UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Facultad de Educación

Producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel

Trabajo presentado para optar al título de Doctora en Educación

ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ

Asesor

DR. CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ

PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO ESCOLAR EN UN COLECTIVO DE PROFESORES-CON-DOBLADO-DE-PAPEL

Doctoranda:

Zaida Margot Santa Ramírez

CC: 32110512

Asesor:

Dr. Carlos Mario Jaramillo López

Tesis para aspirar al título de
Doctora en Educación

Línea:
Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

X COHORTE

2016

"He aquí mi secreto, que no puede ser más simple: solo con el corazón se puede ver bien; lo esencial es invisible para los ojos" (Antoine de Saint-Exupéry, capítulo XXI)

A mis padres Luz y Fernando
A mis hermanos Iván y Alyssa
A mi sobrino y ahijado Juan José

Agradecimientos

En general, culminar una tesis doctoral es alcanzar un gran logro académico y profesional; en mi caso, tener la oportunidad de consolidar una tesis en este nivel, no solo significa conseguir dicho logro, sino que significa la superación de un enorme reto personal, que ha requerido tiempo, esfuerzo y mucha dedicación. Sin embargo, en todo el proceso y en la finalización del mismo, han estado presentes muchas personas, que me han apoyado, de forma directa o indirecta, confiando en mis capacidades, para que yo pudiera llegar a la meta trazada. Infinitas gracias a todas, incluso a aquellas que también son especiales y no alcanzo a nombrar en este escrito.

Le agradezco infinitamente al Doctor Carlos Mario Jaramillo López, por ser mi orientador y mi guía durante estos seis semestres de diseño y consolidación de la tesis doctoral. No solo me acompañó en este proceso, sino que se convirtió en un amigo, en un aliado, en un confidente; me apoyó en los momentos más difíciles y me brindó su voz de aliento para levantarme y seguir adelante.

Infinitos agradecimientos al Doctor Marcelo de Carvalho Borba y al Doctor Elgar Gualdrón Pinto, en primer lugar, por recibirme en sus instituciones universitarias y en sus respectivos grupos de investigación, para realizar mi proceso de pasantía; y, en segundo lugar, por brindarme sus conocimientos teóricos y metodológicos para fundamentar mi trabajo de investigación.

También, deseo darle las gracias a mi amigo, colega y coordinador de la Maestría en Regiones de la Universidad de Antioquia, Doctor René Alejandro Londoño Cano, quien, en nuestros diálogos académicos y no académicos y, mediante su ejemplo, me ha enseñado a ser una mejor profesional, mejor académica y mejor persona.

Les agradezco a todos los integrantes del grupo de investigación EDUMATH y a los profesores y estudiantes del seminario permanente, por apoyarme durante el período en que hice mi doctorado. Tanto el grupo, como el seminario, me dieron el soporte teórico y metodológico para consolidar las bases de mi estudio; sus aportes, sugerencias, preguntas y recomendaciones me permitieron constituir lo que hoy es mi tesis doctoral.

Un agradecimiento muy especial a las profesoras Molly, Elizabeth, Natalia y Vicky, por hacer parte de los colectivos de profesoras-con-doblado-de-papel; por participar activamente, con entusiasmo, motivación, responsabilidad y entrega, en el desarrollo de las actividades. Sin sus aportes, no hubiera sido posible consolidar mi investigación.

Finalmente, y no siendo menos importante, le agradezco a mi familia: a mis padres, hermanos y sobrino, por apoyarme en todas las decisiones académicas que he tomado a lo largo de mi vida; por aceptar, sin reclamos, el poco tiempo que les he dedicado, precisamente por estar pendiente de labores académicas y profesionales. De todos modos, quiero que consideren que siempre, mis logros, serán sus logros.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
Departamento de Educación Avanzada
Doctorado en Educación

Acta Aprobación de Tesis Doctoral

El día 15 de abril de 2016 a las 2:00 p.m, se reunieron en el Auditorio 2 de la sede de Investigación Universitaria (SIU) de la Universidad de Antioquia, Marcelo de Carvalho Borba, Élgar Gualdron Pinto y Luz Stella Mejía, quienes en calidad de jurados acompañaron al Director de tesis, Carlos Mario Jaramillo y a una representación del Comité de Doctorado de la Facultad de Educación, para presenciar la sustentación pública de la tesis doctoral debidamente aprobada (Artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). La tesis titulada ***"Producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel"*** fue presentada por la candidata a Doctora ***Zaida Margot Santa Ramírez,*** estudiante de la Línea de Formación "Educación Matemática", de la Décima Cohorte del Programa de Doctorado en Educación de la Universidad de Antioquia.

Terminada la presentación, se procedió a la sesión de preguntas y comentarios por parte de los jurados. Luego de las intervenciones de la candidata, se solicitó a los asistentes desalojar el recinto, con el fin de que los jurados realizaran su deliberación. Por unanimidad, los jurados otorgaron a la tesis doctoral la calificación de

APROBADA	NO APROBADA
X	

DISTINCIÓN

SIN DISTINCIÓN	CON DISTINCIÓN
	X

Así mismo, en cumplimiento del Artículo 45 del Acuerdo Superior 122 del 7 de julio de 1997, los jurados otorgaron a la tesis la distinción de

SUMMA CUM LAUDE	MAGNA CUM LAUDE	CUM LAUDE	NO APLICA
X			

A esta acta, se anexan los argumentos correspondientes en un texto firmado por los jurados.

Como representación del Programa y miembro del Comité de Doctorado, la Doctora Doris Adriana Ramírez presidió la reunión y procedió a la lectura pública del resultado.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
Departamento de Educación Avanzada
Doctorado en Educación

Marcelo de Carvalho Borba
Jurado

Élgar Gualdron Pinto
Jurado

Luz Stella Mejía
Jurado

Carlos Mario Jaramillo
Director

Doris Adriana Ramírez
Representante del Comité de Doctorado en Educación

1 8 0 3

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Tabla de contenido

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Índice de tablas

Índice de figuras

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel

Introducción

Desde el año 2003, el Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (EDUMATH) se ha preocupado por fundamentar tanto las bases de la Geometría del doblado de papel como su incidencia en el aula de clase. Para lograr estos propósitos, algunos de sus investigadores han participado en eventos locales, regionales y nacionales, con el propósito de socializar experiencias relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, aprovechando las oportunidades que brinda el doblado de papel, como medio para construir conocimiento geométrico. Es importante mencionar que el planteamiento de este estudio emerge de los talleres desarrollados con profesores en formación o profesores en ejercicio, quienes, de acuerdo a las experiencias vividas en el transcurso de los mismos, manifiestan su interés en proponer y diseñar alternativas metodológicas que permiten la construcción y comprensión de conceptos geométricos, usando este medio.

Por lo tanto, una de las conjeturas inmediatas que ha surgido del trabajo con profesores y que actualmente viene siendo motivo de estudio del Grupo de Investigación, es la afirmación que un colectivo de profesores puede producir conocimiento geométrico escolar usando el doblado de papel como medio o artefacto. En este sentido, se pretende dar un paso adelante para intentar mostrar, con algunos casos concretos, que este medio es una alternativa para la producción de conocimiento geométrico escolar, cuando es usado por un colectivo pensante de seres humanos (profesores en formación o en ejercicio). De esta manera, el estudio pretende consolidar una propuesta que aporte a la formación continua de profesores, considerando las interacciones entre este colectivo y el doblado de papel.

Por consiguiente, el capítulo uno presenta las antecedentes, el planteamiento del problema y los objetivos del estudio; los antecedentes contemplan algunas reflexiones sobre la geometría escolar, la geometría del doblado de papel, la producción de conocimiento y la formación de profesores. De acuerdo con la revisión de literatura relacionada con estas temáticas, el planteamiento del problema detecta ciertas dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, en particular, de la geometría, en la formación de profesores y en la falta de caracterización de la producción de conocimiento geométrico escolar que puede surgir de un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel.

El capítulo dos expone el marco teórico asumido en este estudio, el cual aborda algunas ideas del constructo teórico *seres-humanos-con-medios* (Borba y Villarreal, 2005), puesto que se ha observado en las experiencias con profesores, que la producción de conocimiento se puede generar en un colectivo pensante de humanos-con-medios, en este caso, un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel. Cabe anotar que esta producción parece estar mediada por los procesos de visualización y experimentación que surgen del análisis de construcciones hechas mediante el doblado, sin descartar la posibilidad de usar un software geométrico, que podría permitir la generalización y abstracción de algunos conceptos.

La metodología, presentada en el capítulo tres, explicita las características del paradigma de investigación cualitativo, a través de la aplicación de un diseño experimental, desde las ideas de Molina, Castro, Molina y Castro (2011) y Doerr y Wood (2006). Así mismo, describe los procesos de recolección de la información y los métodos para el análisis de la misma. El cronograma y la ruta metodológica describen el camino seguido para dar respuesta a la pregunta de investigación, a través de la consecución de los objetivos planteados.

El capítulo cuatro presenta el análisis de cada uno de los episodios que se desarrollaron con un colectivo de profesoras-con-doblado de papel, en una institución educativa pública de la ciudad de Medellín. Específicamente, se presentan las tareas[1] de formación abordadas en dicho colectivo, sesión a sesión, y un análisis pormenorizado de cada una de ellas, considerando las evidencias recolectadas durante el proceso (fotos, transcripciones de audios, material de los profesores, entre otros). También se presenta el análisis de las interacciones de un segundo colectivo, que se conformó en el marco de un programa de maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

El capítulo cinco sintetiza los principales hallazgos o resultados del análisis completo de la información, mediante un proceso de triangulación entre las observaciones de la investigadora, el referente conceptual y el análisis de cada uno de los episodios. Es decir, se expone un análisis retrospectivo que permite explicitar la respuesta a la pregunta de investigación, a través de la consecución del objetivo general y los específicos. Para ello, se describe la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge del colectivo de

[1] Las tareas de formación involucran, en la perspectiva de Ponte, Zaslavsky, Silver, et al. (2009), problemas y actividades geométricas, que son ofrecidas a los profesores para que tengan la oportunidad de profundizar en los conocimientos que deben enseñar a sus estudiantes y en la manera como pueden enseñarlos. Por lo tanto, las ubicamos en el campo de la geometría escolar

profesores-con-doblado-de-papel y, así mismo, se logra una caracterización de dicho colectivo, como aporte al constructo teórico *seres-humanos-con-medios*.

Finalmente, el capítulo seis expone las principales conclusiones del estudio, haciendo hincapié en la respuesta a la pregunta, la consecución de los objetivos general y específicos, aportes a la Educación Matemática, futuras líneas de investigación, dificultades presentadas en el proceso y recomendaciones. Es fundamental resaltar que todos los resultados surgieron del análisis de la información recolectada durante el trabajo de campo y de un proceso de triangulación, que permitió extraer las conclusiones del estudio.

1. Problema de investigación

En el capítulo que desarrollo[2] a continuación, presento el referente conceptual que es la base para plantear el problema de investigación y los objetivos. En primer lugar, se establece una diferencia fundamental entre la Matemática escolar y la Matemática académica, desde las ideas de Moreira (2004), Moreira y David (2005a) y Moreira y David (2005b). Posteriormente, se explicitan algunas ideas sobre la importancia del material concreto para la construcción de conocimientos y, en particular, se mencionan algunos aspectos importantes del doblado de papel (Santa y Jaramillo, 2010). Seguidamente, se hace un rastreo bibliográfico, muy general, sobre la producción de conocimiento y se establecen algunas directrices sobre la formación de profesores. Posteriormente, se expone un rastreo sobre varias tesis doctorales desarrolladas en el marco del constructo teórico *seres-humanos-con-medios* (Borba y Villarreal, 2005); también, se abordan algunos aspectos de la comprensión en Educación Matemática y, finalmente, se presenta un caso clave que dio origen a este estudio.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Matemática escolar y Matemática académica

Moreira y David (2005b) presentan una concepción de formación de profesores de matemática, tomando como base su práctica profesional dentro de las aulas de educación

[2] Como una nota aclaratoria, en algunos apartados de la tesis, yo, en el rol de investigadora principal, hablaré en primera persona, dado que en el desarrollo del trabajo de campo algunas de mis interacciones fueron importantes para el colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel. De hecho, puedo afirmar que hice parte de dicho colectivo Además, me referiré al colectivo de profesoras, porque, por cuestiones ajenas a mi voluntad, pues no fue una decisión metodológica, siempre estuvo conformado por mujeres; todo el grupo de profesores de la institución educativa fue invitado a participar del estudio.

básica. En este escenario, ellos se tornan preocupados por los procesos formativos de profesores en las licenciaturas, debido a una falta de articulación adecuada entre la formación específica en el área y la formación pedagógica, lo que puede traer dificultades, a futuro, en la práctica profesional de dichos profesores. Así mismo, consideran una tensión, necesaria de ser analizada e investigada en dichos procesos de formación, entre la Matemática Académica y la Matemática Escolar (Moreira y David, 2005a).

La Matemática Académica, de acuerdo con Moreira (2004) y Moreira y David (2005a), se relaciona directamente con los conocimientos avanzados y profundos de la disciplina, los cuales, comúnmente, tienen una connotación esencial y, hasta única, en cualquier proceso escolar. Otros saberes complejos e importantes, que hacen parte de dicho proceso, se convierten en accesorios o complementarios para la transmisión del saber matemático.

Por su parte, la Matemática Escolar se asocia con el conjunto de saberes específicamente asociados a la Educación Matemática escolar. En este sentido, de acuerdo con Moreira (2004) y Moreira y David (2005a), el conocimiento matemático del profesor de escuela, debería ser analizado desde una forma global e integrada, sin someterlo a algún tipo de descomposición (saber disciplinar, saber pedagógico, saber didáctico, entre otras).

Chevallard (1991), al referirse a la transposición didáctica, pone el saber sabio (Matemática Académica) como base fundamental del saber enseñado (Matemática Escolar). Es decir, la Matemática escolar se convierte en una adaptación de los conceptos y procedimientos e, incluso, normas y valores de la Matemática Académica (Moreira y David, 2005a). Por otro lado, Chervel (1990) afirma que los contenidos de enseñanza deben ser considerados como entidades propias de la clase escolar, independientes en alguna medida, de la realidad externa de la escuela. En este sentido, este autor concibe la Matemática Escolar como una construcción relacionada con el contexto específico de la escuela, sin considerar otros contextos externos que pueden afectar el proceso educativo (Moreira y David, 2005a).

De acuerdo con Moreira y David (2005a), tanto la postura de Chevallard (1991) como la de Chervel (1990), se muestran poco satisfactorias. En el caso de Chevallard (1991), porque la Matemática Escolar se reduce a una especie de didactización de la Matemática Científica; en el caso de Chervel (1990), porque concibe la Matemática Escolar como una construcción asociada solo a la institución escolar. En este orden de ideas, los autores se van a referir a la Matemática Escolar como:

> El conjunto de saberes 'validados', asociados específicamente al desenvolvimiento del proceso de educación escolar básica en Matemática […] La matemática escolar incluye tanto saberes producidos y movilizados por los profesores de Matemática en su acción pedagógica en el aula de clase, como los resultados de investigaciones que se refieren al aprendizaje y a la enseñanza escolar de conceptos matemáticos, técnicas, procesos, etc. (p. 20, traducción personal)

Por lo tanto, la Matemática Escolar será tomada en este estudio, como un conjunto de saberes relacionados, explícitamente, con el ejercicio de la profesión docente (Moreira y David, 2005a). Es decir, dado que el profesor se desenvuelve en un contexto educativo, se hace necesario generar una visión completamente diferente de la matemática: definiciones más descriptivas, formas alternativas para demostraciones, argumentaciones, justificaciones o presentación de los conceptos y procedimientos, reflexión profunda de los orígenes de los errores de los estudiantes, entre otros (Moreira y David, 2005a).

Considerando las ideas anteriores y, en la línea de Moreira (2004), Moreira y David (2005a) y Moreira y David (2005b), se entenderá que la geometría escolar, para los efectos de este estudio, será un subconjunto de la matemática escolar y, por lo tanto, incluirá no solo saberes geométricos generados o consolidados por los profesores de geometría en su práctica pedagógica, sino también los resultados de investigaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos y procedimientos geométricos. Por lo tanto, se relacionará con los saberes asociados al ejercicio de la profesión docente en geometría, considerando definiciones geométricas más descriptivas, formas alternativas (como el doblado de papel) para generar demostraciones, argumentaciones, generalizaciones o justificaciones y para la presentación de conceptos o procedimientos geométricos

1.1.2. Importancia de la matemática escolar

Para Moreira (2004) y Moreira y David (2005a), la práctica profesional de los profesores, en relación con la Matemática Escolar, toma un papel fundamental en el proceso de formación:

> Si pensamos la Matemática Escolar como una construcción histórica que refleje muchos condicionamientos, tanto externos como internos a la institución escolar, y que se expresa, en última instancia, en las relaciones con las condiciones puestas por el trabajo educativo en el propio salón de clase, entonces la práctica profesional efectiva de los profesores, asume un papel central en el proceso de formación. (p. 46, traducción personal)

Es decir, la práctica profesional desempeña un rol fundamental en la estructuración de los saberes docentes, considerados como saberes de acción pedagógica, que son los conocimientos, habilidades y competencias de los profesores, asociados directamente a las actividades del aula de clase (Gauthier, Martineau, Desbiens, Malo y Simard, 1998, citados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

por Moreira y David, 2005a). De acuerdo con Moreira (2004), estos saberes podrían constituir un elemento fundamental de la formación inicial o continuada de profesores, si se realiza un análisis del papel de la práctica docente escolar y se pone en el centro del proceso de formación. De esta manera, se podría mencionar que la práctica produce saberes; produce, además, una referencia, con base en la cual se procesa una selección, una filtración o una adaptación de los saberes adquiridos fuera de ella, de modo que se tornen útiles o utilizables (Moreira y David, 2005a). Por lo tanto, estos autores precisan que:

> Es en el contexto de la interacción con esa lógica de la práctica escolar, que la lógica interna de la Matemática Científica, sus valores, sus técnicas y sus resultados pasan por un proceso de adaptación, filtración, revalorización y transformación, teniendo como referencia –implícita o explícita- el ambiente educativo en que esas operaciones se realizan. (p. 45, traducción personal)

Las anteriores ideas se relacionan directamente con algunas ideas de Ponte (2012), pues este autor afirma que en los procesos de formación de profesores, para favorecer el desarrollo profesional del profesorado, es necesario: (1) hacer uso de la colaboración, (2) poner la práctica como punto de partida de la formación e (3) investigar sobre la práctica como un proceso clave para la construcción del conocimiento. Algunos de estos aspectos serán abordados en apartados posteriores.

Sin embargo, en el proceso de formación de profesores se percibe un abandono sistemático de los aspectos particulares que se refieren a la práctica docente escolar, privilegiando cuestiones que son relevantes solo para la Matemática Académica (Moreira y David, 2005). De acuerdo con los autores, también puede darse que tales aspectos sean abordados, pero desde una óptica que está totalmente alejada del trabajo docente en el aula de clase.

En cuanto a la práctica efectiva en el aula de clase, la principal dificultad se da cuando no se identifican o reconocen como legítimas e importantes ciertas formas de conocimiento, que se distancian notoriamente de la Matemática Científica, pero que son cruciales en la educación básica porque se vinculan al proceso de construcción escolar del saber matemático (Moreira y David, 2005a). Así las cosas, la "hipervalorización" de la Matemática Académica en el proceso de formación, puede estimular el desarrollo de concepciones y valores que están distanciados de la práctica y de la cultura escolar, generando dificultades en la comunicación del profesor con los estudiantes y con la propia gestión de las matemáticas en el aula de clase. (Moreira, 2004).

La desconexión del proceso de formación en relación a la práctica, se puede percibir en el distanciamiento que existe entre los conocimientos matemáticos trabajados en el proceso de formación inicial y los aspectos que se le presentan al profesor en su acción pedagógica (Moreira y David, 2005). Por lo tanto, se genera una necesidad de redimensionar la formación matemática en las licenciaturas, de tal manera que se equiparen los papeles de la Matemática Científica y de la Matemática Escolar en ese proceso (Moreira y David, 2005). Para ello, el profesor de la Escuela Básica debe "experimentar, criticar, reflexionar, reformular, adaptar y eventualmente crear formas de abordaje que se ajusten a las necesidades y a las condiciones de su práctica docente" (p. 98, traducción personal).

1.1.3. Uso de materiales para la enseñanza de la geometría

En la enseñanza de las matemáticas, históricamente, se han usado materiales físicos que permiten representar y visualizar algunos conceptos; por ejemplo, desde la geometría se han utilizado objetos de la vida cotidiana, como balones o cajas, para inducir a los estudiantes en las formas de las figuras e iniciar así el estudio de conceptos como circunferencias, rectas, planos, entre otros.

En general, un material, recurso, herramienta o TIC, debería constituirse en un medio que posibilite la producción de conocimiento. En este sentido, en las manos del profesor, se convierte en un coadyuvante del proceso de enseñanza; pero, en las manos de quien aprende, es una herramienta poderosísima que permea y orienta el proceso mismo de aprendizaje. Por lo tanto, los materiales no son instrumentos solo del profesor sino un medio de cognición en las manos de la persona que aprende (Wittmann, 1993, citado por Nührenbörger y Steinbring, 2008). De acuerdo con Villarroel y Sgreccia (2011), las oportunidades de utilizar materiales didácticos concretos, específicamente en geometría, están asociadas al enorme potencial que estos tienen en el desarrollo de habilidades geométricas.

Un material, ya sea concreto o virtual, no puede estar desprovisto de relaciones matemáticas o de las estructuras que representa, porque se convertiría en un objeto del común, que no permitiría la construcción de conceptos. Si el doblado de papel, por ejemplo, se utilizara solo como un arte o una actividad lúdica, perdería todo su potencial para propiciar la producción de conocimiento geométrico. Precisamente, quedaría en el olvido su capacidad para posibilitar la interpretación geométrica de lo que se hace cuando se dobla. Ball (1992) menciona, sobre el uso de materiales, que su “principal preocupación acerca de la fe en el poder de los materiales, en su habilidad casi mágica para iluminar, es que se engañe al pensar que el conocimiento matemático automáticamente se deriva de su uso” (p. 18, traducción personal).

Al respecto, es importante afirmar que los materiales no son métodos de trabajo que de manera espontánea ayudan a comprender directamente las matemáticas abstractas, sino que se convierten en representantes cuasi simbólicos para operaciones matemáticas, estructuras y conceptos (Nührenbörger y Steinbring, 2008). En este sentido, su bondad y uso eficiente depende de "su naturaleza y de sus relaciones con los conceptos matemáticos correspondientes" (Fischbein, 1977, p. 163f, traducción personal). Por lo tanto, de acuerdo con Nührenbörger y Steinbring (2008), la potencia de una herramienta y su valor, está supeditada a la articulación del objeto con las relaciones matemáticas y estructuras que representa.

Sin embargo, se debe considerar que las relaciones que logran establecer los estudiantes entre los materiales y los conceptos matemáticos, dependen totalmente de la interpretación individual y colectiva que cada uno logra construir, en la unidad estudiantes-con-materiales. Es decir, los materiales son interpretados de distintas maneras, por diferentes estudiantes (Nührenbörger y Steinbring, 2008) y en colectivos diferentes, tal como lo afirman Borba y Villarreal (2005).

Cuando se menciona el término material, en este apartado, no solo se habla de materiales concretos, sino también de tareas, actividades o lecciones creadas para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Además, también se pueden usar materiales virtuales o, incluso, ambientes virtuales de aprendizaje AVA.

Por otro lado, con respecto a la formación de profesores, Watson y Sullivan (2008) mencionan que es posible utilizar algunas tareas o lecciones de matemáticas para favorecer el aprendizaje de los profesores durante su proceso formativo, ya sea inicial o continuo. En este sentido, los profesores pueden estar envueltos en un proceso formal y deliberado de aprendizaje, en el que puedan analizar cómo enseñar a sus estudiantes conceptos o procedimientos matemáticos.

Estos autores discuten cuatro tipos de tareas orientadas a los profesores, con las que buscan: "promover la comprensión conceptual; desarrollar la fluidez matemática; crear oportunidades para centrarse en la competencia estratégica; y crear oportunidades para el uso del razonamiento adaptativo" (Watson y Sullivan, 2008, p. 109, traducción personal). En la perspectiva de este estudio, las tareas de formación que se trabajaron con las profesoras, utilizando como medio el doblado de papel, pretendían que estas avanzaran en sus procesos de comprensión de algunos conceptos y procedimientos geométricos, que pudieran tener fluidez geométrica para desarrollar algunas actividades en el aula de clase y que pudieran discutir la pertinencia o adaptación de algunos conceptos en el aula, al analizar su acción pedagógica. Es importante aclarar que las tareas diseñadas y desarrolladas con el colectivo, fueron pactadas, desde el inicio del trabajo de campo, de acuerdo con las necesidades que las profesoras manifestaron. Además, ellas también tuvieron la oportunidad de diseñar y proponer algunas tareas de formación (ver séptimo episodio).

1.1.4. Geometría del doblado de papel

Se ha observado que con una hoja de papel, un grupo de estudiantes o profesores puede hacer construcciones tan precisas como las elaboradas con regla y compás; también, puede experimentar, visualizar, formular conjeturas, justificar procedimientos, comprender conceptos e, incluso, hacer demostraciones. En este sentido, el doblado de papel hace parte del conjunto de materiales que se constituye en un medio de cognición en las manos de la persona que aprende (Wittmann, 1993, citado por Nührenbörger y Steinbring, 2008).

Al respecto, Santa y Jaramillo (2010) afirman que:

> […] el doblado de papel se ha venido consolidando como una alternativa para mejorar el razonamiento en el área de la Geometría, debido principalmente a su carácter visual y experimental, que le permite al estudiante no sólo manipular una hoja de papel para hacer unos dobleces determinados, sino también para visualizar algunos conceptos geométricos, además, justificar de manera formal las construcciones elaboradas, usando un sistema axiomático. (p. 340)

A nivel internacional, encontramos muchos autores que también justifican el uso del doblado de papel en la construcción y comprensión de conceptos geométricos. Geretschläger (1995), por ejemplo, afirma que:

> La conexión entre Geometría y origami se hace muy notoria y muy obvia. Para muchas personas, el origami termina convirtiéndose en un simple arte, mientras que para otras (como el educador alemán Friedrich Fröebel) el origami se puede utilizar para enseñar formas elementales geométricas. (p. 357)

En la misma línea, Royo (2002), concluye que: “el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la Geometría elemental plana” (p. 186). También precisa que “la clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel” (p. 186).

Por otro lado, en el año 1989 el ítalo japonés Humiaki Huzita presentó en el Primer Encuentro Internacional de Origami, Ciencia y Tecnología seis axiomas para la geometría del doblado de papel. Estos axiomas, llamados Axiomas de Huzita (Huzita, 1989), se relacionan con conceptos básicos de geometría euclidiana y algunos de ellos, con problemas del cálculo diferencial. Posteriormente, el japonés Koshiro Hatori presentó un séptimo axioma, en el año 2003, y, desde ese momento, los axiomas recibieron el nombre de Axiomas de Huzita – Hatori. Sin embargo, Lang (1996-2015) afirmó que también se encuentra la denominación Axiomas de Huzita – Justin, dado que aún está en duda la presentación del séptimo axioma por parte de Koshiro Hatori y se le atribuye a Jacques Justin, también en el año 1989. Para efectos del presente estudio, se denominarán Axiomas de Huzita – Hatori, tal como se presentaron en Santa y Jaramillo (2010).

Con respecto a este listado de axiomas, Santa y Jaramillo (2010) intentaron demostrar que era un sistema axiomático, por cumplir con las características de independencia y compatibilidad, en la perspectiva de Cardozo, Elejalde y López (2001); no obstante, la característica de suficiencia no se cumple todavía, pues no hay evidencias, hasta el momento, que muestren el establecimiento de teoremas, que puedan ser demostrados a partir de los axiomas y de los mismos teoremas (Santa y Jaramillo, 2010). Pese a que Santa y Jaramillo (2010) no lograron mostrar que los Axiomas de Huzita-Hatori hacían parte de un sistema axiomático, Lang (1996-2015) sí demostró que estos axiomas cumplen la característica de completitud. Es decir, no es posible encontrar otro axioma que considere "todas las posibles combinaciones que definen un único doblez por la alineación de puntos con segmentos de recta finitos (p. 39)". Teniendo en cuenta su traducción original, estos axiomas se enuncian de la siguiente manera:

Axioma 1: "Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que pasa a través de ellos" (Lang, 1996 – 2015, p. 44). Este axioma se relaciona con el primer axioma de Euclides, el cual afirma que por dos puntos pasa un único doblez (Santa y Jaramillo, 2010).

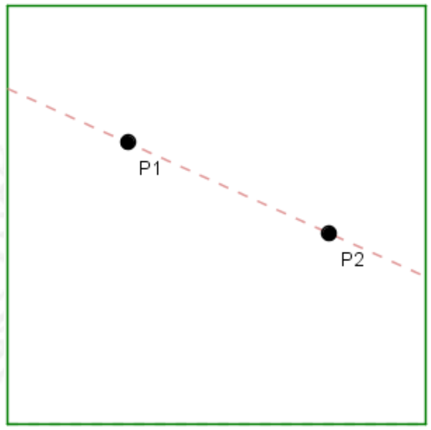


Figura 1: Representación gráfica Axioma 1 (Santa, 2011, p. 77).

Axioma 2: "Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 sobre P_2" (p. 38). Se puede mostrar que el doblez resultante de esta acción, se relaciona con la mediatriz del segmento formado por los puntos $\overline{P_1P_2}$ (Santa y Jaramillo, 2010).

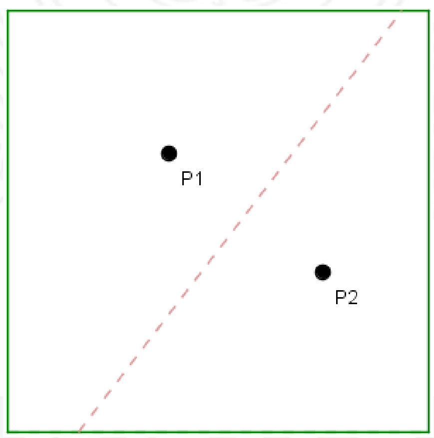


Figura 2: Representación gráfica Axioma 2 (Santa, 2011, p. 78).

Axioma 3: "Dadas dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre l_2" (p. 38). De acuerdo con Santa y Jaramillo (2010), se puede mostrar que el doblez o los dobleces resultantes de esta acción, se relacionan con las bisectrices de los ángulos que forman los dobleces l_1 y l_2. La existencia de uno o de dos dobleces, está supeditada a la intersección de los dobleces l_1 y l_2 en la hoja de papel. Si los dobleces se intersecan dentro de la hoja de papel, es posible encontrar dos soluciones. En caso contrario, aunque las soluciones pueden existir en el plano infinito, en la hoja de papel finita no es posible construir el segundo doblez.

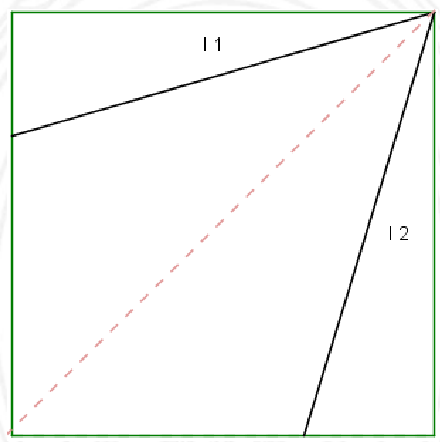


Figura 3: Representación gráfica Axioma 3 (Santa, 2011, p. 79).

Axioma 4: "Dado un punto P_1 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1" (p. 38). El doblez solución de este axioma, se relaciona con una perpendicular a la recta l_1 que pasa por el punto P_1. En este caso, se garantiza la existencia de un solo doblez solución, sin importar si P_1 pertenece o no a l_1 (Santa y Jaramillo, 2010).

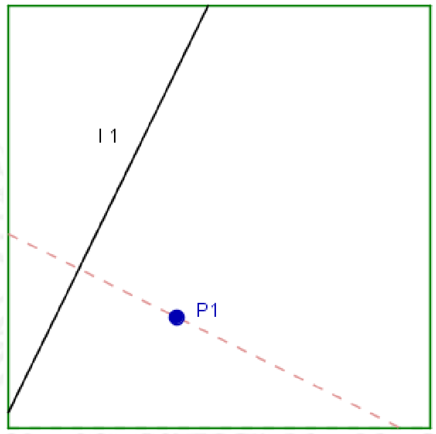


Figura 4: Representación gráfica Axioma 4 (Santa, 2011, p. 80).

Axioma 5: "Dados dos puntos P_1 y P_2 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y pasa por P_2" (p. 38). Este axioma tiene a lo sumo dos soluciones. Se relaciona con las posiciones relativas de una circunferencia (de radio $\overline{P_1P_2}$ y centro P_2) y una recta (doblez l_1) (Santa y Jaramillo, 2010). Si la distancia entre P_1 y P_2 es mayor que la distancia entre P_2 y el doblez l_1, hay dos soluciones, de la misma manera como una recta corta a una circunferencia en dos puntos. Si la distancia entre P_1 y P_2 es igual que la distancia entre P_2 y el doblez l_1, hay una solución, de la misma manera como una recta corta la circunferencia en un punto (tangente). Si la distancia entre P_1 y P_2 es menor que la distancia entre P_2 y el doblez l_1, no hay solución; en este caso, con respecto a las posiciones relativas de una circunferencia y una recta, estas no se cortan.

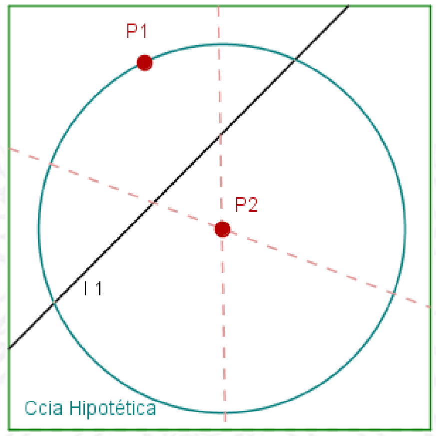


Figura 5: Representación gráfica Axioma 5 (Santa, 2011, p. 81).

Axioma 6: "Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y a P_2 sobre l_2" (p. 38). Santa y Jaramillo (2010) precisan que este axioma tiene a los sumo tres soluciones (0, 1, 2 o 3 dobleces), las cuales se relacionan con rectas tangentes comunes a dos parábolas de directrices l_1 y l_2, y focos P_1 y P_2, respectivamente. Es decir, el axioma es solución a un problema de cálculo diferencial: dados dos parábolas, encontrar una recta tangente común a ambas parábolas (puede haber más de una tangente). Las soluciones dependen de las posiciones de los puntos y de los dobleces, de acuerdo con la tabla presentada en Santa y Jaramillo (2010). Es importante mencionar que, de acuerdo con Huzita (1989) y Lang (1996-2015), los dobleces soluciones de este axioma se relacionan con las soluciones de una ecuación de tercer grado.

Facultad de Educación

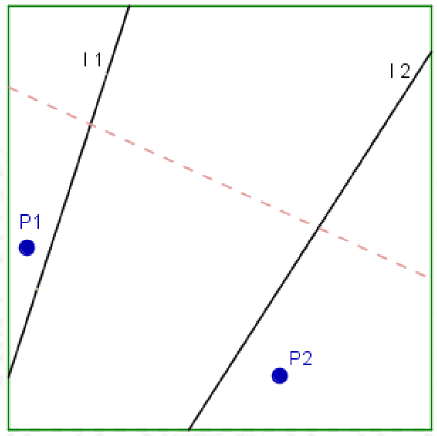


Figura 6: Representación gráfica Axioma 6 (Santa, 2011, p. 83).

Axioma 7: “Dados un punto P_1 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez perpendicular a l_2 que ponga el punto P_1 sobre la línea l_1” (p. 39). Santa y Jaramillo (2010) mencionan que si los dobleces l_1 y l_2 son perpendiculares, no es posible encontrar algún doblez; en caso contrario, se puede encontrar un único doblez que cumpla con las características descritas. De acuerdo con estos autores, el axioma se relaciona con la búsqueda de un doblez que sea tangente a la parábola de directriz l_1 y foco P_1 y, a su vez, perpendicular al doblez l_2. Según Lang (1996-2015), este axioma es solución de una ecuación de segundo grado.

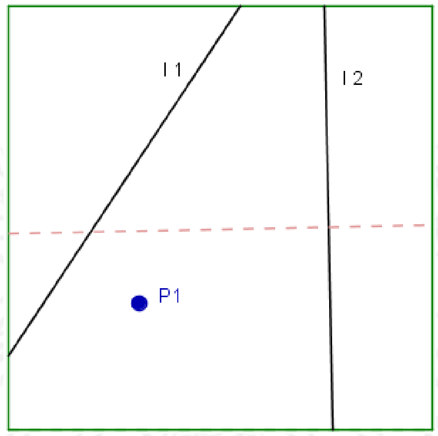


Figura 7: Representación gráfica Axioma 7 (Santa, 2011, p. 84).

Como se dijo en párrafos anteriores, las ponencias y talleres desarrollados en encuentros locales, regionales y nacionales, con profesores en formación o en ejercicio, ha permitido pensar en la posibilidad de utilizar la geometría del doblado de papel y su axiomática, en la orientación de determinadas actividades, como un medio que le posibilite a un colectivo de profesores producir conocimiento geométrico escolar en estrecha relación con dicha axiomática.

Por consiguiente, se pretende mostrar con este estudio, cómo un colectivo de profesores produce conocimiento geométrico escolar a través de actividades basadas en la geometría del doblado de papel y su respectiva axiomática. Además, indagar y analizar cómo las interacciones que se dan al interior del correspondiente colectivo pensante de profesores, puede permitir, a su vez, el diseño de propuestas novedosas que impacten los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Es fundamental resaltar que no se pretende abordar un objeto matemático único en la investigación. Se espera que la producción de conocimiento geométrico escolar esté relacionada con los conceptos implícitos en los axiomas de Huzita-Hatori y con otros que emerjan de ciertas construcciones con doblado de papel: hexaedro regular, teorema de Pitágoras, rectas paralelas y perpendiculares, parábola, media y extrema razón, trisección de un ángulo agudo, entre otras. Si acotamos el estudio a un solo concepto, es posible que queden en un segundo plano relaciones geométricas importantes que contribuyan con la producción de conocimiento geométrico escolar del colectivo de profesores.

1.1.5. Producción de conocimiento

En general, para muchos investigadores en Educación, la pregunta por la adquisición del conocimiento se convierte en un atolladero, pues es una temática que ha sido abordada desde diferentes puntos de vista, analizada y discutida en comunidades académicas, pero que en muchos contextos, no ha podido ser resuelta de manera satisfactoria. En el campo educativo, se han desarrollado teorías alrededor de la producción de conocimiento (Borba y Villarreal, 2005) o de la construcción del conocimiento (constructivismo). En este orden de ideas, surge la pregunta sobre cómo un estudiante o profesor, de manera individual o colectiva, interactuando con medios, adquiere, produce o construye conocimiento, en este caso, conocimiento matemático.

Es fundamental poder responder, además, si es la misma acción producir, adquirir o construir el conocimiento. Son tres palabras que, desde su epistemología, tienen significados diferentes, pero que, en muchos casos, en la informalidad de la educación por ejemplo, se usan de manera indistinta. Por lo tanto, se torna fundamental hacer la claridad; además porque las tres acciones dependen del contexto en el que son utilizadas: tecnológico, social o educativo.

Ámbito tecnológico.

Si analizamos la evolución que han tenido las tecnologías, en particular el Internet, se nota un desarrollo más que acelerado en las últimas dos décadas, debido principalmente a la gran movilización que ha generado la era informática. En este ámbito, la adquisición de conocimiento se relaciona directamente con el uso que se le da a la información en el Word Wide Web o sistema de distribución de datos (documentos, textos, imágenes, videos, etc.). Por lo tanto, la adquisición de conocimiento se vincula, de manera técnica, con la búsqueda, recopilación, consolidación y análisis de información en grandes y novedosas bases de datos. En este sentido, el conocimiento humano se podría definir como la "acumulación de técnicas para orientar las necesidades humanas y mejorar las capacidades de solución" (Gaines, 2013, p. 135).

Por otro lado, en los últimos años, algunos investigadores han intentado hacer una relación entre la adquisición de conocimiento de un ser humano y la de una máquina, tratando de generar procesos de inteligencia artificial (IA). Es decir, se consideraba que el aprendizaje automático de la máquina, originalmente, se ocupaba del desarrollo de sistemas inteligentes que exhibían un comportamiento rico en tareas complejas (Motta, 2013), situación que se observa en el aprendizaje de los seres humanos. El reto final del aprendizaje automático es, sin lugar a dudas, desarrollar mecanismos que cubran todas las capacidades observadas en los seres humanos, sistemas verdaderamente inteligentes (Motta, 2013).

Sin considerar la polémica que ha desatado el tema de la inteligencia artificial, es importante aclarar que la tecnología informática y la interacción humano – computador ha pasado a desempeñar un papel fundamental en todos los procesos del conocimiento, puesto que facilita "la generación, la difusión, el acceso y la utilización" (Gaines, 2013, p. 135) de los niveles de conocimiento, más allá de lo imaginado. Esta mirada también ha permeado el campo educativo, dado que en los procesos de enseñanza y aprendizaje, en los últimos años, se están usando medios tecnológicos (software, páginas web, ambientes de aprendizaje online, plataformas virtuales, entre otros) que permitan la construcción o producción del conocimiento.

Ámbito educativo.

Como se mencionó anteriormente, el proceso de adquisición del conocimiento se relaciona directamente con el acceso a la información a través de diferentes medios y con los vínculos entre la inteligencia artificial y la cognición humana. Sin embargo, en el campo educativo, la adquisición de conocimiento va mucho más allá: se asocia con la producción o construcción del conocimiento.

Con respecto a la producción del conocimiento, autores como Jaramillo, Obando y Beltrán (2009), afirman que el conocimiento es producto de las interacciones del sujeto con el contexto que lo rodea. Es decir,

> En una perspectiva sociocultural de la educación, el conocimiento deja de ser visto como un producto externo que debe ser apropiado por los individuos, pasando a ser comprendido como una interpretación que los sujetos hacen del mundo, en una dialéctica continua con su entorno social, cultural, histórico y político. Es decir, el conocimiento es producido desde el sujeto en sus interrelaciones con el mundo. (p. 7)

Desde este punto de vista, se asume el conocimiento matemático como una actividad de tipo social, cuya "producción y legitimación es resultado de la explicación de diferentes prácticas sociales en las que están involucrados los sujetos, a partir de los sentidos y significados compartidos, respetando, así, los diferentes saberes constituidos por los diversos grupos socioculturales" (p. 7).

Por su parte, Godino y Batanero (1994) conciben que el conocimiento personal se produce "como consecuencia de la interacción del sujeto con el campo de problemas, mediatizada por los contextos institucionales" (p. 22). De acuerdo a lo anterior, se puede inferir que estos autores asumen la producción de conocimiento como una actividad que emerge de la interacción y del diálogo con ese otro y con el contexto o el mundo que los rodea.

En la perspectiva socioepistemológica de Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra (2006), "el conocimiento depende de las experiencias vividas que, a su vez, modifican las propias percepciones y creencias" (p. 85). En consecuencia, dicha perspectiva se ocupa "del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional" (p. 86). Además, se focaliza en el rol de las prácticas sociales como mediadoras en los procesos de construcción de conocimiento (Cantoral et al., 2006). Luego, se asume y se respeta el carácter social, cultural, económico y político del sujeto, su historicidad e idiosincrasia, de manera similar a como lo mencionan Jaramillo et al. (2009).

D'Ambrosio (1999) comprende el proceso de producción de conocimiento como resultado de la acción humana en sociedad. Esto es,

> Entendemos el conocimiento como algo que emana de la gente, esencialmente como consecuencia de la tendencia humana hacia la explicación, comprensión y consideración de su entorno inmediato y de la realidad en general, realidad entendida en su sentido más amplio y en cambio permanente como resultado de la propia acción humana. Esta tendencia,

> obviamente holística, está sujeta dinámicamente a un proceso de exposición a otros miembros de la sociedad –el pueblo- y gracias a la comunicación, tanto inmediata como remota en el tiempo y en el espacio, experimenta un proceso de codificación, entrelazado por una lógica asociada subyacente, inherente a la gente como una forma de conocimiento que algunos llaman sabiduría. (p. 353)

Por otro lado, las teorías constructivistas se focalizaban comúnmente en la acción del individuo, "visto a la luz de *su* participación en el plano social" (Radford, 2004, p. 3). Sin embargo, las nuevas perspectivas socioconstructivistas, asumen que:

> […] tanto el proceso de aprendizaje de las Matemáticas y sus productos… son sociales de principio a fin. Sin embargo, esta también enfatiza que los niños construyen activamente sus comprensiones Matemáticas en el curso de su participación en los procesos sociales de la clase… Esta discusión sobre la reflexión colectiva cuestiona la vista que los niños son meramente acarreados por un discurso que determina su pensamiento individual. (Cobb y otros, 1997, citado por Radford, 2004, p. 4)

En este orden de ideas, Radford (2006) afirma que el aprendizaje "no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido los objetos conceptuales que encuentre el alumno en su cultura. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados" (p. 113).

Considerando las ideas constructivistas y socioconstructivistas, notamos que autores como Barbosa (2009), intentan hacer una articulación entre ambas, al manifestar que la producción de conocimiento matemático ocurre, fundamentalmente en el contexto de la construcción social y en el proceso de interpretación individual. Es decir, se convierte en un proceso rico de interacciones externas e internas, donde las externas se relacionan con todo lo que rodea al sujeto y, las internas, con las síntesis personales (Moran, 2006).

De hecho, Moran (2006) precisa que:

> Conocer es relacionar, integrar, contextualizar, hacer nuestro lo que viene de afuera. Conocer es saber, es descubrir, es ir más allá de la superficie, de lo previsible, del exterior. Conocer es profundizar los niveles de descubrimiento y penetrar más a fondo en las cosas, en las realidades, en nuestro interior. Conocer es conseguir llegar al nivel de sabiduría, de integración total, de percepción de grandes síntesis, que se consiguen cuando se comunican con una nueva visión del mundo, de las personas y de la inmersión profunda en nuestro yo. El conocimiento se da en un proceso rico de interacciones externas e internas. Por una comunicación abierta y confiable, desarrollamos continuos e inagotables procesos de profundización de niveles de conocimiento personal, comunitario y social. (p. 25)

Si analizamos cada una de las perspectivas mencionadas anteriormente, advertimos que algunas hablan de la producción y, otras, de la construcción del conocimiento. Sin entrar aún en una diferenciación de los términos, podríamos asumir, de manera general, que el conocimiento emerge de las interacciones de los sujetos con otros sujetos o con los medios que los rodean. Es decir, el conocimiento es producido o construido por un colectivo pensante de seres-humanos-con-medios (Borba y Villarreal, 2005), en el que las interrelaciones que se den en su interior, son la clave para dicha producción de conocimiento.

En este sentido, asumimos el conocimiento en la misma perspectiva de Moran (2006), quien afirma que este no es fragmentado, pero sí es interdependiente, interconectado e intersensorial. Es decir, *conocer* significa “comprender todas las dimensiones de la realidad, captar y expresar esta totalidad de forma cada vez más amplia e integral” (p. 18). En esta línea, se conoce más y mejor cuando se conecta, se junta, se relaciona o se accede al objeto, desde todos los puntos de vista, desde todos los caminos, integrándolos de la forma más rica posible (Moran, 2006). De hecho, para este autor, el conocimiento se da fundamentalmente en procesos de interacción y de comunicación. Por lo tanto, con el presente estudio, se pretende que el colectivo de profesores-con-doblado-de-papel, a través de todas sus interacciones, produzca conocimiento geométrico, es decir, pueda producir comprensiones de todas las dimensiones de la realidad, relacionada con la Geometría del doblado de papel, su axiomática correspondiente y sus procesos de enseñanza y aprendizaje.

1.1.6. Concepciones acerca de pensar, enseñar y aprender

Considerando la posición de conocimiento que se ha asumido en esta investigación, desde la perspectiva de Moran (2006), se entenderá la acción de *pensar* como "aprender a racionalizar y organizar lógicamente el discurso, sometiéndolo a criterios, como la búsqueda de razones convincentes, inferencias fundamentadas, organización de explicaciones, descripciones y argumentos coherentes" (Moran, 2006, p. 18). Dado que con el estudio se pretende caracterizar la producción de conocimiento geométrico que emerge de un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel, se espera que las interacciones entre los profesores con ellos mismos y con el doblado de papel, permitan la elaboración de conjeturas visuales o inferencias basadas en las construcciones hechas mediante el doblado; además, la elaboración, descripción y organización de argumentos o explicaciones que permitan justificar las construcciones y las conjeturas lanzadas.

En la misma línea de Moran (2006), se entenderá por *enseñar*, aquel proceso social, que se inserta en cada cultura y considera sus normas, tradiciones y leyes; pero también se entenderá como un proceso profundamente individual, en el que cada uno desarrolla un estilo, a su manera, dentro de lo que se espera para la mayoría. En este sentido, es la sociedad la que enseña; las instituciones aprenden y, a su vez, enseñan; de la misma manera, los profesores aprenden y también enseñan, e involucran en este proceso, su conocimiento disciplinar/didáctico, su competencia, su identidad, su personalidad, sus valores, su historicidad y su ejemplo.

Adicionalmente, se entenderá por *aprender*, aquella acción que permita pasar de "la incertidumbre a una certeza provisoria que dé lugar a nuevos descubrimientos y nuevas síntesis" (Moran, 2006, p. 17). En palabras de Moran (2006):

> Aprendemos mejor cuando vivenciamos, experimentamos, sentimos. Aprendemos cuando relacionamos, establecemos vínculos, lazos entre lo que estaba suelto, caótico, disperso, integrándolo en un nuevo contexto, dándole significado, encontrando un nuevo sentido. Aprendemos cuando descubrimos nuevas dimensiones de significación, que antes se nos escapaban, cuando vamos ampliando el círculo de comprensión de lo que nos rodea, cuando, como en una cebolla, vamos despejando nuevas capas que antes permanecían ocultas a nuestra percepción, lo que nos hace percibir de una u otra forma. Aprendemos más cuando establecemos puentes entre la reflexión y la acción, entre la experiencia y la conceptualización, entre la teoría y la práctica, cuando ambas se alimentan mutuamente. Aprendemos cuando equilibramos e integramos lo sensorial, lo racional, lo emocional, lo ético, lo personal y lo social […]. Aprendemos por placer, porque nos gusta un tema, un medio o una persona. El juego, la atmósfera agradable y el estímulo positivo pueden facilitar el aprendizaje […]. Aprendemos realmente cuando conseguimos transformar nuestra vida en un proceso permanente, paciente, confiable y afectuoso de aprendizaje […]. (pp. 23 – 24)

Por lo tanto, en el contexto de esta investigación, se torna fundamental tomar una posición frente a las acciones de pensar, enseñar y aprender, dado que se espera que las interacciones del colectivo de profesores-con-doblado-de-papel permitan la producción de conocimiento geométrico, con tres propósitos primordiales: primero, que los profesores puedan generar procesos de aprendizaje, al desarrollar conocimientos sobre la Geometría del doblado de papel; segundo, que los profesores puedan usar sus conocimientos de dicha Geometría, para generar procesos de enseñanza en el aula de clase y, tercero, que puedan reflexionar e investigar sobre sus propias prácticas pedagógicas.

1.1.7. Formación de profesores

Considerando que la investigación se centra en la producción de conocimiento que emerge de un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel, es importante también tomar una posición con respecto a la formación de profesores. Para ello, se presentan algunas posturas: la de Ball, Hoover y Phelps (2008), la de Schoenfeld y Kilpatrick (2008), la de Ponte y Chapman (2008) y la de Ponte (2012), con el ánimo de analizar aquella o aquellas que realmente podrían permitir responder la pregunta de investigación del presente estudio.

Ball, Hoover y Phelps (2008).

Ball et al. (2008) introdujeron la noción de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT: Mathematical Knowledge for Teaching), basados en el análisis de los problemas matemáticos que han surgido en los procesos de enseñanza. Este MKT, es definido por los autores como "conocimiento matemático necesario para realizar las tareas recurrentes de la enseñanza de las matemáticas a los estudiantes" (Ball et al., 2008, p. 399). Sin embargo, precisan que no buscan una visión reduccionista al definir este tipo de conocimiento, sino que buscan una concepción de necesidad, que le permita al profesor desarrollar una perspectiva con hábitos mentales y una apreciación de la materia, para la enseñanza efectiva de las matemáticas (Ball et al., 2008).

De acuerdo con lo anterior, sus investigaciones permitieron dar a conocer dos categorías principales de este MKT: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico de Contenido. Con respecto a la primera categoría, Conocimiento del Contenido, distinguieron tres aspectos: Conocimiento Común del contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y Conocimiento en el Horizonte Matemático. Por otro lado, con respecto a la segunda categoría, Conocimiento Pedagógico de Contenido, describieron también tres aspectos: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y Conocimiento del Contenido y el Currículo. Esta información se presenta en la figura 8.

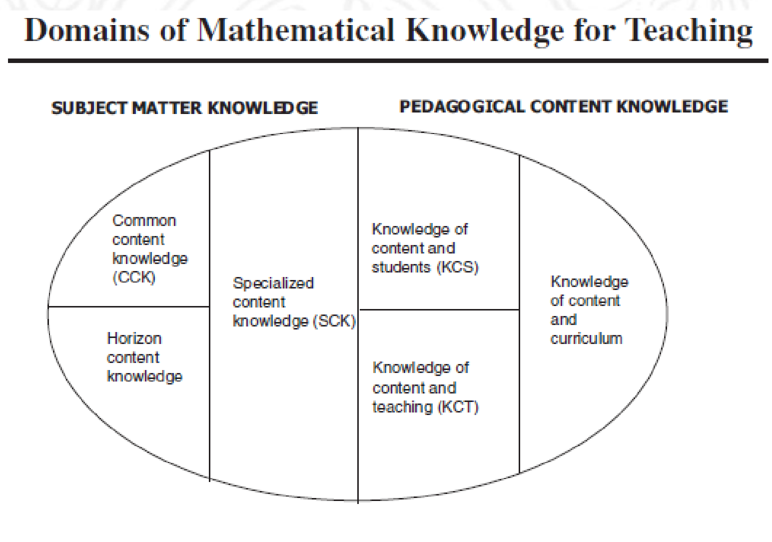


Figura 8: Categorías del MKT (Ball, Hoover y Phelps, 2008, p. 403).

El Conocimiento Común del Contenido (CCK) lo definen como el conocimiento matemático útil para la resolución de problemas en diversos entornos, diferentes al educativo. Es decir, los profesores deben conocer la materia que enseñan, tal como un matemático u otra persona con competencia en esta área. El Conocimiento Especializado de Contenido (SCK) lo definen como el conocimiento matemático y las técnicas utilizadas solo en los entornos educativos. Este tipo de conocimiento, sería característico del profesor de matemáticas, pues este debe tener un conocimiento más avanzado que le permita analizar e interpretar situaciones, de variadas maneras, como un primer paso para lograr su enseñanza. El Conocimiento en el Horizonte matemático, se relaciona con la conciencia que deben tener los profesores acerca de cómo los tópicos matemáticos están relacionados con las matemáticas del currículo escolar.

El Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) es definido por los autores como aquel que combina conocer a los estudiantes y conocer las matemáticas. Es decir, los profesores deben anticipar e identificar lo que los estudiantes podrían pensar sobre determinada temática e, incluso, lo que los podría confundir. El Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) es el que combina el conocimiento sobre la enseñanza y el conocimiento acerca de las matemáticas. De acuerdo con Godino (2009), este conocimiento "incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas" (p. 17). Finalmente, el Conocimiento del Contenido y el Currículo, que combina el conocimiento de las matemáticas y el conocimiento de la gama de programas diseñados para la enseñanza de esta materia, junto con el conocimiento de los materiales educativos correspondientes con estos planes.

Schoenfeld y Kilpatrick (2008).

Por otro lado, Schoenfeld y Kilpatrick (2008, citados por Godino, 2009) usan la palabra "proficiencia" para referirse a los conocimientos o competencias que debe tener un profesor para desarrollar un proceso de enseñanza con calidad. Estos autores extienden la noción de proficiencia en las matemáticas escolares de Kilpatrick, Swafford y Findell (2001, citados por Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), quienes la caracterizan con las siguientes dimensiones: comprensión conceptual, fluencia procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva.

En este sentido, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) ofrecen un marco teórico provisional, en el que postulan un conjunto de dimensiones que caracterizan la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas: conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud, conocimiento de los estudiantes como pensadores, conocimiento de los estudiantes como aprendices, diseño y gestión de ambientes de aprendizaje, desarrollo de las normas de clase y apoyo al discurso como parte de la "enseñanza para la comprensión", construcción de relaciones que apoyan el aprendizaje y reflexión sobre la propia práctica. A continuación, se darán algunas descripciones de dichas dimensiones.

Conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud. Schoenfeld y Kilpatrick (2008) precisan que este tipo de conocimiento debe ser amplio, dado que los profesores deben tener múltiples vías de conceptualizar el contenido de cada grado o nivel correspondiente, poder representarlo de diversas maneras, comprender aspectos claves de cada tópico y ver conexiones con otros tópicos del mismo nivel. Debe ser, además, profundo, porque los profesores deben conocer los orígenes del currículo y las direcciones del contenido; es decir, dónde las matemáticas han sido enseñadas y hacia dónde lleva algún conocimiento particular. En este sentido, los maestros deben comprender cómo las ideas matemáticas crecen conceptualmente.

Conocimiento de los estudiantes como pensadores. De acuerdo con Godino (2009), este conocimiento implica tener gran sensibilidad frente a lo que piensan los estudiantes, lo que le puede permitir al profesor, obtener información adicional sobre cómo estos le dan sentido a las matemáticas y cómo pueden llegar a construir sus conocimientos

Conocimiento de los estudiantes como aprendices. Los profesores deben ser conscientes de la teoría de aprendizaje que asumen y, claro está, de las consecuencias con respecto a las actividades de clase que planean, en correspondencia con dicha teoría, y de las interacciones que se generan al interior del aula de clase, con los estudiantes.

Diseño y gestión de ambientes de aprendizaje. Diseñar un ambiente productivo de aprendizaje, implica ir más allá de la gestión que se debe hacer dentro del aula de clase. Implica, no solo la creación de actividades que permitan un acercamiento al conocimiento, sino la creación de "comunidades intelectuales en las que los estudiantes participan en actividades intelectuales legítimas" (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, p. 18).

Desarrollo de las normas de clase y apoyo al discurso como parte de la "enseñanza para la comprensión". Las actividades que se planeen dentro del aula de clase, deben propiciar la consolidación de comunidades de aprendizaje, en las cuales los estudiantes adopten normas sociales que los ponga en la obligación de explicar y justificar sus soluciones. Cada uno de los miembros de dicha comunidad, debe intentar comprender los razonamientos de sus demás compañeros, hacer preguntas si no los entienden o argumentar en caso de no estar de acuerdo con alguna idea del colectivo.

Construcción de relaciones que apoyan el aprendizaje. De acuerdo con Schoenfeld y Kilpatrick (2008), los profesores, los estudiantes y la materia a enseñar, solo pueden ser entendidos como tríada, en una relación de mutua dependencia. El profesor debe trabajar para organizar tanto los contenidos, como las representaciones de estos mismos; además, debe coordinar la estructura de la clase, junto con la organización de los estudiantes dentro del aula, para propiciar su interrelación con dicho contenido. De estas relaciones mutuamente constituidas, surgen el aprendizaje, las formas de ser de los estudiantes y sus maneras de participación y de acercamiento al conocimiento.

Reflexión sobre la propia práctica. Schoenfeld y Kilpatrick (2008) mencionan que la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, es decir, la consecución de las competencias matemáticas, es un proceso permanente e iterativo a lo largo de la vida. Afirman que, ante un problema de la práctica de la enseñanza, el maestro de matemáticas necesita pensar, de manera reflexiva, sobre el problema si realmente quiere resolverlo. Si esta reflexión se convierte en un hábito, es posible que llegue a ser el mecanismo principal para la transformación de las propias prácticas docentes.

Ponte y Chapman (2006, 2008).

Ponte y Chapman (2008) mencionan que algunos estudios investigativos se han centrado en tres ámbitos principales, en la formación inicial y continuada de profesores de matemáticas: 1) el desarrollo del conocimiento matemático en los profesores en formación, (2) el desarrollo de sus conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas, y (3) el desarrollo de su identidad profesional. Sin embargo, también enfatizan que ninguno de estos aspectos es más importante que los otros. Por el contrario, afirman que son complementarios y solo si se ven como una unidad, tienen sentido.

Con respecto al primer ámbito, en algunas experiencias investigativas, se ha percibido que una gran población de futuros profesores o profesores en formación, tienen vacíos importantes relacionados con el conocimiento matemático. En este sentido, Ponte y Chapman (2008) manifiestan que "los estudios continúan mostrando que existen deficiencias en los conocimientos matemáticos de los profesores en formación inicial, que requieren especial atención durante su formación docente" (pp. 254 - 255).

De acuerdo con Ball y Cohen (1999), los profesores:

> […] deberían comprender bien la materia que enseñan, de forma muy diferente a la que aprendieron como estudiantes […] También tienen que ver formas en que las ideas se conectan con otros campos, y para la vida cotidiana, para que puedan seleccionar y utilizar contextos, problemas y aplicaciones adecuadamente. (pp. 7 – 8)

De acuerdo con Ponte y Chapman (2008), el conocimiento matemático es un atributo de los profesores eficaces, pues afecta tanto lo que enseñan y cómo lo enseñan. Tener un sólido conocimiento de la materia, no es una garantía para ser un excelente profesor de matemáticas, sin embargo, si se tienen limitados conocimientos, se puede disminuir la capacidad de ayuda a los estudiantes para que tengan una comprensión conceptual y relacional de las matemáticas (Skemp, 1976, citado por Ponte y Chapman, 2008).

