

Dinámica poblacional y bifurcaciones de Hopf

Alejandro Quintero Mejía

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Asesor:

Dr. Luis Fernando Echeverri Delgado
Profesor del Instituto de Matemáticas

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
El Carmen de Viboral, Antioquia
2020

A mi madre y demás seres queridos por su apoyo incondicional

A la memoria de Juan Pablo O.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi madre quien ha sido mi *raison d'être*, a mi familia y a mis amigos por su apoyo emocional e intelectual a lo largo de esta carrera. Un enorme agradecimiento a mi asesor Luis Fernando Echeverri Delgado por su incondicional colaboración, paciencia y sabiduría durante la elaboración de este trabajo, el cual no hubiera sido posible culminar exitosamente sin su ayuda. A mis docentes de pregrado, destacando dentro de estos a Jhoana Patricia Romero Leiton, por introducirme en este maravilloso mundo de los sistemas dinámicos; a Diego Harvin López García, por su amena forma de enseñar y a Roberto Cruz Rodes, por su excelsa manera de impartir conocimiento.

A todos ustedes, mis más sinceros agradecimientos y admiración.

Resumen

Uno de los objetivos de este trabajo es analizar un modelo de dinámica poblacional, más específicamente, un modelo depredador-presa que exhibe la bifurcación Hopf. Para lograr este objetivo, estudiaremos los principios básicos de los sistemas dinámicos y una de sus aplicaciones más ricas a la biología, a saber, la dinámica poblacional. Nos centraremos en los sistemas competitivos expresados por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y al final estudiaremos un modelo depredador-presa que exhibe una bifurcación tipo Hopf, la cual consiste en la aparición o desaparición de una órbita periódica a partir de un punto estacionario cuando ocurre un cambio en el valor de un parámetro. Adicionalmente, obtendremos nuestras propias soluciones numéricas del sistema que exhibe la bifurcación de Hopf, mediante métodos numéricos clásicos implementados en el software libre Octave.

Índice general

Agradecimientos	ii
Resumen	iii
1. Introducción a los sistemas dinámicos	3
1.1. Sistemas lineales	3
1.1.1. Diagonalización	9
1.1.2. El Teorema Fundamental para sistemas lineales	13
1.2. Sistemas no lineales	20
1.2.1. Linealización de sistemas no lineales	20
1.2.2. El Teorema Fundamental para sistemas no lineales	22
1.2.3. El intervalo maximal de existencia	24
1.2.4. Ciclos límites y conjuntos atractores	26
1.2.5. Funciones de Lyapunov	33
1.3. Bifurcaciones en el plano	38
2. Dinámica poblacional	44
2.1. Introducción	44
2.2. Modelos discretos	45
2.3. Modelos continuos	49
2.3.1. Modelo malthusiano	49
2.3.2. Modelo logístico	50
2.4. Especies en interacción	50
2.4.1. Modelos predador-presa	51
2.4.2. Modelos predador-presa con saturación	53
3. Un modelo que exhibe una bifurcación de Hopf	58
3.1. Introducción	58
3.2. Análisis de estabilidad local	60
3.3. Análisis de bifurcación y estabilidad global	62
3.4. Simulaciones numéricas	65
3.5. Conclusiones	68

A. Apéndice	69
A.1. Isoclinas	69
A.2. Criterio de estabilidad de Routh-Hurtwitz	70
A.3. Teorema de Poincaré-Bendixson	70
B. Métodos numéricos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	72
B.1. Método de Euler	72
B.2. Métodos para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	73
B.3. Método de Runge-Kutta	74
B.4. Códigos del método de Euler (explícito) y método de Runge-Kutta para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	75
Bibliografía	76

Capítulo 1

Introducción a los sistemas dinámicos

En este primer capítulo presentamos los conceptos de sistema lineal y no lineal, dándole prioridad al primero de ellos. Veremos primeramente algunos ejemplos clásicos de este tipo de sistemas dinámicos para luego analizar sus características. Iremos introduciendo progresivamente los diferentes conceptos y resultados los cuales serán útiles tanto en este capítulo como en el resto del trabajo. Finalmente, se introducirá el concepto de función de Lyapunov y sus propiedades.

Existen gran cantidad de ejemplos en los que se exhiben modelamientos matemáticos relacionados a sistemas ecológicos, en los cuales se analizan diversos tipos de hechos tales como la interacción entre especies, la evolución poblacional y la propagación de enfermedades. En dichos modelamientos se hace uso de diferentes ecuaciones diferenciales, las cuales representan el comportamiento del sistema a estudiar considerando los diferentes factores que influyen en el sistema ecológico como lo son la cantidad de recursos disponibles y las condiciones ambientales. La comprensión de estos modelamientos permite tomar acciones en determinados casos, como por ejemplo, el control de la propagación de una enfermedad, al analizar su comportamiento temporal y los distintos factores que impiden o limitan su propagación.

1.1. Sistemas lineales

Una ecuación diferencial (ó un sistema de ecuaciones) puede denotarse por:

$$\frac{dx}{dt} := \dot{x} = f(t, x) \quad (1.1)$$

donde $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ es una función vector valuada de una variable independiente t (usualmente la variable temporal), y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave definida para $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Si el sistema (1.1) no contiene explícitamente el tiempo t , dicho sistema recibe el nombre de *sistema autónomo*. En caso contrario, decimos que el sistema es *no autónomo*.

Cuando se da una condición inicial

$$x(0) = x_0 \in U,$$

buscamos una solución $\phi(t, x_0)$ tal que

$$\phi(0, x_0) = x_0$$

A la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(0) = x_0$ se le conoce como *problema de valor inicial* (P.V.I.) por sus siglas.

El siguiente teorema nos asegura la existencia y la unicidad de la solución para este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.1.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto del espacio real euclidiano, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y sea $x_0 \in U$. Entonces existe una constante $c > 0$ y una única solución $\phi(\cdot, x_0) : (-c, c) \rightarrow U$ que satisface la ecuación diferencial (1.1) con la condición inicial $x(0) = x_0$.*

Demostración. Ver [6] página 3. □

Definición 1.1.2 (Sistemas acoplados y no acoplados). *Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se dice que está desacoplado si es de la forma*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(t, x_1) \\ \dot{x}_2 &= g(t, x_2)\end{aligned}$$

donde f y g son dos funciones de clase C^1 con un dominio común I , es decir, un sistema desacoplado es un conjunto de dos ecuaciones diferenciales independientes y su solución se reduce a la solución de ambas ecuaciones separadamente. Un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden es acoplado si no es desacoplado.

La definición anterior puede extenderse a sistemas de más de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Dentro de los sistemas acoplados y desacoplados, podemos distinguir dos tipos de sistemas:

Definición 1.1.3 (Sistema no lineal). *Un sistemas de ecuaciones diferenciales como en (1.1) se dice no lineal, si $f(t, x)$ es no lineal en la variable espacial x .*

Definición 1.1.4 (Sistema lineal). *El sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

corresponde a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden lineal, esto es, todas sus ecuaciones son lineales en la variable espacial x .

Si $f_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, decimos que es un *sistema lineal homogéneo*, el cual se puede representar matricialmente como

$$\dot{x} = Ax\tag{1.3}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, A es la matriz $n \times n$ de coeficientes y \dot{x} es su vector columna de derivadas componentes, a saber,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

Veremos que la solución del sistema lineal (1.3) junto con la condición inicial $x(0) = x_0$ está dada por

$$x(t) = e^{At} x_0$$

donde e^{At} es una función matricial $n \times n$ definida mediante su serie de Taylor

$$e^{At} = \left[I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots \right]$$

Sin embargo, debemos primeramente considerar algunos conceptos adicionales.

Ejemplo 1.1.5. *Un quimiostato es un dispositivo de cultivo continuo que se usa para el crecimiento y estudio de cultivos de bacterias. Los nutrientes se añaden a una tasa constante $T_0\beta$ (masa/volumen) (volumen/tiempo), a la cámara de crecimiento donde las células vivas son mezcladas en los medios enriquecidos. La cámara de crecimiento es ajustada frecuentemente para mantener un volumen constante removiendo el fluido de la tasa de flujo β . Se denota por $T(t)$ la concentración de nutrientes en la cámara de crecimiento en el tiempo t y por $B(t)$ la concentración bacterial.*

El modelo matemático para el quimiostato es conocido como el modelo Jacob-Monod, el cual tiene en cuenta la adición de nutrientes y el lavado de las células:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \beta(T_0 - T(t)) - \frac{MTB}{K + T} \frac{1}{Y}, \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{MTB}{K + T} - \beta B \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde β es la tasa de flujo, M es la tasa de captación máxima, K es la constante de saturación de la captación de nutrientes y Y es el rendimiento de las células por unidad de nutriente absorbido. Claramente este sistema es de tipo no lineal.

Ejemplo 1.1.6. *Consideremos el siguiente modelo presa-depredador, para el que se impone un límite a la población de la presa:*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy, \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde x es la población de la presa, y la población depredadora, r la tasa de crecimiento de la presa, c la tasa de mortalidad de la población depredadora, d la eficiencia de la cacería del depredador y a es la ineficiencia para sobrevivir de la presa. Este sistema, al igual que el anterior, es no lineal.

Veamos ahora un sistema lineal desacoplado.

Ejemplo 1.1.7. *El siguiente sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 \\ \dot{x}_2 &= 4x_2\end{aligned}$$

en forma matricial, puede ser escrito como

$$\dot{x} = Ax$$

donde la matriz A viene dada por

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notemos que en este caso la matriz A es una matriz diagonal. Por el uso del método de separación de variables, concluimos que la solución del sistema desacoplado viene dada por

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1 e^{-2t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{4t}\end{aligned}\tag{1.6}$$

o equivalentemente, por

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} C\tag{1.7}$$

donde $C = x(t_0)$. Notamos que las curvas solución o curvas paramétricas con parámetro t en (1.6), pueden reescribirse como

$$\begin{aligned}(e^t)^{-2} &= \frac{x_1}{c_1} \Rightarrow (e^t)^2 = \frac{c_1}{x_1} \\ e^{4t} &= \frac{x_2}{c_2} \Rightarrow ((e^t)^2)^2 = \frac{x_2}{c_2}\end{aligned}$$

Igualando las dos anteriores ecuaciones, se obtiene que las curvas solución (1.6) coinciden con las curvas algebraicas $x_2 = \frac{k}{x_1^2}$, donde la constante $k = c_1^2 c_2$. Por lo tanto, la solución (1.6) o (1.7) define un movimiento a lo largo de dichas curvas, es decir, cada punto $C \in \mathbb{R}^2$ se mueve hacia el punto $x(t) \in \mathbb{R}^2$ dado por (1.7) en el tiempo t . Este movimiento puede ser representado geométricamente dibujando las curvas solución en un plano $x_1 x_2$, el cual recibe el nombre de plano de fase y usamos flechas para indicar la dirección del movimiento a lo largo de dichas curvas cuando t crece, como en la Figura 1.1.

Para $c_1 = c_2 = 0$ y $x_1(t) = x_2(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, el origen es referido como un punto estacionario para este caso. Observemos que las soluciones que empiezan en el eje x_1 se aproximan al origen cuando $t \rightarrow \infty$ y las soluciones que empiezan en el eje x_2 se aproximan al origen cuando $t \rightarrow -\infty$.

Sabemos de antemano que el método de separación de variables es útil para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo

$$\dot{x} = ax$$

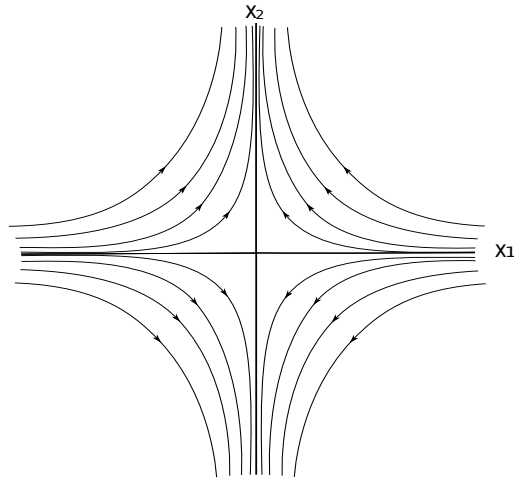


Figura 1.1: curvas solución para (1.6)

donde a es una constante:

$$\int \frac{dx}{x} = a \int dt$$

$$\ln x = at + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

La solución general viene dada entonces por

$$x(t) = ce^{at}$$

con $c = e^{c_1}$. En esta última igualdad la constante $c = x(t_0)$ es el valor de la función $x(t)$ en un tiempo inicial t_0 .

Definición 1.1.8 (Retrato de fase). *El retrato de fase de un sistema de ecuaciones diferenciales como (1.3) con $x \in \mathbb{R}^n$, es el conjunto de todas las curvas solución de (1.3) en un mismo espacio de fase \mathbb{R}^n .*

En la Figura 1.1 se muestra el retrato de fase del sistema lineal desacoplado considerado previamente.

Definición 1.1.9 (Sistema dinámico). *Un sistema dinámico para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales como en (1.3), es una función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por la solución $x(t, c_1, \dots, c_n)$ del sistema (1.3).*

El sistema dinámico definido por el sistema lineal (1.3) en este ejemplo es la función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por la solución $x(t, c_1, c_2)$ dada por (1.7), es decir

$$\phi(t, c_1, c_2) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Geoméricamente, el sistema dinámico describe el movimiento de puntos en el espacio de fase a lo largo de las curvas solución definidas por el sistema de ecuaciones diferenciales. La función

$f(x) = Ax$ definida por el lado derecho del sistema (1.3) define una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, lineal en este caso. Esta función (la cual no tiene que ser necesariamente lineal), define un campo vectorial en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.1.10. Consideremos ahora el sistema lineal desacoplado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_3\end{aligned}$$

La forma matricial del sistema es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

La solución general viene dada por:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1 e^t \\ x_2(t) &= c_2 e^t \\ x_3(t) &= c_3 e^{-t}\end{aligned}$$

o de manera equivalentemente,

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} C$$

Finalmente, el sistema dinámico asociado es la función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(t, c_1, c_2, c_3) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

La Figura 1.2 corresponde al retrato de fase asociado a este ejemplo.

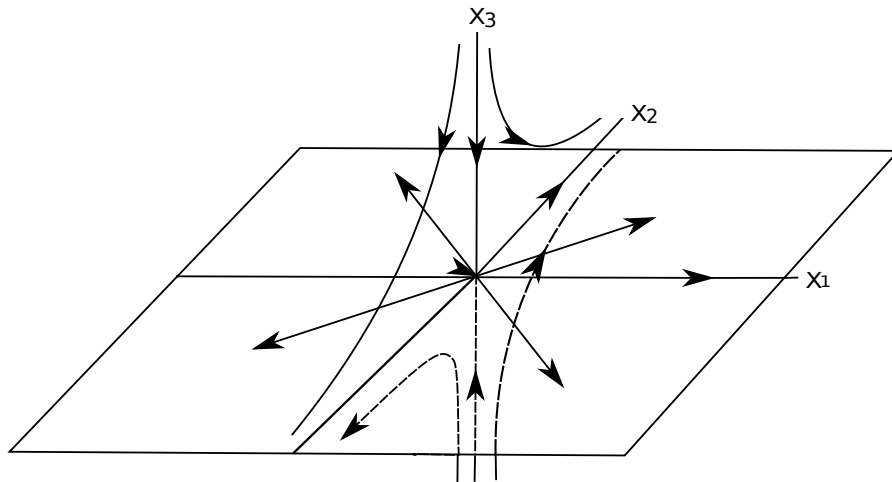


Figura 1.2: Retrato de fase correspondiente al Ejemplo 1.1.10.

1.1.1. Diagonalización

Expondremos ahora la técnica de la diagonalización, la cual permite llevar un sistema lineal acoplado $\dot{x} = Ax$ a un sistema lineal desacoplado. Antes de esto, veamos algunos conceptos y resultados.

Definición 1.1.11 (Matriz diagonalizable). *Sea $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$. Decimos que A es diagonalizable si existen matrices D y P en $\mathbb{C}_{n \times n}$ con D matriz diagonal y P matriz invertible, tales que $D = P^{-1}AP$. En este caso decimos que P es una matriz diagonalizante para A y D es su matriz diagonal asociada.*

Primero consideraremos el caso cuando la matriz A tiene valores propios reales y distintos. El siguiente teorema de álgebra lineal nos permitirá resolver el sistema lineal (1.3).

Teorema 1.1.12. *Si existen n vectores propios v_1, v_2, \dots, v_n de una matriz A de tamaño $n \times n$ linealmente independientes asociados a sus valores propios reales y distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente, entonces A es diagonalizable, es decir, existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$, donde $D := \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n]$ corresponde a una matriz diagonal cuyos elementos son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.*

Demostración. Ver [16] página 254. □

Para reducir el sistema (1.3) a un sistema lineal desacoplado usando el Teorema 1.1.12, definamos la transformación lineal de coordenadas

$$y = P^{-1}x,$$

donde P es la matriz invertible definida en el teorema anterior, entonces $x = Py$, y además:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= P^{-1}\dot{x} \\ &= P^{-1}Ax \\ &= P^{-1}APy \\ &= \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n]y\end{aligned}$$

obteniendo así por el Teorema 1.1.12, el sistema lineal desacoplado

$$\dot{y} = \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n]y$$

cuya solución está dada por

$$y(t) = e^{\text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n]t}y(0)$$

dado que $y(0) = P^{-1}x(0)$ y $x(t) = Py(t)$, entonces se sigue que la solución del sistema lineal (1.3) viene dada por:

$$x(t) = PEP^{-1}x(0), \quad (1.8)$$

donde E es la matriz diagonal

$$e^{\text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n]t} = \text{diag}[e^{\lambda_1 t} \quad e^{\lambda_2 t} \quad \dots \quad e^{\lambda_n t}].$$

Corolario 1.1.13. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.1.12, la solución del sistema lineal (1.3) está dada por la función $x(t)$ definida en (1.8).*

Ejemplo 1.1.14. *Consideremos el sistema lineal*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2.\end{aligned}$$

En forma matricial el sistema puede ser escrito como en (1.3) en la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz es triangular superior, sus valores propios vienen dados por $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, reales y distintos. Determinemos ahora los vectores propios asociados a cada valor propio.

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

de lo cual,

$$(A - \lambda_1 I)V = O$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el sistema reducido viene dado por

$$\begin{aligned}v_2 &= 0 \\v_1 &= k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}\end{aligned}$$

luego un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$ es $V_1 = [1 \ 0]^T$. Por otro lado

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y el sistema reducido viene dado por

$$v_2 = -v_1$$

de donde un vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$ es $V_2 = [-1 \ 1]^T$. En consecuencia, la matriz P y su inversa P^{-1} vienen dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}P &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\P^{-1} &= \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por otro lado

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego, bajo la transformación de coordenadas $y = P^{-1}x$ y el Teorema 1.1.12, se obtiene el sistema desacoplado

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= 2y_2\end{aligned}$$

el cual tiene como solución general

$$\begin{aligned}y_1(t) &= c_1 e^{-t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{2t}\end{aligned}$$

Por el Corolario 1.1.13 tenemos entonces que la solución general del sistema original de este ejemplo, está dado por

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1}C,$$

donde $C = x(0)$, o equivalentemente por

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 (e^{-t} - e^{2t}) \\ x_2(t) &= c_2 e^{2t}\end{aligned}$$

Definición 1.1.15 (Matriz exponencial). Sea A una matriz $n \times n$. Entonces para $t \in \mathbb{R}$, definimos la matriz exponencial como

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

De la anterior definición se tiene que dada una matriz A de tamaño $n \times n$, e^{At} es una matriz de tamaño $n \times n$, la cual puede ser calculada en términos de los valores y vectores propios de A .

Veamos a continuación algunas propiedades de esta matriz, las cuales serán útiles para el resto de este capítulo.

Proposición 1.1.16. *Si S y T son transformaciones lineales en \mathbb{R}^n que conmutan, entonces $e^{S+T} = e^S e^T$.*

Demostración. Ver [4] página 380. □

Ejemplo 1.1.17. *Si*

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$$

En efecto, para la matriz A se tiene que

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix}$$

así su polinomio característico asociado es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2)$, de donde obtenemos que $\lambda = a \pm bi$. Luego, si $\lambda = a + bi$ entonces la matriz A puede reescribirse como

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda) & -\operatorname{Im}(\lambda) \\ \operatorname{Im}(\lambda) & \operatorname{Re}(\lambda) \end{bmatrix}$$

donde $\operatorname{Re}(\lambda)$ e $\operatorname{Im}(\lambda)$ denotan la parte real e imaginaria de λ respectivamente. Por otro lado, del hecho que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda)^k &= \operatorname{Re}(\lambda^k) \\ \operatorname{Im}(\lambda)^k &= \operatorname{Im}(\lambda^k) \end{aligned}$$

y por inducción sobre k , puede probarse que

$$A^k = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^k) & -\operatorname{Im}(\lambda^k) \\ \operatorname{Im}(\lambda^k) & \operatorname{Re}(\lambda^k) \end{bmatrix}$$

Como

$$e^A = I + A + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

y usando la Fórmula de Euler, obtenemos

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) & -\operatorname{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) \\ \operatorname{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) & \operatorname{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(e^\lambda) & -\operatorname{Im}(e^\lambda) \\ \operatorname{Im}(e^\lambda) & \operatorname{Re}(e^\lambda) \end{bmatrix} = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$$

Lema 1.1.18.

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At}$$

Demostración. Ver [4] página 380. □

1.1.2. El Teorema Fundamental para sistemas lineales

Teorema 1.1.19 (El Teorema Fundamental para Sistemas lineales). *Sea A una matriz $n \times n$. Entonces, para un $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial (P.V.I.)*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

tiene una única solución para todo $t \in \mathbb{R}$, la cual viene dada por

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (1.9)$$

Demostración. Ver [14] página 18. □

Ejemplo 1.1.20. *Resolvamos el problema de valor inicial*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.1.19 y el Ejemplo 1.1.17 se tiene que la solución del P.V.I. está dada por

$$x(t) = e^{At} x_0 = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

En la mayoría de los casos, resulta necesario estudiar el retrato de fase de un sistema dinámico para analizar el comportamiento de este.

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \quad (1.10)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ y A es una matriz 2×2 . Igualmente, consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Bx \quad (1.11)$$

donde la matriz B es tal que $B = P^{-1}AP$. El retrato de fase del sistema (1.10), será obtenido del retrato de fase de (1.11) bajo la transformación lineal de las coordenadas $x = Py$.

Veamos algunos casos para tal matriz B .

Caso 1

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda < 0 < \mu, \text{ cuya solución está dada por } x(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} x_0.$$

En efecto, tenemos que $\det(B - \alpha I) = (\lambda - \alpha)(\mu - \alpha)$ así, los valores propios de la matriz B serán $\alpha_1 = \lambda$ y $\alpha_2 = \mu$. Encontramos ahora los vectores propios asociados a estos valores propios.

$$(B - \alpha_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda \end{bmatrix}$$

de lo cual,

$$(B - \alpha_1 I)V_{\alpha_1} = O$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el sistema reducido viene dado por

$$\begin{aligned} v_2 &= 0 \\ v_1 &= k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

luego un vector propio asociado al valor propio $\alpha_1 = \lambda$ es $V_{\alpha_1} = [1 \ 0]^T$. Por otro lado

$$(B - \alpha_2 I) = \begin{bmatrix} \lambda - \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y el sistema reducido viene dado por

$$v_1 = 0, \quad v_2 = k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

de donde un vector propio asociado al valor propio $\alpha_2 = \mu$ es $V_{\alpha_2} = [0 \ 1]^T$. En consecuencia, la matriz P y su inversa P^{-1} vienen dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ P^{-1} &= \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Luego, bajo la transformación de coordenadas $y = P^{-1}x$ y el Teorema 1.1.12, se obtiene el sistema desacoplado

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda y_1 \\ \dot{y}_2 &= \mu y_2 \end{aligned}$$

el cual tiene como solución general

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{\lambda t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{\mu t} \end{aligned}$$

Por el Corolario 1.1.13 tenemos entonces que la solución general del sistema original para este caso, está dado por

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} P^{-1} C,$$

donde $C = x_0$, o equivalentemente por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{\lambda t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{\mu t} \end{aligned}$$

En este caso, decimos que el sistema lineal posee un *punto de ensilladura* en el origen. Siempre que la matriz A poseen dos valores reales con signo opuesto, el retrato de fase del sistema lineal (1.10) será topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 1.3, esto es, se obtiene de esta por una transformación de coordenadas y comparten las mismas propiedades.

