las situaciones sean flexibles, es decir, situaciones en la que los estudiantes no son sometidos a una secuencia rígida de preguntas, las cuales ellos deben ir abordando, como si fuera un cuestionario; sino que por el contrario, son situaciones en las que, teniendo en cuenta los propósitos de la investigación, se incorporan los asuntos que van emergiendo del trabajo experimental en el aula, así como la formulación de nuevas preguntas, de tal manera que se promuevan confrontaciones entre los razonamientos, hipótesis y conjeturas de los estudiantes (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010).

- La representación proporcionada por los software dinamizaron el estudio de los fenómenos de cambio, así mismo involucraron diferentes representaciones (cinemáticas, cartesiana, numérica, geométrica, etc). Estos elementos concuerdan con los argumentos de Vasco (2006) cuando afirma que el pensamiento variacional es una forma de pensar dinámica y que es un tipo de pensamiento que está en estrecha relación con los procesos de modelación matemática. Sin embargo, señalo que este tipo de pensamiento no se restringe de manera única al proceso de modelación exclusivamente, ni mucho menos a la manera de construir representaciones de problemas de variación. Como se observa en esta investigación,a través de software se puede proporcionar un ambiente para reconocer la naturaleza dinámica de algunos conceptos matemáticos sin que necesariamente se esté implicando un proceso de modelación matemática.

Con base en lo anterior, es importante resaltar el uso que tuvieron los software Modellus y Geogebra, pues como señalan Villarreal y Borba (2010), en la literatura se está demandando una exploración del potencial de los computadores con el fin de evitar el uso de estos medios de manera anticuada. En ese sentido tanto en esta investigación, como en la de Ruiz (tesis de maestría derivada de esta tesis doctoral) se observa cómo a través de la interacción con el software surgen nuevos cuestionamientos que alimentan la exploración del software mismo y redimensionan la mirada sobre los objetos matemáticos.

Los elementos hasta acá presentados apoyan la visión de Gerson y Walte (2008) cuando señalan que:

> Students' sense-making and understanding of mathematics necessarily include both content and connections among content (…). We suggest that analyzing both understandings of foundational calculus content and connections students make amongst content, context, and previous knowledge will give us a richer picture of the emergent meanings students are creating as they explore meaningful mathematics tasks (p. 65).

Así mismo, los resultados de esta investigación sugieren abrir nuevas investigaciones en las cuales se muestre cómo el proceso de comprensión matemática es un producto de la interacción social de los estudiantes, los profesores y los medios lo cual puede enmarcarse en el constructo teórico de *Humans-with-Media* propuesto por Borba y Villarreal (2005).

Finalmente vale la pena aclarar que desde esta investigación no se acudió al uso de software como un medio para comprender matemáticas de manera más fácil sino que, a través de ellos, la construcción de conocimiento matemático es diferente y parece armonizar con los elementos de una parte de nuestra sociedad en donde el uso de chats, celulares, computadores, internet, redes sociales y software libre se ha masificado e incorporado tanto a la cotidianidad, que ya hacen parte inherente de la cultura.

Bibliografía

Aleksandrov, A; Kolmogorov, A; Laurentiev, M; et al. (1981). *La matemática: su contenido, métodos y significados.* Madrid: Alianza Editorial.

Alves-Mazzotti, A. J. (1998). O método nas ciências sociais. En A. J. Alves-Mazzotti, & F. Gewandsznajder, *O método nas ciências naturais e sociais. Pesquisa quantitativa e qualitativa* (págs. 107-188). São Paulo: Pionera.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of student' grafical understanding of the derivate. *Journal of mathematical behavior , 16* (4), 399-431.

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana , X* (2), 135-149.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education , 31* (5), 557-578.

Barbosa, S. M. (2009). *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.* Tese de doutorado não publicada, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho",, Rio Claro-SP, Brasil.

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivate and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Techology , 38* (6), 763-777.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoría e aos métodos métodos.* (M. J. Alvarez, S. B. Santos, & T. M. Baptista, Trads.) Porto: Porto Editora.

Borba, M. C & Araújo, J. L. (Orgs). (2006). *Pesquisa Qualitavia em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêtica.

Borba, M. C., & Scheffer, N. F. (2004). Coordination of multiple representations and body awareness. *Educational Studies in mathematics , 57*, 316-319.

Borba, M. C., & Scheffer, N. F. (2001). The mathematics of motion, sensor, and the introduction of fuctions to egiht grader in Brazil. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.* Seatle, USA.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking.* New York: Springer.

Borgen, K. L., & Stan Mana, S. (2002). What do students really understand? *The Journal of Mathematicas Behavior , 21* (2), 11-165.

Buendia, G., & Ordoñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista de investigación en Matemática Educativa , 12* (1), 7-28.

Camargo, L., & Guzmán, A. A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón de cambio.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17*, pp. 1-9. México D.F.: Clame.

Cantoral, R., & Frafán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* (42), 353-369.

Cantoral, R., Molina, J., & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez, & J. Molina (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 463-468). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *EMA , 8* (2), 121-156.

Cavey, L., & Berenson, S. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *Journal of Mathematical Behavior* (24), 171–190.

Çetin, N. (2009). The Ability of Students to Comprehend the Function-Derivative Relationship with Regard to Problems from Their Real Life. *PRIMUS , 19* (3), 232-244.

Creswell, J. W. (2008). *Educational Research. Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* New Jersey: Pearson, Prentice Hall.

Da Costa André, S. (2008). *Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio*. Dissertação de mestrado não publicada, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Dall'anese, C. (2006). *Argumentos e Metáforas conceituais para a taxa de variação.* Tese de doutorado não publicada, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

De la Torre, A. F. (2003a). El método socrático y el modelo de van Hiele. *Lecturas Matematica , 24* (2), 99-121.

De la Torre, A. F. (2003b). *La modelización del espacio y del tiempo.* Medellìn: Editorial Universidad de Antioquia.

De la Torre, A. F. (2000). Una aplicación del modelo de van Hiele al concepto de continuo. *Matemática: Enseñanza Universitaria* , 117-141.

De la Torre, A. (2002). *Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* Informe de investigación no publicado, Universidad de Antioquia, Medellín.

Diaz, L. (2005). Profundizando en los lenguajes entendimientos estudiantiles de la variación. *Relime-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , 8* (002), 145-168.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.* México D.F: Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C., & Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Relime. Revista de Investigación en Matemática Educativa , 10* (1), 69-96.

Dolores, C., Chi, A. G., Canul, E. R., Cantú, C. A., & Pastor, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñazan de la matemática. *UNON. Revista iberoamericana de Educación Matemática* (18), 41-57.

Doorman, L. M., & Gravemeijer, K. P. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the undertanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education , 41* (1-2), 199-211.

Droujkova, M. A., Berenson, S. B., Slate, K., & Tombes, S. (2005). A conceptual framework for studying teacher preparation: The Pirie-Kieren model, collective understnding, and metaphor. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Ed.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, pp. 289-296. Melbourne: PME.

Esteban, P. V. (2003). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele.* Valencia: Universidad Politecnica de Valencia.

Esteban, P. V., & Llorens, J. L. (2003). Aspectos comparativos en la extensión del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. *Summa* (44), 45-52.

Esteban, P. V., & Perez, P. (2003). El concepto de aproximación local: Una propuesta metodológica a partir de la recta tangente. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria , XI* (1,2), 73-89.

Esteban, P. V., & Perez, P. (2002). Una propuesta metodológica de introducción temprana del concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente vía el asistente matemático. *Revista Escolar de La OEI , 4*, 1-12.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la Variación y el cambio.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamerica.

Gerson, H., & Walter, J. (2008). Building connected understanding of calculus. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Ed.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX. 3*, págs. 65-71. Mexico: Cinvestav-UMSNH.

Goldenberd, M. (2007). *A arte de pesquisar.Como fazer pesquisa qualitativa en Ciências Sociais.* Rio de Janeiro: Record.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Student`s conceptual understanding of a function and its derivate in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior , 25* (1), 57-72.

Herbert, S., & Pierce, R. (2008). An ‘Emergent Model’ for Rate of Change. *International Journal of Computers for Mathematical Learning , 13* (3), 231-249.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.

Jaramillo, C. M. (2003). *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele.* Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Javaroni, S. L. (2007). *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias.* Tese de doutorado não publicada, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Julio Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro-SP, Brasil.

Lincoln, Y., & Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. California: Sage Publications, Inc.

Martin, L. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior , 27*, 64-85.

Martin, L., & Pirie, S. (2003). Making Images and Noticing Properties: The role of graphing software in mathematical generalisation. *Mathematics Education Research Journal , 15* (2), 171-186.

Martin, L., Towers, J., & Pirie, S. (2006). Collective Mathematical Understanding as Improvisation. *Mathematical Thinking and Learning , 8* (2), 149 — 183.

Martin, L., Towers, J., & Pirie, S. (2006). Collective Mathematical Understanding as Improvisation. *Mathematical Thinking and Learning , 8* (2), 149 — 183.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento dela comprensión matemática y la teoría de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , 6* (003), 221-278.

Meel, D. (1998). Honors students' calculus uderstanding: Comparing calculus & mathematica and traditional calculus students. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS* (Vol. 7, pp. 163-215). Providence, USA: American Mathematical Society/ Mathematical Association of America.

Mesa, Y. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2008). Construcción histórica y epistemológica del concepto de función cuadrática: Algunas reflexiones e implicaciones didácticas. *Proceedings of HPM Satellite Meeting of ICME 11*. México: Clame.

Mesa, Y. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 22*, págs. 1315-1323. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-Colegio Mexicano de Matemática Educativa.

Mesa, Y. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2007). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte* (21), 1-18.

Mesa, Y. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2007). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. *Revista virtual Universidad Católica del Norte , 21*, 1-18.

Navarro, M. A., & Pérez, P. (2006). Constructing a concept image on convergence of sequences in the Van Hiele framework. En F. Hitt, G. Harel, & A. Selden (Edits.), *Research in Collegiate Mathematics Education VI, CBMS Issues Math. Education* (Vol. 12, págs. 61–98). Providence USA: American Mathematical Society/Mathematical Association of America.

Navarro, M. A., & Pérez, P. P. (2010). Local rate of change: a socratic experience in van Hiele's model framework. *The Teaching of Mathematics , XIII* (2), 63-92.

Olimpo, A. (2006). *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática- Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informatica.* Tese de doutorado nã publicada, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro-SP, Brasil.

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation. *Source: Educational Studies in Mathematics , 14* (3), 235-250.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1992). Creating constructivist enviroments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics , 23* (5), 505-528.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1991). Foldind Back: Dynamics in the growth of mathematical understanding. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings ofthe conference of the inernational group for the psychology of mathematics educationn (PME 15), 3*, pp. 169-176. Assisi.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1991). Foldind Back: Dynamics in the growth of mathematical understanding. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME 15), 3*, pp. 169-176. Assisi.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics , 26* (2/3), 165-190.

Pirie, S. E., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! one approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics* (34), 159-181.

Pirie, S., & Martin, L. (2000). The Role of Collecting in the Growth of Mathematical Understanding. *Mathematics Education Research Journal , 12* (2), 127-146.

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006a). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia, Medellín.

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006b). Razonamiento algebraico y la modelación matemática. En F. Posada, & G. Obando (Edits.), *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico* (Vol. 2, págs. 127 - 163). Medellín: Gobernación de Antioquia.

Posada, F.; Obando, G. (Eds). (2006). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico.* Medellín: Gobernación de Antioquia.

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latiniamericana de Investigación en Matemática Educativa , 9* (003), 435-458.

Salkind, N. (1999). *Métodos de Investigación.* México: Prentice Hall.

Sánchez-Matamorros, G., Garcia, M., & Llinares, S. (2008). La compresión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *RELIME. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa , 11* (2), 267-296.

