

Método de los elementos finitos y su aplicación a la ecuación del calor

Alexander Montoya Ocampo

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Asesora:
PhD. Catalina Dominguez García

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
El Carmen de Viboral (Ant.) Colombia
2020

Dedico este trabajo:

A mis padres, que los quiero.

*Y a todos aquellos que hicieron
posible este viaje.*

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por haberme permitido culminar satisfactoriamente este trabajo y por todas las vivencias por las que he tenido la oportunidad de pasar durante la realización de esta carrera. Agradezco profundamente a mis padres por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida así como por toda la preocupación que han mostrado por mí en todo momento. Agradezco a mis compañeros de estudio, a mis profesores, a mis familiares y demás conocidos por haber hecho parte de este viaje junto a mí. Doy un agradecimiento especial a la profesora Catalina por toda su paciencia y por su guía en el desarrollo de este trabajo, le deseo felicidad a ella y a los suyos y que el pequeño nuevo miembro de su familia crezca sano y fuerte. Agradezco también a Don Alfonso y Doña Luz Helena por toda la ayuda que me han brindado y los aportes que han hecho a mi proyecto de vida.

Por último, pero no menos importante, agradezco a todos aquellos, conocidos o no, que estén o que ya no estén, que en algún momento han hecho un aporte a mi formación como persona, después de todo, es gracias al aporte de todos ellos que he llegado a ser, precisamente, quien soy ahora y quien seré en el futuro.

Resumen

El principal objetivo de este trabajo es analizar y comprender la teoría del *método de los elementos finitos (FEM)* y aplicarla a la Ecuación del calor tanto en una como en dos dimensiones. Para lograr esto estudiaremos primero la teoría de FEM para la Ecuación de Poisson y después aplicaremos lo aprendido en el estudio de la Ecuación del calor. Definiremos y analizaremos diversos *problemas variacionales* asociados a nuestras ecuaciones de interés, cuyas soluciones resultan útiles para aproximar las soluciones clásicas de las mismas usando métodos discretos. Para el caso de la Ecuación del calor discretizaremos la variable temporal y utilizaremos los métodos de Forward Euler, Backward Euler y Crank-Nicolson para hallar la aproximación deseada.

Derivaremos, también, cotas para el error obtenido tras la aplicación de FEM así como ordenes de convergencia para los mismos, además, daremos los pseudo-códigos de los algoritmos que permiten la implementación de FEM en Matlab/Octave y bajo los cuales podremos verificar los resultados teóricos.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
1. Preliminares	1
1.1. Espacios de funciones	1
1.2. Algunos resultados importantes	4
2. Problema estacionario: Ecuación de Poisson	5
2.1. Problema clásico	5
2.2. Problema variacional	6
2.3. Método de elementos finitos	10
2.4. Problema variacional discreto	15
2.5. Análisis del error	17
2.6. Implementación numérica de FEM	19
2.6.1. Cálculo de la matriz de rigidez R	19
2.6.2. Cálculo del vector de carga F	24
2.7. Resultados numéricos	29
3. Ecuación del calor dependiente del tiempo	34
3.1. Problema clásico	34
3.2. Problema variacional	36
3.3. Problema variacional semi-discreto	37
3.4. Problema variacional totalmente discreto	39
3.4.1. Método de Forward Euler	40
3.4.2. Método de Backward Euler	42
3.4.3. Método de Crank-Nicolson	44
3.5. Análisis del error	45
3.6. Implementación numérica de FEM	53
3.6.1. Cálculo de la matriz de masa M	53
3.6.2. Cálculo del vector G^q	56
3.7. Resultados numéricos	59
Bibliografía	66

Índice de figuras

2.1. Triangulación de un dominio en dos dimensiones.	11
2.2. Función base unidimensional.	11
2.3. Función base bidimensional.	12
2.4. Elemento e_k y funciones base locales en una dimensión.	13
2.5. Elemento e_k y funciones base locales en dos dimensiones.	14
2.6. Elemento e_k	21
2.7. Transformación r	25
2.8. Transformación r_1	26
2.9. Transformación r_2	26
2.10. Transformación r_3	27
2.11. Función u_h con $h = 1/32$, ejemplo 1.	31
2.12. Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, ejemplo 1.	32
2.13. Función u_h con $h = 1/32$, ejemplo 2.	33
2.14. Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, ejemplo 2.	33
3.1. Transformación r_4	57
3.2. Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, Backward Euler, ejemplo 3.	61
3.3. Función u_h^J con $h = \Delta t = 1/32$, ejemplo 3.	62
3.4. Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, Crank-Nicolson, ejemplo 3.	62
3.5. Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, Backward-Euler, ejemplo 4.	64
3.6. Función u_h^J con $h = \Delta t = 1/32$, ejemplo 4.	65
3.7. Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, Crank-Nicolson, ejemplo 4.	65

Índice de cuadros

2.1. FEM para la ecuación de Poisson 1D.	30
2.2. FEM para la ecuación de Poisson 2D.	32
3.1. FEM y Backward Euler para la ecuación del calor 1D.	60
3.2. FEM y Crank-Nicolson para la ecuación del calor 1D.	61
3.3. FEM y Backward Euler para la ecuación del calor 2D.	63
3.4. FEM y Crank-Nicolson para la ecuación del calor 2D.	64

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo enunciamos algunas definiciones y teoremas sin demostración que nos serán de utilidad a lo largo del texto.

1.1. Espacios de funciones

Comenzamos definiendo los espacios de funciones que utilizaremos habitualmente.

Definición 1.1 (Frontera de Lipschitz). *Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R}^d para d un entero positivo. Decimos que Ω tiene frontera de Lipschitz si existe un cubrimiento abierto finito $\{O_i\}$, $i = 1, \dots, m$, de $\partial\Omega$ tal que, para todo i , $\partial\Omega \cap O_i$ es la gráfica de una función de Lipschitz y $\Omega \cap O_i$ está en un lado de esa gráfica.*

De aquí en adelante tomaremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ como un *dominio con frontera de Lipschitz*, esto es, Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^d abierto, conexo y acotado con frontera de Lipschitz.

Recordemos que un espacio vectorial H con producto interior $(\cdot, \cdot)_H$ se dice que es un espacio de Hilbert si es completo respecto a la norma inducida $\|\cdot\|_H := \sqrt{(\cdot, \cdot)_H}$.

Para $1 \leq p < \infty$, definimos los *espacios de Lebesgue* como

$$L_p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

$L_p(\Omega)$ es un espacio de Banach con norma dada por

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = 2$, obtenemos el espacio de funciones *cuadrado integrables* $L_2(\Omega)$, el cual es un espacio de Hilbert con producto interior dado por

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Introducimos ahora la notación multi-índice para derivadas parciales (ver [1]). Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}$ un multi-índice. Se define la longitud de α por

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

Para $\phi \in C(\Omega)$ con variables x_1, \dots, x_d definimos la derivada parcial $D^\alpha \phi$ como

$$D^\alpha \phi := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} \phi,$$

siempre que las derivadas parciales involucradas existan.

Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω .

Definimos el conjunto de las funciones localmente integrables por

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{f \mid f \in L_1(K), \forall K \subseteq \Omega \text{ con } K \text{ compacto}\}.$$

Decimos que $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ tiene *derivada parcial débil*, $D_\omega^\alpha f$, si existe $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Si tal g existe, es única y, en este caso, definimos $D_\omega^\alpha f := g$.

En particular, si $\alpha = (0, \dots, 0)$, entonces $D_\omega^\alpha f = f$ para cada $f \in L_{loc}^1(\Omega)$.

Sea $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ y supongamos que la derivada débil $D_\omega^\alpha f$ existe para todo $|\alpha| \leq 2$, definimos el vector *gradiente* y el *laplaciano* de f , respectivamente, como

$$\nabla f := (D_\omega^{(1,0,\dots,0)} f, D_\omega^{(0,1,0,\dots,0)} f, \dots, D_\omega^{(0,\dots,0,1,0)} f, D_\omega^{(0,\dots,0,1)} f)$$

y

$$\Delta f := D_\omega^{(2,0,\dots,0)} f + D_\omega^{(0,2,0,\dots,0)} f + \dots + D_\omega^{(0,\dots,0,2,0)} f + D_\omega^{(0,\dots,0,2)} f.$$

La siguiente proposición nos permite calcular fácilmente la derivada débil de una función cuando sus derivadas parciales existen.

Proposición 1.2. *Sea $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$. Entonces la derivada débil $D_\omega^\alpha f$ existe y está dada por $D^\alpha f$.*

Definiremos ahora los espacios de Sobolev. Sea m un entero no negativo, $1 \leq p < \infty$ y $f \in L_{loc}^1(\Omega)$. Supongamos que la derivada débil $D_\omega^\alpha f$ existe para todo $|\alpha| \leq m$. Definimos la *norma de Sobolev* como

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D_\omega^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

y definimos los *espacios de Sobolev* por

$$W_p^m(\Omega) := \{f \in L_{loc}^1(\Omega) : \|f\|_{W_p^m(\Omega)} < \infty\}.$$

Los espacios de Sobolev cumplen las siguientes propiedades:

- $W_p^m(\Omega) \subseteq L_p(\Omega)$.
- $W_p^m(\Omega)$ es un espacio de Banach.
- Si $k \leq m$, entonces $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$ y $W_p^m(\Omega) \subseteq W_p^k(\Omega)$.
- El conjunto $C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ es denso en $W_p^m(\Omega)$.
- $|f|_{W_p^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D_\omega^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$ define una seminorma en $W_p^m(\Omega)$.

Para cada m denotamos $H^m(\Omega) := W_2^m(\Omega)$, $\|\cdot\|_m := \|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$ y $|\cdot|_m := |\cdot|_{W_2^m(\Omega)}$ (para más detalles ver [2]).

Los espacios $H^m(\Omega)$ son espacios de Hilbert con el producto interior $(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D_\omega^\alpha u, D_\omega^\alpha v \rangle$

y se cumple que $\|\cdot\|_m = \sqrt{(\cdot, \cdot)_m}$.

En particular, se tiene que $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, $(u, v)_0 = \langle u, v \rangle$ y $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$.

Definimos $H_0^m(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^m(\Omega)$.

Se puede mostrar que $H_0^m(\Omega)$ es un subespacio cerrado de Hilbert del espacio $H^m(\Omega)$ con el producto interior $(u, v)_m$. En particular, se tiene que

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Sea $1 \leq q < \infty$ y $T > 0$. Cuando consideramos una función $u(t, x)$ de variable temporal y espacial, respectivamente, con $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, resulta útil definir los espacios

$$L_q(0, T; W_p^k(\Omega)) := \left\{ v : (0, T) \longrightarrow W_p^k(\Omega) \mid v \text{ es medible y } \int_0^T \|v(t)\|_{W_p^k(\Omega)}^q dt < +\infty \right\}$$

con norma

$$\|v\|_{L_q(0, T; W_p^k(\Omega))} := \left(\int_0^T \|v(t)\|_{W_p^k(\Omega)}^q dt \right)^{1/q}.$$

De manera similar definimos el espacio de funciones continuas en la variable temporal $C([0, T]; W_p^k(\Omega))$ (ver [3] para más detalles).

1.2. Algunos resultados importantes

A continuación enunciamos algunos resultados que nos serán de utilidad a la hora de probar la existencia y unicidad de ciertos problemas variacionales.

En [4] encontramos los siguientes dos resultados.

Lema 1.3 (Desigualdad de Poincaré). *Sea Ω un conjunto abierto acotado. Entonces existe una constante $\alpha > 0$, que depende de Ω , tal que*

$$\|u\|_0 \leq \alpha \|\nabla u\|_0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En particular, $\|\nabla \cdot\|_0$ define una norma en $H_0^1(\Omega)$ que es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$.

Definición 1.4. *Sea H un espacio de Hilbert, $V \subseteq H$ un subespacio de H y $d : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, decimos que:*

1. *d es continua si existe una constante $C_1 > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

2. *d es V -coerciva si existe una constante $C_2 > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq C_2 \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V.$$

Lema 1.5 (Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert, $d : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva y $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo. Entonces, existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H.$$

Capítulo 2

Problema estacionario: Ecuación de Poisson

En este capítulo desarrollaremos la teoría del método de los elementos finitos (FEM) para la *Ecuación de Poisson no homogénea con condiciones de frontera tipo Dirichlet no homogéneas*, la cual generaliza la ecuación de Laplace y tiene aplicaciones en mecánica cuántica, mecánica de fluidos y astronomía, por ejemplo. También analizaremos las cotas de error obtenidas de la aplicación de FEM a la ecuación de Poisson y daremos ejemplos en los que verificamos numéricamente los resultados teóricos.

2.1. Problema clásico

Sea $d \in \{1, 2\}$ y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un dominio de \mathbb{R}^d con frontera de Lipschitz. Consideremos el siguiente problema:

Problema EP: *Se desea encontrar una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y que satisfaga*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{para } x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{para } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$ están dadas.

Sea $v \in H_0^1(\Omega)$. Multiplicamos la expresión (2.1) por v e integramos sobre Ω para obtener

$$\int_{\Omega} -v\Delta u \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.2)$$

Para el caso $d = 1$: Asumamos que $\Omega = (b_1, b_2)$. Integrando por partes el lado izquierdo de (2.2) nos deja

$$\int_{b_1}^{b_2} u'v' \, dx - vu' \Big|_{b_1}^{b_2} = \int_{b_1}^{b_2} f v \, dx.$$

Como $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces $v = 0$ en $\partial\Omega$, por tanto,

$$\int_{b_1}^{b_2} u'v' dx = \int_{b_1}^{b_2} fv dx.$$

Para el caso $d = 2$: Aplicando la *Identidad de Green* al lado izquierdo de (2.2) obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS = \int_{\Omega} fv dx,$$

donde \hat{n} es un vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$ y $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \nabla u \cdot \hat{n}$ es la derivada direccional de u en dirección al vector \hat{n} .

Como $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces $v(x) = 0$ en $\partial\Omega$, luego

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} fv dx.$$

Así, para $d = 1, 2$, tenemos que si u es la *solución clásica* del Problema *EP*, entonces u satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.3)$$

Observe que hemos eliminado las segundas derivadas parciales de u y que solo es necesario el hecho de que u es de clase C^1 para que la ecuación (2.3) tenga sentido. Recordemos que el espacio $C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$ por lo que nos preguntamos ahora por todas las funciones en el espacio $H^1(\Omega)$ puedan satisfacer la ecuación (2.3) y que cumplan las condiciones de frontera del Problema *EP*.

2.2. Problema variacional

Sea $g_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ tal que $g_0 = g$ en $\partial\Omega$. Consideremos el siguiente *problema variacional* asociado al Problema *EP*:

Problema PV_e : Dada $f \in L_2(\Omega)$ queremos hallar $u \in H^1(\Omega)$ que satisfaga

$$\begin{cases} a(u, v) = \langle f, v \rangle & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u - g_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.4)$$

siendo

$$a(u, v) := \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

y

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} fv dx.$$

Decimos que el Problema PV_e es “variacional” porque a la función v se le permite variar arbitrariamente en el espacio $H_0^1(\Omega)$. Observe que $a(\cdot, \cdot)$ define una forma bilineal en el espacio $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ y que $\langle f, \cdot \rangle$ es un funcional lineal en $H^1(\Omega)$, además, la elección de la función g_0 no afecta la formulación del problema ya que su único papel es el de anular la función u en la frontera.

Si u es una función que es solución del Problema PV_e asociado Problema EP , entonces se dice que u es una *solución débil* del Problema EP .

La utilidad del Problema PV_e radica en que sus soluciones sirven como aproximaciones de la solución clásica del Problema EP , más aún, si tiene la suficientemente suavidad, una solución del Problema PV_e también es solución del Problema EP ; en efecto, sea u una solución débil del Problema EP tal que $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Como $u - g_0 \in H_0^1(\Omega)$, entonces $u - g_0 = u - g = 0$ en $\partial\Omega$ y u satisface las condiciones de frontera, además,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Utilizando el hecho de que $v = 0$ en $\partial\Omega$ y aplicando la identidad de Green en el caso $d = 2$ (o integrando por partes en el caso $d = 1$) obtenemos

$$- \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

de esto,

$$\int_{\Omega} (f + \Delta u) v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

lo cual implica que $f + \Delta u = 0$ y, por tanto, u satisface el Problema EP .

Proposición 2.1.

1. La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua y $H_0^1(\Omega)$ -coerciva.
2. Para cada $f \in L_2(\Omega)$ el funcional lineal $\langle f, \cdot \rangle$ es continuo en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración.

1. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$. Notemos que

$$\|\nabla v\|_0^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=1} |D_{\omega}^{\alpha} v|^2 \, dx = \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D_{\omega}^{\alpha} v|^2 \, dx = \sum_{|\alpha|=1} \|D_{\omega}^{\alpha} v\|_0^2,$$

luego,

$$\|v\|_1^2 = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D_{\omega}^{\alpha} v\|_0^2 = \|D_{\omega}^{(0, \dots, 0)} v\|_0^2 + \sum_{|\alpha|=1} \|D_{\omega}^{\alpha} v\|_0^2 = \|v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2 \geq \|\nabla v\|_0^2,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Sean $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} |a(v_1, v_2)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 \, dx \right| \\ &= |\langle \nabla v_1, \nabla v_2 \rangle| \\ &\leq \|\nabla v_1\|_0 \|\nabla v_2\|_0 \\ &\leq \|v_1\|_1 \|v_2\|_1 \end{aligned}$$

y, por tanto, d es continua.

Veamos ahora que $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$. Por la desigualdad de Poincaré (Lema 1.3), existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|v\|_0 \leq \alpha \|\nabla v\|_0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. De esto,

$$\begin{aligned} \|v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2 &\leq \alpha^2 \|\nabla v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2, \\ \|v\|_1^2 &\leq (\alpha + 1) \|\nabla v\|_0^2, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \langle \nabla v, \nabla v \rangle \\ &= \|\nabla v\|_0^2 \\ &\geq (\alpha + 1)^{-1} \|v\|_1^2. \end{aligned}$$

Así, $a(\cdot, \cdot)$ es $H_0^1(\Omega)$ -coerciva.

2. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y como $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle f, v \rangle| &\leq \|f\|_0 \|v\|_0 \\ &\leq \|f\|_0 \|v\|_1, \end{aligned}$$

de esto, $\|\langle f, \cdot \rangle\| \leq \|f\|_0$ y por tanto $\langle f, \cdot \rangle$ es continua.

□

Con el anterior resultado y usando el Lema de Lax-Milgram podemos probar que el Problema PV_e tiene solución única.

Proposición 2.2. *El Problema PV_e tiene solución única.*

Demostración. Consideremos el siguiente problema variacional auxiliar:

Problema PVA_e : *Queremos hallar $w \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaga*

$$a(w, v) = \langle f + \Delta g_0, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De la Proposición 2.1 y del Lema de Lax Milgram (Lema 1.5) se sigue que el Problema PVA_e tiene solución única.

Sea w la solución del Problema PVA_e , definimos $u := w - g_0$. Notemos que $u \in H^1(\Omega)$ y, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, se cumple lo siguiente

$$a(u, v) - a(g_0, v) = a(u - g_0, v) = a(w, v) = \langle f + \Delta g_0, v \rangle = \langle f, v \rangle + \langle \Delta g_0, v \rangle. \quad (2.5)$$

Notemos que:

Para el caso $d = 1$: Asumiendo que $\Omega = (b_1, b_2)$ e integrando por partes obtenemos

$$\langle g_0'', v \rangle = \int_{b_1}^{b_2} g_0'' v \, dx = g_0' v \Big|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} g_0' v' \, dx = - \int_{b_1}^{b_2} g_0' v' \, dx = -a(g_0, v).$$

Para el caso $d = 2$: Por la identidad de Green tenemos que

$$\langle \Delta g_0, v \rangle = \int_{\Omega} v \Delta g_0 \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial g_0}{\partial \widehat{n}} \, dx - \int_{\Omega} \nabla g_0 \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla g_0 \cdot \nabla v \, dx = -a(g_0, v).$$

Entonces, de (2.5), se sigue que u satisface

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

y, por tanto, el Problema PV_e tiene solución.

Para probar la unicidad de la solución del Problema PV_e , supongamos que $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ satisfacen el Problema PV_e . Entonces

$$a(u_1 - g_0, v) = a(u_1, v) - a(g_0, v) = \langle f, v \rangle + \langle \Delta g_0, v \rangle = \langle f + \Delta g_0, v \rangle$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, de lo cual se sigue que $u_1 - g_0$ es solución del Problema PVA_e y, procediendo análogamente, tenemos que $u_2 - g_0$ también es solución del Problema PVA_e . Por la unicidad de la solución del Problema PVA_e , se sigue que $u_1 - u_0 = u_2 - u_0$, de lo cual se tiene el resultado. □

Definición 2.3. Sea $s \geq 2$. Decimos que el Problema PV_e es H^s -regular si existe una constante c que depende de Ω , $a(\cdot, \cdot)$, s tal que para cada $f \in H^{s-2}(\Omega)$ existe una solución $u \in H^s(\Omega)$ que satisfice

$$\|u\|_s \leq c \|f\|_{s-2}.$$

De [2, página 89] tenemos el siguiente resultado, el cual nos dice que si Ω es convexo, entonces la solución del problema PV_e tiene segundas derivadas parciales débiles.

Teorema 2.4.

1. Si Ω es convexo, entonces el Problema PV_e es $H^2(\Omega)$ -regular.
2. Si la frontera de Ω es de clase C^s con $s \geq 2$, entonces el Problema PV_e es H^s -regular.

Buscamos ahora aproximar la solución u del Problema PV_e asociado al Problema EP usando el *método de los elementos finitos (FEM)*, para esto, primero, llevaremos a cabo una discretización de la variable espacial.

2.3. Método de elementos finitos

En la sección anterior tomamos Ω como un dominio de \mathbb{R}^d para $d = 1, 2$ con frontera de Lipschitz. El hecho de que la frontera de Ω sea de Lipschitz significa que $\partial\Omega$ se puede ver como la gráfica de una función continua de Lipschitz, por tanto, podemos encontrar una *curva poligonal* que se “ajuste” a $\partial\Omega$ tan bien como queramos. De aquí en adelante asumiremos que Ω es un dominio de \mathbb{R}^d con frontera poligonal.

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ y sea $\mathcal{T}_h := \{e_k : k \in \{1, \dots, n\}\}$ una colección de subconjuntos no vacíos de Ω definida como sigue

- Para $d = 1$: Sea $\{b_1 = y_1, y_2, \dots, y_{n+1} = b_2\} \subseteq \Omega = (b_1, b_2)$ una secuencia de puntos de Ω con $y_k < y_{k+1}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, definimos $e_k := (y_k, y_{k+1})$,
- Para $d = 2$: Tomamos \mathcal{T}_h como una colección de triángulos abiertos en Ω tales que los vértices de triángulos adyacentes coincidan y que además cumplan lo siguiente
 - $\bigcup_{i=1}^n \bar{e}_k = \bar{\Omega}$,
 - $e_k \cap e_m = \emptyset$ siempre que $k \neq m$

de tamaño $h := \max_{1 \leq i \leq n} h_i$, donde $h_i := \sup_{x, y \in e_k} |x - y|$ es el diámetro de cada elemento.