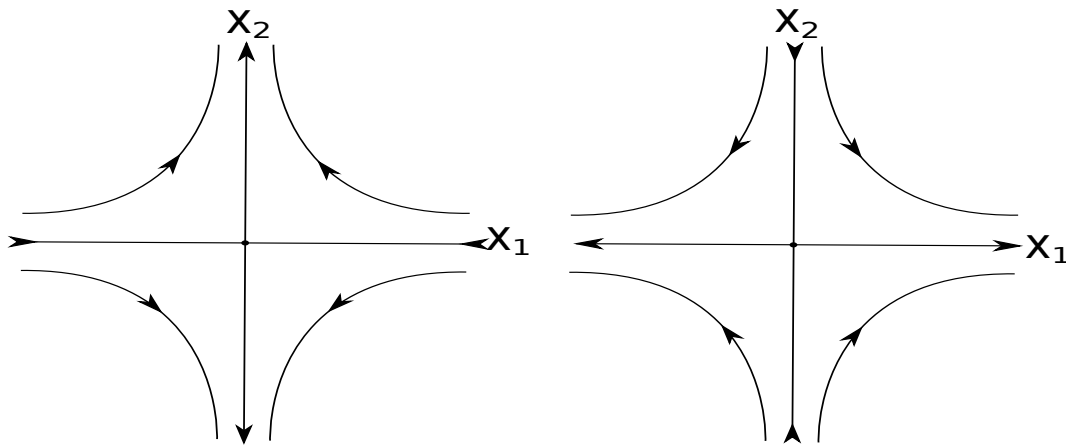


Figura 1.3: Retratos de fases correspondientes a puntos de ensilladura en el origen para $\lambda < 0 < \mu$ y $\mu < 0 < \lambda$, respectivamente.

Caso 2

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ con } \lambda \leq \mu < 0 \quad \text{o} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ con } \lambda < 0$$

donde la solución de este último, realizando un proceso análogo al caso 1, va a estar dada por

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_0.$$

Se dice en ambos casos que el origen es un *nodo estable*. Si se cumple además que $\lambda = \mu$ el nodo es llamado *nodo propio* y es llamado *impropio* en los otros dos casos. En general, la estabilidad del nodo está determinada por el signo de sus valores propios: se dirá *estable* si $\lambda \leq \mu < 0$ e *inestable* si $\lambda \geq \mu > 0$.

Los retratos de fase para este caso se muestran en la Figura 1.4.

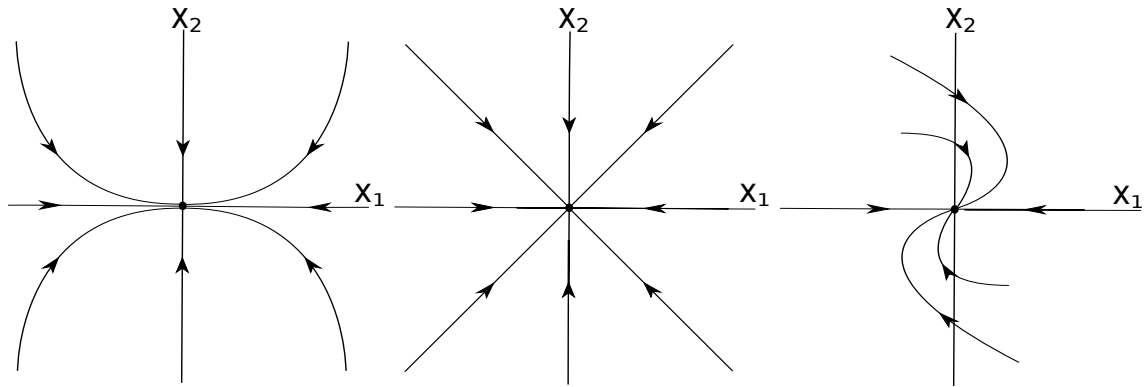


Figura 1.4: Retratos de fases correspondientes a nodos estables en el origen para $\lambda < \mu < 0$, $\lambda = \mu < 0$ y $\lambda < 0$ respectivamente.

Caso 3

$$B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{con } a < 0$$

Usando el resultado del Ejemplo 1.1.17, se obtiene la solución

$$x(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\text{sen } bt \\ \text{sen } bt & \cos bt \end{bmatrix} x_0$$

El origen para este caso recibe el nombre de *foco estable*. Siempre que la matriz tenga un par de valores propios complejos conjugados, $a \pm ib$ con $a < 0$, el retrato de fase del sistema lineal (1.10) será linealmente equivalente al mostrado en la Figura 1.5.

Para el caso en que $a > 0$, las trayectorias en forma de espiral en el retrato de fase se alejarán del origen a medida que t crece y el origen recibirá el nombre de *foco inestable*.

Caso 4

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{cuya solución estará dada por } x(t) = \begin{bmatrix} \cos bt & -\text{sen } bt \\ \text{sen } bt & \cos bt \end{bmatrix} x_0.$$

En este caso se dice que el sistema tiene un *centro* en el origen. Siempre que la matriz tenga un par de valores propios complejos conjugados puros, $\pm ib$, el retrato de fase del sistema lineal (1.10) será linealmente equivalente al mostrado en la Figura 1.6.

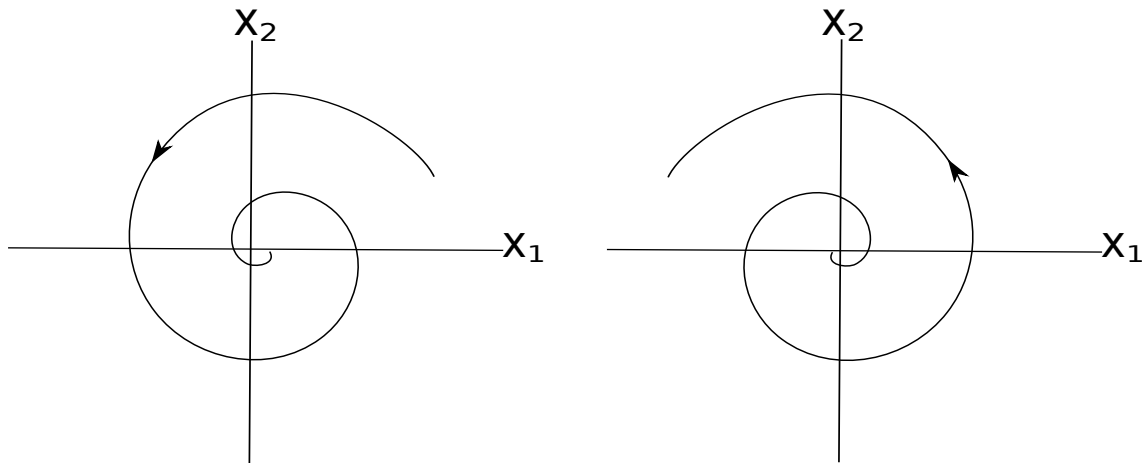


Figura 1.5: Retratos de fases correspondientes a focos estable e inestable en el origen, respectivamente.

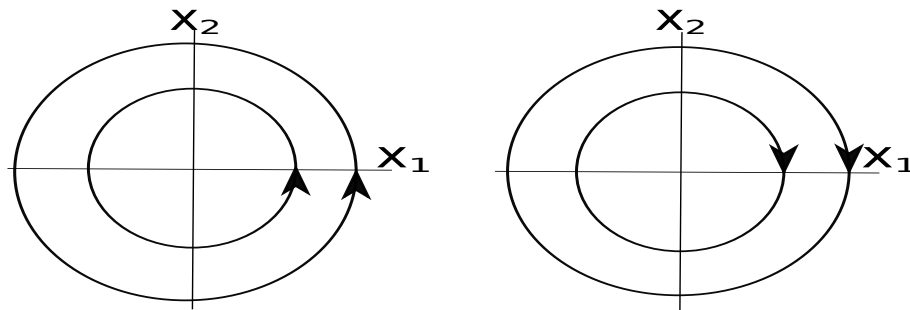


Figura 1.6: Retratos de fases correspondientes a centros en el origen para $b > 0$ y $b < 0$ respectivamente.

Ejemplo 1.1.21. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

con la condición $x_0 = [x_{1_0}, x_{2_0}] = [2, -3]$. La forma matricial de este sistema está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

con polinomio característico dado por

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

así, los valores propios para la matriz A serán $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$.

Los vectores propios estarán determinados por

$$(A - \lambda I)V_\lambda = 0$$

Para $\lambda_1 = 2$, obtendremos

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obteniendo en particular el vector propio $V_{\lambda_1} = [1 \ 1]^T$. De forma análoga, obtenemos para

$\lambda_2 = -3$ un vector propio $V_{\lambda_2} = [1 \ -4]^T$. Así, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ y

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

de esto, la matriz A se reduce a

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 & 2/5 \\ -3/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

de lo cual $\lambda = 2$ y $\mu = -3$. La matriz B corresponde a la del Caso 1 para $\mu < 0 < \lambda$, por tanto presenta un punto de ensilladura en el origen.

La solución para el sistema $\dot{x} = Ax$ estará dada entonces por

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1}x_0$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{bmatrix} x_0$$

esto es,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{2t} + e^{-3t} \\ x_2(t) &= e^{2t} - 4e^{-3t} \end{aligned}$$

Las trayectorias de este sistema son equivalentes al mostrado en la segunda gráfica de la Figura 1.3.

Podemos determinar de igual forma este tipo de puntos usando el determinante y la traza de la matriz A .

Teorema 1.1.22. Sea $\delta = \det A$ y $\tau = \text{traza } A$ y consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \tag{1.12}$$

a) Si $\delta < 0$, luego (1.12) tiene un punto de ensilladura en el origen.

b) Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, luego (1.12) tiene un nodo en el origen. Este es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.

c) Si $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ y $\tau \neq 0$, luego (1.12) tiene un foco en el origen. Este es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.

d) Si $\delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces (1.12) tiene un centro en el origen.

Demostración. Ver [14] página 25. □

Las diferentes trayectorias son mostradas en la Figura 1.7, usando el teorema anterior.

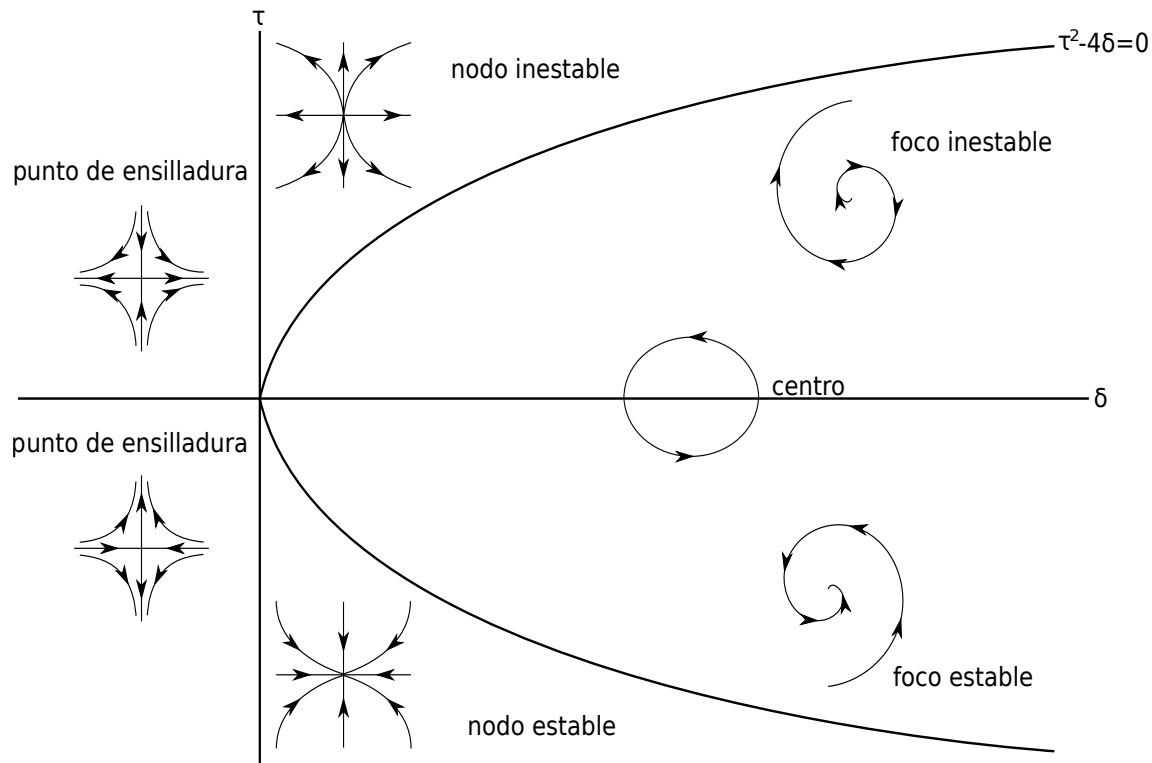


Figura 1.7: Retratos de fases correspondientes a los diferentes casos en un plano común (δ, τ) .

Con este teorema, podemos llegar rápidamente a conclusiones sobre sistemas lineales. Así, del Ejemplo 1.1.21, tenemos que la matriz A está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos que $\det A = -6$, de lo cual, por el teorema anterior tendremos que el sistema (1.10) presenta un punto de ensilladura en el origen. Notemos que para este ejemplo no fue necesario encontrar la traza de la matriz A , puesto que el ítem a) del teorema nos asegura la existencia del punto de ensilladura sólo con saber el signo del determinante de dicha matriz.

Ejemplo 1.1.23. Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ de donde tenemos que $\delta = \lambda^2 - 2$, $\tau = 2\lambda$ y $\tau^2 - 4\delta = (2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 2) = 8$.

- Si $|\lambda| < \sqrt{2}$ luego $\delta < 0$, así hay un punto de ensilladura en el origen.

- Si $|\lambda| > \sqrt{2}$ luego $\delta > 0$ y dado que $\tau^2 - 4\delta = 8 > 0$, tenemos que hay un nodo en el origen.
 - Si $\lambda < -\sqrt{2}$ luego $\tau < 0$, así el nodo es estable.
 - Si $\lambda > \sqrt{2}$ luego $\tau > 0$, luego el nodo es inestable.

1.2. Sistemas no lineales

1.2.1. Linealización de sistemas no lineales

Muchas de las herramientas y métodos utilizados para estudiar sistemas lineales resultan no ser aplicables a los sistemas no lineales. En estos casos, lo que procede es linealizar los sistemas de este tipo, esto es, llevar un sistema no lineal a un sistema lineal asociado que, como veremos, tiene un comportamiento cualitativamente similar al original.

Antes de ver este proceso, tengamos en cuenta algunos conceptos.

Definición 1.2.1 (Punto estacionario). *Consideremos un sistema no lineal autónomo*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.13}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f \in C^1(E)$ con E conjunto abierto en \mathbb{R}^n . Decimos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto estacionario del sistema (1.13), si $f(x^*) = 0$.

Observación 1.2.2. *En la anterior definición, el sistema en consideración pudo haber sido un sistema no lineal no autónomo $\dot{x} = f(t, x)$ donde la variable espacial x es dependiente de la variable temporal t . Sin embargo, podemos llevar un sistema de este tipo a uno no lineal autónomo, simplemente al considerar la variable temporal t como otra componente del vector x , esto es, tomando $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ donde $x_{n+1} = t$, de lo cual tendremos que $\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$.*

Teorema 1.2.3. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ la i -ésima función componente de f , así que*

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

a) *La función f es diferenciable en a si y sólo si cada función componente f_i es diferenciable en a .*

b) *Si f es diferenciable en a , luego $Df(a)$ tiene orden $n \times m$ de la forma*

$$Df(a) = \begin{bmatrix} Df_1(a) \\ \vdots \\ Df_n(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1f_1(a) & \cdots & D_mf_1(a) \\ D_1f_2(a) & \cdots & D_mf_2(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1f_n(a) & \cdots & D_mf_n(a) \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

donde $D_jf_i(a)$ denota la j -ésima derivada parcial en la i -ésima función componente de f .

Demostración. Ver [13] página 46.

□

El particular interés de obtener los puntos estacionarios de un sistema no lineal radica en que, a pesar de que no sea muchas veces posible resolver tal sistema, podemos determinar su comportamiento cualitativo cerca a sus puntos estacionarios x^* a partir del comportamiento del sistema lineal $\dot{x} = Ax$ cerca al origen, donde $A = Df(x^*)$. La función lineal $Ax = Df(x^*)x$ es llamada la *parte lineal de f en x^** o *linealización de (1.13) alrededor de x^** . Cuando todos los valores propios de la matriz $A = Df(x^*)$ tienen parte real no nula, tal punto x^* recibe el nombre de *punto hiperbólico*.

Si $x^* = 0$ es un punto estacionario de (1.13), se seguirá entonces que $f(0) = 0$ así, del polinomio de Taylor

$$f(x) = Df(0)x + \frac{D^2f(0)(x, x)}{2} + \dots$$

tendremos que $Df(0)x$ será una buena aproximación del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ cerca de $x = 0$. Se espera que el comportamiento del sistema no lineal cerca a $x = 0$ sea similar al comportamiento de su linealización entorno a $x = 0$.

Estos puntos estacionarios pueden clasificarse a partir del signo de los valores propios de la matriz derivada.

Definición 1.2.4. Si x^* es un punto estacionario del sistema (1.13), la ecuación diferencial lineal

$$\dot{x} = Df(x^*)x$$

es llamada la *ecuación variacional lineal o linealización del sistema en el punto estacionario x^** .

Teorema 1.2.5. Sea x^* un punto estacionario del sistema $\dot{x} = f(x)$, donde $f \in C^1(E)$ con E conjunto abierto en \mathbb{R}^n .

- Si todos los valores propios de la matriz $Df(x^*)$ tienen parte real negativa, entonces el punto estacionario x^* es llamado *asintóticamente estable*.
- Si al menos uno de los valores propios de la matriz $Df(x^*)$ tienen parte real positiva, luego el punto estacionario x^* es llamado *inestable*.

Demostración. Ver [7] páginas 268 y 272, respectivamente. □

Ejemplo 1.2.6. Consideremos el sistema no lineal dado por

$$f(x) = \begin{bmatrix} -4x_2 + 2x_1x_2 - 8 \\ 4x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix}$$

Para obtener los puntos estacionarios igualamos a cero ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_2 + 2x_1x_2 - 8 = 0 \\ \dot{x}_2 &= 4x_2^2 - x_1^2 = 0 \end{aligned}$$

De esta última ecuación tenemos que $4x_2^2 = x_1^2$ así, $2x_2 = x_1$.

Reemplazando en la primera ecuación tenemos que $x_1^2 - 2x_1 - 8 = 0$, obteniendo así que $x_1 = 1 \pm 3$ de lo cual, $x_1 = -2$ o $x_1 = 4$. Así, $x_2 = -1$ o $x_2 = 2$, respectivamente. Por tanto, los puntos estacionarios

serán $E_1 = (-2, -1)$ y $E_2 = (4, 2)$.

La matriz jacobiana está dada por:

$$Df(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 - 4 \\ -2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$$

Evaluando en el punto estacionario E_1 tendremos

$$Df(E_1) = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

con polinomio característico dado por $p(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda + 48$. Así, los valores propios serán complejos conjugados $\lambda = -5 \pm \sqrt{23}i$; como ambos tienen parte real negativa, tendremos entonces que el punto estacionario $E_1 = (-2, -1)$ es asintóticamente estable.

Por otro lado, para el punto estacionario E_2 tenemos

$$Df(E_2) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico será entonces $p(\lambda) = \lambda^2 - 20\lambda + 96$. Los valores propios para esta matriz serán $\lambda_1 = 12$ y $\lambda_2 = 8$, por lo tanto, ambos tienen parte real positiva teniendo así que el punto estacionario E_2 es inestable.

1.2.2. El Teorema Fundamental para sistemas no lineales

Hemos visto en la sección anterior, que para una matriz A de dimensión $n \times n$ y un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial (P.V.I.)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

tiene una única solución para todo $t \in \mathbb{R}$, la cual viene dada por la ecuación $x(t) = e^{At}x_0$.

Nuestro interés ahora será estudiar los sistemas no lineales autónomos de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.15}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ con E conjunto abierto en \mathbb{R}^n . Hemos de ver qué condiciones debe cumplir la función f para que el sistema no lineal (1.15) tenga una única solución a través de un punto $x_0 \in E$, definida en un intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Para un sistema con una única ecuación diferencial, bastaba que la función f fuera integrable para encontrar su solución. En general, bastaba sólo que la función f fuera continua. A pesar de esto, la continuidad no garantizaba la unicidad de la solución. Otra diferencia respecto a los sistemas lineales es que la solución podría llegar a ser no acotada para algún valor finito de t .

Definición 1.2.7 (Continuamente diferenciable). Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en E . Si $Df : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en E , luego decimos que f es continuamente diferenciable, esto es, $f \in C(E)$. Decimos que f es de clase $C^1(E)$, si todas sus primeras derivadas parciales existen y son continuas en E .

Definición 1.2.8. Sea $f \in C(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Decimos que $x(t)$ es una solución a la ecuación diferencial (1.15) en un intervalo I , si $x(t)$ es diferenciable en I , $x(t) \in E$ y $x'(t) = f(x(t))$, para todo $t \in I$.

Además, dado $x_0 \in E$, $x(t)$ es una solución al problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

en un intervalo I , si $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$ y $x(t)$ es una solución a (1.15) en el intervalo I .

Veamos finalmente el principal resultado para sistemas no lineales.

Teorema 1.2.9 (El Teorema Fundamental para Sistemas no lineales). Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto con $x_0 \in E$ y $f \in C^1(E)$. Entonces existe $c > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

tiene una única solución $x(t)$ en el intervalo $[-c, c]$.

Demostración. ver [14] página 74. □

Ejemplo 1.2.10. Consideremos el P.V.I.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2x} \\ x(1) &= 1\end{aligned}$$

y busquemos una solución para el conjunto abierto $E = (0, \infty)$.

Tendremos entonces que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2x}$$

Por el método de separación de variables, se sigue luego que

$$\begin{aligned}\int 2x \, dx &= \int dt \\ x^2 &= t + c\end{aligned}$$

De la condición inicial, obtenemos

$$1 = x(1)^2 = 1 + c$$

así, $c=0$. Por lo tanto, la solución será $x(t) = \sqrt{t}$ definida en el intervalo $[0, \infty)$. Sin embargo, dado que

$$x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

tenemos que $x'(0)$ no existe, por tanto, $x(t)$ no es diferenciable en todo el intervalo $[0, \infty)$, por lo cual, debemos restringir este intervalo de tal forma que sí lo sea. Además,

$$x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2x} = f(x(t))$$

luego $x(t)$ es diferenciable para todo t en $(0, \infty)$ y claramente se satisface la condición inicial. Así, de la Definición 1.2.10., se sigue que $x(t)$ es solución al problema de valor inicial en el intervalo $(0, \infty)$. Finalmente, el Teorema Fundamental para Sistemas no lineales nos asegura la unicidad de esta solución para un intervalo de la forma $[-a, a]$, con $a > 0$.

1.2.3. El intervalo maximal de existencia

Establecimos anteriormente las condiciones para que el P.V.I.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

donde $f \in C^1(E)$ con E subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , tenga una única solución $x(t)$ definida en un intervalo de la forma $[-c, c]$ con $c > 0$. Ahora, analizaremos el intervalo maximal de existencia en el cual dicha solución existe y es única.

Consideraremos un intervalo maximal de existencia de la forma (ϵ, δ) . Si δ es finito y

$$\lim_{t \rightarrow \delta^-} x(t) = \gamma$$

existe, luego $\gamma \in \partial E$, esto es, la frontera del subconjunto abierto E . Ahora, si tal límite γ existe y además $\gamma \in E$, entonces $\delta = \infty$, $f(\gamma) = 0$ y γ será un punto estacionario del sistema (1.16).