Scucuglia, R. R. (2006). *A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas.* Dissertação de mestrado não publicada, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro-SP, Brasil.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* (22), 1-36.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite. *Recherches en Didactique des Mathématqes , 6* (1), 5-67.

Silveira, E. (2001). *Uma Seqüência didatica para aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função.* Dissertação de mestrado não publicada, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education , 41* (4), 481-492.

Thom, J. S., & Pirie, S. E. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Jounal of mathematical Behavior , 25*, 185-195.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. In C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos.* (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Villa-Ochoa, J. A. (2008). El concepto de función. Una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 21*, págs. 245-254. México D. F: Colegio Mexicano de Matemática Educativa- Comité Latinoamericano.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas , 19*, 51-81.

Villa-Ochoa, J. A. (2011). Raciocínio "covariacional": O caso da função quadrática. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.* Recife: Comité Interamercano de Educação Matemática.

Villa-Ochoa, J. A. (en prensa). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis* .

Villa-Ochoa, J. A., & Mesa, Y. M. (2009). *El concepto de función en las matemáticas escolares. El caso de la función cuadrática.* Informe de investigación no publicado, Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas de la Asociación Sindical de Educadores del Municipio de Medellín, Medellín.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., & Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 23.* México D.F: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., & Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 23.* México D.F: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa, J. A., Jaramillo, C. M., & Esteban, P. V. (2011). Aspectos emergentes en la comprensión de la tasa de variación. *Memorias de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recife: CIAEM.

Villa-Ochoa, J., & Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional. Seres-humanos-con-Geogebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa , 12* (3), 514-528.

Villarreal, M. (1999). *O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas.* Teses de doutorado não publicada, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro-SP, Brasil.

Villarreal, M., & Borba, M. C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and … notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education , 42* (1), 49-62.

Warner, L. (2008). How do students' behaviors relate to the growth of their mathematical ideas? *Journal of Mathematica behavior , 27*, 206-227.

Yin, R. (2009). *Case study research, Design and methods.* Thounsand Oaks, California: Sage Publications, Inc.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In E. Dubinsky, A. J. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS* (Vol. 8, pp. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society/Mathematical Association of America.

ANEXO Nº 1

Cuestionario de la Investigación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1 8 0 3	UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA FACULTAD DE EDUCACIÓN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA DESDE UNA PERSPECTIVA VARIACIONAL

Cuestionario Nº 1

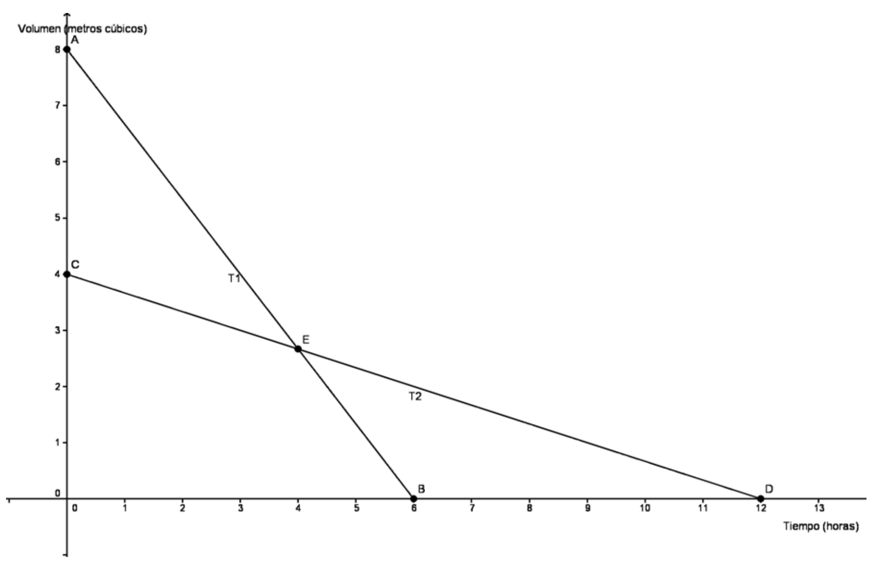
Reconocimiento de aspectos variacionales en el concepto de función

Apreciada estudiante, en primer lugar quiero agradecer su disposición para participar de esta investigación, espero que con este trabajo logremos construir aspectos significativos para todos.

A continuación encontrarás un conjunto de actividades que pretenden marcar el punto de partida de la investigación a través de la identificación de algunas características variacionales del concepto de función. Así que por favor responde tranquilamente cada pregunta y, si lo consideras necesario, describe de manera más amplia los aspectos que pensaste para llegar a la respuesta.

Actividades

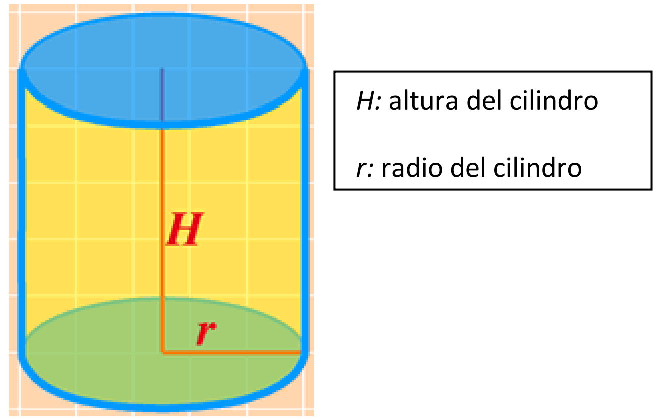
1. La siguiente gráfica representa la relación entre el volumen y el tiempo de dos tanques de agua, cuyo líquido se está derramando por un orificio en la parte inferior de cada uno de ellos.



Con base en la información presentada en la gráfica, responde:

a. ¿En qué tiempo los dos tanques tienen el mismo volumen?
b. ¿Cuál de los dos tanques está derramando mayor cantidad de agua por unidad de tiempo?
c. ¿A qué razón se está derramando el agua en cada taque?

2. Considere un recipiente cilíndrico como se muestra en la siguiente figura:



Se sabe que el volumen del cilindro es $V = \pi r^2 H$. Responda las preguntas que se consideran a continuación:

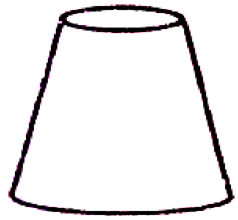
a. Si el radio se considera fijo, ¿qué debe ocurrir con la altura para que el volumen se duplique?
b. Si la altura permanece fija, ¿qué debe ocurrir con el radio para que el volumen se triplique?
c. Si el radio se duplica, ¿qué debe ocurrir con la altura para que el volumen del cilindro permanezca constante?
d. Representa en un gráfico cartesiano la relación que existe entre el volumen y el radio del cilindro, sabiendo que la altura permanece constante.
e. Representa en un gráfico cartesiano la relación que existe entre el volumen y la altura del cilindro, sabiendo que el radio permanece constante.

3. Un vehículo se aleja del centro de la ciudad de la siguiente manera: desde el momento que sale del centro hasta los 5 kilómetros avanza a una velocidad de 30 km/h. Entre los 5 km y los 15 km avanza a una velocidad de 60 km/h; y finalmente, después de los 15km adquiere una velocidad de 80 km por hora.

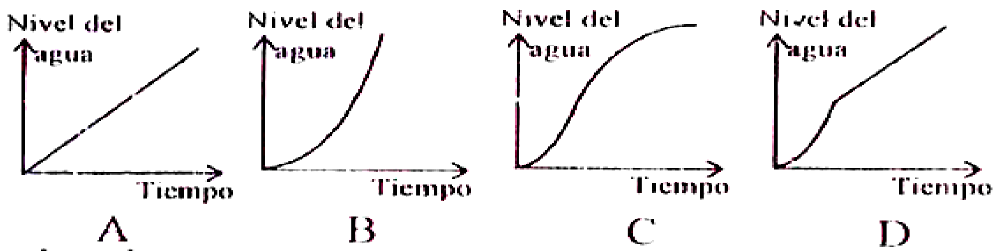
   Grafica en un plano cartesiano las siguientes relaciones:
   a. Velocidad y distancia recorrida.
   b. Velocidad y tiempo transcurrido.
   c. Distancia recorrida y tiempo transcurrido.

4. El recipiente que se muestra en la siguiente figura se llena con agua que gotea constantemente de un grifo[9].

[9] Tomado con modificaciones del Examen de Admisión de la Universidad de Antioquia Ano-Semestre: 2009-2, jornada 2.



a. ¿Cuál de las gráficas que se muestran a continuación puede describir la forma como varía el nivel del agua a través del tiempo



b. Dibuja una gráfica que represente la forma cómo cambia la altura del nivel de agua con respecto al volumen.

5. Se descargan dos archivos de computador A y B con igual tamaño. La siguiente tabla representa la relación entre el tiempo y la cantidad de archivo descargado en el computador.

Tiempo (seg)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de Kb descargados	**Archivo A**	50	100	150	200	260	330	390	480	580	610
	Archivo B	20	40	90	140	200	290	350	420	520	610

a. Usando la información de la tabla, determina en cuáles momentos los dos archivos se descargan con la misma tasa de transferencia (rapidez). Argumenta tu respuesta
b. En cuáles intervalos de tiempo la rapidez con la que se descarga el archivo A es mayor que la rapidez con la que se descarga el archivo B. Argumenta tu respuesta.
c. ¿En cuál de los dos archivos la tasa de transferencia es mayor cuando el computador marca exactamente 4 segundos?

ANEXO Nº 2

Artículo presentado en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Villa-Ochoa, Jaramillo, Esteban (2011)

XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Aspectos emergentes en la comprensión de la tasa de variación

Jhony Alexander **Villa-Ochoa**
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín
Colombia
javo@une.net.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Departamento de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
cama@matematicas.udea.edu.co
Pedro Vicente **Esteban** Duarte
Escuela de Ciencias y Humanidades, Universidad Eafit
pesteban@eafit.edu.co
Colombia

Resumen

El presente artículo es producto de una investigación en la cual, a través del estudio de casos, se usó la teoría de Pirie y Kieren para indagar por la manera cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la noción de tasa de variación. De manera particular, este artículo presenta algunos elementos asociados a la evolución de la comprensión de dicha noción en los tres primeros estratos. Finalmente, se discute sobre la imposibilidad de determinar de manera "absoluta" las nociones y procedimientos asociados al *Primitive Knowing* y cómo, en el proceso de evolución de la comprensión de la tasa de variación, emergen ciertas nociones "incompletas" que requieren ser abordados y refinados.

Palabras clave: comprensión matemática, teoría de Pirie y Kieren, tasa de variación, proporcionalidad, *folding back*

1. La noción de tasa de variación en el estudio del concepto de derivada

La tasa de variación o razón de cambio ha sido un concepto que ha llamado la atención de diversos investigadores, en parte, porque se encuentra en relación con otros conceptos fundamentales del análisis matemático; por ejemplo: la derivada (Cantoral, 2004; Dolores C. , 2007) y el concepto de función (Posada y Villa, 2006). Por otro lado, Tall (2009) resalta la importancia de abordar el estudio de conceptos del análisis matemático haciendo énfasis en los procesos dinámicos que subyacen a ellos, por ejemplo, las funciones y la derivada en relación con la variación y tasa de variación respectivamente.

La literatura internacional sobre el tema en mención, reporta que muchas de las dificultades asociadas al estudio de conceptos, como el de derivada, radica en una débil comprensión de los procesos de variación que subyacen a ellos; es así como Dolores (2007) señala que:

> La enseñanza del cálculo diferencial (CD) en el nivel medio superior, en muchos países enfrenta un problema generalizado: los estudiantes escasamente comprenden sus ideas básicas, especialmente las relacionadas con la derivada. Las evidencias mostradas [...] son coincidentes, al terminar sus cursos de CD cantidades significativas de estudiantes logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas pero difícilmente comprenden el significado de esos procedimientos. Incluso, difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales de variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto (p.I).