De este modo, si $d = 2$, \mathcal{T}_h es una triangulación de Ω en subdominios que no se solapan y que al unir sus clausuras obtenemos la clausura de Ω . De aquí en adelante, tanto para $d = 1$ como para $d = 2$, nos referiremos a \mathcal{T}_h como una *triangulación* de Ω . Los *lados* o *triángulos* e_k los denominamos *elementos* de la discretización de Ω , mientras que sus extremos o vértices, respectivamente, los denominamos *nodos*.

Denotemos por m al número total de nodos de la discretización y por m_1 al número de nodos que son *puntos interiores* de Ω . Sea $\{p_1, \dots, p_m\}$ la lista de todos los nodos, donde p_1, \dots, p_{m_1} son los *nodos interiores* de Ω y p_{m_1+1}, \dots, p_m son los *nodos en la frontera* $\partial\Omega$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ definimos ϕ_i como una función continua en Ω que es lineal en cada elemento e_k y que para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ cumple que

$$\phi_i(p_j) := \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

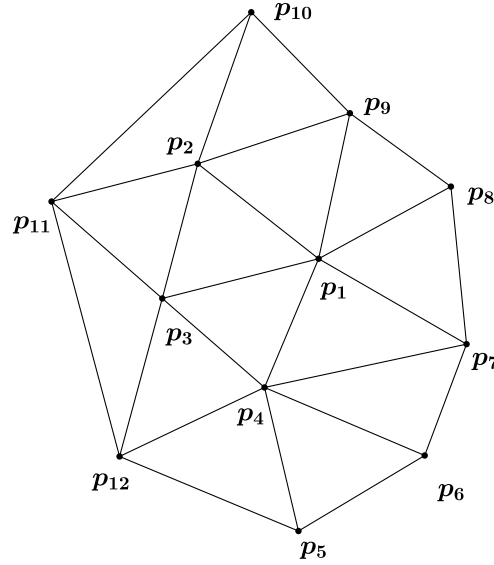


Figura 2.1: Triangulación de un dominio en dos dimensiones.

donde δ es la función *delta de Kronecker*.

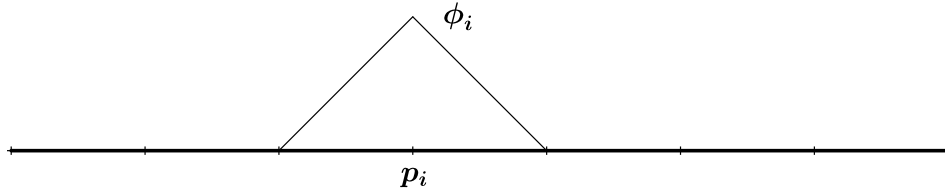


Figura 2.2: Función base unidimensional.

Sean $S_h := \langle \phi_1, \dots, \phi_{m_1}, \phi_{m_1+1}, \dots, \phi_m \rangle$ y $S_0 := \langle \phi_1, \dots, \phi_{m_1} \rangle$. Tenemos que S_h es el espacio de todas las funciones continuas en $\bar{\Omega}$ que son lineales en cada elemento e_k y, S_0 , es el espacio de todas las funciones de S_h que se anulan en $\partial\Omega$.

Sea $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x) \in S_h$ con $c_i \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$\varphi(p_j) = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(p_j) = \sum_{i=1}^m c_i \delta_{i,j} = c_j \delta_{j,j} = c_j$$

para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, luego, si $\varphi = 0$ en Ω , entonces $c_j = 0$ para todo j , de lo cual se sigue que las funciones $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ son linealmente independientes; además, como φ es lineal a trozos, entonces sus derivadas parciales existen y son constantes a trozos, lo cual implica que $\varphi \in H^1(\Omega)$. Esto prueba que $S_0 \subseteq S_h \subseteq H^1(\Omega)$ y $S_0 = S_h \cap H_0^1(\Omega)$.

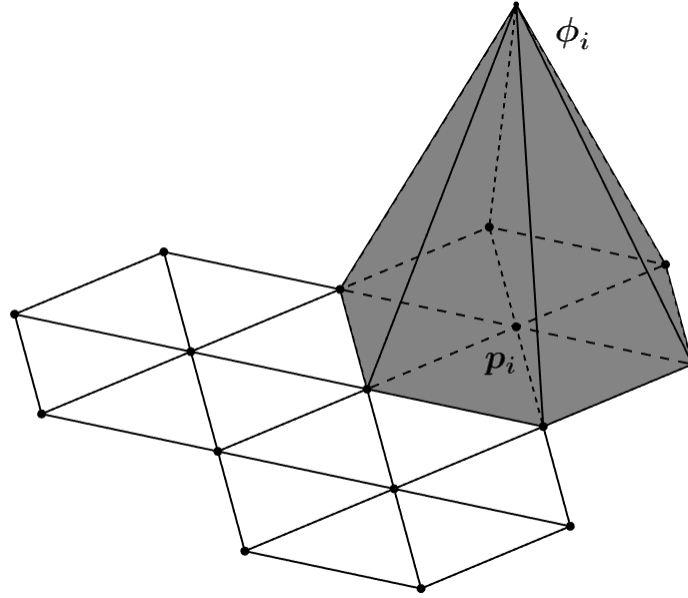


Figura 2.3: Función base bidimensional.

Llamamos a S_h *espacio solución discreto* y a las funciones ϕ_i las denominamos *funciones sombrero* o *funciones base*.

Terminamos esta sección caracterizando las funciones base ϕ_i en los casos $d = 1, 2$.

Para el caso $d = 1$: Para $i \in \{1, \dots, m\}$, la función base ϕ_i tiene su soporte en el *conjunto vecindad* $w_i := \{e_k : p_i \in \bar{e}_k\}$ (ver figura 2.2). Observe que un lado e_k está caracterizado por sus extremos, digamos $p_{\lambda_{k,1}}, p_{\lambda_{k,2}}$, con $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2} \in \{1, \dots, m\}$, de modo que $e_k = (p_{\lambda_{k,1}}, p_{\lambda_{k,2}})$; y, además, solo hay dos funciones base que no se anulan en e_k , estas son $\phi_{\lambda_{k,1}}, \phi_{\lambda_{k,2}}$ cada una asociada, respectivamente, a $p_{\lambda_{k,1}}, p_{\lambda_{k,2}}$ (ver figura 2.4). Denotemos $\hat{p}_i := p_{\lambda_{k,i}}$ y $\hat{\phi}_i := \phi_{\lambda_{k,i}}$ para cada $i = 1, 2$. Llamamos a las funciones $\hat{\phi}_i$ *funciones base locales* del elemento e_k .

Puesto que $\hat{\phi}_i$ es lineal en e_k , tiene la forma

$$\hat{\phi}_i(x) = \alpha_i x + \beta_i$$

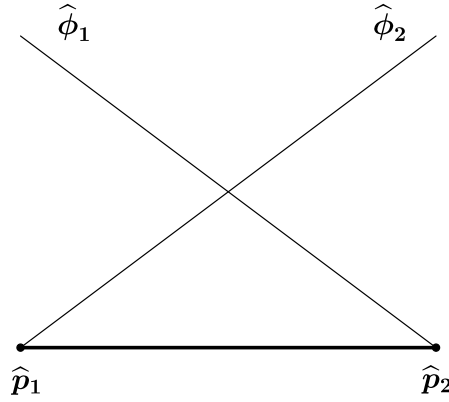
con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ constantes.

Consideremos la función $\hat{\phi}_1$. Por construcción, $\hat{\phi}_1(\hat{p}_1) = 1$ y $\hat{\phi}_1(\hat{p}_2) = 0$, de lo cual obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con incógnitas α_1 y β_1

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \hat{p}_1 + \beta_1 \\ 0 &= \alpha_1 \hat{p}_2 + \beta_1. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$\hat{\phi}_1(x) = \frac{\hat{p}_2 - x}{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}.$$


 Figura 2.4: Elemento e_k y funciones base locales en una dimensión.

Procediendo de manera similar para $\hat{\phi}_2$, nos deja

$$\hat{\phi}_2(x) = \frac{x - \hat{p}_1}{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}.$$

Para el caso $d = 2$: Para $i \in \{1, \dots, m\}$, la función base ϕ_i tiene su soporte en el conjunto vecindad $w_i := \{e_k : p_i \in \bar{e}_k\}$ (ver figura 2.3). Observe que un triángulo e_k está caracterizado por sus vértices, digamos $p_{\lambda_{k,1}}, p_{\lambda_{k,2}}, p_{\lambda_{k,3}}$, con $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \lambda_{k,3} \in \{1, \dots, m\}$, nombrados en sentido antihorario; y, además, solo hay tres funciones base que no se anulan en e_k (ver figura 2.5), estas son $\phi_{\lambda_{k,1}}, \phi_{\lambda_{k,2}}, \phi_{\lambda_{k,3}}$ cada una asociada, respectivamente, a $p_{\lambda_{k,1}}, p_{\lambda_{k,2}}, p_{\lambda_{k,3}}$. Denotemos $\hat{p}_i := p_{\lambda_{k,i}}$ y $\hat{\phi}_i := \phi_{\lambda_{k,i}}$ para cada $i = 1, 2, 3$. Llamamos a las funciones $\hat{\phi}_i$ funciones base locales del elemento e_k .

Dado que cada $\hat{\phi}_i$ es un semiplano en e_k , entonces tiene la forma

$$\hat{\phi}_i(x_1, x_2) = \alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i$$

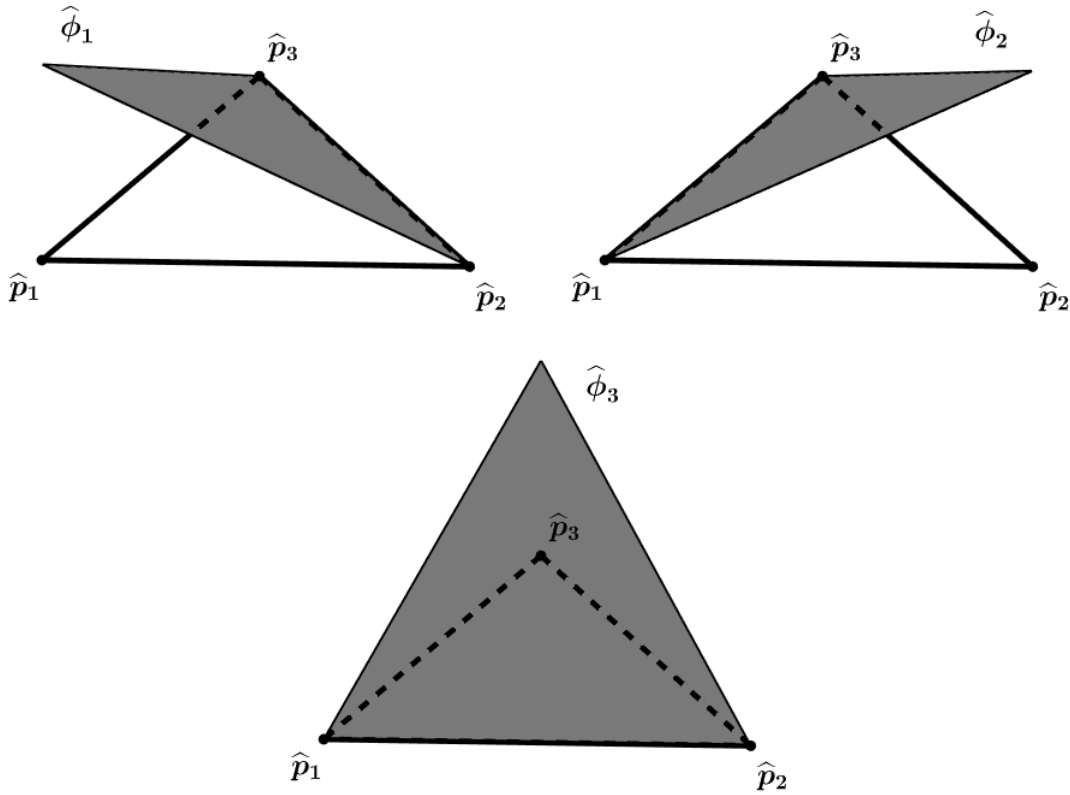
con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ constantes.

Calcularemos los valores de $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ para $i = 1, 2, 3$. Denotemos $\hat{p}_i = (\hat{p}_{i,1}, \hat{p}_{i,2})^T$ para $i = 1, 2, 3$ y consideremos la función base local $\hat{\phi}_1$. Por definición tenemos que $\hat{\phi}_1(\hat{p}_1) = 1$, $\hat{\phi}_1(\hat{p}_2) = 0$ y $\hat{\phi}_1(\hat{p}_3) = 0$, luego,

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \hat{p}_{1,1} + \beta_1 \hat{p}_{1,2} + \gamma_1 \\ 0 &= \alpha_1 \hat{p}_{2,1} + \beta_1 \hat{p}_{2,2} + \gamma_1 \\ 0 &= \alpha_1 \hat{p}_{3,1} + \beta_1 \hat{p}_{3,2} + \gamma_1 \end{aligned}$$

lo cual define un sistema de ecuaciones lineales de 3×3 que escribiéndolo en forma matricial queda como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{1,1} & \hat{p}_{1,2} & 1 \\ \hat{p}_{2,1} & \hat{p}_{2,2} & 1 \\ \hat{p}_{3,1} & \hat{p}_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}.$$


 Figura 2.5: Elemento e_k y funciones base locales en dos dimensiones.

Repitiendo el proceso anterior con las funciones $\hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$, obtenemos los sistemas

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{1,1} & \hat{p}_{1,2} & 1 \\ \hat{p}_{2,1} & \hat{p}_{2,2} & 1 \\ \hat{p}_{3,1} & \hat{p}_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{1,1} & \hat{p}_{1,2} & 1 \\ \hat{p}_{2,1} & \hat{p}_{2,2} & 1 \\ \hat{p}_{3,1} & \hat{p}_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Los tres sistemas pueden ser resueltos simultáneamente como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{1,1} & \hat{p}_{1,2} & 1 \\ \hat{p}_{2,1} & \hat{p}_{2,2} & 1 \\ \hat{p}_{3,1} & \hat{p}_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que la primera matriz del lado derecho debe tener determinante distinto de cero, pues de lo contrario, sus columnas serían linealmente dependientes y, en dicho caso, los vértices de e_k serían colineales, lo cual no puede ser. En virtud de esto, la solución del

sistema está dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{p}_{1,1} & \widehat{p}_{1,2} & 1 \\ \widehat{p}_{2,1} & \widehat{p}_{2,2} & 1 \\ \widehat{p}_{3,1} & \widehat{p}_{3,2} & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

lo cual nos permite determinar los coeficientes de las funciones base locales $\widehat{\phi}_1$, $\widehat{\phi}_2$ y $\widehat{\phi}_3$ en e_k .

2.4. Problema variacional discreto

Retomamos la discusión que veníamos desarrollando en la Sección 2.2 y procedemos a desarrollar el método de FEM para aproximar la solución del problema PV_e .

Sean \mathcal{T}_h una triangulación de tamaño h de Ω , $S_0 = \langle \phi_1, \dots, \phi_{m_1} \rangle$ y $S_h = \langle \phi_1, \dots, \phi_{m_1}, \phi_{m_1+1}, \dots, \phi_m \rangle$ tal y como se construyeron en la Sección 2.3 y sea $u_h \in S_h$. Reemplazando u_h por u en el problema PV_e y cambiando los espacios $H^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ por S_h y S_0 , respectivamente, obtenemos el siguiente *problema variacional discreto*:

Problema PVD_e : Dado $f \in L_2(\Omega)$ queremos encontrar $u_h \in S_h$ que satisfaga

$$a(u_h, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in S_0, \quad (2.6)$$

con $u_h(p_i) = g(p_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Sea $v \in S_0$. Tomando $u_h(x) := \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x)$, con $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ constantes, y sustituyendo en (2.6) obtenemos

$$a\left(\sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x), v\right) = \langle f, v \rangle,$$

luego, por la bilinealidad de $a(\cdot, \cdot)$,

$$\sum_{i=1}^m c_i a(\phi_i(x), v) = \langle f, v \rangle$$

y de esto,

$$\sum_{i=1}^{m_1} c_i a(\phi_i(x), v) - \sum_{i=m_1+1}^m c_i a(\phi_i(x), v) = \langle f, v \rangle.$$

Como $\{\phi_1, \dots, \phi_{m_1}\}$ es una base de S_0 , podemos tomar $v = \phi_j$ para $j = 1, \dots, m_1$; además, usando las condiciones de frontera, tenemos que

$$u_h(p_i) = c_i = g(p_i)$$

para todo nodo p_i en $\partial\Omega$ con $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$.

Esto nos deja el siguiente sistema de ecuaciones lineales de $m_1 \times m_1$:

$$\sum_{i=1}^{m_1} c_i a(\phi_i, \phi_j) = \langle f, \phi_j \rangle - \sum_{i=m_1+1}^m g(p_i) a(\phi_i, \phi_j), \quad (2.7)$$

con $j = 1, \dots, m_1$, donde las constantes c_1, \dots, c_{m_1} son las incógnitas del sistema.

Ahora, sean

- R la matriz de rigidez cuyas componentes están dadas por $R_{i,j} := a(\phi_j, \phi_i)$ para $i, j \in \{1, \dots, m\}$,
- F el vector de carga con componentes dadas por $F_i := \langle f, \phi_i \rangle$ para $i \in \{1, \dots, m\}$,
- C el vector columna cuyas componentes son $C_i := c_i$ para $i \in \{1, \dots, m\}$,

y considere la siguiente notación: Sean v_1, v_2 dos vectores cuyas componentes están en $\{1, \dots, m\}$ y tales que sus componentes no se repiten; es decir, si v_{1,k_1} denota la k_1 -ésima componente de v_1 , entonces $v_{1,k_1} \neq v_{1,k_2}$ y $v_{2,k_1} \neq v_{2,k_2}$ siempre que $k_1 \neq k_2$. Si A es una matriz de $m \times m$, denotamos por $A(v_1, v_2)$ a la submatriz de A obtenida de considerar solo las filas y las columnas cuyas numeraciones coinciden con las componentes de v_1 y v_2 , respectivamente; además, si B es un vector con m componentes, denotamos por $B(v_1)$ al subvector de B obtenido de considerar solo las componentes de B cuyas numeraciones coinciden con las componentes de v_1 .

Usando la anterior notación podemos escribir el sistema (2.7) en forma matricial como sigue

$$\begin{aligned} R([1, \dots, m_1], [1, \dots, m_1]) C([1, \dots, m_1]) \\ = F([1, \dots, m_1]) - R([1, \dots, m_1], [m_1 + 1, \dots, m]) C([m_1 + 1, \dots, m]). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Proposición 2.5. *El sistema de ecuaciones lineales (2.8) tiene solución única.*

Demostración. Veamos que la matriz $R([1, \dots, m_1], [1, \dots, m_1])$ es simétrica y definida positiva.

Como

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx$$

para todo i, j , entonces $R_{i,j} = R_{j,i}$ para todo i, j y, por tanto, $R([1, \dots, m_1], [1, \dots, m_1])$ es simétrica.

Para ver que es definida positiva, sean $\sigma \in \mathbb{R}^{m_1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ y $\varphi = \sum_{i=1}^{m_1} \sigma_i \phi_i$. Entonces

$$\sigma^T R \sigma = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} \sigma_i \sigma_j R_{i,j} = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} \sigma_i \sigma_j a(\phi_j, \phi_i) = a \left(\sum_{i=1}^{m_1} \sigma_j \phi_j, \sum_{i=1}^{m_1} \sigma_i \phi_i \right) = a(\varphi, \varphi),$$

luego, por la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$, existe $\alpha > 0$ constante tal que

$$a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_1^2 \geq 0.$$

Puesto que $\sigma \neq 0$ y las funciones base son linealmente independientes, entonces $\varphi \neq 0$ y, por tanto,

$$\sigma^T R \sigma \geq \alpha \|\varphi\|_1^2 > 0,$$

de esto, R es definida positiva.

Como R es simétrica y definida positiva, es invertible y, por tanto, el sistema (2.8) tiene solución única. □

2.5. Análisis del error

En esta sección vamos a obtener una cota para el error $\|u - u_h\|_0$, donde u es la solución del Problema PV_e y u_h es la aproximación de u obtenida usando el método de los elementos finitos.

Buscamos que la cota para el error sea de la forma

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^\alpha,$$

donde C es una constante y $\alpha \in \mathbb{N}$. Usando la *notación asintótica* la expresión anterior se escribe como

$$\|u - u_h\|_0 = O(h^\alpha),$$

y α es llamado el *orden de convergencia del error*.

Con una cota de esta forma, se garantiza que si $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$ es una sucesión tal que $h_j \rightarrow 0$, entonces $\|u - u_{h_j}\|_0 \rightarrow 0$. El número α sirve como un indicativo de que tan rápido se da la convergencia, de modo que mientras mayor sea el valor de α más rápido disminuirá el valor del error.

Por simplicidad derivaremos la cota para el error, y el orden de convergencia del mismo, para el Problema EP con condiciones de Dirichlet homogéneas. Puesto que un problema con condiciones no homogéneas puede ser transformado a uno con condiciones homogéneas, entonces la cota de error para el caso homogéneo se verifica también para el caso no homogéneo.

El siguiente resultado sugiere que la aproximación u_h de u es la mejor que podemos conseguir en el espacio solución S_h .

Lema 2.6 (Céa). *Supongamos que $g = 0$. Sea u la solución del Problema PV_e y sea u_h la solución del Problema PVD_e . Entonces existe $C > 0$ constante tal que*

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_1.$$

Demostración. De la definición de u y u_h tenemos que estas satisfacen

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

y

$$a(u_h, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in S_0.$$

De esto, se sigue que $a(u - u_h, v) = 0$ para toda $v \in S_0$.

Sea $v_h \in S_0$. Por la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$, existe $c_1 > 0$ constante tal que

$$c_1 \|u - u_h\|_1^2 \leq a(u - u_h, u - u_h).$$

Como $u_h - v_h \in S_0$, entonces $a(u - u_h, u_h - v_h) = 0$ y, por tanto,

$$c_1 \|u - u_h\|_1^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) = a(u - u_h, u - v_h),$$

luego, por la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$, existe $c_2 > 0$ constante tal que

$$c_1 \|u - u_h\|_1^2 \leq a(u - u_h, u - v_h) \leq c_2 \|u - u_h\|_1 \|u - v_h\|_1.$$

De esto último obtenemos

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{c_2}{c_1} \|u - v_h\|_1$$

y tomando ínfimo, tenemos el resultado. □

El siguiente resultado lo encontramos en [2, página 79].

Teorema 2.7. *Sea \mathcal{T}_h una triangulación regular de Ω . Entonces existe una constante c que depende de Ω y h tal que*

$$\|u - I_h u\|_m \leq ch^{2-m} |u|_2 \quad \forall u \in H^2(\Omega), \quad 0 \leq m \leq 2,$$

donde $I_h(\cdot)$ denota interpolación mediante las funciones sombrero ϕ_i .