Ejemplo 1.2.11. Dado el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

encontremos su solución y hallemos el intervalo maximal de existencia de esta.

Aplicando el método de separación de variables a la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} &= t + c \\ x &= -\frac{1}{t + c} \end{aligned}$$

De la condición inicial se sigue que

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{1}{c} \\ c &= -1 \end{aligned}$$

así, la solución estará dada por $x(t) = \frac{1}{1-t}$ definida en un intervalo maximal de existencial $(\epsilon, \delta) = (-\infty, 1)$.

Además,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = \infty$$

Veamos ahora las condiciones para la existencia del intervalo maximal (ϵ, δ) de la solución al P.V.I. (1.16).

Teorema 1.2.12. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f \in C^1(E)$. Entonces para cada punto $x_0 \in E$, existe un intervalo maximal J en el cual el P.V.I. (1.16) tiene una única solución $x(t)$, esto es, si el problema de valor inicial tiene una solución $y(t)$ en un intervalo $I \subseteq J$ y $y(t) = x(t)$ para todo t en I . Más aún, tal intervalo maximal J es abierto, es decir, $J = (\epsilon, \delta)$.*

Demostración. Ver [14] página 89. □

Ejemplo 1.2.13. *Hallemos el intervalo maximal de existencia (ϵ, δ) para el problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Por un proceso análogo al del ejemplo anterior, obtenemos que

$$x = -\frac{1}{t+c}$$

Por la condición inicial se sigue que

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{c} \\ c &= -\frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

luego la solución será de la forma $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$.

Ahora:

- Si $x_0 > 0$, entonces $(\epsilon, \delta) = \left(-\infty, \frac{1}{x_0}\right)$ y $\lim_{t \rightarrow (1/x_0)^-} x(t) = \infty$.
- Si $x_0 = 0$, entonces $(\epsilon, \delta) = (-\infty, \infty)$.
- Si $x_0 < 0$, entonces $(\epsilon, \delta) = \left(\frac{1}{x_0}, \infty\right)$ y $\lim_{t \rightarrow (1/x_0)^+} x(t) = -\infty$.

1.2.4. Ciclos límites y conjuntos atractores

Examinaremos ahora el concepto de ciclo y, en especial, el concepto de ciclo límite. Sin embargo, antes de esto, debemos tener en cuenta algunas nociones.

Definición 1.2.14 (Sistema dinámico). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea*

$$\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

un mapeo de clase C^1 . Si $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ satisface que

$$I) \phi_0(x) = x \text{ para todo } x \in E \text{ y}$$

$$II) \phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x) \text{ para todo } t, s \in \mathbb{R} \text{ y todo } x \in E$$

decimos entonces que ϕ corresponde a un sistema dinámico en E .

Si A es una matriz de orden $n \times n$, por ejemplo, la función $\phi(t, x) = e^{At}x$ define un sistema dinámico en \mathbb{R}^n .

Igualmente, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi(t, x_0)$ es solución al P.V.I.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

En general, para cada $x_0 \in E$, el sistema dinámico $\phi(t, x_0)$ es solución al problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

y el intervalo maximal de existencia de $\phi(t, x_0)$ será $(-\infty, \infty)$. De la misma forma, dado un P.V.I. como en (1.16) donde $f \in C^1(E)$ para E subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , la solución $\phi(t, x_0)$ al problema de valor inicial para $x_0 \in E$ corresponde a un sistema dinámico, si se satisface que el intervalo maximal de existencia de $\phi(t, x_0)$ es justamente $(-\infty, \infty)$, para lo cual diríamos que $\phi(t, x_0)$ es el *sistema dinámico en E definido por (1.16)*.

Asumamos que el sistema no lineal autónomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.17}$$

con $f \in C^1(E)$ para $E \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, define un sistema dinámico $\phi(t, x)$ en E . Para $x \in E$, tendremos que la función $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow E$ define una *curva solución o trayectoria* de (1.17) a través del punto $x \in E$. Dicha trayectoria a través de un punto $y \in E$, puede ser pensada como un movimiento a lo largo de la curva

$$\Gamma_y = \{x \in E \mid x = \phi(t, y), t \in \mathbb{R}\}$$

definida por (1.17).

Cuando no es necesario hacer énfasis en el punto elegido, simplemente denotaremos la trayectoria por Γ . Tenemos, además, que toda trayectoria Γ puede ser escrita como $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, donde estos dos últimos denotan la *parte positiva de la trayectoria* y la *parte negativa de la trayectoria*, respectivamente, las cuales, para algún punto $y \in E$, por ejemplo, están dadas por

$$\begin{aligned}\Gamma_y^+ &= \{x \in E \mid x = \phi(t, y), \quad t \geq 0\} \\ \Gamma_y^- &= \{x \in E \mid x = \phi(t, y), \quad t < 0\}\end{aligned}$$

Definición 1.2.15 (puntos α -límite y ω -límite). *Un punto $p \in E$ es llamado punto ω -límite de la trayectoria $\phi(\cdot, x)$ de (1.17), si existe una secuencia $t_n \rightarrow \infty$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = p$$

De manera análoga, un punto $q \in E$ es llamado punto α -límite de la trayectoria $\phi(\cdot, x)$ del sistema (1.17), si existe una secuencia $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = q$$

El conjunto de todos los puntos ω -límite de una trayectoria Γ es llamado conjunto ω -límite de Γ y se denota por $\omega(\Gamma)$. Similarmente, el conjunto de todos los puntos α -límite de una trayectoria Γ es llamado conjunto α -límite de Γ , representado por $\alpha(\Gamma)$. Al conjunto formado por $\alpha(\Gamma)$ y $\omega(\Gamma)$ se le conoce como conjunto límite de Γ .

En la Figura 1.8, podemos observar una trayectoria Γ contenida en el subconjunto E del espacio de fase \mathbb{R}^n , cuya flecha indica la dirección del movimiento a lo largo de esta, la cual se aproxima al punto $p \in E$ que corresponde a un punto ω -límite.

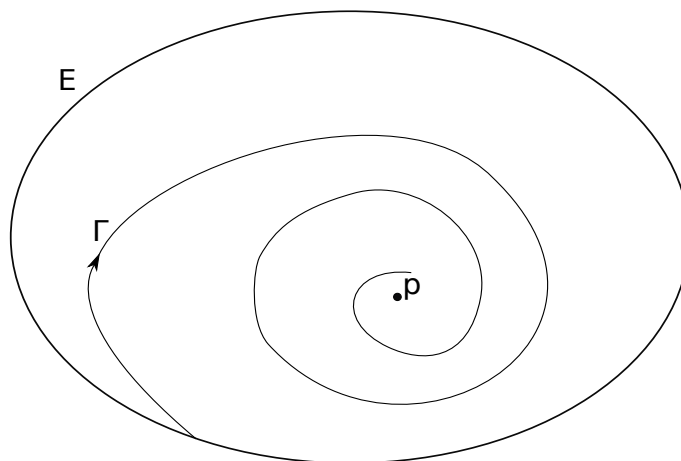


Figura 1.8: Trayectoria Γ de (1.17) contenida en E aproximándose al punto ω -límite p , cuando $t \rightarrow \infty$.

Los siguientes resultados serán útiles para lo que resta de esta sección.

Teorema 1.2.16. *Los conjuntos α y ω -límite de una trayectoria Γ de (1.17), $\alpha(\Gamma)$ y $\omega(\Gamma)$, son subconjuntos cerrados de E . Además, si p es punto ω -límite de Γ , luego todos los demás puntos de la trayectoria $\phi(\cdot, p)$ a través de p son también puntos ω -límite de Γ , esto es, $\Gamma_p \subseteq \omega(\Gamma)$. Análogamente, si $p \in \alpha(\Gamma)$, entonces $\Gamma_p \subseteq \alpha(\Gamma)$.*

Demostración. Ver [14] página 193. □

De este resultado se tiene entonces que para todo los puntos $p \in \omega(\Gamma)$, $\phi_t(p) \in \omega(\Gamma)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, esto es, $\phi_t(\omega(\Gamma)) \subseteq \omega(\Gamma)$. De manera similar, tenemos que $\phi_t(\alpha(\Gamma)) \subseteq \alpha(\Gamma)$. Esto recibe el nombre de *invarianza respecto a ϕ_t* , así tenemos entonces que $\alpha(\Gamma)$ y $\omega(\Gamma)$ son *invariantes con respecto a ϕ_t de (1.17)* y, por tanto, los conjuntos α y ω -límite de una trayectoria Γ de (1.17) son subconjuntos invariantes cerrados de E .

Consideremos ahora los siguientes conceptos.

Definición 1.2.17 (Conjunto atrayente, atractor). *Un subconjunto cerrado invariante A de E se denomina conjunto atrayente de (1.17), si existe alguna vecindad U de A tal que $\phi_t(x) \in U$ para todo $t \geq 0$ y $\phi_t(x) \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow \infty$, para todo $x \in U$. Decimos que el conjunto B es un atractor de (1.17) si este es conjunto atrayente y contiene una órbita densa, o en otras palabras, B puede expresarse de la forma*

$$B = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(A)$$

donde A es cualquier conjunto invariante tal que $\phi_t(A) \subseteq A$.

Notemos que cualquier punto estacionario x^* de (1.17) es a su vez su propio conjunto α y ω -límite, a saber, $\phi_t(x^*) = x^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, si una trayectoria Γ tiene un único punto ω -límite, por la condición de invarianza de este, se seguirá que tal punto es estacionario.

Tendremos también que los atractores son conjuntos límite, pero no todos los conjuntos límites son necesariamente atractores, puesto que podría suceder que un sistema converja hacia un conjunto límite, sin embargo, una vez en este, podría sufrir pequeñas perturbaciones que lo alejen para siempre del conjunto. Por ejemplo, el péndulo posee dos puntos invariantes: su punto de altura mínima l y el de altura máxima m . El punto l es un conjunto límite puesto que las trayectorias convergen a este, y además, debido a la disipación del aire, tal punto l es también considerado un punto atractor.

Definición 1.2.18 (Órbita límite). *Dada una trayectoria Γ de (1.17), si r es cualquier punto del conjunto límite de Γ entonces la trayectoria que pasa a través de r es llamada órbita límite de Γ .*

De todo esto, obtenemos entonces que los conjuntos $\alpha(\Gamma)$ y $\omega(\Gamma)$ está formado por puntos estacionarios y órbitas límite de (1.17).

Ejemplo 1.2.19. *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Llevando este sistema a coordenadas polares, obtenemos

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Así,

$$\frac{dx}{dt} = \cos \theta \cdot \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = \sin \theta \cdot \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

El sistema quedará entonces de la forma:

$$\begin{aligned} \cos \theta \cdot \dot{r} - r \sin \theta \cdot \dot{\theta} &= -r \sin \theta + r \cos \theta (1 - r^2) \\ \sin \theta \cdot \dot{r} + r \cos \theta \cdot \dot{\theta} &= r \cos \theta + r \sin \theta (1 - r^2) \end{aligned}$$

Multiplicando la primer ecuación por $\cos \theta$ y la segunda ecuación por $\sin \theta$ y sumándolas, obtenemos

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

De manera similar, si multiplicamos la primera ecuación por $-\sin \theta$ y la segunda ecuación por $\cos \theta$, al sumarlas nuevamente tendremos

$$\dot{\theta} = 1$$

Notemos que el origen es un punto estacionario del sistema. El movimiento gira en espiral hacia afuera para $0 < r < 1$, ya que $\dot{r} > 0$ y gira en espiral hacia adentro para $r > 1$, puesto que $\dot{r} < 0$. En el círculo unitario, el movimiento es en sentido antihorario describiendo una trayectoria Γ_0 del sistema, pues $\dot{r} = 0$ si $r = 1$, como se ilustra en la Figura 1.9.

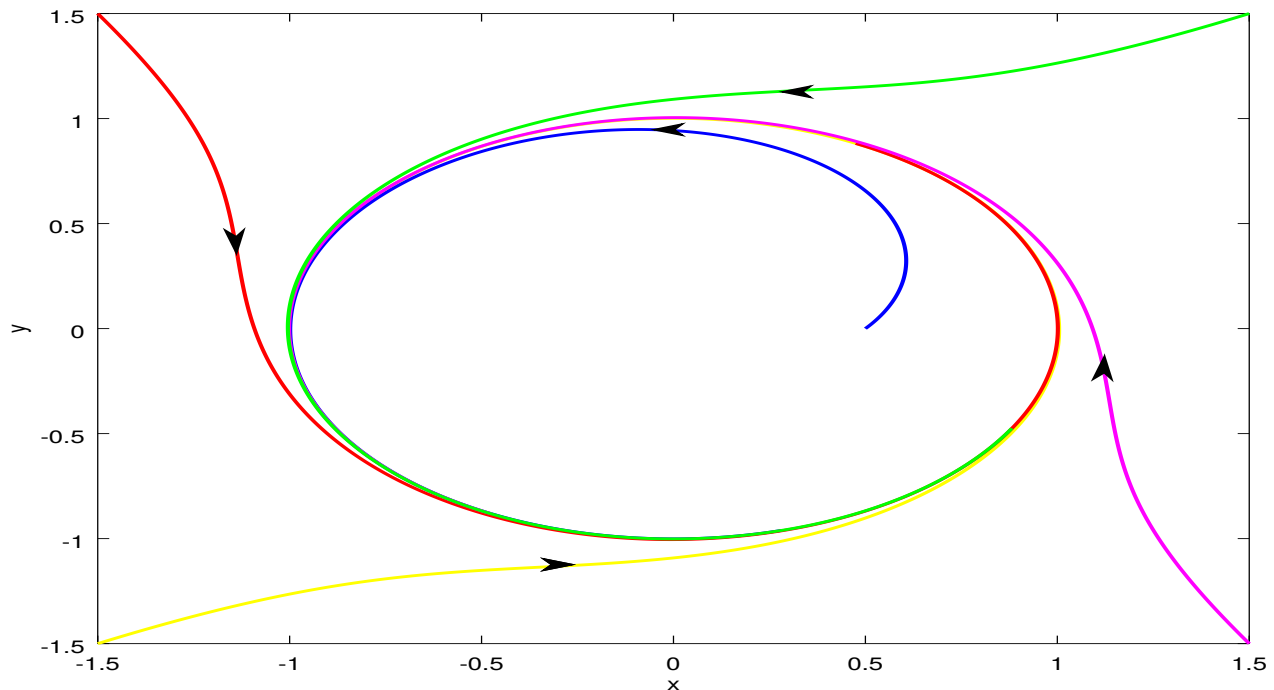


Figura 1.9: Retrato de fase correspondiente al sistema del Ejemplo 1.2.19 para valores iniciales $(0.5, 0)$ (azul) y $(-1.5, 1.5)$ (roja), $(-1.5, -1.5)$ (amarilla), $(1.5, -1.5)$ (violeta) y $(1.5, 1.5)$ (verde). Esta solución numérica se obtuvo implementando el Método de Euler explícito en el software libre Octave.

Consideremos nuevamente un sistema no lineal autónomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.18)$$

con $f \in C^1(E)$ para $E \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, con un sistema dinámico dado por $\phi(t, x)$ en E .

Definición 1.2.20 (Órbita periódica). *Un ciclo u órbita periódica del sistema (1.18) es cualquier curva solución cerrada de este, la cual no es un conjunto de puntos estacionarios del sistema. Dicho esto de otra forma, una solución $\phi(\cdot, x_0)$ del sistema (1.18) a través del punto no estacionario x_0 es una órbita periódica, si existe $T > 0$ tal que $\phi(t, x_0) = \phi(t + T, x_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Al mínimo valor de T que cumple lo anterior, se le denomina período de la órbita periódica $\phi(\cdot, x_0)$. Notemos, además, que si una órbita periódica es de período T , luego será periódica de período nT para cualquier entero $n > 1$.*

El interés en estudiar este tipo de órbitas, radica en que podemos determinar su evolución temporal conociendo su período orbital; así, para comprender el comportamiento de un sistema dinámico, resulta bastante útil analizar tal sistema en términos de las órbitas periódicas.

Podemos analizar también la estabilidad de tales órbitas periódicas:

Definición 1.2.21 (Estabilidad de las órbitas periódicas). *Una órbita periódica Γ es llamada estable si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de Γ tal que, para todo $x \in U$, $d(\Gamma_x^+, \Gamma) < \epsilon$; esto es, si para todo $x \in U$ y todo $t \geq 0$, $d(\phi(t, x), \Gamma) < \epsilon$. De lo contrario, se dice que la órbita periódica Γ es inestable. Finalmente, la órbita periódica Γ es llamada asintóticamente estable, si es estable y si para todo x en alguna vecindad U de Γ , se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), \Gamma) = 0$$

Tomemos nuevamente el sistema (1.18) pero ahora considerando al vector $x \in \mathbb{R}^2$.

Definición 1.2.22 (Ciclo límite). *Un ciclo límite Γ de un sistema en el plano es un ciclo del sistema (1.18) el cual corresponde a un conjunto α o ω -límite de alguna otra trayectoria del sistema, diferente a Γ . Si un ciclo Γ es el conjunto ω -límite de cada trayectoria en alguna vecindad de Γ , luego Γ es llamado un ciclo ω -límite o ciclo límite estable; si Γ es el conjunto α -límite de cada trayectoria en alguna vecindad de Γ , luego Γ es llamado un ciclo α -límite o ciclo límite inestable; si Γ es el conjunto ω -límite y el conjunto α -límite de dos trayectorias ambas distintas de Γ , luego Γ es denominado ciclo límite semi-estable.*

Observemos que, por la Definición 1.2.24, un ciclo límite estable es realmente un ciclo asintóticamente estable y cualquier ciclo límite estable es un atractor. En el ejemplo 1.2.22., se exhibe un ciclo límite estable, el cual, si reemplazamos t por $-t$, obtendremos un ciclo límite inestable.

En general, encontrar una órbita periódica o un ciclo límite correspondiente a un sistema (1.18) resulta ser un proceso bastante dispendioso, por lo cual, se hace uso de ciertos resultados importantes que determinan la existencia o ausencia de estos. Tales resultados son el Criterio de Bendixson y el Criterio de Dulac, presentados a continuación.

Consideremos el sistema no lineal autónomo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{1.19}$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde f y g son de clase C^1 en \mathbb{R}^2 .

Teorema 1.2.23 (Criterio de Bendixson). *Si D es una región simplemente conexa en \mathbb{R}^2 (esto es, D no posee agujeros) y la expresión $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ no se anula ni cambia de signo en D , entonces el sistema (1.19) no tiene órbitas periódicas completamente contenidas en D .*

Demostración. Ver [18] página 72. □

Observación 1.2.24. *Cabe aclarar que si $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ cambia de signo en D , no podemos deducir del Criterio de Bendixson la existencia de una órbita periódica para el sistema (1.19).*

Teorema 1.2.25 (Criterio de Dulac). *Si existe una función $b(x, y)$ de clase C^1 en $D \subseteq \mathbb{R}^2$, donde D es una región simplemente conexa tal que la expresión $\frac{\partial bf}{\partial x} + \frac{\partial bg}{\partial y}$ no es idénticamente cero y permanece con signo constante en D , entonces no existen órbitas periódicas que se contengan completamente en la región D .*

Demostración. Ver [17] página 202. □

Ejemplo 1.2.26. *Analícemos el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \beta y, \quad \beta > 0\end{aligned}$$

en el primer cuadrante del plano.

Dado que $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = x - x^3 - \beta y$, se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -\beta \neq 0$$

así, por el Criterio de Bendixson, el sistema no presenta órbitas periódicas completamente contenidas en el primer cuadrante del plano, para $\beta > 0$.

Ejemplo 1.2.27. *Consideremos ahora un modelo Lotka-Volterra de competición entre dos especies, leones y hienas, compitiendo por el mismo alimento (antílopes) y supongamos, además, que este recurso es limitado. Ignorando otros factores como la presencia de otros depredadores, efectos climáticos y otras fuentes de alimento, debemos tener en cuenta que:*

a) *Cada especie crecerá hasta alcanzar su capacidad máxima de carga, esto es, el tamaño máximo de la población que puede soportar el hábitat, en ausencia de la otra especie.*

b) Si ambas especies están presentes, asumiremos que las interacciones conflictivas entre estos, es decir, la competencia por el alimento, reducirá la tasa de crecimiento de la población de cada una de las dos especies.

El sistema está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - bxy, & x, r, k, b > 0 \\ \dot{y} &= sy\left(1 - \frac{y}{h}\right) - cxy, & y, s, h, c > 0\end{aligned}\quad (1.20)$$

donde x representa la población de leones y y la población de hienas, con sus respectivas tasas de crecimiento r y s ; las capacidades máximas están dadas por k para la población de leones y h para la población de hienas. Las constantes b y c representan los factores de competencia, los cuales inhiben la tasa de crecimiento de una especie respecto a la otra; así, el factor de competencia de las hienas sobre los leones es b , mientras el factor de competencia de los leones sobre las hienas está dado por c .

Para nuestro análisis, supondremos que estos términos (r, s, k, h, b, c) son constantes reales positivas, puesto que las tasas de crecimiento negativas hacen que las poblaciones decrezcan y tiendan a extinguirse en cierto tiempo, las capacidades de carga son siempre positivas y los factores de competencia serán considerados positivos pues, de otra forma, el sistema (1.20) correspondería a un modelo de mutualismo o simbiosis, el cual representa dos especies que conviven en un mismo hábitat pero se benefician una de la otra, contradiciendo las consideraciones iniciales.

El sistema estará representado en un plano xy ; sin embargo, dado que no tiene sentido asumir a las poblaciones negativas, nos restringiremos al primer cuadrante. Además, para los valores en que $x = 0$ o $y = 0$ o ambos son cero a la vez, tendremos que las poblaciones se extinguen, lo cual no es de mucho interés en este caso. Por tanto, consideramos el primer cuadrante para $x, y > 0$ y denotaremos tal región por D .

De (1.20), tenemos que

$$f(x, y) = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - bxy$$

y

$$g(x, y) = sy\left(1 - \frac{y}{h}\right) - cxy$$

por tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = r - \frac{2rx}{k} - by + s - \frac{2sy}{h} - cx$$

de esta expresión no podemos concluir nada respecto a si es distinta de cero o si presenta cambios de signos en D , así, el Criterio de Bendixson no resulta útil.

Usemos la función $m = (xy)^{-1}$, la cual es de clase C^1 en D . De esto, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial mf}{\partial x} + \frac{\partial mg}{\partial y} &= -\frac{r}{yk} - \frac{s}{xh} \\ &= -\left(\frac{r}{yk} + \frac{s}{xh}\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Dado que todos los términos dentro del paréntesis son positivos, la expresión es siempre diferente de cero y, más aún, no cambia de signo en la región en consideración; por tanto, del Criterio de Dulac, concluimos que el sistema (1.20) no posee órbitas periódicas en la región D . El comportamiento temporal de este sistema, puede observarse en la Figura 1.10.