Así mismo, otros investigadores reportan que el concepto de derivada está influenciado por el contexto en el cual se desarrolla su estudio; por ejemplo, la investigación Bingolbali, Monaghan, y Roper (2007) sugirió que los estudiantes de un curso de ingeniería mecánica conciben la derivada como una razón de cambio y ven las matemáticas como una herramienta, por tanto prefieren los aspectos de aplicación de conceptos como la derivada; en contraste con esto, el estudio establece que los estudiantes de Matemáticas se muestran proclives a su interpretación como tangentes.

Las causas por las cuales los estudiantes no alcanzan a comprender los aspectos variacionales asociadas a la derivada son de diversa índole. Por ejemplo, Çetin (2009) señala que en los cursos de cálculo, con frecuencia se favorece la manipulación de representaciones algebraicas para enseñar reglas que permitan esbozar la gráfica de una función; en ese sentido para este autor, mientras los estudiantes calculan la derivada de una función por medio de una expresión algebraica con la ayuda de las reglas de derivación, no alcanzan a hacerse conscientes de la importancia de interpretar la derivada como la tasa de variación instántanea de una función.

Por su parte Zandieh (2000) propuso un marco teórico para explorar la comprensión que tienen los estudiantes sobre la derivada; con dicho marco, Zandieh discute y analiza sistemáticamente las preguntas relativas a la comprensión individual, su comparación con otras comprensiones, las estrategias de enseñanza, la efectividad de las prácticas pedagógicas y la evaluación de los materiales curriculares. En su trabajo, esta investigadora resalta el papel de la tasa de variación media e instantanea como un componente importante para la comprensión de la derivada.

Con base en los múltiples aspectos que desde la literatura se reportan, se desarrolló una investigación en la cual se indagó por el proceso de comprensión de la tasa de variación[1] como una manera de aproximarse al concepto de derivada; para ello, se adoptó como marco teórico *la teoría para la evolución de la comprensión matemática de Pirie y Kieren*. Los aspectos generales de esta teoría se describen en el siguiente apartado.

[1] La investigación se desarrolló en el marco del programa de Doctorado en Educación (Matemática) de la Universidad de Antioquia-Colombia.

2. La teoría de Pirie y Kieren

La teoría para la evolución de la comprensión de Pirie y Kieren tiene sus orígenes en un enfoque constructivista para la comprensión matemática. En su publicación de 1994, Pirie y Kieren reconocen que su pensamiento se vio estimulado por la teoría biológica de la cognición en los sistemas auto-referenciados de Maturana y Varela (1980, 1987) y de Tomm (1989); así mismo, afirman que su teoría pretende elaborar en detalle la definición constructivista de la comprensión como un proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento personal tal y como fue presentado por von Glaserfeld en 1987.

Pirie y Kieren (1994) describen la comprensión como un todo dinámico, estratificado, recursivo, no lineal y jerarquizado de una reorganización de las estructuras del conocimiento. La teoría de Pirie y Kieren se constituye en una herramienta que actúa como un lente a través del cual puede observarse la compresión matemática de un individuo o de un grupo individuos.

La teoría Pirie y Kieren considera que la comprensión matemática de un individuo particular en tópico matemático específico, evoluciona a través de ocho estratos potenciales, los cuales se modelan en el diagrama de la Ilustración 1.

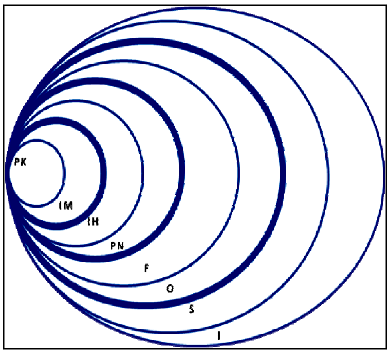


Ilustración 1. Representación diagramática de la Teoría de Pirie y Kieren.

El modelo representa los ocho estratos por medio de un conjunto de circunferencias con un punto en común. Cada círculo representa un estrato, el cual incluye los estratos precedentes y, a su vez, está incluido en los estratos subsecuentes. Estos estratos pretenden dar cuenta de las características *creciente e inacabada* de la comprensión matemática.

Para Pirie y Martin (2000), aunque este conjunto de circunferencias se muestra creciente hacia afuera, hacia estratos más abstractos y generales, la comprensión evoluciona de manera diferente; es decir, la evolución de la comprensión se produce mediante un movimiento continuo hacia atrás y adelante a través de niveles de conocimiento. Los caminos que pueden describirse para la evolución no son ni lineales ni unidireccionales.

Los estratos son denominados: Primitive Knowing (PK), Image Making (IM), Image Having (IH), Property Noticing (PN), Formalising (F), Observing (O), Structuring (S) e Inventising (I). Adicionalmente, la teoría de Pirie y Kieren presenta otras características, a saber: la fractalidad, los límites de falta de necesidad, el redoblando *(folding back)*, y la complementariedades de la acción y la expresión. Dado que el interés del presente artículo se centra en los tres primeros estratos, y en la característica del *folding back* se profundizará en estos aspectos y se sugiere al lector remitirse a los textos referenciados en la bibliografía para ampliar en las demás características de la teoría.

Estrato 1- PK. Conocimiento primitivo (Primitive Knowing)

El “conocimiento primitivo” hace referencia al conocimiento inicial, primordial o básico. Thom y Pirie (2006) afirman que con este término no se pretende transmitir ningún juicio en cuanto al nivel de sofisticación de las matemáticas o, de hecho, cualquier otro conocimiento que la persona posee. Este conocimiento está conformado por todo lo que una persona trae "en su mente" a la tarea actual; por ejemplo, sus experiencias en la situaciones reales, sus ideas y concepciones frente a la matemática y al concepto mismo. El adjetivo primitivo no significa que califica a este conocimiento como precario o en un nivel matemático bajo.

Estrato 2-IM. Construcción de la Imagen (Image Making)

Un primer momento en la evolución de la comprensión de un concepto se genera cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto (Thom y Pirie, 2006). Para Pirie y Kieren (1994) en este segundo estrato, el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este estrato involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos. Thom y Pirie (2006) afirman que en este estrato se comienza la evolución de la comprensión al hacer distinciones matemáticas a través de las acciones, todo sobre la base del conocimiento primitivo. La intención del trabajo en este estrato radica en que se da lugar a la creación de nuevas imágenes matemáticas que puedan existir en su forma mental, verbal, escrita o física.

Estrato 3-IH. Comprensión de la Imagen (Image Having)

Pirie y Kieren (1992) afirman que las imágenes asociadas a una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera a las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares. Para Pirie y Kieren estos objetos mentales han sido discutidos con los nombres de “concepto imagen”, “marcos”, “representación de estructuras de conocimiento” y “esquemas alternativos de los estudiantes”. El estudiante puede usar estas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

Hasta este punto, los dos últimos estratos evocan el término “imagen” el cual, Pirie y Kieren (1994), usan para significar cualquier idea que el estudiante pueda tener sobre algún tópico en particular, cualquier representación “mental”, no necesariamente visual o pictórica. Esta teoría postula que, en la evolución de su comprensión matemática acerca de un tópico particular, un estudiante elabora, sostiene y extiende imágenes particulares.

Característica del Redoblado (folding back)

Pirie y Kieren (1992) afirman que cada uno de los ocho estadios de comprensión se encajan uno en el otro, pero siempre permitiendo un acceso a todos los estadios anteriores. Consideran la evolución de la comprensión de una persona con respecto a un tema, como un movimiento de avance y retorno entre actividades de los diferentes estadios. A este proceso de adelantar y retroceder los autores lo denominan *Folding Back* (*Redoblado).*

Para Pirie y Kieren (1991), el redoblado es una de las características más importantes de la teoría, ya que representa un aspecto dinámico y no monodireccional de la comprensión. Pirie y Kieren (1994) creen que cuando un estudiante se enfrenta con un problema, que no se puede solucionar de inmediato, éste puede necesitar volver a un estrato interno de comprensión, de este modo, el redoblado permite la reexaminación de la comprensión en un estrato de una forma mucho más enriquecida a la presentada cuando se trabajó inicialmente en ese estrato. Pirie y Martin (2000) agregan que el resultado de este *folding back* es que el individuo es capaz de extender su actual comprensión (inadecuada o incompleta) mediante reflexión y luego reorganizar sus construcciones iniciales del concepto, o incluso en caso que sean insuficientes, generar y crear nuevas imágenes para abordar el problema. Sin embargo, ahora la persona tiene un grado de auto-consciencia el cual ha sido informado por las operaciones del estrato externo. De esta manera, la actividad realizada sobre el estrato interno no es idéntica a la realizada inicialmente, sino que la persona, efectivamente, ha construido una comprensión más "fina" en el estrato interno para extender su comprensión en el estrato externo (Pirie y Martin, 2000).

Pirie y Kieren (1991, 1994) resaltan la importancia del *Redoblado* para promover la evolución de la comprensión; afirman que de esta forma, el avance se presenta doblando de nuevo hasta que repetidamente se reconstruya y reorganice el conocimiento del estrato interno de la persona y, de esta manera, extienda la comprensión del estrato externo.

En su artículo Pirie y Martin (2000) ofrecen una mirada a uno de los aspectos del *folding back* al que ellos denominan *collecting*. Según estos investigadores el *collecting* ocurre cuando el estudiante sabe lo que necesita para solucionar un problema y que su comprensión es insuficiente para evocar ese conocimiento. El proceso de *folding back to collect* implica la recuperación de conocimientos previos para un propósito específico y volver a verlo o leerlo de nuevo a la luz de las necesidades de las actuales acciones matemáticas. De este modo, para Pirie y Martin (2000), el *collecting* no es simplemente un acto de evocación, sino que tiene el efecto de "engrosamiento" o "refinamiento" de la comprensión. Este *folding back to collect* es retomado nuevamente por Martin (2008) para proponer una extensión de la teoría de Pirie y Kieren.

3. El estudio

Conforme fue mencionado anteriormente, este estudio indaga por la manera cómo se desarrolla el proceso de compresión de la noción de tasa de variación. Responder a un *"cómo se desarrolla un proceso…"* demandó de los investigadores una inmersión detallada y profunda en el estudio del fenómeno de comprensión. De ese modo, se seleccionó el ***estudio de casos*** como método de investigación; ya que, en palabras de Goldenberd (2007), a través de una inmersión profunda y exhaustiva de un objeto delimitado el estudio de caso posibilita la penetración en la realidad social no necesariamente lograda con un análisis estadístico.

Para Yin (2009), aunque no existe una fórmula que permita elegir el estudio de casos como método en una investigación, si es cierto que dicha elección debe estar en coherencia con la(s) pregunta(s) de investigación. Este autor agrega que las preguntas que se enfocan en el "cómo" o el "por qué" de un fenómeno social son especialmente un indicador para optar por el estudio de casos como método de investigación. Así mismo, Yin (2009) establece un estudio de caso como una indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo, con profundidad en su contexto real de existencia; especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes.

En este estudio participaron cuatro estudiantes que se designaron con los seudónimos de Alexandra, Marcela, Estefanía y Cristina, las cuales estaban matriculadas en un programa de ingeniería en una universidad estatal. Las estudiantes fueron seleccionadas entre un grupo de 37 estudiantes de un curso de pre-cálculo atendiendo a que, durante el desarrollo del curso ellas habían evidenciado interés, motivación y mayor grado de continuidad en su proceso educativo. Adicionalmente estas cuatro estudiantes mostraron actitudes favorables para la participación en las actividades de clase y habilidades para comunicar de manera oral y escrita sus diversas inquietudes y avances en sus comprensión, lo cual está en coherencia con los planteamientos de la Teoría de Pirie y Kieren, para quienes una interpretación de la comprensión matemática sólo es posible a través de las diferentes manifestaciones externas que los estudiantes puedan evidenciar.