Teorema 2.8. *Sea T_h una triangulación regular de Ω . Si u y u_h son las soluciones de los Problemas PV_e y PVD_e , respectivamente, entonces existe c constante tal que*

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch |u|_2.$$

Demostración. Del Lema de Céa, existe C constante tal que

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_1. \quad (2.9)$$

Por el Teorema 2.7 existe una constante c_1 y $\omega_h \in S_h$ que satisfacen

$$\|u - \omega_h\|_1 \leq c_1 h |u|_2. \quad (2.10)$$

De (2.9) y (2.10) se sigue que

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_1 \leq C \|u - \omega_h\|_1 \leq c_1 Ch |u|_2$$

y se tiene el resultado. □

Corolario 2.9. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.8 se cumple que existe una constante c tal que*

$$\|u - u_h\|_0 \leq ch \|u - u_h\|_1.$$

Demostración. Ver [2, página 92]. □

Finalmente, el siguiente resultado nos da un estimador a priori para el error $\|u - u_h\|_0$ obtenido mediante FEM.

Proposición 2.10. *Asuma que se satisfacen las condiciones del Teorema 2.8. Entonces se cumple que*

$$\|u - u_h\|_0 = O(h^2).$$

Demostración. Combinando el Corolario 2.9 y el Teorema 2.8 se tiene el resultado. □

2.6. Implementación numérica de FEM

Procedemos ahora a desarrollar estrategias que nos permitirán calcular numéricamente la matriz R y el vector F así como implementar numéricamente el método de elementos finitos.

2.6.1. Cálculo de la matriz de rigidez R

Queremos calcular la matriz de rigidez R cuyas componentes están dadas por

$$R_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx,$$

donde $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Por definición tenemos que

$$R_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx = \sum_{k=1}^n \int_{e_k} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx.$$

Observe que si $\text{supp}(\phi_j) \cap \text{supp}(\phi_i) = \emptyset$, entonces

$$\int_{e_k} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

y por tanto $R_{i,j} = 0$, es decir, si los soportes de dos funciones base no se intersectan se sigue que la respectiva componente en la matriz R es nula.

Nuestro objetivo es calcular numéricamente las componentes de la matriz R , por lo que un cálculo directo de las mismas solo nos llevará a desperdiciar tiempo en integrales que al final resultan ser nulas. Un enfoque más adecuado es utilizar la estrategia *elemento-por-elemento*

la cual consiste en calcular localmente, sobre cada elemento e_k , todas las posibles integrales $a(\phi_j, \phi_i)$ que involucran a las funciones base que no se anulan en e_k y luego usar esa información de manera adecuada para ensamblar la matriz R . La ventaja de la estrategia radica en que nos permitirá evitar las integrales que se anulan, de modo que al final, habremos computado una menor cantidad de integrales que si lo hubiéramos hecho por cálculo directo.

Para cada k denotamos las *integrales locales* sobre el elemento e_k como

$$a_k(\phi_j, \phi_i) := \int_{e_k} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx.$$

Para el caso $d = 1$: De la Sección 2.3 tenemos que las únicas funciones base que no se anulan en el elemento $e_k = (\widehat{p}_1, \widehat{p}_2)$ son sus funciones base locales, las cuales son

$$\widehat{\phi}_1(x) = \frac{\widehat{p}_2 - x}{\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1} \quad \text{y} \quad \widehat{\phi}_2(x) = \frac{x - \widehat{p}_1}{\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1}.$$

Esto significa que el elemento e_k solo aporta a las componentes de R que involucran alguna de las integrales locales $a_k(\widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_i)$ para $i, j \in \{1, 2\}$; es decir, si $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2} \in \{1, \dots, m\}$ son tales que $p_{\lambda_{k,1}} = \widehat{p}_1, p_{\lambda_{k,2}} = \widehat{p}_2$, entonces la integral local $a_k(\widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_i) = a_k(\phi_{\lambda_{k,j}}, \phi_{\lambda_{k,i}})$ solo aporta a la componente $R_{\lambda_{k,i}, \lambda_{k,j}}$.

En e_k debemos calcular las siguientes cuatro integrales:

$$\begin{aligned} a_k(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_1) &= \int_{e_k} \widehat{\phi}'_1(x) \widehat{\phi}'_1(x) \, dx = \frac{1}{\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1} = \frac{1}{h_k} \\ a_k(\widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_1) &= \int_{e_k} \widehat{\phi}'_1(x) \widehat{\phi}'_2(x) \, dx = \frac{-1}{\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1} = -\frac{1}{h_k} \\ a_k(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2) &= \int_{e_k} \widehat{\phi}'_2(x) \widehat{\phi}'_1(x) \, dx = \frac{-1}{\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1} = -\frac{1}{h_k} \\ a_k(\widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_2) &= \int_{e_k} \widehat{\phi}'_2(x) \widehat{\phi}'_2(x) \, dx = \frac{1}{\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1} = \frac{1}{h_k} \end{aligned}$$

lo cual define la matriz de *rigidez local* del elemento e_k

$$RL_k := \begin{pmatrix} a_k(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_1) & a_k(\widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_1) \\ a_k(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2) & a_k(\widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{h_k} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para el caso $d = 2$: Considere el elemento e_k con nodos $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3$ y funciones base locales $\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_3$ como en la Sección 2.3. Puesto que solo hay tres funciones base que no se anulan en el elemento e_k , entonces dicho elemento solo aporta a las componentes de R que involucran alguna de las integrales locales $a_k(\widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_i)$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$; por tanto, si $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \lambda_{k,3} \in \{1, \dots, m\}$ son tales que $p_{\lambda_{k,1}} = \widehat{p}_1, p_{\lambda_{k,2}} = \widehat{p}_2, p_{\lambda_{k,3}} = \widehat{p}_3$, entonces la integral

local $a_k(\widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_i) = a_k(\phi_{\lambda_{k,j}}, \phi_{\lambda_{k,i}})$ solo aporta a la componente $R_{\lambda_{k,i}, \lambda_{k,j}}$.

Calcularemos ahora el valor de las integrales locales. Sea $i, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces

$$\begin{aligned}
 a_k(\widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_i) &= \int_{e_k} \nabla \widehat{\phi}_j \cdot \nabla \widehat{\phi}_i \, dx \\
 &= \int_{e_k} \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_j}{\partial x_1}, \frac{\partial \widehat{\phi}_j}{\partial x_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \widehat{\phi}_i}{\partial x_2} \right) \, dx \\
 &= \int_{e_k} \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_j}{\partial x_1} \frac{\partial \widehat{\phi}_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \widehat{\phi}_j}{\partial x_2} \frac{\partial \widehat{\phi}_i}{\partial x_2} \right) \, dx \\
 &= \int_{e_k} (\alpha_j \alpha_i + \beta_j \beta_i) \, dx \\
 &= (\alpha_j \alpha_i + \beta_j \beta_i) \int_{e_k} 1 \, dx \\
 &= (\alpha_j \alpha_i + \beta_j \beta_i) (\text{Área } e_k).
 \end{aligned}$$

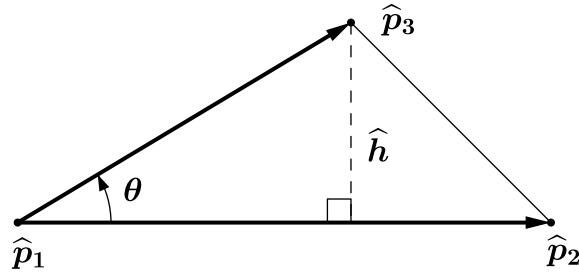


Figura 2.6: Elemento e_k .

Calcularemos el área de e_k . Consideremos los vectores $\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1$, $\widehat{p}_3 - \widehat{p}_1$ y sea θ el ángulo que va de $\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1$ a $\widehat{p}_3 - \widehat{p}_1$. Tomando $\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1$ como la base del triángulo, \widehat{h} como la altura (ver figura 2.6) y denotando $\widehat{p}_s := (\widehat{p}_{s,1}, \widehat{p}_{s,2})^T$, entonces el área del elemento e_k está dada por el siguiente producto cruz

$$\begin{aligned}
 \text{Área } e_k &= \frac{|\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1| |\widehat{h}|}{2} \\
 &= \frac{|\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1| |\widehat{p}_3 - \widehat{p}_1| \sin \theta}{2} \\
 &= \frac{|(\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1) \times (\widehat{p}_3 - \widehat{p}_1)|}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \widehat{p}_{2,1} - \widehat{p}_{1,1} \\ \widehat{p}_{2,2} - \widehat{p}_{1,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \widehat{p}_{3,1} - \widehat{p}_{1,1} \\ \widehat{p}_{3,2} - \widehat{p}_{1,2} \end{pmatrix} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| 0\widehat{i} + 0\widehat{j} + [(\widehat{p}_{2,1} - \widehat{p}_{1,1})(\widehat{p}_{3,2} - \widehat{p}_{1,2}) - (\widehat{p}_{2,2} - \widehat{p}_{1,2})(\widehat{p}_{3,1} - \widehat{p}_{1,1})]\widehat{k} \right| \\
 &= \frac{1}{2} |(\widehat{p}_{2,1} - \widehat{p}_{1,1})(\widehat{p}_{3,2} - \widehat{p}_{1,2}) - (\widehat{p}_{2,2} - \widehat{p}_{1,2})(\widehat{p}_{3,1} - \widehat{p}_{1,1})| \\
 &= \frac{1}{2} |\widehat{p}_{2,1}\widehat{p}_{3,2} - \widehat{p}_{2,1}\widehat{p}_{1,2} - \widehat{p}_{1,1}\widehat{p}_{3,2} - \widehat{p}_{2,2}\widehat{p}_{3,1} + \widehat{p}_{2,2}\widehat{p}_{1,1} + \widehat{p}_{1,2}\widehat{p}_{3,1}|.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} \widehat{p}_{1,1} & \widehat{p}_{1,2} & 1 \\ \widehat{p}_{2,1} & \widehat{p}_{2,2} & 1 \\ \widehat{p}_{3,1} & \widehat{p}_{3,2} & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \widehat{p}_{2,1} & \widehat{p}_{2,2} \\ \widehat{p}_{3,1} & \widehat{p}_{3,2} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \widehat{p}_{1,1} & \widehat{p}_{1,2} \\ \widehat{p}_{3,1} & \widehat{p}_{3,2} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \widehat{p}_{1,1} & \widehat{p}_{1,2} \\ \widehat{p}_{2,1} & \widehat{p}_{2,2} \end{pmatrix} \\
 &= \widehat{p}_{2,1}\widehat{p}_{3,2} - \widehat{p}_{2,2}\widehat{p}_{3,1} - \widehat{p}_{1,1}\widehat{p}_{3,2} + \widehat{p}_{1,2}\widehat{p}_{3,1} + \widehat{p}_{2,2}\widehat{p}_{1,1} - \widehat{p}_{2,1}\widehat{p}_{1,2},
 \end{aligned}$$

entonces

$$\text{Área } e_k = \left(\frac{1}{2} \right) \left| \det \begin{pmatrix} \widehat{p}_{1,1} & \widehat{p}_{1,2} & 1 \\ \widehat{p}_{2,1} & \widehat{p}_{2,2} & 1 \\ \widehat{p}_{3,1} & \widehat{p}_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

Así, para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tenemos que,

$$a_k(\widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_i) = (\alpha_j \alpha_i + \beta_j \beta_i) \left(\frac{1}{2} \right) \left| \det \begin{pmatrix} \widehat{p}_{1,1} & \widehat{p}_{1,2} & 1 \\ \widehat{p}_{2,1} & \widehat{p}_{2,2} & 1 \\ \widehat{p}_{3,1} & \widehat{p}_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \right|,$$

lo cual define la matriz de *rigidez local* del elemento e_k

$$\begin{aligned}
 RL_k &:= \begin{pmatrix} a_k(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_1) & a_k(\widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_1) & a_k(\widehat{\phi}_3, \widehat{\phi}_1) \\ a_k(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2) & a_k(\widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_2) & a_k(\widehat{\phi}_3, \widehat{\phi}_2) \\ a_k(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_3) & a_k(\widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_3) & a_k(\widehat{\phi}_3, \widehat{\phi}_3) \end{pmatrix} \\
 &= (\text{Área } e_k) \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 & \alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \beta_1 & \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 & \alpha_3 \alpha_2 + \beta_3 \beta_2 \\ \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 \end{pmatrix} \\
 &= (\text{Área } e_k) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \\
 &= (\text{Área } e_k) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Procedemos ahora a ensamblar la matriz R usando la información obtenida de la matriz de rigidez local de cada elemento, para ello, nos valdremos de las siguientes notaciones:

- Sea $\{p_1, \dots, p_m\}$ la lista de los nodos de la triangulación de Ω , donde p_1, \dots, p_{m_1} son los nodos interiores y p_{m_1+1}, \dots, p_m son los nodos fronterizos.

Para el caso $d = 1$: Definimos el *arreglo de coordenadas* de $m \times 1$ por

$$\text{Coor} := [p_1, \dots, p_m]^T.$$

Para el caso $d = 2$: Asuma que $p_s = (p_{s,1}, p_{s,2})^T$ para cada s . Definimos el *arreglo de coordenadas* de $m \times 2$ por

$$\text{Coor} := [p_1^T, \dots, p_m^T]^T.$$

- Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la lista de los elementos de la triangulación de Ω .

Para el caso $d = 1$: Para cada k , sean $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2} \in \{1, \dots, m\}$ tales que $e_k = (p_{\lambda_{k,1}}, p_{\lambda_{k,2}})$. Definimos el *arreglo de elementos* de $n \times 2$ por

$$\text{Ele} := [[\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}], \dots, [\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}]]^T.$$

Para el caso $d = 2$: Para cada k , sean $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \lambda_{k,3} \in \{1, \dots, m\}$ tales que $p_{\lambda_{k,1}}, p_{\lambda_{k,2}}, p_{\lambda_{k,3}}$ son los vértices de e_k nombrados en sentido antihorario. Definimos el *arreglo de elementos* de $n \times 3$ por

$$\text{Ele} := [[\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{1,3}], \dots, [\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \lambda_{n,3}]]^T.$$

De este modo, para $d = 1, 2$, la k -ésima fila del arreglo **Ele** determina al elemento e_k .

Algoritmo 1: Algoritmo para obtener la matriz de rigidez R en una y dos dimensiones.

Entrada: **Coor**, **Ele**.

Salida: Matriz de rigidez R .

inicio

Sea m el número de filas de **Coor**;

Sea n el número de filas de **Ele**;

Inicialice la matriz nula R de $m \times m$;

// Ensamble de R .

para $k = 1 : n$ **hacer**

$e_k = \text{Ele}([k], :)$; *// se extrae la k -ésima fila de Ele*

Calcule RL_k ;

$R(e_k, e_k) = R(e_k, e_k) + RL_k$; *// se suman los aportes locales*

fin

devolver R

fin

2.6.2. Cálculo del vector de carga F

Vamos a calcular el vector columna F cuyas componentes están dadas por

$$F_i := \langle f, \phi_i \rangle,$$

para $i = 1, \dots, m$.

Puesto que f es una función de la cual solo sabemos que es continua en $\bar{\Omega}$, en general, no podremos hallar el valor exacto de $\langle f, \phi_j \rangle$, por tanto, aplicaremos *métodos de cuadratura* para aproximar el valor de la integral, como puede ser, por ejemplo, la *cuadratura de Gauss* (ver [5] y [6]) Para aplicar la cuadratura de Gauss la integral a aproximar debe de estar en el dominio $(-1, 1)$, en el caso $d = 1$, o en el dominio $(-1, 1) \times (-1, 1)$, en el caso $d = 2$; por lo tanto, aplicaremos algunas transformaciones lineales a fin de llevar nuestras integrales a dichos dominios.

Por definición, tenemos que

$$\langle f, \phi_j \rangle = \int_{\Omega} f \phi_j dx = \sum_{k=1}^n \int_{e_k} f \phi_j dx.$$

Notemos que si $\text{supp}(\phi_j) \cap e_k = \emptyset$, entonces

$$\int_{e_k} f \phi_j dx = 0.$$

A fin de evitar las integrales que se anulan aplicamos nuevamente la estrategia elemento-por-elemento. Fijemos el elemento e_k y denotemos las integrales locales por

$$\langle f, \phi_i \rangle_k := \int_{e_k} f \phi_i dx.$$

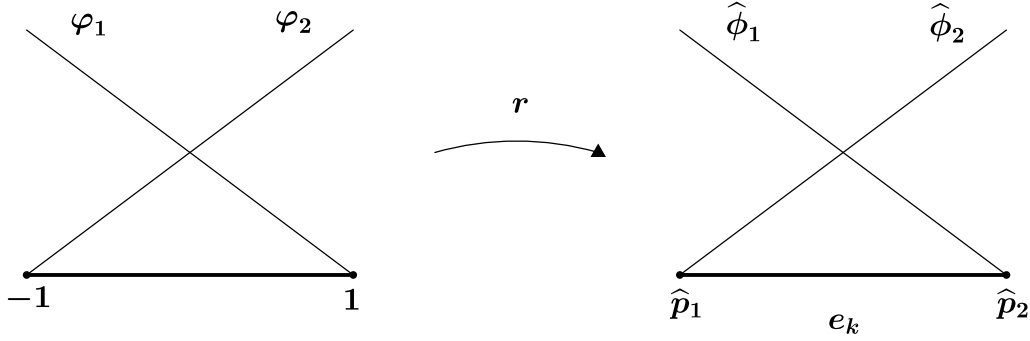
Para el caso $d = 1$: Considere el elemento $e_k = (\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ con las funciones base locales $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ como en la Sección 2.3. Si $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2} \in \{1, \dots, m\}$ son tales que $p_{\lambda_{k,1}} = \hat{p}_1, p_{\lambda_{k,2}} = \hat{p}_2$, entonces la integral local $\langle f, \hat{\phi}_i \rangle = \langle f, \phi_{\lambda_{k,i}} \rangle$ solo aporta a la componente $F_{\lambda_{k,i}}$.

Debemos calcular las siguientes dos integrales locales

$$\begin{aligned} \langle f, \hat{\phi}_1 \rangle_k &= \int_{e_k} f \hat{\phi}_1 dx, \\ \langle f, \hat{\phi}_2 \rangle_k &= \int_{e_k} f \hat{\phi}_2 dx. \end{aligned}$$

Consideremos la transformación lineal $r : [-1, 1] \rightarrow [\hat{p}_1, \hat{p}_2]$ definida por

$$r(\mu) := \frac{(\hat{p}_2 - \hat{p}_1)\mu + \hat{p}_2 + \hat{p}_1}{2}.$$


 Figura 2.7: Transformación r .

Observe que $r'(\mu) = \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{2} = \frac{h_k}{2}$, $\varphi_1(\mu) := (\hat{\phi}_1 \circ r)(\mu) = \frac{1 - \mu}{2}$ y $\varphi_2(\mu) := (\hat{\phi}_2 \circ r)(\mu) = \frac{\mu + 1}{2}$.

Por el Teorema del cambio de variable,

$$\begin{aligned} \langle f, \hat{\phi}_1 \rangle_k &= \int_{e_k} f \hat{\phi}_1 \, dx = \int_{-1}^1 f(r(\mu)) \hat{\phi}_1(r(\mu)) r'(\mu) \, d\mu = \frac{h_k}{4} \int_{-1}^1 (f \circ r)(\mu) (1 - \mu) \, d\mu, \\ \langle f, \hat{\phi}_2 \rangle_k &= \int_{e_k} f \hat{\phi}_2 \, dx = \int_{-1}^1 f(r(\mu)) \hat{\phi}_2(r(\mu)) r'(\mu) \, d\mu = \frac{h_k}{4} \int_{-1}^1 (f \circ r)(\mu) (\mu + 1) \, d\mu. \end{aligned}$$

Utilizamos cuadratura de Gauss para aproximar las dos integrales de la derecha; estos valores inducen un vector de *carga local* sobre el elemento e_k definido como

$$FL_k := \begin{pmatrix} \langle f, \hat{\phi}_1 \rangle_k \\ \langle f, \hat{\phi}_2 \rangle_k \end{pmatrix}.$$

Para el caso $d = 2$: Considere el elemento e_k con nodos $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$ y funciones base locales $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$ como en la Sección 2.3. Si $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \lambda_{k,3} \in \{1, \dots, m\}$ son tales que $p_{\lambda_{k,1}} = \hat{p}_1$, $p_{\lambda_{k,2}} = \hat{p}_2$, $p_{\lambda_{k,3}} = \hat{p}_3$, entonces la integral local $\langle f, \hat{\phi}_i \rangle = \langle f, \phi_{\lambda_{k,i}} \rangle$ solo aporta a la componente $F_{\lambda_{k,i}}$.

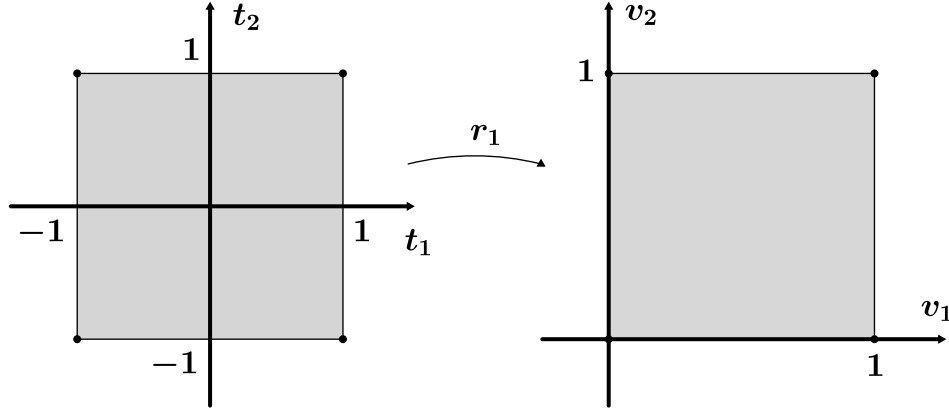
Debemos calcular las siguientes tres integrales

$$\langle f, \hat{\phi}_i \rangle_k = \int_{e_k} f \hat{\phi}_i \, dx \quad \text{con } i = 1, 2, 3.$$

Transformaremos el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ en el elemento e_k en tres pasos: En el primero, transformaremos el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$; en el segundo, transformaremos el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en el triángulo rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$; y en el tercero, transformaremos el triángulo rectángulo en el elemento e_k .

Paso 1: Considere la transformación lineal $r_1 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ definida por

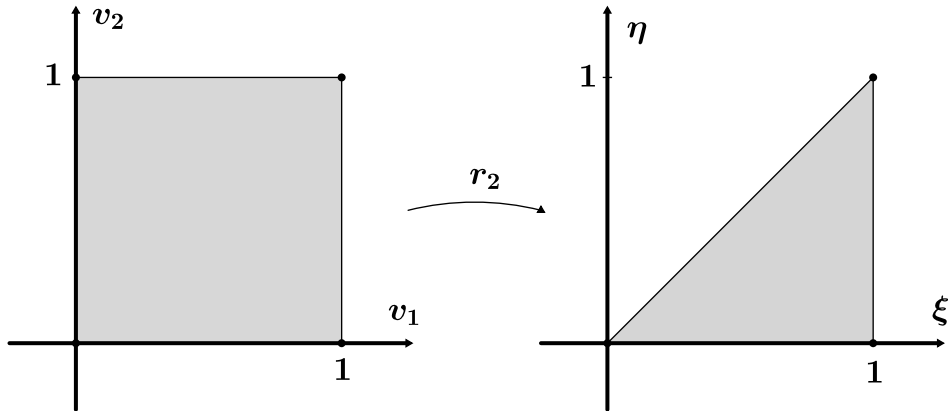
$$r_1(t_1, t_2) := \left(\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2} \right).$$


 Figura 2.8: Transformación r_1 .