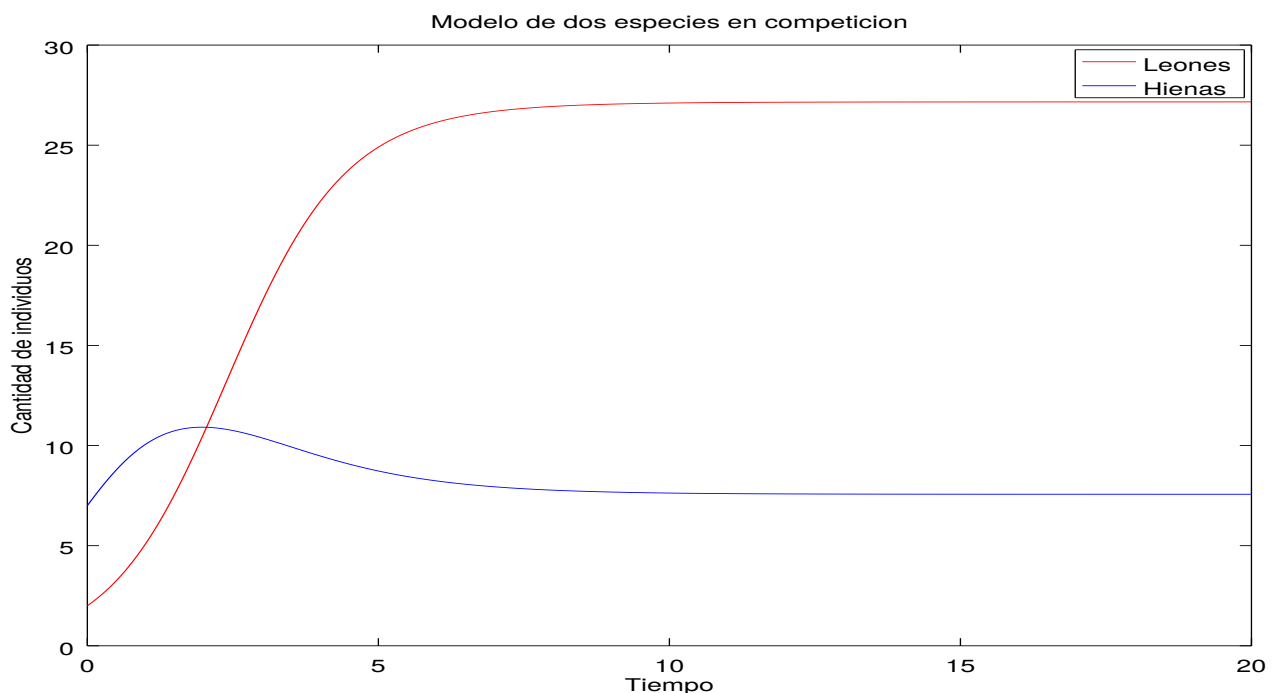


Figura 1.10: Gráfica de la evolución temporal del modelo de dos especies en competencia del sistema (1.20), para $r=1.2$, $s=1.3$, $k=30$, $h=13$, $b=0.015$ y $c=0.02$ para una población inicial de 2 leones y 7 hienas. Esta solución numérica se obtuvo implementando el Método de Euler explícito en el software libre Octave.

1.2.5. Funciones de Lyapunov

Comenzaremos definiendo el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov para puntos estacionarios de un sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$, luego introduciremos la noción de función de Lyapunov y sus principales resultados, para estudiar la estabilidad de puntos estacionarios no hiperbólicos. La estabilidad de cualquier punto estacionario hiperbólico x^* , está determinada por el signo de la parte real de los valores propios de la matriz de linealización $Df(x^*)$. Usando la Definición 1.2.6,

tendremos que un punto estacionario hiperbólico x^* es asintóticamente estable, si este es un sumidero y se dice que tal punto es inestable si es, o una fuente o un punto de ensilladura.

Nuevamente, tomemos un sistema no lineal autónomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.21)$$

con $f \in C^1(E)$ para $E \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto.

Definición 1.2.28 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov). *Consideremos un sistema (1.21). Un punto estacionario x^* de tal sistema es estable en el sentido de Lyapunov, si para toda vecindad U de x^* , existe una vecindad U' de x^* en E tal que toda solución $\phi_t(x)$ está en U para todo $x \in U'$ y todo $t \geq 0$. En caso contrario, se dice que x^* es inestable. Además, el punto estacionario x^* se denomina asintóticamente estable, si es estable en el sentido de Lyapunov y si existe una vecindad U'' de x^* tal que para todo $x \in U''$, tenemos que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x^*$$

Podemos notar, en la Figura 1.7 de la sección de sistemas lineales en el plano, que un nodo o foco estable es un punto estacionario asintóticamente estable; un nodo o foco inestable es un punto estacionario inestable y un centro corresponde a un punto estacionario estable, pero no asintóticamente estable.

Definición 1.2.29 (Derivada orbital). *La función $\dot{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama derivada orbital para el sistema (1.21), si*

$$\dot{V} = \nabla V(x) \cdot \dot{x} = \nabla V(x) \cdot f(x)$$

donde $f, V \in C^1(E)$ y $\nabla V(x)$ representa el operador gradiente de $V(x)$.

Definición 1.2.30 (Función de Lyapunov). *Sea x^* un punto estacionario de (1.21). Una función de Lyapunov es una función $\mathcal{L}(x)$ definida en una vecindad U de x^* , tal que cumple:*

1. $\mathcal{L}(x^*) = 0$
2. $\mathcal{L}(x) > 0$, si $x \neq x^*$ y $x \in U$

Teorema 1.2.31 (Teorema de Lyapunov). *Dada una función de Lyapunov $\mathcal{L}(x)$ asociada a (1.21) y un punto estacionario x^* , se tiene que:*

1. Si $\dot{\mathcal{L}} < 0$, el punto estacionario x^* es asintóticamente estable.
2. Si $\dot{\mathcal{L}} = 0$, el punto estacionario x^* es estable.
3. Si $\dot{\mathcal{L}} > 0$, el punto estacionario x^* es inestable.

Demostración. Ver [3] página 57. □

Ejemplo 1.2.32. *Consideremos un sistema*

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = f(X)$$

dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^3 - y^3 \\ \dot{y} &= 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3\end{aligned}$$

y veamos que el origen es un punto estacionario inestable para el sistema.

Claramente, el punto $(0, 0)$ es un punto estacionario del sistema y

$$Df(X) = \begin{bmatrix} 3x^2 & -3y^2 \\ 2y^2 + 8xy & 4xy + 4x^2 + 6y^2 \end{bmatrix}$$

Evaluando al punto $(0, 0)$, obtenemos

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces $Df(0, 0)$ tiene valores propios $\lambda_{1,2} = 0$, de lo cual se sigue que $(0, 0)$ es un punto estacionario no hiperbólico y, por lo tanto, no se puede aplicar el teorema de linealización. Usaremos entonces una función de Lyapunov con la cual se pueda determinar su estabilidad.

Tomemos la función $\mathcal{L}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ cuya derivada orbital estará dada por

$$\dot{\mathcal{L}}(X) = \nabla \mathcal{L}(X) \cdot f(X)$$

esto es,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{L}}(x, y) &= 2ax\dot{x} + by\dot{x} + bx\dot{y} + 2cy\dot{y} \\ &= 2ax(x^3 - y^3) + by(x^3 - y^3) + bx(2xy^2 + 4x^2y + 2y^3) + 2cy(2xy^2 + 4x^2y + 2y^3) \\ &= 2ax^4 - 2axy^3 + bx^3y - by^4 + 2bx^2y^2 + 4bx^3y + 2bxy^3 + 4cxy^3 + 8cx^2y^2 + 4cy^4 \\ &= 2ax^4 + 5bx^3y + (2b + 8c)x^2y^2 + (+2b + 4c - 2a)xy^3 + (4c - b)y^4\end{aligned}$$

Por el Teorema de Lyapunov, se requiere que $\dot{\mathcal{L}}(x, y)$ sea mayor estricto que 0, entonces al tomar $b = 0$ tendremos que

$$\dot{\mathcal{L}}(x, y) = 2ax^4 + 8cx^2y^2 + (4c - 2a)xy^3 + 4cy^4$$

y si hacemos $a = 2c$ con $c > 0$, luego $a > 0$ y

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{L}}(x, y) &= 2ax^4 + 8cx^2y^2 + 4cy^4 \\ &= 4cx^4 + 4cy^4\end{aligned}$$

Con estas condiciones, tendremos finalmente que $\dot{\mathcal{L}}(x, y) > 0$ para todo (x, y) y la función $\mathcal{L}(x, y) = 2cx^2 + cy^2$ satisface que $\mathcal{L}(0, 0) = 0$ y $\mathcal{L}(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ con (x, y) en una vecindad U de $(0, 0)$. Por tanto, \mathcal{L} es una función de Lyapunov y de lo probado anteriormente, concluimos por el teorema (1.2.31), que el origen es un punto estacionario inestable para el sistema.

Ejemplo 1.2.33. *Analizamos el siguiente modelo presa-depredador de Lotka-Volterra, regido por el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy\end{aligned}\tag{1.22}$$

con condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. Los términos x e y representan la población de presas y de depredadores respectivamente, mientras que los parámetros $a, b, c, d > 0$ tienen el siguiente significado:

- a es la tasa natural de crecimiento de la presa en ausencia de depredadores.
- b representa el efecto de la depredación sobre la presa.
- c es la tasa natural de muerte del depredador en ausencia de presas.
- d representa la eficiencia y tasa de propagación del depredador en presencia de presas.

Los puntos estacionarios (x, y) satisfarán

$$\begin{aligned}ax - bxy &= 0 \\ -cy + dxy &= 0\end{aligned}$$

y estos son $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

Usemos el teorema de linealización para ver la estabilidad de estos dos puntos.

Tendremos entonces que la matriz jacobiana es

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{bmatrix}$$

Evaluando el punto estacionario $P_1 = (0, 0)$ en la matriz jacobiana, tendremos

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

obteniendo así los valores propios $\lambda_1 = a > 0$ y $\lambda_2 = -c < 0$. Por el teorema de linealización, el punto $(0, 0)$ es un punto de ensilladura para el sistema y, de lo dicho al comienzo de esta sección, tendremos así que $(0, 0)$ es un punto inestable.

Por otro lado, al evaluar el punto estacionario $P_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ en la matriz jacobiana, obtenemos

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios serán entonces $\lambda_{\pm} = \pm i \sqrt{ac}$; así, la parte real de ambos es cero, por tanto, no es posible determinar su estabilidad de esta forma. Asumamos la función

$$\mathcal{L}(x, y) = -a \ln y - c \ln x + (by + dx) - R,$$

donde $R = -a \ln\left(\frac{a}{b}\right) - c \ln\left(\frac{c}{d}\right) + (a + c)$, definida en el primer cuadrante positivo ($x, y > 0$).

Por tanto, $\mathcal{L}(P_2) = 0$. Tal función satisface, además, que $\mathcal{L}(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ en el primer cuadrante positivo. Así, $\mathcal{L}(x, y)$ es una función de Lyapunov.

Ahora, dado que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \left(d - \frac{c}{x}\right)(ax - bxy) + \left(b - \frac{a}{y}\right)(dxy - cy) \\ &= adx - bdx - ca + bcy + bdx - bcy - adx + ac \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, por el teorema (1.2.31), obtenemos que el punto estacionario $P_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ es estable.

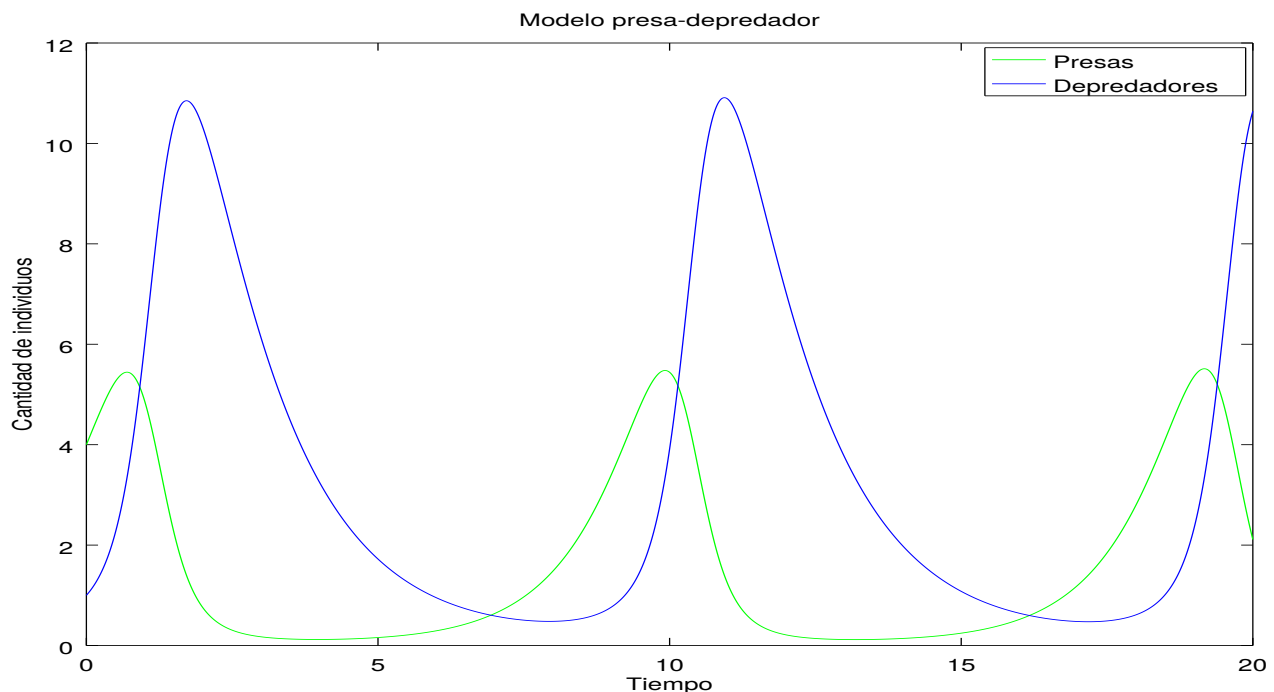


Figura 1.11: Gráfica de la evolución temporal del modelo presa-depredador del sistema (1.22), para $a=1$, $b=0.3$, $c=0.7$ y $d=0.5$ para una población inicial de cuatro presas y un depredador. Esta solución numérica se obtuvo implementando el Método de Euler explícito en el software libre Octave.

1.3. Bifurcaciones en el plano

Al modelar fenómenos dinámicos en biología mediante el uso de ecuaciones diferenciales, se descartan muchas circunstancias las cuales tienen un efecto relativamente despreciable sobre la dinámica del fenómeno. Una vez se haya definido el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$ que modela el fenómeno, se espera que el modelo tenga un comportamiento similar al del fenómeno que representa, es decir, en términos de ecuaciones diferenciales, se espera que el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema no cambie cuando se reemplaza el campo vectorial que definido por dicho sistema por otro campo vectorial "próximo a él". Tal problema recibe el nombre de *estabilidad estructural* del sistema, la cual es diferente al tipo de estabilidad de los puntos estacionarios del sistema, previamente estudiados.

Para entender el significado de que dos campos vectoriales sean próximos, usaremos una métrica.

Definición 1.3.1 (Distancia). *Dados dos flujos sobre una variedad compacta U de \mathbb{R}^n definidos por $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{x} = g(x)$ con $f, g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, se define la distancia de f a g como $d(f, g) := \max_{x \in U} \|f(x) - g(x)\| + \max_{x \in U} \|f'(x) - g'(x)\|$*

Este concepto de distancia solo tiene sentido en variedades compactas de \mathbb{R}^n , dado que en \mathbb{R}^n no todo par de flujos tienen una distancia. Resulta igualmente necesario suponer que el flujo es transversal a la frontera del conjunto, esto es, que toda trayectoria cruza la frontera de la variedad compacta en \mathbb{R}^n transversalmente, por ejemplo, de afuera hacia adentro.

El uso de esta distancia resulta ser intuitivamente claro, dado que, si dos flujos son próximos, luego sus respectivas linealizaciones son también próximas, lo cual resulta bastante útil, puesto que los autovalores de la linealización en un punto de equilibrio contienen información muy importante. Si, por el contrario, hubiésemos usado por ejemplo $\tilde{d} := \max_{x \in U} \|f(x) - g(x)\|$, luego sistemas arbitrariamente cercanos podrían tener autovalores totalmente distintos.

Definición 1.3.2 (Topológicamente equivalente). *Sean $f \in C^1(E_1)$ y $g \in C^1(E_2)$ donde E_1 y E_2 son subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Entonces los sistemas de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.23}$$

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.24}$$

se dicen topológicamente equivalentes, si existe un homeomorfismo $H : E_1 \rightarrow E_2$ el cual mapea trayectorias de (1.23) en trayectorias de (1.24) y preserva orientación en el tiempo.

Definición 1.3.3 (Estructuralmente estable). *El flujo de un sistema $\dot{x} = f(x)$ es estructuralmente estable, si f tiene una vecindad en $C^1(U, \mathbb{R}^n)$ tal que el flujo generado por f es topológicamente estable a todo flujo generado por campos vectoriales (sistemas de ecuaciones diferenciales) en esta vecindad.*

El problema de la resistencia de las propiedades cualitativas de un flujo a pequeños cambios en el campo vectorial que define el sistema de ecuaciones diferenciales que induce el flujo, resultará más fácil de considerar si, en lugar de estudiar la totalidad del espacio de flujos, solo nos restringimos a

estudiar los miembros de una familia de sistemas que tienen dependencia de algunos parámetros.

Consideremos la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano que dependen de un parámetro:

$$\dot{x} = f(\mu, x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad f \in C^1$$

En un cierto valor del parámetro μ , este sistema tiene algunas propiedades cualitativas, como lo pueden ser la cantidad de puntos estacionarios, su tipo de estabilidad, el número de ciclos límites, etc. Se espera que a pequeños cambios del parámetro estas propiedades se conserven. Sin embargo, puede suceder valores del parámetro para las cuales esto no suceda, esto es, se puede dar el caso de valores del parámetro para los cuales un pequeño cambio produzca cambios cualitativos en el flujo: cambiar el número de puntos estacionarios, que uno de estos puntos anteriormente estable pierda su estabilidad dando paso a dos puntos estacionarios estables, o incluso, que para cierto valor del parámetro surjan órbitas periódicas en torno a un punto estacionario. Cuando esto sucede, decimos entonces que el sistema ha caído en una *bifurcación* y el valor del parámetro para el cual esto sucede recibe el nombre de *punto de bifurcación*.

Veremos a continuación, algunas de las bifurcaciones más conocidas las cuales ocurren en sistemas en el plano con un único parámetro de bifurcación.

Ejemplo 1.3.4 (Bifurcación ensilladura-nodo). *Consideremos la siguiente familia uni-paramétrica de sistemas en el plano:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Para $\mu > 0$, el sistema no tiene puntos estacionarios. Cuando se hace decrecer μ desde $\mu > 0$ hasta $\mu = 0$, aparece un único punto estacionario, a saber, $(x, y) = (0, 0)$. Los valores propios de la linealización del sistema en el punto $(0, 0)$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$. Dado que la segunda ecuación es lineal y teniendo en cuenta que $x_2(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces todas las órbitas de (1.25) eventualmente se aproximan al eje x_1 y la dinámica del sistema estará entonces gobernada por la primera ecuación. Es entonces pues fácil dibujar el retrato de fase de este sistema para $\mu = 0$ (ver Figura 1.12 izquierda). En la figura, vemos que el semiplano derecho $x > 0$ parece una ensilladura y el semiplano izquierdo $x < 0$ parece un nodo. Este tipo de punto estacionario recibe el nombre de ensilladura-nodo. Por otro lado, si μ se hace decrecer desde $\mu = 0$ hasta $\mu < 0$, el punto estacionario se bifurca en dos estacionarios, a saber: $P_1 = (-\sqrt{\mu}, 0)$ y $P_2 = (\sqrt{\mu}, 0)$. Los valores propios de la linealización de (1.25) en los puntos P_1 y P_2 son $\lambda_1 = -2\sqrt{\mu}$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu}$, $\lambda_2 = -1$, respectivamente; de lo cual, P_1 es un nodo hiperbólico y P_2 es una ensilladura hiperbólica. Ahora, cuando $\mu \rightarrow 0^+$, ambos puntos estacionarios tienden a $(0, 0)$ y los valores propios tienden a 0 y 1.

La bifurcación ensilladura-nodo aparece frecuentemente en sistemas de dimensión arbitraria y es un fenómeno típico de aparición y desaparición de un punto estacionario.

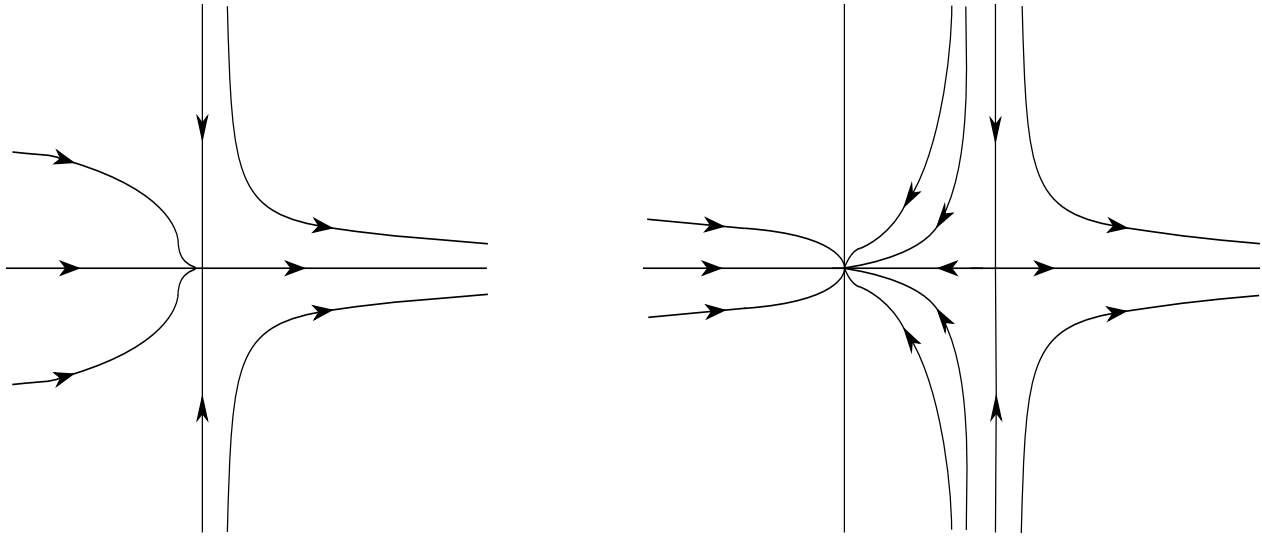


Figura 1.12: Retratos de fase correspondiente al sistema (1.25)

Ejemplo 1.3.5 (Bifurcación Pitchfork). *Tomemos la siguiente familia uni-paramétrica de sistemas en \mathbb{R}^2 :*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Como en el ejemplo anterior, la dinámica del sistema dependerá de la primera ecuación. Para μ arbitrario, el punto $(0,0)$ es siempre estacionario. Los valores propios de la linealización del sistema (1.26) en $(0,0)$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \mu$. Así, para $\mu < 0$, $(0,0)$ será asintóticamente estable y para $\mu > 0$, será inestable; sin embargo, para $\mu = 0$, no podemos decir nada. No obstante, en este caso, usando el método de separación de variables, podemos hallar la solución explícita del sistema (1.26) que pasa por el punto (x_1^0, x_2^0) , a saber:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(x_1^0)^2}{2t(x_1^0)^2 + 1}} \\ x_2^0 e^{-t} \end{pmatrix}$$

de esto, es claro que cuando $t \rightarrow +\infty$, $(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)$, independiente del valor inicial que sea tomado, por tanto, el punto $(0,0)$ es asintóticamente estable, pero no linealmente estable, puesto que de la linealización de (1.26) en $(0,0)$ no se puede concluir nada.

Luego, cuando $\mu > 0$, aparecen dos nuevos puntos estacionarios, estos son $P_1(-\sqrt{\mu}, 0)$ y $P_2 = (\sqrt{\mu}, 0)$. Los valores propios de la linealización de (1.26) en estos puntos serán $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2\mu$ para ambos puntos, de lo cual, se sigue entonces que ambos puntos P_1 y P_2 son asintóticamente estables. Esto muestra que cuando μ se incrementa desde $\mu = 0$ hasta $\mu > 0$, el punto $(0,0)$ pierde su estabilidad y aparecen dos nuevos puntos estacionarios asintóticamente estables. Esta bifurcación es llamada bifurcación Pitchfork supercrítica, lo que significa que por encima del valor crítico del parámetro de bifurcación, esto es, por encima de $\mu = 0$, aparecen dos nuevos estacionarios y el

estacionario anterior que era estable se vuelve ahora inestable. Si tomamos el sistema anterior con la primera ecuación dada por $\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^3$, obtenemos una bifurcación Pitchfork subcrítica.