La formación de profesores no solo debe ceñirse al conocimiento matemático, sino que debe contener el conocimiento relacionado con su enseñanza (Ponte y Chapman, 2008) y aprendizaje. Este es el segundo ámbito mencionado por Ponte y Chapman (2008). En palabras de Ball y Cohen (1999), los profesores deben conocer sobre didáctica, pedagogía, modelos de enseñanza y aprendizaje y, también, sobre la cultura y el clima del aula.

El conocimiento de la enseñanza está relacionado con el campo del conocimiento profesional, que depende de la evolución de las condiciones sociales y educativas, de los valores, orientaciones curriculares y de los recursos tecnológicos que se disponga (Ponte y Chapman, 2008). De hecho, este tipo de conocimiento implica los objetivos generales de la enseñanza de las matemáticas, la naturaleza de las tareas y los materiales para usar en el aula de clase, la planificación de clases, las maneras de organización de los estudiantes, la comunicación dentro del aula y la evaluación (Ponte y Chapman, 2008). En palabras de Ball et al. (2008), está relacionado con el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) y el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT); el primero consiste en la anticipación e identificación de las fortalezas y dificultades que podrían tener los estudiantes frente a un tema determinado y, el segundo, consiste en la construcción de procesos pertinentes basados en el razonamiento de los estudiantes y las estrategias de solución que más utilizan.

El tercer ámbito mencionado por Ponte y Chapman (2008), es el desarrollo de la identidad profesional del profesor. Al respecto, estos autores afirman que: “la formación del profesorado debería esforzarse por proporcionar a los profesores en formación oportunidades que les permitan comprender, apreciar y abrazar la complejidad de su práctica como base para la investigación en curso” (p. 256). Es decir, los profesores deben tener un papel activo que les permita no solo desarrollar capacidades para la autorreflexión, sino también de juicio crítico, para que puedan interpretar y evaluar su práctica pedagógica, el currículo y los medios que usan para su desarrollo (Barrantes, 2002).

Ponte y Chapman (2008) manifiestan que los maestros deben desarrollar valores y competencias que les permita formarse como individuos, asumiendo los valores y normas propios de la profesión. Los maestros no solo desarrollan su práctica con sus conocimientos sobre el contenido o sobre su enseñanza, sino que la desarrollan con todo su ser, involucrando sus valores morales y familiares, su posición política, su idiosincrasia, su historicidad, su ética, su cultura… En los procesos de enseñanza y aprendizaje se debe tener en cuenta lo que los maestros saben, pero también quiénes son, cómo se ven a sí mismos, cómo tratan a sus estudiantes, cómo hacen frente a los problemas, cómo reflexionan sobre su práctica y cómo se identifican con su profesión (Ponte y Chapman, 2008). Por lo tanto, la identidad del maestro se construye y reconstruye mediante procesos de reflexión y autorreflexión sobre la profesión y sobre la misma práctica.

Adicionalmente, Ponte y Chapman (2006) manifiestan que el desarrollo de la identidad profesional del profesor de matemáticas, puede ser visto también como un proceso de aprendizaje en sí mismo. Es decir, los profesores aprenden en la práctica, para la práctica y de la práctica. En este sentido, aprenden a medida que diseñan sus clases, que buscan nuevas ideas, materiales educativos y tareas; también aprenden mientras escuchan las respuestas de sus estudiantes, sus preguntas o comentarios; mientras reflexionan sobre lo que ocurrió en el aula, sobre la idoneidad de su planeación y de sus acciones; aprenden cuando se involucran en proyectos o en otras actividades (Ponte y Chapman, 2006).

Los tres aspectos desarrollados anteriormente, se pueden visualizar en la figura 9, en la que también sobresalen otros componentes del proceso que, de acuerdo con estos autores, están vinculados a los tres mencionados anteriormente. Es importante aclarar que la figura muestra un conjunto más grande que incluye las tres categorías centrales de la formación inicial de profesores y es la comunidad profesional de profesores. Es acá, precisamente, donde me centré en el estudio. El colectivo de profesores-con-doblado-de-papel estuvo conformado por algunas profesoras de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, quienes produjeron conocimiento geométrico para: desarrollar sus conocimientos sobre la geometría del doblado de papel; desarrollar conocimientos sobre la enseñanza de la geometría del doblado de papel y desarrollar su identidad profesional al ser profesoras reflexivas e investigadoras de su práctica pedagógica.

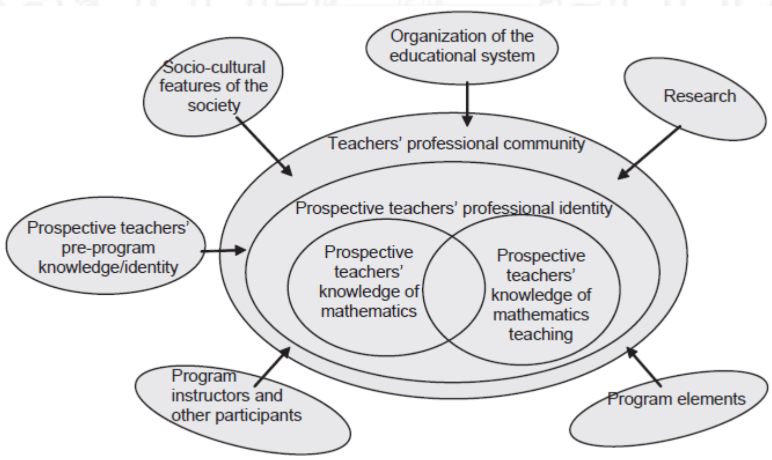


Figura 9: Estructura de la formación inicial de maestros de matemáticas (Ponte y Chapman, 2008, p. 224).

1.1.8. Desarrollo profesional docente.

Generalidades.

De acuerdo con Ponte (2012), los profesores aprenden de su actividad y de la reflexión continua en torno a esta, cuando participan en prácticas sociales como los colectivos de profesores. En este sentido, el desarrollo profesional involucra "el desarrollo progresivo de potencialidades y la construcción de nuevos saberes; está marcado por las dinámicas sociales y colectivas, y depende de las formas de articular intereses, necesidades y recursos del profesorado" (Ponte, 2012, p. 9).

Ponte, Zaslavsky, Silver, et al. (2009), afirman que los profesores aprenden sus conocimientos profesionales (el conocimiento sobre la enseñanza, la didáctica de las matemáticas y el conocimiento de las matemáticas como un área escolar), aprenden los valores profesionales, aprenden sobre sus roles profesionales y desarrollan su identidad, en estrecha relación con otros profesores. Por lo tanto, uno de los aspectos centrales de la formación, debería ser la conformación de comunidades de aprendizaje o colectivos, que permitan el diálogo y el trabajo colaborativo.

En esta línea, Ponte (2012) concluye que en los procesos de formación de profesores, para favorecer el desarrollo profesional del profesorado, es necesario: (1) hacer uso de la colaboración entre pares, en la consolidación de comunidades o colectivos de aprendizaje; (2) poner la práctica pedagógica como punto de partida de la formación de profesores, lo que trae como consecuencia (3) investigar en y sobre esta práctica como un proceso clave para la construcción del conocimiento.

Algunas dificultades en los procesos de formación de profesores en Colombia, relacionadas con el desarrollo profesional docente.

El proceso de formación de profesores, ya sea a nivel de pregrado, de maestrías o de doctorados, debe movilizar no solo conocimientos disciplinares matemáticos, sino también el conocimiento de su enseñanza y aprendizaje, y la identidad como profesor, lo que implica consolidar o transformar el desarrollo profesional docente. Sin embargo, muchos de estos procesos de formación, o están alejados de la realidad educativa, o solo se centran en conocimientos matemáticos, o solo se centran en conocimientos pedagógicos y didácticos, sin focalizar la misma práctica pedagógica, como punto central de la investigación.

De hecho, Guacaneme, Obando, Garzón y Villa-Ochoa (2013) mencionan que en Colombia hay una gran diversidad de programas de formación inicial y continua, los cuales se diferencian tanto en sus estructuras curriculares, como en sus componentes investigativos o en los abordajes que promulgan en cuanto a las interacciones entre la teoría y la práctica. Por lo tanto, esto revela la ausencia de un sistema de formación de profesores que articule dichas estructuras y, de hecho, revela que no hay un hilo conductor coherente o un ideal de formación general en el país. En esta misma línea, Gualdrón (2011) resalta la necesidad de formar profesionales autónomos y reflexivos, pero que este ideal no se corresponde, de manera directa, con la formación actual de profesores de matemáticas en el país.

Por otro lado, en uno de sus trabajos, Ponte (2012) contrastó la formación con el desarrollo profesional y manifestó que:

> Puse de relieve que la formación tiende a ser vista como un movimiento “desde fuera hacia dentro”, donde se espera del profesorado que asimile los conocimientos y la información que le son transmitidos, mientras que el desarrollo profesional representa un movimiento “desde dentro hacia fuera”, donde se espera del profesorado que decida sobre las cuestiones a considerar, los proyectos a emprender y el modo de llevarlos a cabo. Por un lado, la formación se centra sobre todo en aquello que el profesorado no tiene y que, sin embargo, “debería tener”. Por otro lado, el desarrollo profesional presta especial atención a las realizaciones del profesorado. Además, la formación tiende a ser vista de modo compartimentado, en asuntos o disciplinas; en su lugar, el desarrollo profesional interpreta el profesorado como un todo que conjuga los aspectos cognitivos, afectivos y relacionales. Cabe

señalar, aún, que la formación parte invariablemente de la teoría y a menudo no llegar a salir de la teoría, a diferencia del desarrollo profesional, que tiende a considerar teoría y práctica de forma integrada.

En la conferencia mencionada, también pongo de manifiesto que el desarrollo profesional implica necesariamente la combinación de procesos formales e informales. Lo más importante es que el profesorado deja de ser *objeto* para pasar a ser *sujeto* de la formación. (pp. 7-8)

Considerando lo anterior, se hace necesario que los procesos de formación de profesores, en Colombia, se orienten hacia el desarrollo profesional docente. Es decir,

[…] la formación puede ser dirigida a favorecer el desarrollo profesional del profesorado, sin por tanto quedar subordinada a una lógica de transmisión de conocimientos, de modo que no existe una verdadera incompatibilidad entre ambas ideas. En realidad, la formación puede ser concebida para promover el desarrollo profesional del profesorado, es decir, es posible que el desarrollo profesional se beneficie de las oportunidades de una formación que atienda a las necesidades y objetivos de realización del profesorado. (Ponte, 2012, p. 8)

Entender que los profesores son los agentes principales de su formación, no trae como consecuencia que los profesores o investigadores en Educación Matemática no tengamos una responsabilidad directa con su formación; por el contrario, los procesos de formación se deben resignificar, de tal forma que aporten, de manera natural, a la transformación, consolidación o fortaleza del desarrollo profesional docente (Ponte, 2012).

1.1.9. Formación de profesores y *seres-humanos-con-medios*

Ponte, Zaslavsky, Silver, et al. (2009) presentan una serie de tareas de formación de profesores de matemáticas, que incluyen problemas y actividades matemáticas, para que los profesores puedan profundizar sobre el conocimiento de lo que deben enseñar y cómo pueden hacerlo. Tal como lo mencionan los autores, estas tareas están en el corazón de la formación de profesores y determinan lo que ellos están aprendiendo, junto con las formas de trabajo, la dinámica y los diferentes contextos. De hecho, Zaslavsky (1995, citado por

Ponte et al., 2009) afirma que el proceso de enseñanza de los profesores está fuertemente influenciado por las experiencias personales que este ha tenido como estudiante.

Las tareas diseñadas y desarrolladas en este estudio, se basaron, inicialmente, en las necesidades que manifestaron las profesoras que aceptaron participar, de manera voluntaria, en la investigación, sobre la geometría escolar. Se espera que estas tareas permitan la producción de conocimiento geométrico escolar, es decir, aporten a la profundización del conocimiento de la geometría del doblado de papel, a su enseñanza y al desarrollo de la identidad profesional. Por lo tanto, se espera que las tareas encarnen aspectos auténticos de la práctica docente, que permitan a los profesores acceder, utilizar y desarrollar el conocimiento de la geometría, de la pedagogía y del aprendizaje de los estudiantes, de forma simultánea (Ball y Cohen, 1999).

Ponte et al. (2009) precisan que los profesores aprenden de sí mismos y de su reflexión sobre su práctica. Sin embargo, este aprendizaje toma lugar en la escuela, que es un contexto particular en un ambiente de tipo social. Esto es, dicho aprendizaje está mediado por la interacción con los demás, sobre todo con sus estudiantes, sus colegas, directivos, padres de familia y otros miembros de la comunidad educativa. Por consiguiente, los profesores aprenden en comunidades de aprendizaje. Esta puede estar representada por una clase de formación inicial de profesores, una clase de formación continua, un programa de formación especializado de profesores, un grupo de profesores de una escuela que desarrollaron hábitos de trabajo colectivo o cualquier otro grupo que se constituya con el propósito de aprender, desarrollar o investigar.

En esta perspectiva, Jaworski (2004, citado por Ponte et al., 2009) afirma que una comunidad de aprendizaje se refiere a un grupo de personas, con algún tipo de estabilidad, que se involucran en alguna actividad para aprender juntos y, sobre todo, para aprender unos de otros. Es en este escenario, donde toma sentido el constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, pues Borba y Villarreal (2005) establecen que el conocimiento es producido en un colectivo de humanos-con-medios. Para ellos, la construcción del conocimiento se genera en un ambiente rico de interacciones internas y externas, que ocurren entre los humanos con los medios. En el contexto de la presente investigación, se espera que los profesores puedan producir conocimiento geométrico, a través de las continuas interrelaciones entre ellos mismos y con el doblado de papel, de tal manera que todos aprendan de los procesos y de las experiencias de los demás.

1.1.10. Tesis doctorales enmarcadas en el constructo teórico *seres-humanos-con-medios*.

En el marco del Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática GPIMEM, de la Universidad Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, de Río Claro, Brasil, se han desarrollado algunas tesis doctorales, basadas en el constructo teórico *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005). A continuación, voy a describir los objetivos y hallazgos principales de las disertaciones de Zulatto (2007), Barbosa (2009), Soares (2012) y Souto (2013).

A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores.

Esta tesis fue presentada por la profesora Rúbia Barcelos Amaral Zulatto, para obtener el título de Doctora en Educación Matemática, en el año 2007. En su investigación, Zulatto (2007) analizó la naturaleza del aprendizaje matemático en un curso online de formación continua de profesores, titulado *Geometría con Geometricks*. Los participantes fueron profesores en formación, de una misma red de escuelas, pero que estaban situadas en diferentes localidades de Brasil; los encuentros se desarrollaron a distancia, en tiempo real, a través de chats o de videoconferencias.

El estudio respondió a la pregunta de investigación ¿cuál es la naturaleza del aprendizaje matemático en un curso online de formación continua en geometría? (Zulatto, 2007, traducción personal). Para ello, la autora se planteó el siguiente objetivo general: analizar cómo acontece el aprendizaje matemático en un ambiente virtual; cómo se desarrollan las discusiones de carácter matemático; cómo las personas comunican sus ideas; cómo expresan su raciocinio, cómo se realiza la interacción entre las personas y las TIC (Zulatto, 2007, traducción personal).

Los resultados que obtuvo Zulatto (2007) le permitieron inferir que el aprendizaje matemático es de naturaleza colaborativa, pues las discusiones virtuales se tejieron con base en las contribuciones de todos los participantes; es de naturaleza colectiva, dado que la producción de conocimiento matemático estuvo condicionada por el colectivo pensante de *seres-humanos-con-medios*; es de naturaleza argumentativa, porque las conjeturas planteadas y las justificaciones matemáticas se desarrollaron en el proceso, gracias al uso de las tecnologías en interacción con los participantes.

Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.

Esta tesis fue presentada por la profesora Sandra Malta Barbosa, para obtener el título de Doctora en Educación Matemática en el año 2009. En su estudio, Barbosa (2009) se focalizó en la producción de conocimiento matemático sobre la función compuesta y la regla de la cadena, a partir de un abordaje gráfico. Los participantes de la investigación, fueron algunos estudiantes de un curso de Matemáticas de la Universidad Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, de Río Claro, Brasil (Barbosa, 2009).

Barbosa (2009) respondió la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo el colectivo, formado por alumnos-con-tecnologías, produce conocimiento acerca de la función compuesta y la regla de la cadena, a partir de un abordaje gráfico? En este sentido, en la pregunta se consideró que el conocimiento matemático es producido a partir de un colectivo formado por estudiantes y medios, y se destacó la visualización para abordar los conceptos objeto de estudio (Barbosa, 2009). Para responder la pregunta, Barbosa (2009) se planteó los siguientes dos objetivos generales: investigar cómo el colectivo, formado por alumnos y tecnologías, produce conocimiento acerca de la función compuesta y la regla de la cadena, a partir de un abordaje gráfico; incorporar la visualización a la producción de conocimiento matemático, como una forma de relacionar las representaciones gráficas y algebraicas.

Este estudio se basó en la elaboración y análisis de cinco episodios, los cuales le permitieron inferir a la investigadora, que la producción de conocimiento de los estudiantes participantes, sobre la función compuesta y la regla de la cadena, ocurrió por medio de la elaboración de conjeturas, que fueron formuladas durante el proceso de visualización, el cual fue potenciado por el uso de las TIC (Barbosa, 2009). Dichas conjeturas fueron confirmadas o refutadas, considerando la interrelación entre las representaciones múltiples que se presentaron y que, además, permearon todas las actividades y, al mismo tiempo, al colectivo pensante de seres-humanos-con-medios, en el cual el ser humano transforma y es transformado por los medios en un proceso interactivo (Barbosa, 2009).

Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?

Esta tesis fue presentada por la profesora Débora da Silva Soares, para obtener el título de Doctora en Educación Matemática, en el año 2012. En su investigación, Soares (2012) investigó sobre el papel o los papeles de un software en el desarrollo de un enfoque pedagógico basado en Análisis de Modelos. Los participantes del estudio fueron los alumnos de un curso de Biología de la Unesp, campus de Río Claro, Brasil, que cursaron la disciplina Matemática Aplicada, en la cual se incluyeron temas de cálculo diferencial y de cálculo integral.

Soares (2012) se planteó en su estudio, la siguiente pregunta de investigación: ¿cuál es el papel de un software en el desarrollo de un enfoque pedagógico basado en Análisis de Modelos? Para dar respuesta a dicha pregunta, la autora dio consecución al siguiente objetivo general: identificar y analizar el papel de los softwares computacionales en el proceso de producción de conocimiento. Esta autora precisa que el término Análisis de Modelos es utilizado para caracterizar la idea central de un enfoque pedagógico, en el cual se propone a los estudiantes el análisis de un modelo matemático que explica un fenómeno de su área de interés, desde el inicio del semestre.

Con relación a los resultados, Soares (2012) pudo identificar tres papeles para el software: proporciona resultados sobre el fenómeno biológico; contribuye con la comprensión de conceptos matemáticos; permite el establecimiento de relaciones entre Matemáticas y Biología. Esta autora precisó que la interrelación entre estos tres papeles, le permitió inferir el papel principal del software: permitir que los estudiantes tuvieran acceso a un modelo matemático razonablemente cercano al fenómeno biológico para que, a partir de su análisis, pudieran discutir algunos aspectos de los conceptos matemáticos relacionados con el modelo, fomentando reflexiones matemáticas, biológicas e interdisciplinarias entre los estudiantes.

Transformações expansivas em um curso de educação matemática a distância online.

Esta tesis fue presentada por la profesora Daise Lago Pereira Souto, para obtener el título de Doctora en Educación Matemática, en el año 2013. Su investigación se centró en el análisis de los movimientos que desencadenan las transformaciones expansivas en un curso de Educación Matemática a Distancia Online. En este estudio, participaron profesores de varias regiones del país e, incluso, del exterior; durante los encuentros virtuales, los profesores estudiaron las cónicas con el software de Matemática dinámica Geogebra y discutieron algunas Tendencias en Educación Matemática. Dichos encuentros se dieron en un ambiente virtual de aprendizaje, llamado Tidia-Ae, el cual posee herramientas de comunicación sincrónica y asincrónica.

Souto (2013) respondió, con su estudio, la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo ocurren las transformaciones expansivas en un curso de Educación Matemática a

Distancia Online? Para ello, se planteó el siguiente objetivo general: comprender los movimientos que desencadenan las transformaciones expansivas en un curso de Educación Matemática a Distancia Online para profesores de Matemática, que tiene como propósito estudiar tópicos de geometría analítica (cónicas) con un software de Matemática dinámica y discutir Tendencias en Educación Matemática.

De acuerdo con Soares (2013), los datos fueron producidos en chats, foros, e-mails y entrevistas. El análisis de los mismos, se orientó bajo un abordaje cualitativo, basado en los principios de la teoría de la actividad y del constructo teórico *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005). Los resultados mostraron que las transformaciones expansivas emergentes tuvieron en el medio un agente movilizador y pueden ser resumidas de la siguiente manera: expansión del objeto y del sujeto de la actividad; expansión de la producción matemática sobre cónicas; expansión de los artefactos, es decir, el doble papel que los medios pueden desempeñar en un sistema de actividad. Estas transformaciones, especialmente la última, de acuerdo con Souto (2013), posibilitaron, en la línea de los referentes teóricos, el inicio de la construcción de una perspectiva teórica-metodológica "Miniciclo(s)" de transformaciones expansivas para el análisis de sistemas de *seres-humanos-con-medios*.

1.1.11. Aspectos relacionados con la comprensión en Educación Matemática.

El tema relacionado con la comprensión en Educación Matemática, ha sido abordado desde diferentes estudios y perspectivas, a lo largo de las últimas décadas y, aun así, sigue siendo un tema importante e innovador en esta disciplina científica. Dado que es posible encontrar una relación entre la producción de conocimiento geométrico escolar y la comprensión de conceptos de geometría escolar, en las siguientes líneas voy a profundizar en los siguientes marcos conceptuales: el modelo de Van Hiele y la Enseñanza para la Comprensión, los cuales se han abordado en numerosos estudios investigativos dentro del grupo de investigación Educación Matemática e Historia (EDUMATH) de la Universidad de Antioquia y la Universidad Eafit.

Modelo de Van Hiele.

En la década del 50, los esposos Van Hiele propusieron un modelo teórico cognitivo para la enseñanza de la geometría, llamado Modelo de Van Hiele, el cual describe una serie de niveles por los que progresa el razonamiento de los estudiantes. En palabras de Jaime (1993) "a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno" (p. 4, el subrayado es de la autora).

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990), el modelo se puede resumir en las siguientes cuatro ideas:

> (1) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas; (2) un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento; (3) si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela; (4) no se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esta forma (p. 305).

Conforme a lo anterior, el modelo abarca dos aspectos importantes: uno descriptivo y uno instructivo (Jaime, 1993). El descriptivo identifica una serie de niveles jerárquicos, por los que avanza el razonamiento geométrico de un estudiante; el instructivo establece unas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

fases para que los profesores puedan favorecer el progreso de sus estudiantes en su nivel de comprensión.

Niveles de razonamiento de Van Hiele.

Siguiendo la nomenclatura de Jaime y Gutiérrez (1990), estos niveles se caracterizan de la siguiente manera:

Nivel 1: De reconocimiento. El estudiante percibe las figuras como un todo individual, sin generalizar características a objetos de su misma clase; se le dificulta encontrar partes constitutivas o propiedades y sus descripciones, normalmente, se basan en el aspecto físico o en la semejanza con objetos de su cotidianidad (Jaime y Gutiérrez, 1990; Santa, 2011).

Nivel 2: De análisis. El estudiante ya puede encontrar partes constitutivas o propiedades en las figuras geométricas; puede, incluso, generalizar algunas propiedades por medio de la experimentación; pero todavía no logra articular una propiedad con otra, por lo que se le dificulta hacer clasificaciones válidas (Jaime y Gutiérrez, 1990; Santa, 2011).

Nivel 3: De clasificación. De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990), en este nivel, empieza a desarrollarse la capacidad de razonamiento formal del estudiante, dado que puede hacer clasificaciones formales al lograr deducir unas propiedades de otras. Sin embargo, todavía se basa en la experimentación. El estudiante puede construir definiciones correctas, pero aún no es posible que realice, por sí mismo, una demostración; puede entender los pasos, de manera aislada e individual, pero carece de la comprensión suficiente para entender la necesidad del encadenamiento de dichos pasos (Jaime y Gutiérrez, 1990; Santa, 2011).

Nivel 4: De deducción formal. Para Van Hiele (1986), este nivel de razonamiento es de tipo teórico porque es mucho más difícil de discernir que los niveles anteriores. El estudiante comprende la estructura axiomática de las matemáticas, debido a que puede hacer demostraciones rigurosas de las propiedades que estableció en niveles inferiores; puede llegar a la misma conclusión partiendo de diferentes premisas y utiliza un lenguaje especializado (Jaime y Gutiérrez, 1990; Santa, 2011).

Fases de aprendizaje.

De acuerdo con Jaime (1993), las fases de aprendizaje se describen de la siguiente forma:

Fase 1. Información. En esta fase el profesor debe identificar los conocimientos previos que tienen los estudiantes; además, debe permitir que estos reciban la información suficiente sobre el tema que van a estudiar.

Fase 2. De orientación dirigida. Se orienta a los estudiantes, mediante algunas actividades intencionadas, para que puedan descubrir y aprender las distintas relaciones de la red conceptual del objeto de estudio.

Fase 3. De Explicitación. Los estudiantes deben revisar y expresar lo que han comprendido hasta el momento; deben poner en común sus resultados, confrontarlos y discutirlos con otros pares y con el profesor, para ser conscientes de las relaciones encontradas y perfeccionar su lenguaje.

Fase 4. De orientación libre. Los estudiantes deben demostrar lo que han comprendido de las fases anteriores, al resolver problemas o situaciones diferentes a las ya abordadas y con un grado mayor de complejidad. En esta fase, los estudiantes deben encontrar su propio camino de resolución, en la red de relaciones que han construido (Van Hiele, 1986).

Fase 5. De Integración. El estudiante debe organizar y consolidar su red de relaciones final, integrando y comparando todos los conceptos y procedimientos que ha comprendido.

Cabe aclarar que las estructuras mentales actuales de un ser humano se pueden modificar o transformar en otras nuevas o más complejas, que absorben a las anteriores (Jaime y Gutiérrez, 1990); estas estructuras se pueden representar a través de redes de relaciones, las cuales muestran la comprensión de los conceptos y procedimientos. Estas redes, de acuerdo con Van Hiele (1990), deben aparecer durante el proceso de aprendizaje. Es importante resaltar que una red de relación será entendida como un esquema mental que transforma o incorpora al anterior, nuevos conceptos o nuevas relaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Se puede observar que el modelo de Van Hiele es de tipo cognitivista y permite analizar la comprensión de los estudiantes o profesores, de manera individual, al interpretar las transformaciones en las redes de relaciones que construyen. En este sentido, es posible que sus aportes no estén en correspondencia con el constructo teórico de *seres-humanos-*

con-medios, dado que este se centra en la producción de conocimiento que emerge de las interacciones entre los humanos y medios.

Enseñanza para la Comprensión.

Generalidades.

La Enseñanza para la Comprensión (EpC) surgió de un proyecto de investigación colaborativo, llamado Proyecto Cero, que se llevó a cabo entre 1988 y 1995, en el marco de la Escuela de Graduados de Educación de Harvard (Stone, 1999). De acuerdo con Stone (1999), en este proyecto se analizaron cuatro preguntas básicas: "¿qué tópicos vale la pena comprender?, ¿qué deben comprender los alumnos sobre estos tópicos?, ¿cómo podemos fomentar la comprensión?, ¿cómo podemos averiguar qué es lo que comprenden los alumnos?" (p. 24)

Este marco conceptual está constituido por cuatro elementos, que responden a cada una de las preguntas planteadas anteriormente por Stone (1999); estos elementos se explican a continuación:

Tópicos generativos. Este elemento responde a la pregunta "¿qué tópicos vale la pena comprender?" (Stone, 1999, p. 24). El currículo se organiza en una serie de temas o tópicos, que son centrales para la materia e interesantes para los estudiantes y los profesores (Stone, 1999).

Metas de comprensión. Este elemento responde a la pregunta "¿qué deben comprender los alumnos sobre estos tópicos?" (p. 24). Dan claridad sobre lo que los estudiantes van a comprender; deben ser explícitas, estar centradas en ideas y problemas de la disciplina y deben ser públicas para la comunidad educativa (Stone, 1999).

Desempeños de comprensión. Este elemento responde a la pregunta "¿cómo podemos fomentar la comprensión?" (p. 24). De acuerdo con Stone (1999), este, quizás, sea el elemento más importante del marco, pues les exige a los estudiantes "extender, sintetizar y aplicar lo que saben" (p. 24).

Evaluación diagnóstica continua. Este elemento responde a la pregunta "¿cómo podemos averiguar qué es lo que comprenden los alumnos?" (p. 24) y permite 'medir' la comprensión de los estudiantes realizando una valoración de sus desempeños (Stone, 1999).

Concepto de comprensión.

Perkins (1999) precisa que comprender es "la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe" (p. 70); es decir, es "la capacidad de desempeño flexible" (p. 70), haciendo principal acentuación en la flexibilidad de uso de los conceptos en otros contextos. Comprender un tópico, de acuerdo con este autor, es ser capaz de desempañarse, de manera flexible, en relación con el tópico; es decir, "explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria" (p. 73).

En esta línea, Blythe y Perkins (1998) afirman que "la comprensión incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y presentar el tópico de una nueva manera" (p. 39). Por lo tanto, "la capacidad de desempeño flexible es la comprensión" (Perkins, 1999, p. 73).

Dimensiones de la comprensión.

Las dimensiones describen las características que son observables en los desempeños de los estudiantes. Estas dimensiones se precisan a continuación:

Dimensión de contenido. Evalúa el nivel de trascendencia desde el conocimiento intuitivo o no escolarizado hasta el grado de actuar con flexibilidad en una red conceptual coherente (Boix y Gardner, 1999).

Dimensión de métodos. Evalúa la capacidad de los estudiantes, en primer lugar, para analizar lo que conocen o lo que reciben del medio y, en segundo lugar, para usar métodos válidos para construir y probar afirmaciones (Boix y Gardner, 1999).

Dimensión de praxis. Evalúa la capacidad que tienen los estudiantes para reconocer e identificar los objetivos e intereses que guían la construcción del conocimiento, su capacidad para hacer uso del conocimiento en diversas situaciones y para establecer los resultados de hacerlo (Boix y Gardner, 1999).

Dimensión de formas de comunicación. Evalúa el uso, por parte de los estudiantes, de sistemas simbólicos (visuales, verbales, escritos, cinestésicos, corporales, matemáticos, entre otros) para expresar su comprensión (Boix y Gardner, 1999).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Niveles de la comprensión.

De acuerdo con Boix y Gardner (1999), la profundidad de la comprensión puede variar dentro de cada una de las dimensiones. Por lo tanto, se hace necesario distinguir los desempeños débiles de otros más avanzados y complejos. A continuación, se caracterizan cada uno de los niveles de comprensión:

Comprensión ingenua. Los estudiantes en este nivel se basan en su conocimiento intuitivo; captan información del mundo, sin analizarla ni problematizarla; no pueden ver la articulación entre lo que aprenden en la escuela y su vida cotidiana (Boix y Gardner, 1999).

Comprensión de novatos. Los estudiantes pueden establecer relaciones entre ideas y conceptos, de manera mecánica y rudimentaria (Boix y Gardner, 1999). La validación de los procedimientos depende de la autoridad académica externa del estudiante (Pogré, 2012).

Comprensión de aprendiz. Los estudiantes pueden demostrar un uso flexible de conceptos o ideas de la disciplina. Con apoyo, pueden articular algunos conocimientos disciplinarios con su vida cotidiana, evaluando las oportunidades y las consecuencias de usar este conocimiento de manera flexible (Boix y Gardner, 1999).

Comprensión de maestría. Los estudiantes son “integradores, creativos y críticos” (Boix y Gardner, 1999, p. 241). Pueden moverse, de manera flexible, entre dimensiones, articulando los criterios que permiten construir y validar el conocimiento en una disciplina; pueden usar el conocimiento para “reinterpretar y actuar en el mundo que los rodea” (p. 241). En resumen, demuestran una comprensión disciplinaria (Boix y Gardner, 1999).

1.1.12. Ejemplo de caso clave para iniciar el estudio (Santa y Jaramillo, 2013)[3].

El punto de partida que dio pie al desarrollo del presente estudio, fue un caso que tuvo lugar en el año 2012, en la región del Urabá Antioqueño. El episodio que se expone y analiza en los siguientes párrafos, me permitió inferir que la producción de conocimiento geométrico podría estar mediada por las interacciones del colectivo con la profesora del seminario y con el doblado de papel. Sin embargo, no se han encontrado estudios que caractericen tanto el colectivo en mención, como la producción de conocimiento que emerge del mismo. Por lo tanto, esta investigación se ocupará de estas caracterizaciones, desde la fundamentación del constructo teórico *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005).

En la experiencia participaron tres estudiantes (profesores en ejercicio de instituciones educativas de Apartadó o Turbo) de un Seminario Complementario, en el marco del programa de Maestría en Educación en regiones, de una universidad del departamento de Antioquia. Ellos hicieron parte de un colectivo que razonó alrededor de los conceptos geométricos asociados con los axiomas de Huzita – Hatori (Lang, 1996 – 2015). Los seudónimos que se utilizaron para hacer referencia a estos estudiantes de maestría y, a su vez, profesores en formación continua, fueron: Hugo, Paco y Luis. Para efectos del análisis, solo se les dirá estudiantes.

[3] Este caso preliminar se publicó en Santa, Z. y Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. En: *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe CEMACYC*. República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra.

La profesora del seminario mencionó uno por uno los axiomas de Huzita – Hatori (Lang, 1996 – 2015), los estudiantes hicieron los dobleces respectivos y establecieron algunas conclusiones, a partir del análisis y las interacciones que se dieron dentro del grupo. En el siguiente apartado se muestra un episodio, en forma de diálogo, que surgió del trabajo con el axioma 2.

<u>Axioma 2:</u> *Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 sobre P_2* (Lang, 1996 – 2015, p. 44).

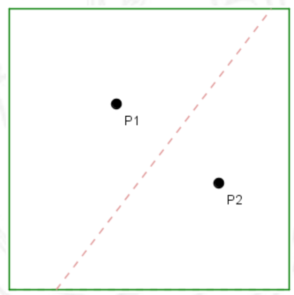


Figura 10: Doblez resultante consecuencia del axioma 2.

(1) Profesora: ¿Con cuál concepto geométrico se relaciona este axioma?

Después de que los estudiantes hacen la construcción, afirman:

(2) Luis: Hummm… Cuando llevo un punto sobre el otro, se genera un doblez… Que parece perpendicular al segmento formado por los puntos P_1 y P_2.

(3) Profesora: ¿Y cómo demostramos que es perpendicular?

(4) Luis: Si utilizamos una regla, tal vez lo podríamos corroborar.

(5) Hugo: Pero sin regla, ¿cómo lo demostraríamos?

(6) Paco: Con otra hoja de papel, ya que sus bordes son rectos y forman ángulos de 90º.

(7) Profesora: Es cierto, pero ¿no habrá alguna manera de demostrarlo?

(8) Paco: Ya sé… Miren, se puede percibir que en el vértice donde se generó el doblez, hay un ángulo de 360º. Si hago el doblez P_1P_2, ese ángulo queda dividido en cuatro ángulos iguales. Es decir, cuatro ángulos rectos.

(9) Profesora: Buenas conclusiones. Ese doblez es perpendicular al segmento P_1P_2. ¿Pasará el doblez por el punto medio de dicho segmento?

(10) Estudiantes: Claro…

(11) Luis: Sí, profe, de hecho si hago el doblez que pasa por los puntos P_1 y P_2 y nombro M al punto de intersección entre el doblez que surgió de llevar P_1 sobre P_2 y el doblez P_1P_2, noto que P_1M es congruente con P_2M. Incluso, se puede mostrar con la misma hoja. Mire, los segmentos son iguales, "casan".

(12) Paco: Luis tiene razón.

(13) Profesora: ¿Cuál es el concepto asociado?

(14) Hugo: ¿Es un eje de simetría?

(15) Paco: Podría ser.

(16) Profesora: Es cierto, pero este axioma está asociado con un concepto particular.

(17) Luis: ¿Es una mediatriz? Es perpendicular al segmento y para por su punto medio.

(18) Profesora: Ok, muy bien. ¿Es la mediatriz un lugar geométrico?

(19) Estudiantes: ¿Un qué?

(20) Profesora: Un lugar geométrico. ¿Saben el concepto de lugar geométrico?

(21) Paco: No conocemos qué es un lugar geométrico.

(22) Profesora: ¿No? Es el conjunto de puntos que cumplen con una determinada propiedad. En este caso, ¿qué propiedad cumplirán los puntos para pertenecer a la mediatriz?

Los estudiantes reflexionan sobre el asunto, pero no logran establecer la propiedad.

(23) Profesora: Si se ubica un punto cualquiera sobre la mediatriz, ¿qué se pude afirmar de ese punto?

(24) Hugo: Forma un triángulo con los puntos P_1 y P_2.

(25) Profesora: ¿Qué tipo de triángulo?

(26) Hugo: Isósceles. Se puede mostrar al hacer el doblez que permite llevar P_1 sobre P_2, que estas distancias (mostrándolas en la hoja) son iguales.

(27) Profesora: Otra vez, ¿qué propiedad cumplirán los puntos para pertenecer a la mediatriz?

(28) Luis: Pues que todos los puntos que conforman la mediatriz estarían a la misma distancia de los puntos P_1 y P_2, ¿verdad?

(29) Paco: Hummm… Si… Que todos los puntos equidistan de los extremos del segmento.

(30) Profesora: Correcto. Hugo, ¿podrías decirnos entonces la definición de mediatriz como lugar geométrico?

(31) Hugo: profe, no sabíamos que la mediatriz o la bisectriz se definieran como lugares geométricos. En este caso, yo diría: "la mediatriz es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento, en este caso de los puntos P_1 y P_2".

(32) Paco: Sí, profe, nosotros pensábamos que la mediatriz y la bisectriz eran solo líneas notables del triángulo y así se las enseñábamos a los estudiantes.

(33) Luis: Voy a pensar una actividad, utilizando el doblado de papel, para que mis estudiantes puedan comprender estos conceptos como lugares geométricos.

Análisis parcial.

En este caso, se notó que los estudiantes desconocían algunos conceptos geométricos. Esta situación se podría entender, quizás, porque en su paso por el pregrado no hubo una buena profundización en dichas temáticas o porque son conceptos que normalmente se dejan olvidados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar. También se puede considerar que, en muchos casos, se da una segmentación de las temáticas al momento de llevarlas al aula de clase, lo que podría ser una causa de las dificultades en la comprensión de dichos conceptos. De hecho, lo anterior se evidencia cuando alguno de los estudiantes afirma, en la intervención 32: "*Sí, profe,* *nosotros pensábamos que la mediatriz y la bisectriz eran solo líneas notables del triángulo y así se las enseñábamos a los estudiantes*".

El estudio de este episodio permitió corroborar la afirmación de Aballe (2000): que los profesores en formación o profesores en ejercicio presentan lagunas en la construcción de conceptos matemáticos, en este caso específico, de conceptos geométricos. Esto se comprobó cuando uno de los estudiantes mencionó, en la intervención 21: "*No conocemos qué es un lugar geométrico*". Sin embargo, el éxito de la experiencia vivida por los estudiantes, radica en que ellos pudieron tomar conciencia de sus dificultades para la comprensión de dichos conceptos. Y con base en dicha reflexión y, la construcción hecha mediante el doblado de papel, el diálogo, las interacciones y el análisis grupal, se dio un primer acercamiento a la producción de conocimiento relacionado con los objetos de estudio, al desarrollar y consensuar los conceptos.

En este sentido, parece que esta producción dependió en gran medida de las interacciones, discusiones y análisis que se lograron en el colectivo compuesto por profesores-con-doblado-de-papel. Se hace necesario, entonces, estudiar a profundidad dichas interacciones para analizar cómo se produjo realmente este conocimiento.

También, es importante mencionar que los profesores realizaron algunas reflexiones sobre sus prácticas pedagógicas y notaron que pueden contribuir con su mejoramiento, al generar estrategias metodológicas que involucren el doblado de papel como medio para facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Este hecho, se evidenció cuando uno de los estudiantes manifestó, en la intervención 33: "*Voy a pensar una* *actividad, utilizando el doblado de papel, para que mis estudiantes puedan comprender estos conceptos como lugares geométricos*".

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Dificultades encontradas.

La geometría es un componente importante del currículo de Matemáticas en Colombia, porque puede permitir procesos de visualización, de justificación y de formalización, en un correspondiente proceso de lo concreto a lo abstracto; por lo tanto, debería ser aprovechada específicamente en las aulas de clase para generar procesos de razonamiento en los estudiantes. En esta línea, Villarroel y Sgreccia (2011) precisan que, de todas las ramas de las Matemáticas, la geometría, en particular, es una de las más intuitivas, concretas, relacionadas y cercanas a nuestro contexto real; por esta razón, el escenario geométrico ofrece muchas posibilidades para experimentar, a través de materiales pertinentes, sus conceptos, procedimientos, propiedades y problemas (Villarroel y Sgreccia, 2011). En esta perspectiva, Vargas y Gamboa (2013) mencionan que la geometría se asocia con numerosas actividades, ya sea para el progreso de la sociedad, la academia misma o, incluso, para la recreación.

De la misma manera, el MEN (2004), al hacer referencia a la importancia de la geometría, precisa:

> La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales culturales, científicas y tecnológicas. Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o

> teoremas. Ella es el resultado de una combinación entre diversos procesos cognitivos asociados a la actividad geométrica y la comunicación de los resultados de dicha actividad. En ese sentido, el conocimiento geométrico no existe únicamente en los enunciados formales ni puede considerarse como algo absoluto e impersonal. Por el contrario, se convierte en algo relativo a las experiencias individuales y grupales que, mediadas por diversas herramientas materiales o simbólicas producen diversos niveles de sofisticación del conocimiento, útiles para resolver problemas, interpretar hechos o dar explicaciones, entre otras cosas (p. 1-2)

Sin embargo, en la actualidad, la geometría se ha usado como "terreno natural para la introducción de la deducción" (MEN, 2004, p. 8) en algunas aulas de clase colombianas, tanto de secundaria como universitarias. En estos contextos se ha observado el uso de una geometría formal, que se fundamenta en la demostración y validación de conjeturas y en el uso de fórmulas, 'recitadas' de memoria, que no han sido realmente comprendidas ni han sido aplicadas en contextos cercanos a los estudiantes.

Al respecto, International Commission on Mathematical Instruction (ICMI, 1998), en las perspectivas de la enseñanza de la geometría para el siglo XXI, precisa que en cursos tradicionales de geometría euclidiana, el material que se presenta a los estudiantes suele ser un producto final de la actividad matemática desarticulado de los planes de estudio, en los cuales se menciona que el ideal de formación es que los estudiantes desarrollen sus conocimientos matemáticos al participar activamente de su proceso. Por su parte, Martínez y Juan (1989) manifiestan que la geometría escolar se ha centrado en el aprendizaje memorístico de conceptos, fórmulas o teoremas y ha eliminado de forma temprana la intuición, que es la primera y principal herramienta de acceso al conocimiento geométrico.

De acuerdo con Santa y Jaramillo (2013) y Santa, Jaramillo y Borba (2015b), las dificultades no solamente se presentan al exponer la geometría como un sistema formal de conocimientos en algunos espacios de clase de colegios o universidades, sino que también se debe considerar que en varias de estas instituciones no se abordan procesos de enseñanza y aprendizaje de la misma, quizás, porque algunos profesores en formación o profesores en ejercicio desconocen ciertos conceptos o procedimientos geométricos, esto es, presentan falencias en la comprensión de conceptos geométricos básicos. De hecho, frente al uso de materiales didácticos concretos, Villarroel y Sgreccia (2011) explican que se han diseñado materiales propios para el estudio de la geometría, pero que son pocos los profesores que los conocen o que intentan utilizarlos en sus aulas de clases; la anterior situación se presenta debido al desconocimiento del manejo de la herramienta o de las oportunidades que brinda para el avance en el razonamiento geométrico.

Autores como Contreras y Blanco (2001), precisan que hay trabajos (Putt, 1995; Ball, 1988; Ball, 1990ª; Castro y Castro, 1996; Llinares, 1994, citados por Blanco y Contreras, 2001) que evidencian las deficiencias que profesores y profesores en formación presentan frente a la matemática escolar, principalmente de la Educación Primaria. Por su lado, Ponte y Chapman (2006) explican que numerosos estudios que cubren las tres últimas décadas de las conferencias de Psychology of Mathematics Education (PME), se han centrado en las carencias que tienen los profesores en lo referente a conceptos matemáticos o procesos de razonamiento asociados a estos.

Santa, Jaramillo y Borba (2015b) mencionan que en el campo universitario, particularmente en la formación de profesores en cursos o talleres en programas de maestría (ver ejemplo de caso clave para iniciar el estudio), han observado, de primera mano, que algunos profesores presentan carencias en cuanto al saber disciplinar de la geometría; pero las dificultades encontradas no radican en el desconocimiento de la geometría como tal, sino en los errores conceptuales que este puede causar, como consecuencia de una eventual transmisión a los estudiantes, cuando se aborda su proceso de enseñanza. Por ejemplo, algunos profesores suelen desconocer los conceptos relacionados con los lugares geométricos; hasta el momento no se percibe alguna dificultad; no obstante, al enseñar algunas líneas notables de los triángulos (mediatriz y bisectriz), las relacionan con elementos particulares de estos, sin hacer una trascendencia a su aspecto general como lugares geométricos.

Santa, Jaramillo y Borba (2015b) precisan que, otro caso común, es encontrar profesores que desconocen propiedades y relaciones de inclusión en los cuadriláteros; en este contexto, algunos enseñan de manera independiente los conceptos de paralelogramo, rectángulo y cuadrado, sin considerar las relaciones entre estos. Al respecto, Aballe (2000) menciona que una cantidad importante de futuros profesores o profesores en ejercicio "tienen considerables lagunas en la construcción de los conceptos matemáticos elementales y en las herramientas Matemáticas de aplicación" (p. 89).

Las dificultades mencionadas anteriormente, junto con los estudios de Santa (2011), quien afirma que "los estudiantes logran la comprensión de muchos conceptos geométricos con base en la visualización de construcciones que se pueden hacer de manera fácil y divertida, mediante el doblado de papel" (p. 275), nos permiten generar inferencias sobre cómo contribuir en la producción de conocimiento geométrico escolar de los profesores, a través del doblado de papel. Es importante resaltar que en este estudio, la autora infirió que la comprensión parecía depender de las interacciones del estudiante, con la geometría del doblado de papel y con la investigadora. Es decir, había una alta probabilidad de que la

Facultad de Educación

producción de conocimiento, en particular conocimiento geométrico, se diera mediante la interacción de un colectivo de seres humanos con un medio determinado, que era el doblado de papel; pero dicha inferencia no fue objeto de estudio en esa investigación y, en ese entonces, pasó a un segundo plano.

Siendo así las cosas, de acuerdo con Santa, Jaramillo y Borba (2015b), se podría pensar en la posibilidad de usar el doblado de papel como un medio que puede aportarle al conocimiento disciplinar geométrico del profesor, al conocimiento de su enseñanza y, en general, a su desarrollo profesional docente (Ponte, 2012), pues le puede permitir, dentro de un colectivo: “hacer construcciones, verificarlas, visualizarlas, lanzar conjeturas, discutirlas, analizarlas y finalmente, probarlas” (Santa y Jaramillo, 2013, p. 5), analizar su práctica pedagógica sobre geometría, en compañía de otros profesores, y generar actividades de aula, desde sus experiencias, intereses y necesidades. Como consecuencia, la visualización y experimentación de construcciones hechas mediante el doblado, podría posibilitar la producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores.

Vale la pena resaltar los estudios llevados a cabo por algunos integrantes del grupo de investigación GPIMEM[4], quienes han abordado, desde hace algunos años, la producción de conocimiento en colectivos de estudiantes o profesores, con medios tecnológicos como calculadoras, tablets o software educativos, entre otros (Borba y Penteado, 2001; Barbosa, 2009; Soares, 2012; Borba, 2012; Souto, 2013). No obstante, en una revisión de literatura existente relacionada con la descripción de la producción de conocimiento geométrico

[4] Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Brasil.

escolar que puede emerger de un colectivo particular-con-doblado-de-papel, se puede observar que dicha producción no es clara ni se ha develado todavía.

En este orden de ideas, Borba y Villarreal (2005) precisan que los medios utilizados condicionan la manera en que el conocimiento se produce en un colectivo particular. Es decir, afirman que “una nueva tecnología resulta en un nuevo colectivo que produce nuevos conocimientos, que son cualitativamente diferentes a los conocimientos producidos por otros colectivos” (p. 24). En este sentido, el doblado de papel podría generar una producción de conocimiento geométrico escolar diferente a la que se generaría con algún software o con otro medio particular.

1.2.2. Formulación del problema y pregunta de investigación.

Dado que la literatura revisada hasta el momento no describe la producción de conocimiento geométrico escolar que puede emerger de un colectivo particular-con-doblado-de-papel y, considerando que la producción de conocimiento está condicionada por la naturaleza de los medios utilizados (Borba y Villarreal, 2005), se hace necesario describir y caracterizar el tipo de producción que surge de dicho colectivo, para poder generar una propuesta que permita resolver las demás problemáticas mencionadas anteriormente.

Por lo tanto, este estudio pretende analizar cómo se produce conocimiento geométrico escolar, a través del medio de la geometría del doblado de papel (y todos los demás procesos que este medio abarca: lenguaje, visualización, experimentación, entre otros) en un colectivo particular de profesores. De esta manera, el propósito de la investigación es responder la pregunta ¿cómo producir conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel? Considerando la anterior pregunta, el objeto de estudio de la investigación es, precisamente, la producción de conocimiento geométrico escolar que se genera de un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel.

1.2.3. Objetivo general.

De acuerdo con la pregunta de investigación, el objetivo que se plantea para el estudio es el siguiente:

Analizar cómo se produce conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel.

1.2.4. Objetivos Específicos.

Para dar consecución al objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos, sin establecer un orden jerárquico de alcance:

−Describir la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge de un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel.

−Caracterizar el colectivo de profesores-con-doblado-de-papel a la luz del constructo teórico seres-humanos-con-medios fundamentado por Borba y Villarreal (2005).

2. Marco teórico: *seres-humanos-con-medios*

En este capítulo pretendo profundizar en las ideas del constructo teórico *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005), el cual es el referente teórico que fundamenta el estudio, dado que mi objetivo general es analizar cómo se produce conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel. En primer lugar, me centraré en las generalidades del constructo teórico: revisaré algunas bases históricas del mismo, desde las ideas de Tikhomirov (1981) y Lévy (1993); seguidamente, abordaré las nociones de colectivo, de medio y de ser humano. En segundo lugar, abordaré los procesos de experimentación-con-medios, en particular con doblado de papel; en tercer lugar, expondré algunas ideas sobre la visualización-con-medios, específicamente, con doblado de papel. Y, finalmente, en cuarto lugar, discutiré la pertinencia del constructo teórico en el estudio y abordaré algunas críticas que se le han hecho al mismo.

2.1. Generalidades del constructo teórico

2.1.1. Noción de *seres-humanos-con-medios*.

Marcelo Borba y Mónica Villarreal presentaron, en el año 2005, el libro oficial que consolida un constructo teórico llamado *seres-humanos-con-medios*, en el cual analizan de qué manera el conocimiento matemático es producto de las interacciones entre un grupo de humanos pensantes con determinados medios. En este sentido, se habla de "un colectivo pensante de *humanos-con-medios*" (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p. 517). Este constructo teórico se fundamenta en dos ideas principales: la primera es que "la cognición no es un trabajo individual sino más bien de naturaleza colectiva" (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p.

518) y, la segunda, que la construcción del conocimiento incluye “herramientas, dispositivos, artefactos y medios” (p. 518).

En estudios anteriores, Borba (1993) utilizó la expresión *moldeo recíproco* (inter-shaping) para describir y discutir las relaciones entre quien está conociendo y los recursos (medios); es decir, la relación entre pensamiento matemático y uso de tecnología (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014). Borba (1993) concluyó, en su tesis, que existía cierta simbiosis o interdependencia entre esos dos aspectos: “los recursos que estructuran el conocimiento son también moldeados por quien está conociendo [knower], lo cual sugiere un modelo de cognición en el que los recursos [medios] son visitos como parte de la cognición” (p. 347, traducción personal).

Más adelante, con la realización de nuevas investigaciones y articulaciones con otras teorías, esa relación se hizo más visible. Por lo tanto, la expresión *seres-humanos-con-medios* fue creada como una metáfora para hacer alusión a la relación entre quien conoce y los medios (Borba, 1999), considerando como base teórica fundamental las nociones de tecnologías de la inteligencia de Tikhomirov (1981) y colectivos pensantes de Lévy (1993). También, en torno al constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, es clara la influencia de la teoría de la actividad y de diversas tendencias de investigación como la experimentación, la visualización, el uso de calculadoras gráficas y softwares, el uso de internet en Educación Matemática, modelación matemática, formación de profesores, metodología de investigación cualitativa, dimensiones políticas y educación matemática crítica, entre otros (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014).

Por lo tanto, Borba (2002) precisa que "la producción del conocimiento se logra a partir de un colectivo compuesto por humanos y no humanos" (p. 142). En particular, este autor enfatiza en "el papel que los medios tienen, como actores no humanos, en moldear las posibilidades que tienen esos colectivos de construir conocimiento" (p. 142). Por esta razón, este constructo teórico adopta una perspectiva de carácter teórica que "apoya la idea de que el conocimiento es producido por un colectivo compuesto de humanos-con-medios, o humanos-con-tecnologías, y no como otras teorías sugieren, por los humanos individuales o, colectivos compuestos solo por humanos" (Borba y Villarreal, 2005, p. 23).

Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014) explican que la noción de *seres-humanos-con-medios* intenta enfatizar que vivimos siempre en conjunto de humanos y que somos fruto de un momento histórico, que tiene las tecnologías históricamente definidas como copartícipes de esa búsqueda por la educación. En este sentido, los autores hacen hincapié en que las tecnologías digitales son parte del proceso educativo del ser humano y también son partes constituyentes de la incompletitud y de la superación de esa incompletitud ontológica de ser humano (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014). En el ámbito educativo, Borba y Villarreal (2010) revisaron estudios sobre la historia de la educación para mostrar cómo los medios tradicionales se introdujeron en las escuelas e influyeron, de manera notable, en los procesos educativos. De esta forma, en el constructo se puntualiza que las posibilidades de conocimiento, hecho socialmente por colectivos, se alteran por diferentes humanos y diferentes tecnologías.

En particular, el uso de los guiones, que conectan los actores humanos de los no humanos, busca enfatizar que las tecnologías no son neutras al pensamiento, es decir, que la producción de conocimiento matemático es condicionada por el medio utilizado (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014). Por consiguiente, Borba y Villarreal (2005) afirman que no tiene mucho sentido hablar de una separación entre los seres humanos y los medios, dado que, para ellos, los medios hacen parte esencial y fundamental del sujeto e, incluso, lo componen y constituyen. En este sentido, Lévy (1993) enfatiza que la historia de las tecnologías intelectuales condiciona el pensamiento; incluso, menciona que la historia de las tecnologías siempre estará entrelazada con la historia de la propia humanidad. Es decir, el conocimiento siempre ha estado condicionado por distintos medios en toda la historia de la humanidad. Como consecuencia de ello, las personas producen conocimientos de diferentes maneras, en concordancia con el uso de diferentes tecnologías.

Esto llevó a que Borba y Villarreal (2005) precisaran que el uso de diferentes tipos de medios puede conducir a la producción de diferentes tipos de conocimientos en colectivos diferentes. Es decir, "una nueva tecnología resulta en un nuevo colectivo que produce nuevos conocimientos, que son cualitativamente diferentes a los conocimientos producidos por otros colectivos" (p. 24).

De acuerdo con Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014), las siguientes ideas resumen la noción de *seres-humanos-con-medios*:

–El surgimiento de una nueva tecnología permite que nuevos tipos de problemas matemáticos sean explorados.

–Un problema que se resuelve con lápiz y papel, por ejemplo, puede tornarse trivial u obsoleto, al ser resuelto por medio de un software.

–Se debe evitar la domesticación de una nueva tecnología. Es decir, no se debe dejar que esta sea utilizada de la misma manera y anclada a las mismas prácticas que eran condicionadas por otros medios.

–Se debe evitar el uso domesticado de nuevas tecnologías, buscando crear nuevos problemas y actividades investigativas.

–La matemática basada en el uso del lápiz y papel es cualitativamente diferente de la matemática basada en el uso de softwares.

–Hay una modelación recíproca entre pensamiento y tecnología.

–La producción de conocimiento matemático es condicionada por la tecnología utilizada.

–Las tecnologías no son neutras al pensamiento matemático.

–Las tecnologías transforman la matemática.

–Las tecnologías no son figurantes en los escenarios cognitivos. Humanos y tecnología son protagonistas de la ecología cognitiva.

–Los colectivos pensantes son formados por amalgamas de tipo humanos-tecnologías, humanos-con-medios, seres-humanos-con-tecnologías o, como se ha utilizado, *seres-humanos-con-medios*.

–Al proponer, actuar o investigar en un escenario pedagógico, nos enfocamos en pensar-con-tecnologías.

En consecuencia, *seres-humanos-con-medios* (Borba, 1999; Borba y Villarreal, 2005) es un constructo fundamental que se centra en la forma como se entiende el uso de las tecnologías en Educación Matemática. El modo como se actúa dentro del salón de clase o se desarrollan investigaciones es, en gran parte, orientado por esta noción, que es también directriz en la forma como se identifican y sistematizan las fases de las tecnologías digitales[5].

Es importante mencionar, de acuerdo con Borba (2009; 2012), que las tecnologías están cambiando la propia noción de qué es ser humano; es decir, las tecnologías digitales móviles (internet, celular, tablets, entre otras) están modificando las normas que vivimos y los valores asociados a determinadas acciones. Sin embargo, el ritmo es diferente dentro y fuera de la escuela; existe un gran abismo entre las prácticas que estudiantes y profesores tienen tanto en el contexto extra escolar, como en el intra escolar (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014).

El constructo teórico considera dos aspectos fundamentales, la experimentación[6] y la visualización[7] con tecnologías, que podrían permitir la reorganización del pensamiento al introducir cambios en la naturaleza del conocimiento generado. Borba y Villarreal (2005) afirman que la tecnología tiene un papel primordial en relación al uso de experimentos en matemáticas y, en particular, en Educación Matemática. Estudios realizados por algunos

[5] De acuerdo con Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014), las fases de las tecnologías digitales en Educación Matemática son: Fase 1. Inicia, aproximadamente, en 1980, cuando el uso de las calculadoras simples y científicas era un tema de discusión en Educación; esta fase se caracteriza por el uso del software LOGO, en el año 1985, el cual enfatiza relaciones entre el lenguaje de programación y el pensamiento matemático. Fase 2. Inicia, aproximadamente, en el año 1990, a partir del acceso y popularización del uso de computadores personales. Diversos softwares educativos fueron producidos, tanto por empresarios como por investigadores. Fase 3. Inicia, aproximadamente, en el año 1999, con el advenimiento del internet, el cual comienza a ser utilizado como fuente de información y como medio de comunicación entre profesores y estudiantes y para la realización de cursos a distancia para la formación continuada de profesores. Fase 4. Es la que vivenciamos actualmente y que inició, aproximadamente, en el año 2004, con el crecimiento del internet rápido. Desde entonces, de acuerdo con los autores, la cualidad de conexión, la cantidad y el tipo de recursos con acceso a internet han sido mejorados, transformando la comunicación online.

[6] Este proceso será abordado en un apartado posterior.

[7] Este proceso será abordado en un apartado posterior.

investigadores del grupo GPIMEM, han destacado, en diferentes contextos, la importancia de un enfoque de tipo experimental en la enseñanza de las matemáticas, cuando la tecnología se hace presente (Borba y Villarreal, 2005). En particular, en el escenario de este estudio, el doblado de papel, se convierte en un medio que puede permitir la experimentación y manipulación de una hoja de papel, con el fin de mostrar hechos geométricos y de producir conocimiento.

Por su parte, los procesos de visualización con tecnologías, de acuerdo con los autores, son importantes porque constituyen una forma alterna de producir conocimiento, dado que se puede dar una transformación de la comprensión al considerar representaciones de tipo visual. En este orden de ideas, la visualización podría hacer parte de la actividad matemática, una vez se acepten y validen pruebas de carácter visual, que permitan la resolución de problemas. Pese a que el análisis de la literatura que hacen Borba y Villarreal (2005), arroja un carácter secundario de dicho proceso en las Matemáticas y un carácter heurístico y pedagógico en Educación Matemática, se subraya que la visualización es un proceso fundamental para el constructo teórico, al considerarlo como una forma de razonamiento.

Con relación a este estudio, mi investigación se fundamenta en el constructo teórico *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005), en tanto que se concibe la naturaleza social del conocimiento en colectivos de profesores, a través de su producción con determinados medios o artefactos (doblado de papel, visualización, experimentación, lenguaje, entre otros). En este sentido, el propósito es analizar cómo se produce conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel. Este análisis puede permitir caracterizar tanto la producción de conocimiento, como el colectivo mismo (objetivos específicos).