El determinante del Jacobiano de r_1 es

$$|Jr_1(t_1, t_2)| = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}.$$

Paso 2: Considere el triángulo rectángulo E de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Llamamos a E *elemento de referencia*. Sea $r_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$ la transformación Duffy (ver [7]) definida por $r_2(v_1, v_2) = (v_1, v_1 v_2)$.


 Figura 2.9: Transformación r_2 .

El determinante del Jacobiano de r_2 es

$$|Jr_2(v_1, v_2)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v_2 & v_1 \end{vmatrix} = v_1.$$

Paso 3: Sea $r_3 : E \rightarrow e_k$ la transformación lineal definida por

$$r_3(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_4 & \sigma_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \xi + \sigma_2 \eta + \sigma_3 \\ \sigma_4 \xi + \sigma_5 \eta + \sigma_6 \end{pmatrix},$$

con $\sigma_i \in \mathbb{R}$ para todo i , tal que $r_3(0, 0) = \hat{p}_1$, $r_3(1, 0) = \hat{p}_2$ y $r_3(1, 1) = \hat{p}_3$.

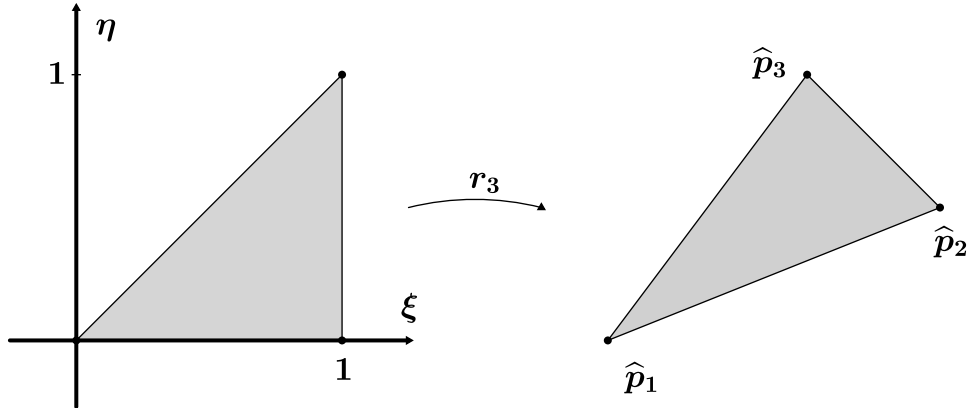


Figura 2.10: Transformación r_3 .

Desarrollando las condiciones tenemos que

$$\begin{aligned} r_3(0, 0) &= \hat{p}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}, \\ r_3(1, 0) &= \hat{p}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \sigma_3 \\ \sigma_4 + \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}, \\ r_3(1, 1) &= \hat{p}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} &= \hat{p}_1, \\ \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} &= \hat{p}_2 - \hat{p}_1, \\ \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} &= \hat{p}_3 - \hat{p}_2. \end{aligned}$$

Así, $r_3(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \hat{p}_2 - \hat{p}_1 & \hat{p}_3 - \hat{p}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \hat{p}_1$ y el determinante del Jacobiano de r_3 es

$$|Jr_3(\xi, \eta)| = \begin{vmatrix} \hat{p}_2 - \hat{p}_1 & \hat{p}_3 - \hat{p}_2 \\ \hat{p}_{2,1} - \hat{p}_{1,1} & \hat{p}_{3,1} - \hat{p}_{2,1} \\ \hat{p}_{2,2} - \hat{p}_{1,2} & \hat{p}_{3,2} - \hat{p}_{2,2} \end{vmatrix}.$$

Las funciones *base locales* del elemento de referencia E son $\varphi_1(\xi, \eta) = -\xi + 1$, $\varphi_2(\xi, \eta) = \xi - \eta$ y $\varphi_3(\xi, \eta) = \eta$, asociadas, respectivamente, a los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Notemos que

$$\begin{aligned} (\hat{\phi}_i \circ r_3)(0, 0) &= \hat{p}_i(\hat{p}_1) = \delta_{i,1} = \varphi_i(0, 0), \\ (\hat{\phi}_i \circ r_3)(1, 0) &= \hat{p}_i(\hat{p}_2) = \delta_{i,2} = \varphi_i(1, 0), \\ (\hat{\phi}_i \circ r_3)(1, 1) &= \hat{p}_i(\hat{p}_3) = \delta_{i,3} = \varphi_i(1, 1), \end{aligned}$$

luego, como $\widehat{\phi}_i \circ r_3$ y φ_i son semiplanos y la transformación r_3 transforma el interior del elemento de referencia E en el interior del elemento e_k , entonces $\widehat{\phi}_i \circ r_3 = \varphi_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Reemplazando las tres transformaciones anteriores en las integrales locales nos queda

$$\begin{aligned}
 \langle f, \widehat{\phi}_i \rangle_k &= \int_{e_k} f \widehat{\phi}_i \, dx \\
 &= \int_E f(r_3(\xi, \eta)) \widehat{\phi}_i(r_3(\xi, \eta)) |Jr_3(\xi, \eta)| \, d\xi d\eta \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 f(r_3(r_2(v_1, v_2))) \widehat{\phi}_i(r_3(r_2(v_1, v_2))) |Jr_3| |Jr_2(v_1, v_2)| \, dv_1 dv_2 \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r_3(r_2(r_1(t_1, t_2)))) \widehat{\phi}_i(r_3(r_2(r_1(t_1, t_2)))) |Jr_3| |Jr_2(r_1(t_1, t_2))| |Jr_1(t_1, t_2)| \, dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{|Jr_3|}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (f \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1)(t_1, t_2) (\widehat{\phi}_i \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1)(t_1, t_2) (t_1 + 1) \, dt_1 dt_2,
 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$.

Simplificando las composiciones obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle f, \widehat{\phi}_1 \rangle_k &= \frac{|Jr_3|}{16} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (f \circ \Upsilon)(t_1, t_2) (1 - t_1) (t_1 + 1) \, dt_1 dt_2, \\
 \langle f, \widehat{\phi}_2 \rangle_k &= \frac{|Jr_3|}{32} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (f \circ \Upsilon)(t_1, t_2) (1 - t_2) (t_1 + 1)^2 \, dt_1 dt_2, \\
 \langle f, \widehat{\phi}_3 \rangle_k &= \frac{|Jr_3|}{32} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (f \circ \Upsilon)(t_1, t_2) (t_2 + 1) (t_1 + 1)^2 \, dt_1 dt_2,
 \end{aligned}$$

donde $\Upsilon(t_1, t_2) := (r_3 \circ r_2 \circ r_1)(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} \widehat{p}_2 - \widehat{p}_1 & \widehat{p}_3 - \widehat{p}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(t_1 + 1) \\ (t_1 + 1)(t_2 + 1) \end{pmatrix} + \widehat{p}_1$.

Ahora podemos usar cuadratura de Gauss para aproximar las últimas integrales, lo cual define el vector de *carga* del elemento e_k como

$$FL_k := \begin{pmatrix} \langle f, \widehat{\phi}_1 \rangle_k \\ \langle f, \widehat{\phi}_2 \rangle_k \\ \langle f, \widehat{\phi}_3 \rangle_k \end{pmatrix}.$$

A continuación daremos el algoritmo para ensamblar el vector F .

Algoritmo 2: Algoritmo para calcular el vector F en una y dos dimensiones.

Entrada: Coor , Ele , f .

Salida: Vector columna F .

inicio

Sea m el número de filas de Coor ;

Sea n el número de filas de Ele ;

Inicialice el vector de ceros F de $m \times 1$;

// Ensamble de F .

para $k = 1 : n$ **hacer**

$e_k = \text{Ele}([k], :)$; // se extrae la k -ésima fila de Ele

 Calcule FL_k ;

$F(e_k) = F(e_k) + FL_k$; // se suman los aportes locales

fin

devolver F

fin

Finalmente podemos dar el algoritmo para obtener la aproximación u_h de la solución del Problema PV_e .

Algoritmo 3: Algoritmo FEM para la ecuación de Poisson en una y dos dimensiones.

Entrada: Coor , Ele , f , g , m_1 .

Salida: Vector C .

inicio

Sea m el número de filas de Coor ;

Inicialice el vector de ceros C de $m \times 1$;

Calcule R ;

Calcule F ;

para $i = m_1 + 1 : m$ **hacer**

$C_i = g(p_i)$;

fin

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales (2.8) para $C([1, \dots, m_1])$;

devolver C

fin

2.7. Resultados numéricos

En la Sección 2.5 obtuvimos una cota para el error de la forma

$$E_h := \|u - u_h\|_0 \leq Ch^\alpha,$$

con C es una constante que depende de u , Ω y $a(\cdot, \cdot)$ y siendo $\alpha \in \mathbb{N}$ el orden de convergencia del error. Con una cota de esta forma tenemos que si $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$ una sucesión

decreciente que converge a cero, entonces $E_{h_j} \rightarrow 0$, más aún, si h en un paso disminuye con cierta razón, entonces se espera que el error E_{h_j} disminuya a la α -ésima potencia de esa razón; así, por ejemplo, si $\alpha = 2$ y h en un paso disminuye a la mitad, se espera que el error disminuya a una cuarta parte de lo que era en el paso anterior.

Sea $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$ una sucesión decreciente que converge a cero. Para cada j tenemos que

$$E_{h_j} \leq Ch_j^\alpha,$$

sacando logaritmo natural a ambos lados,

$$\ln E_{h_j} \leq \ln(Ch_j^\alpha) = \ln C + \alpha \ln h_j.$$

Haciendo una gráfica ln-ln de h_j vs. E_{h_j} lo anterior debe ser casi una línea recta, cuya pendiente es aproximadamente α y que corta el eje vertical en $\ln C$. Nuestro objetivo es medir numéricamente el valor de α , para esto, mediremos la pendiente de la secante formada entre el paso h_j y el paso h_{j+1} , esto, definirá una sucesión de pendientes $\{\Theta_{h_j}\}$ cuyo límite debe ser precisamente α .

Notemos que en el paso j tenemos

$$\ln E_{h_j} - \alpha \ln h_j \approx \ln E_{h_{j+1}} - \alpha \ln h_{j+1},$$

cuya pendiente es

$$\alpha \approx \Theta_{h_j} = \frac{\ln E_{h_{j+1}} - \ln E_{h_j}}{\ln h_{j+1} - \ln h_j} = \frac{\ln(E_{h_{j+1}}/E_{h_j})}{\ln(h_{j+1}/h_j)}.$$

Ejemplo 1. Aproximar mediante FEM la solución $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} u''(x) = 12x^2, & \text{para } x \in (0, 1) \\ u(0) = 1, \\ u(1) = 4. \end{cases}$$

La solución clásica del problema es $u(x) = x^4 + 2x + 1$. Denotando el error como $E_h := \|u - u_h\|_0$ y n el número de elementos en el dominio tenemos la siguiente tabla:

h	n	E_h	Θ_h
1/2	2	0.112577134050886	1.907935951754907
1/4	4	0.029998824485071	1.977819413015160
1/8	8	0.007615900610221	1.994504629181907
1/16	16	0.001911241415990	1.998629232029896
1/32	32	0.000478264558362	—

Cuadro 2.1: FEM para la ecuación de Poisson 1D.

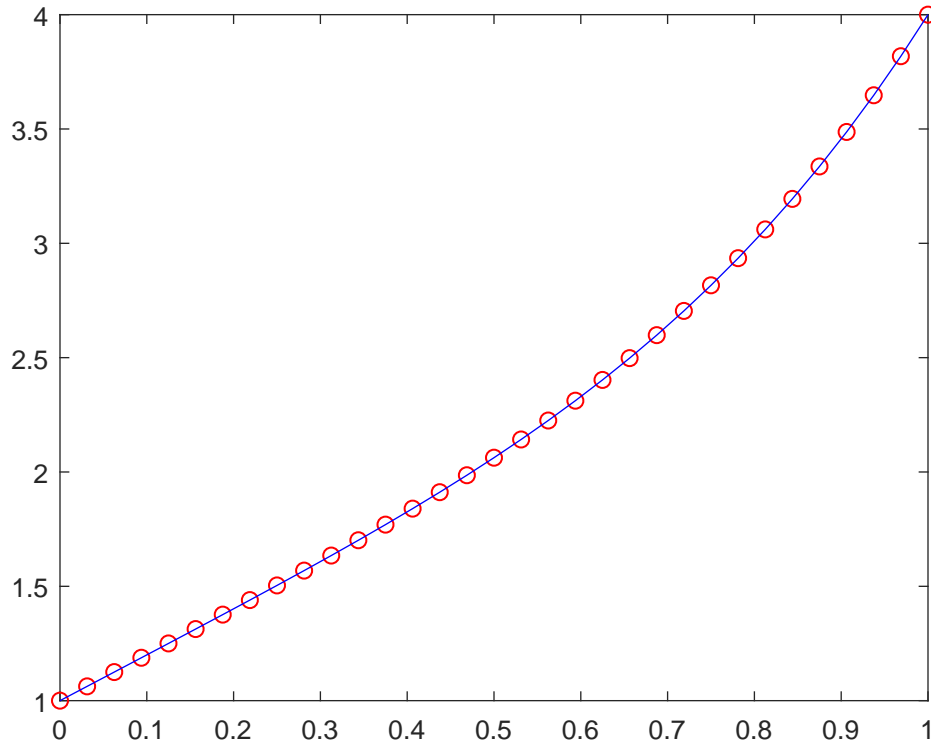


Figura 2.11: Función u_h con $h = 1/32$, ejemplo 1.

Notemos que a medida que h disminuye a razón de dos, el error E_h disminuye a razón de cuatro, además, la sucesión $\{\Theta_h\}$ converge al valor $\alpha = 2$ lo cual verifica numéricamente el orden de convergencia del estimador a priori de la Proposición 2.10.

La figura 2.11 es la gráfica de la aproximación u_h de u para $h = 1/32$. Los círculos en rojo corresponden al valor de u_h en cada nodo p_i .

En la figura 2.12 podemos ver las secantes que unen los puntos $(\ln h_j, \ln E_j)$, $(\ln h_{j+1}, \ln E_{j+1})$ para cada j . Note la ligera curvatura de la línea, a medida que el valor de h disminuye el valor de la pendiente θ_h se acerca al valor de $\alpha = 2$.

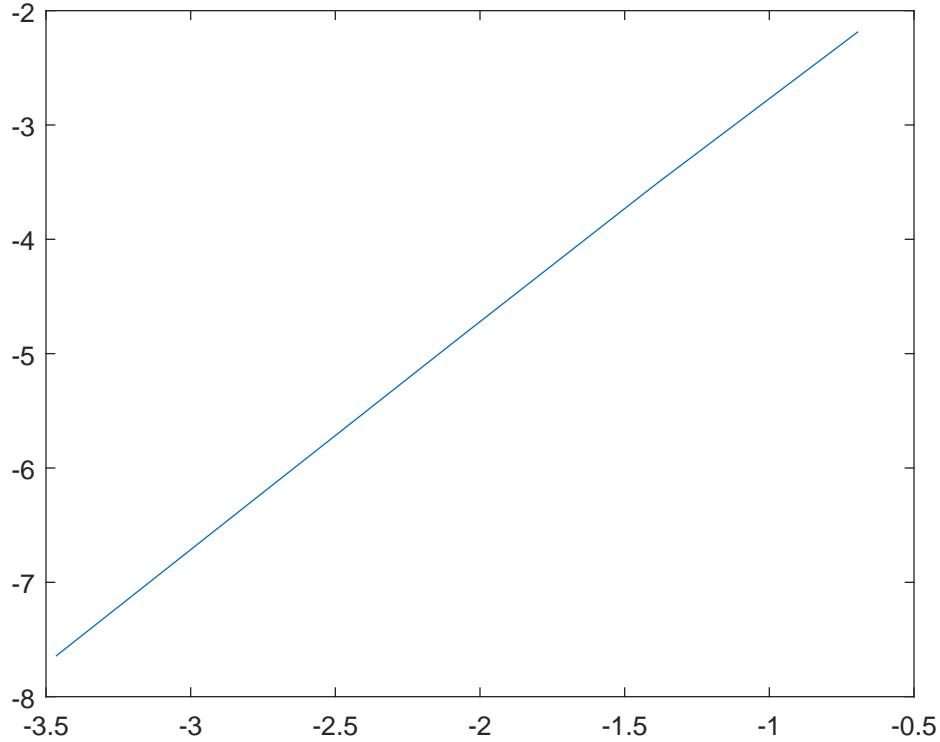


Figura 2.12: Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, ejemplo 1.

Ejemplo 2. Aproximar la solución $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} u''(x, y) = 6x - \pi^2 \sin(\pi y), & \text{para } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y) = x^3, & \text{si } (x, y) \in (0, 1) \times \{0, 1\} \\ u(x, y) = x + \sin(\pi y), & \text{si } (x, y) \in \{0, 1\} \times (0, 1). \end{cases}$$

La solución clásica del problema es $u(x, y) = x^3 + \sin(\pi y)$.

h	n	E_h	Θ_h
1/2	8	0.107537755412505	1.846030912815032
1/4	32	0.029912333189450	1.965428169483916
1/8	128	0.007659447723024	1.991562309381925
1/16	512	0.001926093931958	1.997902894897799
1/32	2048	0.000482223935689	—

Cuadro 2.2: FEM para la ecuación de Poisson 2D.

Nuevamente, notemos que a medida que h disminuye a razón de dos, el error E_h disminuye a razón de cuatro, además, la sucesión de las pendientes $\{\Theta_h\}$ converge al valor $\alpha = 2$ lo cual verifica numéricamente el orden de convergencia del estimador a priori de la Proposición 2.10.

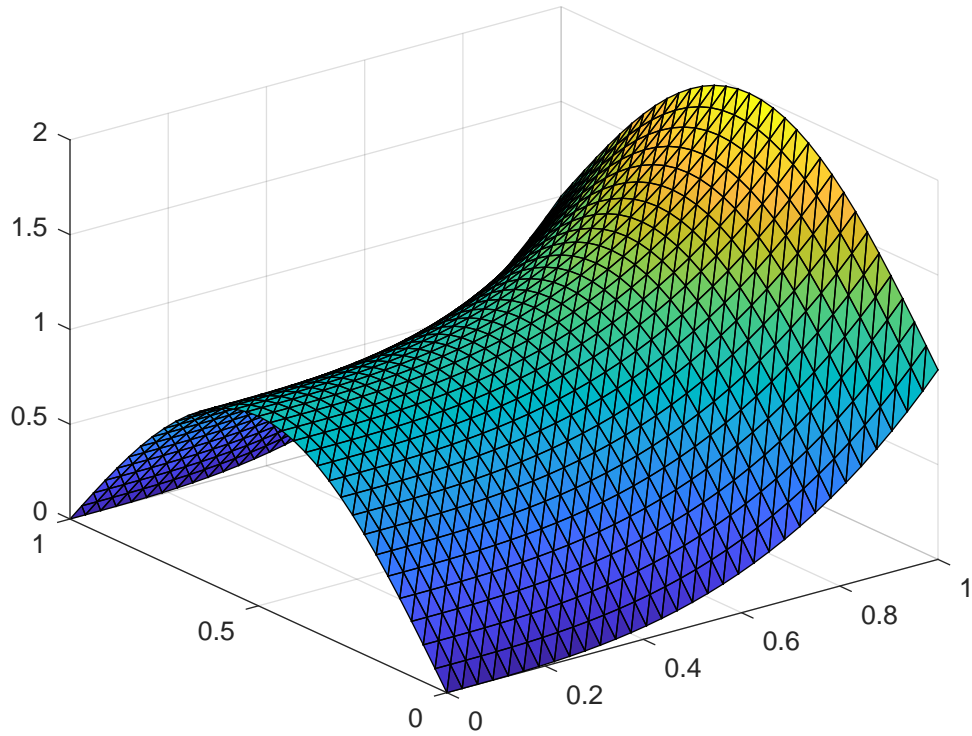


Figura 2.13: Función u_h con $h = 1/32$, ejemplo 2.

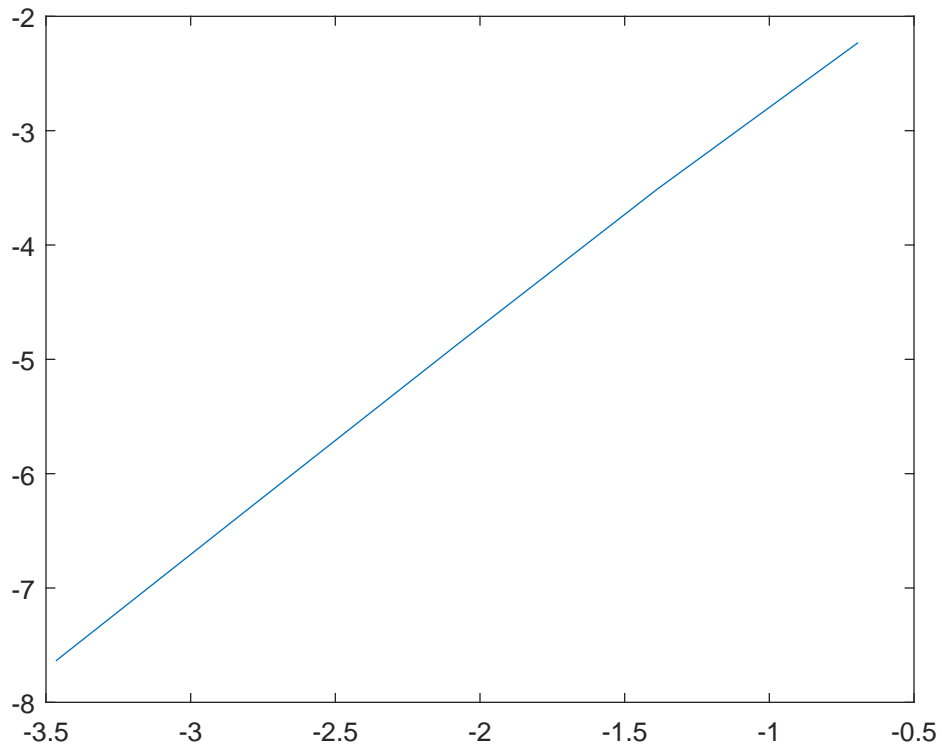


Figura 2.14: Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, ejemplo 2.

Capítulo 3

Ecuación del calor dependiente del tiempo

En este capítulo vamos a desarrollar la teoría de FEM para la *ecuación del calor no homogénea dependiente del tiempo con condiciones de frontera mixtas*, donde las condiciones mixtas serán de tipo *Dirichlet* y *Neumann*, la cual se usa, principalmente, para estudiar el flujo de calor a través de una determinada estructura.