La bifurcación Pitchfork aparece generalmente en sistemas de orden superior que presentan cierta simetría, como en nuestro caso, en el cual la primera ecuación de (1.26) es impar. Esta bifurcación puede representarse gráficamente en el plano donde μ es el eje de las abscisas y x_1 el eje de las coordenadas. La Figura 1.13 representa tal situación.

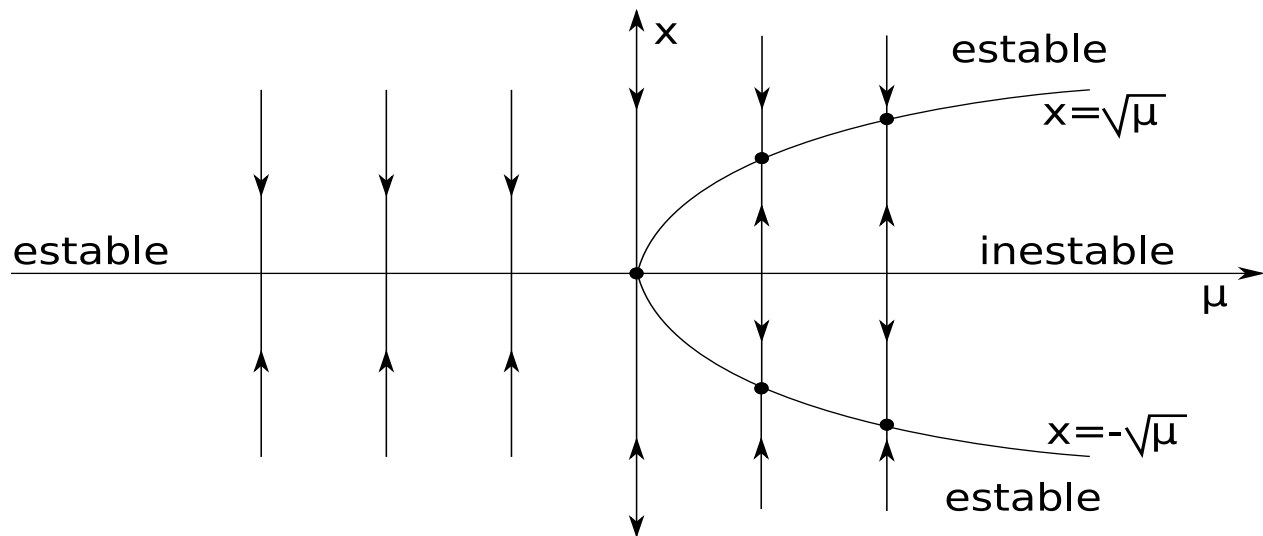


Figura 1.13: Ejemplo de una bifurcación Pitchfork

Ejemplo 1.3.6. Tomemos la siguiente perturbación uni-paramétrica de un oscilador armónico:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \mu x_2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

el cual, en coordenadas polares, es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r \\ \dot{\theta} &= -1 \end{aligned} \tag{1.28}$$

cuyo retrato de fase es fácil de considerar, dado que $\dot{\theta} = -1$ indica que las órbitas siempre están orientadas en sentido horario y $\dot{r} = \mu r$ indica que el radio es creciente si $\mu > 0$, decreciente si $\mu < 0$ o constante si $\mu = 0$. En efecto, si $\mu > 0$, todas las órbitas se alejan espiralmente del único punto estacionario del sistema, a saber, el origen, de lo cual, este será un punto estacionario inestable. Si $\mu < 0$, todas las órbitas tienden espiralmente al origen, obteniendo así que el origen es un punto estacionario asintóticamente estable. Si $\mu = 0$, sus órbitas serán periódicas y, en particular, son circunferencias concéntricas en torno al origen, así que este será un punto estacionario estable. Tenemos entonces que cuando μ pasa de $\mu < 0$ a $\mu = 0$, el flujo de este sistema cambia cualitativamente por la aparición de órbitas periódicas y cuando μ pasa de $\mu = 0$ a $\mu > 0$, el único punto estacionario pierde su estabilidad y se convierte en un punto inestable.

Ejemplo 1.3.7 (Bifurcación Poincaré-Andronov-Hopf). *Es frecuente encontrar comunidades ecológicas con una modelación matemática que conlleva a sistemas de ecuaciones diferenciales los cuales dependen de un solo parámetro y tienen un punto estacionario aislado que es estacionario para todos los valores del parámetro el cual es, a su vez, estable cuando el parámetro pertenece a cierto intervalo, pero pierde su estabilidad cuando el parámetro cruza la frontera de dicho intervalo. Al mismo tiempo se satisface, para este tipo de sistemas, que en una vecindad del valor crítico del parámetro donde el punto estacionario pierde su estabilidad aparecen órbitas periódicas de pequeña magnitud, tal que la pérdida de estabilidad de su punto estacionario, usualmente, da lugar a la aparición de ciclos límite del sistema. Se puede probar, además, que la linealización de estos sistemas en el punto estacionario da lugar a un par de valores propios complejos conjugados que dependen del parámetro y que estos valores propios en el valor crítico del parámetro, cruzan el eje imaginario desde el semiplano izquierdo hacia el derecho. Este tipo de sistemas fueron inicialmente estudiados por Poincaré y de manera sistemática por Andronov (1937), quien obtuvo un importante resultado para estos sistemas en dimensión dos, resultado que después fue generalizado por Hopf (1942) para el caso n -dimensional.*

Consideremos ahora la siguiente familia de sistemas uni-paramétrica en el plano

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (1.29)$$

es claro que el único punto estacionario para el sistema independiente del valor del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ es $(0,0)$. El sistema linealizado en el origen es $\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2$ y $\dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2$, cuyos valores propios estarán dados por $\lambda_1 = \mu + i$ y $\lambda_2 = \mu - i$; de donde se sigue que el origen será asintóticamente estable para $\mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$.

En coordenadas polares, el sistema (1.29) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= -1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

De la segunda ecuación, vemos que la dirección de todas las órbitas es en sentido horario. También, es evidente que el origen es un punto estacionario para el sistema, pero $r = \sqrt{\mu}$ cuando $\mu > 0$, que es el otro punto estacionario, corresponde a una órbita. Aún más, de la primera ecuación, todas las órbitas del sistema, excepto el origen, se aproximan espiralmente a la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = \mu$ cuando $t \rightarrow +\infty$, esto ocurre así debido a que, para $r > \sqrt{\mu}$, $r < 0$, esto es, el radio decrece y para $r < \sqrt{\mu}$, $r > 0$, es decir, el radio crece. Ahora, para $\mu \leq 0$, todas las órbitas tienden espiralmente hacia el único punto estacionario del sistema, esto es, el origen. Para $\mu > 0$, el origen se desestabiliza y como hemos visto, todas las soluciones con condiciones iniciales al interior de la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = \mu$ tienden a ella; lo cual quiere decir, que el conjunto ω -límite de cualquier órbita que pase por $x^0 \neq 0$, es la circunferencia $r = \sqrt{\mu}$, es decir, esta circunferencia es un ciclo límite del sistema (1.30) (ver Figura 1.14).

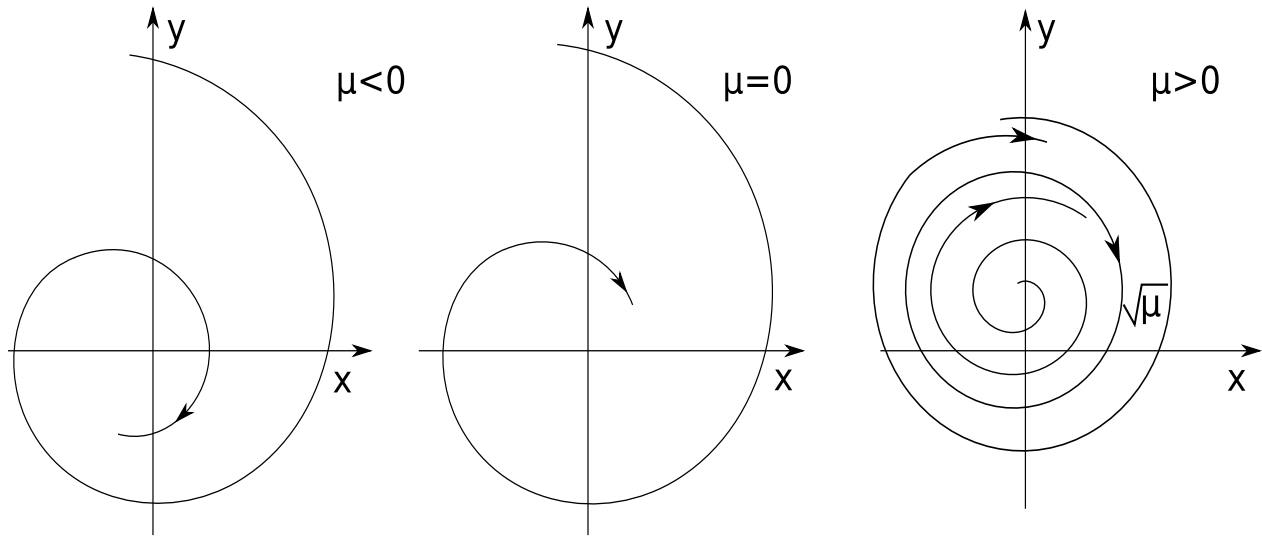


Figura 1.14: Retrato de fase del sistema (1.30)

Para garantizar no solo la existencia sino también la unicidad de una órbita periódica para pequeños valores del parámetro μ , enunciamos el siguiente resultado debido a Hopf.

Teorema 1.3.8. *Supóngase que para el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$ se tiene que $f \in C^5$, $f(0, \mu) \equiv 0$, la matriz $f'_x(0, \mu)$ tiene un par de valores propios complejos conjugados $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ con $\omega(\mu) > 0$ y $\alpha(0) = 0$, la derivada de la parte real con respecto al parámetro μ es positiva en cero: $\alpha'(0) > 0$ y los otros $n-2$ valores propios tienen parte real negativa, entonces:*

1. *Existe un $\delta > 0$ y una función $\mu : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu \in C^3$ y para todo $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, el sistema $\dot{x} = f(x, \mu(\varepsilon))$ tiene una solución periódica $p(t, \varepsilon)$ con período $T(\varepsilon) > 0$, además $T \in C^3$, $\mu(0) = 0$, $T(0) = \frac{2\pi}{\omega(0)}$, $p(t, 0) \equiv 0$ y la amplitud de esta solución periódica (el promedio de la distancia de su órbita desde el origen) es proporcional a $\sqrt{|\mu(\varepsilon)|}$.*
2. *El origen $(x, \mu) = (0, 0)$ del espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tiene una vecindad $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que no contiene ninguna órbita periódica de la familia $\dot{x} = f(x, \mu)$, excepto aquellas de la familia $p(t, \varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$*

Demostración. Ver [5] página 418. □

La función $\mu(\varepsilon)$ puede ser, ó bien positiva ó bien negativa para todo $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ y $\varepsilon \neq 0$. En el primero de estos casos, la bifurcación recibe el nombre de *supercrítica*, pues las órbitas periódicas aparecen cuando $\mu > 0$, esto es, por encima del valor crítico $\mu = 0$ del parámetro de bifurcación. En el segundo caso, la bifurcación será llamada *subcrítica*. En el caso supercrítico, las soluciones periódicas surgen cuando el punto estacionario pierde su estabilidad y son orbitalmente asintóticamente estables; por su parte, en el caso subcrítico, las soluciones periódicas son inestables y existen para valores de μ cuando el punto estacionario aún es asintóticamente estable.

Observación 1.3.9. *En el Ejemplo 1.3.7, la órbita periódica que aparece satisface, además, que cualquier solución de (1.29) con condiciones iniciales en una vecindad de ella tiende a esta órbita cuando $t \rightarrow +\infty$, es decir, es un atractor del sistema. Si tal solución tiende a esta órbita cuando $t \rightarrow -\infty$, será llamado un repelot del sistema.*

Capítulo 2

Dinámica poblacional

2.1. Introducción

La dinámica poblacional se enfoca en estudiar el problema de cómo varía en el tiempo el número ó el tamaño de un grupo bien definido de seres vivos, ya sea de una especie o de un sistema de especies que comparten un mismo hábitat. Dichos seres vivos nacen, se reproducen y mueren a una cierta tasa la cual depende de factores como las condiciones del ambiente, cantidad de alimento disponible, entre otras; además, si comparten su hábitat con otras especies, dependerá también de la relación de coexistencia con estas.

Los inicios de la dinámica poblacional se remonta al siglo XVIII cuando el economista y demógrafo inglés Thomas Robert Malthus, publica en 1798 su texto *An essay on the principle of population*, en el cual se estudia el cambio de las poblaciones en el tiempo. En dicha obra, Malthus señala que la población humana crece en progresión geométrica, mientras que los recursos alimenticios lo hacen en progresión aritmética. De esto, puede deducirse que en algún momento se producirán hambrunas dado que no habrá alimento suficiente para toda la población humana, dando paso así a una catástrofe humanitaria global.

El modelo malthusiano puede expresarse por:

$$\begin{aligned}P_t &= P_0(1 + r)^t \\S_t &= S_0(1 + st)\end{aligned}$$

donde t es el tiempo medido en años; P_t corresponde a la población en el año t ; P_0 es la población inicial; r es la tasa de crecimiento anual de la población; S_t corresponde a la producción de alimentos en el año t ; S_0 es la producción inicial de alimentos y s es la tasa de crecimiento anual de la producción.

El modelo malthusiano intenta predecir lo que sucederá en un futuro distante, esto es, cuando $t \rightarrow \infty$. Si suponemos que cada habitante consume α unidades de alimento y que la capacidad máxima de producción es γ veces la producción anual de alimentos ($\gamma > 1$), al realizar el cociente

entre la necesidad de consumo $S_t = \alpha P_t$ y la capacidad máxima de producción γS_t , obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha P_t}{\gamma S_t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha P_0(1+r)^t}{\gamma S_0(1+st)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha t P_0(1+r)^{t-1}}{\gamma S_0 s} = \infty$$

Tendremos entonces que existe un tiempo $T > 0$ tal que para todo $t \geq T$, se satisface que $\alpha P_0(1+r)^t > \gamma S_0(1+st)$, lo que quiere decir que la necesidad de consumo excede a la capacidad de producción de alimentos independiente de los valores de γ, r y s dando lugar así a un período de hambruna. Esta visión catastrófica de Malthus, a pesar de haber sido posteriormente desestimada, dio inicio a la dinámica poblacional.

Ahora bien, las especies vivas que estudia la dinámica poblacional se pueden clasificar en los siguientes tipos:

- * Generaciones que se solapan en el tiempo (se estudian con modelos continuos): La generación de los padres y la generación de los hijos están presentes ambas al mismo tiempo, como por ejemplo, los mamíferos.
- * Generaciones que no se solapan en el tiempo (se estudian con modelos discretos): La generación de los padres ya ha desaparecido antes de surgir la generación de los hijos, como por ejemplo, el caso de algunos insectos los cuales ya no están vivos para el momento en que nacen sus crías.

Los modelos en dinámica poblacional pueden ser de dos tipos:

- * No estructurados: No se clasifica la población ni por sexo ni por edad. De la misma forma, tampoco se tiene en cuenta el retraso temporal ni la distribución espacial.
- * Estructurados: Se tiene en consideración todos o algunos de los elementos anteriormente dichos.

2.2. Modelos discretos

Como mencionamos anteriormente, en este tipo de modelos la generación de los padres no está presente al momento de surgir la generación de los hijos, esto es, las generaciones no se solapan. Algunos insectos son ejemplo de ello: la generación de los padres ponen sus huevos y mientras muere esta generación, la siguiente se encuentra en desarrollo y, debido al tiempo de vida de los insectos, dichas generaciones no llegan a encontrarse en ningún momento.

Consideremos ahora una única población aislada. Supongamos que las generaciones previas influyen sobre el número de la generación actual solo a través del número de individuos de la generación inmediatamente precedente y también, que las condiciones que puedan influir en la reproducción (disponibilidad de comida, temperatura, etc.), permanecen constantes a lo largo de todas las generaciones. Usaremos la siguiente notación para este tipo de modelos:

- t representa el tiempo y se mide en unidades discretas, es decir, segundos, minutos, horas, años, etc.
- N_t es el número de individuos en el tiempo t .

- N_{t+1} denota el número de individuos en la siguiente generación, la cual está determinada por la generación N_t .
- $\frac{N_{t+1} - N_t}{N_t}$ es llamada *la tasa de crecimiento per capita en el tiempo t*, usualmente dada en porcentajes y se asume como constante.

Del hecho de que $\frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = r$ con r constante, se observa que si $r < 0$ entonces en cada generación sucesiva habrá menos individuos, así, la población disminuirá hasta extinguirse. Para nuestro interés, habremos de suponer entonces que $r > 0$ de lo cual la ecuación tomará la forma

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t$$

De esta ecuación en diferencias obtenemos que

$$N_{t+2} = (1 + r)N_{t+1} = (1 + r)^2 N_t$$

donde finalmente se tiene que

$$N_{t+n} = (1 + r)^n N_t$$

Si tenemos, por ejemplo, una tasa de crecimiento per capita $r = 2\%$ y $n = 100$, de lo anterior, se sigue

$$N_{t+100} = (1 + 0,02)^{100} N_t = 7,24 N_t$$

Lo cual corresponde a un crecimiento exponencial. Sin embargo, dicho crecimiento no puede asumirse que suceda indefinidamente. Eventualidades como escasez de alimentos, oxígeno, espacio, eventos adversos por superpoblación, entre otras, son limitantes a este crecimiento.

Para hacer el modelo más realista, se considera que la tasa de crecimiento per capita es una función decreciente de la cantidad de la población en el tiempo t , esto es

$$\frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right)$$

donde $r > 0$ corresponde a la tasa de crecimiento intrínseca y $K > 0$ denota la *capacidad de carga del hábitat* la cual es el tamaño máximo de población que el ambiente puede soportar. Este modelo recibe el nombre de *dinámica logística*, el cual no permite que la población crezca de forma indefinida encontrando como límite justamente la capacidad de carga K .

Ejemplo 2.2.1. Tomemos la ecuación en diferencias dada por

$$N_{t+1} = N_t e^{r(1-N_t/K)} \quad r, K > 0 \quad (2.1)$$

obteniendo así las siguientes soluciones numéricas para distintos valores de r y para $K = 1$, las cuales fueron obtenidas implementando un esquema en el integrador libre Octave.

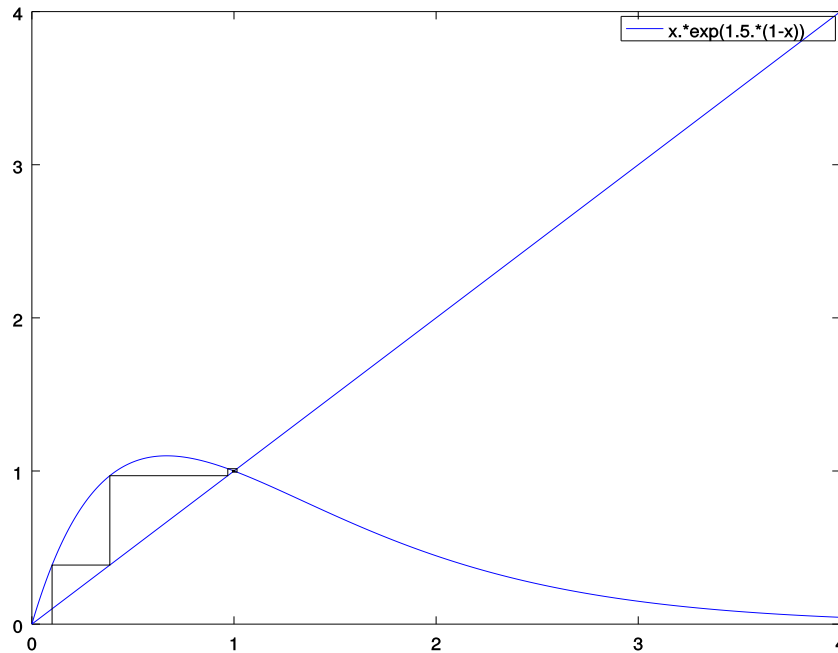


Figura 2.1: Solución numérica de la ecuación (2.1) para $r = 1.5$, $K = 1$ y un valor inicial de 0.1, la cual presenta un punto estacionario asintóticamente estable en 1, es decir, todo valor cercano y no cercano a 1 tenderá a este.

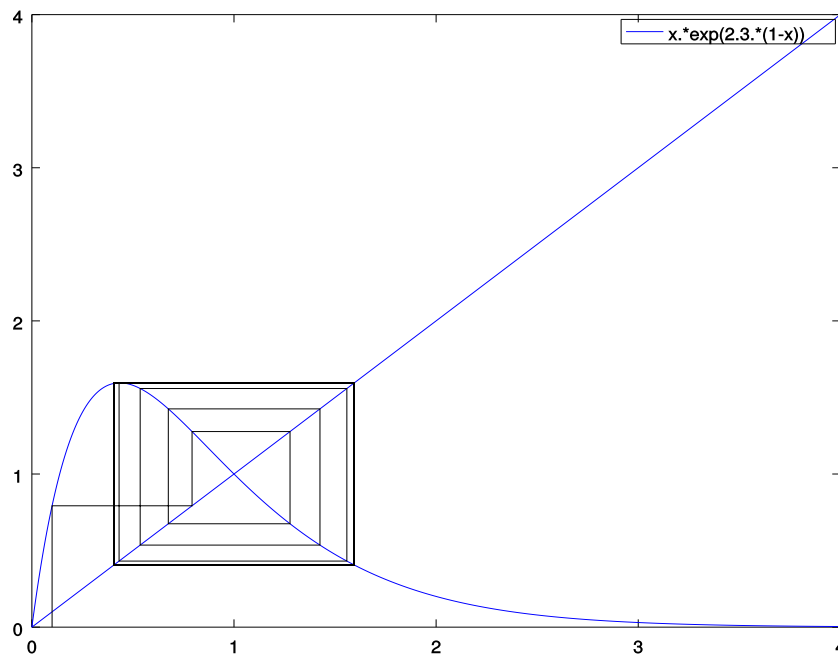


Figura 2.2: Solución numérica de la ecuación (2.1) para $r = 2.3$, $K = 1$ y un valor inicial de 0.1. En esta gráfica se presenta una trayectoria cerrada asintóticamente estable, esto es, toda trayectoria que inicie próxima a esta, tenderá a ella. Esto puede modelar una población de insectos en la que, por ejemplo, cada año se da lugar a una nueva generación la cual cada dos años es abundante (2-periódica) y cada año es escasa.

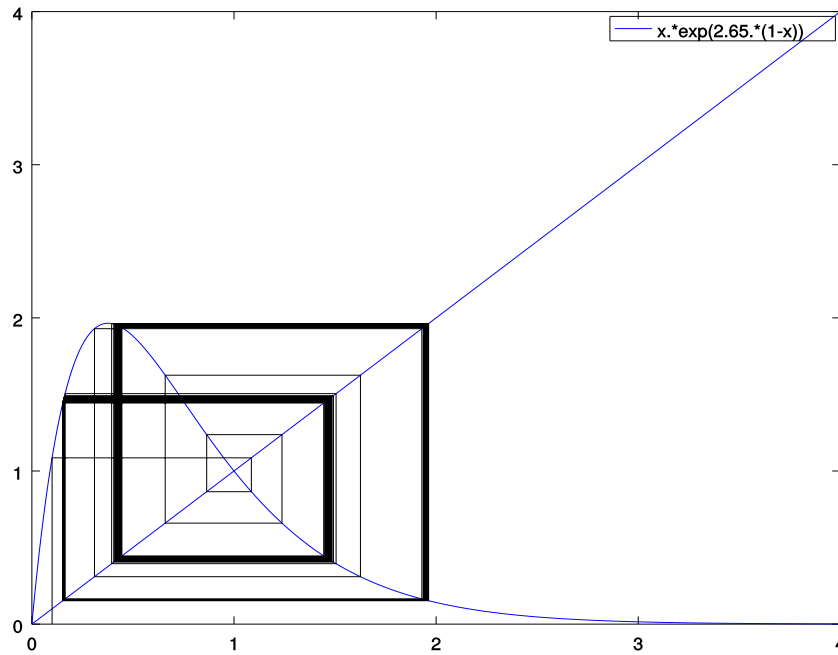


Figura 2.3: Solución numérica de la ecuación (2.1) para $r = 2.65$, $K = 1$ y un valor inicial de 0.1. Se presenta nuevamente una trayectoria cerrada asintóticamente estable, para la cual la población de insectos será abundante cada cuatro años (4-periódica).