Las tareas de formación que se propusieron al colectivo de profesores, pueden ser caracterizadas como exploratorio-investigativas, desde las ideas de Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014), porque su objetivo didáctico central es ofrecer medios para que los profesores se comprometan a investigar problemas que posibiliten la exploración de diferentes estrategias de resolución, la elaboración de conjeturas, la discusión colaborativa entre los mismos, entre otras. Por lo tanto, el diseño de actividades que se propone en el estudio, considerando las ideas de Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014), puede ofrecer medios para que los profesores exploren los conceptos geométricos de forma experimental, es decir, realizando construcciones y experimentaciones con doblado de papel, de tal manera que exploren recursos visuales para generar conjeturas, diálogos e interacciones al interior del colectivo. El propósito no solo es establecer relaciones entre las representaciones con doblado de papel y los propios objetos geométricos, sino también generar reflexiones sobre la geometría escolar y, en general, sobre la práctica pedagógica de los profesores.

2.1.2. Bases históricas del constructo teórico

Las ideas presentadas por Borba y Villarreal (2005) en el constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, se basan directamente en las ideas de Tikhomirov (1981) y Lévy (1993), tal como se mencionó en el apartado anterior. Debido a que la investigación pretende caracterizar tanto el colectivo de profesores-con-doblado-de-papel, como la producción de conocimiento que emerge de sus interacciones, el constructo que la fundamenta es el de Borba y Villarreal (2005). Aunque esta estructura teórica se asocia principalmente con las tecnologías de la información, es importante resaltar que el doblado de papel se constituye en un medio que puede propiciar la producción de conocimiento geométrico escolar dentro de un colectivo (Santa, Jaramillo y Borba, 2015b).

Estudios realizados por Tikhomirov (1981) muestran que se ha hecho una mala interpretación de la relación entre los procesos informáticos y la actividad humana. En este sentido, él discute tres teorías que explican la manera en que los computadores afectan la cognición humana y, en consecuencia, los procesos educativos (Borba, 1999).

La primera que se menciona es la teoría de la sustitución, la cual, según Tikhomirov (1981), afirma que el uso del computador puede reemplazar y sustituir la actividad humana. De acuerdo con Borba (1999), el argumento básico para sustentar esta visión, es que el computador puede llegar a los mismos resultados que el ser humano, en la mayoría de los casos, sin cometer tantos errores. Por eso, se afirma que sustituye al ser humano. Sin embargo, esta mirada trivializa el pensamiento, dado que ignora no solo los complejos procesos humanos por los cuales un problema es elegido para ser resuelto, sino también que la búsqueda de soluciones hecha por los humanos es totalmente diferente a la desarrollada por el computador (Borba, 1999). Siguiendo a Borba (1999), la generación de conocimiento está condicionada por la elección de un problema, que depende del contexto sociocultural.

La segunda teoría discutida por Tikhomirov (1981), es la teoría de suplementación, en la cual el computador se visiona como una herramienta que extiende, de manera cuantitativa, el procesamiento humano de la información; por lo tanto, este autor manifiesta que está basada en la teoría de la información, la cual precisa que el pensamiento puede ser dividido en pequeñas partes. En esta mirada, el computador resuelve problemas que son de difícil solución para el ser humano (Borba, 1999). De acuerdo con Borba (1999), esta concepción es tan solo una yuxtaposición entre las tecnologías y los humanos, en la que los procesos complejos de pensamiento consisten en la agrupación de pequeñas partes: el computador realiza unas partes y, el ser humano, otras. Esta visión también es criticada, pues asume una mirada cuantitativa y no cualitativa del pensamiento, al dividirlo en "pequeñas" partes; es decir, ignora que hay valores que sobrepasan tanto la elección de un problema, como sus posibles soluciones (Borba, 1999).

Borba (1999) afirma que las anteriores dos teorías no consideran que los diferentes medios (oralidad, escritura, informática, entre otros) tienen algún papel relevante en el proceso cognitivo. Por lo tanto, la tercera teoría, es la teoría de la reorganización, en la que los programas informáticos y, a su vez, el computador, deben ser vistos como un nuevo tipo de sistema de signos que puede mediar en la actividad humana (Tikhomirov, 1981). En esta tercera visión, el computador juega un rol de mediación similar al jugado por el lenguaje en la teoría Vygotskiana (Tikhomirov, 1981). En este sentido, Tikhomirov (1981) discute cómo los computadores afectan la cognición humana y, al aprovechar esta situación, cómo pueden ser usados para cambiar los procesos educativos. Adicional a lo anterior, este autor enfatiza que el ordenador, finalmente, reorganiza la manera en que los seres humanos acceden al conocimiento.

La tercera teoría se convierte en una de las raíces del constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, en el que se establece que las herramientas influyen y reorganizan la forma en que las personas conocen y producen conocimientos (Sánchez, 2007). Por ejemplo, Sánchez (2007) afirma que “la manera de estudiar el comportamiento gráfico de funciones será diferente en un escenario donde solo se utilice lápiz y papel, a aquel donde se haga uso de un software con capacidades gráficas” (p. 130); lo que podría permitir la reflexión sobre la imposibilidad de pensar a los humanos conociendo sin medios.

Borba (1999) manifiesta que, con el desarrollo de las nuevas interfaces de los computadores, se pueden extender las ideas de Tikhomirov (1981); es decir, se puede mencionar que todos los procesos que son mediados a través de las imágenes y sonidos de los monitores y más recientemente, por otros medios que se encuentran en proceso de desarrollo, posibilitan una reorganización mucho más intensa que aquella analizada por el autor ruso (Borba, 1999).

Por otro lado, los estudios de Lévy (1993) sugieren una alternativa para finalizar la supuesta oposición entre el hombre y la máquina, con un doble propósito: primero, dejar de ver el computador como una técnica, para verlo como una dimensión característica de los humanos y, segundo, dejar de hacer énfasis en la dicotomía entre estos humanos y su tecnología, como si fueran dos conjuntos disjuntos. En este sentido, Lévy (1993) argumenta que aquellos que exponen que la tecnología es nociva para los seres humanos, no están considerando que la forma en la que se están expresando (la oralidad o la escritura) son medios que también estructuran su práctica. Esto es, la dicotomía entre seres humanos y medios no tiene razón de ser, dado que las tecnologías juegan un papel importante en la constitución de la cultura y de la inteligencia grupal.

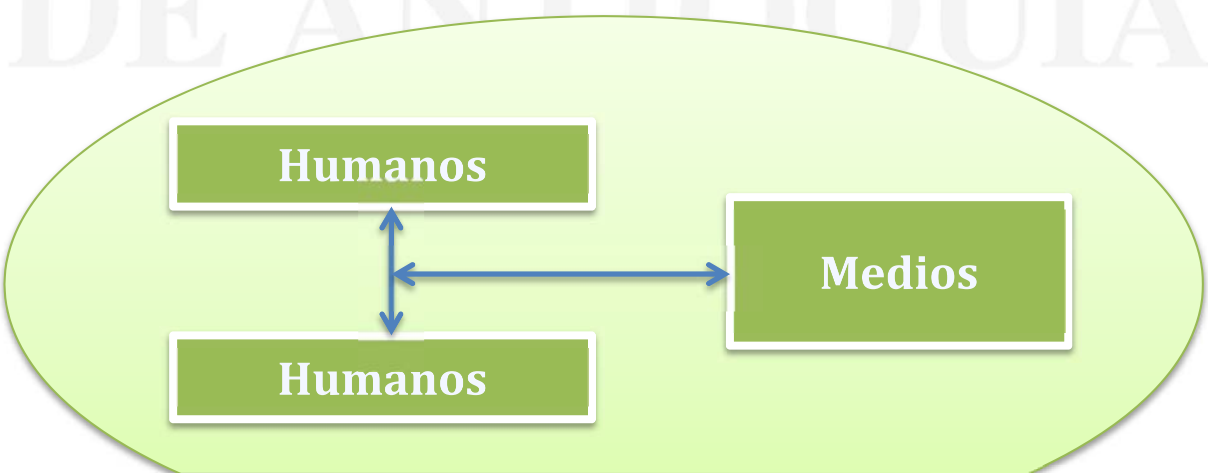
Adicionalmente, Lévy (1993) propone que las ciudades y las bibliotecas también son otro tipo de tecnologías, que actúan en la construcción del conocimiento, al igual que el lápiz y el papel. En general, se puede afirmar que el pensamiento sufre una reorganización a causa de la presencia de tecnologías de la información. Cabe aclarar, de acuerdo con Lévy (1993), que estas tecnologías intelectuales no sustituyen el pensamiento vivo de los seres humanos.

Levy (1993) también explica que las tecnologías deben ser vistas como una articulación con los seres humanos y su producción de conocimiento, dado que las diferentes tecnologías han moldeado la forma como las personas han producido conocimiento a lo largo de la historia. En este escenario, se plantea la idea central de la ecología cognitiva, en la cual las tecnologías de la inteligencia condicionan, pero no determinan, el pensamiento, que se da en un colectivo dinámico (Souto, 2013).

El constructo teórico *seres-humanos-con-medios* adopta algunas ideas de Lévy (1993), dado que asume que los seres humanos están constituidos por las tecnologías, pues estas los transforman y modifican su razonamiento; de la misma forma, estos humanos constantemente transforman dichas tecnologías (Borba y Villarreal, 2005, p. 22). Adicionalmente, Borba y Villarreal (2005) asumen que el conocimiento es producido en colectivos dinámicos, tal como lo afirma Lévy (1993). Es importante resaltar que Borba y Villarreal (2005) focalizan su atención en las tecnologías de la información, tanto que las utilizan en muchos apartados como sinónimos de medios, debido a que establecen que "la tecnología se utiliza siempre para comunicarse, y un medio siempre puede ser visto como una tecnología" (p. 23).

2.1.3. Colectivo pensante de seres humanos con medios

El constructo teórico *seres-humanos-con-medios* se basa en la idea que establece que "el conocimiento es producido por un colectivo compuesto de humanos-con-medios o de humanos-con-tecnologías" (Borba y Villarreal, 2005, p. 23). De acuerdo con este constructo y en el escenario educativo, el proceso de enseñanza y aprendizaje se observa de una manera diferente: ya no se habla de un profesor solo, ni de un estudiante aislado o de una herramienta sola e independiente de los dos actores anteriores (Esteley, 2006; Santa y Jaramillo, en prensa). Se habla de una unidad compuesta por humanos (profesores y estudiantes)-con-medios, los cuales interaccionan (flechas en varias direcciones) para producir conocimiento, tal como se presenta en la figura 11.



En palabras de Villarreal (2012), el colectivo se asume de la siguiente manera:

> […] el sujeto epistémico es en realidad un colectivo constituido por *humanos-con-medios* (Borba y Villarreal, 2005). La noción de humanos-con-medios trae dos ideas centrales: por un lado, que la cognición no es una empresa individual, sino social (por eso humanos) y, por otro lado, que la cognición incluye herramientas, medios con los cuales se produce el conocimiento y este componente del sujeto epistémico no es auxiliar o suplementario, sino esencial”. (p. 79)

En la línea de Lévy (1993), el pensamiento colectivo es un término usado para enfatizar que el conocimiento es producido por colectivos compuestos de actores humanos y no humanos. En este escenario, las interrelaciones entre los humanos y entre los humanos con los medios, son las que permiten la producción de conocimiento matemático. Por lo tanto, el colectivo será asumido como la unidad compuesta por humanos en interrelación con ellos mismos y con los medios (Santa y Jaramillo, en prensa).

En este estudio, en particular, el colectivo es la unidad formada por profesores-con-doblado-de-papel, en el que, de manera implícita, se dan interacciones importantes entre la investigadora, los profesores y el doblado de papel. Dichas interacciones pueden permitir la producción de conocimiento geométrico escolar. Además, es esencial mencionar que el lenguaje, la experimentación y la visualización, también se constituyen en medios que pueden aportar a dicha producción de conocimiento (ver figura 12).

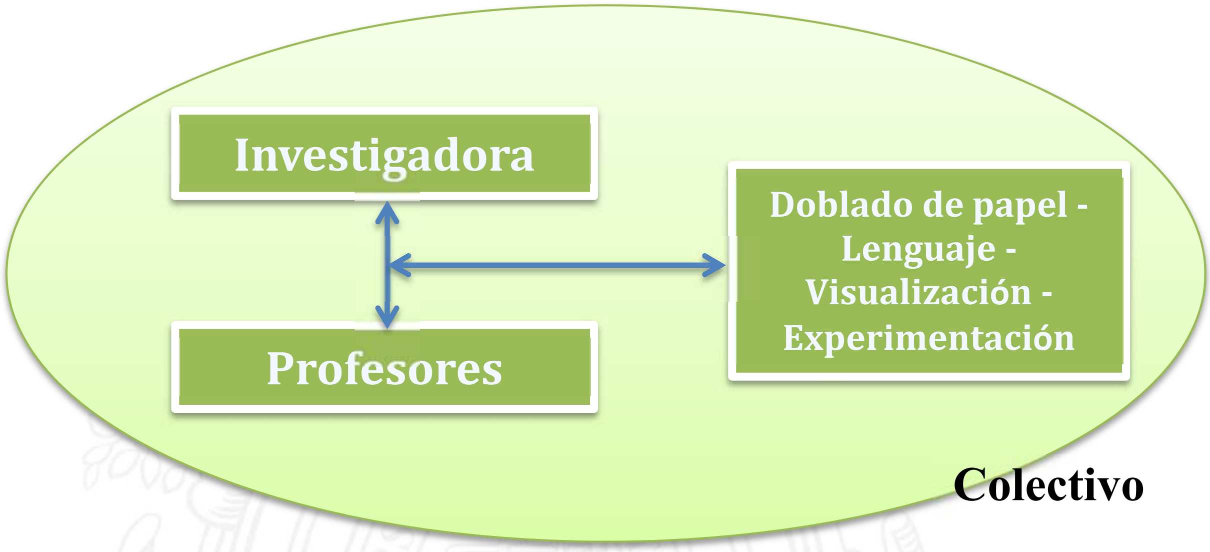


Figura 12: Colectivo de profesores-con-doblado-de-papel (Santa y Jaramillo, en prensa; interpretación personal).

2.1.4. Concepción de medio.

Borba (1999) menciona que se le ha dado muy poco énfasis al papel del medio en las discusiones sobre el pensamiento humano. De acuerdo con este autor, tales discusiones se han focalizado en el ser humano, solamente o, eventualmente, en una parte de su cuerpo (cabeza, por ejemplo) o en varias partes distribuidas en ese mismo cuerpo. Borba (1999) también hace alusión a otros autores que reconocen el papel de 'otros', sean humanos o no, en el pensamiento humano pero, finalmente, se centran en el mismo ser humano. Dado que no hay acceso directo al pensamiento humano, muchas de estas visiones se convierten en metáforas (Borba, 1999). Una de estas visiones metafóricas, es que el pensamiento es ejercido al interior de los sistemas seres-humanos-con-computador (Tikhomirov, 1981; Borba, 1999) o, de manera general, seres-humanos-con-medios.

La metáfora se puede ampliar, a lo largo de la historia, a los sistemas ser-humano-oralidad, ser-humano-escritura o ser-humano-informática, en los cuales el pensamiento es algo colectivo, de acuerdo con Lévy (1993) y Borba (1999). Por lo tanto, los medios no son solo molduras, sino que son parte activa del pensamiento. Esto es, el pensamiento es condicionado, no determinado, por las diferentes técnicas desarrolladas a lo largo de la historia (Borba, 1999).

Con respecto al proceso educativo, Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014) mencionan que los medios históricamente se han definido como copartícipes de la búsqueda de la formación y la educación, dado que los seres humanos son fruto del momento histórico vivido. En este sentido, estos autores precisan que los medios son parte constituyente de la incompletitud del ser humano e, incluso, pueden permitir la superación de dicha incompletitud ontológica del ser humano (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014). De hecho, las tecnologías digitales (llámese medios, de manera general) están modificando las normas que vivenciamos y los valores asociados a determinadas acciones (formas de comunicación, educación online, uso de internet, entre otras).

Por lo tanto, Borba (1999) y Souto (2013) utilizan el término medios para referirse tanto a las tecnologías materiales (herramientas, instrumentos, cosas, entre otras), como a las inmateriales (oralidad, escritura, informática, pensamiento, entre otras). Por su parte, Villarreal y Borba (2010) afirman que el medio es cualquier clase de herramienta, dispositivo, equipo, instrumento, artefacto o material como resultado del desarrollo tecnológico y que dentro del sistema *seres-humanos-con-medios*, permite la reorganización del pensamiento.

De acuerdo con lo anterior, para el constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, la producción de conocimiento se debe entender como ‘pensar con’ medios; es decir, los medios (tecnologías materiales o inmateriales) deben ser considerados como parte constitutiva de esa producción, en la medida en que a estos se les atribuye un papel más relevante en la producción de conocimiento y dejan de ser un simple soporte del mensaje 'a través de' (Borba y Villarreal, 2005; Souto, 2013).

En consecuencia, el medio no se puede entender como cualquier dispositivo que esté al alcance humano; el medio se debe entender de manera más general, más global, como aquel artefacto o recurso (tecnología material o inmaterial) que permite la reorganización del pensamiento. Por lo tanto, en este estudio, tanto el doblado de papel, como el lenguaje verbal o escrito y los procesos de experimentación y visualización, son tomados como medios, los cuales son parte activa del pensamiento de los profesores del colectivo.

2.1.5. Concepción de ser humano.

Como se ha mencionado en apartados anteriores, el pensamiento humano está condicionado por el uso de medios, a lo largo de la historia (oralidad, escritura, informática, entre otros). De hecho, tal como lo afirma Lévy (1993), la historia de los medios está entrelazada con la historia de la propia humanidad. En este escenario, toma relevancia la noción de ser humano que se va a considerar en este estudio.

De acuerdo con el constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, el ser humano transforma y es transformado por los medios, en un proceso interactivo (Barbosa, 2009). En esta perspectiva, los medios no son apenas asistentes de los humanos en la producción de conocimiento matemático, sino que modifican la naturaleza, tanto del ser humano, como del conocimiento producido (Borba y Villarreal, 2005; Barbosa, 2009). Incluso, los medios materiales o inmateriales, surgen de la necesidad de superación de la incompletitud ontológica del ser humano (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014) y, en la medida de su desarrollo, se transforman y transforman la noción de ser humano.

En particular, Vélez, Galvis y Villa-Ochoa (2013) afirman que el ser humano ha tenido, como necesidad principal, la interacción dentro de un grupo social y la atención a las demandas que este le impone. De acuerdo con estos autores, esa necesidad de relacionarse con otros ha generado la creación, transformación y uso de tecnologías digitales, que se han orientado, en algunos casos y de manera específica, a mejorar los sistemas de comunicación entre ellos.

Por otro lado, de acuerdo con Bicudo (2014), desde la fenomenología, el sujeto está siempre en el mundo, por ser un cuerpo-encarnado intencionalmente, siempre retorna a lo que está a su alrededor, solicitando algo qué hacer. Por consiguiente, está unido a lo que lo rodea, por los sentidos de su propio cuerpo, estando *con* y en *este* mundo. De esta manera, ese organismo corpo-viviente está, intencionalmente, unido al mundo-vida. De acuerdo con Husserl (1979, 2008, citado por Bicudo, 2014) el mundo-vida es tomado como una totalidad, en la que habitamos y estamos situados en un espacio y un tiempo, en cuyas dimensiones vivimos con los otros, humanos o no; la realidad se va tejiendo mediante comprensiones expresadas, subjetivas, intersubjetivas, materializadas por las formas y por los contenidos disponibles (Bicudo, 2014).

La intencionalidad, en la perspectiva discutida por Bicudo (2014), es un concepto nuclear del pensamiento fenomenológico. Se trata de un modo de estar, en vigilia, siempre atentos a lo que nos envuelve el mundo-vida circundante. Esa atención es existencial y no intelectual, es decir, es dada por la propia estructura y funcionamiento del cuerpo-viviente (Husserl, 2002, citado por Bicudo, 2014).

Heidegger (1988, citado por Bicudo, 2014) trabaja en ese suelo de comprensiones. En su obra menciona *ser-en-el-mundo-con* como una constitución fundamental de ser-ahí; se refiere a una unidad de ser que se encuentra siempre *en* un mundo; no se refiere a una relación espacial, en el sentido de decir que algo está dentro de un espacio, sino que significa *habitar junto a*, *ser familiar con*. En este escenario, en la perspectiva de Bicudo (2014), *ser-en-el-mundo-con* es una constitución del modo de ser del ser humano que jamás está sin mundo; así, también, sería comprendido el constructo teórico de Borba y Villarreal (2005), *seres-humanos-con-medios*, desde la indisolubilidad de la unidad; es decir, no habría humanos sin medios (Bicudo, 2014).

El término indisoluble en el constructo teórico de Borba y Villarreal (2005) es discutido por Bicudo (2014), al analizar las ideas de Tikhomirov (1981) y de Lévy (1993). Algunas de estas reflexiones serán mencionadas en un apartado posterior (críticas al constructo teórico).

Por lo tanto, en la perspectiva de Bicudo (2014), la constitución de la persona es compleja y se da en un entrelazamiento de esferas de actividades específicas, e interconectadas, de naturaleza sensorial, perceptivo, psicológico y espiritual. El ser humano se constituye siempre en un mundo-con-los-otros, que es histórico, cultural; que carga, en sí, modos de: sentir, percibir, indagar, comprender, expresar, dejar huellas culturales, ser aceptado y valorado por una comunidad o por otros (Husserl, 2008, citado por Bicudo, 2014).

2.2. Procesos de experimentación

Considerando que en la geometría del doblado de papel se requieren procesos de experimentación y manipulación de la hoja, para poder visualizar hechos geométricos, generar conjeturas visuales y establecer pruebas válidas visuales, se torna fundamental caracterizar también dichos procesos, dado que también son una parte esencial del constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, como se mencionó anteriormente.

Borba y Villarreal (2005) afirman que un enfoque experimental en Educación Matemática, trae las siguientes implicaciones:

> El uso de procedimientos tentativos y ensayos direccionados que apoyen la generación de conjeturas matemáticas; el descubrimiento de resultados matemáticos previamente desconocidos por el experimentador; la posibilidad de probar formas alternativas de obtener un resultado; la posibilidad de proponer nuevos experimentos; una forma diferente de aprendizaje de las matemáticas. (p. 75)

Por otro lado, también argumentan que dicho enfoque adquiere más importancia y poder con el uso de la tecnología. De esta manera, estos autores manifiestan que un enfoque experimental-con-tecnología, puede generar:

> La posibilidad de probar una conjetura utilizando un gran número de ejemplos y la oportunidad de repetir los experimentos, debido a la retroalimentación rápida dada por los ordenadores; la posibilidad de obtener diferentes tipos de representaciones de una situación dada más fácilmente; una forma de aprendizaje de las matemáticas […]. (Borba y Villarreal, 2005, p. 75 – 76)

De acuerdo con Borba, Scucuglia y Gadanidis, la noción de experimentación con tecnologías debe atribuir un *diseño experimental* a una actividad matemática, de tal manera que se generen escenarios de investigación matemática, es decir, ambientes heurísticos de descubrimiento, de formulación de conjeturas acerca de un problema y búsqueda de posibles y diversas soluciones. En este escenario, experimentar con tecnologías puede ser entendido como el uso de tecnologías informáticas en el estudio de conceptos o en la exploración de problemas matemáticos (Borba y Penteado, 2001; Borba y Villarreal, 2005).

En la perspectiva de Borba y Villarreal (2005) y Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014), una actividad matemática elaborada con base en la noción de experimentación con tecnologías debe buscar ofrecer medios para:

–Creación y simulación de modelos matemáticos.

–Generación de conjeturas matemáticas.

–Manipulación dinámica de objetos construidos.

–Realización de verificación de conjeturas usando un gran número de ejemplos, modificando representaciones de objetos, simulando componentes de construcciones, etc.

–Convencimiento sobre la veracidad de conjeturas.

–Elaboración de nuevos tipos de problemas y construcciones matemáticas.

–Creación y conexión entre diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos.

–Exploración de carácter visual, dinámico y manipulativo de objetos matemáticos.

–Incentivo a la combinación de razonamientos intuitivos, inductivos o abductivos, que puedan contribuir al desarrollo de razonamientos deductivos.

–Creación de actividades matemáticas "abiertas controladas", es decir, direccionadas a objetivos específicos.

–Enseñar y aprender matemáticas de forma alternativa.

–Comprensión de conceptos.

–Conocimiento de nuevas dinámicas, formas de conectividad y relaciones de poder en el aula de clase.

–Desarrollo de un nuevo tipo de lenguaje, oral y escrito, en la comunicación matemática.

–Creación de diferentes tipos de símbolos y notaciones matemáticas.

–Profundización en variados niveles de rigor.

–Identificación de incoherencias conceptuales y/o actualizaciones de enunciados.

Los aspectos anteriores que caracterizan la experimentación con tecnologías, "tienen como paño de fondo una perspectiva en la cual la producción de conocimientos matemáticos asume una dimensión heurística, de descubrimiento, siendo apropiada para los escenarios de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014, p. 52). Por lo tanto, el descubrimiento de patrones o singularidades entre representaciones de objetos matemáticos, posibilita la producción de sentidos matemáticos (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014).

En este orden de ideas, los procesos de experimentación-con-doblado-de-papel, pueden permitir que el profesor, en un colectivo, tenga la posibilidad de usar procedimientos y ensayos para generar conjeturas geométricas, descubrir nuevos resultados o maneras alternas de probar una afirmación, proponer nuevas construcciones que muestren otros hechos geométricos, repetir y perfeccionar sus construcciones, obtener representaciones visuales o táctiles en el mosaico de pliegues que generen los dobleces, analizar la pertinencia de las construcciones geométricas en su práctica pedagógica, analizar los conceptos de geometría escolar inmersos en la actividad de doblar, entre otros. Por lo tanto, el enfoque experimental-con-doblado-de-papel, permite una nueva forma de producción de conocimiento geométrico escolar, que se puede generar y validar al interior del colectivo de profesores-con-doblado-de-papel.

2.3. Procesos de visualización

El MEN (2004) afirma que la visualización "está en la base de la actividad cognitiva en geometría" (p. 10) y le permite al profesor pasar de un proceso inicial de solo observar la figura a un proceso más complejo, donde puede deducir propiedades de las figuras, relacionarlas, clasificarlas y llegar a construir conceptos matemáticos o geométricos. En este sentido, la geometría del doblado de papel busca "hacer del razonamiento visual una práctica aceptable y habitual para el aprendizaje" (Figueiras y Deulofeu, 2005, p. 217). En la misma línea, Ben-Chaim, Lappan y Huang (1989) afirman que la visualización se asocia con la capacidad de interpretar y entender la información proporcionada por las figuras, y la capacidad de conceptualizar y generar relaciones abstractas en términos visuales.

Por su parte, Arcavi (2003) menciona que la visualización tiene tres roles fundamentales para el estudiante de Matemáticas: (1) soportar e ilustrar resultados esencialmente simbólicos; (2) como una posible vía para resolver conflictos entre soluciones simbólicas (correctas) y soluciones intuitivas (incorrectas) y (3) como una manera para reestablecer y recuperar bases conceptuales que pueden ser fácilmente anuladas por las soluciones formales. Sin embargo, Figueiras y Deulofeu (2005) añaden otro nuevo rol a la visualización y es "potenciar un cambio de concepción respecto a la matemática" (p. 218).

Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996, citados por Borba y Villarreal, 2005) presentan la siguiente definición de visualización, que es válida para otros contextos diferentes a las Matemáticas y en la que afirman que la visualización es un proceso bidireccional entre construcciones internas y externas:

> La visualización es un acto en el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo a lo que se accede a través de los sentidos. Tal conexión se puede hacer en cualquiera de dos direcciones. Un acto de visualización puede consistir en alguna construcción mental de objetos o de procesos que un individuo asocia con objetos o eventos percibidos por ella o él como externos. Alternativamente, un acto de visualización puede consistir en la construcción, en algún medio externo como pantalla de papel, pizarra o el ordenador, de objetos o eventos que el individuo identifica con el objeto o proceso en su mente. (p. 81)

En este orden de ideas, en el presente estudio, se considera la visualización como ese camino entre las construcciones externas y las internas, es decir, se seguirá la perspectiva de Nemirovsky y Noble (1997, citados por Torroba, Etcheverry y Reid, 2009), quienes observan que la visualización "no se restringe ni a la mente ni a los medios externos (papel, computadora, etc.), sino más bien [la] definen […] como un medio de circulación entre ellos" (p. 5).

De la misma manera, en el constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, la visualización se convierte en "un proceso que va más allá del simple acto de mostrar una imagen" (Villa-Ochoa y Ruíz, 2010, p. 519). De acuerdo con Borba y Villarreal (2005), al ser el constructo teórico *seres-humanos-con-medios* asumido como una unidad, la separación entre lo interno y externo no tiene validez, ya que los límites entre ellos no son claros para el ser cognitivo.

Por otro lado, Borba y Villarreal (2005) consideran que la visualización es una forma de razonamiento en la investigación en Matemáticas y, en particular, en Educación Matemática. Ellos presentan dos niveles en los que la visualización se puede considerar: en primer lugar, asociado a su uso en la prueba matemática formal, en la cual las representaciones visuales no hacen parte de esta, sino que actúan como acompañantes heurísticos; en segundo lugar, relacionado con su uso en otras actividades Matemáticas tales como la elaboración de conjeturas, la solución de problemas o los intentos de explicar algunos resultados matemáticos a colegas o estudiantes; en este caso, la visualización se toma más como un recurso periférico o pedagógico.

Sin embargo, la visualización se considera importante por las siguientes razones:

> …constituye una forma alternativa de acceder al conocimiento matemático; la comprensión de los conceptos matemáticos requiere múltiples representaciones y la representación visual puede transformar la comprensión de sí mismo; la visualización es parte de la actividad matemática y una manera de resolver problemas […]. (Borba y Villarreal, 2005, p. 96)

Frente a la visualización, Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014) afirman que la naturaleza de las representaciones y las posibles formas de explorar conexiones entre ellas, dependen de la tecnología utilizada. El uso de recursos tecnológicos fue adquiriendo relevancia en el aprendizaje de las matemáticas por tener un carácter predominantemente empírico (experimental y visual), lo que intensifica la dimensión heurística que envuelve la producción de sentidos y conocimientos matemáticos (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014).

De acuerdo con los autores, con el uso de tecnologías digitales:

–Los objetos matemáticos comenzarán a ser representados de manera inédita.

–Los modelos matemáticos y algoritmos serán actualizados con nuevas variables.

–Construcciones matemáticas ganarán dinamismo y simultaneidad debido a las formas de dependencia entre representaciones.

–Conjeturas serán exploradas a su límite experimental, de modo que ofrezcan convencimiento sobre su veracidad para convertirse en teoremas.

–Nuevos tipos de problemas y estrategias de resolución, entrarán en escena.

Considerando las características anteriores, la visualización se torna en un proceso fundamental de pensamiento matemático (Scucuglia, 2012, citado por Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014), por las siguientes razones: envuelve un esquema mental que representa la información visual o espacial; es un proceso de formación de imágenes que posibilita la entrada en escena de representaciones de objetos matemáticos para pensar matemáticamente; ofrece medios para que las conexiones entre las representaciones puedan ocurrir; es protagonista en la producción de sentidos y en el aprendizaje matemático. (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014).

Presmeg (1986, citado por Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014) afirma que la visualización puede ser considerada como un componente de gran importancia para los tipos de raciocinios que dan direccionalidad al aprendizaje matemático. Por eso, este autor categoriza cinco tipos de imágenes visuales que los estudiantes pueden realizar al buscar comprender un concepto o una idea matemática:

–Concreta, pictórica (fotos en mente).

–Imágenes patrón (relaciones puras de un esquema visual-espacial).

–Imágenes de memoria de fórmulas.

–Imágenes kinestésicas (corpóreas, de manipulación, de uso de dedos, entre otros).

–Imágenes dinámicas (en movimiento).

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, la geometría del doblado de papel se podría convertir en un medio que posibilite que un grupo de profesores logre procesos de visualización en las construcciones que se le proponga y, de esta manera, producir conocimiento geométrico escolar. Desde esta perspectiva, el doblado de papel le permite al profesor pasar de un proceso inicial de observar y tocar la figura, a un proceso más complejo, donde puede deducir propiedades de las figuras, relacionarlas, clasificarlas y llegar incluso, a producir conocimiento. Por lo tanto, la visualización no solo se relacionaría con representaciones de tipo visual, sino también de tipo táctil.

2.3.1. Conjeturas visuales.

De acuerdo con Santa y Jaramillo (en prensa), el doblado de papel es un medio que permite que los profesores, en un colectivo, puedan experimentar a través de construcciones de figuras con diferentes dobleces. La visualización sobre las figuras elaboradas, puede permitir la afirmación de diferentes conjeturas visuales, que pueden ser interpretadas, analizadas y debatidas en el colectivo, con el ánimo de llegar a una primera validación, mediante una prueba visual. El proceso no necesariamente es lineal. De la experimentación, los profesores pueden generar conjeturas visuales, o pueden iniciar debates o, incluso, pruebas visuales. De la misma manera ocurre con los demás procesos, tal y como se muestra en la figura 13.

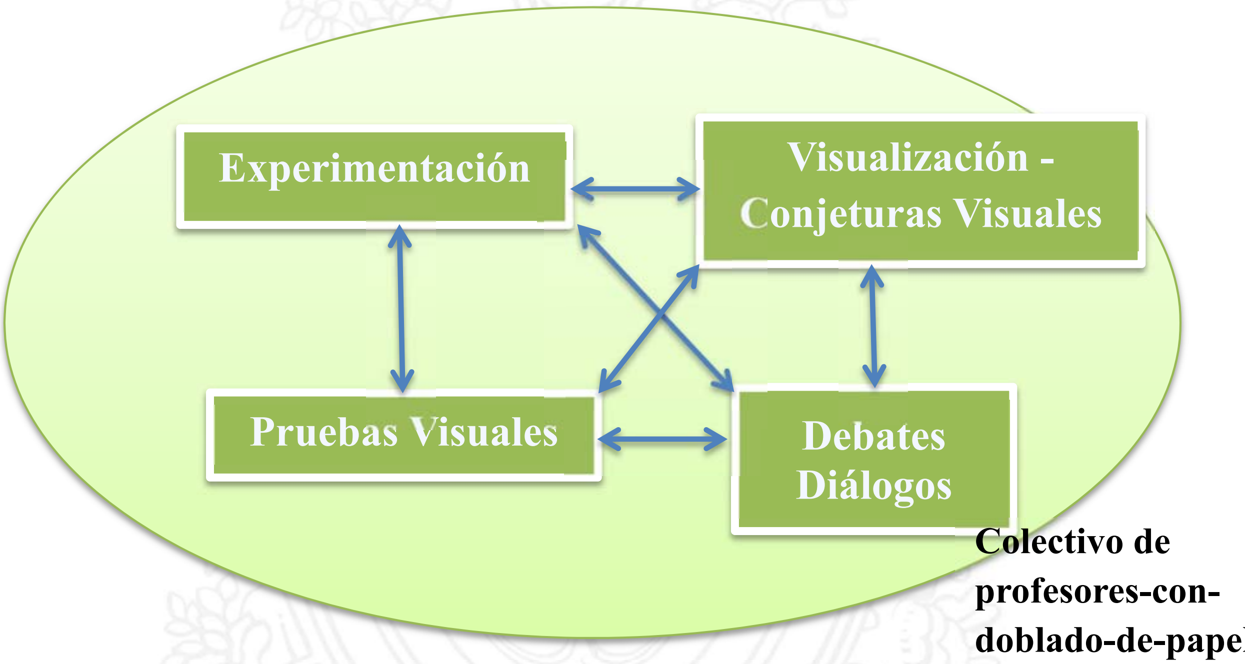


Figura 13: Generación y validación de una conjetura visual (Santa y Jaramillo, 2015).

Por otro lado, con respecto a las conjeturas visuales, Borba y Villarreal (2005) mencionan dos estudios en los que exponen la importancia de estas. Tales estudios son:

Borba y Villarreal (1998). Graphing calculator and reorganization of thinking: the transition from functions to derivate.

Este estudio se llevó a cabo en el año 1998, en un curso de Matemáticas Aplicadas de los primeros semestres de Biología, de la Universidad Estatal de Sao Paulo. Los estudiantes estaban trabajando con calculadoras gráficas y se les asignó la tarea de investigar lo que ocurría con las gráficas de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, cuando los parámetros a, b y c varían (Borba y Villarreal, 1998). En este caso, el uso de la calculadora permitió

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

que los estudiantes construyeran diferentes gráficas, que los inspiraron a formular sus primeras conjeturas visuales, que fueron analizadas y discutidas en un debate hecho por el colectivo de estudiantes. De hecho, hubo algunos intentos de formular argumentos de tipo visual, para justificar las conjeturas establecidas (Borba y Villarreal, 1998). De esta experiencia, los autores lograron validar las siguientes conclusiones (Borba y Villarreal, 2005):

–Participación de los estudiantes en el proceso de generar conjeturas visuales y descubrir resultados matemáticos desconocidos.

–Los estudiantes pudieron dar lugar a conjeturas de tipo grupal y al análisis de las conclusiones con todo el colectivo.

–La calculadora gráfica tuvo un papel importante en la generación de conjeturas en el colectivo de estudiantes.

–La tarea asignada creó un ambiente propicio para la investigación de los estudiantes.

–Se percibió que el enfoque experimental-con-tecnología se convirtió en un enfoque pedagógico.

–Surgieron otras conjeturas matemáticas interesantes con la asignación de la tarea.

Etcheverry, Evangelista, Reid, Torroba y Villarreal (2004). Fomentando discusiones en un ambiente computacional a través de la experimentación y la visualización.

Este estudio se llevó a cabo con un grupo de seis estudiantes mujeres voluntarias, que finalizaron un curso de Análisis Matemático I, de los programas de Profesorado en Matemática y Profesorado en Computación de la Universidad de la Pampa, Argentina, en el que se utilizó el software Derive 5. La tarea asignada estaba relacionada con el estudio de las gráficas de las secciones cónicas, en las cuales se debía analizar los cambios en las representaciones gráficas, al variar los parámetros de la expresión algebraica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. En particular, las estudiantes se centraron en analizar qué ocurría si variaba el parámetro C, en una expresión algebraica determinada.

Esta experiencia pudo mostrar cómo un colectivo de estudiantes-con-computadoras, logró generar conjeturas relacionadas con la información visual que brindaba la herramienta. En este caso, se estableció que las conjeturas formuladas no estaban ni en las mentes de las estudiantes ni fuera de ellas, en las pantallas del ordenador, se fueron generando en las interacciones con la tecnología. Incluso, si una conjetura particular se atribuía a un estudiante, el colectivo era el que condicionaba su aparición (Borba y Villarreal, 2005). De este estudio, los autores lograron validar las siguientes conclusiones (Borba y Villarreal, 2005):

−El enfoque de experimentación en la acción, mostró cómo la coordinación de múltiples representaciones puede ser un camino para la generación de conocimiento en el aula de clase.

−Las posibilidades visuales y experimentales que se dieron en los colectivos-con-tecnologías, permitieron proporcionarle a los estudiantes los medios para verificar las conjeturas visuales que formulan.

–Los profesores pudieron sugerir la necesidad de la prueba en un ambiente donde los estudiantes estaban coordinando diferentes representaciones.

–Los profesores pudieron permitir que algunos estudiantes hicieran pruebas formales; que otros, elaboraran pruebas visuales y, por último, que los demás establecieran argumentos empíricos, de acuerdo con los estilos de aprendizaje de cada estudiante.

2.4. Pertinencia del constructo teórico en la investigación

Borba y Villarreal (2005) puntualizan que "los medios empleados para comunicar, representar y para producir ideas Matemáticas condicionan el tipo de Matemáticas que son construidas y el tipo de pensamiento a ser desarrollado en esos procesos" (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p. 517). En este sentido, es fundamental considerar que tanto los artefactos utilizados, como la tecnología en general, deben ser vistos como parte esencial y constitutiva de un sistema del cual también hacen parte los seres humanos; en este escenario, su interrelación es la que propicia y determina la producción de conocimiento.

Aunque en muchos aspectos del constructo teórico *seres-humanos-con-medios* se hace alusión a los *medios* de manera general, los autores tienden a centrarse en las tecnologías de la información. Esto es, no mencionan específicamente el doblado de papel como un medio para generar conocimiento geométrico escolar. En este sentido, mi investigación pretende demostrar, con hechos concretos, que el doblado de papel es un medio con el que un colectivo de humanos puede producir conocimiento geométrico. Es decir, se caracterizará el colectivo de profesores-con-doblado-de-papel y la producción de conocimiento geométrico escolar que surja de sus interacciones, como una extensión del mencionado constructo teórico.

Por otro lado, como se estableció en apartados anteriores, el conocimiento es producido por un colectivo pensante de humanos-con-medios (Borba y Villarreal, 2005); sin embargo, hemos notado que el constructo teórico no da una caracterización precisa de esa producción de conocimiento. En este sentido, se hace necesario ampliar y profundizar las ideas relacionadas con la producción de conocimiento geométrico escolar, aspecto que se espera lograr también con el presente estudio.

Para ello, es necesario analizar que Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014) destacaron algunos elementos clave relacionados con el aprendizaje matemático, la investigación matemática y la experimentación con tecnologías, los cuales son los principales elementos del proceso que denominan pensar-con-tecnologías (ver tabla 1). Sin embargo, no profundizaron en dichas relaciones. De acuerdo con estos autores, el aprendizaje matemático se asocia con la producción de conocimientos matemáticos, con el pensamiento matemático y con la producción de significados; la investigación matemática se relaciona con la exploración matemática, la elaboración, comprobación y refinamiento de conjeturas, la demostración y evaluación, el carácter y el diseño investigativo; finalmente, la experimentación con tecnologías, se articula con el uso investigativo de tecnologías, con la complejidad del pensamiento matemático, con las conexiones entre representaciones, con la visualización, con el carácter y el diseño experimental.

Tabla 1: Pensar-con-tecnologías (Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014).

Aprendizaje matemático	Investigación matemática	Experimentación con tecnologías
Producción de conocimientos matemáticos.	Exploración matemática.	Uso investigativo de tecnologías.
Pensamiento matemático.	Elaboración de conjeturas.	Complejidad de pensamiento matemático.
Producción de significados matemáticos.	Comprobación y refinamiento de conjeturas.	Conexiones entre representaciones.
	Demostración y evaluación.	Visualización.
	Carácter investigativo.	Carácter experimental.
	Diseño investigativo[8].	Diseño experimental.

2.5. Críticas al constructo teórico (Bicudo, 2014)

Si bien se han establecido algunas críticas de fondo al constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, algunas de ellas referidas a la articulación de las ideas de autores como Tikhomirov (1981) y Lévy (1993), no es mi intención en este apartado presentar objeciones al respecto o profundizar sobre dichas críticas. En este sentido, solo las voy a mencionar, como parte de la revisión de la literatura.

[8] De acuerdo con Ponte, Brocado y Oliveira (2003, citados por Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014), un escenario de investigación matemática envuelve: el reconocimiento de la situación, exploración y preguntas iniciales; formulación de conjeturas; realización de comprobaciones y refinamiento de conjeturas; demostración y evaluación del trabajo realizado.

Algunos estudios llevados a cabo por Bicudo (2014), desde una visión hermenéutica, presentan ciertos cuestionamientos al respecto de las articulaciones elaboradas, los sentidos y significados de los términos que expresan el pensamiento de los autores de *seres-humanos-con-medios* (Borba y Villarreal, 2005), dado que enlazan ideas importantes del pensamiento filosófico y psicológico. Esas ideas, de acuerdo con Bicudo (2014), son densas, debido a que presentan diversas interpretaciones de estudiosos dedicados a esas temáticas.

Bicudo (2014) menciona que Borba y Villarreal (2005) no pretenden presentar una nueva teoría sobre cómo pensar con computadores en educación; pero sí proponen ideas, expresadas en forma de construcciones teóricas, basadas en la superación de la dicotomía entre el hombre y la tecnología, desde la mirada de la reorganización del pensamiento, referida por Tikhomirov (1981).

Considerando las reflexiones de Bicudo (2014), para Tikhomirov (1981), el pensamiento aparece como una actividad de resolver un problema. En este sentido, el computador sería visto como una herramienta de mediación que reorganiza la actividad humana; esa reorganización, de acuerdo con esta posición, sería una optimización intelectual o laboral. Por lo tanto, el pensamiento es visto como la capacidad de resolver y de formular problemas. Esa resolución abarcaría el contexto en el que el problema fue planteado y los razonamientos usados para filtrar los aspectos que orbitan alrededor de dicho problema para que pueda ser lógicamente resuelto. En esta perspectiva, Bicudo (2014) se cuestiona ¿es esa la reorganización del pensamiento que *seres-humanos-con-medios* asume?

Así mismo, Borba y Villarreal (2005) asumen la idea de pensamiento colectivo de Lévy (1993). Bicudo (2014) se pregunta al respecto: ¿están conectadas las proposiciones de esas dos teorías? Ella hace notar que las ideas de Tikhomirov (1981) y de Lévy (1993) son diferentes, pese a que en el constructo teórico se expongan aspectos relevantes de ambas teorías, sin un análisis pormenorizado de su articulación, para sustentar sus propósitos. Aun así, Bicudo (2014) explica que, desde el punto de vista de un trabajo científico, que toma la informática y la educación como objetivos, ese análisis filosófico es irrelevante.

En la perspectiva de Bicudo (2014), el significado de inteligencia colectiva de Lévy (1993) no habla de un concepto exclusivamente cognitivo; para él, la inteligencia significa *trabajar en común acuerdo* (las cursivas son de Bicudo, 2014), construyendo un proyecto global, en el que son consideradas las dimensiones éticas y estéticas, al igual que los aspectos tecnológicos u organizacionales. Siendo así, la constitución del colectivo no se da de modo inmediato o directo, sino que envuelve una complejidad en la que están presentes humanos con humanos, trabajando, colectivamente, en un objetivo común, junto a las tecnologías disponibles (Bicudo, 2014). Luego, para Lévy (1993) el colectivo es la unión entre el colectivo de humanos y las tecnologías

Bicudo (2014) se pregunta si el sentido de colectivos de *seres-humanos-con-medios*, se debe entender como un agrupamiento de elementos indisociables o como una constitución indisoluble. En el primer caso, los humanos y los medios se agregan, formando una totalidad que no se puede desasociar; en el segundo caso, se trata de una constitución que ya está entrelazada en la concepción de humanos que siempre son con-medios, es decir, no hay humanos sin medios.

Desde el punto de vista fenomenológico, Bicudo (2014) precisa que ella observa que el *con* hace alusión a *estar junto a*, en ese caso, al medio, el cual es tomado como comunicación vehiculada que expone lo comprendido e interpretado a través del lenguaje. Si se observa la concepción teórica de Tikhomirov (1981), esta conduce a la interpretación de que los humanos y los medios se agregan, formando una totalidad indisociable.

En la obra de *seres-humanos-con-medios*, los autores afirman que los guiones indican que los humanos están junto a los medios. De acuerdo con Bicudo (2014), el estar juntos, indica una relación dialógica entre el usuario del software y las interacciones del grupo, o de la persona que ejecuta y el software mismo. Así, hay dos componentes separados que se unen por el diálogo. Pero, ¿qué es diálogo para el constructo teórico?, se pregunta Bicudo (2014). ¿Se puede entender que los humanos con los otros se relacionan, dialógicamente, mediante (mediados) por el computador? ¿Se puede entender que los humanos entienden la lógica del programa diseñado y programado por los técnicos y se dirigen a este y este dialoga en esa dimensión de raciocinio? ¿El computador también se dirige al humano y con él dialoga en esa dimensión de lógica de su programa? (Bicudo, 2014).

Para finalizar, Bicudo (2014) explica que en el constructo teórico hay una unión de humanos con computador, de modo que los humanos y los computadores interaccionan, dialécticamente, tornándose actores del conocimiento. Esa dialéctica, de acuerdo con esta autora, es entendida a la luz de las teorías de reorganización del pensamiento, que se dan en una dimensión lógica y no, como una primera lectura podría sugerir, como un diálogo persona a persona, desde el punto de vista de la complejidad del ser humano. Por lo tanto, Bicudo (2014) no entiende *seres-humanos-con-medios* como una interrelación de actores que dialogan de igual a igual.

Aunque las bases teóricas del constructo teóricos *seres-humanos-con-medios* pueden estar en tela de juicio (Bicudo, 2014), en mi investigación voy a asumir que la producción de conocimiento geométrico escolar está condicionada por los medios usados (doblado de papel, procesos de experimentación y de visualización, lenguaje verbal o escrito, entre otros) y se genera en las interacciones del colectivo de profesores-con-doblado-de-papel. En este sentido, estoy asumiendo que el conocimiento es de naturaleza social, pues se produce en colectivos pensantes de profesores, cuando usan determinados medios, ya sea materiales o inmateriales.

3. Metodología

En este capítulo argumento las razones por las cuales el estudio es de corte cualitativo, desde las miradas de Hernández, Fernández y Baptista (2006, 2010), Borba (2012) y Bogdan y Biklen (2006); así mismo, presento las características de la investigación basada en diseño, considerando los aportes de Molina, Castro, Molina y Castro (2011), Doerr y Wood (2006), Lesh (2002), Lesh y Kelly (2000), entre otros. Posteriormente, describo de manera general los participantes de la investigación, los métodos de recolección de la información, la ruta metodológica y, por último, presento el cronograma general que seguí para la consecución del estudio.

3.1. Paradigma de investigación

Considerando que el objetivo general de la presente investigación es analizar cómo se produce conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel, entonces el paradigma abordado es de corte cualitativo. Esto se debe principalmente a que se interpreta a la luz de un fenómeno de tipo social (interacciones entre las personas y los medios) que no sigue un proceso definido (Hernández et. al., 2006). Es decir, no es una investigación lineal en la que los resultados dependen de la teoría o de las preguntas hechas a priori, sino en un sentido de constitución mutua, donde se genera una interacción y diálogo entre preguntas, visión del conocimiento, metodología, procedimientos, análisis y resultados (Santa y Jaramillo, 2015). Además, de acuerdo con Borba (2012), el conocimiento es una dimensión subjetiva del ser humano y, por lo tanto, los aspectos relacionados con esta acción deben ser representados por una investigación de tipo cualitativo, en la que se usen técnicas como la triangulación de métodos, la revisión de

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

pares, entre otros, que reflejen y consideren interpretaciones posibles y diferentes de la información.

El análisis considerado es de tipo inductivo, en tanto que se parte de la interpretación de las interacciones particulares que emergen dentro de colectivos específicos, hasta llegar a perspectivas teóricas más generales, relacionadas con la descripción de la producción de conocimiento geométrico escolar en colectivos de profesores-con-doblado-de-papel (Santa y Jaramillo, en prensa). En este sentido, se pretende explorar, describir y, posteriormente, generar perspectivas teóricas (Hernández et al., 2006). De hecho, atendiendo las directrices de Bogdan y Biklen (2006) sobre los investigadores cualitativos, estos tienden a analizar sus datos de forma inductiva. Por lo tanto, todas las situaciones que se den dentro de colectivos de profesores-con-doblado-de-papel son objeto de estudio: visualizaciones y sus correspondientes conjeturas visuales, pruebas visuales, interacciones entre las profesoras, entre las profesoras y la investigadora y entre las profesoras con el doblado de papel (experimentaciones con el doblado de papel), uso del lenguaje geométrico escolar, uso del lenguaje verbal y no verbal, entre otros.

Adicionalmente, se considera que el significado es un aspecto de vital importancia en un abordaje de corte cualitativo (Bogdan y Biklen, 2006); es decir, el significado que personalmente le atribuya a las interacciones que se generen al interior de colectivos de profesores-con-doblado-de-papel, teniendo presente que yo también hago parte de los mismos, me posibilita vivenciar ciertas situaciones que me permiten caracterizar dichos colectivos; estas características dependen en gran medida del contexto del cual emerge la información. Por lo tanto, este estudio se convierte en un proceso de tipo descriptivo

(Bogdan y Biklen, 2006), que surge de la comprensión de la realidad de los colectivos tanto en su lógica interna como en su especificidad (Sandoval, 2002). En esta perspectiva, la información se recolecta a través de observaciones, entrevistas, revisiones documentales, discusiones en grupo, interacción e introspección con grupos o colectivos, evaluaciones de experiencias, bitácoras, entre otras.

En este sentido, la fuente directa de la información es el ambiente natural de la institución educativa (o universitaria) de las profesoras (Bogdan y Biklen, 2006); por ello, las actividades se diseñaron y refinaron teniendo en cuenta el contexto de los colectivos de profesoras, sus necesidades, intereses, preocupaciones, miedos, entre otros. Además, todos los encuentros se llevaron a cabo al interior de la institución educativa (o universitaria), en varios lugares: salones, laboratorios, sala de profesores o sala de reuniones de rectoría, entre otros. Así mismo, se considera fundamental la historicidad del grupo de profesoras (sus experiencias laborales, académicas, profesionales) y su interpretación subjetiva de la realidad (que depende de sus vivencias, experiencias, prácticas pedagógicas, entre otros), para poder analizar y describir las características de los colectivos de profesores-con-doblado-de-papel en la particularidad de sus participantes. Adicionalmente, es importante mencionar que mis interacciones dentro de los colectivos también son objeto de estudio, pues también me considero una profesora en formación; de esta manera, mis observaciones fueron participantes, dado que pretendo hacer una "descripción auténtica" (Cerda, 2008, p. 244) de grupos sociales particulares.

El interés del desarrollo de la presente investigación, se centra en el análisis de cómo se produce conocimiento geométrico escolar en colectivos de profesores-con-doblado-de-papel, con el fin de descubrir, valorar o consolidar las posibles transformaciones que pueden experimentar los profesores, con respecto a sus conocimientos sobre geometría escolar y, en general, a su práctica pedagógica. De acuerdo con Ponte (2012), los profesores aprenden de su actividad y de la reflexión continua en torno a esta, cuando participan en prácticas sociales como los colectivos de profesores. Por lo tanto, esa producción de conocimiento se puede iluminar por la colaboración, la práctica como punto de partida de la formación y la investigación sobre la práctica misma (Ponte, 2012).

En este orden de ideas, me intereso más por el proceso de aprendizaje de los profesores, por la producción de conocimiento que emerge de las interacciones de los colectivos, que por los resultados o productos (Bogdan y Biklen, 2006). Responder a las preguntas ¿cómo se conforma un colectivo?, ¿cuál es el proceso seguido por los colectivos para la producción de conocimiento geométrico escolar?, ¿qué uso le dan los profesores a la producción de conocimiento que emerge de los colectivos?, entre otras, me permiten comprender e interpretar el proceso, que abarca todas las situaciones vividas durante los encuentros.

3.2. Diseño

El doblado de papel podría convertirse en un medio articulador entre el constructo teórico *seres-humanos-con-medios* y las ideas de desarrollo profesional docente de Ponte (2012), dado que posibilitaría la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge de colectivos-con-doblado-de-papel y que puede permear y consolidar el desarrollo profesional de cada uno de los profesores de los mencionados colectivos. De acuerdo con lo anterior, el proceso investigativo que se ha abordado es el siguiente: diseño y revisión de tareas de formación con doblado de papel, surgidas del diálogo continuo con los colectivos; puesta en marcha de dichas tareas al interior de los colectivos, considerando tanto aspectos disciplinares de la geometría, como el análisis de su enseñanza (geometría escolar); análisis de la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge de colectivos de profesores-con-doblado-de-papel; evaluación y refinación de las tareas de formación, considerando las experiencias vividas y el diálogo constante de colectivos de profesoras (Santa y Jaramillo, 2015). Por lo tanto, el diseño metodológico que orienta este estudio es una investigación de diseño o investigación basada en diseño (*design research*), desde las ideas de Molina, Castro, Molina y Castro (2011).

Estos autores precisan que la investigación de diseño o investigación basada en diseño, es un paradigma de investigación principalmente cualitativo, cuyo objetivo es analizar el aprendizaje en contexto a través de: (1) diseño y estudio de formas muy particulares de aprendizaje; (2) estrategias y herramientas usadas para la enseñanza; (3) el análisis de la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación. (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

La producción de conocimiento geométrico escolar en colectivos de profesores-con-doblado-de-papel, que puede surgir de la puesta en marcha de tareas de formación planteadas, se puede convertir en un escenario de aprendizaje matemático que, de acuerdo con Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014), se asocia con la producción de conocimientos matemáticos, con el pensamiento matemático y con la producción de significados. Este escenario puede ser un “ambiente de aprendizaje que sirve como contexto para la investigación” (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011, p. 76).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

El análisis continuo que se realiza durante el trabajo de campo y el análisis retrospectivo, permiten mejorar y refinar el producto que, en este caso, es el conjunto de tareas generadas, para explicar su funcionalidad y sugerir formas de adaptación a otros contextos o colectivos. Sin embargo, más allá del diseño y evaluación de estas actividades, la intención es explicar cómo se produce conocimiento geométrico escolar en colectivos de profesores-con-doblado-de-papel, a través de las interacciones que se posibilitan durante el desarrollo de las tareas, lo que permite incluir y reflejar un entendimiento de las relaciones entre el constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, la práctica que se lleva a cabo en el trabajo de campo y los instrumentos diseñados (tareas).

La investigación de diseño o investigación basada en diseño es una metodología de investigación que ha ganado una atención significativa en las últimas décadas en los Estados Unidos (Doerr y Wood, 2006; Lesh, 2002), debido principalmente a que, según Lesh (2002), el objetivo es que los investigadores o participantes (cuyas maneras de pensar están siendo investigadas) diseñen artefactos de pensamiento revelador usando un proceso que envuelve una serie de ciclos de prueba y revisores iterativos. En el caso de la presente investigación, no se usan este tipo de ciclos o iteraciones, pues el paradigma que la orienta es el cualitativo; sin embargo, se diseñan tareas de formación, con doblado de papel, que puedan permitir que las formas de pensar de los participantes evolucionen (Lesh, 2002) para que sean más críticas, reflexivas y discursivas.

Por otro lado, de acuerdo con Doerr y Wood (2006), este tipo de diseño debe cumplir con dos características importantes para investigar o desarrollar un repertorio de conocimientos profesionales para la enseñanza:

1) Debe tener la intención explícita de desarrollar un proceso mejorado o producto, con algún propósito dentro de un sistema inmerso en negociaciones y limitaciones.

2) Requiere de varios ciclos de análisis para mejorar el producto y la interpretación en múltiples niveles.

Con respecto a la primera característica, este estudio pretende analizar cómo un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel produce conocimiento geométrico escolar, a través del diseño y puesta en marcha de tareas con doblado de papel, las cuales surgen de las reflexiones, intereses, necesidades y el consenso del colectivo en el transcurso del trabajo de campo. Por lo tanto, se cumple, dado que se desarrolla y refina un producto que, en este caso, es el conjunto de tareas de formación, en un sistema complejo que comprende las interacciones entre las participantes, de manera particular y, de manera general, los procesos de enseñanza de la geometría escolar. Además, se generan perspectivas teóricas acerca de la producción de conocimiento geométrico escolar, que emergen de las interacciones dentro de colectivos y de los procesos de visualización y experimentación que se posibilitan con el doblado de papel; estas perspectivas teóricas podrían propiciar la extensión del constructo teórico *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005); pero estas perspectivas teóricas se tratarán con mayor detenimiento en el capítulo cinco, llamado *Resultados y discusión*.

Con respecto a la segunda característica, el tipo de análisis que se desarrolla durante este estudio, es un experimento de varios niveles, que pertenece a la categoría más amplia de investigación de diseños (Doerr y Lesh, 2003). En esta perspectiva, la recolección e interpretación de la información en algunos niveles, propician la evaluación, refinamiento o depuración de las tareas de formación, en consenso con el colectivo, con el fin de que sean cada vez más útiles a investigadores, profesores y estudiantes (Doerr y Wood, 2006). Los niveles de interacción, interpretación y análisis que se siguieron durante el trabajo de campo, fueron los descritos en la tabla 2 (Lesh y Kelly, 2000; Doerr y Wood, 2006), pero centrando la atención en el nivel 3: investigadores y en el nivel 2: profesores. El nivel 1: estudiantes, no fue objeto de estudio de la presente investigación, por la delimitación que se hizo de la pregunta y de los objetivos.

Tabla 2: El diseño experimental multiniveles (Lesh y Kelly, 2000; Doerr y Wood, 2006).

Nivel 3: Investigadores	Con la ayuda de estudiantes y profesores, los investigadores desarrollan modelos que dan sentido al aprendizaje de alumnos y profesores, reinterpretando y extendiendo sus propias teorías.
Nivel 2: Profesores	Los profesores trabajan con colegas e investigadores, para describir, explicar y dar sentido al aprendizaje del alumno.
Nivel 1: Estudiantes	Equipos de estudiantes resuelven, con la ayuda de profesores, actividades matemáticas por medio de las cuales, ellos construyen, revisan y refinan sus interpretaciones de una situación problema.

En el nivel 3, tanto yo como investigadora principal, como mi asesor, desarrollamos algunas perspectivas teóricas, basados en las experiencias vividas conjuntamente con las profesoras a lo largo del trabajo de campo, que nos permitieran explicar cómo se produce conocimiento geométrico escolar, en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel, a través del diseño y puesta en marcha de tareas de formación, que fueron refinadas durante el proceso de interacción al interior del colectivo, en el transcurso del trabajo de campo. En el nivel 2, los profesores trabajaron con sus pares y conmigo, como investigadora participante, desarrollando las actividades propuestas y diseñando otras, de acuerdo con sus necesidades, intereses y problemas, para describir y dar sentido al aprendizaje de la geometría de los estudiantes. En el nivel 1, los profesores implementaron algunas tareas en el aula de clase, con colectivos de estudiantes, pero estos no fueron objeto de estudio de la investigación.