Las fuentes que se usaron para la obtención de la información fueron: *la observación-participante*, *documentos, cuestionarios y entrevistas.* Dichas fuentes estuvieron presentes en dos fases: en la primera ellas se hizo un reconocimiento de las diversas características del contexto; y en la segunda fase, se determinaron las diferentes maneras en que las estudiantes consiguieron aproximarse a la comprensión de la tasa de variación; en esta segunda fase se incorporó un conjunto de cuatro situaciones, a saber: Triángulo inscrito, la velocidad y la aceleración, la descarga de un archivo, y análisis de la función tasa de variación.

Paralelamente a la recolección de los datos, se hizo un primer acercamiento a ellos. Este tipo de análisis ha sido sugerido por Creswell (2008) y, para el caso de esta investigación, permitió obtener un "sentido general" de la información y ofreció ciertos lineamientos en la estructuración de las actividades que continuarían en la intervención. Al finalizar el proceso de recolección de los datos, se continuó con el proceso de organización y clasificación de la información; los diarios de campo y los documentos fueron duplicados y digitalizados, las entrevistas transcritas y los videos fueron analizados por el equipo de investigación, generando una matriz de códigos asociados a los diferentes aspectos de la teoría de Pirie y Kieren. El paso a seguir consistió en generar un conjunto de categorías individuales en los cuales se daba cuenta de los elementos de la comprensión de cada una de las estudiantes teniendo en cuenta *los niveles de comprensión*, *los elementos involucrados en la evolución de la comprensión*, y *la relación con otros conceptos matemáticos*; posteriormente se hizo una categorización de segundo orden por medio de la triangulación de los elementos que surgieron en la categorización individual. Finalmente, se escribieron y se discutieron los resultados con el colectivo de investigación.

Conforme fue presentado anteriormente, el presente artículo se centra en los elementos que describen la evolución de la comprensión de la tasa de variación en los tres primeros niveles, particularmente se discute cómo en dicha evolución aparecen nociones "incompletas" de otras nociones relativas a la proporcionalidad.

4. Elementos que influyen en la comprensión de la tasa de variación

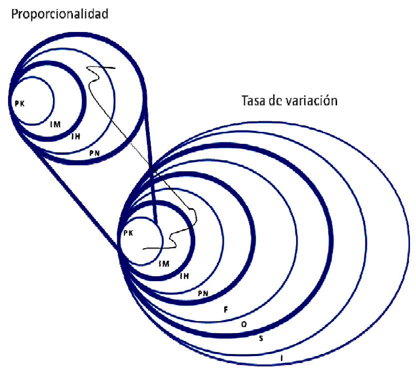
Conforme fue presentado en el marco teórico, la Teoría de Pirie y Kieren sugiere que el proceso de comprensión de un tópico o concepto matemático debe tener en cuenta el conjunto de nociones, procedimientos y herramientas los cuales se convierte en el punto de partida de la comprensión. Para el presente estudio, se inició el proceso investigativo una vez las estudiantes habían abordado, junto a los demás compañeros del curso, las temáticas de proporcionalidad y funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Así mismo, otras temáticas fueron abordadas como por ejemplo: operaciones con polinomios, expresiones racionales, potenciación radicación, ecuaciones, y fracciones parciales.

El desempeño de las estudiantes en estos contenidos había sido sobresaliente para dos de ellas, mientras que para las otras dos había alcanzado un nivel satisfactorio. Adicionalmente, en el inicio del trabajo de campo se desarrolló un cuestionario que incluía cinco situaciones en las cuales la tasa de variación podría reconocerse en ambientes gráfico, algebraico o tabular. Con base en la confrontación entre los documentos producidos por las estudiantes y una discusión grupal, se pudo determinar algunos elementos que hicieron parte del *Primitive Knowing* de las estudiantes. Dichos elementos se presentan a continuación:

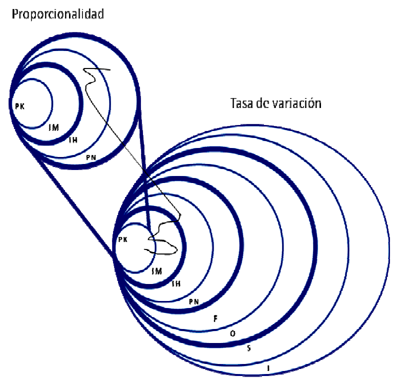
- Reconocimiento e interpretación de la tasa de variación constante, situaciones contextualizadas, así mismo en funciones representadas gráfica, tabular y algebraicamente.
- Reconocimiento de la dependencia entre cantidades de magnitud.
- Buen desempeño algebraico.
- Reconocimiento gráfico de funciones no lineales.
- Reconocimiento de la tasa de variación media en contextos donde se interpreta como velocidad; así mismo, cuando se presenta en una representación tabular.

En el desarrollo de las actividades pudo observarse cómo la comprensión de la tasa de variación evolucionó en los estratos iniciales de manera diferente en cada estudiante. En la ilustración 2 se usa el diagrama de la teoría para describir la manera en la que la comprensión de las estudiantes evolucionó del *Primitive Knowing* hasta el *Image Having* y su posterior *folding back* hacia su *Primitive Knowing* en conceptos de la proporcionalidad.

En este proceso inicial de comprensión, las estudiantes construyeron imágenes para la tasa de variación como: *cociente (IM)*, *comparación de dos estados (IH) y razón (IH)*.



Estefanía



Alexandra

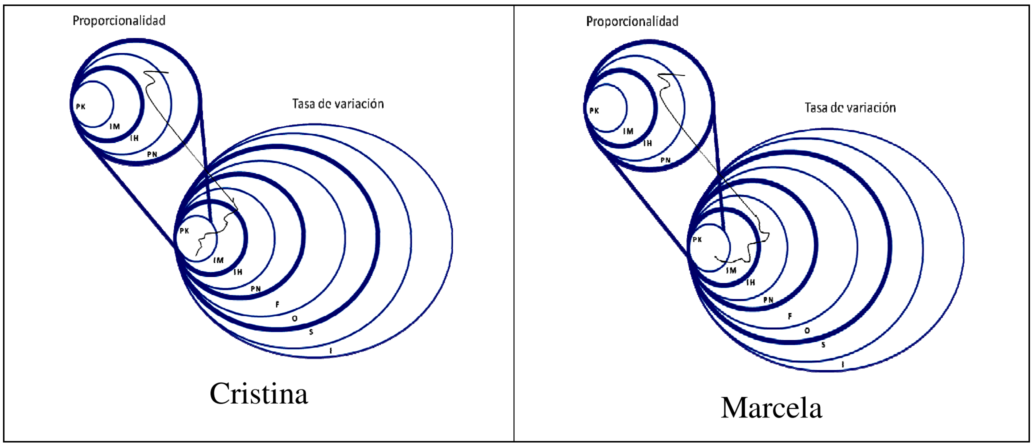


Ilustración 2. Evolución de la comprensión en los niveles iniciales

Como se mencionó anteriormente, el reconocimiento de la tasa de variación constante, para el caso de las funciones lineales, fue un elemento clave que se identificaba en diferentes formas de representación. Sin embargo, ese no fue el caso de funciones en las cuales la tasa de variación no era constante; ante este hecho, se desarrolló con las estudiantes un procedimiento con el que se pudo analizar discretamente los cambios de la tasa de variación media de la gráfica (**Ilustración 3**).

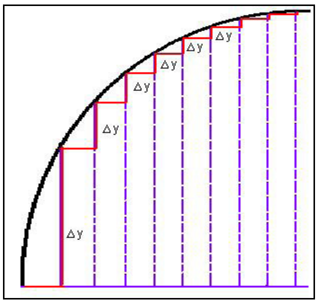


Ilustración 3. Mecanismo para el análisis discreto de la variación

En una sesión de trabajo posterior, las estudiantes se comprometieron con el desarrollo de una situación “Rectángulo Inscrito” diseñada en el software GeoGebra. En la situación, se presenta un rectágulo inscrito en un cuadrado y cuya área varía con respecto al movimiento del punto E (ver Ilustración 4). En el primer momento de la situación, las estudiantes hicieron un reconocimiento de las variables y observaron una correlación entre ellas.

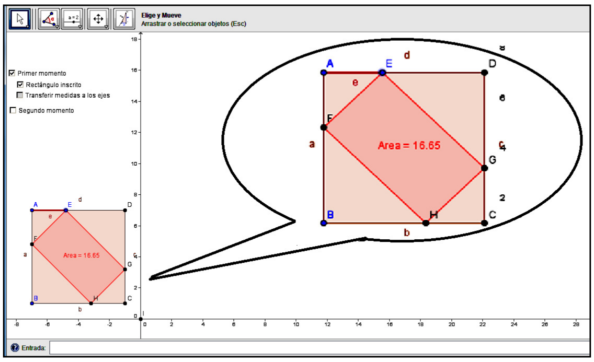


Ilustración 4. Momento 1 de la situación “Rectángulo inscrito”

Las estudiantes rápidamente observaron que el área del rectángulo dependía del valor del segmento AE. Al indagar por las características de tal dependencia, se dio el siguiente diálogo:

Investigador : *¿Cómo es esa dependencia?*[hubo un momento de silencio y algunos gestos que indicaron que las estudiantes no habían comprendido la pregunta], *Pues…, ¿cómo cambian estas dos cantidades?*

Alexandra : *Cuando el segmento aumenta, el área aumenta*

Investigador : *¿Siempre aumenta?*

Alexandra : *Siiii,¿nooo?* [el tono de la voz reflejaba duda]

Cristina : *No, sólo hasta la mitad*

Investigador : *Y ¿qué pasa en la mitad?*

Cristina : *Baja de nuevo*

Investigador : *Entonces, ¿cómo es el comportamiento de esas dos cantidades?*

Alexandra : *Directa e inversamente proporcional* [con una de sus manos realiza un gesto de cómo sería la gráfica, representado una especie de "V" invertida]

Investigador : *¿Están seguras?*

Se observa en el diálogo que, a pesar de haber construido el "procedimiento de triángulos" para analizar el comportamiento de la tasa de variación en los casos de funciones no lineales, la nociones de proporcionalidad directa e inversa siguen emergiendo, como una manera describir la correlación directa o inversa entre cantidades.

Ante esta pregunta hubo un momento de silencio, ninguna de las estudiantes se atrevió confirmar lo que decía Alexandra, pues la pregunta del profesor parecía informar que algo de lo que dicha estudiante había dicho no era cierto. Ante esta situación, el investigador propuso a las estudiantes, activar la opción *"transferir medidas a los ejes"* la cual representa sobre eje de las abscisas la medida del segmento AE, en las ordenadas el área y el punto L es el punto de coordenadas de estos dos valores el cual deja "rastro" a medida que se desplaza el punto E (Ver Ilustración 5)

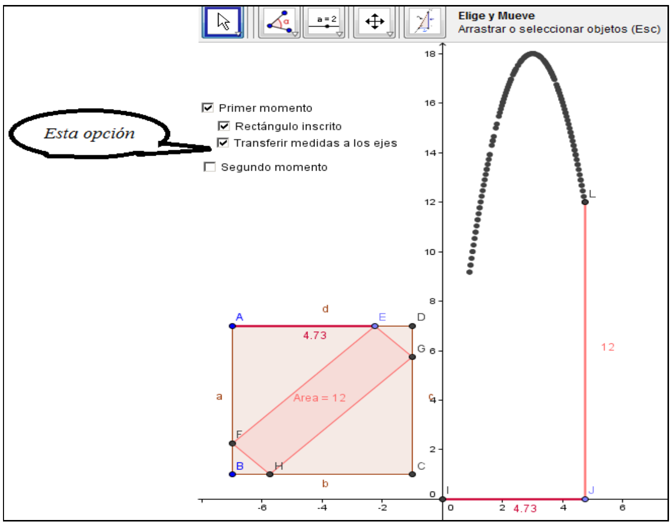


Ilustración 5. Transferencia de medidas a los ejes en la situación 1

En el momento en que las estudiantes observan la secuencia de puntos obtenida por el rastro del punto L, de inmediato tanto Alexandra como Marcela afirman "*una cuadrática*" ante esta afirmación el investigador solicita argumentos del porqué de una función cuadrática, para lo cual Cristina se apoya en la forma de la gráfica y Marcela en el hecho que la gráfica representa la función área y que como tal, debe ser una cuadrática. Ante ello, el investigador sugiere el reconocimiento de las variables y les solicita usen el rectángulo para determinar la expresión algebraica del área. Nociones del teorema de Pitágoras, variables, área, entre otros; surgieron sin ningún tipo de inconveniente para determinar que la expresión del área está dada por la expresión $A(x) = 2x(6 - x)$.