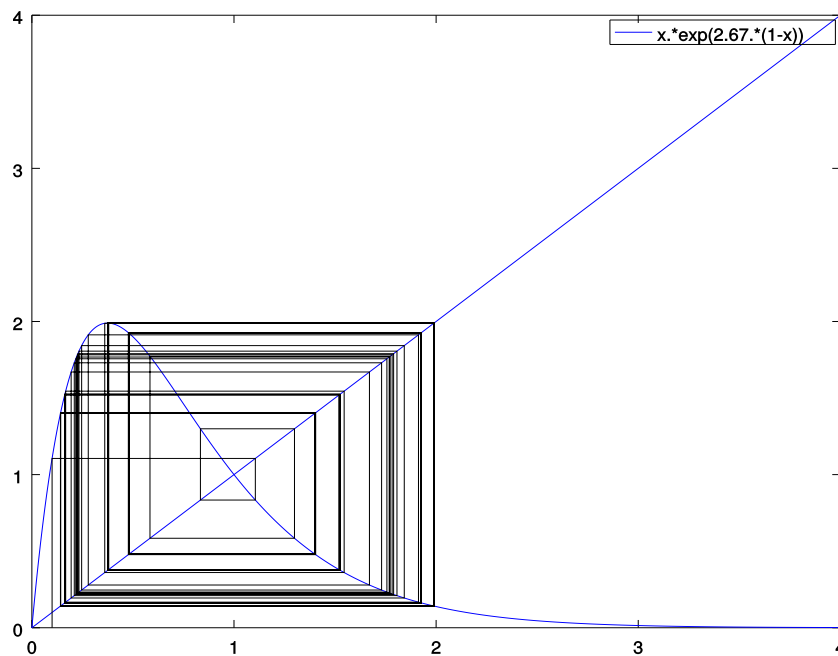


Figura 2.4: Solución numérica de la ecuación (2.1) para $r = 2.67$, $K = 1$ y un valor inicial de 0.1. Similar a las figuras anteriores, se presenta una trayectoria cerrada asintóticamente estable y la población de insectos será abundante cada ocho años (8-periódica).

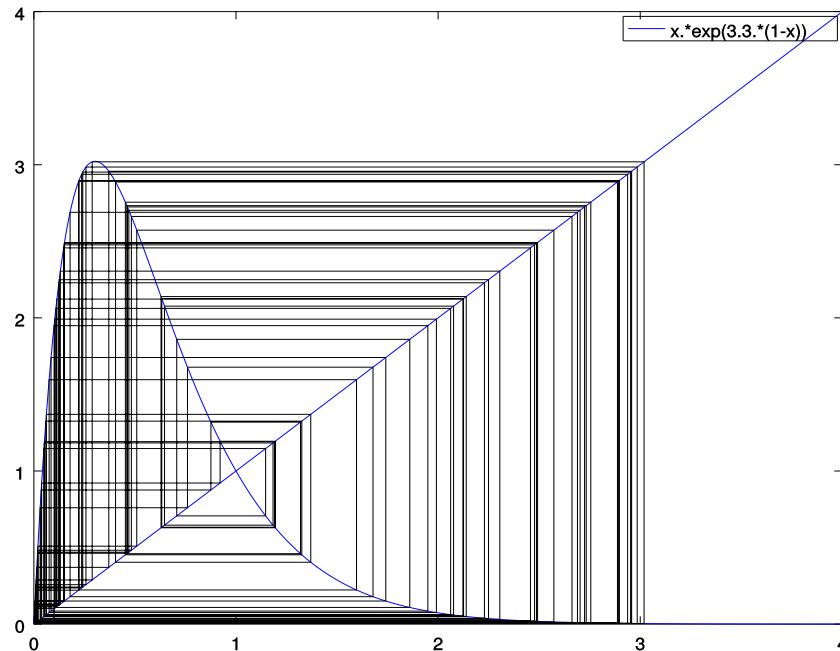


Figura 2.5: Solución numérica de la ecuación (2.1) para $r = 3.3$, $K = 1$ y un valor inicial de 0.1, la cual exhibe un comportamiento caótico, esto es, a medida que la tasa de crecimiento intrínseca r se incrementa, el sistema pierde su estabilidad y para ciertos valores del parámetro K , puede presentar trayectorias periódicas con períodos muy altos y comportarse de tal forma que no sea posible predecir lo que sucederá a lo largo del tiempo.

2.3. Modelos continuos

2.3.1. Modelo malthusiano

Este considera que la velocidad de crecimiento de una población aumenta en proporción directa a la misma. Denotando por r nuevamente a la tasa de crecimiento intrínseco, esta suposición en términos de ecuaciones diferenciales puede ser escrita como:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP, \text{ con } P(t_0) = P_0$$

cuya solución estará dada por

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

Según esto, la población humana crece de forma exponencial, y por lo tanto, no podría ser sostenible a largo tiempo. Sin embargo, el matemático belga Pierre-François Verhulst modificó el modelo malthusiano expresando que los recursos solo están disponibles en forma limitada, así que cualquier población crece hasta un punto de saturación a partir del cual no es posible que pueda seguir creciendo, dando lugar así al *modelo logístico*.

2.3.2. Modelo logístico

El modelo logístico surge del modelo malthusiano al considerar que el crecimiento de la población está limitado por la cantidad de recursos presentes en el hábitat. Dicha cantidad es la ya conocida capacidad de carga del hábitat K . Tendremos así que

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right), \text{ con } P(t_0) = P_0$$

Cuando la población alcanza la capacidad máxima de carga, es decir, $P = K$, la población deja de crecer; a saber, $\frac{dP}{dt} = 0$.

Claramente, los puntos estacionarios de esta ecuación serán $P = 0$, el cual corresponde a un punto inestable y $P = K$, el cual es un punto estable. En efecto, dada la matriz jacobiana

$$J(P) = r - \frac{2r}{K}P$$

se obtiene que $J(0) = r > 0$ y, por el teorema de linealización, $P = 0$ es un punto estacionario inestable. De forma análoga, $J(K) = -r < 0$ y por este mismo resultado, se sigue entonces que $P = K$ es un punto estacionario estable.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos la siguiente ecuación logística particular:

$$\frac{dP}{dt} = 0,02P \left(1 - \frac{P}{12}\right) \quad (2.2)$$

de lo cual se sigue que $r = 0,02$ y $K = 12$. Las soluciones numéricas para diferentes valores iniciales de la población P_0 pueden verse en la Figura 2.6. Podemos observar que el valor de $K=12$ es un punto estacionario estable, esto es, todas las soluciones tienden a este valor, independiente de si la población inicial es menor o mayor a la capacidad de carga K .

2.4. Especies en interacción

Los ecólogos suelen clasificar las interacciones entre especies de un mismo hábitat, a partir de si estas influyen de forma positiva, negativa o no hay ninguna influencia (neutralidad) entre ellas. Para comprender mejor este tipo de interacciones, tendremos en cuenta dos de las especies más importantes y despreciaremos las demás. Dicha influencia entre este par de especies se clasifican principalmente por:

- Mutualismo o simbiosis: Ambas especies se ayudan mutuamente, esto es, dependen una de la otra para el bienestar de ambas.
- Competencia: Las especies son rivales y compiten por los mismos recursos, inhibiendo cada una el crecimiento de la otra.
- Predación: Una especie se alimenta de la otra inhibiendo el crecimiento de esta. La especie que obtiene un resultado benéfico recibe el nombre de *predador*, mientras que la otra se reconoce como la especie *presa*.

Nos centraremos principalmente en este último tipo de interacción.

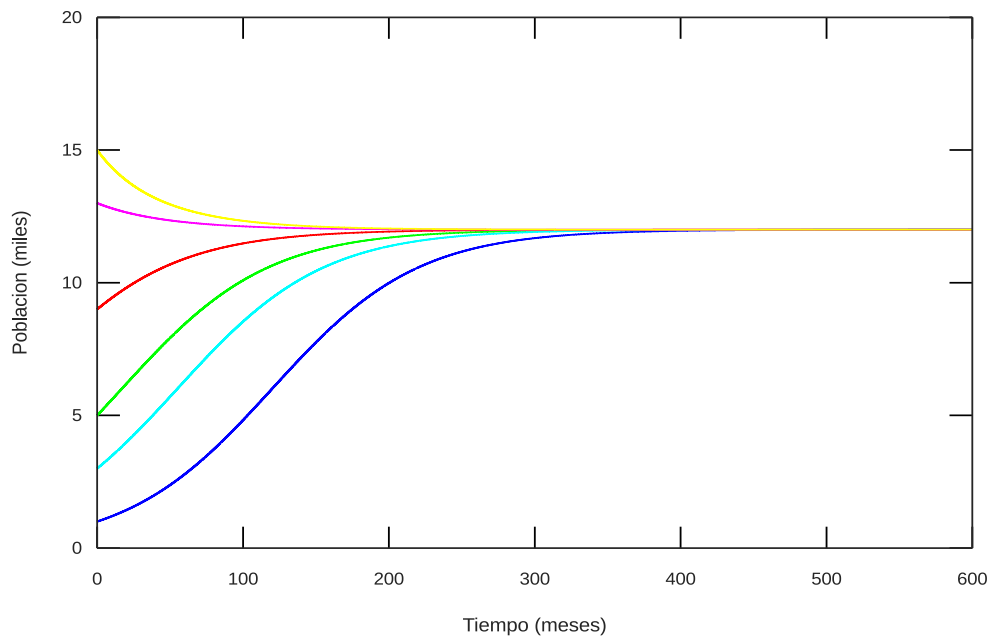


Figura 2.6: Soluciones numéricas de la ecuación logística (2.2) correspondientes a una población con diferentes valores iniciales P_0 . Dichas soluciones se obtuvieron empleando un método de Euler explícito implementado en el integrador libre Octave.

2.4.1. Modelos predador-presa

En el caso en que estudiábamos una sola especie, nuestro principal interés era estudiar la tasa de crecimiento poblacional y la capacidad de carga máxima del hábitat que pudiera sostener a la población. Ahora, en el caso de dos especies que interactúan, analizaremos cómo se afectan las tasas de crecimiento de sus respectivas poblaciones.

Modelo de Lotka-Volterra

El origen de los modelos matemáticos que describen las interacciones de este tipo se remonta a principios del siglo XX, en los trabajos formulados por el matemático italiano Vito Volterra y por el biólogo y matemático norteamericano Alfred James Lotka, quienes a pesar de trabajar en dichos modelos de forma independiente, obtuvieron resultados similares.

Un suceso que motivó el desarrollo de este modelo fue la observación en el aumento de predadores en algunos puertos europeos durante y al finalizar la Primera Guerra Mundial, momento en el cual la pesca de ellos se redujo de manera significativa.

Consideremos a $x(t)$ e $y(t)$ las respectivas poblaciones de presa y predador en el tiempo t . El modelo

se regirá entonces por el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy\end{aligned}\tag{2.3}$$

con condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = ((x_0, y_0))$ donde los parámetros $a, b, c, d > 0$, representan lo siguiente:

- a es la tasa de crecimiento natural de la presa en ausencia de predadores.
- b es el efecto de la predación sobre la presa.
- c representa la tasa natural de muerte del predador en ausencia de presas.
- d es la eficiencia y tasa de propagación del predador en presencia de la presa.

Claramente, los puntos $P = (0, 0)$ y $P = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ corresponden a puntos estacionarios del sistema (2.3) y por lo visto en el Ejemplo 1.2.33, se sigue que el punto $P = (0, 0)$ es un punto inestable y el punto $P = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ es un punto estable.

Las soluciones del sistema de Lotka-Volterra serán órbitas periódicas para cada condición inicial, lo cual representa un régimen de oscilación de las dos especies a lo largo de todo el tiempo; esto es, en algunos momentos la población de una será alta mientras la población de la otra será baja y luego esta situación se invertirá, dando lugar así a un fenómeno cíclico a lo largo del tiempo t .

Ejemplo 2.4.1. *El sistema*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 0,3xy \\ \frac{dy}{dt} &= -0,7y + 0,5xy\end{aligned}\tag{2.4}$$

corresponde a un sistema Lotka-Volterra como en (2.3), para $a=1$, $b=0.3$, $c=0.7$ y $d=0.5$. Sus soluciones numéricas para distintos valores iniciales de las respectivas poblaciones de predador y presa se muestran en la Figura 2.7.

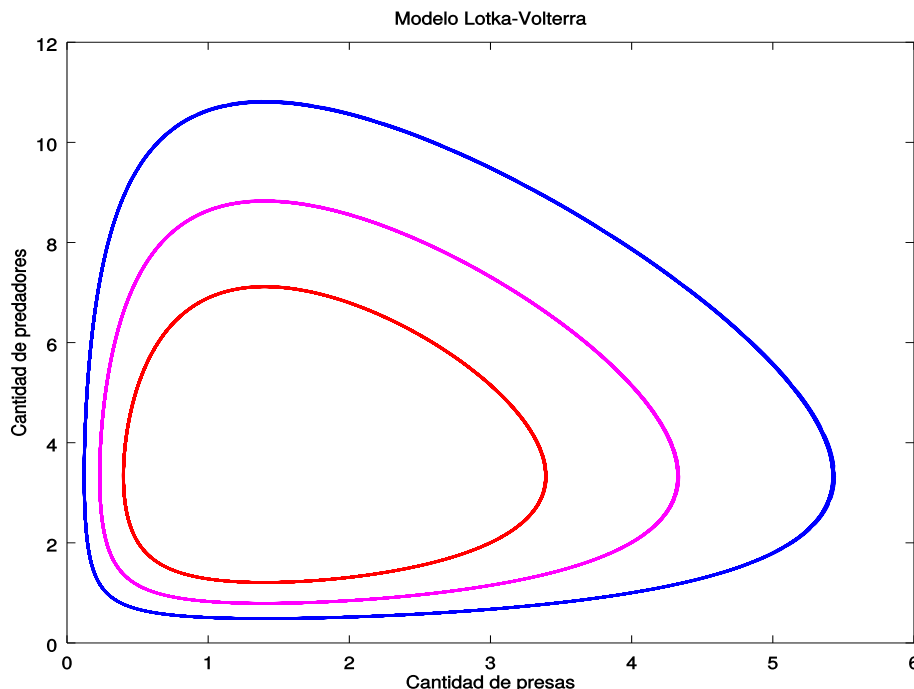


Figura 2.7: Soluciones numéricas del sistema (2.4) correspondientes a diferentes poblaciones iniciales de predador y presa. Estas soluciones se han obtenido aplicando un esquema RK-4, implementado en el integrador libre Octave.

2.4.2. Modelos predador-presa con saturación

Analicemos ahora un modelo en el que la población de predadores está en función de la densidad de la presa. El modelo anterior consideraba una función de predación sin tener en cuenta los fenómenos de saturación. Si la población de presas es muy grande, los predadores no requieren tanta eficiencia en la predación; mientras que, en el caso contrario, los predadores deben aumentar su eficiencia en la captura debido a la escasez de presas. De igual forma, si hay un número considerablemente alto de presas, es necesario también considerar los períodos de cacería.

La eficiencia unitaria de predación

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \phi(x)$$

la cual anteriormente era asumida lineal, esto es, $\phi(x) = dx$, puede modificarse de forma adecuada, por ejemplo:

$$\phi_1(x) = \frac{e}{x+f}, \quad \phi_2(x) = \frac{ex^2}{x^2+f^2}, \quad \phi_3(x) = \frac{ex}{x+f}$$

La expresión ϕ_3 es conocida como la *Ecuación del disco de Holling*, la cual resultó de un experimento en el que algunos estudiantes recogían discos esparcidos de forma aleatoria en un laboratorio y los dejaban en un recipiente alejado de ellos.

Ecuación del disco de Holling

Tomemos un sistema con una población de x presas y una población de y predadores. Se asume que la tasa de predación depende de la densidad de la población de las presas, esto es, el predador tiene una *respuesta funcional* del tipo $\phi_j(x)$ para $j = 1, 2, 3$.

En 1959, el ecólogo canadiense Crawford Stanley Holling, supuso que el predador emplea un tiempo T para dos tipos de actividades: un tiempo T_b que gasta en buscar las presas y un tiempo T_m el cual usa para manipularlas, matarlas y alimentarse de ellas; dando lugar así a la ecuación

$$T = T_b + T_m \quad (2.5)$$

Si el predador requiere en promedio un tiempo T_1 para manipular la presa y captura x_T presas durante el tiempo T , se tiene entonces que

$$T_m = x_T T_1 \quad (2.6)$$

Supongamos ahora que el proceso de captura de una presa es aleatorio y que un predador analiza, en la unidad de tiempo, un *área de búsqueda* σ y captura a todas las presas en ella. Luego de un tiempo de búsqueda T_b , un predador habrá examinado un área $A = \sigma T_b$ y habrá capturado $x\sigma T_b$ presas, donde x es la densidad de presas por unidad de área, es decir,

$$x_T = x\sigma T_b$$

obteniendo entonces que

$$T_b = \frac{x_T}{\sigma x} \quad (2.7)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.6) y (2.7) en la ecuación (2.5) y despejando x_T , tenemos que el número de presas capturadas en el intervalo de tiempo T , será

$$x_T = \frac{\sigma x T}{1 + \sigma x T_1} = \frac{T}{T_1} \frac{x}{x + f}$$

donde $f = \frac{1}{\sigma T_1}$ recibe el nombre de *densidad de saturación*.

En síntesis, la ecuación $\phi(x) = \frac{ex}{x + f}$ modela la relación entre el número de presas devoradas en un período de tiempo y la densidad de estas.

Si agregamos la respuesta funcional $\phi(x) = \frac{ex}{x + f}$ del predador al modelo ya conocido, y teniendo en cuenta también la capacidad de carga del hábitat K , obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\sigma xy}{x + f} \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \frac{\delta xy}{x + f} \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde los parámetros a, K, σ, c, δ y f son todos positivos.

Realicemos los siguientes cambios de variables con el fin de simplificar las ecuaciones anteriores:

$$\tau = at, \quad x(t) = fu(\tau), \quad y(t) = \frac{af}{\sigma}v(\tau), \quad \alpha = \frac{f}{K}, \quad \beta = \frac{c}{\delta}, \quad h = \frac{\delta}{a}, \quad C = \frac{\beta}{1-\beta}$$

obteniendo de esta forma el modelo

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1 - \alpha u) - \frac{uv}{u+1} := f(u, v) \\ \frac{dv}{d\tau} &= hv \left(\frac{u}{u+1} - \beta \right) := g(u, v) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Usemos ahora el método de las isoclinas nulas (ver Apéndice) para encontrar los puntos estacionarios del sistema (2.9). Las isoclinas nulas para u serán:

$$u = 0, \quad v = (u+1)(1 - \alpha u)$$

mientras que las isoclinas nulas para v estarán dadas por:

$$u = C, \quad v = 0$$

Los puntos estacionarios serán aquellos donde se crucen las isoclinas nulas de u y de v . Estos son:

$$(u, v)_0 = (0, 0), \quad (u, v)_1 = \left(\frac{1}{\alpha}, 0 \right), \quad (u, v)_2 = \left(\frac{\beta}{1-\beta}, \frac{1-\beta(1+\alpha)}{(1-\beta)^2} \right)$$

Tendremos ahora la matriz jacobiana dada por:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha u - \frac{v}{(u+1)^2} & -\frac{u}{u+1} \\ \frac{hv}{(u+1)^2} & h \left(\frac{u}{u+1} - \beta \right) \end{bmatrix}$$

Evaluando en el punto estacionario $(u, v)_0 = (0, 0)$, tenemos:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -h\beta \end{bmatrix}$$

Los valores propios son entonces $\lambda_1 = 1 > 0$ y $\lambda_2 = -h\beta < 0$, dado que $h, \beta > 0$. Por tanto, por Teorema 1.2.5, se sigue que el punto $(0,0)$ es inestable.

Por otra parte, al evaluar el punto estacionario $(u, v)_1 = \left(\frac{1}{\alpha}, 0 \right)$, obtenemos:

$$J\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{\alpha+1} \\ 0 & h \left(\frac{1}{\alpha+1} - \beta \right) \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios están dados por $\lambda_1 = -1 < 0$ y $\lambda_2 = h\left(\frac{1}{\alpha+1} - \beta\right)$. Como $h > 0$, entonces $h\left(\frac{1}{\alpha+1} - \beta\right) > 0$ siempre que $\frac{1}{\alpha+1} - \beta > 0$, esto es, $\frac{1}{\alpha+1} > \beta$, siguiéndose así, por Teorema 1.2.5, que el punto estacionario es inestable. Ahora, $h\left(\frac{1}{\alpha+1} - \beta\right) < 0$ siempre que $\frac{1}{\alpha+1} - \beta < 0$, es decir, $\beta > \frac{1}{\alpha+1}$, obteniendo por el mismo teorema anterior que el punto estacionario es estable. Finalmente, al evaluar el punto $(u, v)_2 = \left(\frac{\beta}{1-\beta}, \frac{1-\beta(1+\alpha)}{(1-\beta)^2}\right)$, tenemos:

$$J\left(\frac{\beta}{1-\beta}, \frac{1-\beta(1+\alpha)}{(1-\beta)^2}\right) = \begin{bmatrix} C(1-\beta-\alpha(1+\beta)) & -\beta \\ h(1-\beta-\alpha\beta) & 0 \end{bmatrix}$$

donde $C = \frac{\beta}{1-\beta}$.

Por el Criterio de Routh-Hurtwitz para sistemas de dos variables (ver Apéndice), el punto estacionario es estable si

$$-C(1-\beta-\alpha\beta-\alpha) > 0 \text{ y } h\beta(1-\beta-\alpha\beta) > 0$$

Como $h, \beta > 0$, se requiere que en esta última desigualdad $1-\beta-\alpha\beta > 0$, es decir, $0 < \beta(1+\alpha) < 1$, puesto que $\alpha > 0$.

Por otro lado, en la primera desigualdad se presentan dos casos:

1. Si $\beta < 1$, se sigue que $C = \frac{\beta}{1-\beta} > 0$ y $1-\beta(1+\alpha)-\alpha < 0$, de la cual, junto con la desigualdad $0 < \beta(1+\alpha) < 1$, se obtiene que el punto estacionario es estable si $1-\alpha < \beta(1+\alpha) < 1$.
2. Si $\beta > 1$, luego $C = \frac{\beta}{1-\beta} < 0$ y $1-\beta(1+\alpha)-\alpha > 0$, esto es, $\beta(1+\alpha) < 1-\alpha$. Como la primera condición es que $0 < \beta(1+\alpha) < 1$, entonces se debe satisfacer que $\beta(1+\alpha) < 1-\alpha < 1$. Sin embargo, si $\beta > 1$ y $0 < \alpha < 1$, no se satisface tal desigualdad, por lo tanto, el punto estacionario será inestable.

En un sentido biológico, es claro que para que dicha estabilidad se dé, β debe ser estrictamente menor que 1, a saber, $\beta = \frac{c}{\delta} < 1$ lo que implica que la tasa de muerte natural del predador c es menor que la tasa de propagación del predador en presencia de la presa δ . Esto tiene sentido dado que, en caso contrario, la población predatora se extinguirá debido a su ineficiencia para cazar.

Ejemplo 2.4.2. Consideremos el siguiente modelo predator-presa con respuesta funcional:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1-\alpha u) - \frac{uv}{u+1} \\ \frac{dv}{d\tau} &= hv\left(\frac{u}{u+1} - \beta\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

para $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,5$ y $h = 1$, el cual presenta un punto estacionario no trivial en $(u, v)_2 = \left(1, \frac{4}{3}\right)$.