En el transcurso del desarrollo de la investigación, tanto en el nivel 3, como en el nivel 2, centro la atención en todos los episodios de interacción que emergen al interior de colectivos de profesores-con-doblado-de-papel, con el fin de esclarecer aquellas situaciones que generaron "cambio, crecimiento o desarrollo" (Cerda, 2008, p. 85) en la producción de conocimiento geométrico escolar. Por lo tanto, considero unidades de análisis, los episodios en los cuales se observaron las diferentes interacciones, las visualizaciones, experimentaciones, usos del lenguaje, entre otros, que pudieron emerger, todo esto en concordancia con el constructo teórico abordado.

Por otro lado, este tipo de diseño trae consigo dos desafíos. El primero, es lograr una articulación entre las interpretaciones de cada nivel, de modo que sean probadas, revisadas y progresivamente compartidas y generalizadas a nuevos participantes y nuevos contextos (Doerr y Wood, 2006). Sin embargo, los objetivos específicos del estudio: caracterizar el colectivo de profesores-con-doblado-de-papel, a la luz del constructo teórico *seres-*

humanos-con-medios fundamentado por Borba y Villarreal (2005) y describir la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge de dicho colectivo, solo se les puede dar consecución a través de la articulación entre tales niveles; esta articulación es fundamental, pues es la que permite la generación de perspectivas teóricas acerca de la producción de conocimiento geométrico escolar mediante el doblado de papel y del colectivo de profesores.

El segundo desafío está en estrecha relación con las dificultades que se pueden presentar en la proyección de las tareas en el colectivo de profesores, pues estas deben revelar los modos actuales del pensamiento docente, de tal manera que puedan ser revisados y refinados (Doerr y Wood, 2006). De todos modos, el segundo desafío es superado al dar consecución a los objetivos específicos, de los cuales surge la tarea de investigación relacionada con el diseño de tareas que posibiliten la producción de conocimiento geométrico escolar a través del medio de la geometría del doblado de papel.

En el transcurso mismo de afrontar los dos desafíos mencionados anteriormente, surge un desafío mayor para el presente estudio, que es consolidar perspectivas teóricas sobre la producción de conocimiento geométrico escolar, que emerge de colectivos de profesores-con-doblado-de-papel. Estas perspectivas se van depurando o refinando durante el trabajo de campo; posteriormente, son revisadas y compartidas con otros participantes e investigadores, con la intención de fundamentar futuros trabajos de investigación o posibilitar aportes a la investigación en Educación Matemática.

3.3. Participantes

Teniendo en cuenta que el estudio pretende caracterizar colectivos de profesores-con-doblado-de-papel, se lograron conformar dos grupos de profesoras. Las participantes consideradas del primer grupo, fueron algunas profesoras de una Institución Educativa pública de la ciudad de Medellín que poseían, en primer lugar, un interés marcado en la geometría escolar, en particular, en el uso del doblado de papel para la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos y, en segundo lugar, un deseo por generar, evaluar y poner en práctica algunas estrategias metodológicas para el uso de este medio en el aula de clase.

Cabe resaltar que el primer grupo de participantes estuvo conformado por cuatro personas: tres profesoras de una institución educativa pública y la investigadora. Las profesoras se invitaron a participar de manera voluntaria, siempre y cuando manifestaran tener un interés importante en la posible producción de conocimiento geométrico escolar mediante el doblado de papel.

El segundo colectivo se conformó entre una estudiante de maestría y su respectiva asesora (en este caso, era yo, en calidad de asesora e investigadora); ambas interaccionamos con el doblado de papel para generar una guía curricular que le permitiera a los estudiantes del grado décimo, la comprensión del concepto de volumen mediante el doblado de papel. Pese a que el grupo estaba conformado por solo dos profesoras, los diálogos y los procesos de experimentación y de visualización con doblado de papel, pudieron propiciar la concreción de una tesis de maestría. Las relaciones de jerarquía entre asesora y estudiante, fueron superadas, pues se posibilitó un trabajo colaborativo, con un interés común: generar conocimiento para consolidar una investigación a nivel de maestría.

Ambos grupos de profesoras interaccionaron durante varios encuentros y solo cuando las relaciones entre los miembros dejaron de ser jerárquicas y se generó un ambiente de confianza, apoyo mutuo, respeto y espontaneidad, los grupos se convirtieron en colectivos. En la perspectiva de Fiorentini (2008), en un colectivo colaborativo:

> […] todos trabajan conjuntamente (co-laboran) y se apoyan mutuamente, tratando de alcanzar objetivos comunes negociados por el colectivo del grupo. En la colaboración, las relaciones, por tanto, tienden a ser no jerárquicas, teniendo dirección compartida y corresponsabilidades para la conducción de las acciones. (p. 46)

De acuerdo con lo anterior, para el desarrollo de una investigación basada en diseño, es necesario tener en cuenta la generación de un ambiente ideal para la conformación de colectivos de profesores, de tal manera que pueda convertirse en un ambiente natural para la recolección de la información, de acuerdo con Bogdan y Biklen (2006). De hecho, los colectivos se conforman con profesores "dispuestos a compartir espontáneamente algo de interés común, pudiendo presentar visiones y entendimientos diferentes sobre los conceptos matemáticos, los saberes didáctico-pedagógicos y experiencias relativas a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática" (Fiorentini, 2008, p. 49).

En otras palabras, las personas que conforman los colectivos lo hacen por voluntad propia; dentro de este, se pueden generar ambientes de apoyo mutuo, espontaneidad, confianza y respeto; se pueden posibilitar reflexiones sobre y para la práctica pedagógica. En este sentido, Ponte, Zaslavsky, Silver, et al. (2009), afirman que los profesores aprenden sus conocimientos profesionales, aprenden los valores profesionales, aprenden sobre sus roles profesionales y desarrollan su identidad, en estrecha relación con otros profesores.

3.4. Métodos de recolección de la información

Durante el proceso de recolección de información y análisis de la misma, es importante considerar que el investigador cualitativo sigue tomando decisiones, "modificando, cambiando, alterando o rediseñando su trabajo" (Rodríguez, Gil y García, 1999, p. 74), lo que hace el estudio flexible para poder responder a la pregunta de investigación y dar consecución a los objetivos planteados. En lo referente a este estudio, durante la recolección de la información, no solo se transforman algunas ideas generales del trabajo (delimitación del problema, pregunta y objetivos), sino que se deben tomar algunas decisiones frente a los métodos de obtención de los datos. De acuerdo con lo anterior, la información fue tomada de las siguientes fuentes:

–Observaciones: Durante las observaciones, el investigador cualitativo debe registrar bien los acontecimientos para ofrecer una descripción relativamente incuestionable de la realidad que servirá para análisis posteriores y, claro está, el informe final (Stake, 1999). Además, la observación cualitativa implica mantener un papel activo y una reflexión permanente sobre los hechos (Hernández et al., 2006). De acuerdo con estas ideas, todas las tareas de formación que involucran el uso del doblado de papel y que se desarrollan dentro de los colectivos, son observadas y grabadas en audio y video. Su análisis posterior, junto con la triangulación con otras fuentes de información, debe permitir identificar las interacciones de los grupos al utilizar este medio en la producción de conocimiento geométrico escolar, para describir tanto esta producción, como los colectivos conformados.

Dado que mis interacciones, como investigadora acompañante del proceso dentro de los colectivos, también son motivo de análisis, entonces la mayoría de observaciones son participantes (Rodríguez et al., 1999).

–Material de los profesores que emerge de todas las actividades propuestas. De acuerdo con Hernández et al. (2006), el investigador le puede solicitar a los participantes generar algún material determinado a propósito del estudio mismo. En este orden de ideas, se les solicita a los profesores entregar todas las construcciones que con el doblado de papel pudieron generar, documentos escritos y respuestas a preguntas (bitácoras), que surgieron de las actividades planteadas en el marco del estudio, para revisarlas profundamente con el fin de describir la producción de conocimiento desde esta fuente de información y relacionarla con las demás fuentes.

–Entrevistas: Estas se definen como reuniones que permiten el intercambio de información entre un entrevistador y el entrevistado u otros entrevistados (Hernández et al., 2006) con el propósito de lograr una comunicación y la construcción conjunta de significados con respecto a un tema particular (Janesick, 1998, citado por Hernández et al., 2006). Estas son importantes, dado que pueden surgir descripciones e interpretaciones que se obtienen directamente de otras personas. Por lo tanto, en la presente investigación se realizan entrevistas semiestructuradas individuales y grupales (discusiones en grupo o interacción e introspección con grupos) para analizar la producción de conocimiento dentro de colectivos de profesores-con-doblado de papel, que se verá reflejada en visualizaciones, construcciones con el doblado (experimentaciones), uso del lenguaje verbal y no verbal, entre otras. En este sentido, se analizan “episodios de interacción” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 413). Cada una de estas entrevistas es grabada en audio y video, con previa autorización firmada de los participantes y pleno consentimiento ético informado.

–Diarios de campo o bitácoras: Según Hernández et al. (2006), una bitácora es un diario personal donde se incluyen: "descripciones del ambiente o contexto; mapas; diagramas, cuadros y esquemas; listados de objetos o artefactos recogidos en el contexto, así como fotografías y videos que fueron tomados" (p. 545). En este sentido, todas las anotaciones que como investigadora realice en el diario de campo, también son objeto de análisis, dado que, como se dijo antes, mis interacciones hacen parte de los colectivos y de la producción de conocimiento que surja de estos; adicionalmente, se hace necesario este tipo de método de recolección, para poder analizar el nivel 3 de investigadores. Por otro lado, se les solicita a los profesores realizar también un diario de campo o bitácora, donde describen sus producciones conceptuales, retrocesos, conjeturas visuales, experiencias vividas, transformaciones posibles en el aula de clase, propuestas de enseñanza, entre otras, que se desarrollan dentro de los colectivos a través de las tareas planteadas, con el propósito de observar las diferentes transformaciones ocurridas en cada uno de los profesores.

3.5. Ruta metodológica

Se espera que la producción de conocimiento geométrico escolar se logre a través de las interacciones de colectivos de profesores-con-doblado-de-papel; la concreción de esta situación podrá visualizarse con mayor profundidad en el análisis y triangulación de la información (capítulos 4 y 5). Para dar respuesta a la pregunta de investigación y dar consecución a los objetivos, se sigue la ruta metodológica que se presenta a continuación:

−Conformación de colectivos de profesores. En este caso, el primer colectivo estuvo conformado por tres profesoras que, por voluntad propia, decidieron participar del estudio y, el segundo, por la profesora que estaba adelantando sus estudios de maestría.

−Interacción de los colectivos a través de tareas de formación que involucraron el doblado de papel y su axiomática.

−Entrevistas grupales e individuales, cuyo análisis y triangulación con otras fuentes de información, van a permitir caracterizar la producción de conocimiento geométrico escolar y los colectivos conformados (ver capítulos 4 y 5, de análisis y resultados).

−Diseño y puesta en marcha de tareas de formación en las que la producción de conocimiento esté mediada por las interacciones de los colectivos de profesoras-con-doblado-de-papel; estas tareas surgieron de las necesidades, intereses y problemas de los colectivos y se fueron depurando durante el trabajo de campo.

−Análisis de la información recolectada a través de las diferentes fuentes de información.

−Triangulación de los análisis individuales, para generar un análisis retrospectivo, considerando los niveles 2 y 3 de la investigación basada en diseño.

3.6. Cronograma

Parte de la ruta metodológica anterior se puede visualizar en la siguiente tabla 3, donde se presenta el cronograma de trabajo general de la investigación.

Tabla 3: Cronograma general del estudio.

Semestre / Actividad	1	2	3	4	5	6
Revisión bibliográfica y análisis del estado del arte.	X	X	X	X	X	X
Cursos de capacitación.	X	X	X	X	X	X
Diseño de instrumentos para recolectar la información.	X	X	X	X	X	
Realización de observaciones y entrevistas.			X	X	X	X
Revisión del material de los profesores.		X	X	X	X	X
Transcripción del material, lectura y relectura del mismo.		X	X	X	X	X
Análisis e interpretación de la información.		X		X	X	X
Elaboración de al menos un artículo.		X		X	X	X
Divulgación en encuentros locales, regionales, nacionales y/o internacionales.		X	X	X	X	X
Análisis de resultados y conclusiones.					X	X
Informe final				X	X	X

4. Análisis de los episodios

En esta parte del estudio, hago referencia a la forma en que analicé la información, explicando el proceso de triangulación específico que realicé por cada episodio, en el cual contrasté los métodos de los cuales emergió la información (análisis de cada episodio); posteriormente, realicé un análisis retrospectivo general, para dar respuesta a la pregunta de investigación y que consistió en revisar mis observaciones como investigadora, el marco referencial y el análisis de cada episodio (capítulo 5), para lograr una tematización de las categorías. Por lo tanto, en este capítulo presento la conformación de los colectivos de profesoras, una caracterización de las participantes, las tareas de formación abordadas y desarrolladas durante los encuentros y las situaciones vividas por los colectivos de profesoras-con-doblado-de-papel; posteriormente, me centro en la triangulación específica, con el análisis de cada uno de los episodios.

4.1. Triangulación

Después de recolectada y agrupada la información, se procede a hacer un análisis de las interacciones que se generaron en cada una de las tareas de formación desarrolladas. Para ello, se transcribieron todos los videos, se escanearon los registros y se subieron como evidencias al software Atlas.ti (versión 7.5.7, con licencia de estudiante 72771-50E66-93186-2S383-108CD). El análisis de cada episodio se hizo a través de un proceso de triangulación metodológica (triangulación de información procedente de diferentes métodos de información), en el nivel 2 de profesores, del cual surgieron algunos códigos, los cuales fueron agrupados en familias de códigos.

Cabe resaltar, de acuerdo con Soares y Borba (2014), que un aspecto fundamental que se debe considerar en el proceso de triangulación, es que las interpretaciones que surgen de cada fuente de información, no pueden ser vistas como una validación de la otra, ya que esta información fue construida y extraída de diferentes condiciones. En este sentido, el objetivo de la triangulación en este estudio, era ampliar la comprensión y el análisis de las situaciones que se dieron al interior de los colectivos de profesoras-con-doblado-de-papel, considerando las evidencias que resultaron de los diferentes métodos usados.

Después del análisis de cada episodio, se hizo un análisis retrospectivo de todos los episodios, de manera simultánea, y se consideró el nivel 3 de la investigación basada en diseño (capítulo 5). A su vez, se generó un sistema categorial completo, que dio cuenta no solo de la descripción de la producción de conocimiento geométrico escolar que emergió de los colectivos de profesoras-con-doblado-de-papel, sino también de la caracterización de los colectivos mismos (capítulo 5).

Con miras a posibilitar la tematización[9] del sistema categorial surgido y a propiciar la interpretación general de los temas que puedan responder la pregunta de investigación y dar consecución a los objetivos, se hizo un análisis global más refinado (Lincoln y Guba, 1985) entre las observaciones de la investigadora (registradas en el diario de campo), el marco referencial (constructo teórico y antecedentes) y el análisis de los episodios (en el que se consideraron las observaciones, revisiones documentales y entrevistas). Por lo tanto, de

[9] En el contexto de este estudio, se asumirá la tematización como tematización generalizadora, considerada como el proceso mediante el cual “el investigador buscará relacionar la teoría sustantiva construida a partir de los momentos anteriores con la teoría formal o teoría ya existente sobre el ámbito de pertinencia de la investigación correspondiente. Es, en otros términos, el momento de la construcción teórica” (Quintana, 2006, p. 51).

dicho proceso debe surgir: la caracterización de los colectivos de profesores-con-doblado-de-papel, a la luz del constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, y la descripción de la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge de los mencionados colectivos. En la figura 14 se puede observar el proceso seguido.

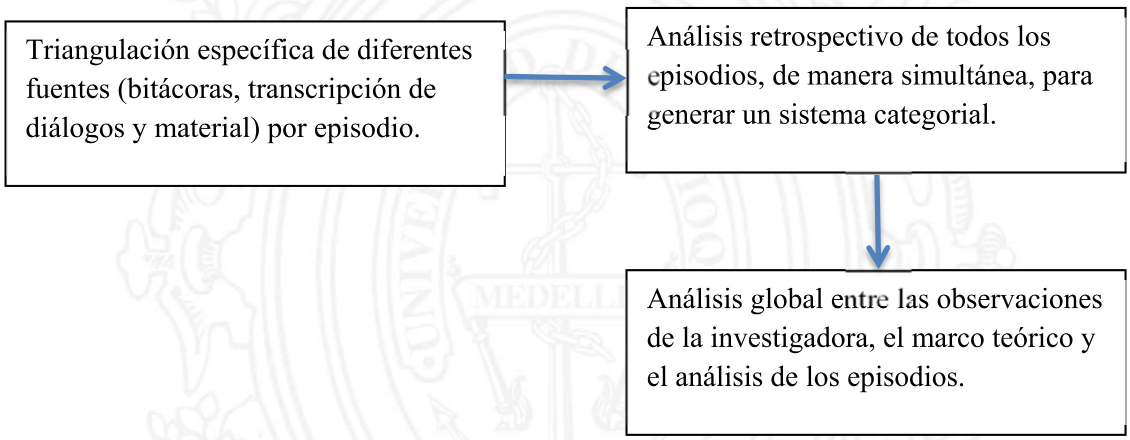


Figura 14: Explicación del proceso de análisis.

Tal como se observa en la figura 14, en el análisis de cada uno de los episodios se realiza una triangulación específica entre las diferentes fuentes (bitácoras, transcripciones, material de las profesoras, entre otros); de esta triangulación surgen un conjunto de códigos, que son agrupados en varias familias de códigos. Posteriormente, en el capítulo 5, se realiza un análisis retrospectivo de todos los episodios, en el que se agrupan las diferentes familias de códigos, generando un sistema categorial. Para dar respuesta a la pregunta de investigación y dar consecución a los objetivos planteados, se realiza una triangulación general entre las observaciones de la investigadora, el marco referencial y el análisis de los episodios, para explicar las categorías a la luz de la teoría y de lo que emergió en el trabajo de campo, generando, así, una tematización que caracterice la producción de conocimiento geométrico escolar y el colectivo de profesores-con-doblado-de-papel.

4.2. Conformación de colectivos

4.2.1. Colectivo de profesoras de la Institución Educativa.

Para desarrollar el trabajo de campo de la investigación y, con la necesidad de conformar un colectivo de profesores interesados en los procesos de producción de conocimiento geométrico escolar con doblado de papel, se contactó a los directivos docentes de una Institución Educativa pública de la ciudad de Medellín. A la reunión planeada asistieron el señor rector, el coordinador académico y la coordinadora de disciplina, además, el asesor del presente estudio y la investigadora.

Se hizo una presentación general del estudio, enfatizando en algunos aspectos básicos, tales como génesis del planteamiento del problema y de la pregunta de investigación, objetivos generales y específicos para pretender responder dicha pregunta, además ciertas observaciones sobre la inmersión en el campo. De esta manera, se les planteó la posibilidad de conformar un grupo de estudio con algunos profesores del establecimiento educativo, que tengan intereses comunes en la enseñanza de la geometría y cuyo medio para la producción de conocimiento fuera el doblado de papel.

Los directivos de la institución dieron su aval para invitar a los profesores de matemáticas de secundaria y a los de primaria, para conformar un grupo que hiciera parte del trabajo de campo. Para ello, se decidió enviar una carta con algunas especificaciones del estudio y con la información de la mencionada reunión, que se llevaría a cabo en las instalaciones de la sede principal del establecimiento y cuyo propósito fuera esclarecer algunos puntos relacionados con las generalidades de la investigación y los aspectos éticos de confidencialidad.

A la reunión asistieron dos profesoras que ejercen en la básica primaria y otras cinco que laboran en la básica secundaria. Se les hizo la presentación del estudio y se les invitó a participar de este. Todas se mostraron interesadas en conformar un grupo, dado que manifestaron tener vacíos conceptuales en geometría y deseaban mayor fundamentación en esta parte de las matemáticas, para poder acercarse a su enseñanza en el aula de clase. Estos aspectos permitieron conformar un grupo de profesoras que, mediante el desarrollo de la investigación y las interacciones continuas (generación de un ambiente de confianza, apoyo, respeto, espontaneidad, voluntad, academia, entre otros), podrá constituirse en un colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel, de acuerdo con los propósitos del estudio.

4.2.2. Colectivo de profesoras programa de maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

Conformado este grupo de estudio en la Institución Educativa, se constituyó un segundo grupo de profesoras, en el marco de un programa de maestría virtual en Enseñanza de las Matemáticas, del que hicieron parte una estudiante de maestría y, yo, en calidad de asesora e investigadora; ambas nos reuníamos periódicamente, durante un semestre, para dialogar y discutir temas de geometría de doblado de papel y de comprensión en Educación Matemática. En el transcurso de ambos estudios (su tesis de maestría y mi tesis doctoral), se generaron interacciones que posibilitaron un ambiente de confianza, trabajo colaborativo e igualdad de posiciones (superando la relación asesora-estudiante), situación que podría permitir, en un momento dado, que el grupo se convierta en un colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel.

De las interacciones con la profesora, que nombraré Molly, recolecté la siguiente información: narración de las situaciones vividas durante los encuentros, escrita por la participante; respuesta escrita a ciertas preguntas específicas y, su tesis de maestría. La triangulación de estas tres fuentes de información, me permitió establecer algunas familias de códigos, las cuales se consideran en el análisis retrospectivo del capítulo cinco, sin el ánimo de comparar ambos colectivos, sino con la intención de caracterizar la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge de colectivos-con-doblado-de-papel. El análisis de este colectivo se presenta en la sección 4.5.8.

4.3. Participantes.

4.3.1. Colectivo de profesores de la Institución Educativa

El grupo que se conformó, después de atender a las generalidades de la investigación, fue de seis profesoras[10], de las cuales dos eran de primaria y las otras cuatro de secundaria. Tres de las profesoras eran del área de matemáticas y, las otras tres, de otras áreas (química) o de primaria. En el transcurso de las reuniones realizadas, se percibieron las siguientes características: es un grupo heterogéneo, existe una clara disposición para participar y se evidencia un respeto mutuo entre las participantes, así la experiencia en años de docencia de ciertos participantes fuera variada. Algunas de ellas, por voluntad propia y

[10] Debido a esta situación, en algunos apartados del documento me voy a referir a las profesoras, en género femenino, para hablar de las participantes de la investigación.

considerando los aspectos éticos sobre confidencialidad, decidieron usar como seudónimo su propio nombre. Otras, eligieron el seudónimo que más les llamaba la atención. A continuación, se dará una breve caracterización de cada una de ellas, considerando que ellas decidieron, por voluntad propia, que se presentaran algunos rasgos de su personalidad:

Margarita: Profesora de primaria, con más de 20 años de experiencia docente. Es normalista, con título de Licenciada en Educación Básica, con énfasis en Ciencias; es Especialista y Magíster. Estudió algunos semestres de Matemáticas. Ha trabajado tanto en el sector público como en el privado. Manifestó disfrutar mucho de la docencia. Compartió algunos aspectos de su personalidad con el grupo de maestros: fortaleza como persona, el respeto; debilidad como persona, el silencio; un hobby, escuchar música; una pasión, enseñar y aprender; fortaleza como docente, apertura al cambio; debilidad como docente, los niños.

Criss: Profesora de matemáticas de secundaria. Tiene, aproximadamente, ocho años de experiencia docente. Es Licenciada en Matemáticas y Física. Estudió seis semestres de Física. Ha trabajado tanto en el sector público como en el privado. Compartió algunos aspectos de su personalidad con el grupo de maestros: fortaleza como persona, la tranquilidad; debilidad como persona, ser solitaria; un hobby, escuchar música; una pasión, la astronomía; fortaleza como docente, la paciencia; debilidad como docente, los estudiantes y las situaciones que presentan.

Elizabeth: Profesora de matemáticas de secundaria. Tiene más de 20 años de experiencia docente. Es normalista, Licenciada en Matemáticas y Magíster en Enseñanza de las Ciencias. Ha trabajado tanto en el sector público como en el privado, con toda clase de población: primera infancia, niños, adolescentes, adultos y ancianos. Adicionalmente, se ha desempeñado como directiva docente y profesora universitaria. Compartió algunos aspectos de su personalidad con el grupo de maestros: fortaleza como persona, la responsabilidad; debilidad como persona, ser acelerada; un hobby, leer; una pasión, viajar; fortaleza como docente, la dedicación y la creatividad; debilidad como docente, su expresión rígida.

Vicky: Profesora de química de secundaria. Estudió siete semestres de química pura. Es Licenciada en Ciencias Naturales. Le gusta mucho estudiar y participar en grupos, como por ejemplo los del parque Explora o grupos de teatro. Compartió algunos aspectos de su personalidad con el grupo de maestros: fortaleza como persona, la paciencia; debilidad como persona, ser estricta; un hobby, el arte; una pasión, el teatro; fortaleza como docente, capacidad de sorprenderse; debilidad como docente, los vacíos conceptuales.

Natalia: Profesora de matemáticas de secundaria. Es Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, es Especialista en Didáctica de las Matemáticas y Magíster en Enseñanza de las Ciencias. Tiene, aproximadamente, ocho años de experiencia docente, tanto en el sector público como en el privado. Le gusta el origami y lo ha trabajado desde hace algunos años. Compartió algunos aspectos de su personalidad con el grupo de maestros: fortaleza como persona, la prudencia; debilidad como persona, indecisión; un hobby, aprender manualidades y ver televisión; una pasión, enseñar y aprender a vivir; fortaleza como docente, considerar ganancia todo lo que le dé a los estudiantes; debilidad como docente, la paciencia extrema.

María: Profesora de primaria. Es Licenciada en Educación Especial. Manifestó no tener formación en matemáticas, pero le gusta estudiar y tiene disposición para aprender. Ha trabajado tanto en el sector privado, como en el público. Compartió algunos aspectos de su personalidad con el grupo de maestros: fortaleza como persona, el respeto y la sorpresa; debilidad como persona, sentirse lenta para ciertas situaciones; un hobby, leer; una pasión, enseñar y conocer; fortaleza como docente, escuchar al estudiante; debilidad como docente, la inconformidad.

Algunas participantes del colectivo se fueron retirando, a medida que avanzaban los encuentros, debido a diversas situaciones, algunas de las cuales tuvieron que ver con la poca disposición horaria para atender actividades fuera de la jornada laboral, adquisición de otros compromisos o calamidad doméstica por enfermedad de algún pariente. Debido a la situación anterior, el colectivo quedó conformado, finalmente, por las tres profesoras (Elizabeth, Vicky y Natalia) y la investigadora. Por lo tanto, los análisis se hicieron sobre las interacciones que se dieron entre estas. En particular, revisé y analicé el material (construcciones con doblado de papel y registros escritos en las bitácoras) de estas tres profesoras, junto con mis observaciones como investigadora participante.

Considerando los encuentros realizados, se observó que el grupo estuvo conformado por profesoras que mostraron disposición para compartir, de manera espontánea, algo de su interés: saberes, experiencias académicas, experiencias laborales, experiencias personales, entre otros; pese a que todas presentaron visiones y entendimientos diferentes sobre los conceptos matemáticos, tuvieron la posibilidad de analizar y consensuar, en el colectivo, saberes didáctico-pedagógicos y experiencias relativas a las prácticas pedagógicas, relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. En otras palabras, las profesoras vinculadas al colectivo, lo hicieron por voluntad propia; al interior de este, se propició un ambiente de apoyo, espontaneidad, confianza y respeto (Fiorentini, 2008).

4.3.2. Colectivo de profesoras programa de maestría en Enseñanza de las Matemáticas

Como lo mencioné anteriormente, el segundo colectivo estuvo conformado por una estudiante de maestría y su respectiva asesora. Las características de la profesora, son las siguientes:

Molly es formada en química, pero es profesora de química y matemáticas en la institución donde labora; en el momento de interactuar en el colectivo, era estudiante del programa virtual de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, del Instituto de Matemáticas de una universidad pública de la ciudad de Medellín. Actualmente, es profesora de básica secundaria de una Institución Educativa pública de un municipio de Antioquia. Es una profesora responsable, introvertida y muy interesada en reflexionar sobre su práctica pedagógica en geometría, a pesar de tener formación inicial en otra área. Cabe resaltar que la profesora Molly no pudo hacer parte del primer colectivo, dado que su disponibilidad horaria y la distancia considerable desde su municipio a la otra Institución Educativa del municipio de Medellín, no lo permitieron.

4.4. Tareas de formación desarrolladas en el colectivo de la Institución Educativa

4.4.1. Primer Episodio. Reconocimiento como personas y como profesoras.

El primer encuentro con las profesoras del grupo, se enfocó en el reconocimiento personal, académico y profesional de cada una de las participantes, para intentar propiciar un ambiente de confianza, respeto, apoyo mutuo y espontaneidad, que sería el primer escenario para la conformación de un colectivo. Cada una de las profesoras tuvo la oportunidad de compartir experiencias con sus compañeros de trabajo, manifestando aspectos que consideraba relevantes de su vida, de sus estudios, de su experiencia laboral y personal. Es importante resaltar que, a pesar de que todas asumían compromisos académicos propios de la institución, desde años atrás, algunas de ellos se sintieron sorprendidas al conocer situaciones académicas y laborales vividas (carreras profesionales truncadas, experticia en otros campos del saber, desplazamiento forzoso, entre otras), que ignoraban de sus compañeras.

Posterior al conversatorio de experiencias vividas, se realizó la construcción de un cubo, con doblado de papel, con tres intencionalidades: en primer lugar, dialogar acerca de los conceptos geométricos que están involucrados en la construcción del módulo y del cubo mismo; en segundo lugar, usarlo como pretexto para que cada profesora tenga la oportunidad de compartir algunos rasgos de su personalidad y, en tercer lugar, llegar a una expresión para calcular el volumen del cubo, en función del lado de longitud L de la hoja de papel con la que se inició la construcción. En las figuras 15 y 16, se muestra el mosaico de pliegues para la elaboración de los módulos y el ensamblaje del cubo.

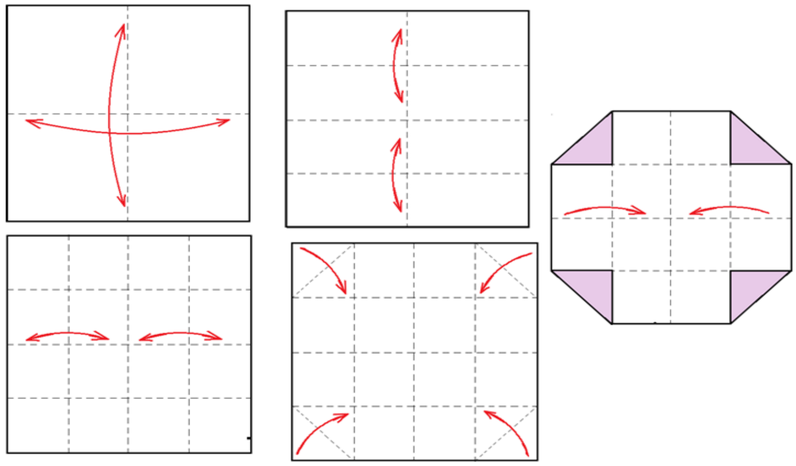


Figura 15: Mosaico de pliegues para la construcción del módulo. (Lopera, 2014, pp. 62-63).

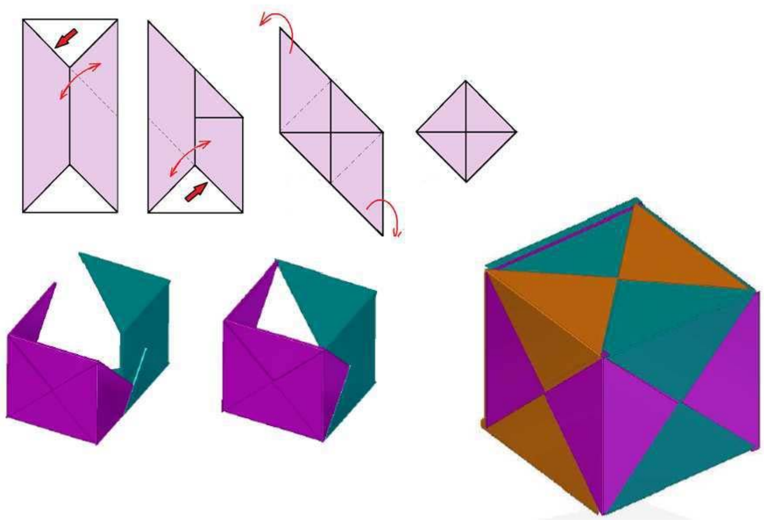


Figura 16: Construcción y ensamblaje del cubo. (Lopera, 2014, pp. 63-64)

Durante el proceso de construcción, las profesoras se colaboraron mutuamente, dado que algunas de ellas demostraron muy buenas habilidades motrices para el trabajo con el doblado de papel. Adicionalmente, este momento fue propicio para la generación de un diálogo acerca del origami y de conceptos geométricos involucrados. Con respecto al origami, se mencionaron algunos aspectos asociados con su origen. Con relación a conceptos involucrados, las profesoras manifestaron que, a medida que se hacía el módulo, se podrían evidenciar conceptos que son abstractos para los estudiantes y que podrían ser concretos usando el doblado de papel; entre los señalados por ellas, estaban: fracciones, rectas paralelas y rectas perpendiculares, plano cartesiano, cuadrado, rectángulo, triángulo rectángulo, ángulo, triángulo isósceles, altura, proporción, figuras semejantes, figuras congruentes, simetría, equivalencias. Al respecto, se generó el siguiente *diálogo 1*:

Investigadora: ¿Qué conceptos geométricos se pueden abordar con la construcción del cubo?

Vicky: fraccionarios

Investigadora: fraccionarios, muy bien.

Vicky: las rectas

Investigadora: rectas, ¿qué rectas podríamos preguntar?

Vicky: paralelas, plano cartesiano.

Natalia: perpendiculares

Investigadora: podría generar un plano cartesiano en algún lado, con solo verlo allá uno puede dar la idea de un plano cartesiano, muy bien.

Natalia: triángulos rectángulos

Elizabeth: diferencia entre cuadrado y rectángulo

Investigadora: diferencia entre cuadrado y rectángulo, muy bien ¿qué más? triángulo rectángulo, porque esos triángulos que acabamos de formar ahí ¿cómo son? rectángulos cierto.

Natalia: proporción con los ángulos, suma de ángulos

Vicky: triángulo isósceles.

Investigadora: triángulos isósceles, también, alturas que estaba diciendo Natalia

Natalia: proporciones.

Investigadora: proporciones.

Natalia: hablar de simetría

PZ: puntual o por algún eje... Muy bien entonces uno puede empezar a mirar que conceptos puede trabajar con los estudiantes a medida que uno va haciendo los dobleces pues le puede ir preguntando, por ejemplo ¿el cuadrado inicial en cuántos cuadrados quedó dividido? Entonces ¿cada cuadrado a cuánto equivale del cuadrado inicial? Mostrar por ejemplo equivalencias, cierto por ejemplo ¿qué equivalencias puedo mostrar ahí?

Natalia: un cuarto igual a cuatro dieciseisavo

Asumiendo una actitud crítica y reflexiva, el grupo de profesoras manifestó que, de acuerdo al grado escolar, se podrían abordar los conceptos mencionados, entre otros. Frente a la pertinencia del grado escolar, se generó el siguiente *diálogo 2*:

Elizabeth: ¿desde qué grado entonces, desde tercero? ¿O qué?

Natalia: los niños doblan papel en primero.

Investigadora: pero ¿para armar? O sea, hacer esta figura con niños ¿de qué grado?, ¿de cuarto o qué?

Elizabeth: Si ¿tanto?

Vicky: Desde tercero.

Elizabeth: los niños son más habilidosos que uno. O sea les enseña cómo se pega y ellos le sacan, yo pienso que podrían hacer el ensayo.

Vicky: si, porque me parece más difícil el doblado para mí, para ellos incluso el armar es más fácil porque ellos son muy habilidoso con las manos.

Investigadora: bueno eso sí es cierto.

Vicky: el doblado de pronto sea más difícil por la precisión.

Investigadora: y eso que esta figura tampoco es que sea tan complicada o sea este es de los módulos más fáciles que hay.

Vicky: profe pero es que uno diciendo en el nivel de dificultad, de pronto sea más difícil ese doblado por la precisión pero ya incluso creo que son más habilidosos en eso, tienen mucha destreza fina y más si se convierte en un reto.

Además, se propició un diálogo sobre la generación de un proyecto interdisciplinar, que no solo permita que los estudiantes comprendan conceptos geométricos, sino que desarrollen otro tipo de habilidades. Este diálogo, que denominaré *diálogo 3*, se presenta a continuación:

Elizabeth. […] Ya le tengo una clase lista.

Investigadora: hay que buscarle el volumen a esto

Elizabeth: ya hicimos, ética, artística, química y de todo.

Investigadora: el volumen y luego busquen la densidad, que le puedan buscar la masa y ya le tenemos el volumen…

Vicky: porque conocemos el peso, y el peso dividido el volumen da la densidad.

Investigadora: ahí lo puedes hacer más tú y creo que hay muchas otras formas que tiene el volumen también de alguna manera implícita…

Elizabeth: y luego hace las sombras que ella le está diciendo y en ética las manda para que hagan esto, luego se lo manda a ella [señala a Vicky], luego me lo manda a mí, luego se los manda a la profesora de física y quedó listo, la clase interdisciplinar con los cubos, como herramienta...

Investigadora: ya sabemos que a eso le tenemos que pensar y en algún momento llevarlo a cabo y mirar a ver qué paso…

Elizabeth: ya, ya la tenemos listas vea: la profesora de artística les pone a hacer sombras, en ética se les pone a hacer esto…

Investigadora: y las vistas ¿dónde las vamos a hacer?

Elizabeth: en matemáticas o en estadística y física...

Vicky: Y ¿para armar el cubo?

Elizabeth: la profesora de artística arma el cubo y hace el dibujo.

Investigadora: pero es mejor que la profe de artística les pregunte cositas de triángulos.

Natalia: se puede hacer un juego didáctico.

Elizabeth: puede hacer colores primarios y secundarios

Vicky: en física caída libre o Arquímedes; en química enlaces, en matemáticas, muchas cosas. En química también estructuras.

Investigadora: cristales, eso de los cristales también.

Después de realizado el cubo, se les propuso a las profesoras escribir en cada una de las caras, los siguientes aspectos de su personalidad:

Cara 1: una fortaleza como persona; cara 2: una debilidad como persona; cara 3: un hobby; cara 4: una pasión; cara 5: una fortaleza como maestro y cara 6: una debilidad como maestro.

Posteriormente, a través de un diálogo informal, cada una de las profesoras compartió lo que escribió. Se les solicitó a las participantes intentar hallar el volumen del cubo en función de un lado de la hoja de papel de longitud *L*, y responder las siguientes preguntas:

–¿Qué se aprendió del desarrollo de la actividad?

–¿Cómo fue su proceso de aprendizaje?

–¿Qué aportó el colectivo a su desarrollo profesional docente? ¿Por qué?

–¿Qué actividades se podrían diseñar en el aula de clase que permitan que los estudiantes generen procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo – con – doblado de papel?

El propósito de estas preguntas era iniciar una etapa preliminar de indagación acerca de cuáles son los aportes que emergen de las interacciones del colectivo, relacionados con el conocimiento geométrico escolar. Finalmente, la profesora Elizabeth compartió sus respuestas a dichas preguntas de cierre:

¿Qué aprendió del desarrollo de la actividad? *La importancia del conocimiento del otro como ser humano, no solo profesional. Realizar un módulo para el cubo. Establecer algunas relaciones entre contenidos geométricos y las líneas del doblado.*

¿Cómo fue su proceso de aprendizaje*? Acudiendo a los presaberes, se refuerzan conceptos y se hacen conexiones para realizar actividades interdisciplinarias*.

¿Qué aportó el colectivo a su desarrollo profesional docente? ¿Por qué? *Las ideas mencionadas por los compañeros desde las diferentes perspectivas de las áreas permiten el enriquecimiento profesional y personal para las prácticas pedagógicas*.

¿Qué actividades se podrían diseñar en el aula de clase que permitan que los estudiantes generen procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo – con – doblado de papel? *Proyectos interdisciplinarios con temas específicos*.

4.4.2. Segundo episodio. Evaluación de la sesión 1 y construcción del Teorema de Pitágoras.

La segunda sesión inició con un conversatorio frente a una inquietud de la profesora Vicky, quien manifestaba la siguiente pregunta: *¿cuántos planos cuadrados se forman (combinando celdas unitarias) que sirven para hallar el volumen del cubo*? La profesora

Natalia le respondió que no debía hablar de planos cuadrados, sino de unidades cuadradas. Frente a eso, les pregunté qué entendían por plano. Elizabeth afirmó que para ella, "*el plano era toda la hoja de papel*". Mientras que Natalia argumentó que "*estos trazos* [refiriéndose a los dobleces] *están en un plano, pero la hoja al ser tridimensional tiene un grosor*". En este momento, intervino Elizabeth, precisando que "*se habla de plano asumiendo que el grosor es despreciable*". Finalmente, intervine y corroboré que la hoja de papel es una porción del plano. Posteriormente, se generaron algunas discusiones frente a las imágenes que presentan algunos libros de texto, sobre el plano, atribuyéndole una forma de paralelogramo o triángulo, por ejemplo, sin considerar la noción de infinito. En este sentido, se concluyó que el plano es infinito, sin grosor ni forma y que una cara de la hoja de papel (con grosor despreciable), podía hacer las veces de un plano finito.

Posteriormente, se retomó el módulo del cubo. Algunas profesoras lo construyeron nuevamente, para poder analizar su mosaico de pliegues. Se aprovechó el momento para preguntarles sobre cómo determinar que un ángulo es recto y cómo demostrar que dos segmentos o que dos ángulos son congruentes. En esta situación, algunos profesores expusieron que a través del uso de instrumentos como compás, regla o transportador o que simplemente se asumía el hecho como verdadero. Les hice nuevamente la pregunta pero con la condición de usar solo el doblado de papel; esto llevó a determinar que si se pone un doblez sobre otro, se puede determinar que son congruentes. De la misma manera, se puede determinar que dos ángulos son congruentes. Elizabeth explicó que si se considera un ángulo llano y se muestra con el doblado de papel que se forman dos ángulos suplementarios congruentes, entonces habría un ángulo recto. Todas las profesoras estuvieron de acuerdo con el razonamiento de Elizabeth. Esto se puede evidenciar en el siguiente diálogo 4:

> Investigadora: y la pregunta es ese lado que nosotros acabamos de dibujar ¿qué es del triángulo?
>
> Elizabeth: la hipotenusa
>
> Investigadora: entonces tenemos un triángulo, pero ¿ustedes cómo saben que es rectángulo? ¿Por esas dos perpendiculares? ¿Nosotros como sabemos que esas dos son perpendiculares?
>
> Vicky: porque se ven iguales, los ángulos…
>
> Investigadora: ¿y si no fuera cuadrado?
>
> Elizabeth: por eso lo sé, porque dio un cubo perfecto
>
> Vicky: ¿por semejanza?
>
> Vicky: si uno tiene una figura y la dobla y empalma formando dos líneas semejantes, entonces ahí si yo diría que se forman dos triángulos semejantes, se puede decir que son rectángulos.
>
> PZ: supongamos un rombo general, o sea un cuadrado es un rombo, pero no todo rombo es cuadrado, o sea un rombo que se forma con dos triángulos ¿son rectángulos en todos los casos?
>
> Natalia: No. Entonces no lo podríamos generalizar, o sea en el cuadrado sí funciona pero una figura que tenga dos triángulos, no necesariamente deben ser rectángulos.
>
> Investigadora: nosotros somos un colectivo de humanos con medios y nuestro medio es el doblado de papel en este caso, entonces a veces usar nuestros dobleces y demás le ayudan a uno a responder este tipo de cosas, entonces que puede uno mirar por ejemplo, o sea en general uno puede mirar que ¿cuánto mide un ángulo de un giro?
>
> Elizabeth: trescientos sesenta.
>
> Investigadora: ¿uno de medio giro?
>
> Elizabeth: ciento ochenta.

Natalia: ah, todo el ángulo mide ciento ochenta grados, pero este ángulo y este miden lo mismo porque casan, entonces tienen que medir necesariamente noventa grados…

Investigadora: entonces eso es una forma, sin uno tener que irse a mirar si de pronto las dos figuras si son semejantes, noten que para nosotros queda más fácil verlo así…

Después, se discutió sobre la forma de hallar el volumen del cubo, considerando el lado de la hoja de papel de longitud L, con la que se inició la construcción del módulo. Se llegó a que la arista del cubo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos $\frac{L}{4}$. La profesora Natalia desarrolló el algoritmo en el tablero (ver figura 17).

Figura 17: Cálculo del volumen del cubo.

Posteriormente, se inició con el trabajo de la sesión dos. Para este encuentro, se les propuso a las participantes la siguiente construcción (ver figuras 18 y 19):

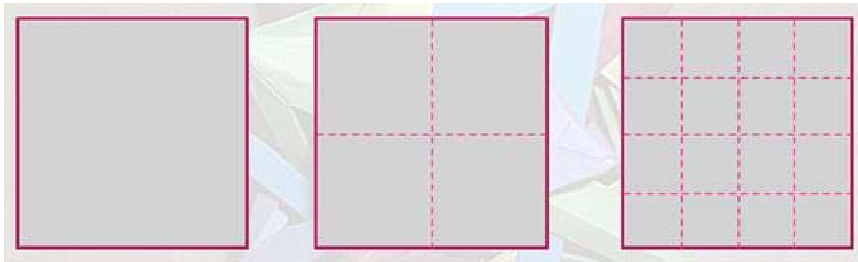


Figura 18: Construcción Teorema de Pitágoras.

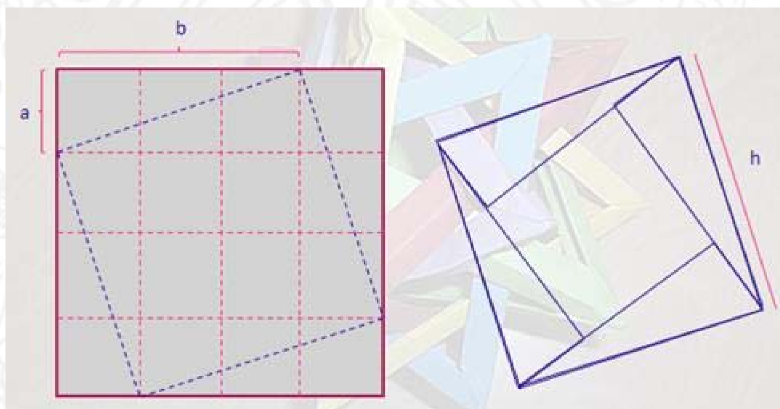
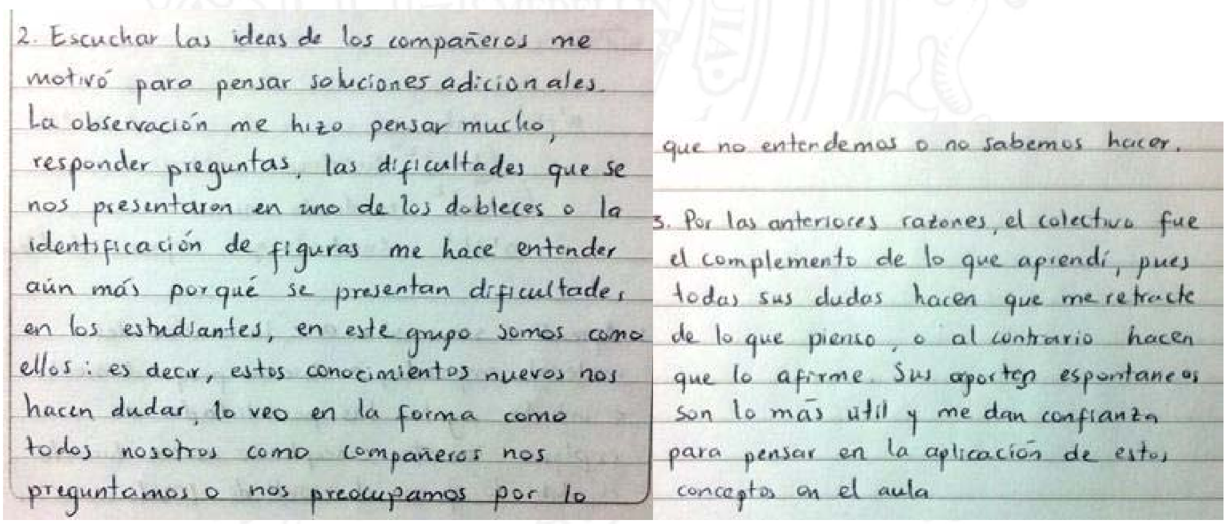


Figura 19: Construcción Teorema de Pitágoras.

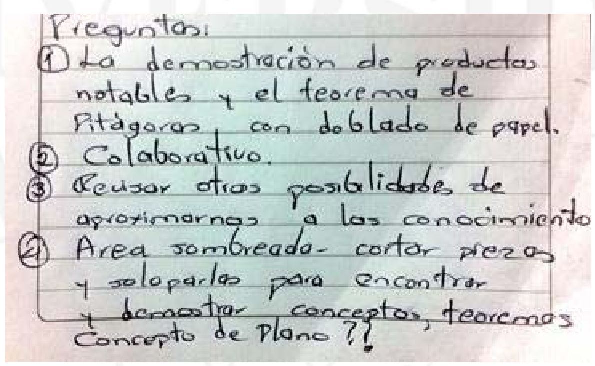
Realizada la construcción, se les preguntó ¿cuál es el área del cuadrado de lado h? Elizabeth hizo un razonamiento muy interesante. Ella mostró que los cuatro triángulos forman dos rectángulos, cada uno de los cuales tiene tres unidades cuadradas. Si el cuadrado con el que se inició la construcción tiene 16 unidades cuadradas y se le restan las unidades de los cuatro triángulos (seis en total), el cuadrado de lado h tendría diez unidades cuadradas de área. Las demás profesoras estuvieron de acuerdo con las observaciones de Elizabeth. Posteriormente, se les preguntó por el área del cuadrado de lado h, en términos de a y b. A partir de la suma y resta de áreas, se pudieron analizar algunos productos notables y se llegó también al teorema de Pitágoras. Para Vicky fue sorprendente el hecho de visualizar tanto el producto notable $(a+b)^2$ como la relación $h^2 = a^2 + b^2$, en la hoja de papel. Para las demás, no fue tan importante el resultado, porque ya lo conocían de otras experiencias vividas.

Esta sesión se dio por terminada, con la puesta en común de las preguntas de cierre. Vicky quiso tomar la palabra y mencionar que ella había aprendido sobre el concepto de plano. Manifestó, de manera escrita, que "*los conceptos básicos deben estar asociados al material que manipulo, para que no se entre a devaluar el concepto como tal*". A continuación, se presentan apartados de las bitácoras de algunas profesoras, dando respuesta a las preguntas de cierre (figuras 20 y 21).


2. Escuchar las ideas de los compañeros me motivó para pensar soluciones adicionales. La observación me hizo pensar mucho, responder preguntas, las dificultades que se nos presentaron en uno de los dobleces o la identificación de figuras me hace entender aún más porqué se presentan dificultades en los estudiantes, en este grupo somos como ellos: es decir, estos conocimientos nuevos nos hacen dudar, lo veo en la forma como todos nosotros como compañeros nos preguntamos o nos preocupamos por lo que no entendemos o no sabemos hacer.

3. Por las anteriores razones, el colectivo fue el complemento de lo que aprendí, pues todas sus dudas hacen que me retracte de lo que pienso, o al contrario hacen que lo afirme. Sus aportes espontaneos son lo más útil y me dan confianza para pensar en la aplicación de estos conceptos en el aula

Figura 20: Bitácora de la profesora Natalia.


Preguntas:

1. La demostración de productos notables y el teorema de Pitágoras, con doblado de papel.
2. Colaborativo.
3. Reusar otras posibilidades de aproximarnos a los conocimiento
4. Area sombreada- cortar piezas y soloparlas para encontrar y demostrar conceptos, teoremas

Concepto de Plano ??

Figura 21: Bitácora profesora Elizabeth.

4.4.3. Tercer episodio. Análisis de algunas construcciones básicas con doblado de papel.

El trabajo con algunas construcciones básicas del doblado de papel, para el establecimiento de propiedades y la definición de ciertos lugares geométricos, se llevó a cabo en tres sesiones, a través del análisis de las siguientes preguntas:

−Dado un doblez en una hoja de papel, ¿cómo construir otro que sea perpendicular al primero y que pase por un punto específico? ¿Cómo se justifica que los dobleces son perpendiculares?

−Dado un doblez en una hoja de papel, ¿cómo construir otro que sea paralelo al primero y que pase por un punto específico? ¿Cómo se justifica que los dobleces son paralelos?

−¿Cómo cree que se puede construir la mediatriz de un segmento mediante el doblado de papel? ¿Cómo se justifica que el doblez hecho es una mediatriz?

−¿Cómo cree que se puede construir la bisectriz de un ángulo mediante el doblado de papel? ¿Cómo se justifica que el doblez hecho es una bisectriz?

−¿Cómo construir un triángulo equilátero mediante el doblado de papel? Justificar la construcción.

−¿Cómo construir un cuadrado inscrito en otro, mediante el doblado de papel? Justificar la construcción.

−¿Cómo construir una parábola mediante el doblado de papel? Justificar la construcción.

Sesión tres.

Durante la sesión tres, se discutieron las primeras dos preguntas y parte de la tercera. En particular, se notaron ciertas dificultades no solo en la construcción de rectas perpendiculares y paralelas mediante el doblado de papel, sino también en la justificación de los pasos seguidos. La primera pregunta estaba relacionada con la construcción de una perpendicular a un doblez dado, que pase por un punto específico. Las construcciones iniciales hechas por las profesoras, son prueba fehaciente de que utilizando un medio como el doblado de papel, que tiene unos procedimientos precisos, los dobleces se hacen a "ojo", es decir, no presentan un procedimiento específico, sino que hacen cualquier doblez que parezca perpendicular, desde su concepción del concepto, y cuando se les solicita que justifiquen la construcción, no tienen elementos suficientes para hacerlo. A continuación, se muestra un extracto del diálogo inicial (diálogo 5) que se suscitó sobre la construcción de este elemento geométrico:

> Elizabeth: bueno yo la hice así, vea yo lo que tenía era el doblez hice el punto en cualquier parte y simplemente doblé sobre el punto como una perpendicular a este doblez que está fijo y ya, comprobé los ángulos que si eran rectos.
>
> Investigadora: pero muéstrame, ¿sobre este qué hiciste acá?
>
> Elizabeth: ah que aquí este, qué…
>
> Investigadora: no, ¿tú cómo hiciste, o sea este es tu doblez?
>
> Elizabeth: o sea yo hice este doblez aquí a ojo.
>
> Investigadora: Ah, ya.
>
> Natalia: eso era lo que yo le estaba diciendo...

> Elizabeth: si… Una perpendicular dije yo, busco el punto, ah bueno, la perpendicular, la línea que baja y yo doblé y cuando doblé comprobé que es de ciento ochenta grados acá lo que no sé es si se juntan…
>
> Investigadora: o sea el doblez tenía que pasar por ese punto.
>
> Elizabeth: a bueno.
>
> Natalia: eso te estaba diciendo yo, ¿cómo saber si da perpendicular? ¿Pero cómo sabes si sí es perpendicular? Pero vos no sabes si es ochenta y nueve, ochenta y ocho…

Dada esta situación, les solicité a las profesoras que trataran de hacer la construcción lo más precisa posible y que intentaran justificar los pasos seguidos, con argumentos matemáticos. La profesora Natalia puedo llegar a la resolución del problema, llevando el doblez sobre sí mismo y considerando el punto por el que debía pasar el doblez. De esta manera, al explicarle al resto de compañeras, pudo generar un procedimiento para construir un doblez perpendicular a un segundo, dado, y que pase por un punto particular. En la bitácora de la profesora Elizabeth (ver figura 22), se retoma la conclusión: "si llevamos el doblez sobre sí mismo tendremos ⫫ [símbolo de perpendicularidad]". Adicionalmente, de la sesión anterior, se recordó que si se considera un ángulo llano y se muestra con el doblado de papel que se forman dos ángulos suplementarios congruentes, entonces habría un ángulo recto.

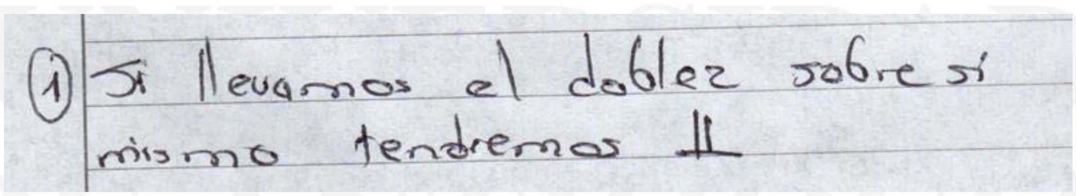

1 Si llevamos el doblez sobre sí mismo tendremos ⫫

Figura 22. Bitácora de la profesora Elizabeth.

Posteriormente, se trabajó la segunda pregunta, en la cual se les solicitaba a las profesoras, construir un doblez que sea paralelo a otro y que pase por un punto particular. La profesora Elizabeth mencionó que si el punto pertenecía al doblez inicial, no habría necesidad de construir un nuevo doblez, pues sería el mismo, ya que una paralela es paralela a sí misma. Las demás profesoras estuvieron de acuerdo. Se propuso entonces que se ubicara un punto que no perteneciera al doblez inicial. En esta situación, ocurrió algo similar a lo ocurrido durante la discusión de la pregunta 1, algunas profesoras hicieron el doblez "a ojo". Frente a esto, se generó el siguiente diálogo 6:

> Elizabeth: […] pues seguí la misma dirección que llevaba y partí, doble el cuadrado a la mitad, ¿cierto?, entonces me quedó esta otra paralela, pero no me quedó sobre el punto. Entonces construí una perpendicular, doblé aquí la mitad, nuevamente ya es otra mitad con perpendicular para el doblez, doblé el punto y me dio, doble aquí…
>
> Investigadora: […] Pero entonces ¿cómo sabes que el doblez de la mitad es paralelo?
>
> Elizabeth: porque […] con la misma división.
>
> Natalia: […] Eso era lo que yo te estaba diciendo ahorita…
>
> Elizabeth: o sea yo lo voy subiendo así…
>
> Natalia: o sea ya tú lo hiciste y sí daba, pero igual yo decía cómo me garantiza que es paralelo.
>
> Investigadora: ella lo hace a ojo.
>
> Vicky: no, yo sé que a ojo te da pero tiene buen ojo…
>
> Investigadora: si, porque tiene buen ojo, pero alguien que no tenga buen ojo…
>
> Vicky: no, pero si yo soy tan mala para el doblez, entonces...
>
> Investigadora: entonces ¿cómo lo hacemos sin que sea a ojo?
>
> Elizabeth. O sea lo aseguro ya con la perpendicular.
>
> Investigadora: O sea en tu caso, listo, tú eres capaz, tú tienes la capacidad de hacerlo a ojo, pero bueno, supongamos los estudiantes. Con los estudiantes tendríamos que tener algún procedimiento seguro para que ellos lleguen a esa perpendicular o a esas paralelas.
>
> Elizabeth: Pero si tienen el concepto yo creo que ellos encuentran la forma

Natalia: […] Pero yo digo, por ejemplo, que tú tienes los de sextico que uno los ve a veces con la regla y ellos tratan de hacer la línea recta y ellos miran pero ¡no me queda derecho! Pues, ¿si me entiendes?, y es con la regla y ellos saben que la quieren hacer así pero la hacen, o sea porque es un manejo de, es el manejo de otro equipo. Si lo quiero hacer, lo quiero pasando por el punto pero a la hora de usar el papel posiblemente no tengo la habilidad, la destreza como la tuya, de poder decir es que yo la quiero pero… y yo la doblo; que es lo que uno hace con los chiquitos cuando uno ve que a ellos les queda eso todo torcido…

Como se puede percibir en el diálogo anterior, la profesora Elizabeth hace la construcción a ojo. Sin embargo, sus compañeras la interpelan, pues se hace necesario llegar a una construcción precisa, que los estudiantes puedan replicar y analizar. En este momento, la profesora Natalia manifestó lo siguiente: "yo pensé, cuando uno construye una paralela con regla y compás, hay que construir la perpendicular […] entonces yo no fui capaz de hacerlo sin antes construir la perpendicular y haciendo una perpendicular a la perpendicular inicial que me garantiza que esa recta va a ser paralela, entonces tenía la recta inicial hice una perpendicular por cualquier punto, así como lo hice ahorita, y sobre la misma perpendicular […] trace, no, me fui llevando paralelas hasta el punto, hasta que el doblez para por el punto y esa perpendicular va a ser paralela a esa dada…". Por lo tanto, pudo resolver la situación. Las demás compañeras analizaron la situación e intentaron hacer la construcción. En la figura 23 se puede apreciar la construcción de la profesora Elizabeth.

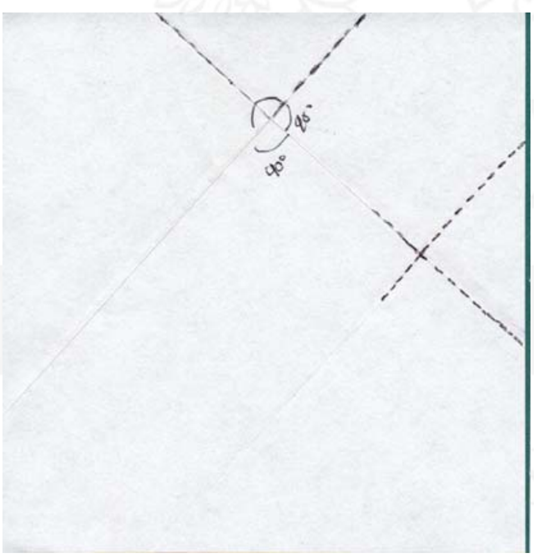


Figura 23: Material de la profesora Elizabeth.