Una vez confirmado que la función correspondía a una cuadrática, el investigador retoma la discusión sobre la proporcionalidad, generándose el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Entonces,¿sí es directamente proporcional?*
Marcela	:	*No,*
Investigador	:	*¿Por qué?*

Simultáneamente responden Marcela y Alexandra

Marcela	:	*Porque no es lineal*
Alexandra	:	*Porque es cuadrática*
Investigador	:	*Entonces ¿cómo analizamos la tasa de variación?*
Alexandra	:	*Con los triangulitos de la última vez* [refiriéndose al procedimiento descrito en la sesión anterior]

Según lo descrito anteriormente, las estudiantes a pesar de encontrarse en el estrato 3 (IH) evocaron de nuevo algunos elementos del estrato 1(*Primitive Knowing*). En el caso de Alexandra, estos elementos surgen como manifestación de un aprendizaje "arraigado" que la estudiante tiene de la proporcionalidad, en el cual ha sobre-generalizado (extendido) a campos en el cual no es aplicable; dichos elementos se continuaron presentando en otras situaciones posteriormente. En el caso de Marcela, Estefanía y Cristina estos elementos de proporcionalidad fueron inducidos por las verbalizaciones de Alexandra. Este aspecto de "volver" a un estrato precedente es equiparable con la característica del *folding back* de la teoría de Pirie y Kieren, el cual se observa de manera diferente entre las estudiantes; para el caso de Marcela, Cristina y Estefanía, fue un *folding back no intencional producida por un colega* (Martin, 2008), pero en el caso de Alexandra, el *folding back* fue producido por *ella misma* (Martin, 2008) provocado a su vez por una imagen previa que la estudiante posee de la proporcionalidad en la cual sólo tiene en cuenta las correlaciones entre las cantidades y no las características de producto o razón constante.

Otro aspecto que emergió en la comprensión de la tasa de variación también está asociado con una comprensión "incompleta" de los elementos de la proporcionalidad. Con el ánimo de promover la identificación de algunas regularidades para el comportamiento de la tasa de variación, el investigador propuso a las estudiantes comenzar a calcular tasa de variación en intervalos cercanos a *x=2*. Generándose así el siguiente diálogo:

Investigador	:	*¿Cuál es la tasa de variación entre 1 y 2?*
Estudiantes	:	*Seis*
Investigador	:	*¿Y entre 1,5 y 2?*
Estudiantes	:	*Cinco*
Investigador	:	*Ok, entonces sin usar la herramienta del GeoGebra, ¿cuál sería la tasa de variación entre 1 y 1,5?*
Cristina, Estefanía y Alexandra	:	*Uno*
Investigador	:	*¿Por qué uno?*
Alexandra	:	*Porque entre uno y dos fue seis, ahora entre uno con cinco y dos es cinco,*

o sea que en el anterior debe ser uno… ¿no?
Investigador : *Verifíquenlo en el software*

Las estudiantes verificaron en el software y encontraron que ese valor era siete. Con sorpresa, las estudiantes evocaron su conocimiento de la proporcionalidad en busca de una justificación para este hecho; pero no consiguieron encontrarlo. Este episodio pone en evidencia que las experiencias que las estudiantes tuvieron en el aprendizaje de la proporcionalidad, no fueron suficientes para desvirtuar algunos aspectos del razonamiento aditivo que parecía prevalecer sobre su compresión de estos tópicos.

5. Discusión y conclusiones

A través de esta investigación se pudo apreciar que, como observadores e investigadores, no fue posible determinar de manera absoluta el *Primitive Knowing* de nuestros estudiantes, y, tal como lo afirman Thom y Pirie (2006), es posible construir diversas interpretaciones a partir de la evidencia de que se ponga a nuestra disposición a través unas acciones físicas, verbales o escritas. Los datos presentados en este documento dan cuenta que, aunque los estudiantes han estudiado algunos conceptos previamente, no siempre alcanzan a comprender todos los aspectos involucrados en ellos. De esa manera, aspectos "incompletos" o "imprecisos" van emergiendo en la comprensión de otros conceptos relacionados con los primeros.

En el caso de esta investigación, se observó cómo en la comprensión de la tasa de variación se involucran nociones como: variable, funciones, límites, proporcionalidad, entre otros; y, como se muestra en este artículo, algunas nociones "imprecisas" de la proporcionalidad emergen y de manera reiterada a pesar de haber sido estudiadas y creerse "superadas" previamente. Este tipo de aspectos emergentes plantean la necesidad de profundizar en los aspectos didácticos que podrían ocasionar dicho surgimiento reiterado, así como las posibles maneras de abordarlas y modificarlas.

El caso de Alexandra evidencia que existen estudiantes en los cuales hay aspectos "arraigados" y que se muestran como producto de una sobre-generalización de las propiedades de la proporcionalidad. Así mismo, tales aspectos se evidencian como un acto de *folding back* y que necesitan en ocasiones ser abordados y refinados para posibilitar la evolución de la comprensión. Estos elementos, confirman una vez más los planteamientos que Cavey y Berenson (2005) puntualizan acerca de la naturaleza compleja del proceso del *folding back* señalando que no todos los actos de redoblado son necesariamente efectivos para la extensión de la comprensión matemática, y que, por tanto, la efectividad del redoblado depende tanto de la estructura del contexto como del aprendiz.

Cabe anotar que el "procedimiento de triángulos" para estudiar el comportamiento de la noción de tasa de variación se desarrolló en un ambiente gráfico y respondiendo a la necesidad de describir algunas características de esta noción en funciones no lineales. En el caso de los episodios descritos anteriormente, tanto Alexandra como sus compañeras estaban estudiando algunos comportamientos presentados entre cantidades de una situación de movimiento particular (sin gráficos), y sólo hasta cuando el software sugirió un ambiente gráfico (no lineal), Alexandra consiguió evocar nuevamente dicho "procedimiento de triángulos" y revertir sus argumentos a favor de la proporcionalidad. Estos elementos sugieren profundizar en la discusión de cómo la comprensión matemática requiere de la coordinación de diferentes representaciones y, a su vez, en el papel de la visualización proporcionada por los software educativos como elementos mediadores en la evolución de dicha comprensión.

6. Bibliografía

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivate and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Techology , 38* (6), 763-777.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. *Actas Latinoamerica de Matemática Educativa. 17*, págs. 1-9. México D.F.: Clame.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* (42), 353-369.

Cavey, L., & Berenson, S. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *Journal of Mathematical Behavior* (24), 171–190.

Çetin, N. (2009). The Ability of Students to Comprehend the Function-Derivative Relationship with Regard to Problems from Their Real Life. *PRIMUS , 19* (3), 232-244.

Creswell, J. W. (2008). *Educational Research. Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* New Jersey: Pearson, Prentice Hall.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.* México D.F: Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

Goldenberd, M. (2007). *A arte de pesquisar.Como fazer pesquisa qualitativa en Ciências Sociais.* Rio de Janeiro: Record.

Martin, L. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior , 27*, 64-85.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1992). Creating constructivist enviroments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics , 23* (5), 505-528.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1991). Foldind Back: Dynamics in the growth of mathematical understanding. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME 15)*, *3*, pp. 169-176. Assisi.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics , 26* (2/3), 165-190.

Pirie, S., & Martin, L. (2000). The Role of Collecting in the Growth of Mathematical Understanding. *Mathematics Education Research Journal , 12* (2), 127-146.

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006a). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia, Medellín.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education , 41* (4), 481-492.

Yin, R. (2009). *Case study research, Design and methods.* Thounsand Oaks, California: Sage Publications, Inc.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. En E. Dubinsky, A. J. Schoenfeld, & J. Kaput (Edits.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS* (Vol. 8, págs. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society.

ANEXO Nº 3

Artículo publicado en Revista: *Educação Matemática Pesquisa.* Villa-Ochoa y Ruiz (2010)

Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales

Variational thinking: humans-with-GeoGebra in the visualization of variational notions

JHONY ALEXANDER VILLA-OCHOA[1]
MAURICIO RUIZ VAHOS[2]

Resumen

En este artículo mostramos cómo a través de la interacción de un colectivo de investigadores con el software GeoGebra surgieron algunas ideas para el diseño de estrategias que potencian el desarrollo del pensamiento variacional. Usamos el constructo teórico de seres-humanos-con-medios propuesto por Borba y Villarreal (2005) para analizar dos episodios de nuestra experiencia como investigadores. Desde dicho análisis pudimos observar cómo a través de la necesidades de la investigación se pudieron crear algunas "herramientas" del software, que a su vez permitieron estudiar, establecer y demostrar nuevas conjeturas acerca de algunos conceptos matemáticos.
Palabras clave: *Pensamiento variacional;seres-humanos-con-medios; GeoGebra; visualización*

Resumo

Neste artigo apresentamos como, por meio da interação entre um coletivo de investigadores com o software GeoGebra, surgiram algumas ideias para o desenho de estratégias que potencializam o desenvolvimento do pensamento variacional. Usamos a construção teórica de seres-humanos-com-mídias proposta por Borba e Villarreal (2005) para analisar dois episódios de nossa experiência como investigadores. Desta análise pudemos observar como por meio das necessidades da investigação foi possível gerar "ferramentas" do software, que por sua vez permitiram estudar, estabelecer e demonstrar novas conjecturas de alguns conceitos matemáticos.
Palavras chave:*Pensamento variacional; seres-humanos-com-mídias; GeoGebra; vizualização.*

El pensamiento variacional. Una introducción

La noción de variación se ha convertido en los últimos años en un elemento que ha llamado la atención de investigadores al interior de la Educación Matemática, tanto por su estrecha relación con algunos conceptos matemáticos (proporción, tasa de variación, función, derivada, integrales, ecuaciones diferenciales, entre otros) como porque permite caracterizar un estilo propio de razonamiento (CARLSON, JACOBS, COE, LARSEN, & HSU, 2003; VILLA-OCHOA Y MESA, 2009) y de pensamiento (CANTORAL Y FARFÁN, 1998; VASCO, 2006).

[1] Estudiante Programa de Doctorado en Educación (Matemática) de la Universidad de Antioquia. Medellín- Colombia. Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Docente Universidad de Antioquia. javo@une.net.co
[2] Estudiante Programa de Maestría en Educación (Matemática) de la Universidad de Antioquia. Medellín-Colombia. Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Docente Universidad el Antioquia y Colegio Vermont-Medellín. mruizxp@gmail.com

Investigadores como Tall (2009) resaltan la importancia de los aspectos dinámicos de la matemática y el papel de software en la reproducción de efectos visuales del cálculo. Este autor también señala que el cálculo está compuesto fundamentalmente por conceptos dinámicos, por ejemplo: el deseo de cuantificar las cosas que cambian (el concepto de función), la razón en la cual ellas cambian (derivada), la manera en la cual ellas se acumulan (la integral) y las relaciones entre ellas (Teorema fundamental del cálculo y la solución de ecuaciones diferenciales).

Dolores (2007; 1999), por su parte, llama la atención sobre la necesidad de acercarse a la noción de derivada desde un estudio de la variación y desarrolla una propuesta en la que reflexiona sobre algunas de las dificultades inherentes a la compresión de este concepto. Por otro lado, el establecimiento de relaciones entre los principios básicos del cálculo y la cinemática ocupó la agenda de investigación de Doorman y Gravemeijer (2009).