3.1. Problema clásico

Sean $d \in \{1, 2\}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un dominio de \mathbb{R}^d con frontera de Lipschitz, $T > 0$ y sean $\Gamma, \Lambda \subseteq \partial\Omega$ dos subconjuntos abiertos de $\partial\Omega$ tales que $\bar{\Gamma} \cup \bar{\Lambda} = \partial\Omega$, $\Gamma \cap \Lambda = \emptyset$ y $\Lambda \neq \emptyset$. Considere el siguiente problema:

Problema EC: Se desea encontrar una función $u : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & \text{para } (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\ u = g_1, & \text{para } (t, x) \in [0, T] \times \Lambda \\ Bu = g_2, & \text{para } (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{para } x \in \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

donde f , g_1 , g_2 y u_0 están dadas y son continuas y, además, B es un operador definido por

- Para $d = 1$, $Bu := \frac{\partial u}{\partial x}$.
- Para $d = 2$, $Bu := \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \nabla u \cdot \hat{n}$ es la derivada direccional de u en dirección al vector \hat{n} , siendo \hat{n} un vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

Fijemos $t \in [0, T]$ y definamos

$$H_{\Lambda}^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ en } \Lambda\}.$$

Sea $v \in H_{\Lambda}^1(\Omega)$. Multiplicando la primera expresión en (3.1) por v e integrando sobre Ω obtenemos

$$\int_{\Omega} u_t(t)v \, dx - \int_{\Omega} v \Delta u(t) \, dx = \int_{\Omega} f(t)v \, dx, \quad (3.2)$$

donde $u_t(t) := \frac{\partial u(t)}{\partial t}$.

Para el caso $d = 1$: Asumiendo que $\Omega := (b_1, b_2) \subseteq \mathbb{R}$ e integrando por partes en el lado izquierdo de (3.2) nos deja

$$\int_{b_1}^{b_2} u_t(t)v \, dx + \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx - v \frac{\partial u(t)}{\partial x} \Big|_{b_1}^{b_2} = \int_{b_1}^{b_2} f(t)v \, dx.$$

Sean $i_{\Lambda}, i_{\Gamma} \in \{1, 2\}$ tales que $b_{i_{\Lambda}} \in \Lambda$ y $b_{i_{\Gamma}} \in \Gamma$. Como $v \in H_{\Lambda}^1(\Omega)$, entonces $v(b_{i_{\Lambda}}) = 0$, luego

$$\int_{b_1}^{b_2} u_t(t)v \, dx + \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = \int_{b_1}^{b_2} f(t)v \, dx + v(b_{i_{\Gamma}}) \frac{\partial u(t, b_{i_{\Gamma}})}{\partial x}.$$

Así, si u es la solución clásica del Problema *EC*, entonces u satisface

$$\int_{b_1}^{b_2} u_t(t)v \, dx + \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = \int_{b_1}^{b_2} f(t)v \, dx + v(b_{i_{\Gamma}})g_2(t, b_{i_{\Gamma}}) \quad \forall v \in H_{\Lambda}^1(\Omega).$$

Para el caso $d = 2$: Aplicando la identidad de Green al lado izquierdo de (3.2), obtenemos

$$\int_{\Omega} u_t(t)v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u(t)}{\partial \widehat{n}} \, dS = \int_{\Omega} f(t)v \, dx$$

y, de esto,

$$\int_{\Omega} u_t(t)v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Lambda} v \frac{\partial u(t)}{\partial \widehat{n}} \, dS - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u(t)}{\partial \widehat{n}} \, dS = \int_{\Omega} f(t)v \, dx.$$

Como $v \in H_{\Lambda}^1(\Omega)$, entonces $v(x) = 0$ para $x \in \Lambda$, luego

$$\int_{\Omega} u_t(t)v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(t)v \, dx + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u(t)}{\partial \widehat{n}} \, dS.$$

Así, si u es la solución clásica del Problema *EC*, entonces u satisface

$$\int_{\Omega} u_t(t)v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(t)v \, dx + \int_{\Gamma} v g_2(t) \, dS \quad \forall v \in H_{\Lambda}^1(\Omega).$$

3.2. Problema variacional

Sea $g_0 \in L_2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L_2(\Omega))$ tal que $g_0 = g_1$ en $[0, T] \times \Lambda$. El problema variacional asociado al Problema EC es el siguiente:

Problema PV_t: Dado $f \in L_2((0, T) \times \Omega)$ y $u_0 \in L_2(\Omega)$ queremos encontrar u tal que $u - g_0 \in L_2(0, T; H^1_\Lambda(\Omega)) \cap C([0, T]; L_2(\Omega))$ y que satisfaga

$$\begin{cases} \langle u_t(t), v \rangle + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle + \langle g_2(t), v \rangle_\Gamma & \forall v \in H^1_\Lambda(\Omega), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

para cada $t \in [0, T]$, donde

$$a(u(t), v) := \langle \nabla u(t), \nabla v \rangle = \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx$$

y

- Para $d = 1$, $\langle g_2(t), v \rangle_\Gamma := v(b_{i_\Gamma})g_2(t, b_{i_\Gamma})$,
- Para $d = 2$, $\langle g_2(t), v \rangle_\Gamma := \int_\Gamma v g_2(t) \, dS$.

Decimos que una función u es una *solución débil* del Problema EC, si es solución del Problema PV_t.

El siguiente resultado nos dice que el Problema PV_t tiene solución única.

Teorema 3.1. Suponga que $\Gamma = \emptyset$ y $g_1 = 0$. Entonces el Problema PV_t tiene solución única u ; más aún, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T; H^1_0(\Omega)')$ y existe $\alpha > 0$ constante tal que

$$\|u(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^\tau \|u(\tau)\|_1^2 \, d\tau \leq \|u_0\|_0^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau \|f(\tau)\|_0^2 \, d\tau,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demostración. Ver [3, página 366].

□

El siguiente corolario dice bajo que condiciones se puede garantizar que la solución débil del problema EC tiene segundas derivadas parciales débiles en las variables espaciales y primera derivada parcial débil en su variable temporal.

Corolario 3.2. Asuma que $u_0 \in H^1_\Lambda(\Omega)$. Suponga que u es la función del Teorema 3.1 y que esta satisface

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C (\|\Delta u(t)\|_0^2 + \|u(t)\|_1^2)$$

en casi todas partes en $[0, T]$ para alguna constante $C > 0$. Entonces $u \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L_2(\Omega)) \cap C([0, T]; H^1_\Lambda(\Omega))$ y se cumple que

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_1^2 + \int_0^T \left(\left\| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right\|_0^2 + \|u(t)\|_2^2 \right) dt \leq C_\alpha \left(\|u(t)\|_1^2 + \int_0^T \|f(t)\|_0^2 \, dt \right).$$

Demostración. Ver [3, página 372]. □

Buscamos ahora aproximar la solución del Problema PV_t utilizando FEM.

3.3. Problema variacional semi-discreto

Asumamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ es un dominio con frontera poligonal de \mathbb{R}^d para $d = 1, 2$. Sea \mathcal{T}_h una triangulación de Ω en lados o triángulos de tamaño h , $\{p_1, \dots, p_m\}$ la lista de los nodos y $S_h = \langle \phi_1, \dots, \phi_{m_1}, \phi_{m_1+1}, \dots, \phi_m \rangle$ tal y como se definieron en la Sección 2.3. Consideremos la lista de los nodos. Recordemos que p_1, \dots, p_{m_1} denotan los nodos interiores de Ω y p_{m_1+1}, \dots, p_m denotan los nodos que están en $\partial\Omega$. Sea $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m - m_2$ es el número de nodos que están en Λ . Puesto que sobre los nodos fronterizos pesan condiciones de tipo Dirichlet y Neumann, vamos a reorganizarlos de manera tal que $p_{m_1+1}, \dots, p_{m_2}$ denoten los *nodos Neumann* y p_{m_2+1}, \dots, p_m denoten los *nodos Dirichlet*. Con esto, definimos el espacio

$$S_0 := \langle \phi_1, \dots, \phi_{m_1}, \phi_{m_1+1}, \dots, \phi_{m_2} \rangle = S_h \cap H_\Lambda^1(\Omega)$$

formado por todas las funciones continuas en $\bar{\Omega}$ que son lineales en cada elemento e_k y que se anulan en los nodos Dirichlet.

Definimos el problema *variacional semi-discreto* asociado al Problema *EC* como sigue.

Problema $PVSD_t$: Dadas $f \in L_2((0, T) \times \Omega)$ y $u_0 \in L_2(\Omega)$, para cada $t \in [0, T]$ queremos encontrar $u_h(t) \in S_h$ que satisfaga

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, v \right\rangle + a(u_h(t), v) = \langle f(t), v \rangle + \langle g_2(t), v \rangle_\Gamma & \forall v \in S_0, t \in (0, T), \\ u_h(0) = u_h(0), \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $u_h(0) \in S_h$ es una aproximación dada de u_0 y, para todo $t \in (0, T)$, cumpla que $u_h(t, p_i) = g_1(t, p_i)$ para cada $i = m_2 + 1, \dots, m$.

Sean $t \in (0, T)$ fijo y $u_h(0) := \sum_{i=1}^m c_i(0) \phi_i$ una aproximación de u_0 . Suponiendo que $u_h(t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) \phi_i$, con $c_i(t) \in \mathbb{R}$, y reemplazando en (3.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^m c'_i(t) \phi_i, v \right\rangle + a \left(\sum_{i=1}^m c_i(t) \phi_i, v \right) &= \langle f(t), v \rangle + \langle g_2(t), v \rangle_\Gamma, \\ \sum_{i=1}^m c'_i(t) \langle \phi_i, v \rangle + \sum_{i=1}^m c_i(t) a(\phi_i, v) &= \langle f(t), v \rangle + \langle g_2(t), v \rangle_\Gamma. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De las condiciones de frontera tenemos

$$u_h(t, p_j) = c_j(t) = g_1(t, p_j) \quad \forall j \in \{m_2 + 1, \dots, m\}$$

y, de esto,

$$\frac{\partial u_h(t)}{\partial t} = c'_j(t) = \frac{\partial g_1(t, p_j)}{\partial t} \quad \forall j \in \{m_2 + 1, \dots, m\}.$$

Reordenando los términos de (3.5) nos queda

$$\sum_{i=1}^{m_2} c'_i(t) \langle \phi_i, v \rangle + \sum_{i=1}^{m_2} c_i(t) a(\phi_i, v) = \langle f(t), v \rangle + \langle g_2(t), v \rangle_{\Gamma} - \sum_{i=m_2+1}^m c'_i(t) \langle \phi_i, v \rangle - \sum_{i=m_2+1}^m c_i(t) a(\phi_i, v)$$

Tomando $v = \phi_j$ para $i = 1, \dots, m_2$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones *diferenciales ordinarias lineales de orden uno con condiciones iniciales*

$$\begin{cases} M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) C'(t)([1, \dots, m_2]) \\ \quad + R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) C(t)([1, \dots, m_2]) \\ \quad = F(t)([1, \dots, m_2]) + G(t)([1, \dots, m_2]) \\ \quad - M([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) C'(t)([m_2 + 1, \dots, m]) \\ \quad - R([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) C(t)([m_2 + 1, \dots, m]) \\ \\ C(0) = [c_1(0), \dots, c_m(0)]^T, \end{cases} \quad (3.6)$$

donde

- M y R son matrices cuyas entradas están dadas por $M_{i,j} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle$, $R_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$ para $i, j \in \{1, \dots, m\}$
- y $F(t)$, $G(t)$, $C(t)$, $C'(t)$ son vectores columna cuyas componentes están dadas por $F(t)_i = \langle f(t), \phi_i \rangle$, $G(t)_i = \langle g_2(t), \phi_i \rangle$, $C(t)_i = c_i(t)$, $C'(t)_i = c'_i(t)$ para $i \in \{1, \dots, m\}$.

Proposición 3.3. *El sistema 3.6 tiene solución única.*

Demostración. Ver [3, página 374]. □

El siguiente resultado nos será de utilidad para establecer un orden de convergencia para el error.

Proposición 3.4. *Sea \mathcal{T}_h una familia de particiones regulares de Ω y suponga que $u_0 \in H^1_{\Lambda}(\Omega)$. Bajo las condiciones del Corolario 3.2 tenemos que, si u y u_h son las soluciones de los Problemas EC y PVSD_t, respectivamente, entonces estas satisfacen*

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^t \|u(\tau) - u_h(\tau)\|_1^2 d\tau \\ \leq \|u_0 - u_{0,h}\|_0^2 + C_{\alpha,\gamma} h^2 \left(\|u_{0,h}\|_1^2 + \|u_0\|_1^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 d\tau \right) \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, T]$, donde α y γ son las constantes de coercividad y continuidad de $a(\cdot, \cdot)$, respectivamente, y $C_{\alpha,\gamma} > 0$ es una constante independiente de h .

Demostración. Ver [3, página 374]. □

Usando el anterior resultado obtenemos el siguiente orden de convergencia para el error.

Proposición 3.5. *Sea $u_h(0) = \sum_{i=1}^m c_i(0)\phi_i$, con $c_i(0) := u_0(p_i)$ y sea u_h la solución del Problema $PVSD_t$. Bajo las condiciones de la Proposición 3.4, para cada instante t , obtenemos el siguiente orden de convergencia*

$$\|u(t) - u_h(t)\|_0 = O(h).$$

Demostración. Ver [3, página 375]. □

3.4. Problema variacional totalmente discreto

Buscamos ahora discretizar la variable temporal a fin de poder establecer un sistema de ecuaciones lineales que nos permita aproximar la solución del Problema $PVSD_t$.

Sea $\{[t_q, t_{q+1}] : q = 0, 1, \dots, J-1\}$ una partición regular de $[0, T]$ en J subintervalos de longitud $\Delta t := T/J$ con $t_J = T$. Observe que $t_q = q\Delta t$ para cada q . Sea u la solución del Problema PV_t , queremos aproximar $u(t)$ en el instante $t = t_q$.

Utilizaremos el método de *diferencias finitas* a fin de definir un problema *variacional totalmente discreto* asociado al Problema EC . Para ilustrar el método, considere el siguiente problema:

Problema ED : *Se desea encontrar una función y que satisfaga*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \chi(t, y(t)), & 0 < t < T \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donde χ es una función continua en $[0, T] \times \mathbb{R}$ y y_0 está dada.

En el método de diferencias finitas se reemplaza el Problema ED por el siguiente problema asociado:

Problema EDF : *Sea $\theta \in [0, 1]$ fijo. Para cada $q = 0, \dots, J-1$ se desea encontrar y^{q+1} que satisfaga*

$$\frac{y^{q+1} - y^q}{\Delta t} = \theta \chi(t_{q+1}, y^{q+1}) + (1 - \theta) \chi(t_q, y^q)$$

con $y^0 := y_0$, donde y^q es la aproximación de $y(t_q)$.

Para cada $q = 1, \dots, J$ tomamos $u_h^q := \sum_{i=1}^m c_i^q \phi_i \in S_h$, con $c_i^q \in \mathbb{R}$ constante, y definimos $u_h^0 := u_0$. Aplicando el método de diferencias finitas al Problema $PVSD_t$, obtenemos el siguiente problema *totalmente discreto* asociado al Problema EC :

Problema PVTD_t: Sea $f \in L_2((0, T) \times \Omega)$. Para cada $q = 0, \dots, J-1$ queremos encontrar $u_h^{q+1} \in S_h$ que satisfaga

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_h^{q+1} - u_h^q}{\Delta t}, v \right\rangle + a(\theta u_h^{q+1} + (1-\theta)u_h^q, v) \\ = \langle \theta f^{q+1} + (1-\theta)f^q, v \rangle + \langle \theta g_2^{q+1} + (1-\theta)g_2^q, v \rangle_\Gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

para toda $v \in S_0$, siendo $u_h^0 = u_0$ y denotando $f^q(\cdot) := f(t_q, \cdot)$, $g_2^q(\cdot) := g_2(t_q, \cdot)$ para cada q .

A continuación trataremos los casos $\theta = 0, 1, 1/2$, los cuales son llamados, respectivamente, Método de Forward Euler, Backward Euler y Crank-Nicolson.

De aquí en adelante tomaremos $u_h^0 := \sum_{i=1}^m c_i^0 \phi_i$ con $c_i^0 := u_0(p_i)$, de este modo, u_h^0 es una interpolación de u_0 sobre S_h , lo cual nos facilitará los cálculos siguientes.

3.4.1. Método de Forward Euler

Tomando $\theta = 0$ en (3.7), tenemos que

$$\left\langle \frac{u_h^{q+1} - u_h^q}{\Delta t}, v \right\rangle + a(u_h^q, v) = \langle f^q, v \rangle + \langle g_2^q, v \rangle_\Gamma.$$

Por la bilinealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\langle u_h^{q+1}, v \rangle - \langle u_h^q, v \rangle + \Delta t a(u_h^q, v) = \Delta t \langle f^q, v \rangle + \Delta t \langle g_2^q, v \rangle_\Gamma,$$

$$\langle u_h^{q+1}, v \rangle = \Delta t \langle f^q, v \rangle + \Delta t \langle g_2^q, v \rangle_\Gamma + \langle u_h^q, v \rangle - \Delta t a(u_h^q, v).$$

Tomando $u_h^q := \sum_{i=1}^m c_i^q \phi_i$, con $c_i^q \in \mathbb{R}$, para $q = 0, \dots, J-1$, nos deja

$$\left\langle \sum_{i=1}^m c_i^{q+1} \phi_i, v \right\rangle = \Delta t \langle f^q, v \rangle + \Delta t \langle g_2^q, v \rangle_\Gamma + \left\langle \sum_{i=1}^m c_i^q \phi_i, v \right\rangle - \Delta t a \left(\sum_{i=1}^m c_i^q \phi_i, v \right)$$

y por la bilinealidad,

$$\sum_{i=1}^m c_i^{q+1} \langle \phi_i, v \rangle = \Delta t \langle f^q, v \rangle + \Delta t \langle g_2^q, v \rangle_\Gamma + \sum_{i=1}^m c_i^q \langle \phi_i, v \rangle - \Delta t \sum_{i=1}^m c_i^q a(\phi_i, v). \quad (3.8)$$

Para todo nodo p_j se tiene que $u_h^{q+1}(p_j) = \sum_{i=1}^m c_i^{q+1} \phi(p_j) = c_j^{q+1}$. Usando las condiciones de frontera tipo Dirichlet del Problema EC tenemos que $c_j^{q+1} = g_1(t_{q+1}, p_j)$ para cada $j = m_2 + 1, \dots, m$.

Reorganizando los términos en (3.8) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{m_2} c_i^{q+1} \langle \phi_i, v \rangle = \Delta t \langle f^q, v \rangle + \Delta t \langle g_2^q, v \rangle_{\Gamma} + \sum_{i=1}^m c_i^q \langle \phi_i, v \rangle - \Delta t \sum_{i=1}^m c_i^q a(\phi_i, v) - \sum_{i=m_2+1}^m c_i^{q+1} \langle \phi_i, v \rangle.$$

Tomando $v = \phi_j$ para $j = 1, \dots, m_2$ obtenemos un sistema de ecuaciones lineales de $m_2 \times m_2$, donde c_j^{q+1} , para $j = 1, \dots, m_2$, son las incógnitas y c_j^q , para $j = 1, \dots, m$, son las soluciones halladas en un *paso de tiempo* anterior.

Ahora, sean

- R la matriz de rigidez con componentes dadas por $R_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$ para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$,
- M la matriz de masa con componentes $M_{i,j} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle$ para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$,
- F^q un vector columna con componentes $F_i^q = \langle f^q, \phi_i \rangle$ para $i \in \{1, \dots, m\}$,
- y G^q un vector columna con componentes $G_i^q = \langle g_2^q, \phi_i \rangle_{\Gamma}$ para $i \in \{1, \dots, m\}$.

Usando estas notaciones podemos escribir el anterior sistema de ecuaciones en forma matricial como sigue

$$\begin{aligned} & M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) C^{q+1}([1, \dots, m_2]) \\ &= \Delta t F^q([1, \dots, m_2]) + \Delta t G^q([1, \dots, m_2]) + M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m]) C^q \\ &\quad - \Delta t R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m]) C^q \\ &\quad - M([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) C^{q+1}([m_2 + 1, \dots, m]), \end{aligned}$$

y que podemos factorizar como

$$\begin{aligned} & M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) C^{q+1}([1, \dots, m_2]) \\ &= \Delta t (F^q([1, \dots, m_2]) + G^q([1, \dots, m_2])) \\ &\quad + (M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m]) - \Delta t R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m])) C^q \\ &\quad - M([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) C^{q+1}([m_2 + 1, \dots, m]). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Teorema 3.6. *El sistema de ecuaciones lineales (3.9) tiene solución única.*

Demostración. Veamos que la matriz $M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2])$ es simétrica y definida positiva.

La simetría se sigue del hecho que $\langle \phi_j, \phi_i \rangle = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$ para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Veamos que es definida positiva. Sean $\sigma^T = (\sigma_1, \dots, \sigma_{m_2}) \in \mathbb{R}^{m_2} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ y $\varphi = \sum_{i=1}^{m_2} \sigma_i \phi_i$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma^T M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) \sigma &= \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} \sigma_i \sigma_j M_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} \sigma_i \sigma_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{m_2} \sigma_j \phi_j, \sum_{i=1}^{m_2} \sigma_i \phi_i \right\rangle \\ &= \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= \|\varphi\|_0^2. \end{aligned}$$

Como $\sigma_i \neq 0$ para todo i y las funciones base son linealmente independientes, entonces $\varphi \neq 0$ y, por tanto,

$$\sigma^T M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) \sigma = \|\varphi\|_0^2 > 0,$$

de lo cual se sigue que $M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2])$ es definida positiva.