Figura 24. Material de la profesora Natalia.

Durante la discusión, también se rescató el hecho de que las profesoras reflexionaran sobre su práctica pedagógica. Frente a esto, se mencionó que en el aula de clase, se debían generar este tipo de actividades, pero tratando de propiciar espacios para el desarrollo de la creatividad de los estudiantes. Se mencionó que no sería pertinente darles las construcciones hechas, sino que se sugirió que los estudiantes intentaran resolver las preguntas por sí mismos, haciendo uso del doblado de papel como medio para la construcción de los conceptos. Frente a esto, se generó el siguiente diálogo 7:

> Elizabeth: porque de alguna manera, es que ellos nos digan que nos muestren cómo se están haciendo los dobleces, porque si nosotros les enseñamos qué es lo que estamos haciendo, es lo que siempre seguimos; o sea, bueno, yo tengo una decisión conmigo misma y es, nosotros, yo en matemáticas yo veo que repetidamente y a lo largo del tiempo nosotros lo que venimos haciendo es repitiendo y el muchacho repite, repite como un loro, entonces ¿dónde está realmente lo que aprende? Entonces si yo digo, bueno, entonces, ¿cuál es el proceso?, ah bueno es este, a si profe si da, muy bien, muy bien, ya, listo, cualquier cosa; pues la idea de utilizar digamos una herramienta distinta debería ser que eso propicie que ellos puedan decir que, profe mire yo doblé esto, bueno si a ojo, listo…
>
> Investigadora: pero ¿por qué?
>
> Elizabeth: busquemos entonces cómo, o sea explique por qué; seguramente nos van a decir: ah, no, yo no sé, pero llegará el momento en que ellos van soltando y que nos pueden dar respuestas y que pueden ser válidas para nosotros y que de pronto ni siquiera nosotros como maestros las conocíamos […]
>
> Elizabeth: […] o sea yo siento que más que digamos que este es el proceso, es mirar es esta la herramienta para mostrar cosas que eso nos muestra, que ellos vean otros procesos y que nos digan, vea es esto lo que hay que hacer o así, profe es que si hay [dobleces], comprobemos que si hay y que lo pueda mostrar...

Para dar por terminada la sesión tres, se propuso la tercera pregunta que se relacionaba con la construcción de la mediatriz de un segmento mediante el doblado de papel. Para ello, primero se les preguntó sobre el concepto de mediatriz. Natalia intervino y la definió de la siguiente manera: "la mediatriz es una línea perpendicular que pasa por toda la mitad de un segmento". Posteriormente, se les solicitó que intentaran hacer la construcción mediante el doblado de papel, partiendo de cualquier doblez. En este caso, otra vez Natalia fue la primera en hacer la construcción y se las explicó a sus compañeras. Al respecto, ella mencionó, en el diálogo 8:

> Natalia: […] este me pareció más fácil porque es la misma construcción que hicimos ahorita, llevar la línea sobre sí misma hasta que los extremos coincidan.
>
> Investigadora: ¿O sea llevar un punto sobre el otro?
>
> Natalia: exacto, y como si garantizamos que ese sí es, entonces mira la mediatriz ahí, o sea el segmento de ella es este, en este caso sería un segmento también porque pues también tiene límite, pero digamos que podría ser una recta.

Después de realizada la construcción, se les pidió a las profesoras que explicaran, mediante el uso de argumentos matemáticos, por qué el doblez realizado era una mediatriz. Frente a eso, se generó la siguiente conversación (diálogo 9):

> Investigadora: Con el mismo doblez, ¿cómo puede uno garantizar que es una perpendicular? ¿Cómo garantizar que eso si es perpendicular? Pues ya lo habíamos visto, el mismo principio de la perpendicularidad nos va a servir […]. ¿Ahí hay cuatro ángulos rectos?
>
> Elizabeth: Cuatro ángulos de noventa
>
> Investigadora: bueno, y ¿cómo sé yo que es el punto medio? Usemos los dobleces, usemos eso, mejor dicho ¿qué significa que sea punto medio?
>
> Natalia: igual distancia entre ellos.
>
> Investigadora: ¿Igual distancia entre el punto y…?
>
> Natalia: y los dos puntos.
>
> Investigadora: y los dos puntos, muy bien, y con el doblez ¿cómo puedo yo mostrarlo?
>
> Natalia: es superponiendo uno sobre el otro.
>
> Elizabeth: o con simetría.

Para terminar el encuentro, se les pidió a las profesoras que pensaran en la propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz, para pertenecer a esta, es decir, se les solicitó que definieran la mediatriz como lugar geométrico. Se percibió que las participantes no conocían este concepto. Sin embargo, no se les dio la definición; solo se les propuso que ubicaran varios puntos en la mediatriz y que hicieran dobleces desde estos puntos a los extremos del segmento inicial. En las figuras 25 y 26, se pueden apreciar las construcciones.

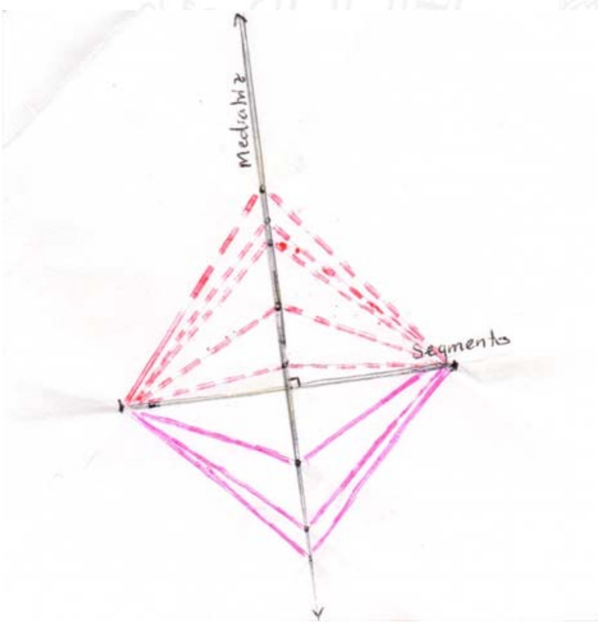


Figura 25: Material de la profesora Elizabeth.

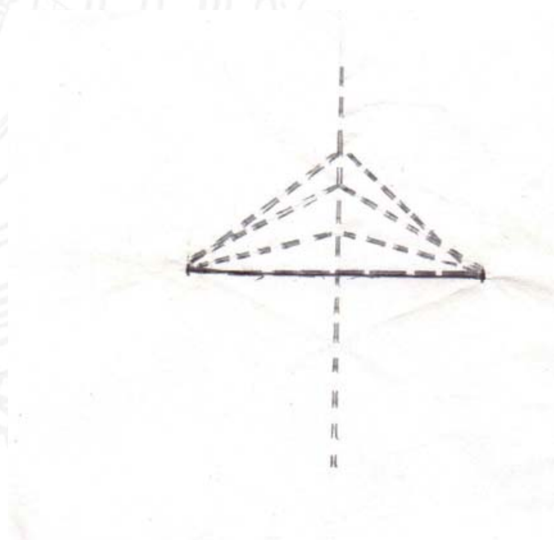


Figura 26: Material de la profesora Elizabeth.

Sesión cuatro.

La sesión cuatro inició con un conversatorio sobre el encuentro anterior. Para ello, se le solicitó a la profesora Natalia que nos contara sobre su experiencia durante dicha sesión (diálogo 10):

Natalia: […] hicimos un ejercicio de hacer dobleces paralelos y perpendiculares a otro, pues por cualquier punto de la hoja de la que disponemos, entonces bueno hicimos la actividad y cada uno hizo como pensó que fuera y la socializamos; eh, cuando hicimos la actividad yo leí la pregunta y la pregunta decía…

Investigadora: Espera yo te la muestro, ahí está.

Natalia: dado un doblez y una hoja de papel ¿cómo construir otro que sea perpendicular al primero y que pase por un punto específico? Hasta ahí leí e iba a empezar a hacerla y cuando leí la pregunta ¿cómo se justifica que son perpendiculares? Eh, esa pregunta cómo se justifica que son perpendiculares, la otra que ya hicimos que son paralelas me ayudaron a resolver el problema, porque ahí ¿cómo hago? yo iba a hacer algo como lo que hizo Eliza en un inicio, no pero ¿cómo así? Es que ahí está paralela, yo a ojo veo que es paralela, yo iba a hacer eso […]. Pero no puede ser tan sencillo, entonces esas dos preguntas me gustaron tanto, pues esa justificación me gustó mucho porque me dio como el impulso de decir cómo, no voy a dar la satisfacción de que así es y que así la puedo justificar; entonces, eh bueno hicimos y de ahí salió una discusión, eh, larguita, pero empezamos como a mirarlas, como a ver las paralelas, cada una hizo un ejercicio que dio una solución diferente […] Yo entendí un punto y yo hice el punto sobre la recta cuanto vi que otros lo hicieron diferente. Ah, ¿eso sí se puede? Es un punto cualquiera, entonces ahí fue valiosa la discusión y recordamos los conceptos de rectas paralelas y perpendiculares, hablamos, pues mencionamos un poquito sobre esas construcciones de regla y compás porque son tan tediosas para los estudiantes, eh lo pensé por algo, lo pensé por algo, es que yo lo hice así porque es que yo tengo el concepto, si los muchachos tienen el concepto buscan cómo solucionarlo, no les demos tantas pistas que ellos son muy buenos en ese cuento, no pero así, así, dejarlos que eso es una forma de evaluar si tienen o no tienen el concepto, dependiendo del concepto y bueno. Y luego quedamos en una…

Vicky: ¿cómo lo hizo usted?

Natalia: haga cualquier doblez, porque también reflexionamos si esto es un cuadrado; yo puedo tomar como referencia un doblez igual aquí […]

Vicky: ¿la primera vez fue?

Vicky: ¿Pero eran perpendiculares?

N: ¿Cómo la hice? Bueno, yo la hice en una forma que ya no sé cómo justificarla pero luego miré, ah, el doblez inicial, entonces mi punto estaba sobre la recta entonces lo que yo hice fue, sobre la misma línea hice el doblez precisamente por ese punto, eh, otra manera de como la hicimos fue este es el doblez inicial entonces voy llevando la misma recta sobre ella hasta que coincida en el punto y lo trazo, pues; así hicimos la perpendicular y la paralela yo la construí haciendo una perpendicular a la perpendicular, y hacer así la línea paralela del doblez dado. Y luego trazamos la mediatriz del segmento, entonces doblamos un segmento en la hoja y con la misma intensión. Eso, que cumpliera esa condición hicimos coincidir los extremos, era una forma muy práctica de garantizar ese punto medio y es que las dos mitades son congruentes y las estamos viendo, nosotros las estamos viendo porque es como algo análogo a lo que hace uno en geometría euclidiana y nos quedó una tarea de eso que fue pensar que propiedad cumplen los puntos para pertenecer a la mediatriz.

Tal como se observa en el diálogo, la profesora Vicky exhibió algunas dudas, pues ella pudo estar solo en una parte de la sesión anterior. De todos modos, la profesora Natalia trató de explicarle las construcciones, para que ella tuviera la oportunidad de realizarlas y de analizar el mosaico de pliegues para extraer conclusiones geométricas. Posteriormente, se les solicitó a las profesoras que recordaran el concepto de mediatriz. Vicky, retomando la explicación de Natalia, pudo mencionar lo siguiente: "pues unir estos dos puntos que den cuenta que de aquí a aquí hay la misma distancia". Por lo tanto, se procedió a realizar nuevamente la construcción.

Después de realizada la construcción, se les solicitó que ubicaran puntos en la mediatriz y que realizaran dobleces desde esos puntos a los extremos del segmento inicial. Se les preguntó, además, por las figuras que se iban formando. Frente a eso, la profesora Vicky manifestó que eran triángulos isósceles. Las demás profesoras estuvieron de acuerdo, aunque Elizabeth afirmó que también se formaban triángulos rectángulos si se consideraban los que se formaban con el punto medio del segmento inicial. Posteriormente, se les preguntó ¿cuál es la propiedad que cumplen todos los puntos de la mediatriz para pertenecer a esta? Esta pregunta generó una fuerte discusión, pues algunas profesoras mostraron ciertas confusiones.

Por ejemplo, la profesora Vicky mencionó que se podían generar triángulos semejantes (si bien, los triángulos congruentes son semejantes, la profesora tendía a confundir los términos). Posteriormente, tratando de explicitar una propiedad, manifestó que "cumple congruencia con los segmentos que forma, con el segmento que forma". Más adelante, afirmó lo siguiente “es que ahí es muy extraño, porque cada punto genera un segmento diferente”. Por su parte, la profesora Elizabeth mencionó que no entendía la pregunta. Después de un diálogo alrededor de ciertas preguntas relacionadas con la congruencia y con la equidistancia, la profesora Natalia concluyó: “cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento”. Las demás profesoras estuvieron de acuerdo con la conclusión de Natalia.

Luego, se les preguntó lo siguiente: al conjunto de puntos que cumple una propiedad determinada, ¿se le llama en matemáticas? Las profesoras no sabían de qué se les estaba hablando. De hecho, una de ellas manifestó “corchadas…”. Sin embargo, Vicky se atrevió a mencionar que era una recta. Considerando la idea de Vicky, se les explicó que se llamaba lugar geométrico. Por lo tanto, se determinó que la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento dado.

Posterior a la discusión generada en torno al concepto de mediatriz, se propuso la cuarta pregunta, relacionada con la construcción de la bisectriz de un ángulo mediante el doblado de papel. Pero primero, se les preguntó por la diferencia entre mediatriz y bisectriz. Las profesoras manifestaron que se relacionada con el ángulo; es decir, la bisectriz divide un ángulo en dos partes iguales. Elizabeth hizo una relación muy importante. Tomó la mediatriz del segmento de la pregunta anterior y explicó que dicha mediatriz era, a su vez, la bisectriz de todos los ángulos que se formaban entre los extremos del segmento inicial y los puntos de la misma mediatriz. Sin embargo, tenía la duda si una mediatriz era también una bisectriz. En este caso, intervine y les manifesté que en ese caso, eso era cierto, pero que la mediatriz era del segmento y la bisectriz era de los ángulos que se formaban allí; les expliqué que dependía de los elementos que analizara. En este sentido, la profesora Vicky concluyó: “o sea, cuando hablo de ángulo hablo de bisectriz, cuando hablo del segmento es la mediatriz”.

Antes de realizar la construcción propuesta, se generó una discusión acerca de las demás líneas notables del triángulo y de los puntos donde se cortan (ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro). Por lo tanto, se dialogó sobre la altura, la mediana, la mediatriz y la bisectriz, con respecto a un lado determinado de un triángulo equilátero y de un triángulo isósceles; además, se realizaron algunas construcciones relacionadas con estas líneas, en un triángulo escaleno, para establecer algunas propiedades.

Cuando se les preguntó a las profesoras cómo realizar una bisectriz de un ángulo dado, mediante el doblado de papel, Natalia respondió que llevando un lado sobre el otro. Con esta afirmación, todas las participantes realizaron la construcción y les presentaron a las demás compañeras el procedimiento seguido. Algunos procedimientos se tornaron diferentes pero, al final, se lograron los dobleces buscados. Posteriormente, se analizaron casos en los que los segmentos no se cortaban dentro del plano finito formado por la hoja de papel. En esta situación, también se determinó que la bisectriz se encontraba llevando un lado sobre el otro, pero que el ángulo no se formaba en el plano que determinaba la hoja. También se analizó el caso en el que los segmentos se intersecaban en la hoja de papel. En este caso, Vicky manifestó un interrogante frente a llevar un lado sobre el otro, porque no era posible llevarlo totalmente. Frente a esto, se estableció que como el plano era finito, solo se podía llevar una parte del segmento 1 sobre el segmento 2. Adicionalmente, se concluyó que la bisectriz también biseca al ángulo opuesto por el vértice (ver figura 27).

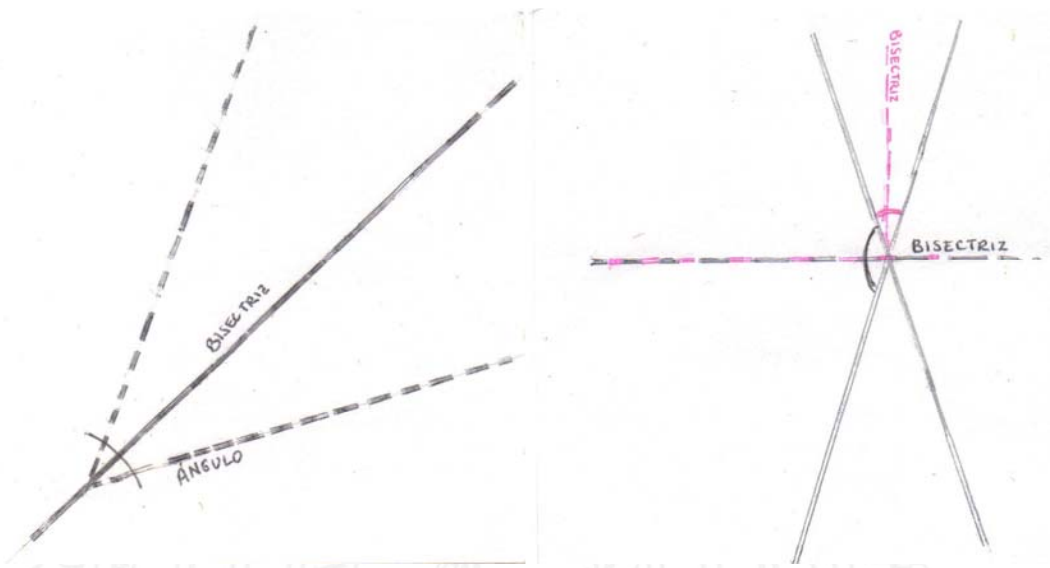


Figura 27: Material de la profesora Natalia.

Para finalizar la sesión cuatro, se les propuso a las profesoras que analizaran ¿cómo se puede definir la bisectriz como lugar geométrico? Es decir, ¿cuál es la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la bisectriz? Estas preguntas quedaron como tarea para la siguiente sesión. Para cerrar el encuentro, se les preguntó a las participantes ¿qué aprendieron el día de hoy? La profesora Vicky tomó la palabra y manifestó lo siguiente (diálogo 11):

> A nivel general, pues aprendí lo que implica el uso del doblado de papel para encontrar perpendiculares, paralelas, mediatriz, mediana, bisectriz, todas esas cosas; aunque hoy si vi que en parte ese tipo de cosas mediante el doblado de papel sirve para lo que yo decía la vez pasada, o sea que los niños puedan ver más completo, es decir, por ejemplo, perpendicular y paralelo no es una raya en el tablero y aporte en el reconocimiento de esos conceptos que son observables y, además, probarlos con papel y lo más importante para mí es como que, que se pueda abrir más como el panorama, o sea que se pueda cuestionar acerca de los que estamos haciendo en el aula y cómo lo estamos haciendo y qué estamos intentando que quede en los estudiantes.

Sesión cinco.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

El quinto encuentro inició con un recuento de la sesión anterior. Para ello, se les preguntó a las profesoras ¿cómo se había hecho la construcción de la bisectriz de un ángulo mediante el doblado de papel? Vicky tomó la palabra y mencionó que había consultado sobre el concepto de bisectriz y que encontró lo mismo de la mediatriz: que son puntos equidistantes del ángulo. Se le interrogó acerca de esta afirmación y explicó que cualquier punto de la bisectriz es equidistante de cualquiera de los dos lados. Se realizó nuevamente la construcción para llegar a la definición de la bisectriz como lugar geométrico, pero se preguntó nuevamente por la definición de mediatriz como lugar geométrico. Natalia respondió que "era el lugar geométrico que cumple estar a igual distancia de los extremos del segmento". Posteriormente, se les interrogó acerca de la bisectriz. Pero Vicky insistió en que los conceptos sonaban iguales, al considerar la idea que había consultado sobre la bisectriz.

En este momento, fue importante encontrar una diferencia entre los conceptos. Por lo tanto, se les solicitó a las profesoras que ubicaran puntos sobre la bisectriz. Luego, se les preguntó sobre la característica consultada y Elizabeth respondió: "un punto de la bisectriz está a igual distancia de cada uno de los lados que forman el ángulo". Se les preguntó, a su vez, cómo se mide una distancia de un punto a una recta. Natalia tomó la palabra y dijo que "la distancia de un punto respecto de una recta se mide siempre con una perpendicular desde ese punto a la recta". En seguida, se afirmó que la equidistancia en la mediatriz se daba entre puntos, es decir, entre el punto de la mediatriz y los extremos del segmento, mientras que en la bisectriz se daba entre un punto de esta y los dos segmentos que forman el ángulo.

Las profesoras recordaron la construcción que se hizo en el tercer encuentro, relacionada con la perpendicular a un segmento, que pasa por un punto dado, mediante el doblado de papel. Natalia y Elizabeth mencionaron, al tiempo, "haciendo coincidir el mismo lado". Se explicitó entonces que se debía hacer coincidir cada lado consigo mismo, hasta que el doblez que se necesita pase por el punto elegido de la bisectriz. Elizabeth manifestó algunas dudas sobre la construcción y Natalia la orientó en el proceso. Vicky también tuvo dudas, pero yo, como investigadora, le di algunas indicaciones para que pudiera realizar la construcción. Por su parte, Vicky también le hizo indicaciones a Elizabeth, quien seguía con ciertas dudas frente a la construcción de la perpendicular. Posteriormente, se les preguntó ¿qué significa entonces que un punto de la bisectriz equidista de los segmentos que forman el ángulo? Vicky, al realizar nuevamente el doblez de la bisectriz, mostró que los segmentos eran congruentes, es decir, que los dobleces coincidían. Esto se pudo visualizar y palpar en la hoja de papel. Pero Elizabeth no lo veía aún con claridad y Vicky le mostró en su construcción, aprovechando los dobleces que había realizado.

Para establecer de manera general la propiedad que cumplen los puntos de la bisectriz, se ubicaron otros puntos y se hicieron las perpendiculares respectivas a los lados del ángulo. De esta manera, se concluyó que "los puntos de la bisectriz equidistan de los lados que forman el ángulo". Así, se estableció que los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento (equidistancia a puntos) y que los puntos de la bisectriz, equidistan de los segmentos que forman el ángulo (equidistancia de un punto a dos segmentos, que es perpendicular). Ver construcciones en las figuras 28 y 29.

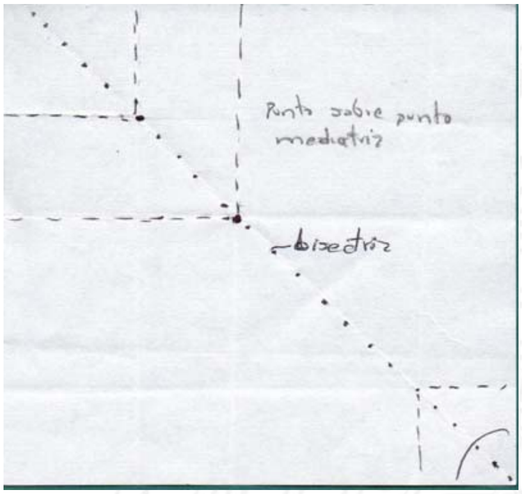
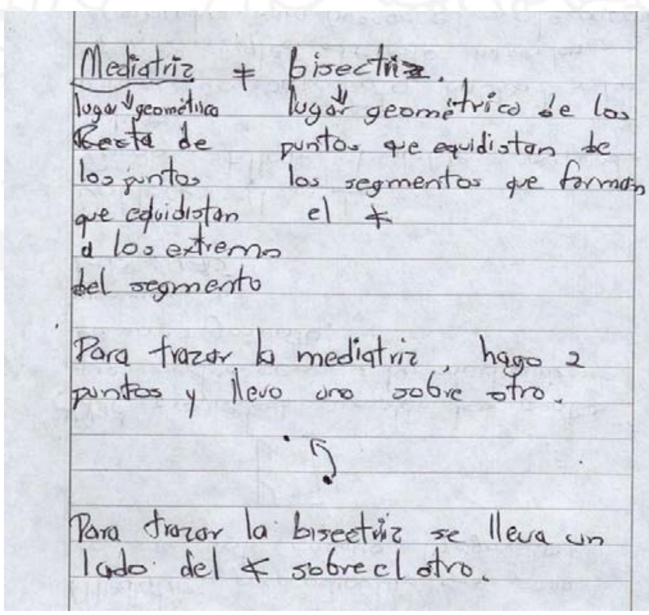


Figura 29: Material de la profesora Elizabeth.

Figura 28: Material de la profesora Natalia.

Elizabeth, nuevamente, mostró algunas confusiones frente a la mediatriz. Se le pidió que la construyera y que ubicara algunos puntos en esta, para poder verificar la equidistancia a los extremos del segmento. Vicky, Natalia y yo, intentamos orientarla para que pudiera llegar a la comprensión de dicho concepto. Se percibió que el colectivo de profesoras era una pieza clave para la construcción de conceptos y de procedimientos, mediante el doblado de papel (ver conclusiones de la profesora Elizabeth en la figura 30).


Mediatriz ≠ bisectriz.
lugar geométrico — Recta de los puntos que equidistan de los extremos del segmento
lugar geométrico de los puntos que equidistan de los segmentos que forman el ∢

Para trazar la mediatriz, hago 2 puntos y llevo uno sobre otro.

Para trazar la bisectriz se lleva un lado del ∢ sobre el otro.

Figura 30: Bitácora de la profesora Elizabeth.

De las observaciones, se infiere que algunas de las profesoras habían escuchado hablar del concepto lugar geométrico; de hecho, lo habían visto en libros o diccionarios, pero no habían alcanzado una comprensión del mismo. Las interacciones del colectivo permitieron que ellas manifestaran ideas como: “pues hasta este momento lo entiendo” (Elizabeth), “yo si lo había leído, pero yo decía, ¿eso qué diablos será…? O sea, uno sí lee el concepto, pero es que a uno… Yo no le digo a los muchachos eso…” (Elizabeth), “yo nunca había usado la palabra…” (Natalia), entre otras expresiones. Adicionalmente, las profesoras resaltaron la importancia del doblado para la comprensión de dichos conceptos, ya que permite, de una manera más fácil, la visualización y experimentación, para materializar algunas ideas abstractas.

Posteriormente, se trabajó la quinta pregunta, relacionada con la construcción de un triángulo equilátero mediante el doblado de papel. Se les solicitó a las profesoras que intentaran realizar la construcción como creían que debía hacerse. Las profesoras pensaron durante varios minutos (unos seis aproximadamente), pero no lograban establecer una construcción concreta. Se les sugirió que recordaran que con la mediatriz, era posible construir un triángulo isósceles y se les preguntó ¿qué se debe hacer para construir uno que sea equilátero? Vicky preguntó si la diagonal de un cuadrado medía lo mismo que su lado. Elizabeth le respondió que no era posible. De hecho, le manifestó que se formaba un triángulo rectángulo isósceles. Para aclarar el panorama, se les preguntó a las profesoras sobre otras características de los triángulos equiláteros. Vicky explicó que los ángulos eran de 60°.

Natalia logró concretar dos construcciones: en la primera, utilizó la anterior característica y dividió un ángulo de 180° en tres partes iguales. Posteriormente, considerando uno de los ángulos de 60°, ubicó un lado de manera arbitraria en uno de los rayos del ángulo y, luego, lo trasladó al otro rayo del ángulo. Después, construyó el último doblez, teniendo presente los dos puntos formados. Luego, revisó si el triángulo cumplía la condición, mediante el doblado de papel. En la segunda construcción que propuso, usó el concepto de mediatriz. Al tener un segmento y hacer su mediatriz, utilizó el doblado de papel para trasladar la distancia del segmento, desde uno de sus puntos, hasta algún punto de la mediatriz. Identificó este nuevo punto e hizo los dobleces respectivos. De esta manera, pudo garantizar que el triángulo formado era equilátero. De hecho, pudo mostrarlo a través de la coincidencia de los dobleces (sentido informal de congruencia).

Por su parte, Vicky intentó la construcción sin éxito, sin considerar un procedimiento preciso. Ella intentó mostrar que sus lados parecían iguales, pero, al final, no pudo demostrar dicha igualdad. Posteriormente, ella también decidió intentar la construcción a partir de la mediatriz. Elizabeth intentó el mismo principio de Natalia, encontrar un ángulo de 60°. Pero tampoco logró materializar una construcción precisa. Se les preguntó a las profesoras sobre el procedimiento que se sigue, normalmente, con regla y compás. Pero no lo pudieron recordar (ver figura 32). Se les sugirió que determinaran primero uno de los lados y, a partir de este, establecieran los otros dos lados.

Después de algunas construcciones fallidas, se les pidió a las profesoras que pusieran en común sus construcciones. Natalia explicó los procesos seguidos en las dos construcciones que propuso. Ella tomó la vocería y orientó a sus compañeras para que pudieran llegar a la construcción del triángulo, a partir de la mediatriz de un segmento (ver construcciones en la figura 31).

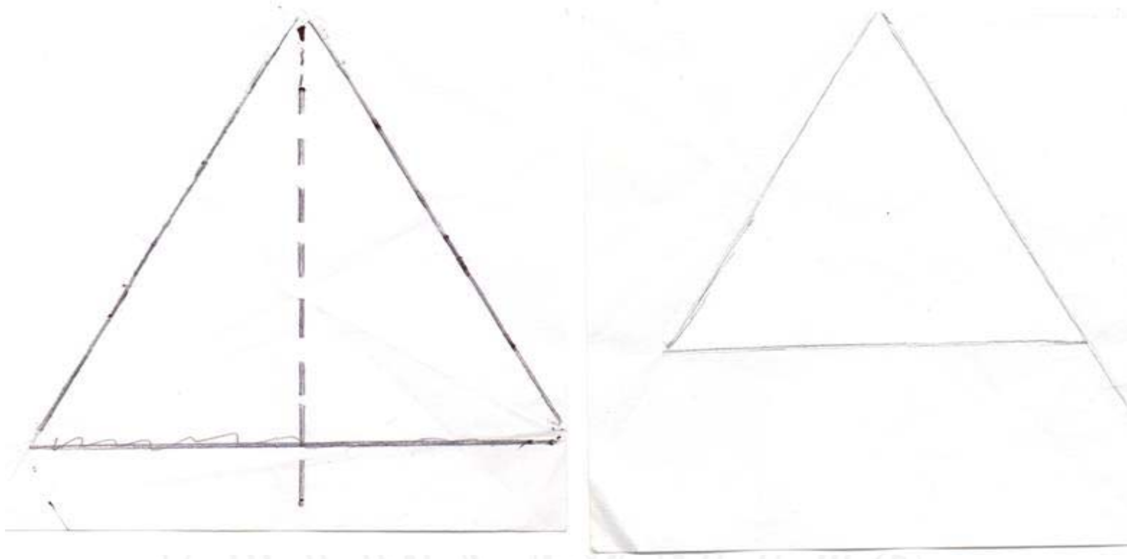


Figura 31: Material profesora Natalia.

Figura 32: Colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel.

Posteriormente, se les propuso otra construcción de un triángulo equilátero, aprovechando también el concepto de mediatriz y la construcción de un triángulo rectángulo con medidas 90°-60°-30°. Se les preguntó a las profesoras ¿por qué el triángulo formado es equilátero? Para ello, se les interrogó sobre el triángulo rectángulo formado, cuando se realiza el primer doblez. Elizabeth mencionó que era, efectivamente, de 90°-60°-30°. Pero, se les preguntó también ¿qué características cumple este triángulo? Elizabeth tomó la palabra nuevamente y afirmó que el lado opuesto al ángulo de 30°, mide la mitad de la hipotenusa. Con esta información, se pudo concluir, mediante el doblado de papel, que la afirmación era verídica para la construcción. Además, a través de una prueba visual, se pudo comprobar que el triángulo formado es equilátero por la medida de los ángulos. A su vez, la construcción permitió trisecar un ángulo de 90° en tres ángulos iguales (ver figuras 33 y 34).

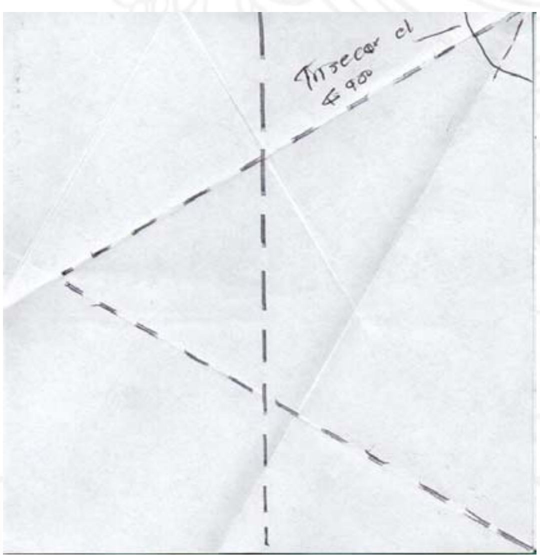


Figura 33: Material profesora Elizabeth.

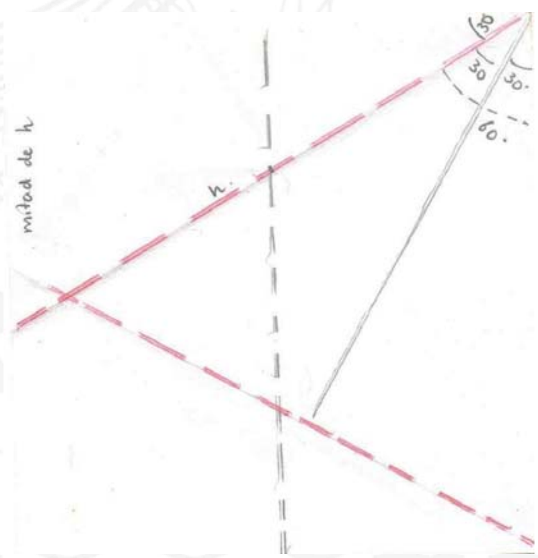


Figura 34: Material profesora Natalia.

La pregunta seis se les dejó a las profesoras como una tarea de formación para sus hogares. Finalmente, se abordó la pregunta siete, relacionada con la construcción de una parábola mediante el doblado de papel. Para ello, se les pidió a las profesoras que tomaran una hoja de papel tamaño carta y ubicaran un punto P y un doblez L (el punto P no debe pertenecer al doblez). Además, se les solicitó que dibujaran muchos puntos sobre esta recta L. Las profesoras debían hacer dobleces que les permitiera llevar el punto P sobre cada uno de los puntos ubicados en la recta L (debían construir n mediatrices, de acuerdo a su número de puntos n). Cada una de las profesoras hizo su construcción. Posteriormente, se hizo una puesta en común asociada con el lugar geométrico construido (ver figura 35).

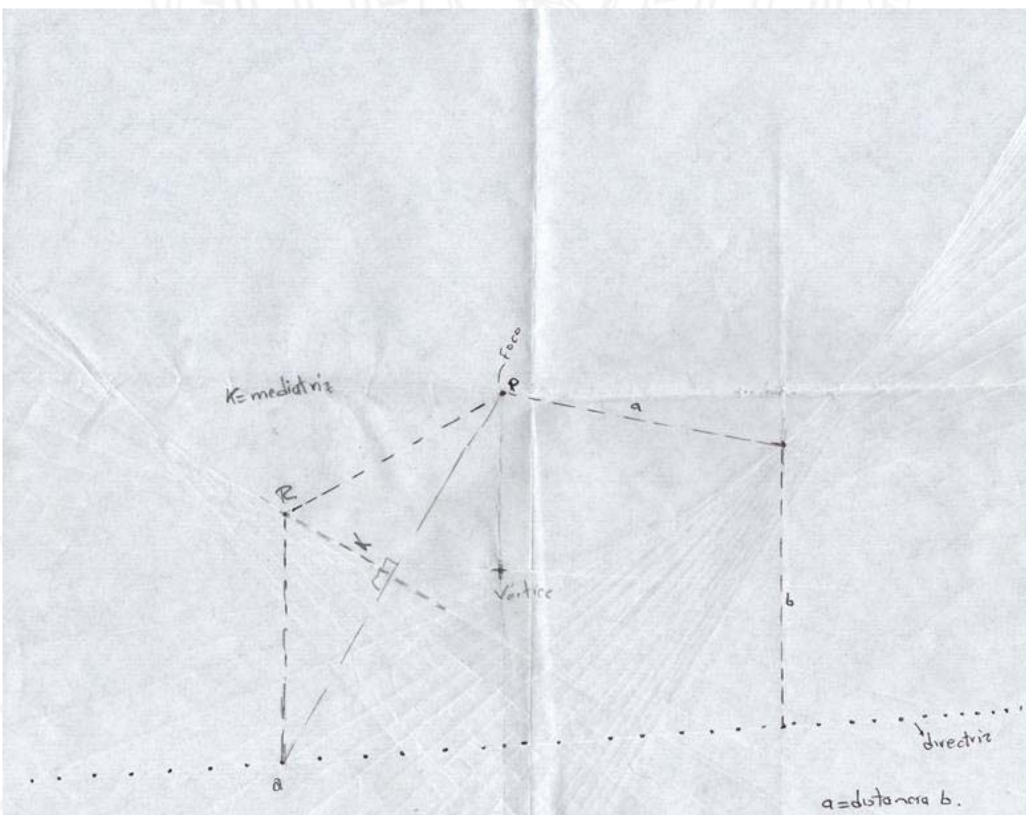


Figura 35: Parábola construida por la profesora Elizabeth.

La profesora Elizabeth fue la primera en determinar que el lugar geométrico formado era una parábola. Vicky y Natalia estuvieron de acuerdo. Pero se les solicitó que debían comprobar que, efectivamente, era una parábola. Para lograrlo, se les preguntó a las profesoras sobre qué propiedad deben cumplir los puntos para pertenecer a una parábola. Elizabeth afirmó que equidistan de los focos. En este caso, del foco. Dado que la profesora no clarificó su afirmación, se les dejó como tarea pensar en la definición de parábola como lugar geométrico.

4.4.4. Cuarto episodio. Media y extrema razón como tarea de formación.

Antes de iniciar el trabajo con la media y extrema razón de un segmento, se les preguntó a las profesoras sobre la propiedad que deben cumplir los puntos de la parábola para pertenecer a esta, es decir, se les interrogó sobre la definición de parábola como lugar geométrico. Vicky mencionó que algún punto de cada una de las mediatrices construidas pertenece a la parábola, pero no explicitó la manera de determinar cuál era. Las profesoras continuaron en su análisis y determinaron que el punto P era el foco y que el doblez L era la directriz. Así mismo, establecieron que la parábola tenía un punto mínimo que ocurría en el vértice, el cual se encontraba en la mediatriz que es paralela a la directriz. Para determinarlo, Elizabeth, en particular, construyó un doblez perpendicular a la directriz, que pasaba por el foco. El vértice, en este caso, era el punto medio del segmento formado por el punto P y el punto de L, que pertenece a la perpendicular. Natalia y Elizabeth, con esta idea del vértice, pudieron determinar que equidistaba del foco y de la directriz.

Posteriormente, se les preguntó a las profesoras por otros puntos de la parábola; después de algunas discusiones, se determinó que los puntos de la parábola debían equidistar del foco y de la directriz, pero aún no se tenía una construcción que permitiera verificar esto. Se les preguntó entonces cómo se verificaba que un punto equidistaba de una recta. Las profesoras recordaron que la distancia a la directriz debía ser perpendicular y, para ello, se tuvo en cuenta la idea de Elizabeth, sobre la construcción auxiliar de una perpendicular, hecho que le permitió identificar el vértice de la parábola. Sin embargo, la construcción de cualquier perpendicular a la directriz, por si sola, no era suficiente para determinar el punto. Esto se comprobó cuando la profesora Elizabeth hizo una perpendicular, pero no sabía cuál punto de esta pertenecía a la parábola. Posteriormente se dio cuenta que era el punto que resultaba de la intersección de la perpendicular con la mediatriz que se derivaba de llevar el punto P sobre el punto de la directriz que pertenecía a la perpendicular. Natalia, Vicky y Elizabeth, pudieron comprobar que algunos puntos de la parábola equidistaban del punto P y de la directriz. De esta manera, se determinó que la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una línea que se llama directriz y de un punto que se llama foco. Al respecto, se generó el siguiente diálogo 12:

> Investigadora: Y si cualquier punto de estos va a equidistar de la directriz, ¿qué tiene que pasar?
>
> Elizabeth: Que tenga la misma distancia.
>
> Investigadora: La misma distancia pero perpendicular. Entonces quiero buscar un punto de la parábola, ¿qué hago?
>
> Natalia: Trazando perpendiculares.
>
> Elizabeth: Pero si yo hago esto también me da. Si yo doblo, no lo necesito trazar, si yo doblo uniendo estos segmentos, también voy a encontrar los puntos…
>
> Investigadora: Vas a encontrar una perpendicular, pero ¿cuál de todos esos puntos pertenece a la parábola?

Elizabeth: Mire este es un punto y puedo seguir doblando.

Vicky: Pero tienes que comprobar que esta distancia es igual a esta y a esta.

Investigadora: ¿Cuál distancia? Vamos a mirar ese punto…

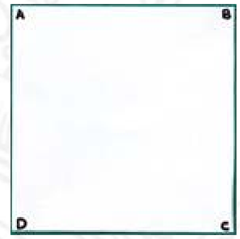
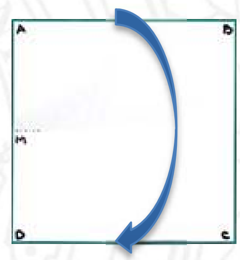
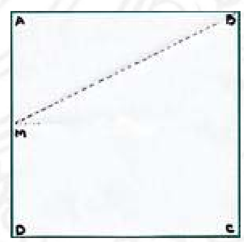
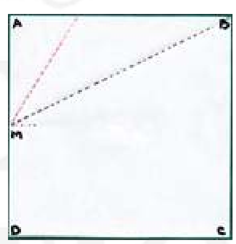
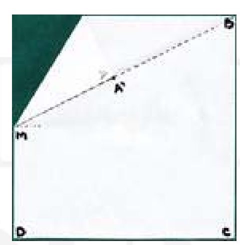
Elizabeth: Ese punto tiene que equidistar del foco.

Natalia: Que la distancia entre este punto y el foco sea igual a la distancia entre ese punto y la directriz.

La construcción de la media y extrema razón de un segmento, a través de la geometría del doblado de papel (Santa y Jaramillo, 2010), fue otra de las tareas de formación diseñadas como propuesta para las profesoras. Con esta actividad se buscaba propiciar procesos de interacción dentro del colectivo, que permitan, a su vez, procesos de producción de conocimiento, tanto desde el aspecto disciplinar de la geometría, como de su enseñanza. Esta actividad se dividió en varios momentos (Santa, Jaramillo y Borba, 2015a; Santa, Jaramillo y Gualdrón, en evaluación):

Momento 1. Construcción (Row, 1966). En la tabla 4 (Santa, Jaramillo y Borba, 2015a; Santa, Jaramillo y Gualdrón, en evaluación), se presentan los pasos para la construcción de la media y extrema razón, con su respectiva representación visual en doblado de papel (ver figuras 36 – 43).

Tabla 4: Construcción de la media y extrema razón (Santa, Jaramillo y Borba, 2015a; Santa, Jaramillo y Gualdrón, en evaluación).

Paso	Construcción
Tome una hoja de papel de forma cuadrada y nómbrela ABCD.	 Figura 36: Paso 1.
Busque el punto medio del segmento $\overline{AD}$ llevando $\overline{AB}$ sobre $\overline{DC}$ (media paralela), pero no haga todo el doblez sino solo una señal. Nómbrelo M.	 Figura 37: Paso 2.
Realice el doblez $\overline{MB}$ y desdoble.	 Figura 38: Paso 3.
Encuentre la bisectriz del ángulo <AMB, es decir, lleve $\overline{AM}$ sobre $\overline{MB}$ y haga el doblez. Marque el punto A sobre $\overline{MB}$ y nómbrelo A'. Desdoble.	 Figura 39: Paso 4a.  Figura 40: Paso 4b.
Encuentre la bisectriz del ángulo <ABM. Esto es, lleve $\overline{AB}$ sobre $\overline{MB}$. Realice el doblez respectivo.	

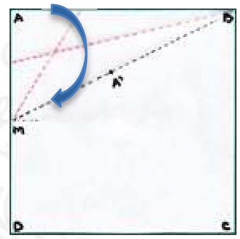


Figura 41: Paso 5.

Marque el punto A' sobre $\overline{AB}$ y nómbrelo X. Así se garantiza que $\overline{BX} \cong \overline{BA'}$

Figura 42: Paso 6a.

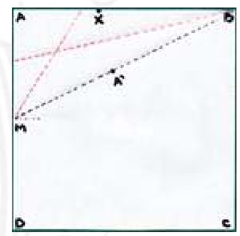


Figura 43: Paso 6b.

Momento 2. Análisis geométrico de la media y extrema razón. Posterior a la construcción de la media y extrema razón con doblado de papel, se les solicitó a las profesoras del colectivo, que analizaran el proceso abordado para identificar diversas implicaciones geométricas. Adicionalmente, se les propuso que, a partir de la visualización que permite la construcción, justifiquen con argumentos matemáticos que el punto X divide el segmento $\overline{AB}$ en media y extrema razón. Es decir, debían verificar que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{AX}} \leftrightarrow$

$\overline{AB} \times \overline{AX} = \overline{XB}^2$

Momento 3. Relación de construcciones. La investigadora, usuaria del software Geogebra, les propuso a las profesoras que analizaran el proceso de construcción mediante el doblado de papel, para establecer cuáles podrían ser los pasos

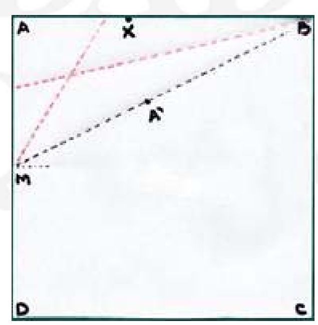


Figura 44: Construcción con doblado de papel.

correspondientes que deberían seguirse a través de este medio, de tal manera que se pudiera lograr una construcción euclidiana similar. El propósito era que ellas pudieran determinar que la construcción euclidiana, realizada en este software, era equivalente, de manera implícita, a la realizada con doblado de papel (ver figuras 44 y 45).

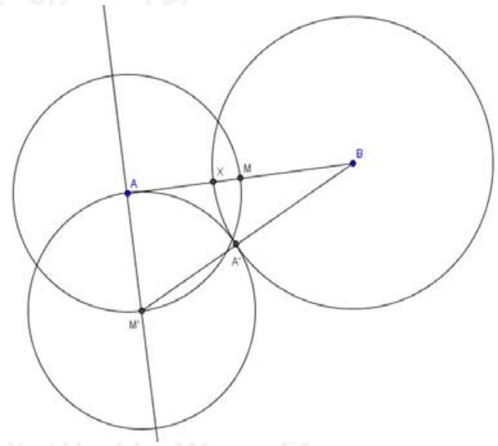


Figura 45: Construcción euclidiana.

Momento 4. Análisis didáctico. Finalmente, las profesoras analizaron los procesos de construcción y su pertinencia en el aula de clase para, posteriormente, pensar en la posibilidad de generar actividades que permitan a sus estudiantes la producción de conocimiento geométrico mediante el doblado de papel.

Algunas evidencias.

El encuentro, cuyo tema principal fue la media y extrema razón de un segmento, inició con un conversatorio sobre el significado de este concepto. La profesora Natalia mencionó que se relacionaba con proporciones. Las otras dos profesoras no sabían aún de qué se estaba hablando. Por lo tanto, decidí reformular la pregunta, pero no refiriéndome a la media y extrema razón, sino a la sección áurea o divina proporción. De esta manera, la profesora Elizabeth afirmó que había realizado actividades con los estudiantes en el aula de clase, relacionadas con algunas medidas en el cuerpo humano, pero con el único propósito de determinar el número de oro (o número Phi). La profesora Vicky mencionó que se relacionaba con el ciclo lunar; mientras que la profesora Natalia explicitó que se relacionaba con algunas sucesiones, como la de Fibonacci. Posteriormente, establecimos que si el punto X divide el segmento $\overline{AB}$ en media y extrema razón, entonces se cumple que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{AX}} \leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{AX} = \overline{XB}^2$

Al finalizar la puesta con común, se realizó la construcción con doblado de papel, de la media y extrema razón. Yo realicé la construcción, junto con las profesoras y les iba indicando los pasos a seguir, de manera simultánea en mi hoja de papel y en una presentación en diapositivas, que contenía las respectivas imágenes visuales de cada paso (ver figuras 1 – 8). Cada que se hacía algún doblez, yo preguntaba por las implicaciones geométricas del mismo (mediatriz, bisectriz, punto medio, traslado de medidas y de segmentos, entre otras). Además, si una instrucción no era entendida, alguna de las maestras del colectivo, asumia la vocería y explicaba lo que estaba ocurriendo. Posterior a la construcción (ver figura 46), se les preguntó a las maestras cómo se podía verificar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{AX}} \leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{AX} = \overline{XB}^2$. Para ello, se presentó el siguiente diálogo 13:

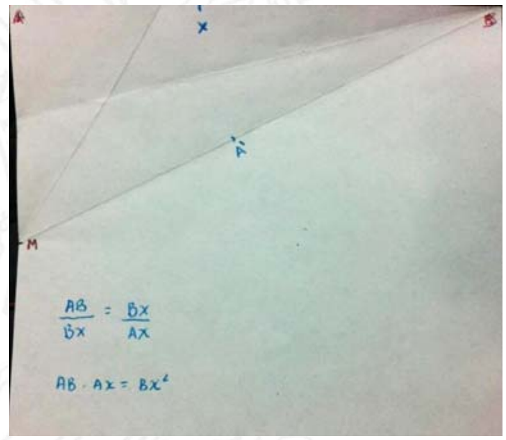


Figura 46: Material de la profesora Natalia.

Investigadora: […] Debemos comprobar que esa relación es verdad, ¿sí? Pero entonces ¿qué sabemos? Hay que llegar a esto, pero entonces vamos a sacar cosas. Vamos a sacar ciertas hipótesis ahí. ¿Qué sabemos de la construcción? ¿Qué relaciones podemos sacar ahí?

Elizabeth: Que $\overline{BX}$ es más grande que $\overline{AX}$. Que $\overline{AB}$ es más grande.

Investigadora: O sea, $\overline{AB}$ es más grande… ¿Qué tal si le damos una medida a $\overline{AB}$?

Elizabeth: L

Investigadora: L, se llama L. Mide L.

Elizabeth: $\overline{AB}$ es L.

Vicky: $\overline{AM}$ es L a la 2. Ehh, L/2.

Investigadora: Muy bien. ¿Qué más? ¿Qué hicimos? Trasladamos quién sobre quién…

Natalia: $\overline{AM}$ sobre $\overline{MB}$.

Investigadora: […] Si este es $\overline{AM}$ que mide L/2, entonces $\overline{MA'}$ ¿qué es?

Elizabeth: L/2

Investigadora: entonces $\overline{MA'}$ también mide L/2. Muy bien. […] ¿Qué más? No le demos valores a $\overline{A'B}$ y a $\overline{BX}$, pero ¿Qué sabemos de la relación entre $\overline{BA'}$…?

Vicky: $\overline{BX}$ es igual a $\overline{A'B}$.

Investigadora: Ok, $\overline{BX}$ es congruente con $\overline{A'B}$. […] ¿Cuánto medirá $\overline{MB}$?

Elizabeth: Mide L/2 más $\overline{A'B}$. Le restamos a $\overline{MB}$, L/2 y ahí sabemos $\overline{A'B}$.

Investigadora: Muy bien. […] Si yo busco qué es $\overline{A'B}$, encuentro…

Natalia: $\overline{BX}$.

Investigadora: ¿Cómo relaciono $\overline{MB}$ en términos de L? ¿Solo L? Pero, ¿qué figura es esa?

Elizabeth: un triángulo rectángulo.

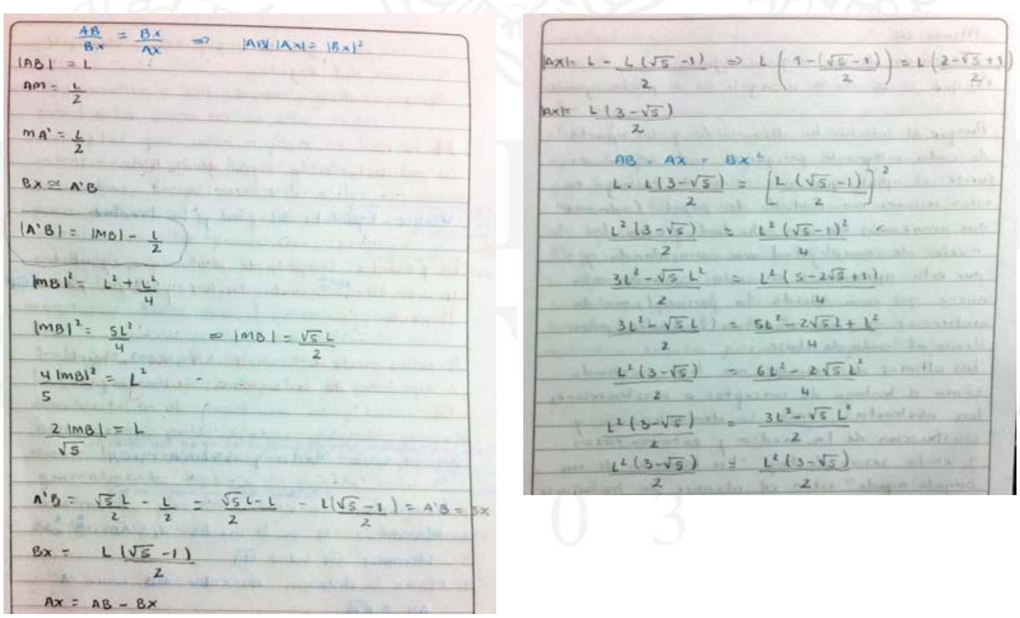
Investigadora. […] De ese triángulo rectángulo, ¿cuál es la medida de sus catetos?

Elizabeth: $\overline{AB}$ y $\overline{AM}$ y encuentro la hipotenusa $\overline{MB}$. $\overline{AB}$ mide L y $\overline{AM}$ mide L/2.

Investigadora: […] O sea que puedo buscar $\overline{MB}$…

Después de establecer algunas hipótesis, el colectivo de maestras se dispuso a encontrar las medidas de algunos segmentos, para poder verificar la relación de la media y extrema razón. En la figura 47, se puede observar el algoritmo que demuestra la igualdad.

Posterior a la verificación del algoritmo de la divina proporción, se utilizó el software geométrico Geogebra (ver figura 46), para recrear de manera conjunta con el colectivo, la construcción que se hizo con doblado de papel. Para ello, se construyó un segmento $\overline{AB}$; luego, se buscó el punto medio M de $\overline{AB}$ y por A, se trazó una perpendicular al segmento; se trasladó la medida del segmento $\overline{MA}$ a la perpendicular tomando como referencia el punto A y utilizando la opción circunferencia (ese punto se llamó M'); se trazó el segmento $\overline{M'B}$. Nuevamente, usando como referencia el punto M', se usó la herramienta circunferencia y se trasladó la medida $\overline{M'A}$. El punto de corte entre este arco y el segmento $\overline{M'B}$ se llamó A'. Finalmente, con centro en B, se trasladó la medida $\overline{BA'}$ al segmento $\overline{AB}$, ubicándose el punto X.



$\frac{AB}{Bx} = \frac{Bx}{AX} \Rightarrow |AB| \cdot |Ax| = |Bx|^2$

$|AB| = L$

$Am = \frac{L}{2}$

$mA' = \frac{L}{2}$

$Bx \cong A'B$

$|A'B| = |MB| - \frac{L}{2}$

$|mB|^2 = L^2 + \frac{L^2}{4}$

$|mB|^2 = \frac{5L^2}{4} \Rightarrow |MB| = \frac{\sqrt{5}L}{2}$

$\frac{4|mB|^2}{5} = L^2$

$\frac{2|mB|}{\sqrt{5}} = L$

$A'B = \frac{\sqrt{5}L}{2} - \frac{L}{2} = \frac{\sqrt{5}L - L}{2} = \frac{L(\sqrt{5}-1)}{2} = A'B = Bx$

$Bx = \frac{L(\sqrt{5}-1)}{2}$

$Ax = AB - Bx$

$|Ax| = L - \frac{L(\sqrt{5}-1)}{2} \Rightarrow L\left(1 - \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}\right) = L\left(\frac{2-\sqrt{5}+1}{2}\right)$

$|Ax| = \frac{L(3-\sqrt{5})}{2}$

$AB \cdot AX = Bx^2$

$L \cdot \frac{L(3-\sqrt{5})}{2} = \left[\frac{L(\sqrt{5}-1)}{2}\right]^2$

$\frac{L^2(3-\sqrt{5})}{2} = \frac{L^2(\sqrt{5}-1)^2}{4}$

$\frac{3L^2-\sqrt{5}L^2}{2} = \frac{L^2(5-2\sqrt{5}+1)}{4}$

$\frac{3L^2-\sqrt{5}L}{2} = \frac{5L^2-2\sqrt{5}L+L^2}{4}$

$\frac{L^2(3-\sqrt{5})}{2} = \frac{6L^2-2\sqrt{5}L^2}{4}$

$\frac{L^2(3-\sqrt{5})}{2} = \frac{3L^2-\sqrt{5}L^2}{2}$

$\frac{L^2(3-\sqrt{5})}{2} = \frac{L^2(3-\sqrt{5})}{2}$

Figura 47: Bitácora de la profesora Natalia.

Para finalizar la actividad de formación, se les preguntó a las maestras ¿qué les pareció esa comparación entre el doblado de papel y la geometría euclidiana? ¿Qué opinan ustedes al respecto? ¿Qué podemos hacer nosotros en el aula de clase? La profesora Natalia tomó la palabra y explicó: "*a pesar de que uno lo trabaje aquí* [señala la hoja] *y sea evidente, comprenda y demuestre, esto* [señalando la pantalla] *es como un paso más a la formalización* […] *para que vean que esto que se ha hecho aquí* [señala la hoja] *es formal* […] *Creo que es una validación necesaria*". Para completar la respuesta anterior, la profesora Elizabeth mencionó: "*Y se fortalece el concepto. De todas maneras, lo que se ve acá y se dice, dentro del esquema ya gráfico, en el plano, también le ayuda a fortalecer y a… a fortalecer otros conceptos desde el uso de las herramientas que se tienen. Porque, de igual manera, por ejemplo el uso del compás y del transportador no es muy amigable para los muchachos, entonces eso también ayuda para que ellos crean la validez que tienen esos instrumentos a la hora de comprobar ciertas cosas en geometría*".

4.4.5. Quinto episodio. Trisección de un ángulo agudo.

El análisis de la construcción de la trisección de un ángulo agudo, mediante el doblado de papel, fue otra de las tareas de formación que se les propuso al colectivo de profesoras. A continuación, se describe el proceso seguido:

Construcción.

Los pasos para la construcción (Santa y Jaramillo, 2015; Santa, Jaramillo y Borba, 2015b), se exponen en los siguientes apartados.

1. Tome una hoja de papel de forma rectangular, llámela $ABCD$ y elija uno de sus ángulos rectos como referencia. Sea $< A$ el ángulo elegido. Forme en él un ángulo agudo haciendo un doblez $\overline{AN}$. Remárquelo bien y desdoble nuevamente. Sea el ángulo agudo $\angle DAN$ el ángulo a trisecar. Tenga en cuenta que este está formado por el doblez que ha hecho y uno de los lados del ángulo recto que tomó de referencia (ver figuras 48 y 49).

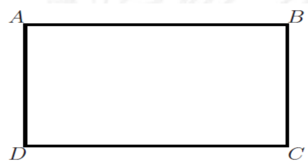


Figura 48: Paso 1a.

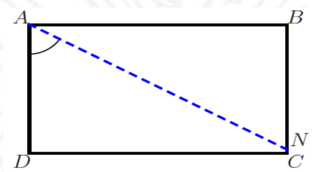


Figura 49: Paso 1b.

2. Haga un doblez paralelo a $\overline{AD}$. Llámelo $\overline{ML}$ y desdoble. Se recomienda que la distancia de este doblez a $\overline{AD}$ sea un poco menor que la mitad de la medida de $\overline{AB}$ (ver figura 50).

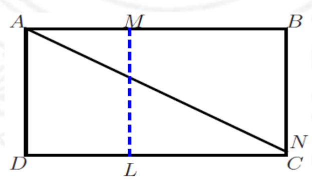


Figura 50: Paso 2.

3. Ponga $\overline{AD}$ sobre $\overline{ML}$ para formar una nueva paralela $\overline{PQ}$ que sea equidistante de las dos anteriores (ver figura 51).

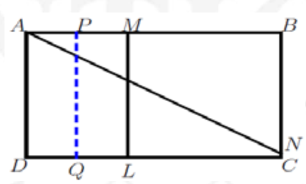


Figura 51: Paso 3.

4. Ahora, realice un doblez tal que, al deslizar el punto A del ángulo de referencia sobre la paralela $\overline{PQ}$, el punto M coincida con el doblez $\overline{AN}$ que hizo para formar el ángulo agudo. Nómbrelo $\overline{ZJ}$ (ver figura 52).