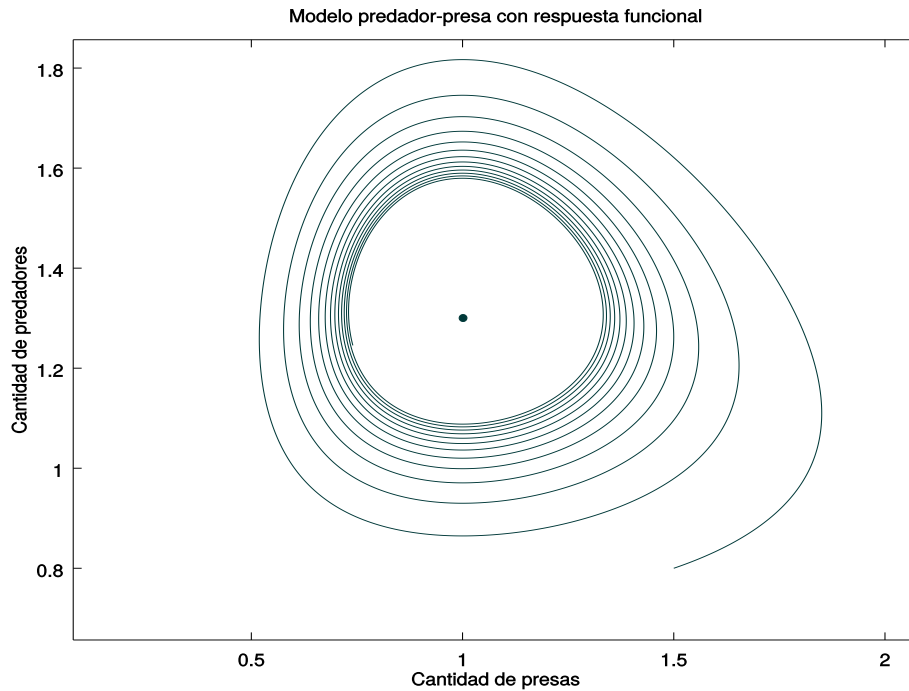


Figura 2.8: Trayectoria en el espacio de fase del sistema (2.10) con un punto estacionario no trivial en $(1, 4/3)$ representada por \bullet y condición inicial $(1.5, 0.8)$. Como $\beta = 0,5 < 1$ y $\beta(1+\alpha) = 0,65 < 1$, por lo dicho anteriormente, se tiene entonces que dicho punto estacionario es estable. En términos biológicos, las oscilaciones se estabiliza en el punto para el cual surge el efecto de saturación, esto es, en aumento de la densidad de la población de presas resulta en una proporción menor de las presas tomadas por los depredadores. Esta gráfica se ha obtenido usando RK-4 en el integrador libre Octave.

Capítulo 3

Un modelo que exhibe una bifurcación de Hopf

En este capítulo estudiaremos un artículo científico titulado *Análisis de un modelo planta-herbívoro aplicado a la interacción gramínea-bovino* de los autores Romero Leiton, Jhoana Patricia et al. [15], en el cual se presenta una bifurcación de Hopf.

En una primera parte, haremos una breve introducción biológica y una descripción de la interacción interespecífica de dos especies, una de gramínea y otra de bovinos, a través de un modelo predador-presa con respuesta funcional de Holling Tipo II. Seguidamente, analizaremos el tipo de estabilidad de los puntos estacionarios correspondientes a la extinción de ambas especies, a la existencia única de la especie gramínea y a la coexistencia de ambas especies, de cuyo análisis se obtendrá la existencia de una bifurcación de Hopf supercrítica. Finalmente, haremos algunas simulaciones numéricas con datos estadísticos obtenidos en investigaciones realizadas en las regiones Andina y Caribe de Colombia.

3.1. Introducción

Como ya sabemos, las plantas son organismos autótrofos, esto es, tienen la capacidad de sintetizar sustancias inorgánicas para realizar su proceso metabólico sin requerir de otros seres vivos. Con frecuencia, debido a que son la base de la cadena alimentaria, pueden presentarse interacciones de tipo planta-planta, planta-hongo, planta-animal y planta-microorganismo con otros seres vivos. Tales interacciones, como ya hemos visto en el capítulo anterior, pueden ser de tipo benéfico para ambas especies (simbiosis), competitiva, en la que ambas especies inhiben el crecimiento una de la otra en rivalidad por los recursos del medio y de predación, en la que una especie se beneficia al alimentarse de la otra inhibiendo su crecimiento. Nos centraremos en este último caso para la interacción planta-animal, esto es, planta-herbívoro.

En dicha interacción, la especie planta puede llegar a sufrir desde daños leves o nulos, hasta la completa extinción por acción de la especie herbívora. Un ejemplo de esto, puede verse en la interacción gramínea-bovino, en la cual, debido a factores como la ganadería intensiva y las altas radiaciones, se han venido degradando paulatinamente los pastos nativos en gran parte del Bajo

Cauca Antioqueño y las zonas al sur del departamento de Córdoba en Colombia. Desde el enfoque matemático, se han realizado estudios tanto nacionales como internacionales, que podrían contribuir a la solución del fenómeno de sobrepastoreo. Analizaremos dicho fenómeno usando un modelo predador-presa con respuesta funcional de Holling tipo II.

Denotemos por $x(t)$ y $y(t)$ las variables que representan las poblaciones de gramínea y de bovinos en un tiempo t , respectivamente. Supongamos, además, que la población de gramínea tiene un crecimiento logístico con una capacidad de carga del hábitat denotada por K . La población de gramínea disminuye por la acción del bovino a través de una respuesta funcional de Holling tipo II. Tal acción posibilita el aumento de la población bovina proporcional a una tasa β , la cual podemos interpretar como la ganancia obtenida de la gramínea consumida por el bovino. La población bovina decrece proporcional a una tasa $\alpha\beta$ considerada como tasa de saciedad, la cual corresponde al momento en que el bovino está listo para ser sacrificado o vendido. Con lo anteriormente establecido, se obtiene entonces el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{xy}{1+x} \\ \frac{dy}{dt} &= -\alpha\beta y + \beta \frac{xy}{1+x}\end{aligned}\quad (3.1)$$

con $\alpha, \beta > 0$.

La región de interés biológico para las soluciones del sistema (3.1), será el conjunto:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq K, y \geq 0; \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\beta \int_0^t (-\alpha + g(x(\tau))) d\tau} \in (0, \infty) \right\} \quad (3.2)$$

donde $g(x) = \frac{x}{1+x}$.

El sistema (3.1) está bien planteado en el sentido que las soluciones con condiciones iniciales en Ω permanecen en el conjunto para todo $t \geq 0$. En efecto, de la primera ecuación del sistema (3.1), obtenemos que

$$\frac{dx}{dt} \leq x\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

con solución $0 \leq x(t) \leq K$. Ahora, para la segunda ecuación del sistema (3.1) obtenemos la solución

$$y(t) = y(0)e^{\beta \int_0^t (-\alpha + g(x(\tau))) d\tau}$$

de lo cual, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existe sí y solo sí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\beta \int_0^t (-\alpha + g(x(\tau))) d\tau} \in (0, \infty)$$

existe. El campo vectorial definido por la ecuación (3.1) sobre $\partial\Omega$ no apunta hacia el exterior de Ω . Así, cualquier solución de (3.1) que inicie en Ω permanecerá en Ω para todo $t \geq 0$.

Encontremos ahora los puntos estacionarios del sistema (3.1), los cuales corresponden a las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{xy}{1+x} &= 0 \\ -\alpha\beta y + \beta \frac{xy}{1+x} &= 0\end{aligned}$$

el cual es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x \left[\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{y}{1+x} \right] &= 0 \\ \beta y \left[-\alpha + \frac{x}{1+x} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

usando las isoclinas nulas (ver Apéndice). Notemos que para $y = 0$, se obtiene de la primera ecuación del sistema (3.3) que

$$x \left(1 - \frac{x}{K}\right) = 0$$

cuyas soluciones estarían dadas por los valores $x = 0$ y $x = K$, obteniéndose así los puntos estacionarios $P_0 = (0, 0)$ y $P_1 = (K, 0)$ para el sistema (3.1). Ahora, si $y \neq 0$, de la segunda ecuación del sistema (3.3) tenemos que

$$\frac{x}{1+x} - \alpha = 0$$

o lo que es igual a

$$x = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

lo cual implica $0 < \alpha < 1$. Al reemplazar este valor de x en la primera ecuación del sistema (3.3) y despejar la variable y obtenemos

$$y = \frac{K - (K+1)\alpha}{K(1-\alpha)^2}$$

por tanto, el punto estacionario de coexistencia de ambas especies será

$$P_2 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{K - (K+1)\alpha}{K(1-\alpha)^2} \right) \quad (3.4)$$

el cual tiene sentido biológico sí y solo sí

$$\alpha < \frac{K}{K+1} \quad (3.5)$$

Estos resultados se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. *Existen de manera incondicional las soluciones de equilibrio $P_0 = (0, 0)$ y $P_1 = (K, 0)$ del sistema (3.1). Además, si se satisface la condición (3.5), existe un tercer punto estacionario P_2 dado por la ecuación (3.4).*

3.2. Análisis de estabilidad local

En esta sección analizaremos el tipo de estabilidad local de los puntos estacionarios P_0 , P_1 y P_2 del sistema (3.1).

Consideremos, en primer lugar, la linealización del sistema (3.1) en el punto $P_0 = (0, 0)$, cuya matriz jacobiana está determinada por:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x}{K} - \frac{y}{(1+x)^2} & -\frac{x}{1+x} \\ \frac{\beta y}{(1+x)^2} & \beta \left(\frac{x}{x+1} - \alpha \right) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Evaluando el punto P_0 en la matriz jacobiana, obtenemos:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La matriz en (3.7) posee los valores propios $\lambda_1 = 1 > 0$ y $\lambda_2 = -\alpha\beta < 0$, por tanto, como al menos un valor propio es positivo, se sigue del Teorema 1.2.5. que el punto $P_0 = (0,0)$ es inestable, más aún, es un punto de ensilladura. Esto se resume en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. *El equilibrio trivial P_0 es inestable.*

Continuemos ahora con el punto estacionario $P_1 = (K,0)$. Al evaluar dicho punto en la matriz en (3.6), obtenemos la matriz:

$$J(K,0) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{K}{1+K} \\ 0 & \beta\left(\frac{K}{K+1} - \alpha\right) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

esta matriz tiene por valores propios a $\lambda_3 = -1 < 0$ y $\lambda_4 = \beta\left(\frac{K}{K+1} - \alpha\right)$, de forma que $\lambda_4 < 0$ sí y solo sí

$$\alpha > \frac{K}{K+1} \quad (3.9)$$

de lo cual, por el Teorema 1.2.5., se sigue que el punto P_1 es asintóticamente estable. El resultado se resume en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.2. *Si se satisface (3.9), el punto P_1 es localmente asintóticamente estable en Ω .*

Por último, determinemos las condiciones con las cuales el punto estacionario P_2 definido en (3.4) es estable en Ω . Notemos que para $x \neq 0$ y $y \neq 0$, las ecuaciones de (3.3) son de la forma

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x}{K} - \frac{y}{1+x} &= 0 \\ -\alpha + \frac{x}{1+x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Al reemplazar (3.10) en (3.6) y al simplificar, obtenemos la matriz jacobiana

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} x\left(\frac{y}{(1+x)^2} - \frac{1}{K}\right) & -\frac{x}{1+x} \\ \frac{\beta y}{(1+x)^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

evaluando el punto P_2 en esta matriz obtenemos

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha[K-1-(K+1)\alpha]}{K(1-\alpha)} & -\alpha \\ \frac{\beta[K-(K+1)\alpha]}{K} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La ecuación característica para esta última matriz viene dada por

$$\lambda^2 - \text{Tra}J(P_2)\lambda + \text{Det}J(P_2) = 0,$$

donde

$$-\text{Tra}J(P_2) = \frac{\alpha[(K+1)\alpha + 1 - K]}{(1-\alpha)K} \quad \text{y} \quad \text{Det}J(P_2) = \frac{\alpha\beta[K - (K+1)\alpha]}{K}$$

De la condición (3.5), se tiene que $\text{Det}J(P_2) > 0$. Por el Criterio de Routh-Hurwitz (ver Apéndice) para que el punto P_2 sea localmente asintóticamente estable, resta ver que $\text{Tra}J(P_2) > 0$ lo cual se satisface sí y solo sí

$$\alpha > \frac{K-1}{K+1} \tag{3.13}$$

Este resultado se resume en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3. *Si se satisface la condición (3.13), entonces P_2 es localmente asintóticamente estable en Ω .*

El cuadro 3.1 sintetiza el comportamiento del sistema dinámico (3.1).

Punto Estacionario	Existencia	Estabilidad
P_0	Siempre existe	Inestable
P_1	Siempre existe	$\alpha > \frac{K}{K+1}$
P_2	$\alpha < \frac{K}{K+1}$	$\alpha > \frac{K-1}{K+1}$

Cuadro 3.1: Condiciones para la existencia y estabilidad de los puntos estacionarios del sistema (3.1).

3.3. Análisis de bifurcación y estabilidad global

Veremos ahora que existe una bifurcación de Hopf supercrítica para

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{K-1}{K+1}$$

Cuando $\alpha = \alpha_0$, el punto estacionario P_2 toma la forma

$$P_{2'} = \left(\frac{K-1}{2}, \frac{(K+1)^2}{4K} \right) \tag{3.14}$$

Evaluando este punto en la matriz jacobiana en (3.6), se obtiene

$$J(P_{2'}) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \frac{\beta}{K} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

con ecuación característica dada por $\lambda^2 + \alpha\beta/K = 0$, así los valores propios serán $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\beta/K}$ complejos conjugados puros. Por tanto, P_2 se convierte en el punto estacionario no hiperbólico $P_{2'}$. Esto da la posibilidad a la existencia de una bifurcación de Hopf. Para verificar las hipótesis del Teorema de Hopf, se lleva el punto estacionario $P_{2'}$ al origen, tomando las coordenadas $u = x - a$ y $w = y - b$, donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{K-1}{2} \\ b &= \frac{(K+1)^2}{4K} \end{aligned} \quad (3.16)$$

con estas nuevas coordenadas, el sistema inicial (3.1) se transforma en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (u+a)\left(1 - \frac{u+a}{K}\right) - \frac{(u+a)(w+b)}{1+u+a} = \phi(u, w) \\ \dot{w} &= -\alpha\beta(w+b) + \beta\frac{(u+a)(w+b)}{1+u+a} = \psi(u, w) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Al linealizar el sistema (3.17) se obtiene una matriz jacobiana dada por

$$J(u, w) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2(u+a)}{K} - \frac{(w+b)}{(1+u+a)^2} & -\frac{u+a}{1+u+a} \\ \frac{\beta(w+b)}{(1+u+a)^2} & -\alpha\beta + \beta\frac{(u+a)}{1+u+a} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

evaluando el punto (0, 0) en la anterior matriz tenemos

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2a}{K} - \frac{b}{(1+a)^2} & -\frac{a}{1+a} \\ \beta\frac{b}{(1+a)^2} & -\alpha\beta + \beta\frac{a}{1+a} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

al reemplazar los valores a y b de (3.16) en (3.19), obtenemos la matriz

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{(K+1)^2\alpha}{K} & -\alpha \\ \frac{\beta}{K} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

con ecuación característica dada por

$$\lambda^2 - \text{Tra}J(0, 0)\lambda + \text{Det}J(0, 0) = 0,$$

donde

$$\text{Tra}J(0, 0) = 2 - \frac{(K+1)^2\alpha}{K} \quad \text{y} \quad \text{Det}J(0, 0) = \frac{\alpha\beta}{K}$$

Como $\text{Det}J(0, 0) > 0$, los valores propios de la matriz en (3.20) son imaginarios puros sí y solo sí

$$\mu(\alpha) = \text{Tra}J(0, 0) = 2 - \frac{(K+1)^2\alpha}{K} = 0$$

de esto se tiene que

$$\alpha = \frac{2K}{(K+1)^2} = \alpha_0$$

como

$$\mu'(\alpha_0) = -\frac{(1+K)^2}{K} \neq 0,$$

se tiene entonces que el sistema (3.17) exhibe una bifurcación de Hopf alrededor del origen y, por tanto, el sistema inicial (3.1) presenta una bifurcación de Hopf alrededor del punto estacionario de coexistencia P_2 . Ahora, por un proceso similar al hecho en [9] pág. 101, se obtiene que el primer coeficiente de Lyapunov $l_1(0)$ está dado por

$$\begin{aligned} l_1(0) = & -\frac{\alpha^2}{2\omega_0^2(1+\alpha\gamma)} \left(\frac{8\beta}{K(K+1)^2} + \frac{4\alpha\beta^2}{K} + \frac{8}{(K+1)^2} \right) \\ & -\frac{\alpha^2\omega_0}{2\omega_0^2(1+\alpha\gamma)} \left(\frac{24\alpha\beta}{K^2(K+1)^2} + \frac{32\beta}{(K+1)^4} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\beta}{(K+1)^2}} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{\beta}{K}$$

como todos los términos son positivos, tenemos entonces que $l_1(0)$ definido en (3.21) es negativo y, por ende, la bifurcación de Hopf es supercrítica. Ahora, cuando

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{K}{K+1}$$

el punto estacionario P_2 toma la forma

$$P_{2''} = (K, 0) = P_1$$

que al evaluarlo en la matriz jacobiana (3.6) obtenemos

$$J(P_{2''}) = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

con valores propios $\lambda = -1$ y $\lambda = 0$, tal que P_2 se convierte en el punto estacionario no hiperbólico $P_{2''} = P_1$. En la figura 3.1. se muestra un diagrama de bifurcación donde se observa que tanto P_1 como P_2 son inestables cuando $\alpha < \alpha_0$, P_2 es el único nodo para $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ y P_1 es el único nodo cuando $\alpha > \alpha_1$. Por tanto, dada la inestabilidad de los puntos P_0 , P_1 y P_2 para $\alpha < \alpha_0$, se sigue por el Teorema de Poincaré-Bendixon (ver Apéndice), que existe un ciclo límite estable cuando $\alpha < \alpha_0$. Lo anterior, conlleva a la presencia en $\alpha = \alpha_0$ de una bifurcación de Hopf supercrítica decreciente, esto es, P_2 estable se bifurca en un ciclo límite estable cuando $\alpha = \alpha_0$ a medida que el parámetro α decrece. Por último, para la región (α_0, α_1) , el punto P_2 es el único estable y dado que no existen órbitas cerradas, se sigue luego que P_2 es globalmente estable en (α_0, α_1) . Análogamente, se obtiene que P_1 es globalmente estable en la región (α_1, ∞) .

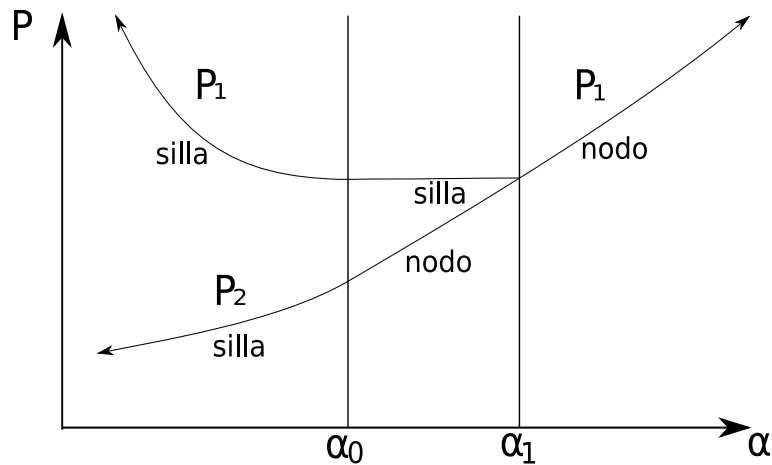


Figura 3.1: Diagrama de bifurcaciones de los puntos estacionarios con el parámetro α .

3.4. Simulaciones numéricas

Veamos ahora algunas simulaciones numéricas y sus gráficas las cuales ilustran el crecimiento de la población bovina alimentada con *Panicum maximun*, también conocido como pasto guinea, el cual corresponde a un tipo de gramínea frecuentemente cultivado en el Bajo Cauca antioqueño, por un tiempo inferior o igual a 24 horas por día. Dicha gramínea se caracteriza por soportar un pastoreo intensivo con un buen mantenimiento de la fertilidad del suelo y se recomienda retirar el pastoreo cuando este alcanza los 20 centímetros de altura.

También, se considera que el parámetro α tiene pequeñas variaciones de un tiempo de 24 horas aproximadamente ($\alpha \in [0,9994720, 0,999479]$) y la capacidad de carga K del pasto guinea se mide en tonelada por hectárea de materia seca (pasto deshidratado)[1]. Todos estos valores se resumen en el siguiente cuadro:

Parámetros	Definición	Valor	Referencias
K	Capacidad de carga del pasto guinea	3.787	[1, 10]
β	Tasa de transporte de pasto guinea	443gr/día	[1, 10]
$\alpha = \alpha_0$	Tiempo de alimentación	0,99947201	Estimado

Cuadro 3.2: Valores de α , β y K para el sistema (3.1).

Todas las soluciones numéricas a continuación, fueron reproducidas de manera independiente a la publicación, pero con los mismos valores de los parámetros, usando un método de Runge-Kutta de orden 4 con el software libre Octave.

Las gráficas de la Figura 3.2. fueron realizadas para diferentes valores de α . Podemos ver en ellas el comportamiento en espiral para $\alpha = \alpha_0$ y la solución de coexistencia para $\alpha > \alpha_0$, los cuales concuerdan con los resultados teóricos anteriormente obtenidos.

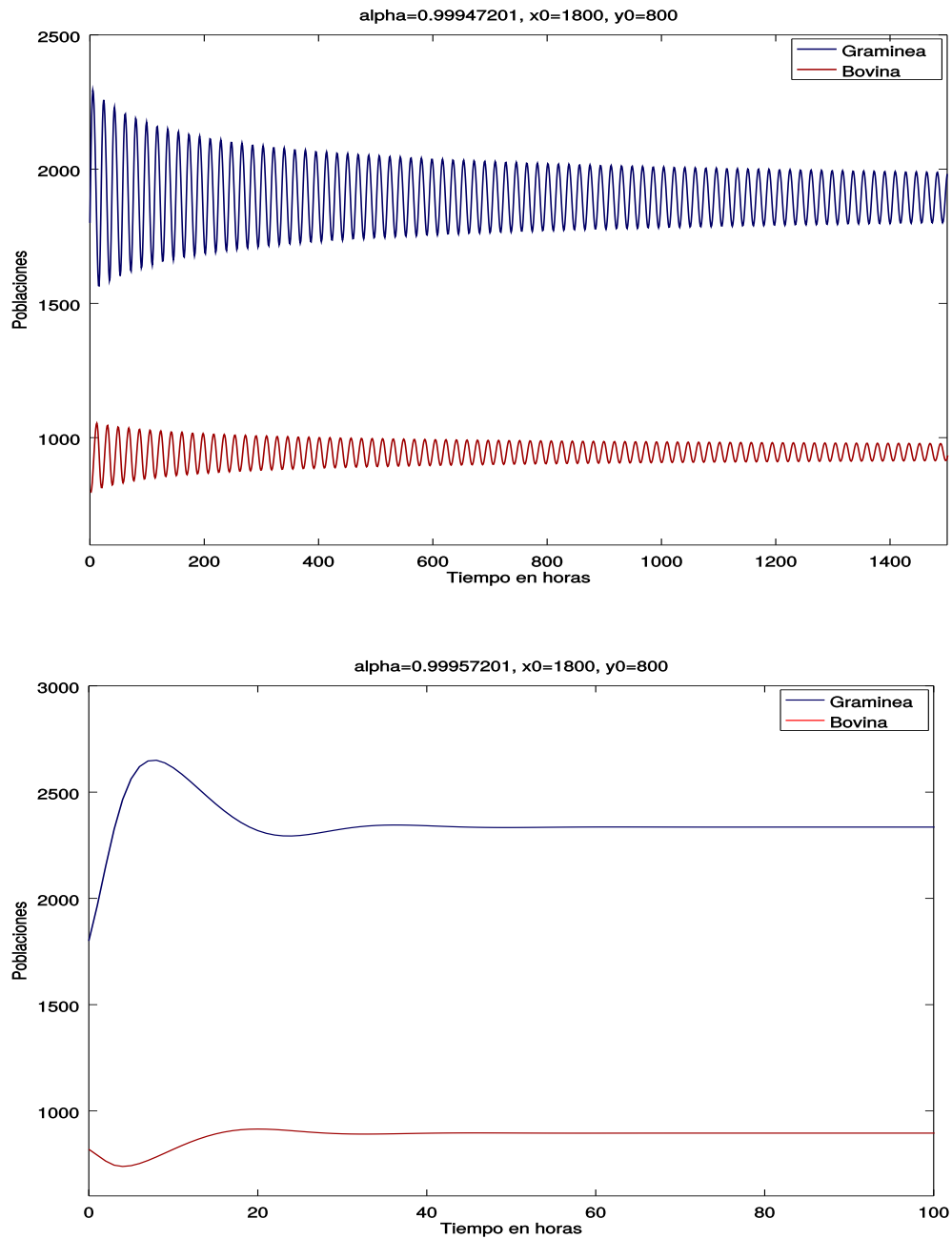


Figura 3.2: Una variación sobre el parámetro de bifurcación $\alpha=0.99947201$, con valores iniciales de las poblaciones gramínea y bovina de $x_0=1800$ y $y_0=800$, respectivamente.