En Latinoamérica ha habido un creciente interés por el estudio de la variación, hasta el punto de gestarse un programa de investigación denominado *Pensamiento y Lenguaje Variacional* del cual, algunos de sus antecedentes se muestran en el trabajo de Cantoral y Farfán (1998). Este programa es entendido como una línea de investigación que, ubicada en el seno del acercamiento socioepistemológico, permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (CANTORAL Y FARFÁN, 1998). Algunas de las investigaciones de este programa pueden encontrarse en: Dolores, Chi, Canul, Cantú, y Pastor (2009), Diaz (2005), Dolores y Cuevas (2007), Reséndiz (2006).

En Colombia, el estudio de procesos de variación en las aulas escolares ha sido sugerido por los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (COLOMBIA, 1998) y apoyados posteriormente con la publicación del documento de los Estándares Básicos de Competencias (COLOMBIA, 2006) emanados por el Ministerio de Educación Nacional-MEN de Colombia. En este último documento se describe el pensamiento variacional en los siguientes términos:

> […] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.
>
> Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos

> significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (p. 66).

Con el propósito de aproximarse a ese tipo de pensamiento, Vasco (2006) presenta un artículo en el que, además de describir el pensamiento variacional, sugiere algunos elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones de éste con la modelación y la tecnología. En ese sentido este investigador señala que:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad (p. 138).

De acuerdo con las anteriores descripciones, el estudio de fenómenos asociados a la percepción, comprensión, representación y caracterización de la variación hace parte fundamental del "pensamiento dinámico" aludido por Vasco anteriormente. Es precisamente en este aspecto donde la Tecnología interviene como una manera de indagar no sólo por procesos asociados a la modelación desde fenómenos de variación en otras ciencias; sino también, como una forma de producir y reproducir las relaciones variacionales que se dan entre algunos objetos matemáticos.

Bajo la anterior mirada de la tecnología, hemos observado en nuestras investigaciones cómo en el desarrollo del pensamiento variacional se involucran procesos de experimentación con software, a partir de los cuales, tanto estudiantes como investigadores, visualizan, generalizan y abstraen relaciones y propiedades de los objetos matemáticos estudiados.

Al interior de nuestras investigaciones hemos diseñado un conjunto de situaciones flexibles, es decir, situaciones en la que los estudiantes no son sometidos a una secuencia rígida de preguntas, las cuales ellos deben ir abordando, como si fuera un cuestionario; sino que por el contrario, son situaciones en las que teniendo en cuenta los propósitos de la investigación se incorporan los asuntos que van emergiendo del trabajo experimental en el aula, así como la formulación de nuevas preguntas, de tal manera que y se promuevan confrontaciones entre los razonamientos, hipótesis y conjeturas de los estudiantes.

En este artículo analizamos dos de los episodios que surgieron en dos investigaciones, que, aunque están relacionadas, indagan por aspectos diferentes del conocimiento matemático. -El primer episodio hace parte de una investigación, que tiene como propósito indagar por el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse a una interpretación del concepto de derivada; esta investigación se desarrolla en el marco de la tesis elaborada por uno de los autores junto al programa de Doctorado en Educación, en la línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia en Colombia. -El segundo episodio surge, de igual manera, de una pesquisa que indaga por el proceso de génesis instrumental en el estudio de las cónicas, esta investigación se encuentra adscrita al Programa de Maestría en Educación (Matemática) de la misma Universidad.

Ambos episodios surgen de la interacción entre el colectivo de investigadores con el software GeoGebra, en ellos pretendemos mostrar cómo desde dicha interacción pudimos acceder a ciertas relaciones matemáticas las cuales no habíamos explorado con anterioridad, ni habíamos encontrado en los libros de texto de los estudiantes. Discutimos así, cómo estas relaciones surgieron de un colectivo de *seres-humanos-con-GeoGebra* y para ello usamos el constructo teórico de *Humans-with-Media* desarrollado por Borba y Villarreal (2005) al cual nos referiremos en el siguiente apartado.

1. Seres-humanos-con-GeoGebra

En Borba y Villarreal (2005) se presenta un constructo teórico denominado *humans-with –media* en el cual se discute cómo el conocimiento matemático es el resultado de una construcción de un colectivo pensante de *seres-humanos-con-medios*. Estos autores puntualizan que los medios empleados para comunicar, representar y para producir ideas matemáticas condicionan el tipo de matemáticas que son construidas y el tipo de pensamiento a ser desarrollado en esos procesos.

El constructo teórico de estos investigadores está fundamentado epistemológicamente en los planteamientos de Lévy (1993) quien, según Borba y Villarreal (2005), afirma que la tecnología y los artefactos deben ser vistos en interrelación con los seres humanos, de dicha interrelación depende la manera en que producimos conocimiento; según Lévy, las bibliotecas, las ciudades y los artefactos son parte de la manera en que conocemos.

Villarreal y Borba (2010) señalan que el constructo teórico de Seres-humanos-con-medios está soportado en dos pilares, a saber: que la cognición no es un trabajo individual sino más bien de naturaleza colectiva; y que la cognición incluye herramientas, dispositivos, artefactos y medios con los cuales el conocimiento es producido. Dentro de este constructo teórico, la separación entre seres humanos y medios no tiene sentido, pues los medios son componentes del sujeto epistémico, no son simples auxiliares ni complementos, sino una parte esencial y constitutiva de éste. Para estos investigadores, los medios son tan relevantes que el uso de diferentes tipos de medios conduce a la producción de diferentes tipos conocimiento.

La visualización en Seres-humanos-con-medios

La visión del constructo teórico *Seres-humanos-con-medios* permea diferentes esferas de investigación al interior de la Educación Matemática, tal es el caso de la modelación matemática, la experimentación, la educación *on-line* y la visualización. Dado que el interés de este artículo se focaliza en nuestra interacción con el software GeoGebra y en cómo a través de la visualización surgieron algunas ideas para el diseño de estrategias al interior de las investigaciones; centraremos nuestra atención en los elementos teóricos que sobre la visualización se desarrollan en seres-humanos-con-medios.

Para Borba y Villarreal (2005) la visualización ha sido considerada como una forma de razonamiento en la investigación en matemáticas y en educación matemática. Basados en una amplia revisión de la literatura, estos investigadores presentan dos niveles en los que puede considerarse la visualización: el primero asociado a su uso en la prueba matemática formal; y otro, relacionado con su uso en otras actividades matemáticas tales como la elaboración de conjeturas, la solución de problemas o los intentos de explicar algunos resultados matemáticos a colegas o estudiantes. Borba y Villarreal, se apoyan en las palabras de Hanna (2000) para puntualizar que en el primer caso las representaciones visuales no son aceptadas como parte de una prueba formal sino como un acompañamiento heurístico a la prueba que inspira a un teorema o a su demostración; en la segunda, la visualización -no es más que un recurso periférico o pedagógico.

Es así como los autores señalan que, a pesar de haberse iniciado movimientos internacionales para aumentar el estatus de la visualización, continúan ciertas resistencias de reconocer la importancia del razonamiento visual en la investigación matemática.

Aun cuando existe un acuerdo "teórico" sobre el valor pedagógico de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los estudios de Borba y Villarreal (2005) notan cierto tono de desconfianza con respecto a la visualización que, para estos investigadores, puede implicarse de la influencia que la práctica científica de las matemáticas tiene sobre las prácticas pedagógicas. En todo caso, estos investigadores presentan argumentos desde el acceso y comprensión del conocimiento matemático y de las maneras de resolver problemas para justificar la importancia de la visualización en la Educación Matemática.

Al interior del constructo teórico presentado en este apartado, la visualización es un proceso que va más allá del simple acto de mostrar una imagen. Al ser el constructo teórico Seres-humanos-con-medios asumido como una unidad, la separación entre lo interno y externo no tiene sentido, pues dicha dicotomía carece de valor ya que los límites entre ellos no son claros para el ser cognitivo. Para los autores, esta visión es compatible con los planteamientos de Nemirosky y Noble (1997) cuando sugieren que nuestras experiencias, memorias e intenciones se llevan con nosotros. La experiencia que estamos teniendo, o tuvimos con cualquier tipo de medio dado, es parte de esa unidad Seres-humanos-con-medios así no esté disponible en ese mismo momento (BORBA Y VILLARREAL, 2005).

2. Dos episodios

Conforme describimos anteriormente, en este artículo discutimos acerca de dos de los episodios que surgieron en el diseño de las situaciones que utilizaríamos posteriormente con los estudiantes que intervendrían en nuestras investigaciones.

Episodio No 1. La comprensión de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada

El primer episodio al que haremos referencia en este artículo emerge de una investigación cuyo propósito general fue indagar por el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse a una interpretación variacional de la derivada. La investigación involucró varias situaciones en las cuales los estudiantes debían describir y cuantificar la manera cómo covariaban las cantidades que intervenían en dichas situaciones. Posteriormente, ante el requerimiento de representar la tasa de variación para las gráficas de algunas funciones, surgió la necesidad de construir una "herramienta" que simplificara este procedimiento a través del uso del software.

El proceso de construcción de tal herramienta involucró, en primera instancia, una forma de construir un triángulo rectángulo en el cual se pudiera interpretar el cociente incremental que representa la tasa de variación en un punto. En la figura 1 (a) se observa la construcción realizada con el software GeoGebra. En ella, el segmento BE representa $\Delta x = a$, ED representa $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ y el segmento AF representa la razón entre los segmentos ED y BE. Adicionalmente se construyó el punto $F(x_A, AF)$cuyas coordenadas corresponden a la abscisa del punto A y la ordenada a la tasa de variación $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

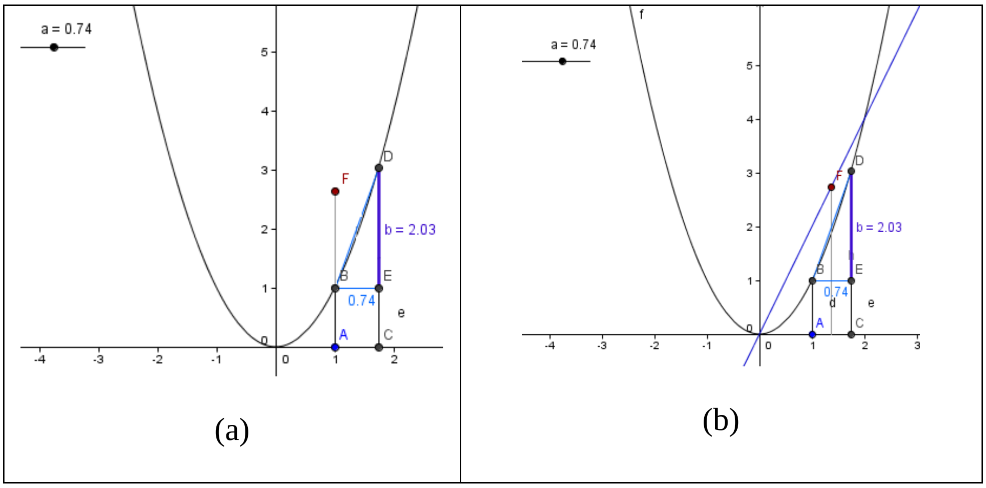


FIGURA 1. Construcción gráfica de la tasa de variación en un punto

El propósito inicial de esta herramienta fuera calcular la tasa de variación en intervalos cada vez más pequeños según el movimiento del "*deslizador a*". De ese modo, el punto F que representa la tasa de variación de *f* en el intervalo AC, se acercaría al punto que representa el valor de la derivada en A en la medida que el deslizador toma valores cercanos a cero. Surgió entonces la pregunta, ¿cómo el estudiante sabría que se aproximaría a la derivada?

Usamos entonces la herramienta *derivada [f]* del GeoGebra para graficar tal función y, de esta manera, pudimos observar que la longitud del segmento AF coincidía con el valor de la derivada en el punto de la gráfica cuya coordenada en x está en el punto medio de AC. Ver figura 1 (b).