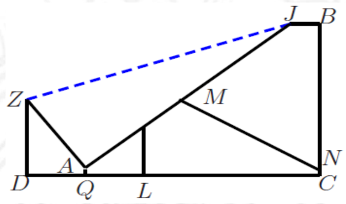


Figura 52: Paso 4.

5. Observe que ha hecho una simetría y la parte que ha doblado es un triángulo rectángulo (ΔZAJ). El doblez $\overline{ZJ}$ se corta con las paralelas $\overline{PQ}$ y $\overline{ML}$. Al punto donde se corta $\overline{PQ}$ con $\overline{ZJ}$ llámelo E. Encuentre la mediatriz $\overline{GH}$ del segmento $\overline{ZE}$. Tenga en cuenta que esta mediatriz se intercepta con el lado del rectángulo CD en el punto H. Desdoble; es claro que A pertenece a la prolongación del segmento $\overline{GH}$ (ver figuras 53 y 54).

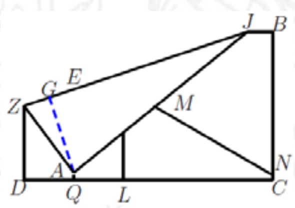


Figura 53: Figura 5a.

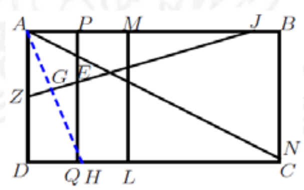


Figura 54: Paso 5b.

6. Finalmente encuentre la bisectriz $\overline{AK}$ del ángulo $\angle HAN$. De esta manera, queda dividido el ángulo agudo $\angle DAN$ en tres ángulos iguales $\angle DAH$, $\angle HAK$y $\angle KAN$ (ver figura 55).

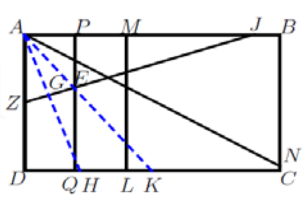


Figura 55: Paso 6.

Axiomas de la Geometría del doblado de papel.

Después de realizada la construcción con doblado de papel, se proponen las siguientes actividades:

1. Justificar: ¿por qué se puede decir que el ángulo $< DAN$ quedó trisecado?
2. Analizar las implicaciones geométricas euclidianas de cada uno de los pasos.

Para ello, se solicita diligenciar la siguiente tabla 5:

Tabla 5: Implicaciones geométricas en la construcción de la trisección de un ángulo.

Doblez realizado	Implicaciones geométricas
Paso 1	
Paso 2	
…	

Para lograrlo, se les proporciona a las profesoras el siguiente aporte de información:

Pueden tomarse como verdaderas algunas proposiciones del doblado de papel, cuando se hacen diferentes combinaciones entre puntos y dobleces.

3. Hacer una lista de proposiciones que consideren verdaderas, con respecto al doblado de papel, de acuerdo con la construcción realizada anteriormente.
4. Puesta en común y discusión de las proposiciones.

Construcción de Arquímedes (Courant y Robbins, 2002).

Después del análisis geométrico de la construcción, se les presenta a las profesoras la siguiente información y algunas preguntas asociadas:

Entre los aportes a las ciencias, Arquímedes (287 - 212 a.C.) diseñó un método fácil e interesante para trisecar cualquier tipo de ángulo. Sin embargo, su ingeniosa construcción no resuelve el problema de trisección con compás y regla no graduada, pues se vale de dos marcas en esta para trasladar una distancia determinada. (Santa y Jaramillo, 2015, p. 10)

Sea $m(< AOB) = x$ el ángulo dado. Se traza por el vértice O una circunferencia de radio r. Se prolonga el segmento $\overline{AO}$ del ángulo inicial y se traza por B una secante hasta un punto P (que pertenece a la prolongación) que corte a la circunferencia en el punto M, tal que $m(\overline{MP}) = r$ (es necesario una regla graduada para transportar dicha medida). Entonces $m(< NOM) = z$ es la tercera parte del ángulo dado. (Santa y Jaramillo, 2015, p. 10) (Ver figura 56).

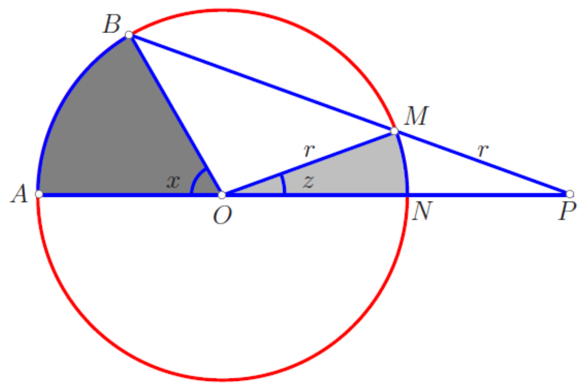


Figura 56: Trisección de Arquímedes (Santa y Jaramillo, 2015, p. 10).

1. Si tuvieran que hacer una prueba de la anterior construcción, ¿con qué hipótesis iniciarían?

2. Probar, mediante argumentos matemáticos, que el ángulo $< z$ es la tercera parte del ángulo $< x$, de acuerdo con la construcción dada.

Relación de la construcción de Arquímedes con la del doblado de papel.

Analizada la construcción de Arquímedes, se proponen las siguientes acciones, junto con las preguntas correspondientes, para probar que en la construcción con doblado de papel (ver figura 57), se realiza, de manera implícita, la trisección de Arquímedes.

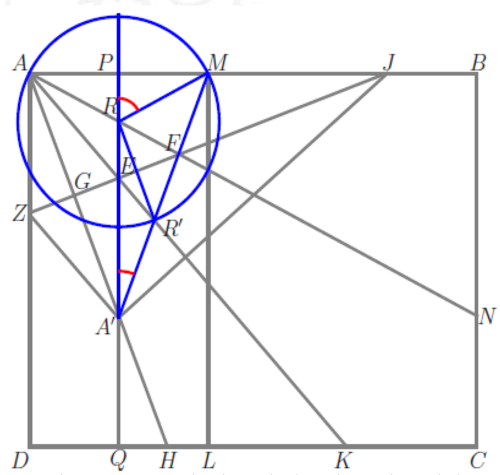


Figura 57. Relación de la trisección del doblado de papel con el método de Arquímedes (Santa y Jaramillo, 2015, p. 10).

1. En su construcción con doblado de papel, realice los dobleces auxiliares que se proponen en color azul.

2. ¿Cómo probar que $< DAN \cong < PRM$,

de acuerdo con la construcción?

3. ¿Cómo probar que $< PA'R' \cong < EAF$, de acuerdo con la construcción?

4. ¿Cómo probar que $\overline{RR'} // \overline{AA'}$, de acuerdo con la construcción?

5. ¿Cómo probar que $\overline{RR'} \cong \overline{A'R'} \cong \overline{AR} \cong \overline{RM}$, de acuerdo con la construcción?

6. ¿Qué se puede concluir al respecto?

Algunas evidencias.

El episodio cinco inició en el encuentro siete y se concluyó en el ocho. La construcción de la trisección con doblado de papel se realizó al finalizar el encuentro siete y, para lograrla, se siguieron los pasos descritos anteriormente. Cuando se realizó la primera parte del paso seis, se les preguntó a las profesoras sobre las razones por las cuales el ángulo en G era recto. Ellas analizaron los dobleces y recordaron que se llevó un punto sobre otro, acción que genera una mediatriz. Frente a esta situación, se propició el siguiente diálogo 14:

> Investigadora: Yo les hago una pregunta ¿ese ángulo que se forma acá será un ángulo recto?
>
> Elizabeth: pareciera
>
> Investigadora. ¿Ustedes que creen?
>
> Elizabeth: si
>
> Investigadora: pero entonces ¿cómo sé yo? Yo sé que tu comparaste ahí, muy bien pero ¿cómo se con doblado de papel que eso es verdad?
>
> Elizabeth: por las líneas perpendiculares, a ver si sí. Yo creo…
>
> Investigadora: bueno, o sea yo lo puedo hacer calcando, pero ¿cómo más lo puedo hacer con doblado de papel? o sea ¿qué hice yo?
>
> Elizabeth: puso un punto sobre otro.
>
> Investigadora: ¿se acuerdan qué se forma cuando yo llevo un punto sobre otro?

Natalia: una perpendicular, ah, el punto medio

Investigadora: las dos cosas. Un punto sobre otro, o sea acuérdense que en las construcciones que hicimos llevamos un punto sobre otro ¿qué era lo que estábamos haciendo cuando llevábamos un punto sobre otro?

Elizabeth: la mediatriz.

En el encuentro ocho se retomó la construcción y se analizaron cada uno de los pasos para establecer algunas implicaciones geométricas. En el primer paso, se construyó un ángulo agudo, a partir de la generación de un doblez que se relaciona con un segmento; en el segundo paso, se construyó una perpendicular al lado $\overline{AB}$ o paralela a $\overline{AD}$, para lograrlo se llevó el lado $\overline{AB}$ sobre sí mismo. En el tercer paso, se llevó $\overline{ML}$ sobre $\overline{AD}$, para construir una segunda paralela que equidista de las dos anteriores (paralela media); también se dialogó que este doblez era perpendicular a $\overline{AB}$. El cuarto paso no era una construcción conocida para las profesoras: se llevó el punto A sobre cualquier punto de $\overline{PG}$ y, a su vez, M sobre cualquier punto de $\overline{AD}$. Las implicaciones de este doblez se analizarían posteriormente. El quinto paso se relacionó con la mediatriz de un segmento, pues se llevó el punto Z sobre el punto E (ver diálogo 14); además, cuando se desdobló y se siguió con la prolongación de dicho doblez, el punto A pertenecía a esa mediatriz. El sexto paso se asoció con la construcción de una bisectriz; en este caso, se llevó el lado $\overline{AH}$ sobre el lado $\overline{AN}$, generando un doblez que bisecó el ángulo $< HAN$. En la figura 58 se pueden apreciar los pasos de la trisección y algunas de sus implicaciones geométricas, dispuestos en la bitácora de la profesora Vicky.

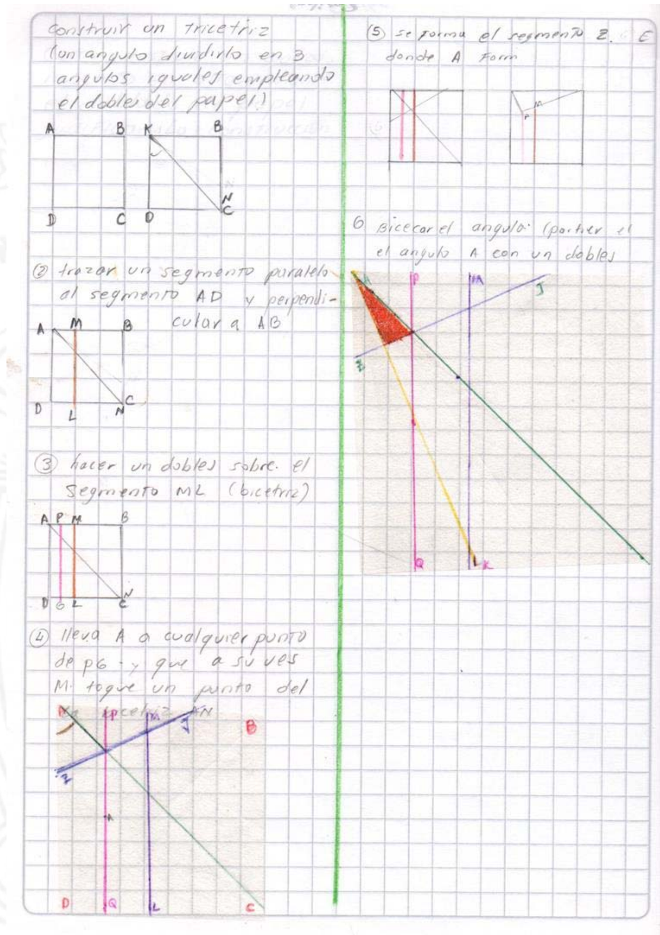


Figura 58: Trisección. Material de la profesora Vicky.

Posteriormente, se analizaron las razones por las cuales el ángulo $< DAN$ quedó dividido en tres partes iguales. Inicialmente, se dialogó sobre la perpendicularidad de $\overline{AG}$ con $\overline{ZJ}$ (diálogo 14); después, se analizó que G era el punto medio de $\overline{ZE}$, lo que implicaba que $\overline{ZG} \cong \overline{GE}$ (lo anterior porque se llevó el punto Z sobre el punto E); luego, se dialogó sobre la equidistancia del punto A a los puntos Z y E (por pertenecer a la mediatriz del segmento $\overline{ZE}$). Este diálogo 15 se puede ver a continuación.

Investigadora: o sea podemos decir que G es punto medio de $\overline{ZE}$; de hecho el punto A que pertenece a esa mediatriz ¿podría equidistar, o no? ah bueno vamos a pensar en ese punto A, el punto A ¿pertenece a la mediatriz o no? cuando yo lleve Z sobre E generé una mediatriz que yo la prolongué hasta el punto A; si el punto A pertenece a la mediatriz ¿qué pasa? ¿Se acuerdan qué podía pasar cuando hablamos de la mediatriz, la mediatriz es el lugar geométrico de qué?

Elizabeth: equidistan de los puntos del segmento que forman...

Vicky: el segmento

Investigadora: esperen, A pertenece a la mediatriz entonces ¿A cómo es con respecto a Z y E?

Elizabeth: equidistante.

Adicionalmente, se mencionó que el segmento $\overline{AG}$ es congruente consigo mismo. De acuerdo con las implicaciones geométricas analizadas, se determinó que los triángulos $\Delta EGA \cong \Delta ZGA$, por el criterio L-L-L o L-A-L. Por lo tanto, por ángulos correspondientes en triángulos congruentes, se determinó que los ángulos $< ZAG \cong < EAG$. Dado que en el paso seis se hizo una bisectriz, por construcción, el ángulo $< EAD$ también es congruente con los otros dos anteriores. Por lo tanto, los tres ángulos son iguales y el ángulo $< DAN$ quedó dividido en tres partes iguales. En el diálogo 16 se pueden observar algunas ideas e, incluso, algunas conjeturas falsas acerca de la construcción. En la figura 59 se puede observar la explicación de la trisección, en la bitácora de la profesora Natalia.

Diálogo 16. (Al observar la construcción de la trisección, figura 61)

Elizabeth: miramos que GE y AZ también son iguales.

Investigadora: si, si podemos ver en la hoja que, miremos lo que está diciendo Elizabeth AG es igual a AZ ¿eso es cierto? Mírenlo en la hoja

Elizabeth: yo doblo y sí

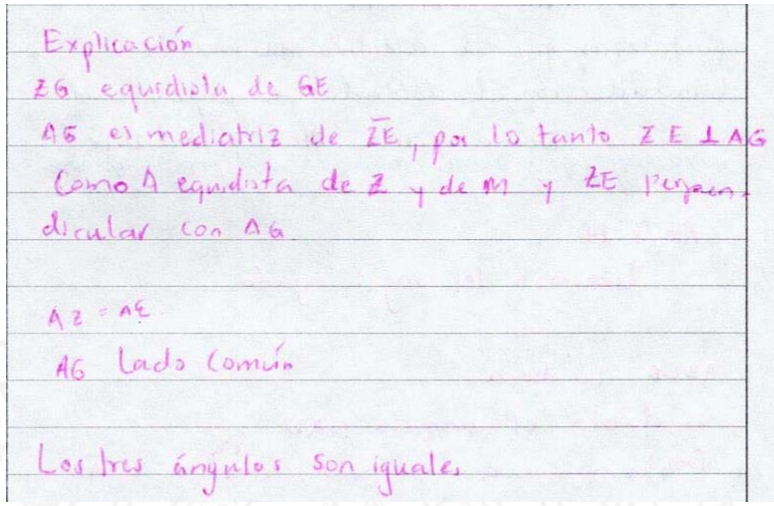
Investigadora: en mi caso no funciona, ¿me estás diciendo AZ y AG?

Elizabeth: AZ y AG es este…

PZ: pero tú me estas mostrando que ese Z… No importa, pero miren lo que hizo ahorita ella, ella me mostró que cuando hacía esto que Z correspondía con E pero yo quiero saber si estos dos lados son iguales, lo que tú estás diciendo, AZ con AG tendría que bisecar esto.

ME: Ah, ya

PZ: y hay pareciera que no, que no son como iguales son diferentes, por un poquitico, o sea de pronto es posible que en algunos si funcione pero no en todos los casos.


Explicación
ZG equidista de GE
AG es mediatriz de $\overline{ZE}$, por lo tanto $ZE \perp AG$
Como A equidista de Z y de M y ZE perpen-
dicular con AG

$AZ = AE$
AG lado común

Los tres ángulos son iguale

Figura 59: Explicación trisección. Material profesora Natalia.

Después de analizar la trisección del ángulo a través de la geometría del doblado de papel, se les propuso a las profesoras la construcción de la trisección de Arquímedes. Al respecto, se establecieron algunas hipótesis y se determinó que se podía demostrar a partir de suma de ángulos o a partir de áreas de sectores circulares. Con miras a hacer una demostración lo más eficientemente posible, se les propuso a las profesoras hacerlo por ángulos inscritos y externos en la circunferencia. Esta demostración se presenta en las figura 138 del análisis de este episodio.

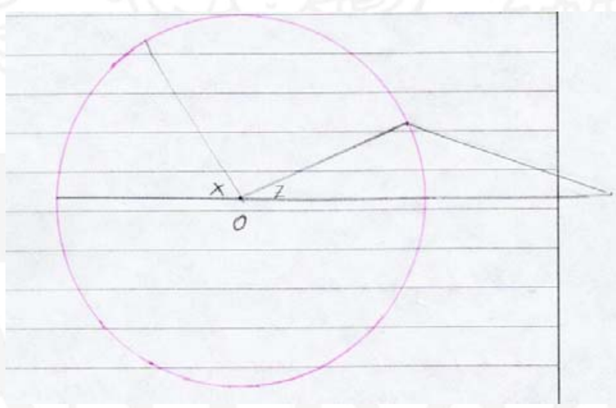


Figura 60: Trisección de Arquímedes. Material de la profesora Natalia.

Posterior al análisis de la trisección de Arquímedes, se les propuso a las participantes algunas dobleces auxiliares en su construcción con doblado de papel; además se posibilitaron algunos diálogos sobre ciertas relaciones geométricas que se podían visualizar y mostrar mediante dobleces (congruencia de ángulos, congruencia de segmentos, perpendicularidad, paralelismo, ver figura 61). Esto permitió concluir que la construcción que se hizo con doblado de papel, era la misma construcción de Arquímedes (ver construcción en la figuras 56 y 60).

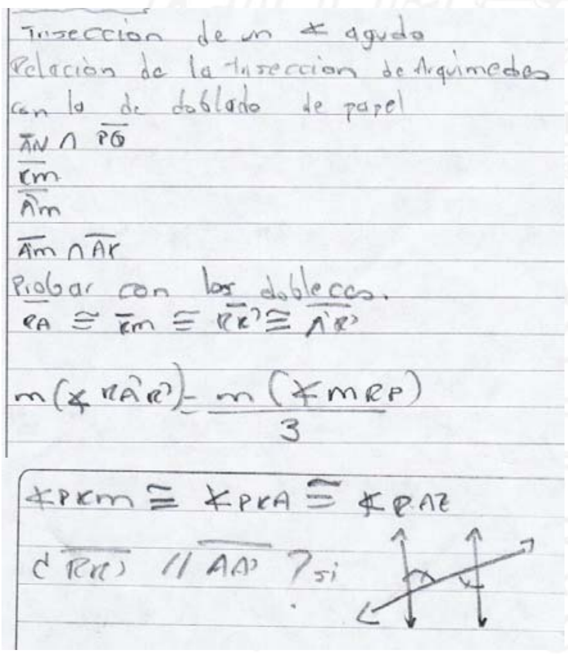

Trisección de un ∡ agudo
Relación de la trisección de Arquímedes
con la de doblado de papel
$\overline{AN} \cap \overline{PQ}$
$\overline{Rm}$
$\overline{Am}$
$\overline{Am} \cap \overline{AR}$
Probar con los dobleces.
$\overline{RA} \cong \overline{Rm} \cong \overline{RR'} \cong \overline{AR'}$
$m(\measuredangle RA'R') = \frac{m(\measuredangle MRP)}{3}$
$\measuredangle PRm \cong \measuredangle PRA \cong \measuredangle RAZ$
¿$\overline{RR'} \parallel \overline{AA'}$? si

Figura 62: Hechos geométricos de la trisección de un ángulo.

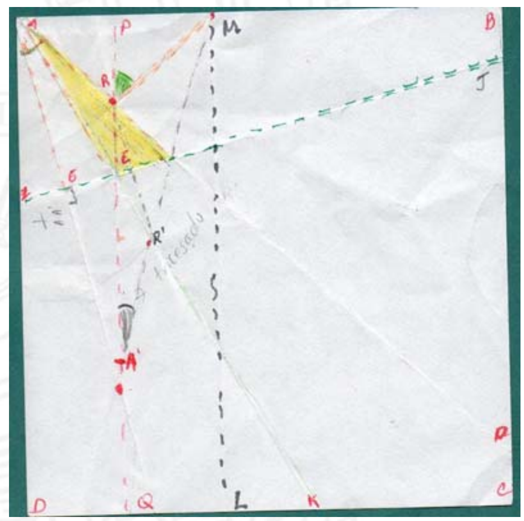


Figura 61: Trisección del ángulo. Material de la profesora Elizabeth.

Para finalizar el episodio, se les solicitó a las profesoras una lista de proposiciones, que consideraran verdaderas con respecto a la geometría del doblado de papel. Los principios que surgieron, de acuerdo con el análisis de la construcción de la trisección de un ángulo agudo con doblado de papel, fueron los cinco siguientes (ver figura 142 en el análisis del episodio quinto):

–Doblez sobre otro doblez genera una bisectriz.

–Un punto sobre otro punto genera una mediatriz.

–Por dos puntos solo puede pasar un doblez.

–Dado un doblez y un punto, se puede hacer un doblez que pasa por el punto y lleve el doblez inicial sobre él mismo.

–Dados dos puntos P1 y P2 y dos dobleces L1 y L2, se puede hacer un doblez que lleve el punto P1 sobre L1, a su vez P2 sobre L2.

Al respecto, se dio el siguiente diálogo:

Investigadora: ¿qué creemos que podemos sacar como axiomas? o sea ¿qué ideas pueden ser siempre verdaderas con doblado de papel?

Vicky: que doblez sobre doblez se genera una bisectriz.

Investigadora: doblez sobre doblez genera una bisectriz, excelente muy bien Vicky.

Elizabeth: y un punto sobre otro punto…

Vicky: una mediatriz

Investigadora: Bueno ¿qué más? De todo lo que hemos visto, tú estabas diciendo algo ahora Eliza…

Elizabeth: pues como uno dice que por un punto solo pasa una recta.

Investigadora: ¿por un punto?

Vicky: por dos puntos.

Elizabeth: por dos puntos solo puede pasar una recta.

Investigadora: ¿entonces en doblez cómo sería?

Elizabeth: por dos puntos solo pasa un doblez.

Investigadora: muy bien, perfecto, repasen la trisección para ver si pueden ver uno por ahí.

Elizabeth: la de la perpendicular ¿cómo es que es?

Investigadora: ah bueno ¿cómo se genera una perpendicular?

Vicky: cogemos A y lo llevamos aquí y entonces nos da un ángulo de noventa

Investigadora: pero porque llevamos un punto sobre otro y era una mediatriz ¿de qué otra forma puedo yo hacer, si yo no tengo que llevar un punto sobre otro? ¿Cómo hacemos una perpendicular? O sea eso es una forma de hacer una perpendicular, llevar un punto sobre otro...

Elizabeth: a la recta.

Investigadora: a la recta, muy bien, de manera general ¿cómo se hace cualquier perpendicular?

Elizabeth: pongo el punto doblo por el punto pero deben coincidir las líneas.

Investigadora: ¿qué debe coincidir?

Elizabeth: debe coincidir la línea de adentro...

PZ: ¿o sea ella misma?

Elizabeth: eso, y ahí hago el doblez y me da perpendicular.

PZ: ahí sí […]

4.4.6. Sexto episodio. Axiomas de la geometría del doblado de papel.

El sexto episodio se llevó a cabo en el noveno encuentro y duró, aproximadamente, una hora y media. En este se les propuso a las profesoras los siete axiomas de Huzita-Hatori, para la geometría del doblado de papel.

Axioma 1: "Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que pasa a través de ellos" (Lang, 1996 – 2015, p. 44). Dado que ya se había dialogado sobre su relación con el primer axioma de Euclides y, además, se había propuesto como tercera proposición verdadera en el encuentro anterior, no se hizo su construcción con doblado de papel.

Axioma 2: "Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 sobre P_2" (p. 38). En otros encuentros se había determinado que esta acción se relacionaba con el lugar geométrico mediatriz; además fue la segunda proposición determinada por el colectivo. Por esta razón, tampoco se hizo la construcción asociada.

Axioma 3: "Dadas dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre l_2" (p. 38). Aunque esta acción también se había hecho en encuentros anteriores y se había propuesto dentro de las proposiciones verdaderas, se hizo la construcción para determinar el número de soluciones del axioma. De acuerdo con las interacciones del colectivo de profesoras, se encontró que si los dobleces se cortaban dentro del plano finito de la hoja de papel, existían dos soluciones (ver figura 63); en caso contrario, si los dobleces no se cortan, solo es posible encontrar una solución. En general, se concluyó que el axioma se relacionaba con la bisectriz de los ángulos que forman los dobleces en el plano; en el caso en que estos fueran paralelos, se mencionó que el doblez solución era una paralela que equidistaba de los dos anteriores. En el diálogo 17, se pueden observar algunas ideas relacionadas con este axioma.

> Investigadora: usted encontró un L3 y un L4 que hace lo mismo, entonces parece ser que no es uno sino que pueden existir hasta dos ¿pero por qué existen dos acá y por qué por ejemplo en este solo existe uno?
>
> Vicky: porque no son perpendiculares
>
> Investigadora: ¿pero L1 y L2 son perpendiculares acá?
>
> Elizabeth: no
>
> Investigadora: no ellos no son perpendiculares, miremos
>
> Vicky: ¿por la proyección? que tienden a juntarse…
>
> Investigadora: ah que tienden a cortarse en algún instante, pero dentro del mismo plano.
>
> Elizabeth: de la hoja de papel
>
> Investigadora: si se cortan dentro de la hoja ¿cuántos dobleces hay?
>
> Elizabeth: dos, pero si no se cortan, uno.
>
> Vicky: solamente uno
>
> Investigadora: que si la hoja fuera más grande sería el otro.
>
> Elizabeth: si se cortarían
>
> Investigadora: si se cortarían y existiría el otro y ¿si son paralelas?
>
> Vicky: se forma una bisectriz.
>
> Investigadora: pero sería una tercera paralela.
>
> Elizabeth: pero igual se encuentra un solo doblez, o sea pasaría lo mismo que en esta, lo que pasa es que ya el análisis geométrico sería distinto.
>
> Investigadora: si porque ya sería una paralela que equidista de las otras dos, que también es una bisectriz, lo que ustedes están diciendo.

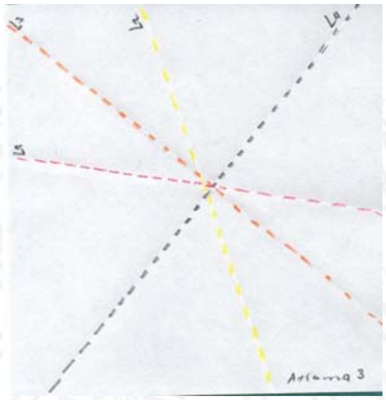


Figura 63: Axioma 3.

Axioma 4: "Dado un punto P_1 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1" (p. 38). Este axioma también hizo parte de las cinco proposiciones verdaderas que propusieron las profesoras en el encuentro anterior y se relacionó con la construcción de una perpendicular a un segmento que pase por un punto dado; por tal razón, no se hizo la construcción con doblado de papel. Sin embargo, se generó el siguiente diálogo 18:

Investigadora: Axioma cuatro ¿a qué se parece mirándolo ahí?

Elizabeth: A la perpendicular

Investigadora: L1 sobre ella misma, dice: dado un punto P1, tengo un punto cualquiera P1 y tengo una recta L1, entonces dado un punto hay un doblez que lleva a L1 sobre sí misma y pasa por P1; este también lo dijeron ustedes.

Elizabeth: si pero como al revés.

Investigadora: si, no importa, pero nosotros dijimos que si llevamos el doblez sobre él mismo…

Elizabeth: no, doblo este por este.

Investigadora: doblo L1 sobre ella y yo hago el doblez solo cuando...

Elizabeth: pasa sobre el punto.

Investigadora: eso muy bien, esa es una de las perpendiculares que habíamos hablado ¿se acuerdan? L1 sobre…

Elizabeth: ella misma y tiene que tocar este punto.

Investigadora: ¿se acuerdan que eso lo habíamos hecho cuando hicimos perpendiculares con puntos externos e internos a los segmentos?

Elizabeth: y quedan perpendiculares y lo pruebo aquí.

PZ: ¿solamente hay un doblez o habrán más?

Vicky: solo uno.

Elizabeth: si, nada más uno.

Axioma 5: "Dados dos puntos P_1 y P_2 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y pasa por P_2" (p. 38). Esta acción fue nueva para el colectivo de profesoras. Por lo tanto, se procedió a realizar las construcciones respectivas. Vicky, en su construcción, pudo encontrar dos dobleces solución. Por su lado, Elizabeth no pudo conseguir ningún doblez; por lo tanto, tuvo que cambiar la posición de los puntos para hacer otra construcción; en esta última si pudo encontrar también dos dobleces. Al analizar los casos que se tenían, se conjeturó, inicialmente, que la solución parecía estar relacionada con las distancias entre los dos puntos; pero tal afirmación fue desechada pues había un contraejemplo para ello. En el diálogo 19 se pueden observar estas ideas:

Elizabeth: si, pero en este no, este debe ser por la distancia…

Investigadora: pero esta cerquita, Vicky estás que lo sacas…

Elizabeth: no en este no da.

Investigadora: pero ¿por qué no da?

Elizabeth: por la distancia, la distancia que hay entre los dos puntos.

Investigadora: ah bueno respondamos el axioma; es posible que haya dos dobleces, es posible que no haya y ahorita miramos que si es posible que haya un solo doblez

Natalia: ese axioma es parecido al que hicimos en la otra construcción.

Investigadora: es parecido.

Natalia: teníamos que poner uno sobre otro y que a la vez…

Investigadora: porque solamente son dos puntos y un doblez, en el otro eran dos y dos.

Vicky: no, no me da.

Elizabeth: yo creo que el problema es la distancia entre estos dos puntos, porque este es más lejos, este es más lejos entonces le da y este suyo también está más lejos, es por la distancia entre ellos dos y estos están más cerquita, si los hacemos más cerquita entre los dos, venga hagámoslo…

Investigadora: este no dio.

Elizabeth: este no dio pero pensamos que era la distancia y no, esta la hicimos con menor y si dio.

Investigadora: ah pero pensemos en esa distancia a ver, ¿la distancia entre quién y quién?

Elizabeth: entre P1 y P2.

Investigadora: ¿este fue el que no nos dio? pero parece ser que esa distancia es igualita la tuya y la mía.

Elizabeth: pero entonces no es por las distancias, porque yo puse aquí las distancias menores incluso.

Investigadora: ¿y encontraste uno?

Elizabeth: encontré uno

Investigadora: muy bien encontraste uno, yo creo que este es el caso en que solamente hay uno ¿yo creo que hay otro por acá a este lado? No es esa distancia, pero si de pronto si es la distancia pero con otra cosa

Elizabeth: pero con la recta…

Posterior a este diálogo, se determinó que el axioma se relacionaba con las posiciones relativas de una recta con una circunferencia: es tangente, es secante o no la corta. En el primer caso, el axioma tendría solo una solución; en el segundo caso, el axioma tendría dos soluciones y, en el tercer caso, no habría solución. Ver figura 64.

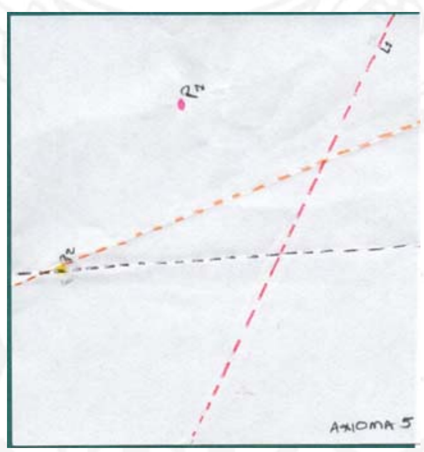


Figura 64: Axioma 5.

Axioma 6: "Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y a P_2 sobre l_2" (p. 38). Este axioma también hizo parte de las cinco proposiciones verdaderas que propusieron las profesoras en el encuentro anterior, dado que fue un paso que se hizo en la trisección de un ángulo; sin embargo, sus implicaciones no se analizaron en ese momento. Para determinar algunas ideas de este axioma, se hicieron algunas construcciones. En primer lugar, se analizó que los puntos P1 y P2 no podían pertenecer a los dobleces. En segundo lugar, se dialogó sobre la formación de una parábola cuando se lleva el punto P1 sobre muchos puntos de L1; así mismo, P2 sobre muchos puntos de L2. En este orden de ideas, se pudo concluir que el doblez solución debía ser una tangente común a las dos parábolas. Las demás implicaciones del axioma no se alcanzaron a establecer. Solo se les explicó a las profesoras que el axioma tenía a los sumo tres soluciones y que se relacionaban con una ecuación de tercer grado, de acuerdo con Lang (1996-2015). Ver figura 65.

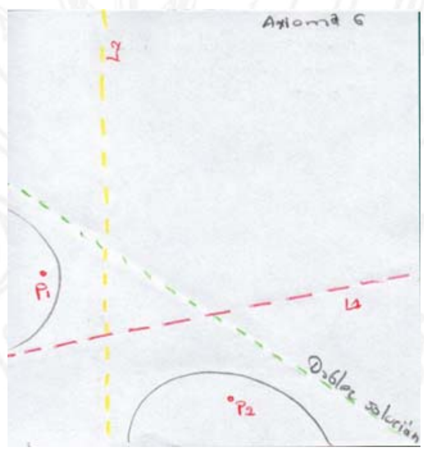


Figura 65: Axioma 6.

Axioma 7: “Dados un punto P_1 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez perpendicular a l_2 que ponga el punto P_1 sobre la línea l_1” (p. 39). Este axioma también fue nuevo para las profesoras; por lo tanto se hizo su construcción. Se determinó que el punto P1 no podía pertenecer al doblez L1 y que L1 no podía ser paralela a L2; así mismo, se concluyó que solo había una solución, la cual era tangente a una parábola de directriz L1 y foco P1, y normal al doblez L2. Ver figura 66.

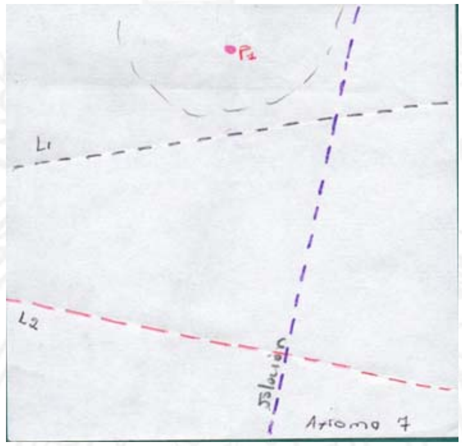


Figura 66: Axioma 7.

Finalmente, en la figura 67, se puede observar la bitácora de la profesora Vicky, con todas las ideas que escribió y reflexionó frente a los axiomas de Huzita-Hatori. Es importante recordar que la profesora no es del área de matemáticas, sino del área de química. Sin embargo, participó de manera activa en todos los encuentros.

4.4.7. Séptimo episodio. Algunas tareas de formación propuestas por el colectivo de profesoras de la Institución Educativa.

El séptimo episodio se desarrolló en el encuentro diez, o última sesión. En esta, el colectivo de profesoras debía proponer una tarea de formación, la cual será transformada, de manera posterior, en un artículo, una propuesta de aula o una ponencia para un evento del año 2016. Se les había pedido, inicialmente, que cada una de las participantes presentaran una tarea; sin embargo, ellas decidieron presentar una a nombre de las tres, lo cual también fue valioso, por el trabajo colaborativo que se observó al interior del grupo.

Las profesoras se dieron a la tarea de buscar, en Internet, algunos axiomas de Euclides o de Hilbert, e intentaron construirlos con doblado de papel. En este sentido, el primer axioma que mencionaron fue el siguiente: "por un punto pasan infinitas rectas"[11] (ver figura 68).

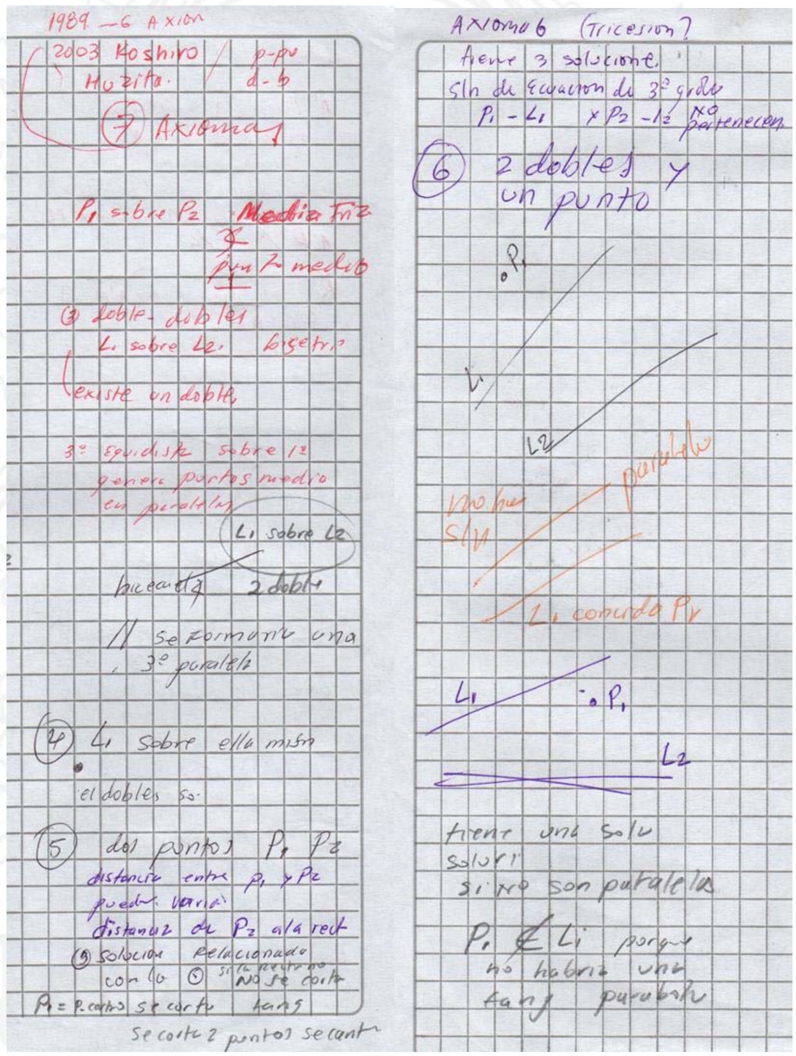


Figura 67: Bitácora de la profesora Vicky. Axiomas.

Hicimos la construcción en el colectivo y determinamos que por un punto pasan muchos dobleces. Pero asumimos que debíamos hacer varias preguntas clave para que los estudiantes de secundaria pudieran determinar que por un punto pasan infinitos dobleces;

[11] Este axioma fue tomado de la página: http://www.roberprof.com/tag/axiomas/

concluimos que pasar de lo concreto a lo abstracto, de lo discreto a lo continuo, era complejo con doblado de papel; pero que si se realizaban las preguntas adecuadas, con las construcciones indicadas, se podría lograr que los estudiantes infieran situaciones relacionadas con lo infinitesimal. Ver figura 69.

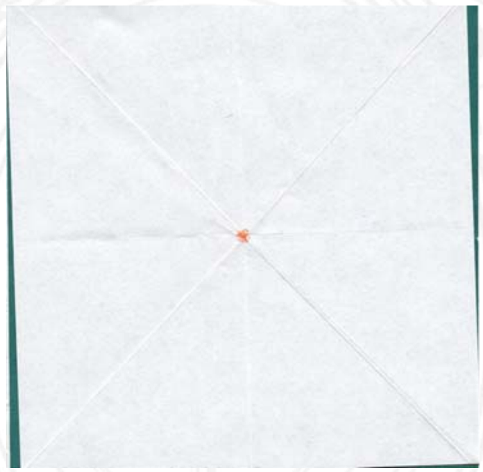


Figura 68: Por un punto pasan infinitos dobleces.

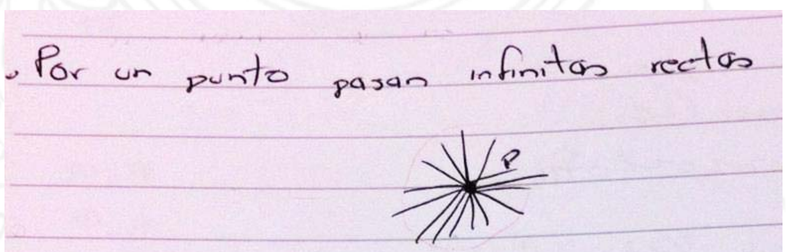


Figura 69: Por un punto pasan infinitas rectas. Bitácora.

El segundo axioma que mencionaron las profesoras, fue el tercero de Euclides: “se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio”[12] (figura 71). Para su construcción, analizamos que lo más pertinente era construir muchas bisectrices de los ángulos centrales de un cuadrado para, posteriormente, ubicar un punto en una de ellas, a una distancia del centro y trasladar ese punto (calcando) a las demás

[12] Este axioma fue tomado de la página: https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_euclidiana

bisectrices. Ver la construcción en la figura 70. Dicha construcción nos permitió definir la circunferencia como lugar geométrico y analizar cómo se podría llevar al aula de clase. Asumimos, a su vez, que solo era posible construir puntos discretos de la circunferencia con doblado de papel, pero con las preguntas adecuadas, los estudiantes podrían comprender la continuidad de la curva.

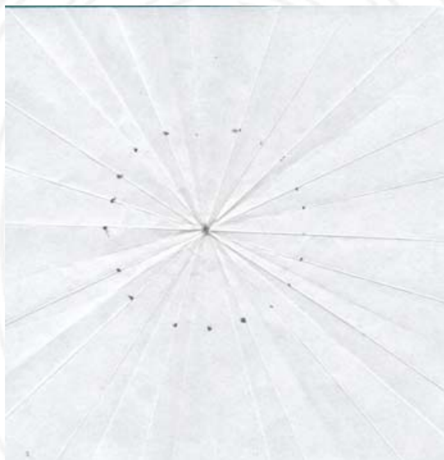


Figura 70: Construcción circunferencia.

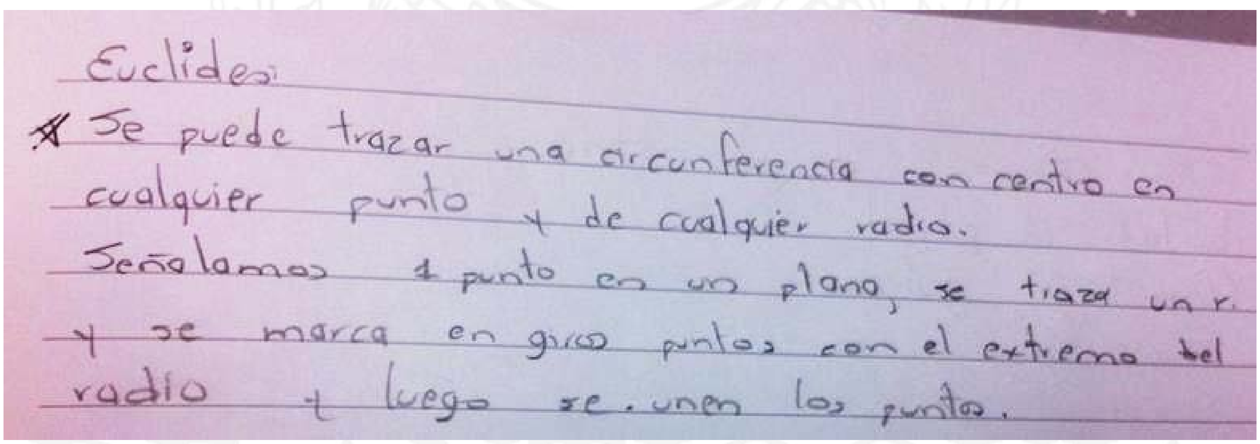


Figura 71: Bitácora profesora Elizabeth. Axioma de Euclides.

El tercer axioma que las profesoras mencionaron, fue el quinto postulado de Euclides, pero en su formulación inicial: “Si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado, menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente, se encontraran, en un lado en el que están cruzando los menores, que dos rectos”[13] (ver figura 73). Después de proceder a su construcción, establecimos que se trataba de la construcción de dos rectas concurrentes en algún lugar del plano; de la misma manera, asumimos que el no cumplimiento del axioma, genera la construcción de perpendiculares. En la figura 72, se puede observar la construcción hecha por la profesora Vicky.

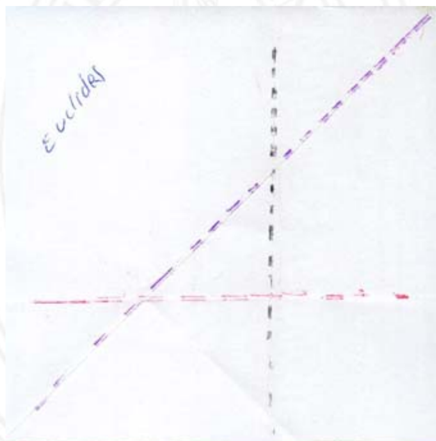
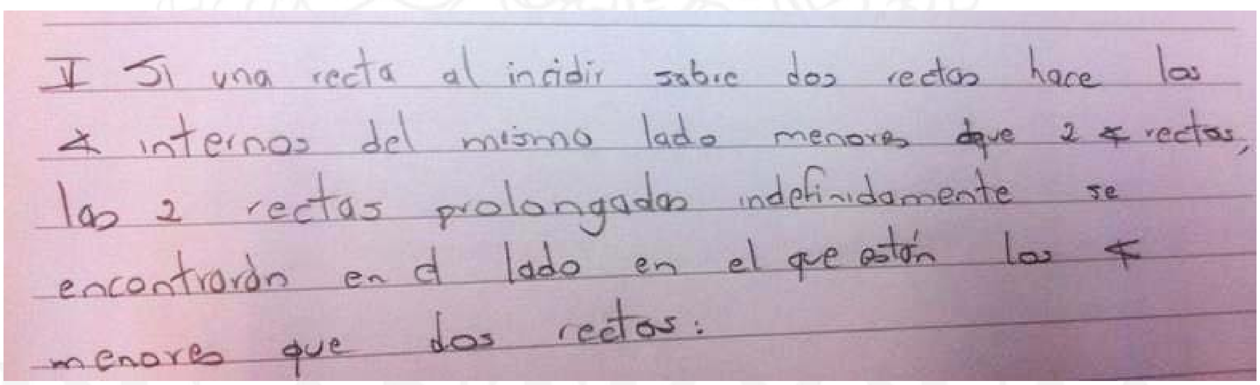


Figura 72: Construcción quinto postulado de Euclides.



V Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ∢ internos del mismo lado menores que 2 ∢ rectos, las 2 rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ∢ menores que dos rectos:

Figura 73: Bitácora profesora Elizabeth. Quinto postulado de Euclides.

[13] Este axioma fue tomado de la página: http://www.roberprof.com/2009/01/05/axiomas-de-euclides/

El cuarto axioma que las profesoras mencionaron es el axioma de las paralelas de Hilbert: “puede encontrarse una única recta b que pase por un punto dado A, el cual no pertenece a una recta dada a, de forma que a y b no tengan ningún punto en común. Esta recta se llama la paralela a a, que pasa por A”[14] (figura 75). Mencionamos que su construcción la habíamos hecho en encuentros anteriores. De todos modos, establecimos que dado un doblez b y un punto A que pertenece a este, es posible construir cualquier paralela a, al construir una perpendicular al doblez b y, posteriormente, construyendo cualquier perpendicular a este último doblez. La construcción, hecha por la profesora Vicky, se presenta en la figura 74.

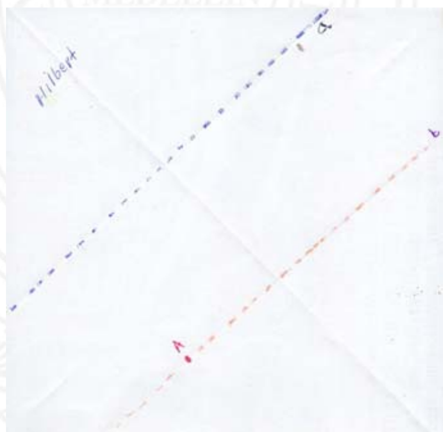


Figura 74: Construcción axioma de Hilbert.

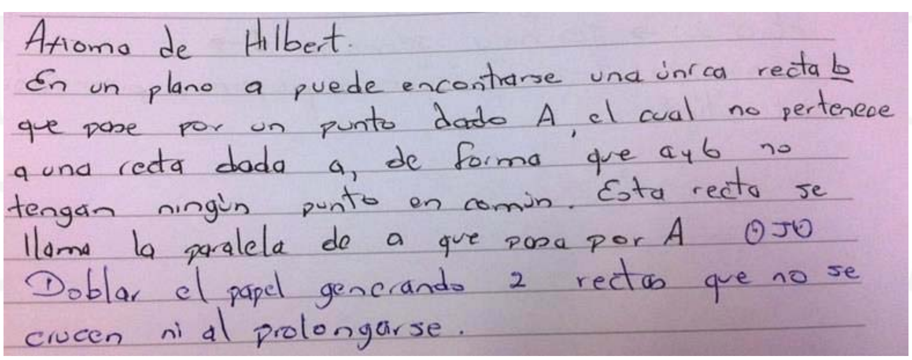

Axioma de Hilbert.
En un plano a puede encontrarse una única recta b
que pase por un punto dado A, el cual no pertenece
a una recta dada a, de forma que a y b no
tengan ningún punto en comun. Esta recta se
llama la paralela de a que pasa por A OJO
Doblar el papel generando 2 rectas que no se
crucen ni al prolongarse.

Figura 75: Axioma de Hilbert en bitácora.

[14] Este axioma fue tomado de la página: https://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Hilbert

Para dar por finalizado los encuentros, se les solicitó a las profesoras que escribieran su última reflexión en la bitácora (figuras 76-78). A continuación, se presentan dichas reflexiones:

La parte práctica del doblado de papel fue la herramienta del aprendizaje que construimos durante este semestre. Inicialmente desprendernos de los instrumentos de medición y construcción (regla, compás, transportador) e incluso del mismo calculo fue dificil para hablar con seguridad de la solución de un ejercicio. Reemplazar estos elementos por una hoja de papel que al doblarla cumplía o supliera las necesidades que podían tener de estos elementos para justificar o demostrar una definición geometrica fue en principio una ruptura con mi practica y los conocimientos con los cuales iba a la clase; pero luego de conocer cómo el doblado de papel es efectivo, incluso más que el mismo trabajo con los instrumentos tradicionales, cuando se quiere trabajar de manera concreta, logré adoptar a mi metodología de trabajo en el aula algunos elementos o réplicas de lo que trabajamos en los encuentros, para cuestionar a los estudiantes y generarles inquietud por el trabajo de la geometría de otra forma. Claro está que no he realizado con ellos un trabajo estructurado aún, pero me ayudó para los momentos en que nos faltó el material en clase.

El aporte de las compañeras durante las reuniones de trabajo me aportó reflexión sobre la transversalidad del área, en especifico de la asignatura de geometria, pues de ellas escuché no sólo la aplicación de un mismo concepto en otros grados diferentes al que trabajo, sino de otras áreas.

Pude despejar mejor una idea que un momento no pude desarrollar al escuchar sus conclusiones, sus soluciones o puntos de vista sobre lo discutido.

Además de esto Zaida orientó mi forma de plantear interrogantes, pues la manera como trabajamos en cada encuentro y cada concepto generó en mi interés en plantear el trabajo que realizo todos los días.

Realmente me siento satisfecha con lo realizado, pues he ganado del colectivo la inquietud de vivenciar en el aula y aplicar para producir o sistematizar la experiencia obtenida. Esta inquietud y el aprendizaje obtenido es lo más valioso que obtuve en el tiempo de los encuentros

Figura 76: Bitácora final profesora Natalia.

El colectivó de doblado de papel
ha generado en mí, un aprendizaje
de la geometria qué fortalece
los conceptos vagos que tenia.
Me permitió observar lo intangible
en tangible, se visibilizaron las
palabras en cada doblado y
me facilitaron la apropiación y
comprensión de conceptos.
geométricos.
La escucha del compañero genera
la dispersión de temores que se
traen por el poco manejo de
conceptos (~~que se~~ ~~[illegible]~~, las ideas
de los mismos generan otras
formas de ver y mejorar nuestras
practicas.
El doblado de papel lo considero
como una herramienta útil y
pertinente para la comprensión
de los conceptos por parte de
los estudiantes quienes aún aprenden
mejor desde lo concreto.
El poder ver y analizar cada axioma

teorema u otro por medio de los
dobleces los acerca más al
conocimiento geométrico y a sus
relaciones con el entorno; y
despierta la curiosidad por el
aprendizaje.

Figura 77: Bitácora final profesora Elizabeth.

De mis compañeros aprendi
mucho pues ello ayudaron a
que pudiera acercame
cada encuentro a los
destrezos que tenian al
abordar a través del doblado
de papel los conceptos que
se trabajaron en cada
encuentoo, es por eso
que para no estar muy
quedada, me vei en la
necesidad de lee
textos sobre los conceptos
para disfrutar de la
apropiacion de los conceptos
mediante el dobles de papel

todos las definiciones que
conocio sobre geometria era
eran tan poco acertivas
como el concepto, pero
apartir del trabajo con el
doblado de papel, aprendi
a describir lo que observa
en el doblado de papel
empleando terminos
conceptuales propios de
la geometría, ademas
comprendi la diferencias
entre bicetriz, mediatriz y
la relacion que debia hacer
para definir el punto geometrico

Figura 78: Bitácora final profesora Vicky.

Entrevista individual final.

Después de varias semanas de haber terminado los encuentros, volví a dialogar con las profesoras y decidí hacerles una entrevista semiestructurada individual, con el propósito de conocer, de manera directa, sus percepciones frente al trabajo realizado durante el semestre anterior, al interior del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel. Las respuestas a estas preguntas se consideraron dentro del análisis del séptimo episodio.

El guión que diseñé para las entrevistas, fue el siguiente:

1. ¿Aprendió algo durante las reuniones?

2. ¿Qué recuerda que aprendió?

3. ¿Cómo cree que se dio su proceso de aprendizaje?

4. ¿Qué le aportó el uso del doblado de papel?

5. ¿Para qué utilizaría, específicamente, el doblado de papel? ¿Por qué?

6. A futuro, ¿cómo usaría el doblado de papel en el aula de clase?

7. ¿Qué otros conocimientos, aparte del disciplinar, logró consolidar durante los encuentros?

8. ¿Qué le aportó el grupo de profesoras?

9. El trabajo llevado a cabo durante los encuentros, ¿le aportó a su formación como profesora? ¿De qué forma?

10. Durante los encuentros, ¿pudo reflexionar sobre su práctica pedagógica?

11. Para la profesora Vicky: Sabiendo que usted no es profesora de matemáticas, ¿de qué manera los encuentros le aportaron a su formación?

4.5. Análisis de los episodios

4.5.1. Análisis del primer episodio: colectivo de la Institución Educativa.

Durante el desarrollo del trabajo de campo, consideré unidades de análisis aquellos episodios que acontecen, como resultado de las interacciones entre el colectivo, con la investigadora y con el doblado de papel. A continuación, describo el proceso para la asignación de códigos, agrupamiento de los mismos y la generación de posibles categorías emergentes, que surgieron de dichas interacciones, a través de las actividades planteadas. Para el proceso de triangulación metodológica de este primer episodio, tuve presente tres fuentes de información: los materiales de las profesoras (producto de sus construcciones con doblado de papel), la observación del encuentro (transcripción de la grabación en audio) y las bitácoras construidas por cada una de las profesoras.

Códigos y su agrupamiento.

En los siguientes apartados exhibo las primeras familias de códigos, que emergieron del proceso de análisis del primer episodio, los cuales se relacionan con la producción de conocimiento geométrico escolar. Para cada uno, presento el esquema que asocia los códigos, con los fragmentos respectivos (registros) en Atlas.ti.

Aporte del colectivo de profesoras. Tal parece que las profesoras asumen que el *aporte del colectivo permite el enriquecimiento profesional y personal* (ver figura 82); de hecho*, la participación de una profesora de otra área* (ver figura 82), permite que las discusiones sean variadas y los conceptos o procedimientos se relacionen con aspectos de otras disciplinas (en este caso, química), generando, a su vez, *diálogos sobre proyectos interdisciplinares* (diálogo 3, episodio 1; ver figura 83); el grupo de profesoras también analizó, en conjunto, la pertinencia de usar la figura construida, con los conceptos asociados, en aulas de clase de primaria al generar un *diálogo sobre dicha construcción*; adicionalmente, cada profesora, desde su experiencia y saber, *hizo aportes de geometría al colectivo* (ver diálogo 1, episodio 1, ver figura 80). Ver esquema en la figura 79.

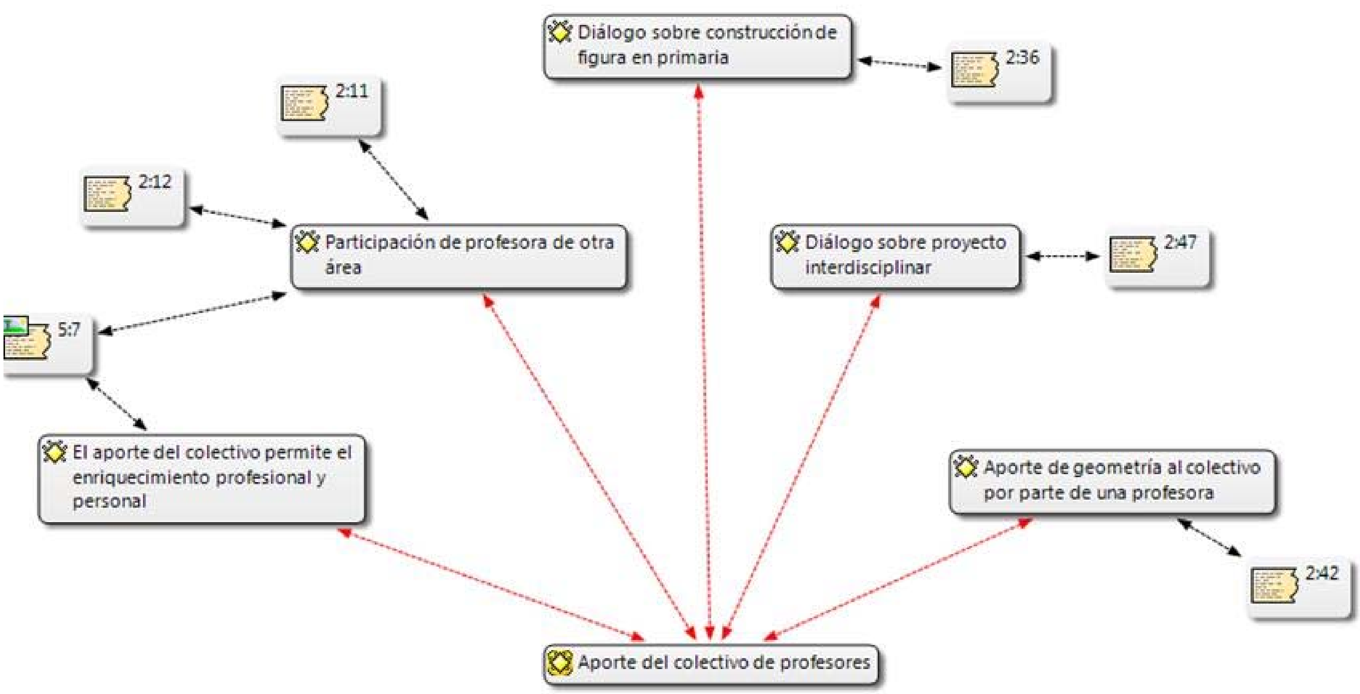
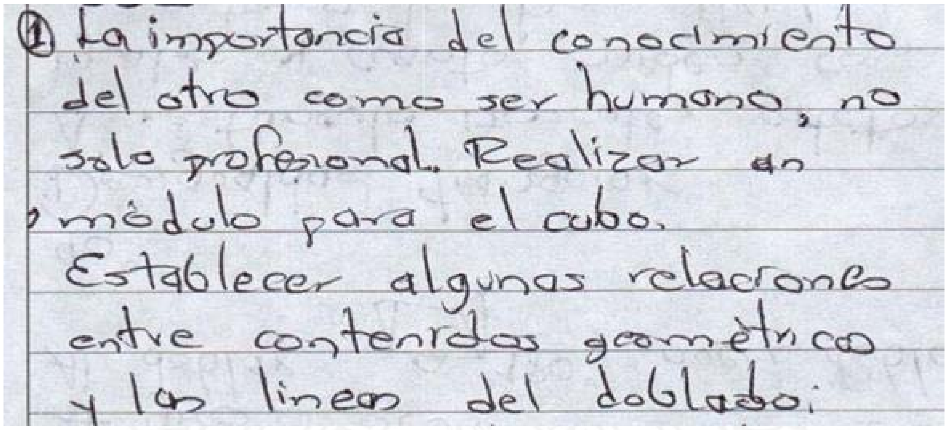
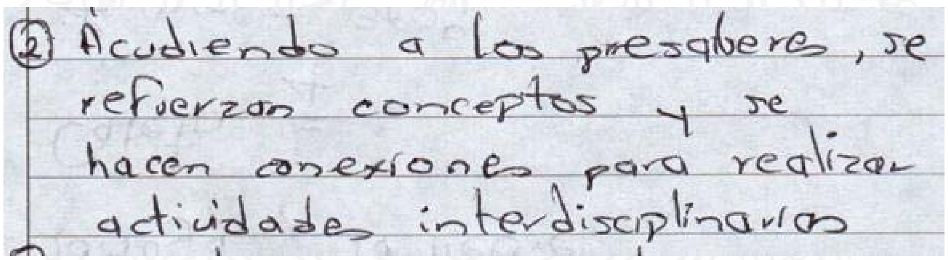


Figura 79: Esquema familia de códigos Aporte del colectivo de profesoras.