Ahora, como $M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2])$ es simétrica y definida positiva, es invertible y, por tanto, el sistema (3.9) tiene solución única. \square

3.4.2. Método de Backward Euler

Tomando $\theta = 1$ en (3.7), tenemos que

$$\left\langle \frac{u_h^{q+1} - u_h^q}{\Delta t}, v \right\rangle + a(u_h^{q+1}, v) = \langle f^{q+1}, v \rangle + \langle g_2^{q+1}, v \rangle_\Gamma.$$

De la bilinealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tenemos que

$$\langle u_h^{q+1}, v \rangle - \langle u_h^q, v \rangle + \Delta t a(u_h^{q+1}, v) = \Delta t \langle f^{q+1}, v \rangle + \Delta t \langle g_2^{q+1}, v \rangle_\Gamma,$$

$$\langle u_h^{q+1}, v \rangle + \Delta t a(u_h^{q+1}, v) = \Delta t \langle f^{q+1}, v \rangle + \Delta t \langle g_2^{q+1}, v \rangle_\Gamma + \langle u_h^q, v \rangle.$$

Tomando $u_h^q := \sum_{i=1}^m c_i^q \phi_i$, con $c_i^q \in \mathbb{R}$, para $q = 0, \dots, J-1$, nos deja

$$\left\langle \sum_{i=1}^m c_i^{q+1} \phi_i, v \right\rangle + \Delta t a \left(\sum_{i=1}^m c_i^{q+1} \phi_i, v \right) = \Delta t \langle f^{q+1}, v \rangle + \Delta t \langle g_2^{q+1}, v \rangle_\Gamma + \left\langle \sum_{i=1}^m c_i^q \phi_i, v \right\rangle$$

y por la bilinealidad,

$$\sum_{i=1}^m c_i^{q+1} \langle \phi_i, v \rangle + \Delta t \sum_{i=1}^m c_i^{q+1} a(\phi_i, v) = \Delta t \langle f^{q+1}, v \rangle + \Delta t \langle g_2^{q+1}, v \rangle_\Gamma + \sum_{i=1}^m c_i^q \langle \phi_i, v \rangle.$$

Teniendo en cuenta que $c_j^{q+1} = g_1(t_{q+1}, p_j)$ para cada $j = m_2 + 1, \dots, m$, en virtud de las condiciones de frontera tipo Dirichlet, y reorganizando términos, nos queda

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m_2} c_i^{q+1} \langle \phi_i, v \rangle + \Delta t \sum_{i=1}^{m_2} c_i^{q+1} a(\phi_i, v) \\ &= \Delta t \langle f^{q+1}, v \rangle + \Delta t \langle g_2^{q+1}, v \rangle_{\Gamma} + \sum_{i=1}^m c_i^q \langle \phi_i, v \rangle - \sum_{i=m_2+1}^m c_i^{q+1} \langle \phi_i, v \rangle - \Delta t \sum_{i=m_2+1}^m c_i^{q+1} a(\phi_i, v). \end{aligned}$$

Tomando $v = \phi_j$ para $j = 1, \dots, m_2$ obtenemos un sistema de ecuaciones lineales de $m_2 \times m_2$ que podemos escribir en forma matricial como sigue

$$\begin{aligned} & M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) C^{q+1}([1, \dots, m_2]) + \Delta t R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) C^{q+1}([1, \dots, m_2]) \\ &= \Delta t F^{q+1}([1, \dots, m_2]) + \Delta t G^{q+1}([1, \dots, m_2]) + M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m]) C^q \\ &\quad - M([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) C^{q+1}([m_2 + 1, \dots, m]) \\ &\quad - \Delta t R([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) C^{q+1}([m_2 + 1, \dots, m]), \end{aligned}$$

y que podemos factorizar como

$$\begin{aligned} & (M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) + \Delta t R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2])) C^{q+1}([1, \dots, m_2]) \\ &= \Delta t (F^{q+1}([1, \dots, m_2]) + G^{q+1}([1, \dots, m_2])) + M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m]) C^q \\ &\quad - (M([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) \\ &\quad + \Delta t R([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m])) C^{q+1}([m_2 + 1, \dots, m]). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Teorema 3.7. *El sistema de ecuaciones lineales (3.10) tiene solución única.*

Demostración. Denotemos $M_R := M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) + \Delta t R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2])$. Veamos que M_R es simétrica y definida positiva.

La simetría se sigue del hecho que $\langle \phi_j, \phi_i \rangle + \Delta t a(\phi_j, \phi_i) = \langle \phi_i, \phi_j \rangle + \Delta t a(\phi_i, \phi_j)$ para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Veamos que es definida positiva. Sean $\sigma^T = (\sigma_1, \dots, \sigma_{m_2}) \in \mathbb{R}^{m_2} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ y $\varphi = \sum_{i=1}^{m_2} \sigma_i \phi_i$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma^T M_R \sigma &= \sigma^T M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) \sigma + \Delta t \sigma^T R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) \sigma \\ &= \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} \sigma_i \sigma_j M_{i,j} + \Delta t \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} \sigma_i \sigma_j R_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} \sigma_i \sigma_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle + \Delta t \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} \sigma_i \sigma_j a(\phi_j, \phi_i) \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{m_2} \sigma_j \phi_j, \sum_{i=1}^{m_2} \sigma_i \phi_i \right\rangle + \Delta t a \left(\sum_{i=1}^{m_2} \sigma_j \phi_j, \sum_{i=1}^{m_2} \sigma_i \phi_i \right) \\ &= \langle \varphi, \varphi \rangle + \Delta t a(\varphi, \varphi) \\ &= \|\varphi\|_0^2 + \Delta t a(\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Por la coercividad de $a(cd, cd)$ existe $\alpha > 0$ constante tal que

$$\langle \varphi, \varphi \rangle + \Delta t a(\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|_0^2 + \alpha \Delta t \|\varphi\|_1^2.$$

Como $\sigma_i \neq 0$ para todo i y las funciones base son linealmente independientes, entonces $\varphi \neq 0$ y, por tanto,

$$\sigma^T M_R \sigma = \|\varphi\|_0^2 + \alpha \Delta t \|\varphi\|_1^2 > 0,$$

de lo cual se sigue que M_R es definida positiva.

Ahora, como M_R es simétrica y definida positiva, es invertible y, por tanto, el sistema tiene solución única. □

3.4.3. Método de Crank-Nicolson

Tomando $\theta = 1/2$ en (3.7), tenemos que

$$\left\langle \frac{u_h^{q+1} - u_h^q}{\Delta t}, v \right\rangle + a \left(\frac{u_h^{q+1} + u_h^q}{2}, v \right) = \left\langle \frac{f^{q+1} + f^q}{2}, v \right\rangle + \left\langle \frac{g_2^{q+1} + g_2^q}{2}, v \right\rangle_{\Gamma}.$$

Por la bilinealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\langle u_h^{q+1}, v \rangle - \langle u_h^q, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} a(u_h^{q+1}, v) + \frac{\Delta t}{2} a(u_h^q, v) = \frac{\Delta t}{2} \langle f^{q+1}, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle f^q, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^{q+1}, v \rangle_{\Gamma} + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^q, v \rangle_{\Gamma},$$

$$\langle u_h^{q+1}, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} a(u_h^{q+1}, v) = \frac{\Delta t}{2} \langle f^{q+1}, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle f^q, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^{q+1}, v \rangle_{\Gamma} + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^q, v \rangle_{\Gamma} + \langle u_h^q, v \rangle - \frac{\Delta t}{2} a(u_h^q, v).$$

Tomando $u_h^q := \sum_{i=1}^m c_i^q \phi_i$, con $c_i^q \in \mathbb{R}$, para $q = 0, \dots, J-1$, nos deja

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i=1}^m c_i^{q+1} \phi_i, v \right\rangle + \frac{\Delta t}{2} a \left(\sum_{i=1}^m c_i^{q+1} \phi_i, v \right) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \langle f^{q+1}, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle f^q, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^{q+1}, v \rangle_{\Gamma} + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^q, v \rangle_{\Gamma} + \left\langle \sum_{i=1}^m c_i^q \phi_i, v \right\rangle - \frac{\Delta t}{2} a \left(\sum_{i=1}^m c_i^q \phi_i, v \right) \end{aligned}$$

y por la bilinealidad,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m c_i^{q+1} \langle \phi_i, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^m c_i^{q+1} a(\phi_i, v) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \langle f^{q+1}, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle f^q, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^{q+1}, v \rangle_{\Gamma} + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^q, v \rangle_{\Gamma} + \sum_{i=1}^m c_i^q \langle \phi_i, v \rangle - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^m c_i^q a(\phi_i, v). \end{aligned}$$

Usando las condiciones de frontera tipo Dirichlet tenemos que $c_j^{q+1} = g_1(t_{q+1}, p_j)$ para cada $j = m_2 + 1, \dots, m$ y, reorganizando términos, nos queda

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m_2} c_i^{q+1} \langle \phi_i, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{m_2} c_i^{q+1} a(\phi_i, v) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \langle f^{q+1}, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle f^q, v \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^{q+1}, v \rangle_{\Gamma} + \frac{\Delta t}{2} \langle g_2^q, v \rangle_{\Gamma} + \sum_{i=1}^m c_i^q \langle \phi_i, v \rangle - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^m c_i^q a(\phi_i, v) \\ & \quad - \sum_{i=m_2+1}^m c_i^{q+1} \langle \phi_i, v \rangle - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=m_2+1}^m c_i^{q+1} a(\phi_i, v). \end{aligned}$$

Tomando $v = \phi_j$ para $j = 1, \dots, m_2$ obtenemos un sistema de ecuaciones lineales de $m_2 \times m_2$ que podemos escribir en forma matricial como sigue

$$\begin{aligned} & M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) C^{q+1}([1, \dots, m_2]) + \frac{\Delta t}{2} R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) C^{q+1}([1, \dots, m_2]) \\ &= \frac{\Delta t}{2} F^{q+1}([1, \dots, m_2]) + \frac{\Delta t}{2} F^q([1, \dots, m_2]) + \frac{\Delta t}{2} G^{q+1}([1, \dots, m_2]) + \frac{\Delta t}{2} G^q([1, \dots, m_2]) \\ & \quad + M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m]) C^q - \frac{\Delta t}{2} R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m]) C^q \\ & \quad - M([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) C^{q+1}([m_2 + 1, \dots, m]) \\ & \quad - \frac{\Delta t}{2} R([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) C^{q+1}([m_2 + 1, \dots, m]), \end{aligned}$$

y que podemos factorizar como

$$\begin{aligned} & \left(M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) + \frac{\Delta t}{2} R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m_2]) \right) C^{q+1}([1, \dots, m_2]) \\ &= \frac{\Delta t}{2} (F^{q+1}([1, \dots, m_2]) + F^q([1, \dots, m_2]) + G^{q+1}([1, \dots, m_2]) \\ & \quad + G^q([1, \dots, m_2])) \\ & \quad + \left(M([1, \dots, m_2], [1, \dots, m]) - \frac{\Delta t}{2} R([1, \dots, m_2], [1, \dots, m]) \right) C^q \\ & \quad - \left(M([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Delta t}{2} R([1, \dots, m_2], [m_2 + 1, \dots, m]) \right) C^{q+1}([m_2 + 1, \dots, m]). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Teorema 3.8. *El sistema de ecuaciones lineales (3.11) tiene solución única.*

Demostración. Análogo al Teorema (3.7). □

3.5. Análisis del error

En esta sección estableceremos cotas para el error $\|u^q - u_h^q\|_0$, para cada q , obtenido mediante los tres métodos de aproximación que estamos estudiando. Puesto que los métodos requieren

que se discretize la variable temporal y la variable espacial, entonces la cota para el error dependerá tanto de h como de Δt .

Empezaremos analizando los métodos de Forward Euler y Backward Euler.

Definición 3.9. Decimos que una familia $\{\mathcal{T}_h\}$ de triangulaciones de Ω es cuasi-uniforme si existe $\tau > 0$ tal que

$$\min_{e_k \in \mathcal{T}_h} h_k \geq \tau h \quad \forall h > 0.$$

Proposición 3.10. Sea $\{\mathcal{T}_h\}$ una familia cuasi-uniforme de particiones de Ω y sea $S_{0,h}$ el subespacio de $H^1_\Lambda(\Omega)$ asociado a \mathcal{T}_h construido en la Sección 3.3. Entonces existe $C_3 > 0$ constante tal que

$$\|\nabla v_h\|_0^2 \leq C_3 h^{-2} \|v_h\|_0^2 \quad \forall v_h \in S_{0,h}.$$

Demostración. Ver [3, página 195]. □

Teorema 3.11. Sea $\theta \in \{0, 1\}$ y sea u_h la solución del Problema PVSD_t. Suponga que $\frac{\partial u_h(0)}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ y $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L_2((0, T) \times \Omega)$. Para $\theta = 0$ asuma, además, que $\{\mathcal{T}_h\}$ es una familia cuasi-uniforme de particiones de Ω y que se cumple

$$\Delta t (1 + C_3 h^{-2}) < \frac{2\alpha}{\gamma^2},$$

donde C_3 es la constante de la Proposición 3.10 y α, γ son las constantes de coercividad y continuidad de $a(\cdot, \cdot)$, respectivamente. Entonces, existe $C_\theta > 0$ constante tal que las soluciones u_h^q del Problema PVT D_t satisfacen

$$\|u_h^q - u_h(t_q)\|_0 \leq C_\theta \Delta t \left(\left\| \frac{\partial u_h(0)}{\partial t} \right\|_0^2 + \int_0^T \left\| \frac{\partial f(s)}{\partial t} \right\|_0^2 ds \right)^{1/2},$$

para cada $q = 0, \dots, J$.

Demostración. Ver [3, página 387]. □

El siguiente resultado nos da estimadores apriori para el error obtenido mediante los métodos de Forward Euler y Backward Euler.

Proposición 3.12. Sea $u(t)$ la solución del Problema PV_t y sean u_h^q las soluciones del Problema PVT D_t para $q = 0, \dots, J$. Bajo las condiciones de la Proposición 3.5 y del Teorema 3.11 se cumple que

$$\max_{1 \leq q \leq J} \|u_h^q - u(t_q)\| = O(\Delta t + h).$$

Demostración. Sea u_h la solución del Problema $PVSD_t$. De la Proposición 3.5 tenemos que

$$\|u(t) - u_h(t)\|_0 = O(h)$$

y, del Teorema 3.11,

$$\|u_h^q - u_h(t_q)\|_0 = O(\Delta t),$$

para cada $q = 0, \dots, J$. De esto, se sigue que

$$\|u_h^q - u(t_q)\| \leq \|u_h^q - u_h(t_q)\|_0 + \|u_h(t_q) - u(t_q)\|_0 = O(\Delta t + h),$$

para cada $q = 0, \dots, J$. Tomando máximo a lo anterior tenemos el resultado. \square

Para el método de Crank-Nicolson tenemos el siguiente estimador apriori del error.

Teorema 3.13. *Sea $u \in C^1([0, T]; H^2(\Omega)) \cap C^3([0, T]; L_2(\Omega))$ la solución del Problema PV_t y sea $u_h^q \in S_h$ la solución del Problema $PVTD_t$, para cada $q = 0, \dots, J$, con $\Delta t = T/J$. Entonces,*

$$\max_{0 \leq q \leq J} \|u_h^q - u^q\|_0 = O(h^2 + \Delta t^2). \quad (3.12)$$

Demostración. Sea H_T^h un subespacio de $L_2(0, T; S_h)$. Para cada $q = 0, \dots, J$ se define $\omega \in H_T^h$ mediante la *proyección elíptica*

$$a(\omega(t_q), v) = a(u(t_q), v) \quad \forall v \in S_0$$

y denotamos $\omega^q(x) := \omega(q\Delta t, x)$, $u^q(x) := u(q\Delta t, x)$.

Definimos $\zeta^q := u_h^q - \omega^q$ y $\eta^q := \omega^q - u^q$. Observe que

$$u_h^q - u^q = \zeta^q + \eta^q.$$

En lo que sigue, acotaremos estos términos en la norma $\|\cdot\|_0$ para establecer el estimador apriori (3.12).

Para $v \in S_0$, observe que ζ^q satisface

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\zeta^{q+1} - \zeta^q}{\Delta t}, v \right\rangle + a \left(\frac{\zeta^{q+1} + \zeta^q}{2}, v \right) \\ &= \left\langle \frac{u_h^{q+1} - u_h^q}{\Delta t}, v \right\rangle - \left\langle \frac{\omega^{q+1} - \omega^q}{\Delta t}, v \right\rangle + a \left(\frac{u_h^{q+1} + u_h^q}{2}, v \right) \\ & \quad - a \left(\frac{\omega^{q+1} + \omega^q}{2}, v \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

además, de la definición de $\omega \in H_T^h$ se cumple que

$$a \left(\frac{\omega^{q+1} + \omega^q}{2}, v \right) = a \left(\frac{u^{q+1} + u^q}{2}, v \right). \quad (3.14)$$

Como u_h^q es solución de los Problemas $PVTD_t$ y $PVSD_t$, entonces

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{u_h^{q+1} - u_h^q}{\Delta t}, v \right\rangle + a \left(\frac{u_h^{q+1} + u_h^q}{2}, v \right) \\
 &= \left\langle \frac{f^{q+1} + f^q}{2}, v \right\rangle + \left\langle \frac{g_2^{q+1} + g_2^q}{2}, v \right\rangle_{\Gamma} \\
 &= \frac{1}{2} \langle f^{q+1}, v \rangle + \frac{1}{2} \langle f^q, v \rangle + \frac{1}{2} \langle g_2^{q+1}, v \rangle_{\Gamma} + \frac{1}{2} \langle g_2^q, v \rangle_{\Gamma} \\
 &= \frac{1}{2} [\langle f^{q+1}, v \rangle + \langle g_2^{q+1}, v \rangle_{\Gamma}] + \frac{1}{2} [\langle f^q, v \rangle + \langle g_2^q, v \rangle_{\Gamma}] \\
 &= \frac{1}{2} [\langle u_t^{q+1}, v \rangle + a(u^{q+1}, v)] + \frac{1}{2} [\langle u_t^q, v \rangle + a(u^q, v)] \\
 &= \left\langle \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^{q+1}}{\partial t} + \frac{\partial u^q}{\partial t} \right], v \right\rangle + a \left(\frac{u^{q+1} + u^q}{2}, v \right).
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Reemplazando (3.14) y (3.15) en el lado derecho de (3.13) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{\zeta^{q+1} - \zeta^q}{\Delta t}, v \right\rangle + a \left(\frac{\zeta^{q+1} + \zeta^q}{2}, v \right) \\
 &= \left\langle \frac{u_t^{q+1} + u_t^q}{2}, v \right\rangle + a \left(\frac{u^{q+1} + u^q}{2}, v \right) - \left\langle \frac{\omega^{q+1} - \omega^q}{\Delta t}, v \right\rangle - a \left(\frac{u^{q+1} + u^q}{2}, v \right) \\
 &= \left\langle \frac{u_t^{q+1} + u_t^q}{2}, v \right\rangle - \left\langle \frac{\omega^{q+1} - \omega^q}{\Delta t}, v \right\rangle + \left\langle \frac{u^{q+1} + u^q}{\Delta t}, v \right\rangle - \left\langle \frac{u^{q+1} + u^q}{\Delta t}, v \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{\eta^q - \eta^{q+1}}{\Delta t}, v \right\rangle + \langle r^q, v \rangle
 \end{aligned}$$

donde $r^q := \frac{1}{2} \langle u_t^{q+1} + u_t^q \rangle + \frac{1}{\Delta t} \langle u^q - u^{q+1} \rangle$.

Tomando $v = \zeta^{q+1} + \zeta^q$ en lo anterior igualdad nos deja

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} \langle \zeta^{q+1} - \zeta^q, \zeta^{q+1} + \zeta^q \rangle + \frac{1}{2} a(\zeta^{q+1} + \zeta^q, \zeta^{q+1} + \zeta^q) \\
 &= \left\langle \frac{\eta^q - \eta^{q+1}}{\Delta t} + r^q, \zeta^{q+1} + \zeta^q \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Por la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ se cumple que $a(\zeta^{q+1} + \zeta^q, \zeta^{q+1} + \zeta^q) \geq 0$, por tanto podemos eliminar este término de (3.16) y establecer la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{\Delta t} \langle \zeta^{q+1} - \zeta^q, \zeta^{q+1} + \zeta^q \rangle \leq \left\langle \frac{\eta^q - \eta^{q+1}}{\Delta t} + r^q, \zeta^{q+1} + \zeta^q \right\rangle,$$

y, como

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta^{q+1} - \zeta^q, \zeta^{q+1} + \zeta^q \rangle &= \langle \zeta^{q+1}, \zeta^{q+1} \rangle + \langle \zeta^{q+1}, \zeta^q \rangle + \langle -\zeta^q, \zeta^{q+1} \rangle + \langle -\zeta^q, \zeta^q \rangle \\
 &= \|\zeta^{q+1}\|_0^2 - \|\zeta^q\|_0^2,
 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{1}{\Delta t} (\|\zeta^{q+1}\|_0^2 - \|\zeta^q\|_0^2) \leq \left\langle \frac{\eta^q - \eta^{q+1}}{\Delta t} + r^q, \zeta^{q+1} + \zeta^q \right\rangle.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular en el lado derecho de la anterior desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\|\zeta^{q+1}\|_0^2 - \|\zeta^q\|_0^2) &\leq \left\langle \frac{\eta^q - \eta^{q+1}}{\Delta t} + r^q, \zeta^{q+1} + \zeta^q \right\rangle \\ &\leq \left\| \frac{\eta^q - \eta^{q+1}}{\Delta t} + r^q \right\|_0 \|\zeta^{q+1} + \zeta^q\|_0 \\ &\leq \left(\left\| \frac{\eta^q - \eta^{q+1}}{\Delta t} \right\|_0 + \|r^q\|_0 \right) (\|\zeta^{q+1}\|_0 + \|\zeta^q\|_0). \end{aligned}$$

Multiplicando por Δt y eliminando la diferencia de cuadrados se tiene

$$\|\zeta^{q+1}\|_0 - \|\zeta^q\|_0 \leq \|\eta^q - \eta^{q+1}\|_0 + \Delta t \|r^q\|_0.$$

Sumando desde 0 hasta $q - 1$ nos deja

$$\|\zeta^q\|_0 \leq \|\zeta^0\|_0 + \sum_{d=0}^{q-1} \|\eta^d - \eta^{d+1}\|_0 + \Delta t \sum_{d=0}^{q-1} \|r^d\|. \quad (3.17)$$

Ahora, acotaremos los tres términos del lado derecho de la desigualdad (3.17).

En primer lugar, de la Proposición 2.10, $\|\zeta^0\|_0 = \|u_h^0 - \omega^0\|_0 = O(h^2)$.

Para el segundo término de (3.17), notemos que

$$\int_{q\Delta t}^{(q+1)\Delta t} \frac{\partial \eta}{\partial t} dt = \eta \Big|_{q\Delta t}^{(q+1)\Delta t} = \eta((q+1)\Delta t) - \eta(q\Delta t) = \eta^{q+1} - \eta^q.$$

Luego,

$$\|\eta^{q+1} - \eta^q\|_0 = \left\| \int_{q\Delta t}^{(q+1)\Delta t} \frac{\partial \eta}{\partial t} dt \right\|_0 \leq \int_{q\Delta t}^{(q+1)\Delta t} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_0 dt. \quad (3.18)$$

Ahora acotemos $\left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_0 = \left\| \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_0$. De la definición de $\omega \in H_T^h$ tenemos que

$$\int_{\Omega} \nabla \omega(t) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx.$$

Derivando esto respecto a t obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \nabla \omega(t) \cdot \nabla v \, dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \omega(t) \cdot \nabla v] \, dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla u(t) \cdot \nabla v] \, dx, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \omega(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla v + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \omega(t) \cdot \nabla v] dx = \int_{\Omega} [\nabla u(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla v + \frac{\partial}{\partial t} \nabla u(t) \cdot \nabla v] dx.$$

Como $v \in S_0$ es constante en el tiempo, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, luego,

$$\int_{\Omega} [\nabla \frac{\partial}{\partial t} \omega(t) \cdot \nabla v] dx = \int_{\Omega} [\nabla \frac{\partial}{\partial t} u(t) \cdot \nabla v] dx,$$

$$a \left(\frac{\partial}{\partial t} \omega(t), v \right) = a \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t), v \right),$$

por tanto, $\frac{\partial}{\partial t} \omega$ es la proyección elíptica de $\frac{\partial u}{\partial t}$ en H_T^h .