Al desplazar el punto A sobre el eje *x* encontramos que el punto F siempre se ubica en la recta que representa la derivada (recta azul de la figura 1 (b)); hecho que también se cumplía para una función f descrita por una expresión lineal. A partir de la experiencia nos surgió la primera conjetura:

Sea I el intervalo $[x_1, x_2]$ en el cual una función f (lineal o cuadrática) está definida; sea $M(\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$, entonces la derivada de la función f es el lugar geométrico de todos los puntos $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)$.

A pesar de que esta conjetura pudo ser validada de manera inmediata como una consecuencia del teorema del valor medio para derivadas, nos causó especial inquietud, pues sugiere la igualdad entre la función tasa de variación y la derivada de funciones lineales y cuadráticas prescindiendo la noción de límite. Además, tal y como se presenta en muchos libros de texto de cálculo, nuestro abordaje del teorema del valor medio era visto sólo como un resultado local y estático. Por medio del software GeoGebra pudimos establecer una interpretación dinámica y más global de este teorema y relacionarlo con la función tasa de variación.

Posteriormente exploramos la construcción simulando un procedimiento con regla y compás. Usando el software GeoGebra desarrollamos la construcción, tal y como puede observarse en la Figura 2.

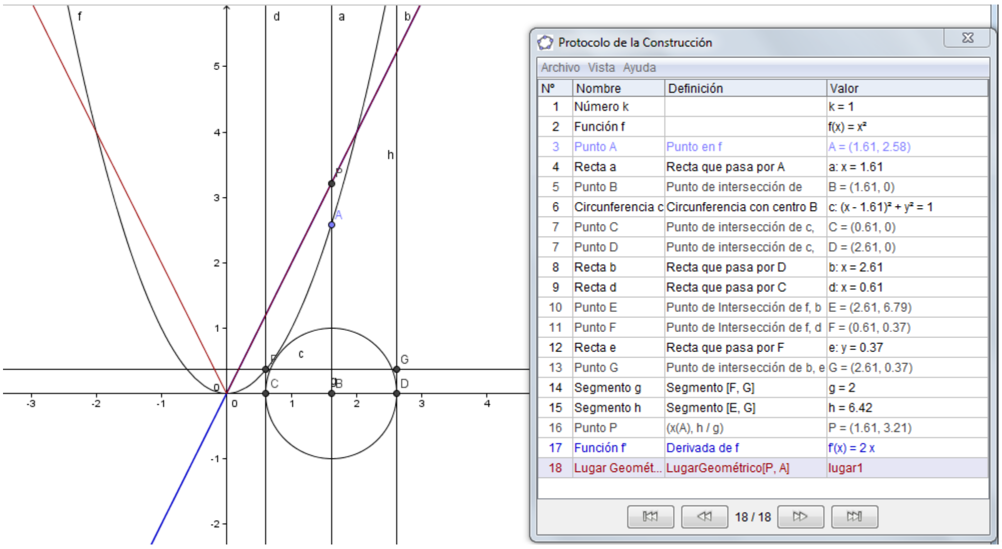
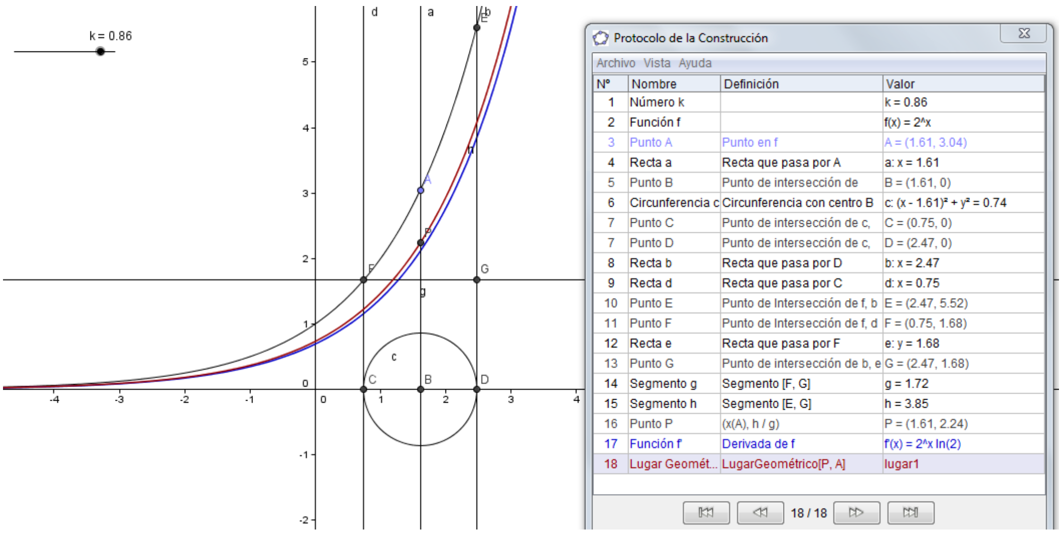


FIGURA 2. Construcción y protocolo de construcción de un posible trazo de la derivada con regla y compás**.**

Con excepción del trazo negativo de la derivada en el tercer cuadrante, la traza construida (lugar geométrico) de la función tasa de variación y la derivada coincidían en todos sus puntos sin importar el radio de la circunferencia construida. Este resultado sugería una construcción con regla y compás para la derivada de una función lineal y cuadrática. Decidimos experimentar con funciones trigonométricas, exponenciales y polinómicas de grado mayor que 2. Con esta experiencia conseguimos observar la presencia de la noción de límite, ya que la función *tasa de variación* (lugar geométrico obtenido por el punto P) tiende a la función derivada a medida que el radio de la circunferencia se hace más pequeño. Este resultado nos ofreció más argumentos visuales para justificar en la primera conjetura que habíamos plateando sobre el Teorema de valor medio y las funciones lineales y cuadráticas. Finalmente creamos entonces un *deslizador k* que representara el radio de la circunferencia y de esa manera pudimos observar que la función derivada podría definirse en términos del límite de la función tasa de variación (f_v ver figura 3). De la siguiente manera:

$$\lim_{k \to 0} f_v(x) = f'(x)$$



Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Número k		k = 0.86
2	Función f		f(x) = 2^x
3	Punto A	Punto en f	A = (1.61, 3.04)
4	Recta a	Recta que pasa por A	a: x = 1.61
5	Punto B	Punto de intersección de	B = (1.61, 0)
6	Circunferencia c	Circunferencia con centro B	c: (x - 1.61)² + y² = 0.74
7	Punto C	Punto de intersección de c,	C = (0.75, 0)
7	Punto D	Punto de intersección de c,	D = (2.47, 0)
8	Recta b	Recta que pasa por D	b: x = 2.47
9	Recta d	Recta que pasa por C	d: x = 0.75
10	Punto E	Punto de Intersección de f, b	E = (2.47, 5.52)
11	Punto F	Punto de Intersección de f, d	F = (0.75, 1.68)
12	Recta e	Recta que pasa por F	e: y = 1.68
13	Punto G	Punto de intersección de b, e	G = (2.47, 1.68)
14	Segmento g	Segmento [F, G]	g = 1.72
15	Segmento h	Segmento [E, G]	h = 3.85
16	Punto P	(x(A), h / g)	P = (1.61, 2.24)
17	Función f'	Derivada de f	f'(x) = 2^x ln(2)
18	Lugar Geomét...	LugarGeométrico[P, A]	lugar1

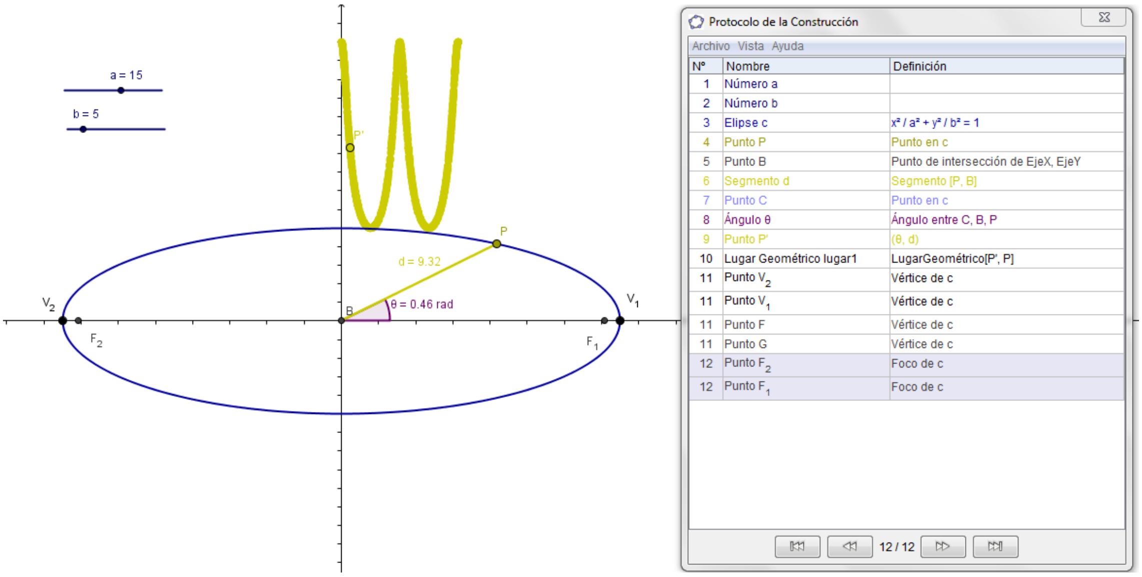
FIGURA 3. Gráfica que muestra relación entre f_v y *f '*.

A partir de nuestra comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en esta experiencia, observamos una alternativa para introducir el concepto de derivada por medio del estudio de la tasa de variación, tanto a nivel local como global. De este modo, preguntas como: ¿Sería posible calcular el "error" de aproximación de $f_v(x)$ hacia $f'(x)$ dependiendo del valor de k? y ¿Cuál es el valor de verdad del reciproco de la primera conjetura plateada anteriormente? Fueron surgiendo y abordándose a través de la interacción con el software GeoGebra y en los casos necesarios, apoyados con cálculos a lápiz y papel.

Episodio No 2. La variación del "segmento central" de una elipse

El episodio que narramos a continuación se desprende de la tesis de maestría que lleva por título "*la génesis instrumental en el estudio de las cónicas como lugares geométricos: el caso de GeoGebra*". Este episodio tiene lugar en las discusiones del colectivo de investigación al analizar las producciones de los estudiantes cuando describían algunas características de una elipse a través del uso del GeoGebra. Entre las características que los estudiantes reconocían se tienen: "*Dos puntos fijos*" (focos), "*una distancia constante*" (suma de las distancia de un punto de la elipse a los focos) y "*un radio que varía*" (refiriéndose al segmento que trazado desde cualquier punto de la elipse al centro de la misma, al que llamamos *"segmento central"*).

Al escuchar en las verbalizaciones de los estudiantes "*radio que varía*" de inmediato se nos ocurrió matematizar esa variación. Para ello surgieron preguntas como: ¿De qué depende esa variación? ¿Cómo varía? Las respuestas a estas preguntas nos permitieron determinar que la función que estábamos analizando describía la covariación entre el ángulo θ y la longitud del "segmento central" OP (ver figura 4).



Nº	Nombre	Definición
1	Número a	
2	Número b	
3	Elipse c	$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$
4	Punto P	Punto en c
5	Punto B	Punto de intersección de EjeX, EjeY
6	Segmento d	Segmento [P, B]
7	Punto C	Punto en c
8	Ángulo θ	Ángulo entre C, B, P
9	Punto P'	(θ, d)
10	Lugar Geométrico lugar1	LugarGeométrico[P', P]
11	Punto V_2	Vértice de c
11	Punto V_1	Vértice de c
11	Punto F	Vértice de c
11	Punto G	Vértice de c
12	Punto F_2	Foco de c
12	Punto F_1	Foco de c

FIGURA 4. Covariación entre la longitud del segmento central de la elipse y el ángulo central de la misma.