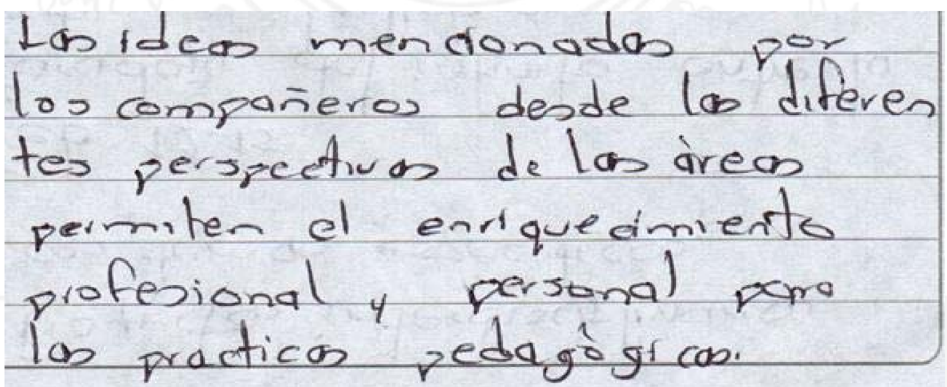
1 La importancia del conocimiento
del otro como ser humano, no
solo profesional. Realizar un
módulo para el cubo.
Establecer algunas relaciones
entre contenidos geométricos
y las líneas del doblado.

Figura 80: Bitácora profesora Elizabeth episodio 1. Pregunta 1.



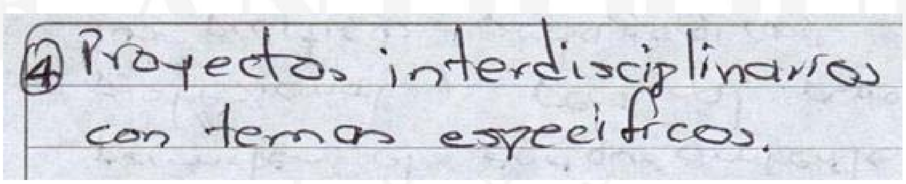
2 Acudiendo a los presaberes, se
refuerzan conceptos y se
hacen conexiones para realizar
actividades interdisciplinarias

Figura 81: Bitácora profesora Elizabeth episodio 1. Pregunta 2.



Las ideas mencionadas por
los compañeros desde las diferen
tes perspectivas de las áreas
permiten el enriquecimiento
profesional y personal para
las prácticas pedagógicas.

Figura 82: Bitácora profesora Elizabeth episodio 1. Pregunta 3.



4 Proyectos interdisciplinarios
con temas específicos.

Figura 83: Bitácora profesora Elizabeth episodio 1. Pregunta 4.

Confianza y reconocimiento del otro como profesor. Uno de los aspectos principales para la conformación del colectivo es, sin duda, *el reconocimiento del otro como ser humano* (ver figura 80), pues esto permite *generar espacios de confianza y apoyo*; incluso, cada profesora tuvo la oportunidad de hablar de sí misma. Es decir, tanto las profesoras participantes, como yo, realizamos nuestras respectivas *presentaciones*, enfatizando en aspectos relacionados con la academia y la experiencia laboral, profesional y docente. Además, se realizó la *construcción de una figura con doblado de papel, con dos intenciones: geométrica y de reconocimiento personal* (ver actividad en el episodio 1, ver foto en la figura 86), lo que, una vez más, permitió dialogar y reconocer situaciones relacionadas con la personalidad de cada profesora (*actividad de conocimiento personal*). Todos los conceptos desarrollados, las visualizaciones y conjeturas lanzadas, las construcciones y experimentaciones, fueron consignadas en el *diario de campo o bitácora* (ver figuras 88, 89 y 90) de cada profesora. Ver esquema en la figura 84.

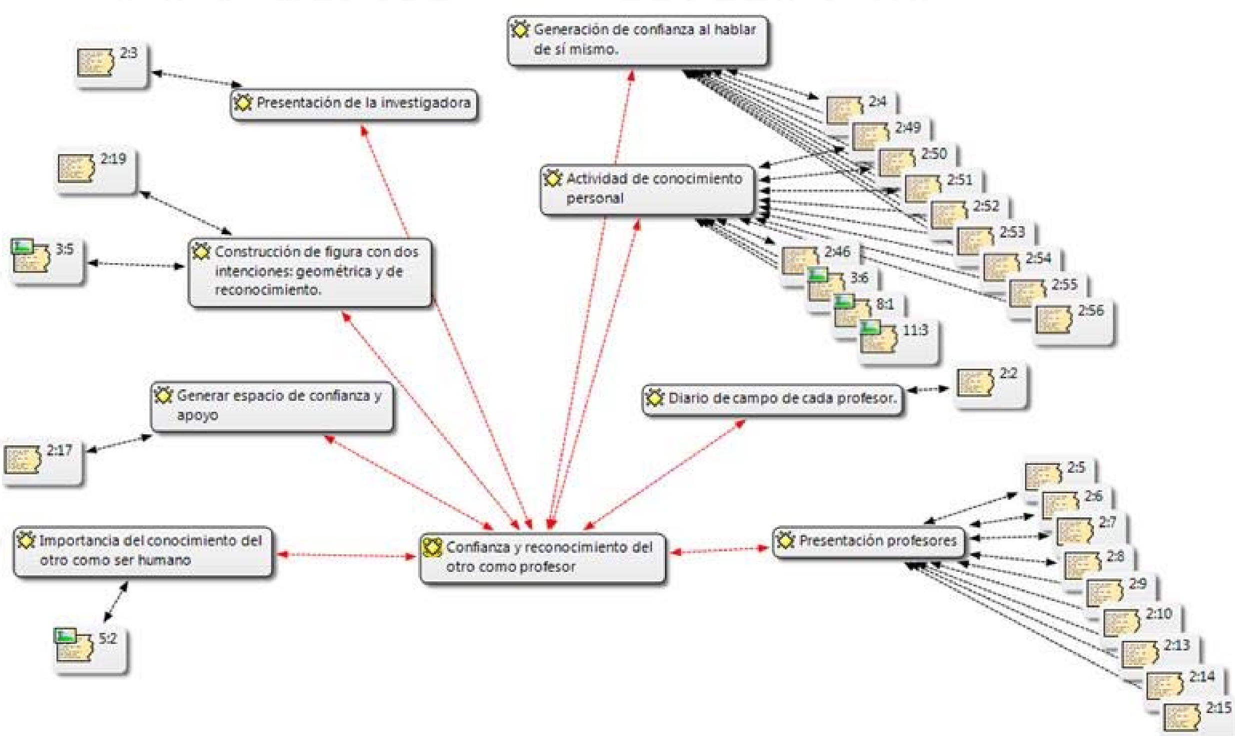


Figura 84: Esquema familia de códigos Confianza y reconocimiento del otro como profesor.

Desarrollo de conceptos de geometría escolar. Durante la sesión, las profesoras tuvieron la oportunidad de analizar algunos conceptos geométricos desde su enseñanza y aprendizaje, es decir, desde su incidencia en el aula de clase; en el marco de este escenario, se generaron algunos diálogos: *diálogo sobre la construcción de figura en primaria* (ver diálogo 2, episodio 1), en el que se destacó, entre otros asuntos, la necesidad de propiciar motricidad para la elaboración de las figuras y para el ensamblaje de piezas pequeñas, dado que el análisis y *la visualización*, que dependen de la precisión de la construcción, podrían permitir la producción de conocimiento geométrico en los estudiantes; *diálogo sobre proyecto interdisciplinario*, en el que se plantearon diferentes *reflexiones* e ideas sobre la consolidación de un proyecto visionado desde las diferentes áreas (ver diálogo 3, del episodio 1), utilizando como excusa la construcción de un cubo con doblado de papel, junto con su respectiva *visualización del mosaico de pliegues* (ver figura 87), con el ánimo de *trascender la parte lúdica* a conceptos y procedimientos matemáticos, químicos, físicos, entre otros.

Como se dijo anteriormente, los diálogos no solo permitieron la reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, sino que posibilitaron el análisis *de situaciones aritméticas con el doblado*, que pueden ser usadas para desarrollar el pensamiento numérico o, incluso, situaciones de cálculo infinitesimal. Por ejemplo, la profesora Elizabeth mencionó: “una sumatoria de un medio, más un cuarto, más un octavo eso que uno también lo puede hacer con una hoja de papel, o sea que puedan ellos ver una sumatoria”. Por lo tanto, las interacciones del colectivo permitieron un análisis del *uso del doblado de papel en el aula de clase*.

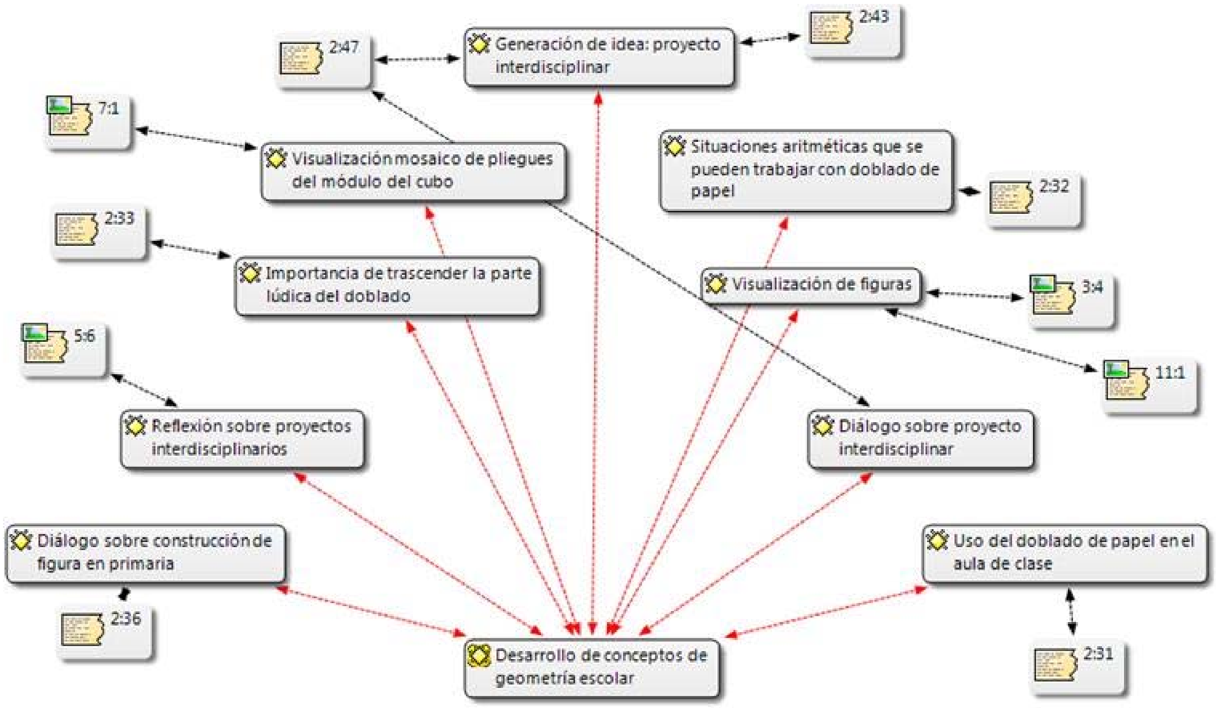


Figura 85: Esquema familia de códigos Desarrollo de conceptos de geometría escolar.

Figura 86: Construcción cubo. Episodio 1.

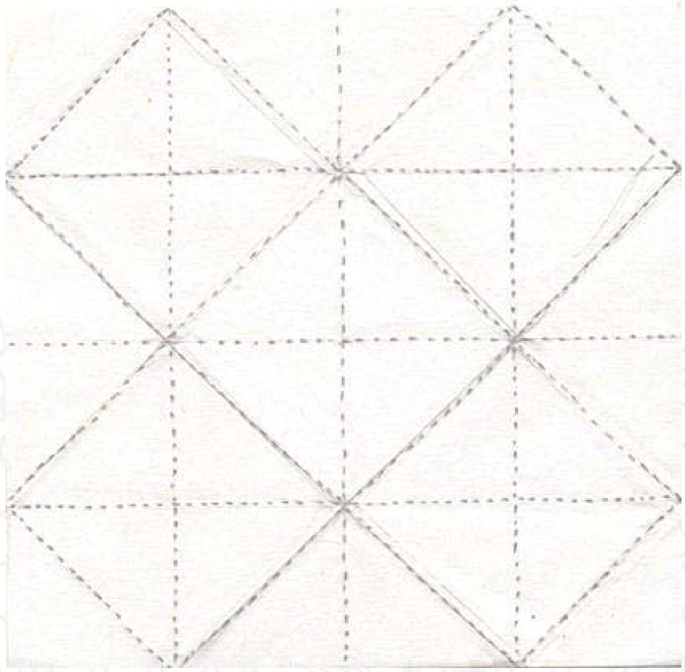
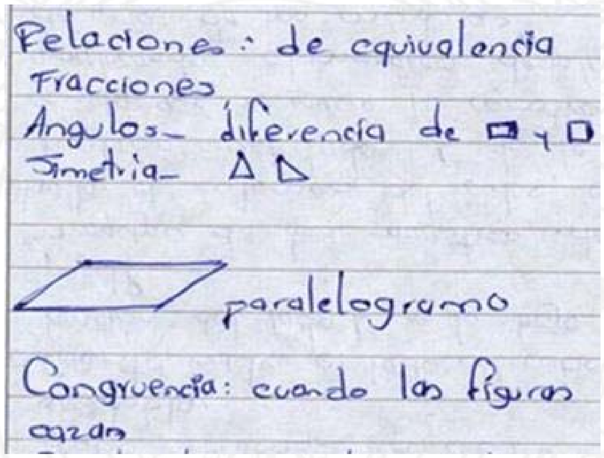


Figura 87: Mosaico de pliegues módulo del cubo. Episodio 1.

Desarrollo y análisis de conocimientos geométricos. El primer episodio no solo dio pie para dialogar sobre geometría escolar. Algunos asuntos relacionados con la geometría académica y con conceptos o procedimientos geométricos, también se destacaron. Por ejemplo, las profesoras hicieron *preguntas relacionadas con conocimientos geométricos*, las cuales, en su mayoría, fueron aclaradas al interior del colectivo (ver figura 20, del episodio 1). De hecho, las mismas participantes se apoyaban en sus experiencias y saberes para compartir algo de su interés (código: *aporte de geometría al colectivo por parte de una profesora*). La construcción del cubo con doblado de papel, fue un pretexto no solo para dialogar sobre los *conceptos geométricos relacionados* con esta (ver diálogo 1), sino también para *reconocer* algunos aspectos de la personalidad de cada profesora. Adicionalmente, el análisis del mosaico de pliegues de uno de los módulos de la figura, permitió que las profesoras *calcularan el volumen del cubo* (ver figura 89), en función de la medida del lado L de la hoja de papel con la se inició la construcción. Finalmente, cuando se les preguntó sobre su proceso de aprendizaje en la primera sesión, Elizabeth mencionó que "*Acudiendo a los presaberes, se refuerzan conceptos y se hacen conexiones para realizar actividades interdisciplinarias*" (ver figura 81).

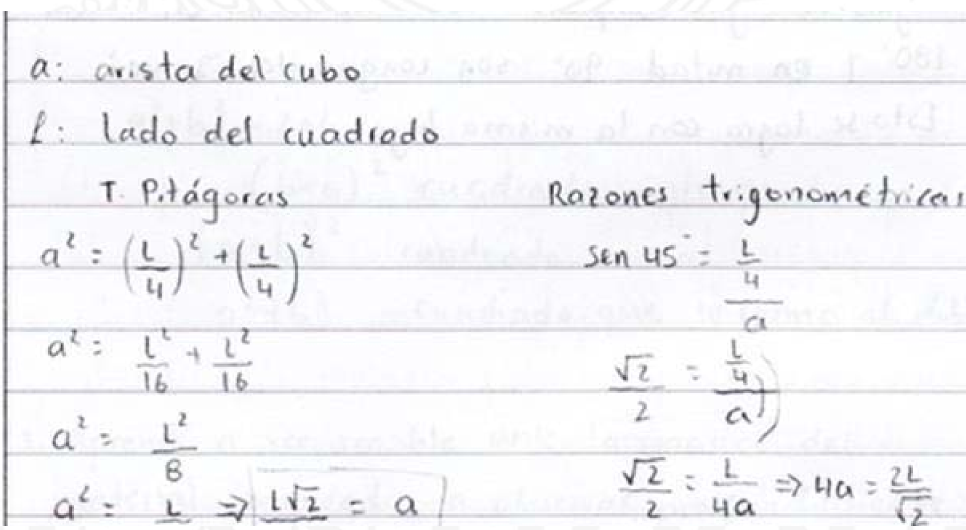


Relaciones: de equivalencia
Fracciones
Angulos_ diferencia de ▭ y □
Simetria_ △ ▷

paralelogramo

Congruencia: cuando las figuras
cazan

Figura 88: Bitácora profesora Elizabeth. Algunos conceptos importantes.



a: arista del cubo
l: lado del cuadrado

T. Pitágoras

$a^2 = \left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{L}{4}\right)^2$

$a^2 = \frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{16}$

$a^2 = \frac{L^2}{8}$

$a^2 = L \Rightarrow \boxed{L\sqrt{2} = a}$

Razones trigonométricas

$\operatorname{sen} 45° = \frac{\frac{L}{4}}{a}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{L}{4}}{a}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{4a} \Rightarrow 4a = \frac{2L}{\sqrt{2}}$

Figura 89: Bitácora profesora Natalia. Algoritmo para hallar el lado del cubo.

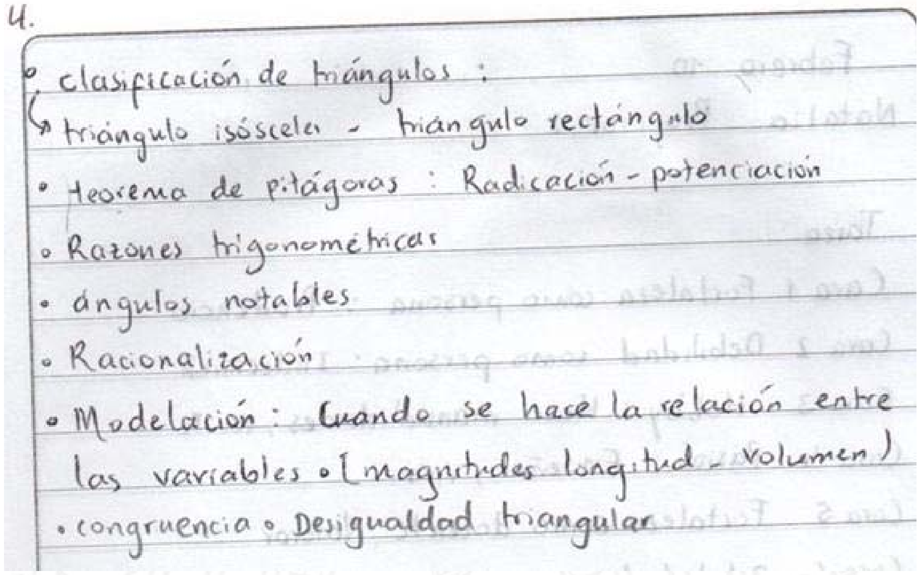

4.
° clasificación de triángulos :
↳ triángulo isósceles - triángulo rectángulo
• teorema de pitágoras : Radicación - potenciación
• Razones trigonométricas
• ángulos notables
• Racionalización
• Modelación : Cuando se hace la relación entre las variables • [magnitudes longitud - volumen)
• congruencia • Desigualdad triangular

Figura 90: Bitácora profesora Natalia. Respuesta a la pregunta 4.

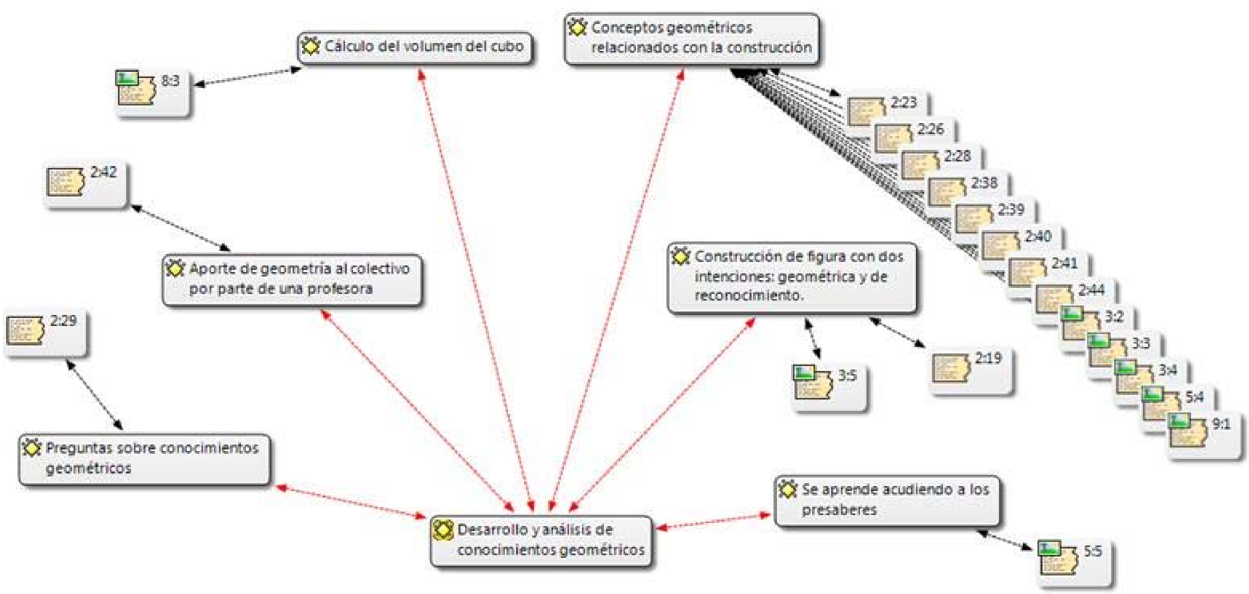


Figura 91: Esquema familia de códigos Desarrollo y análisis de conocimientos geométricos.

Reflexión sobre la práctica pedagógica. Las interacciones del colectivo durante este episodio, posibilitaron algunas reflexiones sobre la práctica pedagógica, considerando las experiencias (experiencia en primaria, en secundaria, en *universidad*), conocimientos, necesidades, gustos y deseos de las participantes. En este sentido, se pudo apreciar que una de las profesoras afirmó que "*las ideas mencionadas por los compañeros desde las diferentes perspectivas de las áreas permiten el enriquecimiento profesional y personal para las prácticas pedagógicas*" (ver figura 82). Además, algunos diálogos (diálogo 2 y diálogo 3, del episodio 1) permitieron que las participantes no solo analizaran la posibilidad de generar un *proyecto interdisciplinario*, desde las visiones de cada área, sino que se discutieran algunas ideas asociadas al *uso del doblado de papel al interior del aula de clase* (por ejemplo, *diálogo sobre construcción de figura en primaria* y *análisis de situaciones de aula para trabajar el cubo*). Es importante mencionar que muchos de estos aspectos fueron extraídos de las bitácoras o *diarios de campo de las profesoras*. Ver esquema general en la figura 92.

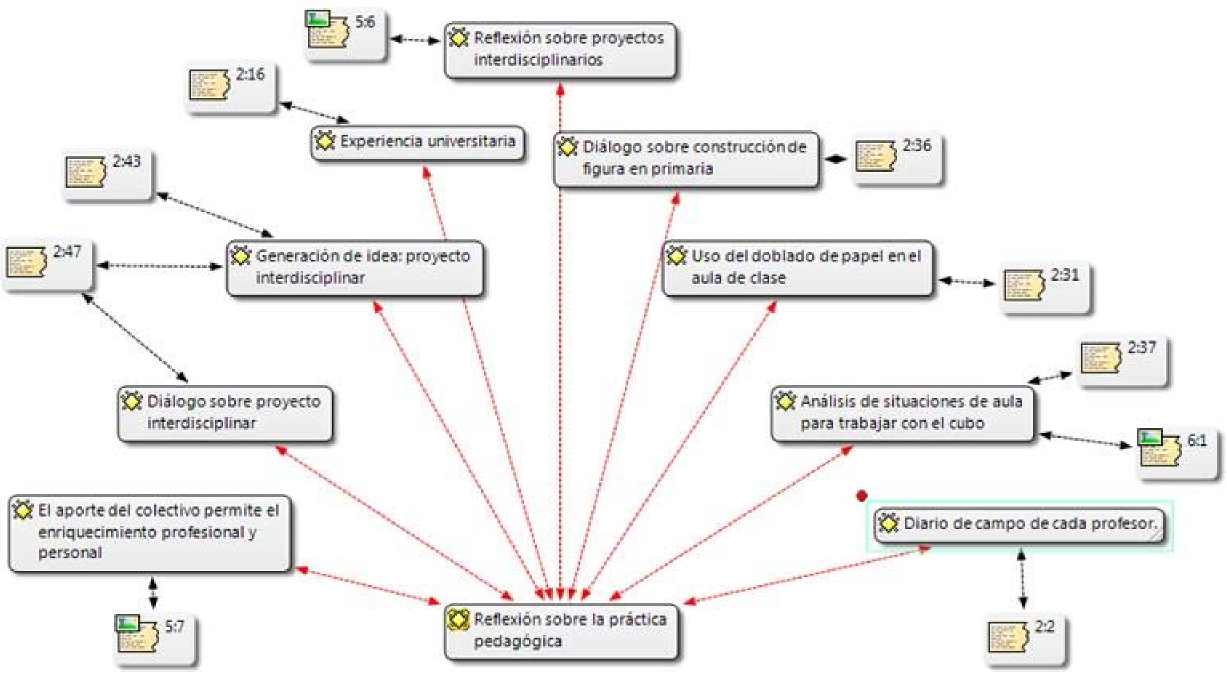


Figura 92: Esquema familia de códigos Reflexión sobre la práctica pedagógica.

Uso del doblado de papel para la comprensión de conceptos de geometría escolar. Durante el primer episodio se construyó un cubo con doblado de papel, como un primer *acercamiento* a este medio, con dos *intenciones*: primero, como pretexto para analizar conceptos y procedimientos geométricos y, en segundo lugar, para generar un espacio de reconocimiento personal de cada una de las participantes (ver foto en la figura 86). En cuanto a la primera intención, *el proceso de explicación, construcción y ensamblaje de la figura con doblado de papel*, permitió: *análisis de situaciones de aula para trabajar con el cubo*, análisis de *conceptos geométricos relacionados con la construcción* (ver diálogo 1), diálogos sobre la *historia del origami* y sobre la *historia de las mil grullas de papel*, procesos de *visualización* y generación de conjeturas a partir del *mosaico de pliegues* (ver diálogo 1), análisis de algunas *propiedades* del doblado de papel (ver figuras 87 y 90), *cálculo del volumen del cubo* (ver figura 89), diálogos sobre la pertinencia del *uso del doblado de papel en el aula de clase* y *la importancia de trascender su parte lúdica*, análisis de algunas situaciones de tipo aritmético que se pueden trabajar con doblado de papel, entre otras. Ver esquema en la figura 93.

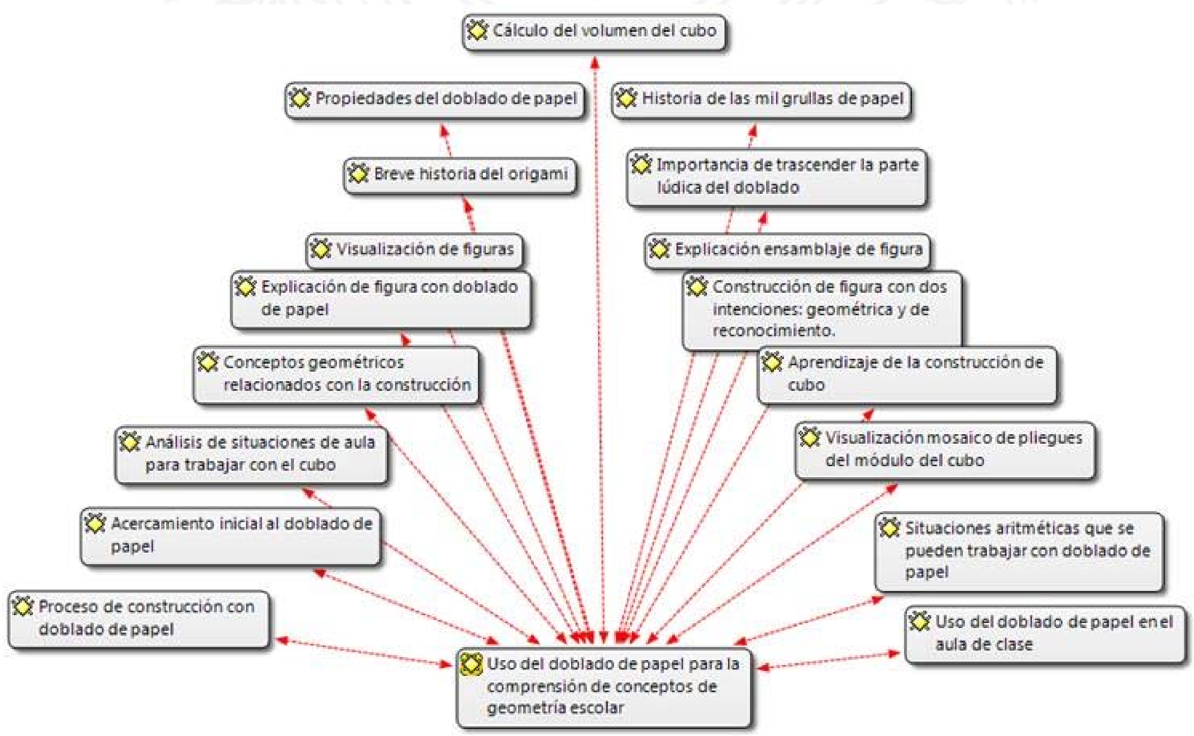


Figura 93: Esquema familia de códigos Uso del doblado de papel para la comprensión de conceptos de geometría escolar.

4.5.2. Análisis del segundo episodio: colectivo de la Institución Educativa.

El segundo episodio se relaciona con la puesta en común del cálculo del volumen del cubo y con la construcción del teorema de Pitágoras, con doblado de papel, y su respectivo análisis, desde la geometría escolar. Para la asignación de códigos y el agrupamiento de los mismos, se consideraron los materiales de las profesoras (sus construcciones), las transcripciones de los diálogos que se generaron en el encuentro y las bitácoras personales o diarios de campo de las participantes.

Códigos y su agrupamiento.

Comprensión y análisis de conceptos de geometría escolar (ver esquema en la figura 97). El segundo episodio permitió que las profesoras lograran comprender y analizar algunos conceptos de geometría escolar. Muchos de estos conceptos se asociaron directamente con el uso del doblado de papel en la *construcción del Teorema de Pitágoras* y de algunos *productos notables* (ver figura 96), dado que este medio permite *interpretar fórmulas a partir de los dobleces* (ver figura 94), procesos de visualización para la generación de conjeturas visuales (*aprovechar la visualización de la construcción para encontrar el área de un cuadrado*, por ejemplo), procesos de justificación (*diálogo sobre cómo probar perpendicularidad con doblado de papel*, diálogo 4 del episodio 2) y generación de pruebas visuales (*análisis de la modelación del volumen del cubo en el aula de clase,* ver figura 17, episodio 2). Sin embargo, se mencionó que se debía considerar *la destreza y la motricidad fina de los estudiantes*, pues son factores que influyen en la visualización de las construcciones y podrían afectar el desarrollo de conjeturas visuales verdaderas. Por lo tanto, la sesión les permitió a las participantes, *el aprendizaje del*

Teorema de Pitágoras y de algunos productos notables mediante el doblado de papel (ver figuras 101 y 104).

Con respecto al *análisis de situaciones de aula* y, en general, *de la práctica pedagógica*, el encuentro fue propicio para que las participantes *aprendieran conceptos a partir del trabajo en grupo* (ver figura 95), pues se sintieron *apoyadas por el colectivo en la comprensión de algunas ideas geométricas*; además, *se analizaron algunas situaciones de aula para trabajar los productos notables* y, en general, la pertinencia del *uso del doblado de papel en primaria*. Por su parte, dado que una de las profesoras no era del área de matemáticas, ella debió recurrir, en algunos momentos, a consultar algunos conceptos básicos de geometría: "*ah no yo estaba mirando conceptos de los que les escuché a los compañeros, entonces yo me fui a mirar qué era un punto, qué era una recta, una semirrecta, un segmento, un plano, polígono, cuáles son las partes del polígono, qué es un cuerpo geométrico, qué es congruencia y los ángulos*".

Adicionalmente, se generaron algunos diálogos sobre la *abstracción de conceptos geométricos*, en particular, se discutió sobre la posibilidad de usar el doblado de papel para la comprensión de los *conceptos primitivos de la geometría euclidiana* que son tan *difíciles de entender* (específicamente se *discutió sobre el concepto de plano,* idea que puede apreciarse en la *bitácora* de una de las profesoras) o del concepto de infinito; se percibió que una de las profesoras pudo llegar a la *comprensión del concepto de plano a partir de las interacciones del colectivo*. Básicamente, se percibió que *el doblado de papel se puede usar como pretexto para llegar al conocimiento* geométrico.

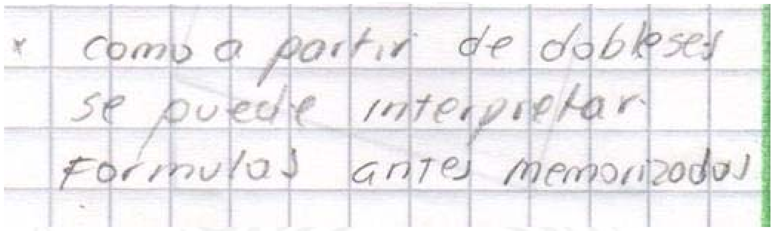
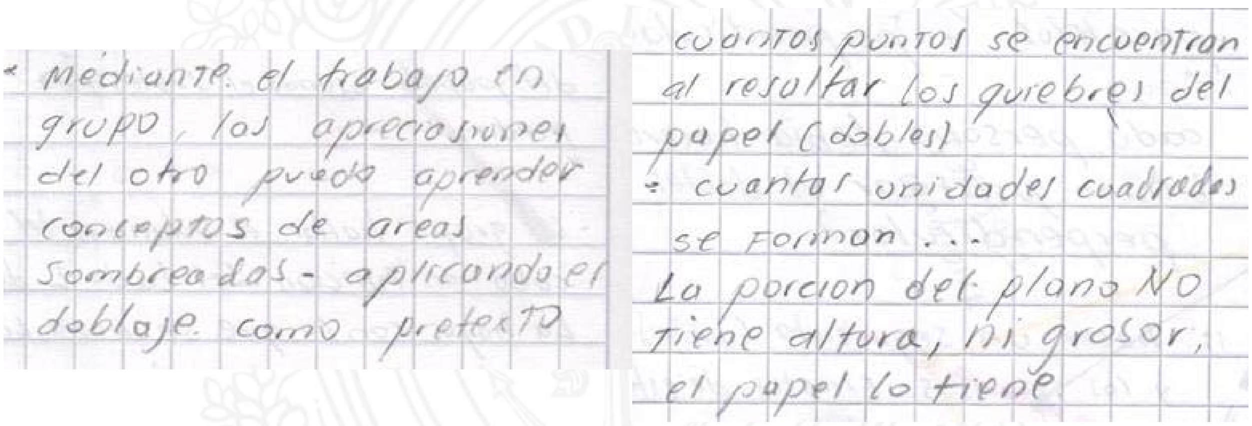

* como a partir de dobleses
se puede interpretar
formulas antes memorizadas

Figura 94: Bitácora profesora Vicky. Episodio 2.


* mediante el trabajo en
grupo, las apreciasiones
del otro puedo aprender
conceptos de areas
sombreados - aplicando el
doblaje como pretexto

cuantos puntos se encuentran
al resultar los quiebres del
papel (dobles)
* cuantas unidades cuadradas
se forman ...
La porcion del plano NO
tiene altura, ni grosor,
el papel lo tiene

Figura 95: Bitácora de la profesora Vicky: Episodio 2.

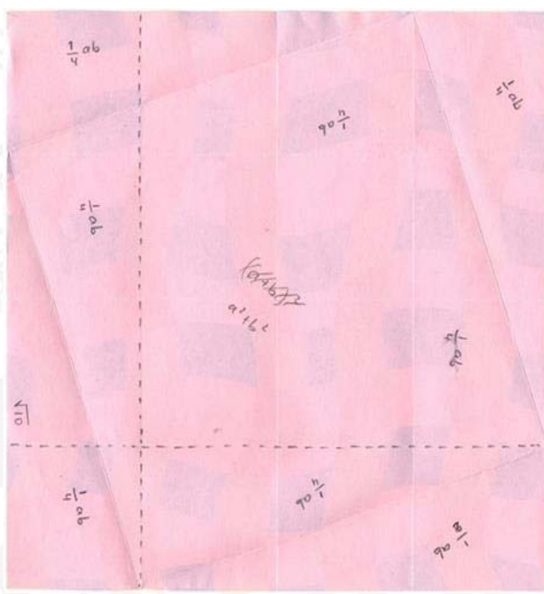


Figura 96: Mosaico de pliegues teorema de
Pitágoras.

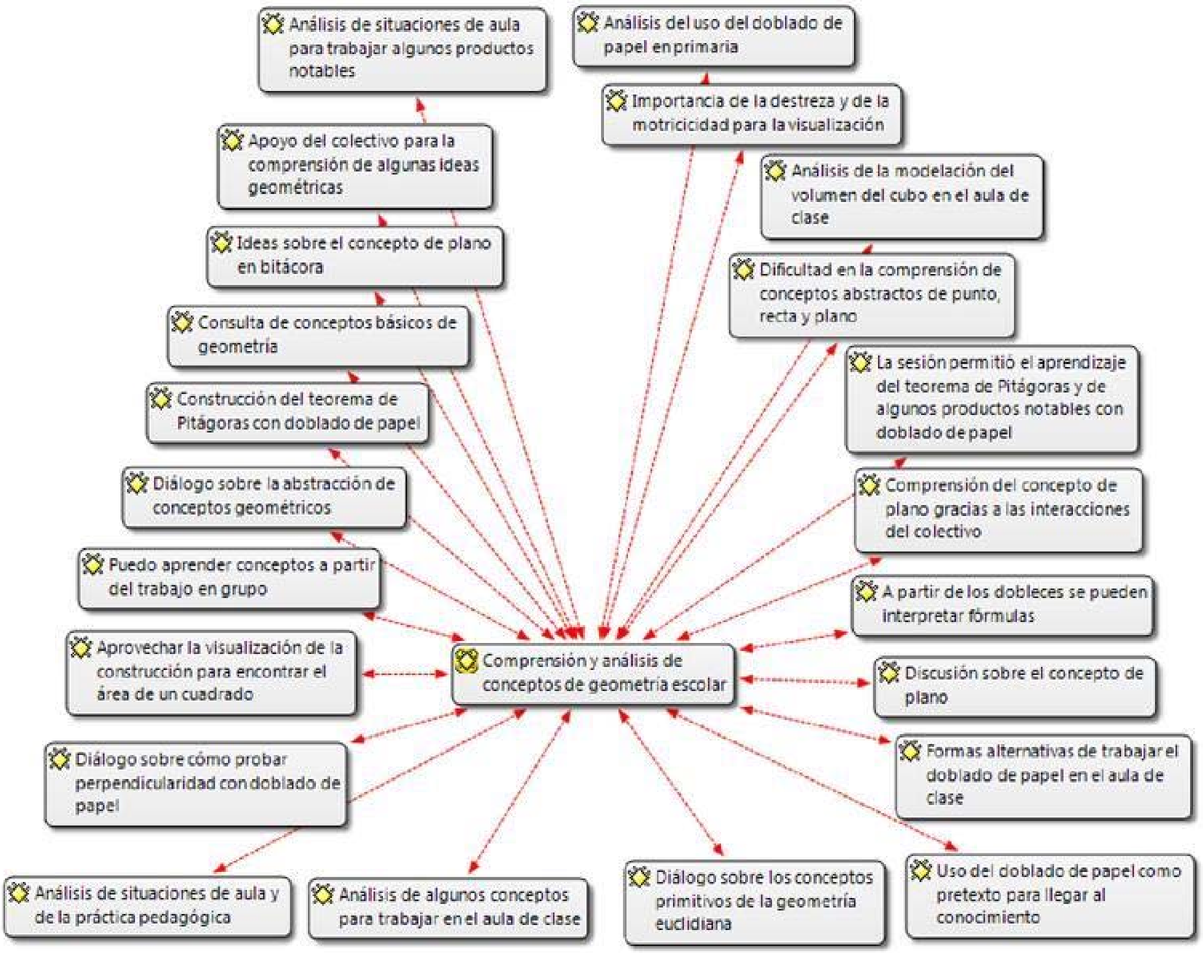


Figura 97: Esquema familia de códigos Comprensión y análisis de conceptos de geometría escolar.

Comprensión y análisis de conceptos geométricos mediante el doblado de papel (ver esquema en la figura 99). Las interacciones del colectivo de profesoras con el doblado de papel, me permitieron determinar que este es un medio que posibilita la comprensión y análisis de conceptos geométricos, pues se convierte en un *pretexto para la producción de conocimiento*. Es decir, permite hacer construcciones y experimentar con estas (por ejemplo, *se construyó el Teorema de Pitágoras con doblado de papel*, ver figura 96), visualizar y generar conjeturas visuales (por ejemplo, posibilitó *análisis del mosaico de pliegues del módulo del cubo*, *análisis de los triángulos relacionados con la construcción del módulo del cubo*, *generación de conjeturas visuales para la mostración del volumen del* *cubo*, *aprovechar la visualización de la construcción para encontrar el área de un cuadrado*), probar conjeturas y justificar procedimientos (*algoritmo del cálculo del volumen del cubo* (ver figura 17, episodio 2), *algunas ideas sobre la mostración de la perpendicularidad con doblado de papel en bitácora* (ver figura 98), *diálogo sobre cómo probar perpendicularidad con doblado de papel* (diálogo 4), *algoritmo del cálculo del volumen del cubo en bitácora* (ver figura 89)).

De acuerdo con las ideas de las profesoras, el segundo encuentro propició un espacio para *el aprendizaje del Teorema de Pitágoras y de algunos productos notables con doblado de papel* (ver figura xx). En este sentido, se percibió que las participantes hallaron *soluciones alternativas para encontrar el área de un cuadrado a través de la visualización del mosaico de pliegues* de la construcción; adicionalmente, pudieron elaborar *análisis de otros conceptos geométricos involucrados en la construcción* de dicho teorema. Es decir, manifestaron que *a partir de los dobleces se pueden interpretar fórmulas* (ver figura 94) antes memorizadas

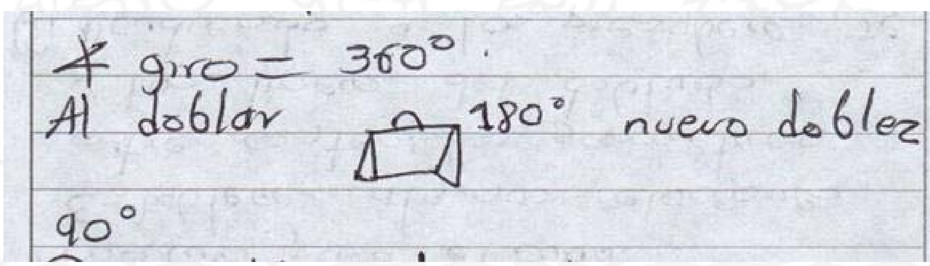


Figura 98: Bitácora profesora Elizabeth. Episodio 2.

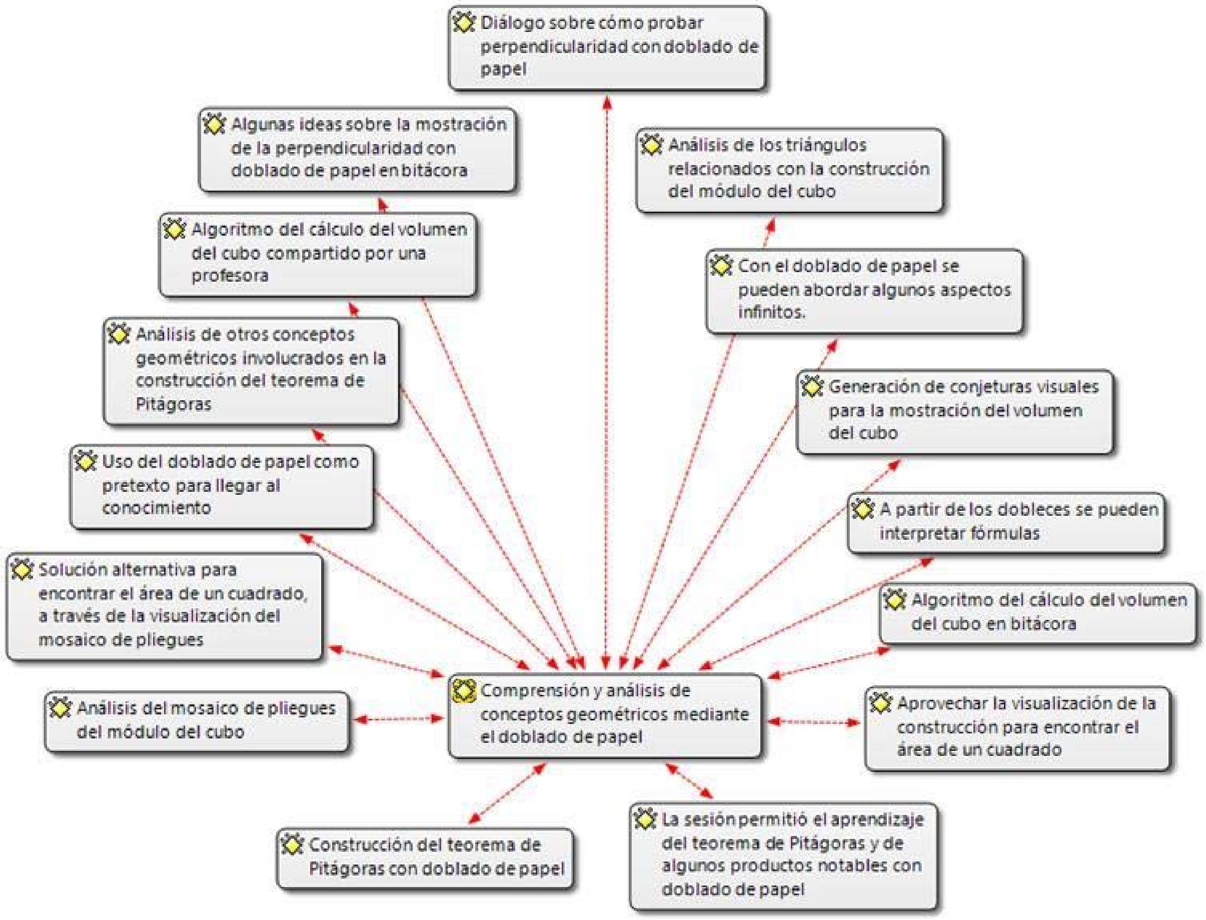


Figura 99: Esquema familia de códigos Comprensión y análisis de conceptos geométricos mediante el doblado de papel.

El colectivo aporta a la formación de las profesoras en geometría escolar (ver esquema en la figura 100). Una vez más, el segundo encuentro dio pie para inferir que las interacciones del colectivo de profesoras aportan al conocimiento de la geometría escolar, como uno de los principales aspectos de la formación de profesores. Las participantes reconocieron que el aprendizaje alcanzado fue colaborativo (ver figura 21, episodio 2), es decir, el trabajo en el colectivo no solo les permitió recordar conceptos y procedimientos, sino la comprensión de los mismos. De hecho, se percibió que las profesoras relacionaron el aporte del colectivo con el desarrollo de su conocimiento profesional; al respecto, mencionó la profesora Elizabeth: "*nosotros somos los que estamos en el aula, nosotros* *somos los que estamos todo el tiempo ahí y eso es lo que debería enriquecernos, entonces escuchar el otro que me diga, vea es que eso se hace así o esto no se debe hacer así o yo no entendí esto, pues bueno eso le da a uno cabida para que uno piense otras cosas, entonces eso me parece muy importante, fuera de que no solamente me enriquece a mi pedagógicamente las prácticas sino a nivel personal*".

Por su parte, la profesora Natalia afirmó "*el colectivo fue el complemento de lo que aprendí*" (ver figura 20, episodio 1) y "*escuchar las ideas de los compañeros me motivó para pensar soluciones adicionales*" (ver figura 20, episodio 1). La profesora Vicky también manifestó que "*puedo aprender conceptos a partir del trabajo en grupo*" (ver figura 95). De hecho, esta última profesora, por ser de otra área, pudo llegar *a la comprensión del concepto de plano, a través de las interacciones del colectivo*. De acuerdo con lo anterior, se puede establecer que muchos de los procesos de comprensión y de aprendizaje de las profesoras, se basaron *en las observaciones planteadas por sus otras compañeras* (por ejemplo, la profesora Natalia les explicó a sus otras compañeras el *algoritmo del cálculo del volumen del cubo*, ver figura 17, episodio 2).

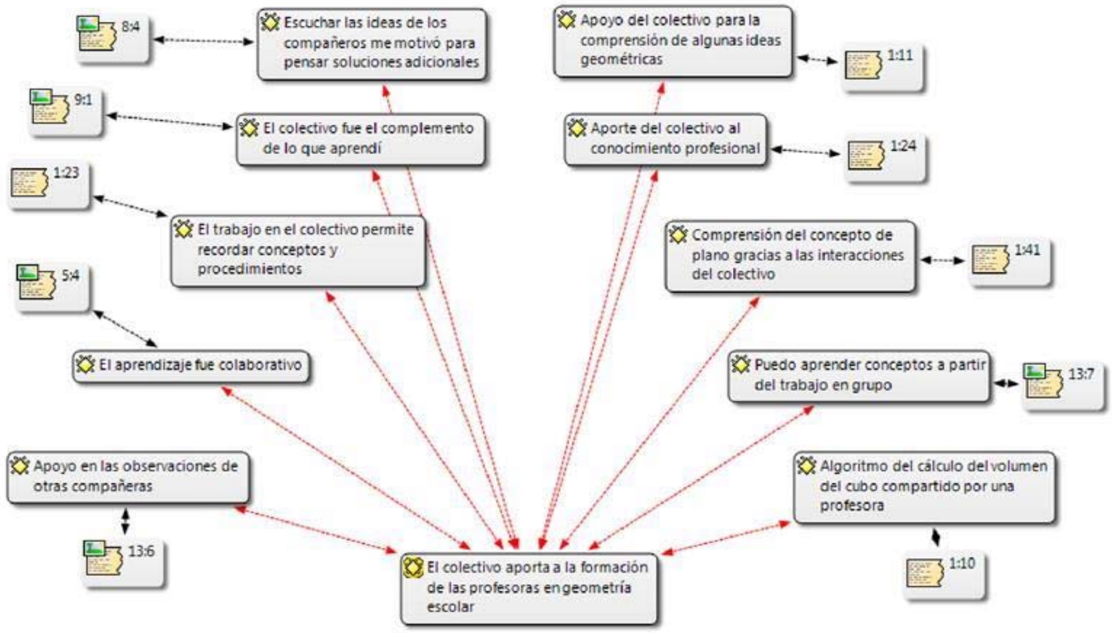
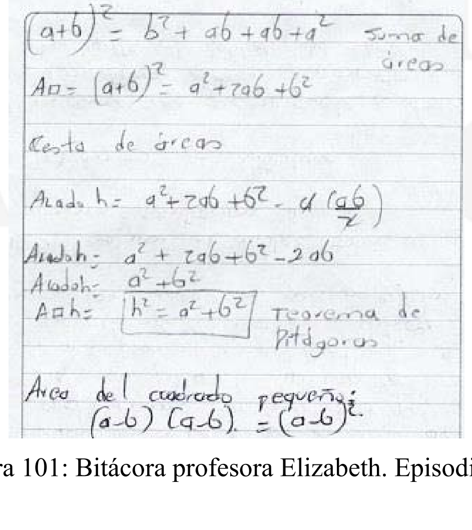


Figura 100: Esquema familia de códigos El colectivo aporta a la formación.

Comprensión y análisis de conceptos y procedimientos de geometría académica (ver esquema en la figura 102). El encuentro no solo propició una comprensión y análisis de conceptos de geometría escolar, sino que también generó que las profesoras comprendieran conceptos y procedimientos propios de la *geometría* (los cuales se pueden apreciar en las *bitácoras* de las profesoras), sin considerar su enseñanza en el aula de clase. En este sentido, con respecto a la construcción del Teorema de Pitágoras con doblado de papel, se logró: establecer una imagen visual del teorema (ver figura 96), generar conjeturas sobre la mostración del mismo (ver figura 101), analizar otros conceptos geométricos involucrados en la construcción, recuento de algunos productos notables (ver figura 101), generación de conjeturas sobre la mostración de algunos productos notables (ver figura 101), entre otros.

Con respecto al cálculo del volumen del cubo, utilizando la visualización del mosaico de pliegues con doblado de papel, se logró: *generar conjeturas visuales para la mostración del volumen del cubo* (ver figura 17, episodio 2), *analizar los triángulos relacionados con la construcción del módulo del cubo* (ver figura 87), *establecer un algoritmo para calcular el volumen en función del lado L de la hoja* (ver figura 89), el cual fue compartido por la profesora Natalia, *generar ideas acerca del cálculo del volumen del cubo a través de razones trigonométricas*.

Además, también se generó un *diálogo sobre los conceptos primitivos de la geometría euclidiana* y su carácter *abstracto*, a raíz de una pregunta de la profesora Vicky, relacionada con el concepto particular de plano: *¿cuántos planos cuadrados se forman (combinando celdas unitarias) que sirven para hallar el volumen del cubo?* (ver figura 95). La profesora Natalia le respondió que no debía hablar de planos cuadrados, sino de unidades cuadradas. La *discusión* que se presentó posteriormente, le permitió a la profesora Vicky *comprender el concepto de plano, gracias a las interacciones del colectivo*. Estas ideas fueron plasmadas en su *bitácora* (ver figura 95), junto con la *consulta de algunos conceptos básicos de geometría*, dada la necesidad de reconocer definiciones que son desconocidas por ser profesora de otra área.



$(a+b)^2 = b^2 + ab + ab + a^2$ Suma de áreas

$A\square = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Resta de áreas

$A_{lado}\,h = a^2 + 2ab + b^2 - 4\left(\frac{ab}{2}\right)$

$A_{lado}\,h = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$

$A_{lado}\,h = a^2 + b^2$

$A\square h = \boxed{h^2 = a^2 + b^2}$ Teorema de Pitágoras

Área del cuadrado pequeño: $(a-b)(a-b) = (a-b)^2$.

Figura 101: Bitácora profesora Elizabeth. Episodio 2.

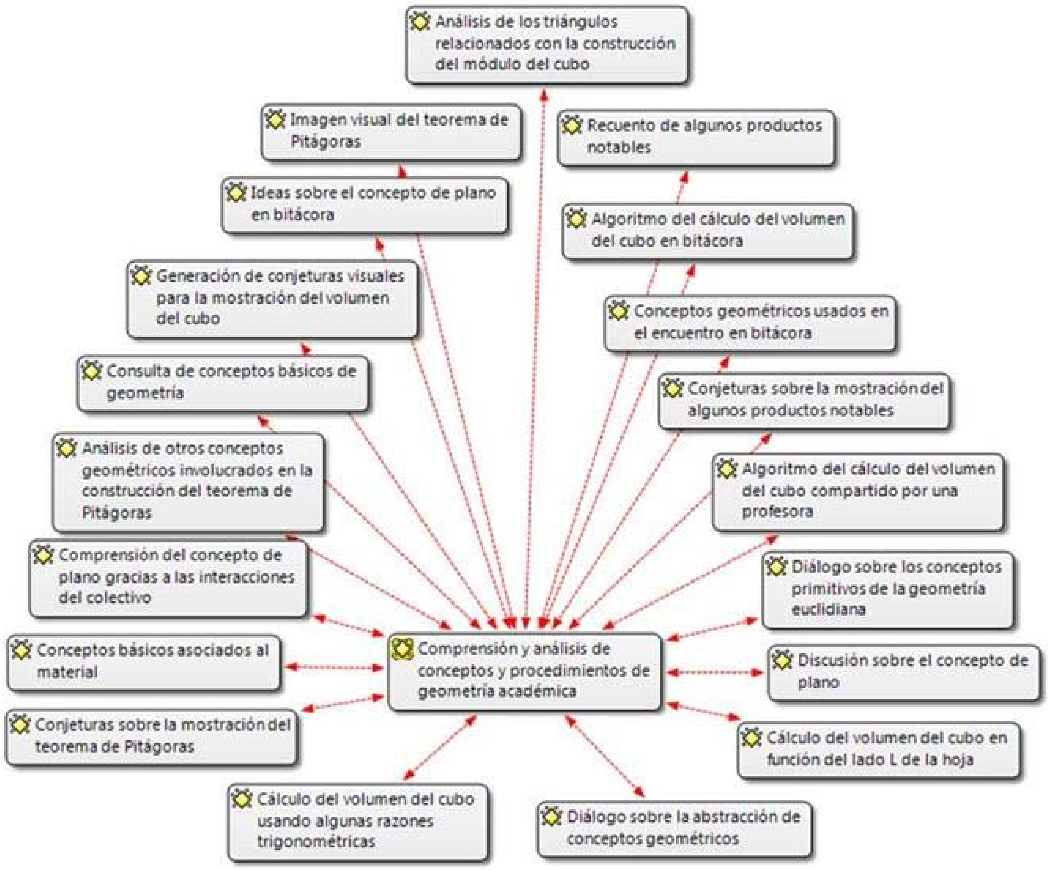


Figura 102: Esquema familia de códigos Comprensión y análisis de conceptos y procedimientos de geometría académica.

Incidencia del doblado de papel en el aula de clase (ver esquema en la figura 103). Tal como se mencionó anteriormente, el doblado de papel permite la comprensión y el análisis de conceptos geométricos en las profesoras. Sin embargo, también es importante afirmar que les posibilita analizar su práctica pedagógica y la incidencia de este medio en el aula de clase. En concordancia con las ideas de las participantes, el doblado de papel propicia: *la interpretación de fórmulas a partir de los dobleces* (ver figura 94), la experimentación de construcciones (*construcción del Teorema de Pitágoras con doblado de papel*, ver figura 96), la visualización de figuras (*aprovechar la visualización de la construcción para encontrar el área de un cuadrado*, ver figura 96), la generación y prueba de conjeturas visuales (por ejemplo, *diálogo sobre cómo probar perpendicularidad con doblado de papel* (ver diálogo 4), *solución alternativa para encontrar el área de un cuadrado a través de la visualización del mosaico de pliegues*).

Por otro lado, se destacó la importancia de *analizar algunos conceptos para trabajar en el aula de clase* (por ejemplo, *analizar situaciones de aula para trabajar algunos productos notables* o para abordar algunos *aspectos infinitos*), considerando como una *forma alternativa el doblado de papel*, pero atendiendo a las particularidades propias del material, dado que la visualización y la generación de conjeturas visuales verdaderas, dependen en gran medida de la *destreza y motricidad* de los estudiantes con respecto a la construcción de dobleces. De la misma manera, las profesoras analizaron el uso del doblado de papel, particularmente en primaria, para generar procesos de comprensión, aprovechando la sencillez y facilidad que este medio otorga.