En la Figura 3.3, dada por los datos del Cuadro 3.2, puede observarse una espiral débil, lo cual significa que las poblaciones tienden a alcanzar su valor de coexistencia de una forma lenta.

Cuando la población bovina es dejada en su zona de pastoreo por un tiempo mayor a α_0 ($\alpha = 0,999479$), surge un foco atractor (espiral) como puede verse en la Figura 3.4, lo cual indica que con este tiempo de alimentación la población bovina y gramínea buscan alcanzar su valor de coexistencia en un tiempo menor al caso anterior, esto es, la gramínea será constante y solo podrá soportar una cantidad constante de la población bovina.

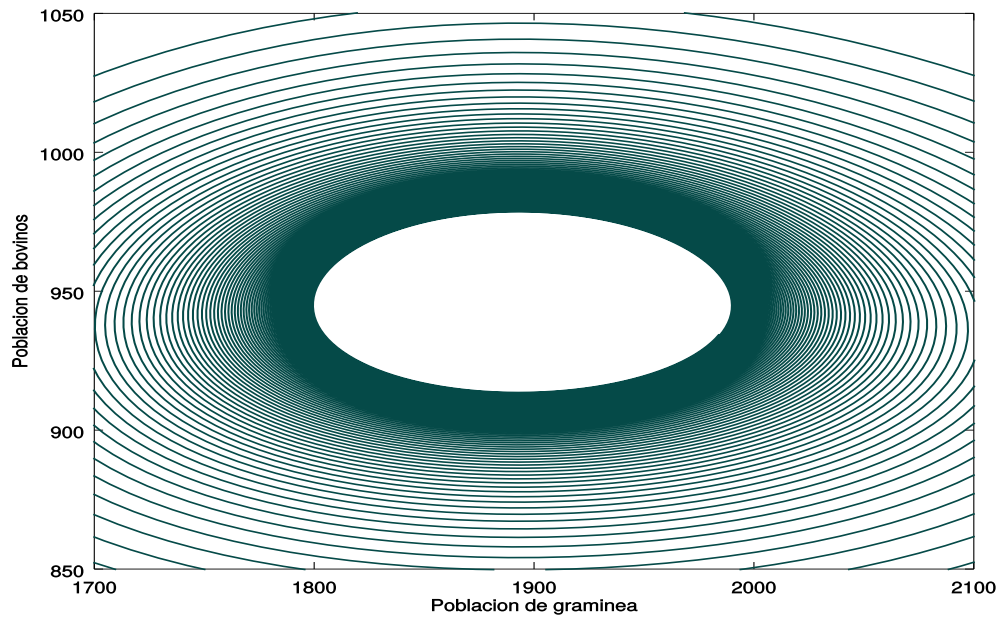


Figura 3.3: Espiral débil: alimentación con pasto guinea por un tiempo α_0 (24 horas aprox.), con valores iniciales de las poblaciones gramínea y bovina de $x_0=1800$ y $y_0=800$, respectivamente.

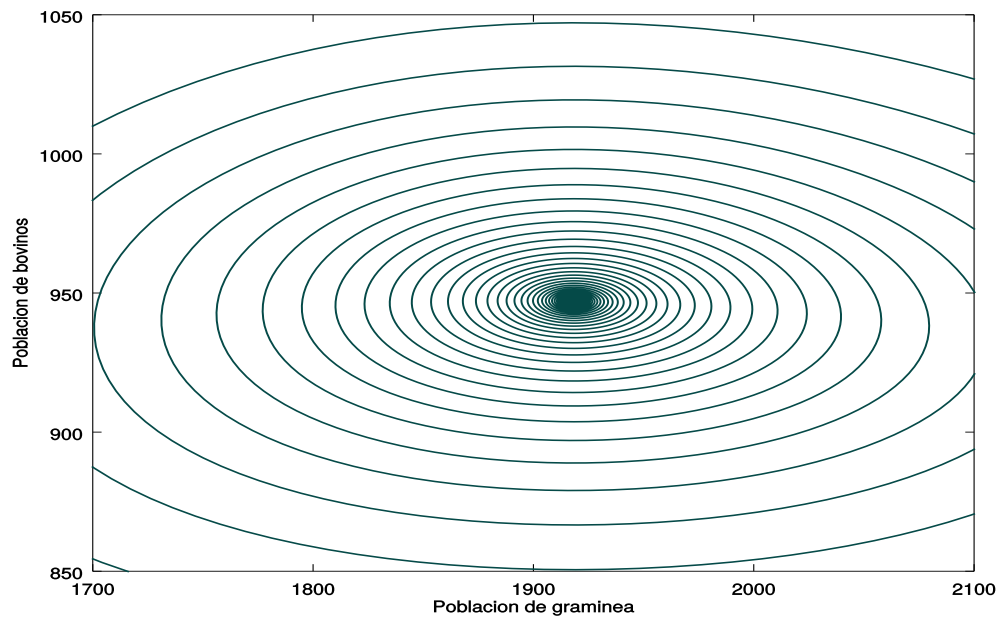


Figura 3.4: Espiral: alimentación con pasto guinea por un tiempo mayor a α_0 , con valores iniciales de las poblaciones gramínea y bovina de $x_0=1800$ y $y_0=800$, respectivamente.

Por último, en la Figura 3.5 se observa el surgimiento de un foco repulsor con ciclo límite estable (órbita), lo cual significa que la población bovina es dejada en pastoreo por un tiempo menor a α_0 ($\alpha = 0,9994720$), ambas especies coexisten de forma periódica, lo cual indica que hay un balance entre los bovinos y la gramínea, es decir, los bovinos consumirán la suficiente gramínea o la gramínea alcanzará la altura mínima que le permita regenerarse y, mientras tanto, los bovinos

buscarán otra fuente de alimentación hasta que la gramínea obtenga su altura máxima para permitir el pastoreo nuevamente y así repetir este proceso una y otra vez.

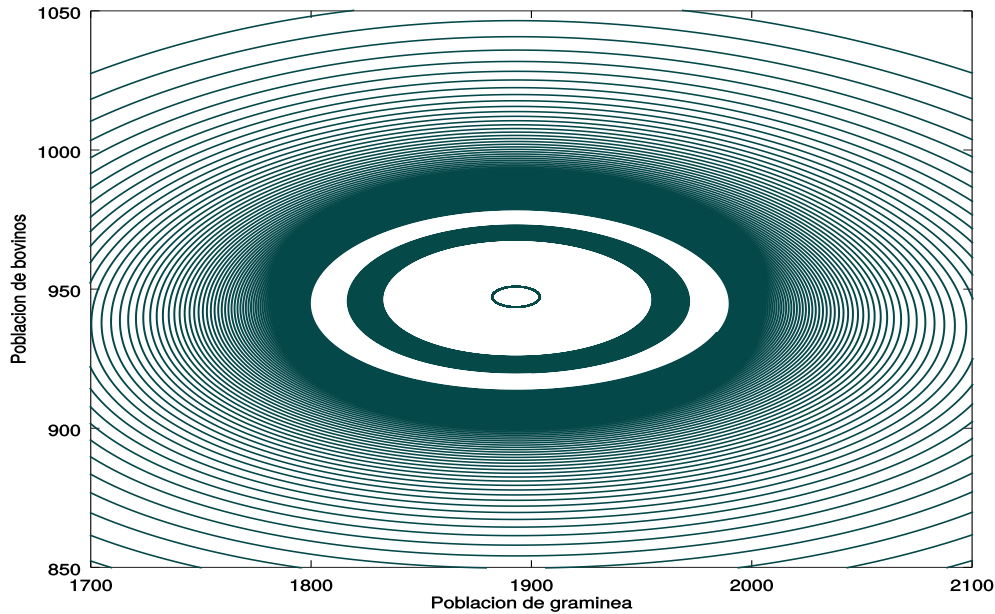


Figura 3.5: Órbita: alimentación con pasto guinea por un tiempo menor a α_0 , con valores iniciales de las poblaciones gramínea y bovina de $x_0=1800$ y $y_0=800$, respectivamente.

3.5. Conclusiones

En el artículo se presentó un modelo matemático sobre una interacción de tipo predador-presa, específicamente, una especie gramínea (planta) y una especie bovina (hervívoro), con respuesta funcional de Holling tipo II.

Cualitativamente, se determinaron tres puntos estacionarios para el sistema dados por el punto estacionario trivial $P_0 = (0, 0)$, el punto dado por la extinción de la población bovina $P_1 = (K, 0)$ y el punto estacionario correspondiente a la coexistencia de ambas poblaciones $P_2 = (\alpha/(1-\alpha), (K - (K+1)\alpha)/(K(1-\alpha)^2)$.

Tomando α como parámetro de bifurcación, se demostró la existencia de una bifurcación de Hopf supercrítica para el punto estacionario P_2 cuando $\alpha = \alpha_0 = (K-1)/(K+1)$, mientras, por otro lado, para $\alpha = \alpha_1 = K/(K+1)$ el punto de coexistencia P_2 se bifurca hacia el punto estacionario P_1 .

De las simulaciones numéricas hechas con la especie gramínea *Panicum maximun*, se determina que es más recomendable realizar el pastoreo del ganado bovino por un tiempo menor a 24 horas, dado que esto permite que la gramínea pueda regenerarse en un tiempo prudencial. Si este tiempo es superado, los resultados muestran un umbral el cual permitirá alimentar una población de bovinos constante hasta llegar al punto máximo o capacidad de carga.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Isoclinas

Consideremos un sistema con dos variables x e y , dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde f y g son funciones continuas reales.

Las isoclinas en x e y del sistema (A.1) están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = \alpha \text{ (isoclina para } x\text{)} \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = \beta \text{ (isoclina para } y\text{)}\end{aligned}$$

con α y β constantes.

Definición A.1.1 (Isoclina nula). *Una isoclina nula de x (o de y) es una curva en el espacio fase xy para el cual la tasa de crecimiento para ambas variables es cero, esto es,*

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 0 \text{ (isoclina para } x\text{)} \\ g(x, y) &= 0 \text{ (isoclina para } y\text{)}\end{aligned}$$

Las isoclinas nulas se caracterizan por:

1. Los puntos (x, y) donde se cruza una isoclina nula de x con una isoclina nula de y , son puntos estacionarios del sistema.
2. Cualquier trayectoria del sistema en el espacio de fase cruza las isoclinas nulas en ángulos rectos.
3. Las isoclinas nulas representan la frontera de las regiones en las que x e y crecen o decrecen.

Observación A.1.2. *Los conceptos de isoclina e isoclina nula se pueden generalizar para un sistema de n variables.*

A.2. Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

El Criterio de Routh-Hurwitz es un método que nos permite determinar la estabilidad de un sistema lineal (o no lineal en caso de que este ya esté linealizado), de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyo fin es establecer el signo de la parte real de los valores propios de la matriz de coeficientes asociada al sistema lineal, sin necesidad de calcularlos explícitamente.

Definición A.2.1 (Determinantes o menores de Hurwitz). *Para el polinomio $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n$, los determinantes o menores de Hurwitz se definen como*

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \\ &\vdots = \dots \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Teorema A.2.2 (Criterio de Routh-Hurwitz). *Sea $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n$ el polinomio característico de la matriz jacobiana de coeficientes asociada al sistema lineal $J(E)$, donde E corresponde a un punto estacionario de un sistema de ecuaciones diferenciales. Todas las raíces de $p(\lambda)$ tienen parte real negativa si todos los determinantes de Hurwitz dados en la Definición A.2.1 son positivos. Entonces el punto estacionario es asintóticamente estable.*

Demostración. La prueba puede verse en [11]. □

A.3. Teorema de Poincaré-Bendixson

El Teorema de Poincaré-Bendixson nos permite establecer la existencia de órbitas cerradas en sistemas particulares. Este resultado, explica por qué no existen trayectorias caóticas en sistemas dinámicos autónomos de tiempo continuo en el plano.

Teorema A.3.1 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Consideremos un sistema con dos variables x e y , dado por:*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{A.2}$$

donde f y g son funciones continuas reales y supongamos, además, que se dan las siguientes condiciones:

- R es un subconjunto cerrado y acotado del plano de fase x - y .
- El sistema (A.2) es un campo vectorial continuamente diferenciable sobre un conjunto abierto que contiene a R .
- R no contiene puntos estacionarios.
- Existe una trayectoria C que está 'confinada' en R , en el sentido de que inicia en R y permanece en R para todos los futuros tiempos t .

Entonces, o la trayectoria C es una órbita cerrada, o esta sigue en forma de espiral hacia una órbita cerrada cuando $t \rightarrow \infty$. En cualquiera de estos dos casos, R contiene una órbita cerrada (periódica).

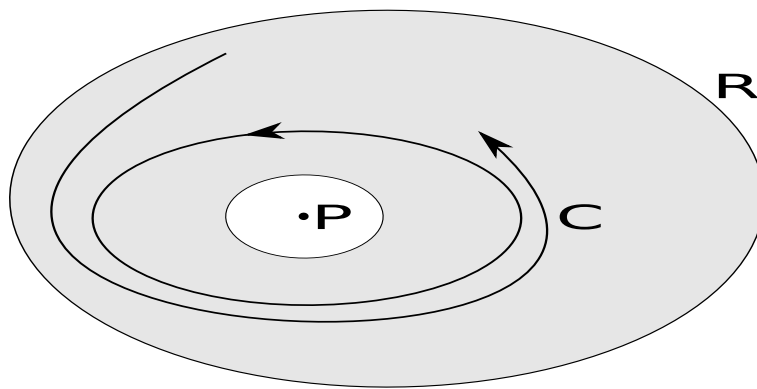


Figura A.1: La región R tiene forma anillada dado que cualquier órbita cerrada debe encerrar un punto estacionario P , sin embargo, P no puede estar dentro de la región R .

Demostración. La prueba puede verse en [17].

□

Apéndice B

Métodos numéricos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

A pesar de que es posible obtener la solución para algunas ecuaciones diferenciales ordinarias, existen muchas ecuaciones para las cuales obtener su solución solo es posible usando aproximaciones numéricas, las cuales resultan siendo una alternativa poderosa para conocer el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.

B.1. Método de Euler

También llamado *Método de Euler explícito*, es el método numérico más simple para resolver problemas de valor inicial.

Sea

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

un P.V.I. con solución única en $[a, b]$. Hacemos una partición del intervalo en N trozos equiespaciados $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ con $a = t_0$ y $b = t_N$, donde la variable t tomará valores. Cada nodo t_i , $i = 0, \dots, N$ satisface que $t_{i+1} = t_i + h$, donde h es llamado *paso de la partición*. Así, $t_i = t_0 + ih$ y $N = \frac{b-a}{h}$.

Consideremos el P.V.I. en los nodos de la partición:

$$\begin{cases} \dot{x}(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h} = f(t_i, x(t_i)), & t_i \in \{t_0, t_1, \dots, t_N\} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Denotemos por $x(t_i)$ a la solución exacta del P.V.I. en el nodo t_i y por $x_{(i)}$ a la solución aproximada del P.V.I. en el nodo t_i .

El método de Euler consiste en eliminar el límite anterior en los nodos de la partición:

$$\begin{cases} \frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h} \approx f(t_i, x(t_i)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde x_0 es el dato inicial exacto en t_0 . Reescribiendo esto en términos de las soluciones aproximadas, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{x_{(i+1)} - x_{(i)}}{h} \approx f(t_i, x_{(i)}) \\ x_0 = \zeta_0 \end{cases}$$

donde ζ_0 es el dato inicial aproximado a x_0 . Euler consideró entonces tomar esta aproximación como una igualdad y expresarla como una solución recursiva:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hf(t_i, x_i) \\ x_0 &= \zeta_0 \end{aligned}$$

B.2. Métodos para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

El P.V.I. para un sistema de m ecuaciones diferenciales de primer orden tiene la forma general:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_m), & x_1(a) &= x_{1,0}, \\ &\vdots & & \\ \dot{x}_m &= f_m(t, x_1, \dots, x_m), & x_m(a) &= x_{m,0} \end{aligned} \tag{B.1}$$

buscamos las funciones x_1, x_2, \dots, x_m en algún intervalo $a \leq t \leq b$. Esta forma general es organizada usando vectores columna. Si denotamos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{m,0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} f_1(t, z_1, \dots, z_m) \\ \vdots \\ f_m(t, z_1, \dots, z_m) \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$. Así, el sistema (B.1) puede ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_0$$

Consideremos el método de Euler para un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Aplicando expansión de Taylor al término $x_i(t_i + h)$ para $i = 1, 2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t_{i+h}) &= x_1(t_i) + hf_1(t_i, x_1(t_i), x_2(t_i)) + \frac{h^2}{2}x_1''(\delta_i), \\ x_2(t_{i+h}) &= x_2(t_i) + hf_2(t_i, x_1(t_i), x_2(t_i)) + \frac{h^2}{2}x_2''(\sigma_i) \end{aligned}$$

para algún $\delta_i, \sigma_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Quitando los términos de error, obtenemos el método de Euler para un sistema de dos ecuaciones para $i \geq 0$:

$$\begin{aligned} z_{1,i+1} &= z_{1,i} + hf_1(t_i, z_{1,i}, z_{2,i}), \\ z_{2,i+1} &= z_{2,i} + hf_2(t_i, z_{1,i}, z_{2,i}) \end{aligned}$$

en forma vectorial,

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{z}_i + h\mathbf{f}(t_i, \mathbf{z}_i), \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0$$

B.3. Método de Runge-Kutta

Son una familia de métodos no-lineales, donde la no-linealidad viene dada por la evaluación de la función $f(t, x)$ en puntos diferentes de la partición. En general, estos métodos pueden escribirse de la siguiente manera:

$$x_{i+1} = x_i + h\phi(h)$$

con $\phi(h)$ de la forma

$$\sum_{k=1}^n A_k f(\delta_k, \gamma_k)$$

donde A_k es constante, n corresponde al orden del método y, en general, los valores de δ_k y γ_k serán diferentes de t_k y x_k , respectivamente.

El más famoso de la familia Runge-Kutta, es el de orden 4. Para el P.V.I. usual, su método numérico está dado por:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

donde

$$\begin{aligned} F_1 &= hf(t_i, x_i); \\ F_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}\right); \\ F_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}\right); \\ F_4 &= hf(t_i + h, x_i + F_3) \end{aligned}$$

B.4. Códigos del método de Euler (explícito) y método de Runge-Kutta para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Algoritmo B.1: Método de Euler (explícito) implementado en el software libre Octave

- 1 **Datos de entrada:** f : función definida aparte correspondiente al sistema de EDOs, a : nodo temporal izquierdo, b : nodo temporal derecho, x_0 : vector de valores iniciales, N : número de nodos de la partición temporal.
- 2 **Datos de salida:** E : matriz con los valores correspondientes de t y x .

```

1: function  $E = eulersistedo(f, a, b, x_0, N)$ 
2:  $h = (b - a)/N$ ;
3:  $t = a : h : b$ ;
4:  $l = length(x_0)$ ;
5:  $x = zeros(l, N + 1)$ ;
6:  $x(:, 1) = x_0$ ;
7: for  $i=1:N$  do
8:    $x(:, i + 1) = x(:, i) + h * feval(f, t(i), x(:, i))$ ;
9: end for
10: end

```

Algoritmo B.2: Método de Runge-Kutta de orden 4 implementado en el software libre Octave

- 1 **Datos de entrada:** f : función definida aparte correspondiente al sistema de EDOs, a : nodo temporal izquierdo, b : nodo temporal derecho, x_0 : vector de valores iniciales, N : número de nodos de la partición temporal.
- 2 **Datos de salida:** E : matriz con los valores correspondientes de t y x .

```

1: function  $E = runkutvar4(f, a, b, x_0, N)$ 
2:  $h = (b - a)/N$ ;
3:  $t = a : h : b$ ;
4:  $l = length(x_0)$ ;
5:  $x = zeros(l, N + 1)$ ;
6:  $x(:, 1) = x_0$ ;
7: for  $i=1:N$  do
8:    $F1 = h * feval(f, t(i), x(:, i))$ ;
9:    $F2 = h * feval(f, t(i) + 0,5 * h, x(:, i) + 0,5 * F1)$ ;
10:   $F3 = h * feval(f, t(i) + 0,5 * h, x(:, i) + 0,5 * F2)$ ;
11:   $F4 = h * feval(f, t(i) + h, x(:, i) + F3)$ ;
12:   $x(:, i + 1) = x(:, i) + (1/6) * (F1 + 2 * F2 + 2 * F3 + F4)$ 
13: end for
14: end

```

Bibliografía

- [1] Cuesta Muñoz P. A. y col. «Estrategias de manejo de praderas para mejorar la productividad en la ganadería en las regiones Caribe y Valles Interandinos». En: *P. Cuesta(Ed.) Producción y utilización de recursos forrajeros en sistemas de producción bovina en el Caribe y valles interandinos*. Corporación Colombiana de Investigación Agropecuaria(Corpoica) (2006), págs. 43-64.
- [2] Kendall Atkinson, Weimin Han y David Stewart. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., 2009.
- [3] José Fernando Isaza Delgado y Diógenes Campos Romero. *Ecología: una mirada desde los sistemas dinámicos*. Pontificia Universidad Javeriana, 2006.
- [4] Jaime Escobar. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en Maple*. Universidad de Antioquia, 2008.
- [5] M. Farkas. *Periodic Motions*. Applied Mathematical Sciences vol 104. Springer, New York, 1994.
- [6] John Guckenheimer y Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [7] Jack K Hale y Hüseyin Koçak. *Dynamics and bifurcations*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] Frank C Hoppensteadt y Charles S Peskin. *Mathematics in medicine and the life sciences*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] Y.A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Applied Mathematical Sciences vol 112. Springer, New York, 1998.
- [10] L. Mahecha, L.A. Gallego y F.J. Peláez. «Situación actual de la ganadería de carne en Colombia y alternativas para impulsar su competitividad y sostenibilidad». En: *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, pags. 213-225 15(2) (2002).
- [11] Gjerrit Meinsma. «Elementary proof of the Routh-Hurwitz test». En: *Systems & Control Letters* (1995).
- [12] Jorge L Moiola y Guanrong Chen. *Hopf bifurcation analysis: a frequency domain approach*. World Scientific, 1996.
- [13] James R. Munkres. *Analysis on manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, 1991.
- [14] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2013.

- [15] Jhoana Romero Leiton y col. «Análisis de un modelo planta-hervíboro aplicado a la interacción gramínea-bovino». En: *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* 23(2) (2016), págs. 489-506.
- [16] Gilbert Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Brooks Cole, 1988.
- [17] Steven H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Perseus Books Group, 1994.
- [18] Stephen Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer Science & Business Media, 2003.