En la exploración de algunas propiedades de esta función cambiamos la excentricidad de la elipse con lo cual pudimos conjeturar cierto comportamiento en la gráfica de tal función. En la figura 5 se muestra una secuencia de funciones que se obtiene al cambiar la excentricidad de la elipse.

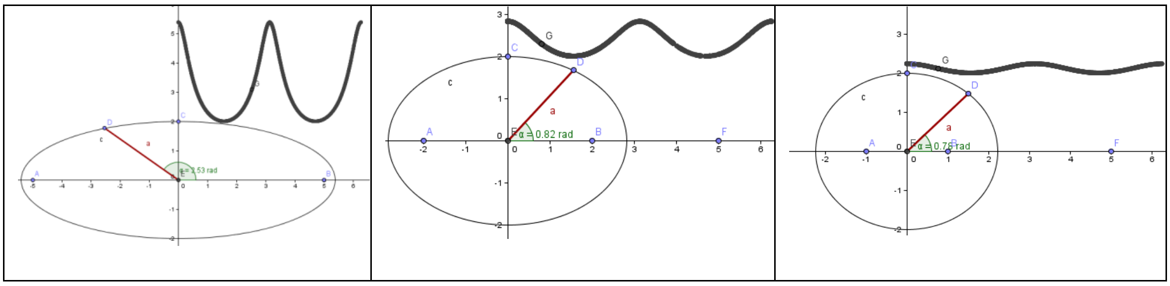


FIGURA 5. Comportamiento de la función dependiendo de la excentricidad.

De la secuencia anterior pudimos establecer las siguientes características:

- Cuando la distancia entre los focos tiende a cero la función se acerca a una constante.
- Cuando la distancia entre los focos se hace cada vez mayor, se generan cambios cada vez más "bruscos" en los valores de $\theta = n\pi$.
- La función es periódica y su período es π.
- La abscisa del intercepto de la elipse con el eje positivo *x* corresponde a la ordenada del intercepto de la función con el eje *y*.

Algunas de estas conjeturas fueron validadas de inmediato con el establecimiento de relaciones entre la elipse y la circunferencia. Para la validación de otras fue necesario determinar la expresión algebraica que representaba la función "segmento central".

En la interacción entre la visualización del software y las anotaciones en lápiz y papel pudimos determinar que la función "segmento central" que estábamos analizando está dada por la ecuación $f(\theta) = ab\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{-1}}$ donde a y b son los respectivos parámetros de la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La gráfica$f(\theta)$ se muestra en la figura 6.

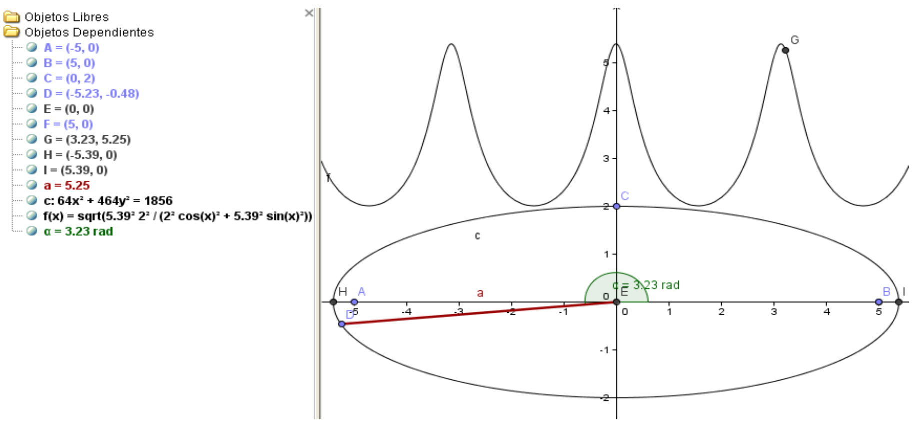


FIGURA 6. Gráfica de la función eje central.

El estudio de esta función abrió el panorama para estudiar otras funciones que se pueden determinar en la elipse, las cuales a su vez se convierten en una generalización de las funciones trigonométricas presentadas en los currículos colombianos de Educación Media (16-17 años). Algunas de esas funciones se observan en la figura 7:

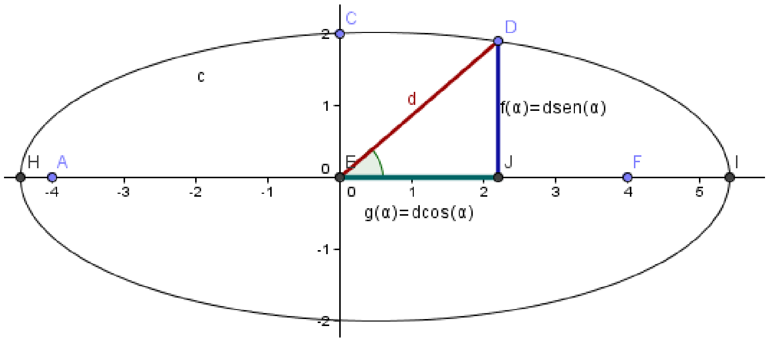


FIGURA 7.Generalización de las funciones trigonométricas en la elipse.

Con nuestro estudio de estas funciones nuevos cuestionamientos emergieron, entre ellos:

- ¿Desde cuál perspectiva podría ser pertinente el estudio de estas funciones en el aula de clase?
- ¿Cuál es la importancia que representa para el desarrollo del pensamiento variacional el estudio de estas funciones en las matemáticas escolares?
- ¿Podría integrarse el estudio de estas funciones al currículo escolar?

Discusión y conclusiones

Durante nuestra interacción con el software GeoGebra pudimos observar maneras alternativas de aproximarse a los conceptos matemáticos y al software mismo. Las necesidades que van surgiendo aunadas a los momentos de incertidumbre experimentados en la interacción con el software, hizo que nuevas preguntas emergieran y al abordarlas se pudo ampliar tanto nuestra visión de algunos objetos matemáticos como de las potencialidades del software. Consideramos de suma importancia el papel de tales preguntas, ya que en la misma interacción se van desencadenando conjeturas y surgen mayores evidencias para su confirmación o refutación.

En el proceso de diseño de las situaciones atravesamos por diferentes momentos que parecen involucrarse en el desarrollo del pensamiento variacional a través del uso de un software como el GeoGebra, a saber: captación y descripción de una relación, creación de una estrategia, construcción de herramientas, surgimiento de conjeturas, construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones, refutación o demostración formal de las conjeturas. Los anteriores momentos fueron dinamizados en la interacción de un colectivo-de-investigadores-con-GeoGebra[3] y, aunque el uso de lápiz y papel fue necesario para apoyar el análisis y demostración formal de las conjeturas, estuvo subordinado por las ideas que fueron emergiendo de la visualización proporcionada por el software.

Villarreal y Borba (2010) observan que en la literatura se está demandando una exploración del potencial de los computadores con el fin de evitar el uso de estos medios de manera anticuada. En ese sentido observamos desde nuestra experiencia, cómo a través de la interacción con el software surgen nuevos cuestionamientos que alimentan la exploración del software mismo y redimensionan la mirada sobre los objetos matemáticos, a la vez, de tales cuestionamientos emanaron nuevas necesidades con las cuales conocimos otras potencialidades del software, hasta el momento no exploradas por nosotros. Sin embargo el surgimiento de relaciones variacionales como las presentadas en el episodio 2, -ponen de relieve nuevos cuestionamientos sobre la pertinencia o no de incorporar esos conceptos en el aula de clase. Desde nuestra experiencia como profesores de una institución educativa de carácter privado, hemos observamos que los estudiantes (15-16 años) pueden aproximarse con menores dificultades al estudio de algunas relaciones como las presentas en el episodio mencionado. Sin embargo, la discusión queda abierta, y cada aproximación a estos cuestionamientos ofrecerá nuevos elementos para la discusión sobre cómo el uso de la tecnología puede redimensionar los contenidos de las matemáticas (DEVLIN, 1997, citado en BORBA Y VILLARREAL, 2005) y a la vez a los currículos en las matemáticas escolares.

La posibilidad de generar "herramientas" en el software, transformarlas y usarlas en el estudio de algunos objetos matemáticos, permitió un diálogo entre la visualización y los procedimientos algebraicos con papel y lápiz y, permitieron la validación formal de algunas conjeturas. Con esto no pretendemos suprimir la polémica de la relación de la visualización y la demostración a los que Borba y Villarreal (2005) hacen alusión, pero sí mostrar otras evidencias de cómo el pensamiento matemático, en este caso el variacional, se va transformando *cualitativamente* en la interacción de un colectivo pensante de seres-humanos-con-Medios.

[3] Usamos el término *colectivo-de-investigadores-con-Geogebra* para referirnos a los miembros de nuestro grupo de investigación quienes periódicamente se reúnen para discutir sobre la manera de construir conocimiento matemático a través del software Geogebra

Basados en esta experiencia, en otros elementos proporcionados en nuestras investigaciones y en los principios epistemológicos del constructo teórico seres-humanos-con-medios ofrecemos una mirada alternativa a la *representación matemática proporcionada por el software GeoGebra;* discutimos entonces cómo esta representación (en singular) más que una suma de representaciones algebraicas, numéricas y geométricas, puede considerarse como una *Unidad* en la cual los registros están armonizados, es decir, dinámicamente relacionados, promoviendo la coordinación y la comprensión de los objetos matemáticos. Desde la investigación esperamos aportar mayores evidencias que contribuyan a la caracterización de dicha unidad de representación proporcionada por el GeoGebra.

Finalmente vale la pena aclarar que desde nuestras investigaciones, no consideramos el uso del software como un medio para enseñar o aprender matemáticas de manera más fácil, sino que consideramos que, a través de un colectivo pensante de seres-humanos-con-GeoGebra, la construcción del conocimiento matemático es diferente y parece armonizar con los elementos de una parte de nuestra sociedad en donde el uso de chats, celulares, computadores, internet, redes sociales y software libre se ha masificado e incorporado tanto a la cotidianidad, que ya hacen parte inherente de la cultura.

Referencias

BORBA, M., e VILLARREAL, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking.* New York: Springer.

CANTORAL, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. *Actas Latinoamerica de Matemática Educativa. 17,* págs. 1-9. México D.F.: Clame.

CANTORAL, R., e FARFÁN, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* (42), 353-369.

CANTORAL, R., MOLINA, J., e SÁNCHEZ, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez, & J. Molina (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 463-468). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

CARLSON, M., JACOBS, S., COE, E., LARSEN, S., e HSU, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *EMA , 8* (2), 121-156.

COLOMBIA, Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Bogotá: Magisterio.

COLOMBIA, Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

DIAZ, L. (2005). Profundizando en los lenguajes entendimientos estudiantiles de la variación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa , 8* (002), 145-168.

DOLORES, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.* México D.F: Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

DOLORES, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

DOLORES, C., e CUEVAS, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Relime. Revista de Investigación en Matemática Educativa, 10* (1), 69-96.

DOLORES, C., CHI, A. G., CANUL, E. R., CANTÚ, C. A., e PASTOR, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñazan de la matemática. *UNON. Revista iberoamericana de Educación Matemática* (18), 41-57.

DOORMAN, L. M., e GRAVEMEIJER, K. P. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the undertanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education , 41* (1-2), 199-211.

RESÉNDIZ, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latiniamericana de Investigación en Matemática Educativa , 9* (003), 435-458.

TALL, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education , 41* (4), 481-492.

VASCO, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. In C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos.* (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

VILLA-OCHOA, J. A., e MESA, Y. M. (2009). *El concepto de función en las matemáticas escolares. El caso de la función cuadrática.* Informe de investigación no publicado, Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas de la Asociación Sindical de Educadores del Municipio de Medellín, Medellín.

VILLARREAL, M., e BORBA, M. C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and … notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education , 42* (1), 49-62.