Por el Lema de Céa (Lema 2.6) existe $C_1 > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|_1 \leq C_1 \inf_{v \in S_h} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - v \right\|_1. \quad (3.19)$$

Por el Teorema 2.7 existe $C_2 > 0$ y $v_h \in S_h$ tales que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - v_h \right\|_1 \leq C_2 h \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_1. \quad (3.20)$$

Por el Corolario 2.9 existe $C_3 > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_0 = \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|_0 \leq C_3 h \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|_1. \quad (3.21)$$

Usando (3.19) y (3.20) en (3.21), se sigue que existe $\beta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_0 \leq \beta h^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2.$$

De (3.18) y lo anterior,

$$\|\eta^{q+1} - \eta^q\|_0 \leq \int_{q\Delta t}^{(q+1)\Delta t} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_0 dt \leq \beta h^2 \int_{q\Delta t}^{(q+1)\Delta t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2 dt.$$

Finalmente, sumando de 0 hasta $q-1$,

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^{q-1} \|\eta^{d+1} - \eta^d\|_0 &\leq \beta h^2 \sum_{d=0}^{q-1} \int_{d\Delta t}^{(d+1)\Delta t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2 dt \\ &= \beta h^2 \int_0^{q\Delta t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2 dt \\ &\leq \beta h^2 \int_0^{q\Delta t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2 dt + \beta h^2 \int_{q\Delta t}^T \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2 dt \\ &= \beta h^2 \int_0^T \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_2 dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

y el segundo término de (3.17) queda como

$$\sum_{d=0}^{q-1} \|\eta^{d+1} - \eta^d\|_0 = O(h^2).$$

Para acotar el tercer término de (3.17), procedemos como sigue: Sean $t \in (q\Delta t, (q+1)\Delta t)$ y $p := (q+1)\Delta t - t$. Por el Teorema de Taylor, aplicado a la variable temporal, existen $C_1 \in (t, (q+1)\Delta t)$ y $C_2 \in (q\Delta t, t)$ tales que

$$u^{q+1} = u(t) + u_t(t)p + u_{tt}(t)\frac{p^2}{2!} + u_{ttt}(C_1)\frac{p^3}{3!}$$

y

$$\begin{aligned} u^q &= u(t) + u_t(t)(q\Delta t - t) + u_{tt}(t)\frac{(q\Delta t - t)^2}{2!} + u_{ttt}(C_2)\frac{(q\Delta t - t)^3}{3!} \\ &= u(t) - u_t(t)(\Delta t - p) + u_{tt}(t)\frac{(\Delta t - p)^2}{2!} - u_{ttt}(C_2)\frac{(\Delta t - p)^3}{3!}, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{u^{q+1} - u^q}{\Delta t} = u_t(t) + u_{tt}(t)\left(p - \frac{\Delta t}{2}\right) + u_{ttt}(C_1)\frac{p^3}{6\Delta t} + u_{ttt}(C_2)\frac{(\Delta t - p)^3}{6\Delta t}. \quad (3.23)$$

Por otro lado, derivando u^q y u^{q+1} respecto a t obtenemos

$$\frac{\partial u^{q+1}}{\partial t} = u_t(t) + u_{tt}(t)p + u_{ttt}(t)\frac{p^2}{2}$$

y

$$\frac{\partial u^q}{\partial t} = u_t(t) - u_{tt}(t)(\Delta t - p) + u_{ttt}(t)\frac{(\Delta t - p)^2}{2},$$

por tanto,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^{q+1}}{\partial t} + \frac{\partial u^q}{\partial t}\right) = u_t(t) + u_{tt}(t)\left(p - \frac{\Delta t}{2}\right) + u_{ttt}(t)\left(\frac{p^2 + (\Delta t - p)^2}{4}\right). \quad (3.24)$$

De (3.23) y (3.24) tenemos que

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^{q+1}}{\partial t} + \frac{\partial u^q}{\partial t}\right) - \frac{u^{q+1} - u^q}{\Delta t}\right| \\ &= \left|u_{ttt}(t)\left(\frac{p^2 + (\Delta t - p)^2}{4}\right) - u_{ttt}(C_1)\frac{p^3}{6\Delta t} - u_{ttt}(C_2)\frac{(\Delta t - p)^3}{6\Delta t}\right| \\ &\leq |u_{ttt}(t)|\left(\frac{p^2 + (\Delta t - p)^2}{4}\right) + |u_{ttt}(C_1)|\frac{p^3}{6\Delta t} + |u_{ttt}(C_2)|\frac{(\Delta t - p)^3}{6\Delta t} \\ &\leq \left(\frac{p^2 + (\Delta t - p)^2}{4} + \frac{p^3}{6\Delta t} + \frac{(\Delta t - p)^3}{6\Delta t}\right) \max_{q\Delta t \leq t \leq (q+1)\Delta t} |u_{ttt}|. \end{aligned}$$

Simplificando la expresión entre paréntesis del lado derecho tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |r^q| &= \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^q}{\partial t} + \frac{\partial u^{q+1}}{\partial t} \right) - \frac{u^{q+1} - u^q}{\Delta t} \right| \\ &\leq C \Delta t^2 \max_{q\Delta t \leq t \leq (q+1)\Delta t} |u_{ttt}| \\ &\leq C \Delta t^2 \max_{0 \leq t \leq T} |u_{ttt}|. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \|r^q\|_0 &= \left\{ \int_{\Omega} (r^q)^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \int_{\Omega} \left(C \Delta t^2 \max_{0 \leq t \leq T} |u_{ttt}| \right)^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ C^2 \Delta t^4 \left(\max_{x \in \Omega} \left[\max_{0 \leq t \leq T} |u_{ttt}| \right] \right)^2 \int_{\Omega} dx \right\}^{1/2} \\ &\leq C \Delta t^2 (\text{Área } \Omega)^{1/2} \max_{x \in \Omega} \left[\max_{0 \leq t \leq T} |u_{ttt}| \right]. \end{aligned}$$

Tomando $B := C(\text{Área } \Omega)^{1/2} \max_{x \in \Omega} [\max_{t \in [0, T]} |u_{ttt}|]$ en la anterior desigualdad, multiplicando por Δt y sumando desde 0 hasta $q - 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{d=0}^{q-1} \|r^d\|_0 &\leq \Delta t \sum_{d=0}^{q-1} B \Delta t^2 \\ &= \Delta t^3 B q \\ &\leq \Delta t^3 B J \\ &= \Delta t^2 B T. \end{aligned}$$

Así, el tercer término de (3.17) queda como

$$\Delta t \sum_{d=0}^{q-1} \|r^d\|_0 = O(\Delta t^2).$$

En síntesis, de (3.17) y con los resultados anteriores, obtenemos

$$\|\zeta^q\|_0 \leq \|\zeta^0\|_0 + \sum_{d=0}^{q-1} \|\eta^d - \eta^{d+1}\|_0 + \Delta t \sum_{d=0}^{q-1} \|r^d\|_0 = O(h^2 + h^2 + \Delta t^2) = O(h^2 + \Delta t^2).$$

Puesto que $\|u_h^q - u^q\|_0 \leq \|\zeta^q\|_0 + \|\eta^q\|_0$, nos resta acotar $\|\eta^q\|_0$. Por el Lema de C ea (Lema 2.6), el Teorema 2.7 y el Corolario 2.9 se sigue que existe $C > 0$ tal que

$$\|\eta^q\|_0 = \|u^q - \omega^q\|_0 \leq C h^2 |u^q|_2 = O(h^2).$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned}
 \|u_h^q - u^q\|_0 &\leq \|u_h^q - \omega^q\|_0 + \|\omega^q - u^q\|_0 \\
 &= \|\zeta^q\|_0 + \|\eta^q\|_0 \\
 &= O(h^2 + \Delta t^2 + h^2) \\
 &= O(h^2 + \Delta t^2),
 \end{aligned}$$

entonces

$$\max_{0 \leq n \leq J} \|u_h^q - u^q\|_0 = O(h^2 + \Delta t^2),$$

lo cual completa la prueba. □

3.6. Implementación numérica de FEM

En esta sección implementaremos FEM para aproximar la solución del Problema PV_t , para ello necesitamos desarrollar estrategias para calcular la matriz de masa M y el vector G^q .

3.6.1. Cálculo de la matriz de masa M

Vamos a calcular la matriz M cuyas componentes están dadas por

$$M_{i,j} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle = \int_{\Omega} \phi_j \phi_i \, dx = \sum_{k=1}^n \int_{e_k} \phi_j \phi_i \, dx,$$

para $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Aplicaremos la estrategia elemento-por-elemento. Para cada k denotamos las integrales locales por

$$\langle \phi_j, \phi_i \rangle_k := \int_{e_k} \phi_j \phi_i \, dx.$$

Para el caso $d = 1$: Consideremos un elemento lado $e_k = (\widehat{p}_1, \widehat{p}_2)$ con sus respectivas funciones base locales $\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2$ como en la Sección 2.3 y sea r la transformación lineal de la Sección 2.6.2. Entonces, por el Teorema del cambio de variable,

$$\langle \widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_i \rangle_k = \int_{e_k} \widehat{\phi}_j \widehat{\phi}_i \, dx = \int_{-1}^1 (\widehat{\phi}_j \circ r)(\mu) (\widehat{\phi}_i \circ r)(\mu) r'(\mu) \, d\mu,$$

donde $r'(\mu) = \frac{h_k}{2}$, $(\widehat{\phi}_1 \circ r)(\mu) = \frac{1-\mu}{2}$ y $(\widehat{\phi}_2 \circ r)(\mu) = \frac{\mu+1}{2}$.

Debemos calcular las siguientes integrales

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_1 \rangle_k &= \frac{h_k}{8} \int_{-1}^1 (1 - \mu)^2 d\mu = \frac{h_k}{3}, \\ \langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2 \rangle_k &= \frac{h_k}{8} \int_{-1}^1 (1 - \mu)(\mu + 1) d\mu = \frac{h_k}{6}, \\ \langle \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_2 \rangle_k &= \frac{h_k}{8} \int_{-1}^1 (\mu + 1)^2 d\mu = \frac{h_k}{3},\end{aligned}$$

lo cual define la siguiente *matriz de masa elemental*

$$ML_k := \begin{pmatrix} \langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_1 \rangle_k & \langle \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_1 \rangle_k \\ \langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2 \rangle_k & \langle \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_2 \rangle_k \end{pmatrix} = \frac{h_k}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para el caso $d = 2$: Considere el triángulo e_k con nodos $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3$ y funciones base locales $\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_3$ como en la Sección 2.3 y, considere también, el elemento de referencia E con funciones base locales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y las transformaciones r_2, r_3 como en la Sección 2.6.2.

Entonces

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_i \rangle_k &= \int_{e_k} \widehat{\phi}_j \widehat{\phi}_i dx \\ &= \int_E (\widehat{\phi}_j \circ r_3)(\xi, \eta) (\widehat{\phi}_i \circ r_3)(\xi, \eta) |Jr_3| d\xi d\eta \\ &= |Jr_3| \int_E \varphi_j(\xi, \eta) \varphi_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= |Jr_3| \int_0^1 \int_0^1 (\varphi_j \circ r_2)(v_1, v_2) (\varphi_i \circ r_2)(v_1, v_2) |Jr_2| dv_1 dv_2 \\ &= |Jr_3| \int_0^1 \int_0^1 v_1 \varphi_j(v_1, v_1 v_2) \varphi_i(v_1, v_1 v_2) dv_1 dv_2,\end{aligned}$$

para $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Debemos calcular las siguientes integrales

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_1 \rangle_k &= |Jr_3| \int_0^1 \int_0^1 v_1(-v_1 + 1)^2 dv_1 dv_2 = \frac{|Jr_3|}{12}, \\ \langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2 \rangle_k &= |Jr_3| \int_0^1 \int_0^1 v_1(-v_1 + 1)(v_1 - v_1 v_2) dv_1 dv_2 = \frac{|Jr_3|}{24}, \\ \langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_3 \rangle_k &= |Jr_3| \int_0^1 \int_0^1 v_1^2 v(-v_1 + 1) dv_1 dv_2 = \frac{|Jr_3|}{24}, \\ \langle \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_2 \rangle_k &= |Jr_3| \int_0^1 \int_0^1 v_1(v_1 - v_1 v_2)^2 dv_1 dv_2 = \frac{|Jr_3|}{12}, \\ \langle \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_3 \rangle_k &= |Jr_3| \int_0^1 \int_0^1 v_1^2 v_2(v_1 - v_1 v_2) dv_1 dv_2 = \frac{|Jr_3|}{24}, \\ \langle \widehat{\phi}_3, \widehat{\phi}_3 \rangle_k &= |Jr_3| \int_0^1 \int_0^1 v_1^3 v_2^2 dv_1 dv_2 = \frac{|Jr_3|}{12},\end{aligned}$$

lo cual define la siguiente *matriz de masa elemental*

$$ML_k := \begin{pmatrix} \langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_1 \rangle_k & \langle \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_1 \rangle_k & \langle \widehat{\phi}_3, \widehat{\phi}_1 \rangle_k \\ \langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2 \rangle_k & \langle \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_2 \rangle_k & \langle \widehat{\phi}_3, \widehat{\phi}_2 \rangle_k \\ \langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_3 \rangle_k & \langle \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_3 \rangle_k & \langle \widehat{\phi}_3, \widehat{\phi}_3 \rangle_k \end{pmatrix} = \frac{|Jr_3|}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las componentes de M que reciben aportes del elemento e_k se pueden determinar del mismo modo como se hizo para la matriz de rigidez en la Sección 2.6.1.

El ensamble de la matriz de masa lo podemos llevar a cabo mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo 4: Algoritmo para calcular la matriz de masa M en una y dos dimensiones.

Entrada: `Coor`, `Ele`.

Salida: Matriz de masa M .

inicio

 Sea m el número de filas de `Coor`;

 Sea n el número de filas de `Ele`;

 Inicialice la matriz nula M de $m \times m$;

 // Ensamble de M .

para $k = 1 : n$ **hacer**

$e_k = \text{Ele}([k], :)$;

 // se extrae la k -ésima fila de `Ele`

 Calcule ML_k ;

$M(e_k, e_k) = M(e_k, e_k) + ML_k$;

 // se suman los aportes

fin

devolver M

fin

3.6.2. Cálculo del vector G^q

Sea $q \in \{0, \dots, J\}$. Queremos calcular el vector columna G^q cuyas componentes están dadas por

$$G_i^q := \langle g_2^q, \phi_i \rangle_\Gamma$$

para $i = 1, \dots, m$.

Para el caso $d = 1$: En este caso tenemos que solo hay un nodo Neumann el cual es, precisamente, p_{m-1} , luego, por cálculo directo tenemos que

$$\langle g_2^q, \phi_i \rangle_\Gamma := \phi_i(p_{m-1})g_2(t_q, p_{m-1}) = \begin{cases} g_2(t_q, p_{m-1}), & \text{si } i = m - 1 \\ 0, & \text{si } i \neq m - 1 \end{cases}$$

Para el caso $d = 2$: Puesto que la frontera de Ω es poligonal, entonces podemos expresar $\partial\Omega$ como una unión de segmentos tal que cada segmento es lado de algún triángulo; es decir, existen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \subseteq \partial\Omega$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\partial\Omega$ tales que

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^N \overline{\Gamma_k}$$

y $\overline{\Gamma_k} = \overline{e_{j_k}} \cap \partial\Omega$ para algún $j_k \in \{1, \dots, n\}$. A cada Γ_k lo llamamos *k-ésimo elemento-lado*.

Observe que si $k_1 \neq k_2$, entonces $\overline{\Gamma_{k_1}} \cap \overline{\Gamma_{k_2}} = \emptyset$ o $\overline{\Gamma_{k_1}} \cap \overline{\Gamma_{k_2}} = \{p_j\}$ para algún $j \in \{1, \dots, m\}$, además, los elementos-lado son disjuntos dos a dos y los *puntos de sus extremos* son nodos.

De aquí en adelante asumiremos que Ω satisface la siguiente condición:

$$(\forall k \in \{1, \dots, N\}) (\Gamma_k \cap \Lambda \neq \emptyset \implies \Gamma_k \cap \Gamma = \emptyset), \quad (3.25)$$

es decir, asumiremos que cada elemento-lado es completamente *Dirichlet* o completamente *Neumann*, de modo que no habrán elementos-lado sobre los que pesen ambos tipos de condiciones de frontera.

Supongamos que $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{N_1}$ denotan los elementos-lado de Neumann y que $\Gamma_{N_1+1}, \dots, \Gamma_N$ denotan los elementos-lado de Dirichlet, para algún $N_1 \in \mathbb{N}$. De la Condición (3.25) se sigue que

$$\overline{\Gamma} = \bigcup_{k=1}^{N_1} \overline{\Gamma_k} \quad \text{y} \quad \overline{\Lambda} = \bigcup_{i=N_1+1}^N \overline{\Gamma_k},$$

es decir, la *frontera de Neumann* es la unión de todos los elementos-lado de *Neumann* y la *frontera de Dirichlet* es la unión de todos los elementos-lado de *Dirichlet*.

Ahora, por definición, tenemos que

$$\langle g_2^q, \phi_i \rangle_\Gamma = \int_\Gamma g_2^q \phi_i \, dS = \sum_{k=1}^{N_1} \int_{\Gamma_k} g_2^q \phi_i \, dS.$$

Aplicaremos la estrategia elemento-por-elemento. Considere el elemento-lado Γ_k y denotemos las integrales locales por

$$\langle g_2^q, \phi_i \rangle_{\Gamma_k} := \int_{\Gamma_k} g_2^q \phi_i \, dS.$$

Orientemos $\partial\Omega$ en sentido antihorario. Tenemos que existen $\epsilon_{k,1}, \epsilon_{k,2} \in \{m_1 + 1, \dots, m_2\}$ tales que $p_{\epsilon_{k,1}}$ y $p_{\epsilon_{k,2}}$ son los puntos extremos de Γ_k , con $p_{\epsilon_{k,1}}$ siendo primero que $p_{\epsilon_{k,2}}$, y, por tanto, la integral local $\langle g_2^q, \phi_{\epsilon_{k,i}} \rangle_{\Gamma_k}$ solo aporta a la componente $G_{\epsilon_{k,i}}^q$ de G^q . Denotemos $\hat{p}_1 := p_{\epsilon_{k,1}}$, $\hat{p}_2 := p_{\epsilon_{k,2}}$ los nodos y $\hat{\phi}_1 := \phi_{\epsilon_{k,1}}$, $\hat{\phi}_2 := \phi_{\epsilon_{k,2}}$ las funciones base locales asociadas, respectivamente, a cada nodo.

Considere la transformación lineal $r_4 : [-1, 1] \rightarrow \Gamma_k$ definida por

$$r_4(\mu) := \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{2} \mu + \frac{\hat{p}_2 + \hat{p}_1}{2}.$$

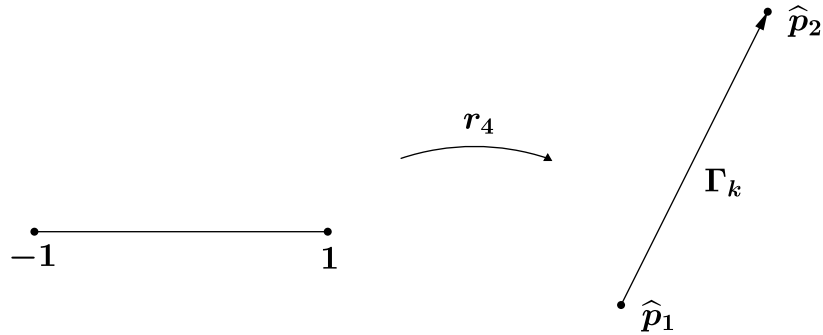


Figura 3.1: Transformación r_4 .

La derivada de r_4 es $r_4'(\mu) = \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{2}$ con *norma euclidea*

$$|r_4'(\mu)| = \left| \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{2} \right| = \frac{1}{2} |\hat{p}_2 - \hat{p}_1| = \frac{1}{2} \sqrt{(\hat{p}_{2,1} - \hat{p}_{1,1})^2 + (\hat{p}_{2,2} - \hat{p}_{1,2})^2},$$

además, $(\hat{\phi}_1 \circ r_4)(\mu) = \frac{1 - \mu}{2}$ y $(\hat{\phi}_2 \circ r_4)(\mu) = \frac{\mu + 1}{2}$.

De la definición de *integral de trayectoria* tenemos que

$$\langle g_2^q, \hat{\phi}_i \rangle_{\Gamma_k} = \int_{\Gamma_k} g_2^q \hat{\phi}_i \, dS = \int_{-1}^1 (g_2^q \circ r_4)(\mu) (\hat{\phi}_i \circ r_4)(\mu) |r_4'(\mu)| \, d\mu$$

para $i = 1, 2$.

De esto,

$$\langle g_2^q, \widehat{\phi}_1 \rangle_{\Gamma_k} = \frac{|r'|}{2} \int_{-1}^1 (g_2^q \circ r_4)(\mu) (1 - \mu) d\mu$$

y

$$\langle g_2^q, \widehat{\phi}_2 \rangle_{\Gamma_k} = \frac{|r'|}{2} \int_{-1}^1 (g_2^q \circ r_4)(\mu) (\mu + 1) d\mu.$$

Aplicamos cuadratura de Gauss para aproximar las últimas dos integrales; cuyos valores definen el *vector de aportes locales* del elemento-lado Γ_k como

$$GL_k^q := \begin{pmatrix} \langle g_2^q, \widehat{\phi}_1 \rangle_{\Gamma_k} \\ \langle g_2^q, \widehat{\phi}_2 \rangle_{\Gamma_k} \end{pmatrix}.$$

Ahora daremos el algoritmo para ensamblar el vector G^q en dos dimensiones, para ello tendremos en cuenta la siguiente notación.

Sea $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{N_1}\}$ la lista de los elementos-lado que conforman la frontera de Neumann Γ . Para cada elemento-lado Γ_k existen $\epsilon_{k,1}, \epsilon_{k,2} \in \{m_1 + 1, \dots, m_2\}$ tales que $p_{\epsilon_{k,1}}$ y $p_{\epsilon_{k,2}}$ son los puntos extremos de Γ_k . Definimos el *arreglo de elementos Neumann* de $N_1 \times 2$ por

$$\mathbf{Neu} := [[\epsilon_{1,1}, \epsilon_{1,2}], \dots, [\epsilon_{N,1}, \epsilon_{N,2}]]^T.$$

De este modo la k -ésima fila del arreglo \mathbf{Neu} determina al elemento-lado Γ_k .

Algoritmo 5: Algoritmo para calcular el vector G^q en dos dimensiones.

Entrada: \mathbf{Coor} , \mathbf{Neu} , g_2 .

Salida: Vector columna G^q .

inicio

 Sea m el número de filas de \mathbf{Coor} ;

 Sea N_1 el número de filas de \mathbf{Neu} ;

 Inicialice el vector de ceros G^q de $m \times 1$;

 // Ensamble de G^q .

para $k = 1 : N_1$ **hacer**

$\Gamma_k = \mathbf{Neu}([k], :)$;

 // se extrae la k -ésima fila de \mathbf{Neu}

 Calcule GL_k^q ;

$G^q(\Gamma_k) = G^q(\Gamma_k) + GL_k^q$;

 // se suman los aportes locales

fin

devolver G^q

fin

Finalmente, damos el algoritmo de FEM para aproximar la solución del Problema PV_t mediante los métodos de Forward Euler, Backward Euler y Crank-Nicolson.

Algoritmo 6: Algoritmo FEM para la ecuación del calor en una y dos dimensiones.

Entrada: Coor , Ele , Neu , f , g_1 , g_2 , u_0 , T , J , m_2 .

Salida: Vectores C^q para $q = 0, \dots, J$.

inicio

 Elija uno de los sistemas de ecuaciones (3.9), (3.10) o (3.11);

 Sea m el número de filas de Coor ;

$k = T/J$;

para $q = 0 : J$ **hacer**

 | Inicialice el vector de ceros C^q de $m \times 1$;

fin

para $i = 1 : m$ **hacer**

 | $p_i = \text{Coor}([i], :)$; // se extrae la i -ésima fila de Coor

 | $C_i^0 = u_0(p_i)$;

fin

 Calcule R ;

 Calcule M ;

$t_0 = 0$;

 Calcule F^0 ;

 Calcule G^0 ;

para $q = 0 : J - 1$ **hacer**

 | $t_{q+1} = (q + 1)k$;

 | Calcule F^{q+1} ;

 | Calcule G^{q+1} ;

para $i = m_2 + 1 : m$ **hacer**

 | $p_i = \text{Coor}([i], :)$;

 | $C_i^{q+1} = g_1(t_{q+1}, p_i)$;

fin

 Resuelva, para $C^{q+1}([1, \dots, m_2])$, el sistema de ecuaciones lineales que eligió;

fin

devolver C^q para $q = 0, \dots, J$.

fin

3.7. Resultados numéricos

En la Sección 3.5 obtuvimos una cota para el error de la forma

$$E_h := \max_{1 \leq q \leq J} \|u^q - u_h^q\|_0 \leq C(h^\alpha + \Delta t^\alpha),$$

con C una constante que depende de u , Ω y $a(\cdot, \cdot)$ y siendo $\alpha \in \mathbb{N}$ el orden de convergencia del error. Tomando $h = \Delta t$ en lo anterior obtenemos

$$E_h := \max_{1 \leq q \leq J} \|u^q - u_h^q\|_0 \leq 2Ch^\alpha.$$

Sea $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$ una sucesión decreciente que converge a cero. Procediendo del mismo modo a como se hizo en la Sección 2.7 tenemos que

$$\ln E_{h_j} \leq \ln(2Ch_j^\alpha) = \ln 2C + \alpha \ln h_j,$$

en una gráfica ln-ln de h_j vs. E_j , debe ser casi una línea recta cuya pendiente es aproximadamente

$$\alpha \approx \Theta_{h_j} = \frac{\ln E_{h_{j+1}} - \ln E_{h_j}}{\ln h_{j+1} - \ln h_j} = \frac{\ln(E_{h_{j+1}}/E_{h_j})}{\ln(h_{j+1}/h_j)}.$$

A continuación daremos dos ejemplos numéricos en los que aplicaremos los métodos de Backward Euler y Crank-Nicolson a la ecuación del calor en una y dos dimensiones.

Ejemplo 3. *Aproximar la solución $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) = 2t + \cos(x), & \text{para } (t, x) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(t, 1) = t^2 + \cos(1), & \text{si } t \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, & \text{si } t \in [0, 1] \\ u(0, x) = \cos(x), & \text{si } x \in (0, 1). \end{array} \right.$$

La solución clásica del problema es $u(t, x) = t^2 + \cos(x)$.

Aplicando el método de Backward Euler obtenemos la siguiente tabla.

h	n	E_h	Θ_h
1/2	2	0.114884855126257	0.779823383102647
1/4	4	0.066913315798449	0.855387750935164
1/8	8	0.036984110698148	0.916442005325182
1/16	16	0.019594701296649	0.955004586229866
1/32	32	0.010107729733754	—

Cuadro 3.1: FEM y Backward Euler para la ecuación del calor 1D.

Para el caso de Backward Euler tenemos que $\alpha = 1$. Notemos que a medida que h disminuye a razón de dos el error E_h también disminuye a razón de dos, además, la sucesión de pendientes $\{\Theta_h\}$ converge a $\alpha = 1$, lo cual verifica numéricamente el orden de convergencia del estimador apriori de la Proposición 3.12.

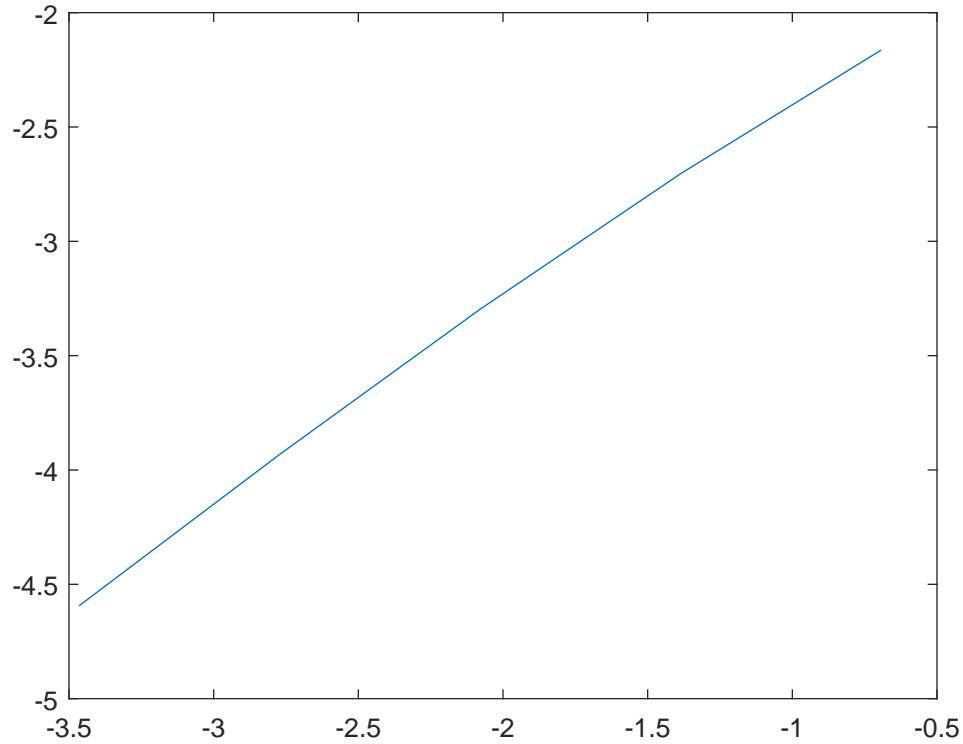


Figura 3.2: Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, Backward Euler, ejemplo 3.

Aplicando el método de Crank-Nicolson obtenemos la siguiente tabla.

h	n	E_h	Θ_h
1/2	2	0.019480350828772	2.000992442550477
1/4	4	0.004866738683262	2.000212989728880
1/8	8	0.001216505060986	2.000051096025182
1/16	16	0.000304115494177	2.000012640212133
1/32	32	0.000076028207418	—

Cuadro 3.2: FEM y Crank-Nicolson para la ecuación del calor 1D.

Para el método de Crank-Nicolson tenemos que $\alpha = 2$. Notemos que a medida que h disminuye a razón de dos el error E_h disminuye a razón de cuatro y la sucesión de pendientes $\{\Theta_h\}$ converge a $\alpha = 2$, lo cual verifica numéricamente el orden de convergencia del estimador a priori del Teorema 3.13.

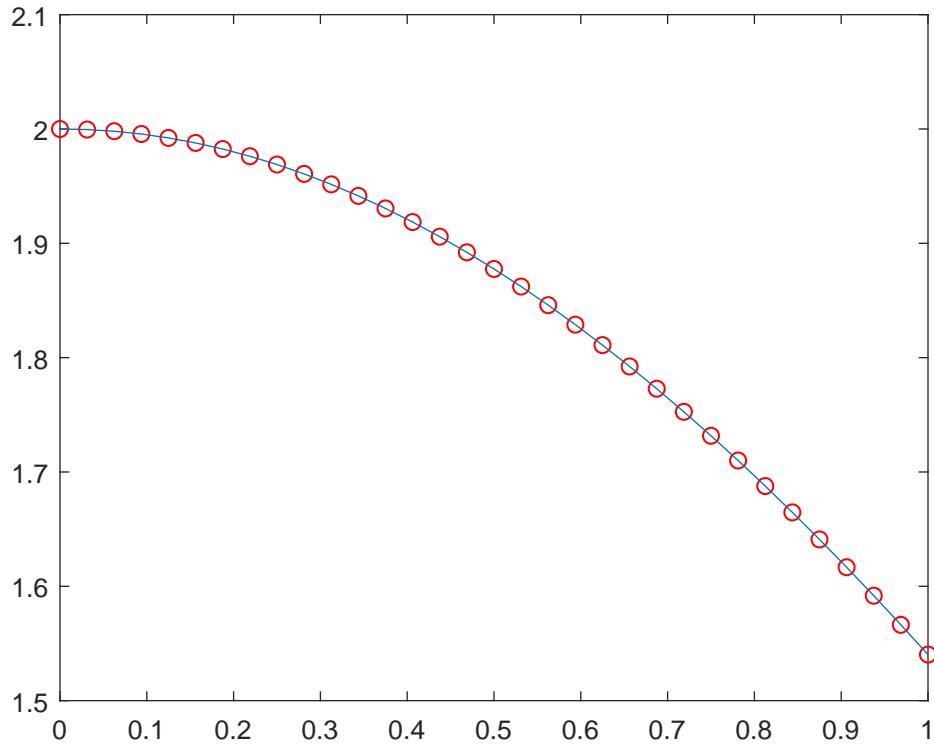


Figura 3.3: Función u_h^J con $h = \Delta t = 1/32$, ejemplo 3.

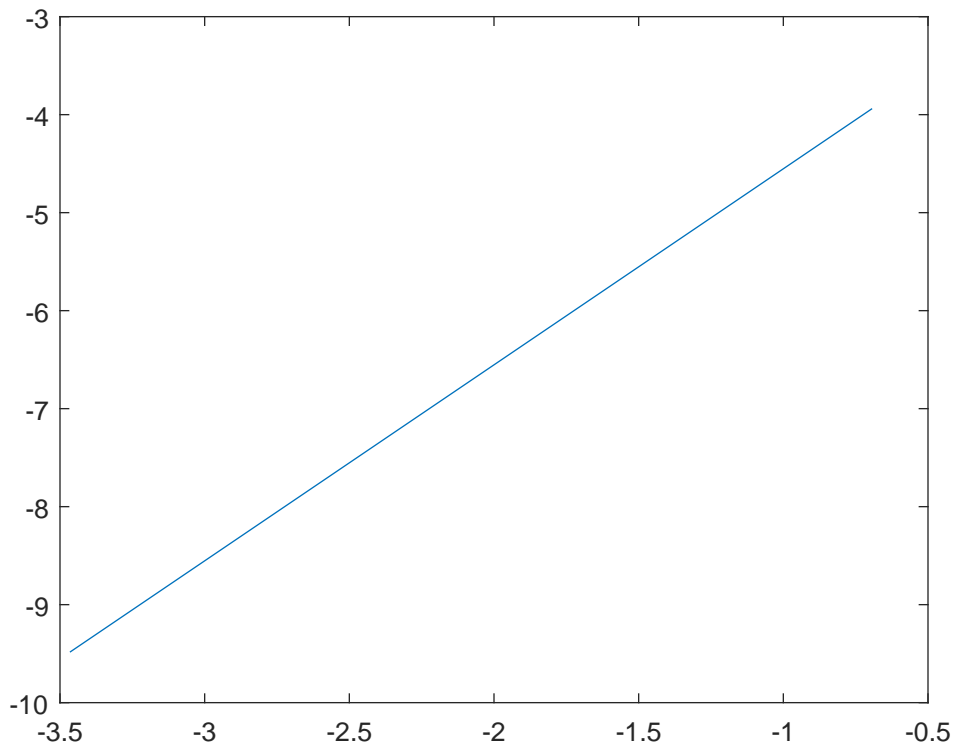


Figura 3.4: Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, Crank-Nicolson, ejemplo 3.

Ejemplo 4. Aproximar la solución $u : [0, 1] \times [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \left[\frac{20\pi^2 - 1}{10}t + 1 \right] \exp\left(-\frac{t}{10}\right) \sin(\pi x) \cos(\pi y), & \text{si } (t, x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(t, x, y) = 0, & \text{si } (t, x, y) \in [0, 1] \times \{0, 1\} \times [0, 1] \\ u(t, x, 1) = -t \exp\left(-\frac{t}{10}\right) \sin(\pi x), & \text{si } (t, x) \in [0, 1] \times [1, 0] \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(t, x, 0) = \begin{pmatrix} \pi t \exp(-t/10) \cos(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\pi t \exp(-t/10) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix} \cdot \hat{n}, & \text{si } (t, x) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(0, x, y) = 0, & \text{si } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \end{array} \right.$$

siendo \hat{n} un vector normal unitario a $\partial\Omega$.

La solución clásica del problema es $u(t, x, y) = t \exp\left(-\frac{t}{10}\right) \sin(\pi x) \cos(\pi y)$.

Aplicando el método de Backward Euler obtenemos la siguiente tabla.

h	n	E_h	Θ_h
1/2	8	0.257992089833408	1.145866498816939
1/4	32	0.116591315724748	1.181639080459693
1/8	128	0.051399322676692	1.111844114862312
1/16	512	0.023782580036347	0.996351949142728
1/32	2048	0.011921396812700	—

Cuadro 3.3: FEM y Backward Euler para la ecuación del calor 2D.

En la tabla se observa que cuando h disminuye a razón de dos el error E_h también disminuye a razón de dos y la sucesión de pendientes $\{\Theta_h\}$ converge a $\alpha = 1$, lo cual verifica numéricamente el estimador a priori de Proposición 3.12.

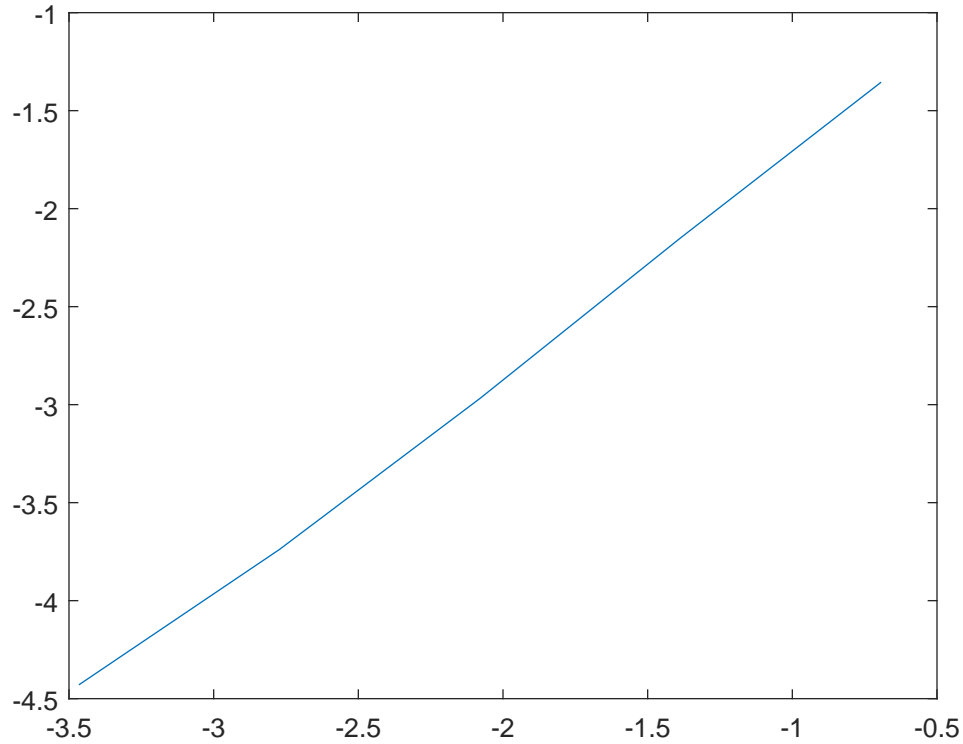


Figura 3.5: Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, Backward-Euler, ejemplo 4.

Aplicando el método de Crank-Nicolson obtenemos la siguiente tabla.

h	n	E_h	Θ_h
1/2	8	0.209385420084050	1.687548900506213
1/4	32	0.065004526534526	1.902049876512216
1/8	128	0.017392801213909	1.973810818751964
1/16	512	0.004427853782999	1.993282972481470
1/32	2048	0.001112129360964	—

Cuadro 3.4: FEM y Crank-Nicolson para la ecuación del calor 2D.

Observe que a medida que h disminuye a razón de dos el error E_h disminuye a razón de cuatro, además, la sucesión de pendientes $\{\Theta_h\}$ converge a $\alpha = 2$, lo cual verifica numéricamente el estimador a priori del Teorema 3.13.

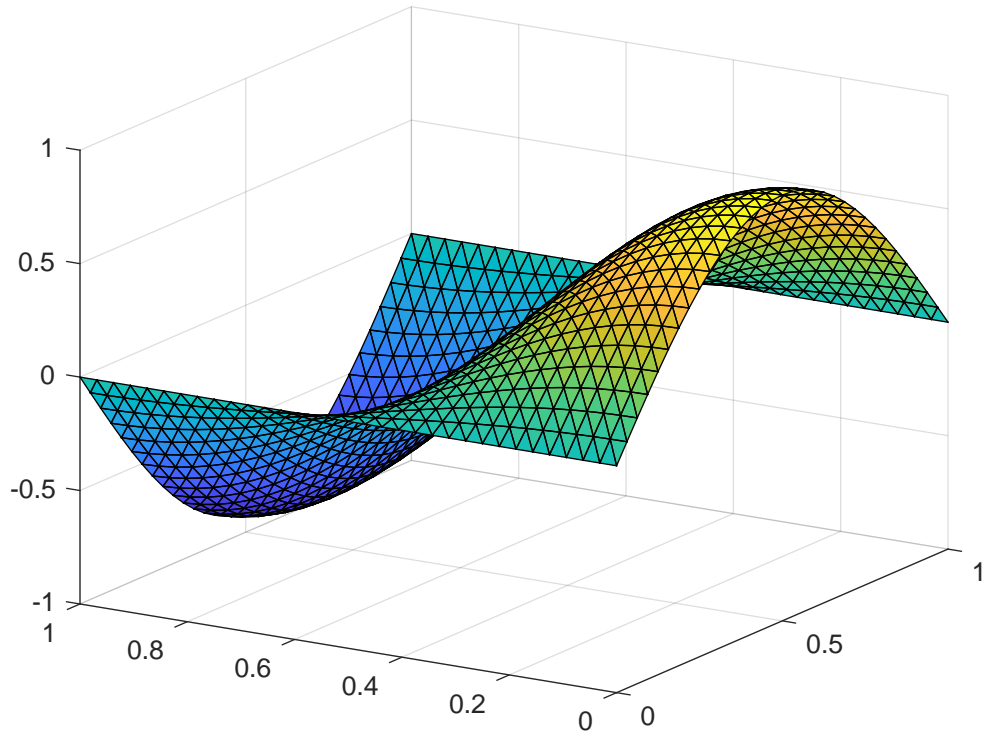


Figura 3.6: Función u_h^J con $h = \Delta t = 1/32$, ejemplo 4.

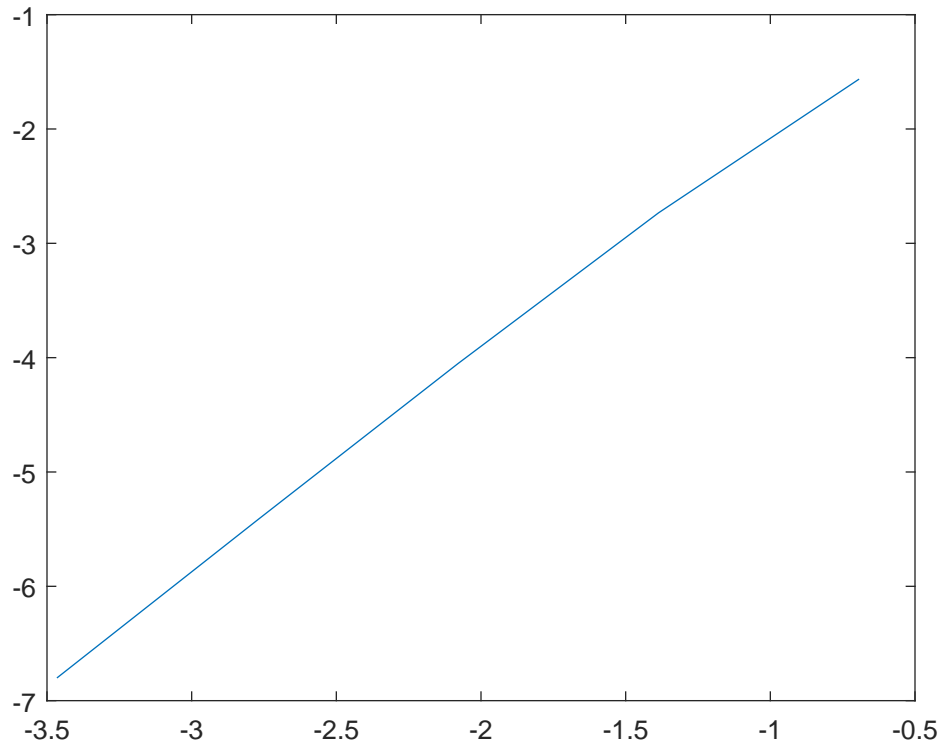


Figura 3.7: Gráfica de h vs. E_h en escala ln-ln, Crank-Nicolson, ejemplo 4.

Bibliografía

- [1] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 2008.
- [2] Dietrich Braess. *Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [3] Alfio Quarteroni and Alberto Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 2008.
- [4] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [5] Rainer Kress. *Numerical Analysis*. Springer, 1998.
- [6] John H. Mathews and Kurtis D. Fink. *Numerical Methods Using MATLAB*. Pearson Prentice Hall, 2004.
- [7] Michael G. Duffy. *Quadrature Over a Pyramid or Cube of Integrands with a Singularity at a Vertex*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 19 (1982). pp. 1260–1262.
- [8] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, 1991.
- [9] Howard Elman, David Silvester, and Andy Wathen. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: With Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, 2014.
- [10] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and algorithms*. Springer-Verlag, 1986.
- [11] Claes Johnson. *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1987.
- [12] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Differential Equations*. University of Washington, 2005.
- [13] Philippe G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Siam, 2002.
- [14] M. Costabile, V. J. Ervin, and E. P. Stephan. *Symmetric Coupling of Finite Elements and Boundary Elements for a Parabolic-Elliptic Interface Problem*. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 48, No. 2 (June 1990), pp. 265-279.