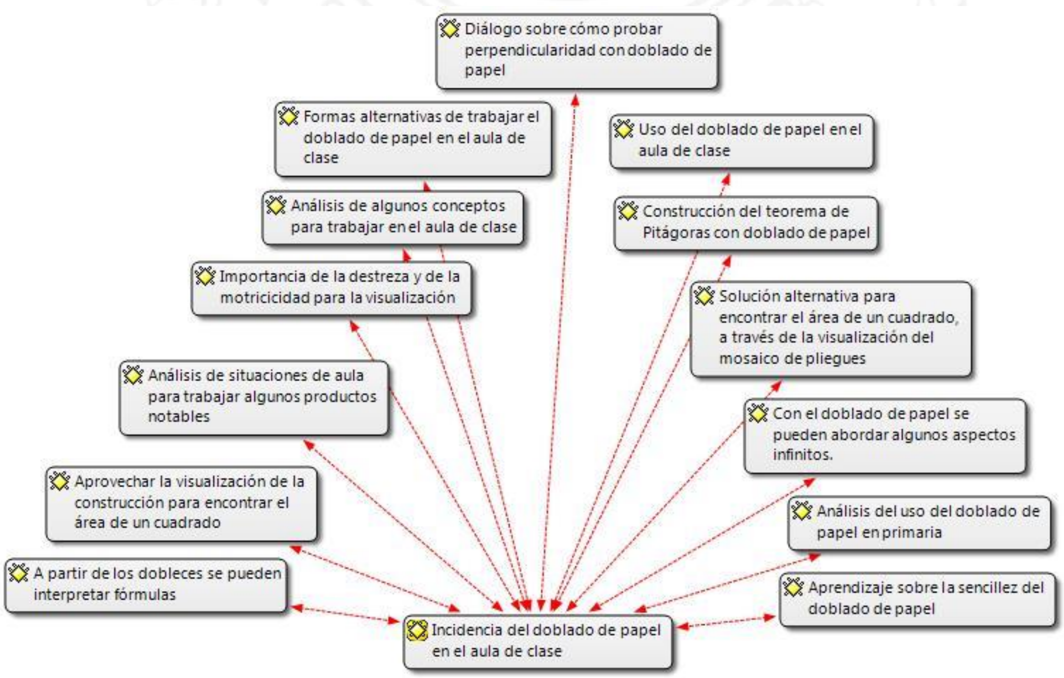


Figura 103: Familia de códigos Incidencia del doblado de papel en el aula de clase.

Reflexión sobre la práctica pedagógica (ver esquema en la figura 105). El segundo encuentro también propició que las profesoras pudieran hacer reflexiones sobre su práctica pedagógica, no solo al *analizar situaciones de aula* que involucraran el uso del doblado de papel (*análisis de situaciones de aula para trabajar algunos productos notables*, *formas alternativas de trabajar el doblado de papel en el aula de clase*, entre otros), sino también al analizar, de manera retrospectiva, situaciones vividas en el pasado en el aula de clase (ver bitácora profesora Natalia, figura 20, episodio 2). A su vez, se *analizaron algunos conceptos geométricos para trabajar en el aula de clase* (ver figuras 104 y 21, del episodio 2) mediante el doblado de papel y también la pertinencia de *usar este medio en los salones de clase de primaria*. Adicionalmente, se rescata el hecho de que las profesoras manifestaran la idea de *generar proyectos interdisciplinarios*, que permitan el *diálogo entre las diferentes áreas.*

Por otro lado, también se resaltó que el colectivo aportó en gran medida al *conocimiento profesional* de las profesoras (cuando la profesora Elizabeth mencionó "[…] *escuchar el otro que me diga, vea es que eso se hace así o esto no se debe hacer así o yo no entendí esto, pues bueno eso le da a uno cabida para que uno piense otras cosas, entonces eso me parece muy importante, fuera de que no solamente me enriquece a mi pedagógicamente las prácticas sino a nivel personal*"), por generar un ambiente de confianza, apoyo mutuo, respeto y *reconocimiento del otro como persona*. Al respecto, la profesora Elizabeth mencionó: "*ese momento de reconocimiento personal me pareció muy importante porque nosotros llevamos muchos años acá, compartiendo muchas cosas y no conocíamos muchas cosas de los demás compañeros; además no solo es compartir los* *espacios académicos, sino compartir la experiencia pedagógica, además de ciertos vínculos que no tienen que ser relaciones estrechas*".

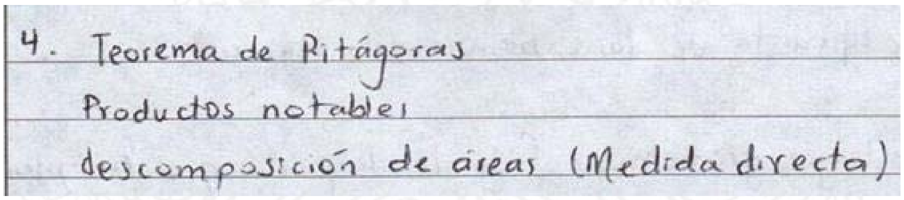

4. Teorema de Pitágoras
Productos notables
descomposición de áreas (Medida directa)

Figura 104: Bitácora profesora Natalia. Respuesta a pregunta 4.

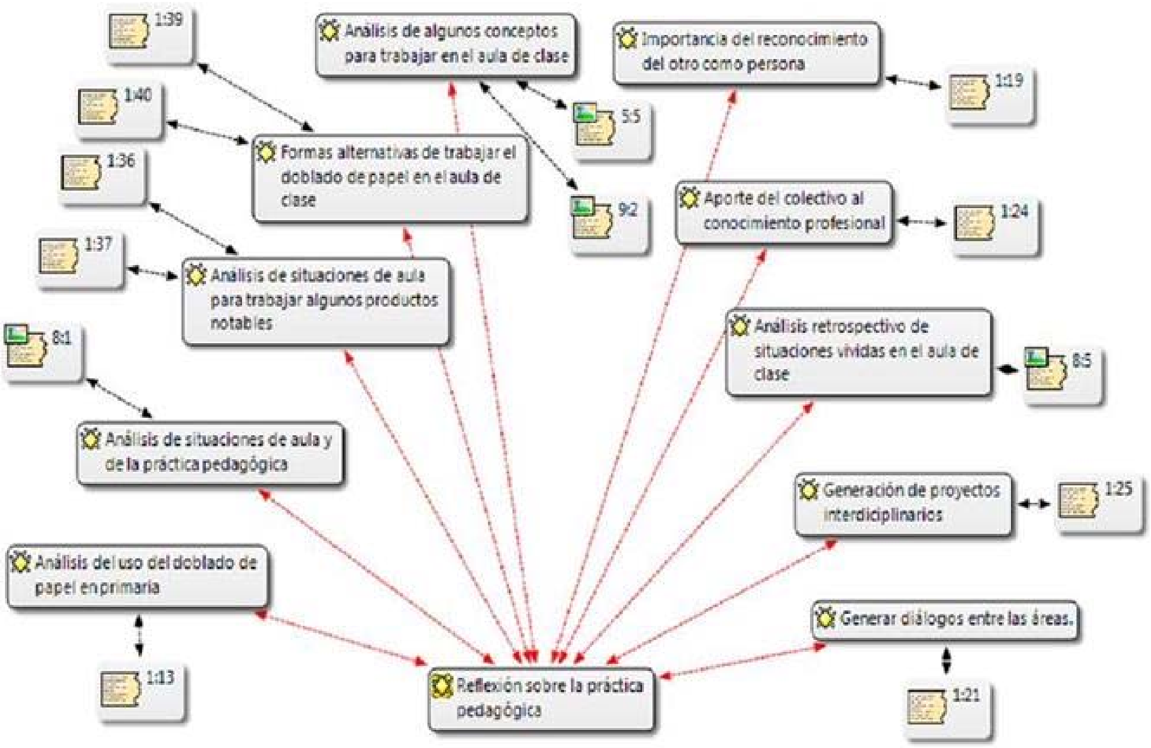


Figura 105: Esquema familia de códigos Reflexión sobre la práctica pedagógica.

4.5.3. Análisis del tercer episodio: colectivo de la Institución Educativa.

El episodio tres estuvo compuesto por tres sesiones de trabajo, de una hora y media cada una, aproximadamente. Durante las mismas, se abordaron algunas preguntas relacionadas con construcciones básicas con doblado de papel de algunos objetos matemáticos: segmentos paralelos, segmentos perpendiculares, mediatrices, bisectrices, triángulos equiláteros y parábolas. Como se hizo con los dos episodios anteriores, durante el análisis consideré las transcripciones de las observaciones, las construcciones hechas en papel de las profesoras y sus bitácoras personales.

Codificación y agrupamiento de códigos.

Análisis logrados durante el encuentro (ver esquema en figura 108). Durante el tercer episodio, las profesoras pudieron establecer algunos análisis al interior del colectivo. Por ejemplo, con respecto a las construcciones básicas, pudieron analizar *cómo mostrar la igualdad de ángulos y lados*, *cómo trasladar distancias y ángulos*, *cómo mostrar la perpendicularidad de la mediatriz* (ver figura 22 del episodio 3, ver diálogo 9 del episodio 3, ver figura 106), en los tres casos mediante el doblado de papel.

También se generaron algunos análisis asociados a conceptos geométricos específicos: *análisis de la construcción de una perpendicular con regla y compás*, dada la construcción con doblado de papel, y *análisis de los triángulos que forman los puntos de la mediatriz con los extremos del segmento* (ver figura 107). Pero no solo se dialogó acerca de conceptos geométricos, sino que también se *analizaron algunas situaciones de aula*, particularmente aquellas relacionadas con *el uso del doblado de papel en primaria*, lo que posibilitó el planteamiento de algunas ideas para diseñar actividades y un análisis general *sobre las dificultades en la enseñanza de la geometría*. Por ejemplo, la profesora Elizabeth mencionó: “*de pronto aquí con el papel cuando uno lo desdobla sí puede alcanzar a ver los dobleces paralelos, porque los niños sí distinguen qué es una paralela pero por paredes, por ejemplo una pared es paralela con esta, pero no las perpendiculares; pero es distinto, con el doblado de papel usted dobla y ya, es la posibilidad de desdoblar y ver exactamente las perpendiculares…*”.

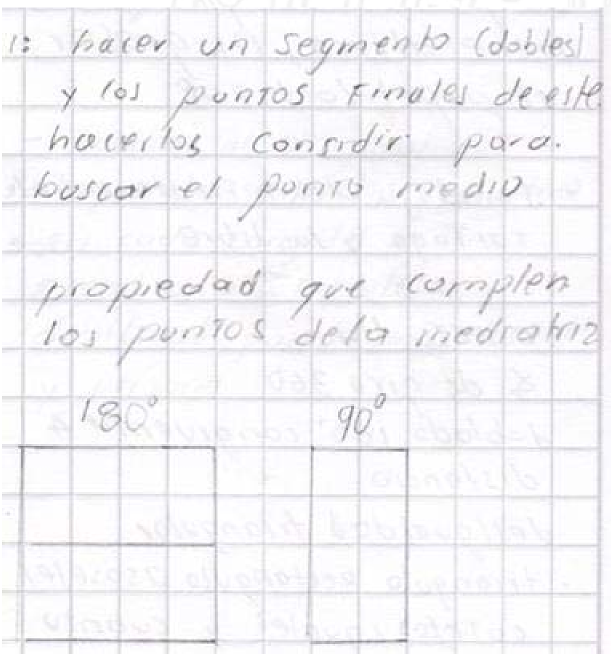


Figura 106: Bitácora de la profesora Vicky. Episodio 3.

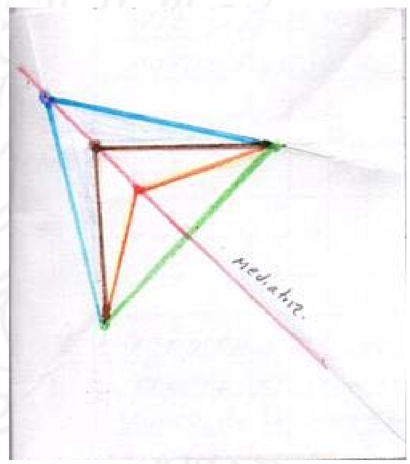


Figura 107: Construcción mediatriz profesora Vicky.

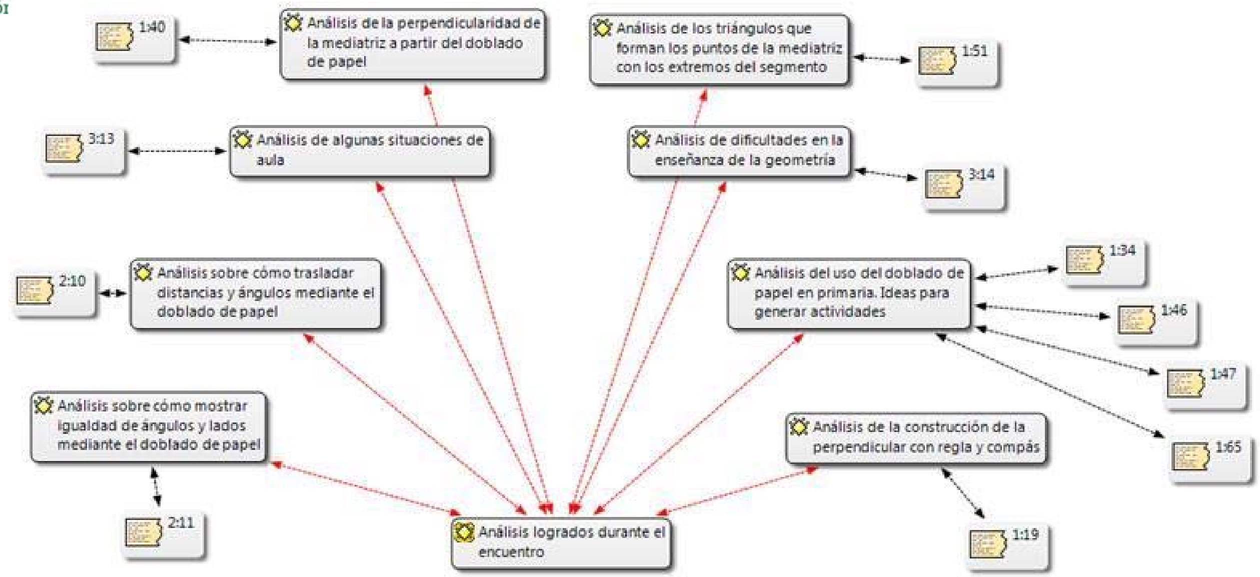


Figura 108: Familia de códigos Análisis logrados durante el encuentro.

Aprendizajes logrados durante el encuentro (ver esquema en figura 117). De acuerdo con la revisión de las bitácoras, de los diálogos al interior del colectivo y de las construcciones, se pudo establecer que las profesoras tuvieron algunos procesos de aprendizaje, durante los tres encuentros del episodio. Estos procesos se dieron con respecto a conceptos geométricos y al uso del doblado de papel para el aprendizaje de los mismos.

Con respecto a conceptos geométricos (*definiciones de conceptos básicos geométricos, logrados en el colectivo*), ellas pudieron: proponer construcciones y dialogar sobre rectas paralelas y perpendiculares (*construcciones de rectas paralelas y perpendiculares en bitácora* (ver figuras 22 y 109), *diálogo sobre aprendizajes de la profesora Natalia frente a las construcciones de rectas paralelas y perpendiculares* (ver diálogo 10, episodio 3), *para generar paralelas se pueden usar los lados del cuadrado y generar las que se quieran* (ver figura 109)); construir, analizar y definir la mediatriz y la bisectriz como lugares geométricos (*aprendí a encontrar relaciones a partir de la* *construcción de la mediatriz* (ver figura 110), *la mediatriz es una línea perpendicular que pasa por toda la mitad de un segmento* (ver diálogo 8, episodio 3), *diálogo sobre el concepto de lugar geométrico*, *definición de la bisectriz como lugar geométrico* (ver figura 30, episodio 3), *diálogo sobre las diferencias entre mediatriz y bisectriz* (ver figura 30, episodio 3), *diálogo sobre la bisectriz como lugar geométrico* (ver figura 30, episodio 3*)*, *ideas generales sobre la bisectriz en bitácora* (ver figura 122), *propiedades de la bisectriz en bitácora* (ver figura 30, episodio 3), *aporte de procedimiento para la construcción de la mediatriz por parte de Natalia* (ver diálogo 9, episodio 3), *ubicación de puntos de la mediatriz para definirla como lugar geométrico*, *definición de lugar geométrico en bitácora* (ver figuras 111 y 122), *diálogo sobre la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la mediatriz*, *definición de la mediatriz como lugar geométrico en bitácora* (ver figura 111 y 30, del episodio 3), *diálogo sobre las diferencias entre bisectriz y mediatriz en bitácora* (ver figura 30, episodio 3)).

A su vez, las profesoras pudieron construir y analizar un triángulo equilátero y las líneas y puntos notables de los triángulos, de manera general (*diálogo sobre líneas y puntos notables de los triángulos*, *pasos para la construcción de un triángulo equilátero en bitácora* (ver figura 113), *construcción de algunas líneas notables en un triángulo* (ver figura 112), *construcción y mostración de la división de un ángulo recto en tres partes iguales* (ver figura 34), *líneas y puntos notables de los triángulos en bitácora* (ver figura 122), *construcción alternativa de triángulo equilátero*); construir y definir la parábola como lugar geométrico (*definición de parábola como lugar geométrico en bitácora* (ver figura 114), *determinación de la propiedad que cumplen los puntos de la parábola para ser lugar geométrico* (ver figura 114 y 35, del episodio 3*)*, *diálogo sobre el uso de la mediatriz* *en la definición de la parábola*, *diálogo sobre la definición de parábola como lugar geométrico* (ver diálogo 12, episodio 4)).

Con respecto al uso del doblado de papel para el aprendizaje de los conceptos geométricos, las profesoras: construyeron y analizaron segmentos paralelos y perpendiculares con doblado de papel (*diálogo sobre la generación de una perpendicular a través de la construcción de paralelas*; *uso del doblado de papel para encontrar perpendiculares, paralelas* (ver diálogo 11, episodio 3); *se concluye, en el colectivo, procedimiento para generar perpendiculares a otros dobleces, que pasen por puntos determinados* (ver figura 24, episodio 3); *para generar paralelas, se puede construir primero una perpendicular al doblez dado y luego una perpendicular a la perpendicular* (ver figura 23, episodio 3); *explicación de construcciones de rectas paralelas y perpendiculares, con doblado de papel, por parte de profesora del colectivo* (ver diálogo 10, episodio 3*); la profesora Natalia aportó la construcción de la paralela al colectivo de profesoras*; *construcción de una paralela a un doblez dado que pase por un punto determinado*; *construcción de infinitas paralelas a través del doblado de papel* (ver figura 109); *construcción de un doblez perpendicular a otro dado, que pase por un punto determinado* (ver figura 24, episodio 3)); construyeron y analizaron la mediatriz y la bisectriz como lugares geométricos (*construcción para definir la mediatriz como lugar geométrico* (ver figuras 25 y 26); *maneras de construir la bisectriz y la mediatriz con doblado de papel en bitácora* (ver figura 30, episodio 3); *construcción para definir la bisectriz como lugar geométrico* (ver figuras 28 y 29, episodio 3); *construcción de la bisectriz de un ángulo con doblado de papel* (ver figura 27, episodio 3); *cómo construir una mediatriz con doblado de papel en bitácora* (ver figura 121); *diálogo sobre cómo* *demostrar con el doblado de papel que un punto, es un punto medio*; *una de las profesoras explicó el procedimiento para construir una mediatriz con doblado de papel* (ver diálogo 8, episodio 3)).

Por otro lado, las profesoras también lograron: construir y analizar un triángulo equilátero a través del doblado de papel (*método para trisecar un ángulo recto*; *construcción de un triángulo equilátero con doblado de papel* (ver figura 31, episodio 3), *diálogo sobre cómo construir un triángulo equilátero con doblado de papel*); construir y analizar una parábola mediante el doblado de papel (*construcción de la parábola mediante el doblado de papel en bitácora* (ver figura 115); *construcción de una parábola mediante el doblado de papel* (ver figura 35, episodio 3); *identificación de los elementos de una parábola construida mediante el doblado de papel* (ver figura 115); *identificación de los elementos de una parábola construida mediante el doblado de papel en bitácora* (ver figura 115)); hacer mostraciones de congruencia de ángulos y segmentos (*diálogo sobre la mostración de segmentos congruentes con doblado de papel* (ver diálogo 9, episodio 3); *análisis sobre cómo mostrar igualdad de ángulos y lados mediante el doblado de papel, análisis sobre cómo trasladar distancias y ángulos mediante el doblado de papel*).

Adicionalmente mencionaron que el doblado de papel les aportó a su formación como profesoras. Natalia, por ejemplo, mencionó que "*he descubierto en el doblado de papel una muy buena herramienta para probar o mostrar concretamente las propiedades matemáticas*" (ver figura 116). La profesora Vicky precisó que "*el doblado de papel se puede usar para diferenciar conceptos*" (ver figura 110). Por su parte, la profesora Elizabeth afirmó que:

Yo insisto que en el solo hecho de que uno pueda ver, como sacar de lo abstracto a lo concreto, ayudaría al aprendizaje, porque el muchacho es muy visual, igual nosotros. Entonces, el hecho de poder comprobar eso que uno les está diciendo todo el tiempo en el plano, hace las cosas más fácil. Yo por ejemplo, he logrado mejorar mucho en conceptos, porque los veo diferente, ya no es la memoria. A mí me cuesta mucho esas cosas de geometría, porque siempre me la han enseñado así, y la memorización no ayuda mucho, en cambio, de pronto así, tiene otros elementos y como uno de acá puede sacar tantas cosas… Por ejemplo, lugar geométrico, uno es ¿qué es eso?

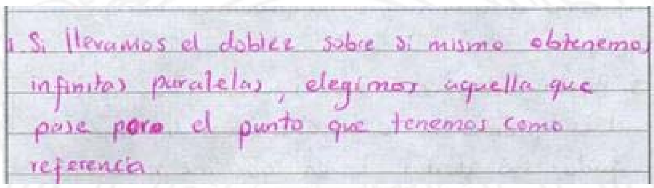
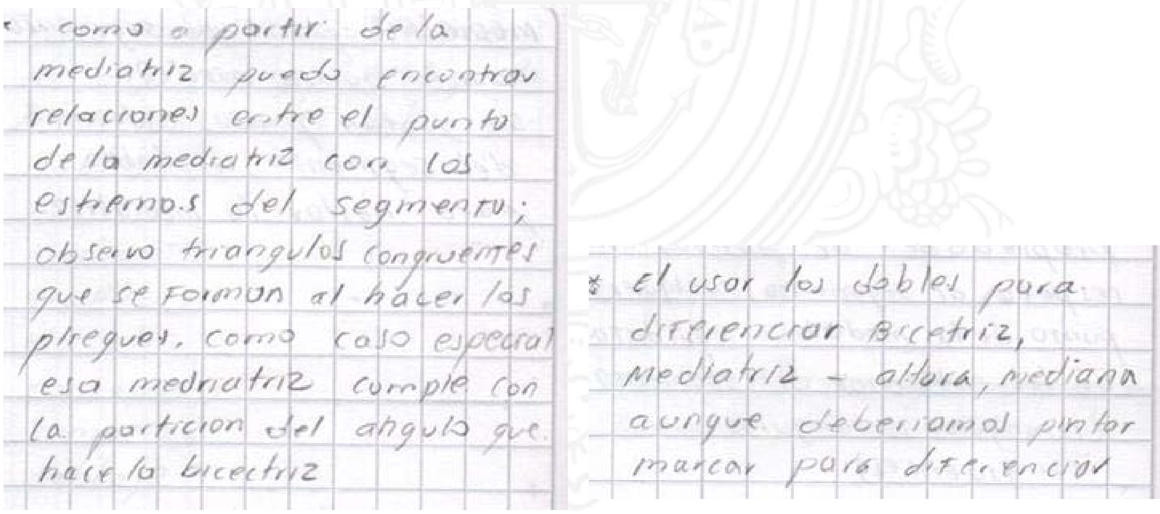
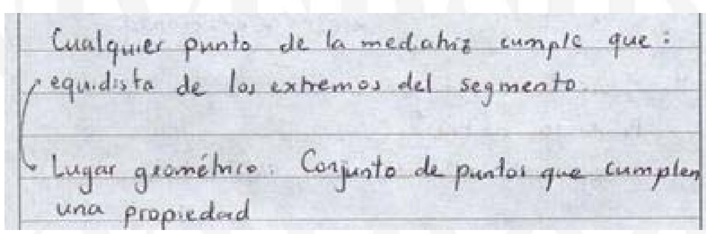

1. Si llevamos el doblez sobre sí mismo obtenemos infinitas paralelas, elegimos aquella que pase por el punto que tenemos como referencia.

Figura 109: Bitácora profesora Natalia. Construcción de paralelas y perpendiculares.


como a partir de la mediatriz puedo encontrar relaciones entre el punto de la mediatriz con los extremos del segmento; observo triangulos congruentes que se forman al hacer los pliegues, como caso especial esa mediatriz cumple con la particion del angulo que hace la bicectriz

el usar los dobles para diferenciar Bicetriz, Mediatriz - altura, mediana aunque deberiamos pintar marcar para diferenciar

Figura 110: Bitácora profesora Vicky: Mediatriz y Bisectriz.


Cualquier punto de la mediatriz cumple que: equidista de los extremos del segmento.

Lugar geométrico: Conjunto de puntos que cumplen una propiedad

Figura 111: Bitácora profesora Natalia. Concepto de mediatriz.

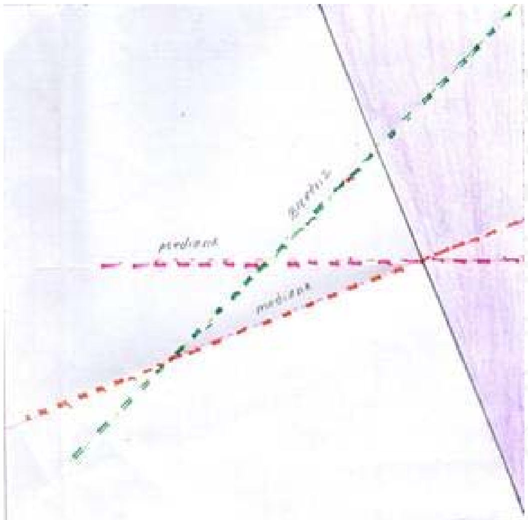


Figura 113: Construcción profesora Vicky.
Algunas líneas de un triángulo.

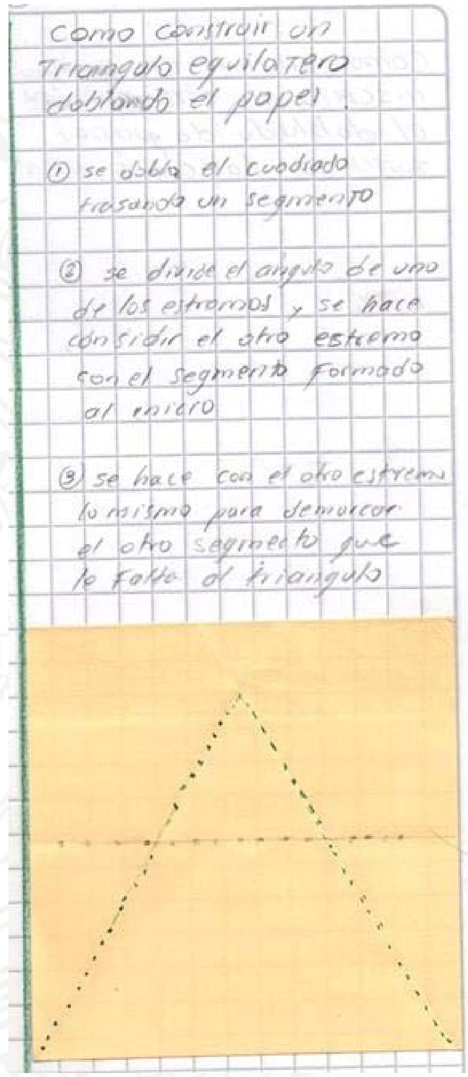


Figura 112: Bitácora y construcción de
triángulo de la profesora Vicky.

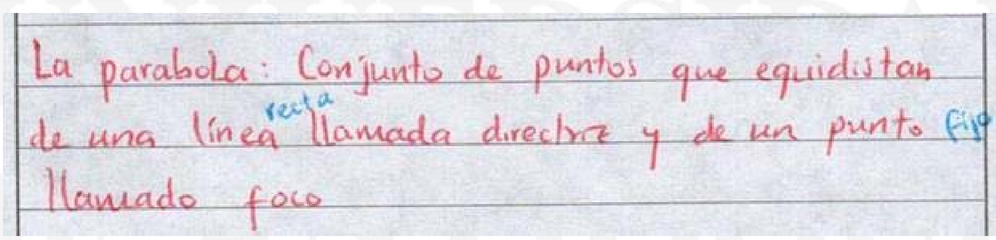


Figura 114: Bitácora profesora Natalia. Definición de parábola.

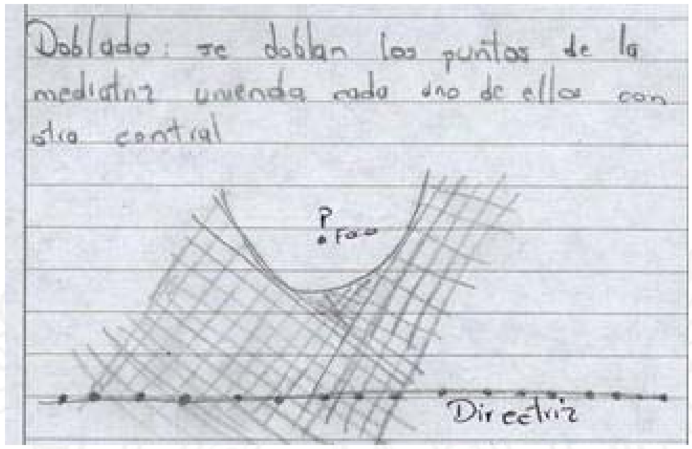


Figura 115: Construcción parábola en bitácora de la profesora Elizabeth.

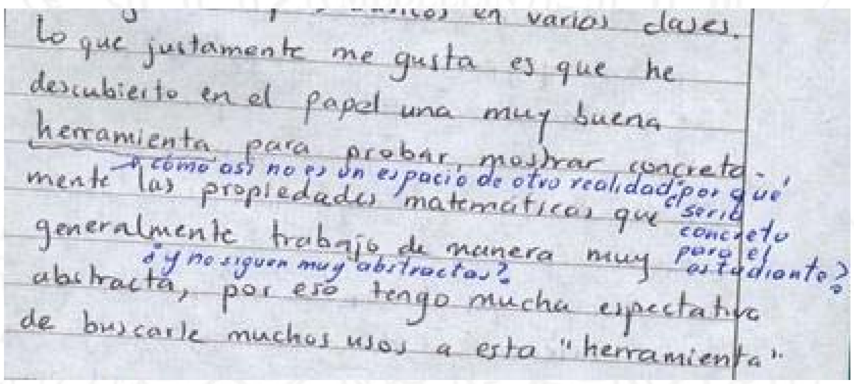

en varios clases.
Lo que justamente me gusta es que he descubierto en el papel una muy buena herramienta para probar, mostrar concretamente las propiedades matemáticas que generalmente trabajo de manera muy abstracta, por eso tengo mucha espectativa de buscarle muchos usos a esta "herramienta".
¿cómo así no es un espacio de otra realidad?
¿por qué sería concreto para el estudiante?
¿y no siguen muy abstractas?

Figura 116: Bitácora profesora Natalia. Episodio 3.

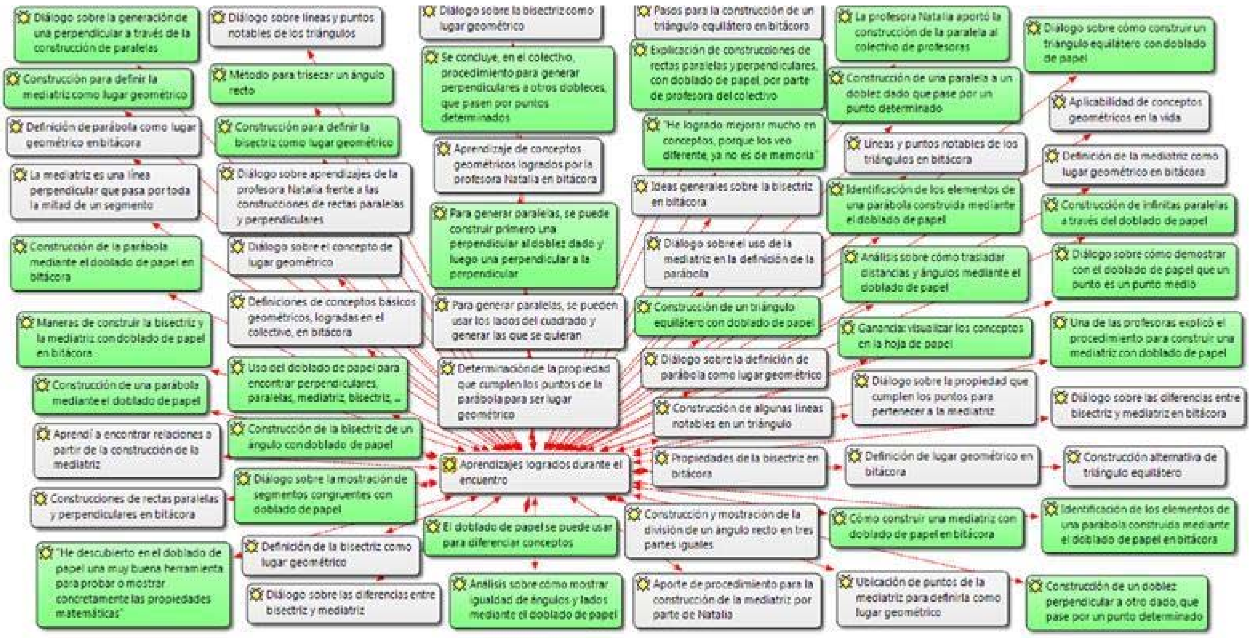


Figura 117: Esquema familia de códigos Aprendizajes logrados durante el encuentro.

Diálogos e interacciones del colectivo con respecto a la geometría escolar (ver su esquema en la figura 118). El trabajo durante las tres sesiones del episodio, permitió que las profesoras interactuaran y dialogaran entre ellas mismas, a través del medio doblado de papel, para generar ideas acerca de la *geometría escolar*. Estos diálogos, análisis e interacciones se propiciaron, de manera particular, con respecto al uso del doblado de papel en el aula de clase y con respecto al análisis de algunos conceptos geométricos específicos, para su proceso de enseñanza y aprendizaje.

En el primer caso, frente al uso del doblado de papel en el aula de clase, las profesoras: analizaron y dialogaron sobre las construcciones de segmentos paralelos y perpendiculares (*la profesora Natalia aportó la construcción de la paralela al colectivo de profesoras* (ver diálogo 10, episodio 3); *se concluye, en el colectivo, procedimiento para generar perpendiculares a otros dobleces, que pasen por puntos determinados*; *explicación de construcciones de rectas paralelas y perpendiculares, con doblado de papel, por parte* *de profesora del colectivo* (ver diálogo 10, episodio 3); *para generar paralelas, se puede construir primero una perpendicular al doblez dado y luego una perpendicular a la perpendicular*; *diálogo sobre la generación de una perpendicular a través de la construcción de paralelas*); interaccionaron y plantearon ideas sobre el lugar geométrico mediatriz (*explicación de procedimiento para la construcción de la mediatriz por parte de Natalia* (ver diálogo 10, episodio 3), *aporte de procedimiento para la construcción de la mediatriz por parte de la profesora Natalia*, *una de las profesoras explicó el procedimiento para construir una mediatriz con doblado de papel* (ver diálogo 8, episodio 3)); analizaron y dialogaron sobre la construcción de un triángulo equilátero (*diálogo sobre cómo construir un triángulo equilátero con doblado de papel* (ver figura 113), *puesta en común de construcciones del triángulo equilátero mediante el doblado de papel*, *diálogo sobre la construcciones propuestas por las profesoras*); plantearon conjeturas y las validaron, sobre la manera de mostrar congruencia de segmentos y ángulos, mediante el doblado de papel (*diálogo sobre cómo demostrar con el doblado de papel que un punto es un punto medio*, *análisis sobre cómo mostrar igualdad de ángulos y lados mediante el doblado de papel*, *análisis sobre cómo trasladar distancias y ángulos mediante el doblado de papel, diálogo sobre la mostración de segmentos congruentes con doblado de papel* (ver diálogo 9, episodio 3)).

Adicionalmente, con respecto al uso del doblado de papel, las profesoras *manifestaron la importancia del uso de material concreto para llegar a conceptos abstractos*, considerando la *naturalidad de hacer dobleces en hojas de papel* y la misma facilidad del material. Por ejemplo, la profesora Elizabeth manifestó: "*Yo insisto que en el solo hecho de que uno pueda ver, como sacar de lo abstracto a lo concreto, ayudaría al* *aprendizaje, porque el muchacho es muy visual, igual nosotros. Entonces, el hecho de poder comprobar eso que uno les está diciendo todo el tiempo en el plano, hace las cosas más fácil*". En particular explicaron que *el doblado de papel permite mostrar y demostrar situaciones geométricas*, pero sugieren que en aula de clase, específicamente, no se les debería dar las construcciones hechas a los estudiantes, sino permitirles que ellos mismos las diseñen y analicen (ver diálogo 7, episodio 3). Frente a los procesos de formación de profesores, Natalia manifestó "*he descubierto en el doblado de papel una muy buena herramienta para probar o mostrar concretamente las propiedades matemáticas*" (ver figura 116).

También se analizaron algunas situaciones de aula al usar el doblado de papel. Por ejemplo, las profesoras explicaron *la importancia de usarlo en primaria y generaron algunas ideas para construir actividades* (ver diálogo 11, episodio 3). Además, resaltaron *el papel de la motricidad en el desarrollo de los niños*, dado que en muchos procesos escolares se deja de lado y, por esta razón, algunos estudiantes de secundaria hacen *construcciones tan imprecisas, tanto con doblado de papel, como con otros materiales concretos*.

En el segundo caso, las profesoras analizaron algunos conceptos geométricos específicos, para su proceso de enseñanza y aprendizaje. En particular, dialogaron y analizaron los conceptos de rectas paralelas y rectas perpendiculares (*diálogo sobre aprendizajes de la profesora Natalia frente a las construcciones de rectas paralelas y rectas perpendiculares* (ver diálogo 10, episodio 3),); discutieron sobre los conceptos de mediatriz, bisectriz y parábola, como lugares geométricos (*diálogo sobre las diferencias* *entre bisectriz y mediatriz en bitácora* (ver figura 30, episodio 3); *diálogo sobre la definición de parábola como lugar geométrico* (ver diálogo 12, episodio 4); *diálogo sobre la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la mediatriz*; *diálogo sobre el concepto de lugar geométrico*, *diálogo sobre las diferencias entre bisectriz y mediatriz* (ver figura 30, episodio 3; ver figura 122); *diálogo sobre el uso de la mediatriz en la definición de la parábola*; *la mediatriz es una línea perpendicular que pasa por toda la mitad de un segmento* (idea mencionada por la profesora Natalia, episodio 3*), diálogo sobre en qué momento una recta es bisectriz y mediatriz al tiempo*; *diálogo sobre la bisectriz como lugar geométrico*); generaron construcciones y discutieron sobre el triángulo equilátero y algunas líneas y puntos notables de los triángulos, de manera general (*diálogo sobre cómo mostrar que un triángulo es equilátero a través de la igualdad de los ángulos*; *diálogo sobre líneas y puntos notables de los triángulos* (ver figura 122); *diálogo sobre construcción alternativa de triángulo equilátero* (ver figura 113)).

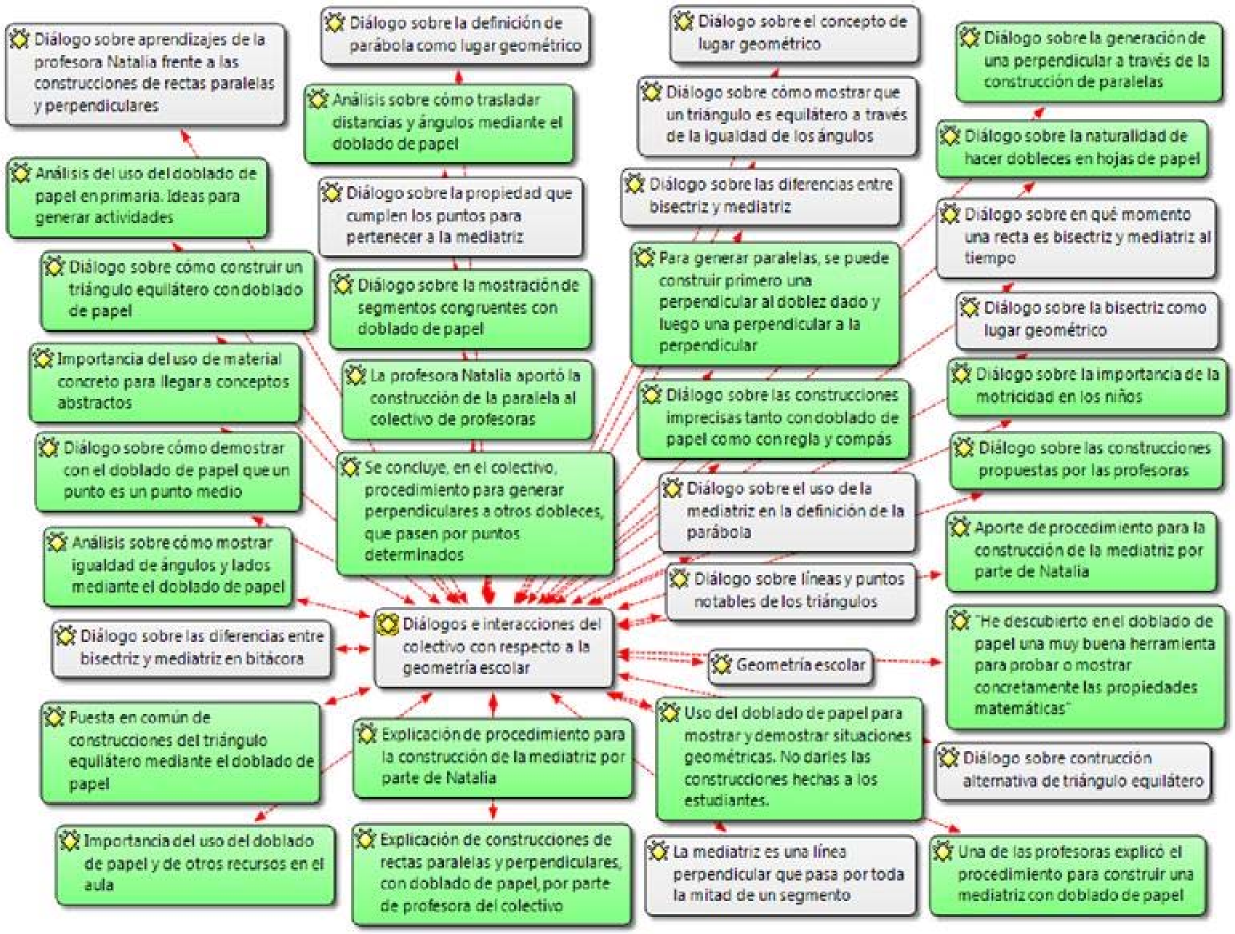


Figura 118: Esquema familia de códigos Diálogos e interacciones del colectivo con respecto a la geometría escolar.

Dificultades generales (ver su esquema en la figura 120). Durante el episodio tres, se observaron y discutieron ciertas dificultades, algunas de ellas frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría; otras con respecto a las construcciones mismas con doblado de papel y, finalmente, algunas asociadas al uso impreciso del lenguaje geométrico y al desconocimiento de conceptos y/ procedimientos.

Las profesoras tuvieron la oportunidad de analizar y discutir algunas ideas relacionadas con *las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje* de la geometría. En particular, se hizo alusión al *carácter demostrativo de la geometría en las* *carreras universitarias*, dejando de lado su relación cercana con el contexto, lo que podría desencadenar no solo el desconocimiento de ciertos conceptos por parte de los profesores en formación inicial o continua, sino la ausencia de procesos de enseñanza de la geometría, en aulas de clase de primaria o secundaria. Frente a eso, la profesora Vicky precisó: "*la geometría es una cenicienta*". Del mismo modo, la profesora Elizabeth mencionó: "*A mí me cuesta mucho esas cosas de geometría, porque siempre me la han enseñado así, y la memorización no ayuda mucho, en cambio, de pronto así, tiene otros elementos y como uno de acá puede sacar tantas cosas… Por ejemplo, lugar geométrico, uno es ¿qué es eso?*".

Durante el desarrollo de los encuentros del episodio tres, se observaron algunas dificultades propias de las construcciones con doblado de papel. Por ejemplo, cuando se les solicitó a las profesoras que intentaran construir una recta perpendicular o una recta paralela con doblado de papel, algunas de ellas hicieron *construcciones informales (a ojo)*, es decir, sin seguir un procedimiento preciso para ello. Si bien, los segmentos construidos parecían paralelos o perpendiculares, no era posible argumentar el procedimiento usado (ver diálogos 5 y 6, del episodio 3). Por otro lado, también se percibieron algunas dificultades para generar construcciones; en este caso, se observaron *varios intentos fallidos de construir un triángulo equilátero* por parte de la profesora Vicky en uno de sus materiales (ver figura 119). Así mismo, se discutieron algunas ideas sobre *las construcciones imprecisas que suelen realizar los estudiantes, ya sea con doblado de papel o con regla y compás*, por falta de motricidad, resaltando que eran dificultades que las mismas profesoras poseían.

También se observaron dificultades asociadas al uso impreciso del lenguaje geométrico o al desconocimiento de conceptos o procedimientos. Por ejemplo, se percibieron *dificultades en una de las profesoras del colectivo, en el uso del lenguaje al referirse a conceptos geométricos*. Al respecto, la profesora Vicky afirmó, al referirse a los triángulos que se forman con los puntos de la mediatriz, que "*se pueden generar triángulos semejantes*", lo cual era una falacia. Además, se observaron *dificultades específicamente relacionadas con el concepto de mediatriz*. En este caso, la profesora Vicky precisó que la mediatriz era "*una perpendicular que pasa por los ángulos*".

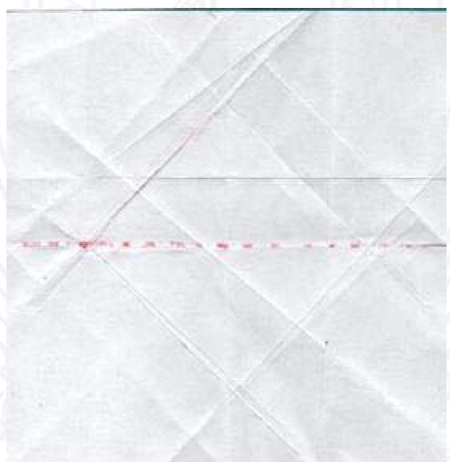
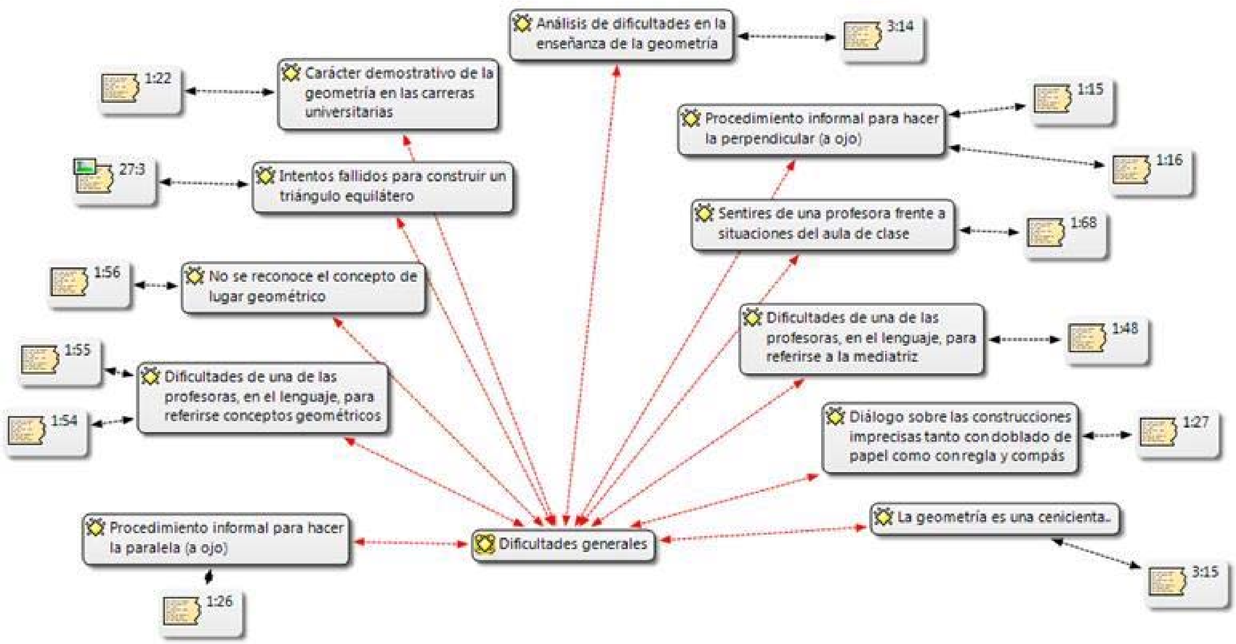


Figura 119: Construcción de triángulo por parte de la profesora Vicky.

Figura 120: Esquema familia de códigos Dificultades generales.



El doblado de papel permite la comprensión y análisis de conceptos (ver esquema en la figura 123). Los encuentros considerados para este episodio posibilitaron que las profesoras lograran comprender y analizar algunos conceptos geométricos (*definiciones de conceptos básicos geométricos, logradas en el colectivo, en bitácora*, ver figura 122). A saber:

–Comprensión de rectas paralelas y rectas perpendiculares. En este aspecto, las profesoras lograron: dialogar sobre la generación de una perpendicular a través de la construcción de paralelas; construir un doblez perpendicular a otro dado, que pase por un punto determinado; usar el doblado de papel para encontrar perpendiculares, paralelas, mediatriz, bisectriz,… (ver diálogo 11, episodio 3); dialogar sobre los aprendizajes de la profesora Natalia frente a las construcciones de rectas paralelas y perpendiculares (ver diálogo 10, episodio 3); construir una paralela a un doblez dado que pase por un punto determinado (ver figura 24, episodio 3); explicar las construcciones de rectas paralelas y perpendiculares, con doblado de papel, por parte de profesora del colectivo (ver diálogo 10, episodio 3).

–Comprensión de los lugares geométricos mediatriz, bisectriz y parábola. En este aspecto, las profesoras consiguieron: definir el concepto lugar geométrico en bitácora (ver figura 111); identificar los elementos de una parábola construida mediante el doblado de papel en bitácora (ver figuras 114 y 115); definir la mediatriz como lugar geométrico en bitácora (ver figura 11 y 30, del episodio 3); dialogar sobre en qué momento una recta es bisectriz y mediatriz al tiempo (ver figura 110); definir la bisectriz como lugar geométrico (ver figura 27); escribir ideas generales sobre la bisectriz en bitácora (ver figura 122 y 30, el episodio 3); construir la bisectriz de un ángulo con doblado de papel (ver figura 27 del episodio 3); hacer construcción para definir la mediatriz como lugar geométrico; dialogar sobre el uso de la mediatriz en la definición de la parábola; manifestar la mediatriz es una línea perpendicular que pasa por toda la mitad de un segmento (idea mencionada por la profesora Natalia en el episodio 3); aprender a encontrar relaciones a partir de la construcción de la mediatriz (ver figuras 25 y 26 del episodio 3, figura 110); construir una parábola mediante el doblado de papel (ver figura 35, episodio 3); concluir, en el colectivo, procedimiento para generar perpendiculares a otros dobleces, que pasen por puntos determinados (ver figura 109); definir la parábola como lugar geométrico a través de las interacciones del colectivo (ver diálogo 12, episodio 4); dialogar sobre las diferencias entre bisectriz y mediatriz (ver figura 30); determinar la propiedad que cumplen los puntos de la parábola para ser lugar geométrico (ver figura 114); hacer un recuento de la construcción y definición de la mediatriz; construir una mediatriz con doblado de papel en bitácora (ver figura 121); dialogar sobre la bisectriz como lugar geométrico; identificar los elementos de una parábola construida mediante el doblado de papel; hacer una construcción para definir la bisectriz como lugar geométrico; explicar el procedimiento para construir una mediatriz con doblado de papel (ver figuras 121 y 122); dialogar sobre la definición de parábola como lugar geométrico (ver diálogo 12, episodio 4); definir la parábola como lugar geométrico en bitácora (ver figura 114); dialogar sobre el concepto de lugar geométrico; analizar la perpendicularidad de la mediatriz a partir del doblado de papel (ver diálogo 9, episodio 3);

–Comprensión de propiedades del triángulo equilátero. Las profesoras lograron: dialogar sobre cómo mostrar que un triángulo es equilátero a través de la igualdad de los ángulos; identificar un método para trisecar un ángulo recto (ver figura 34, episodio 3); dialogar sobre las construcciones propuestas por las profesoras (ver figura 31, episodio 3); construir y mostrar la división de un ángulo recto en tres partes iguales; dialogar sobre cómo construir un triángulo equilátero con doblado de papel; construir un triángulo equilátero con doblado de papel (ver figura 31, episodio 3); poner en común las construcciones del triángulo equilátero mediante el doblado de papel.

–Comprensión de las líneas y puntos notables de los triángulos. En este aspecto, las profesoras tuvieron la oportunidad de dialogar sobre las líneas y puntos notables de los triángulos (ver figuras 112 y 122).

–Congruencia de segmentos y de ángulos. En este aspecto, las profesoras pudieron: analizar sobre cómo mostrar igualdad de ángulos y lados mediante el doblado de papel; dialogar sobre cómo demostrar con el doblado de papel que un punto es un punto medio (ver diálogo 9, episodio 3); dialogar sobre la mostración de segmentos congruentes con doblado de papel; analizar cómo trasladar distancias y ángulos mediante el doblado de papel.

De la misma manera, las profesoras también pudieron analizar la comprensión de conceptos específicamente en el contexto del aula de clase. Mencionaron, por ejemplo, que se *puede usar el doblado de papel para mostrar y demostrar situaciones geométricas, no darles las construcciones hechas a los estudiantes* (ver diálogo 7, episodio 3). En este sentido, Natalia manifestó la necesidad de *buscar alguna figura para aplicar conceptos geométricos en el aula de clase* (ver figura 126), dado que ella misma ha "*descubierto en el doblado de papel una muy buena herramienta para probar o mostrar concretamente las propiedades matemáticas*" (ver figura 116).

Por otro lado, también se resaltó la importancia de usar el doblado de papel, el material concreto y otros recursos en el aula de clase (*uso del doblado de papel en el aula de clase en primaria, importancia del uso del doblado de papel y de otros recursos en el aula*), especialmente en primaria (*análisis del uso del doblado de papel en primaria, ideas para generar actividades*), para facilitar la comprensión de conceptos *abstractos*. De hecho, la profesora Vicky mencionó que *el doblado de papel se puede usar para diferenciar conceptos*, debido principalmente a la *naturalidad de hacer dobleces y visualizarlos en una hoja de papel*. La profesora Elizabeth afirmó que ha *"logrado mejorar mucho en conceptos, porque los ve diferente, ya no es de memoria"*, haciendo hincapié en *la importancia de los procedimientos y de la precisión para la construcción de elementos geométricos*.

Un aspecto importante que surgió de los encuentros del episodio, es la aplicación de una de las actividades en uno de los grupos de la Institución Educativa. La profesora Elizabeth *usó la construcción del Teorema de Pitágoras con doblado de papel*, como una actividad dentro del aula de clase de octavo para propiciar la *comprensión de conceptos de geometría*, al generar procesos de visualización (*ganancia: visualizar lo conceptos en la hoja de papel*). Al respecto, ella mencionó: "*analizamos muchos conceptos básicos: entonces hablamos de líneas paralelas, de líneas perpendiculares, les demostré lo del método del ángulo que por ejemplo yo no lo sabía, pues no había visto como demostrarles lo del ángulo de ciento ochenta y el de noventa y entonces lo hicimos y entonces si ¡hay profe, sí, vea un ángulo de noventa! Entonces ya miraron los triángulos rectángulos, también revisamos cuantos triángulos rectángulos habían, revisamos el concepto de triángulo isósceles y cuantos triángulos isósceles habían, del cuadrado, hicimos el doblado ya para hacer la demostración y ahí quedamos*"

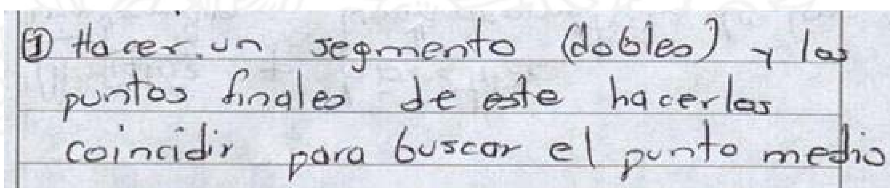

1 Hacer un segmento (dobles) y los
puntos finales de este hacerlos
coincidir para buscar el punto medio

Figura 121: Bitácora profesora Elizabeth. Construcción mediatriz.

MEDIATRIZ parte el segmento por el punto medio.
Se juntan puntos extremos del segmento, se dobla para hallar la mediatriz

propiedades de puntos con respeto al segmento, cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento. (triangulos rectangulos congruentes)

Lugar Geometrico : conjunto de puntos que cumplen una propiedad en particular en la mediatriz que equidistan de los extremos del segmento (conicas - recta ...)

Bisectriz divide el angulo en dos angulos iguales

Triangulo Isosceles: lineas notables son iguales

triangulo Equilatero: se cumplen todos

Mediatriz divide el segmento en dos partes iguales

Bisectriz divide el angulo en 2 angulos iguales

Altura: buscar el area punto opuesto

MEDIANA: punto medio del segmento al punto opuesto

Punto donde se encuentran los 3 mediatrices

INCENTRO - Centro de las 3 bisectrices (centro de una circunferencia. inscrito en el triangulo (dentro del triangulo)

CIRCUNCENTRO : circunferencia por fuera - punto donde se cruzan mediatriz

ORTOCENTRO - alturas

Baricentro - Medianas

¿ como se biseca un angulo? llevando un lado sobre el otro

Figura 122: Bitácora profesora Vicky. Episodio 3.

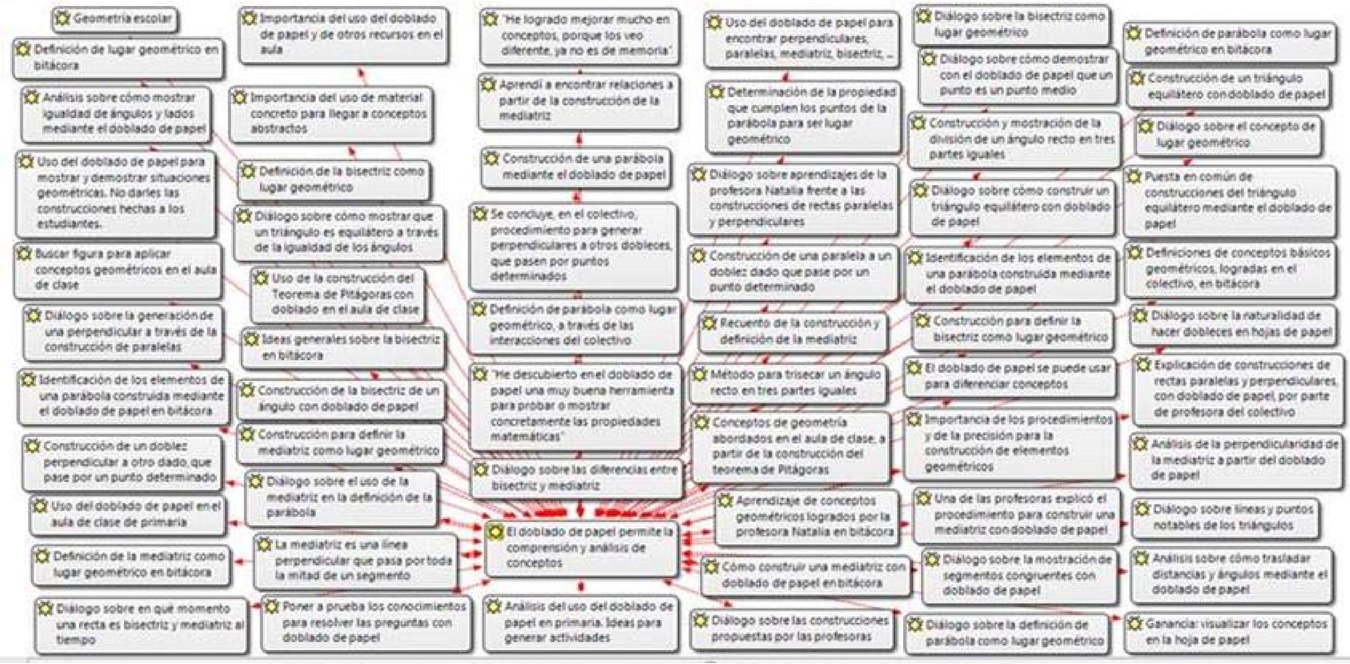


Figura 123: Esquema familia de códigos El doblado de papel permite la comprensión y análisis de conceptos.

Incidencia del colectivo en los procesos de aprendizaje de las profesoras (ver esquema en la figura 125). Tal como se ha percibido en los anteriores episodios, parece ser que las interacciones del colectivo tienen una *incidencia marcada en los procesos de aprendizaje de las profesoras*. Se observó que las profesoras manifestaron que *el colectivo les permite ver otras formas de enseñar*, *ver otras alternativas de solución*, *solucionar algunas inquietudes* (ver figura 124). De hecho, la profesora Natalia mencionó en su bitácora, que el colectivo de profesoras le *permite escuchar sus dudas, que muchas veces comparte*, y escuchar y analizar las soluciones que se dan a algunas inquietudes al interior del mismo.

Con respecto a la comprensión y análisis de conceptos geométricos, se observó que las profesoras: *pudieron concluir, en el colectivo, procedimiento para generar* *perpendiculares a otros dobleces, que pasen por puntos determinados*; *explicaron la construcción de rectas paralelas y perpendiculares, con doblado de papel, a otras profesoras del colectivo* (ver diálogo 10, episodio 3); *explicaron y aportaron el procedimiento para la construcción de la mediatriz a otras colegas* (ver diálogo 8, episodio 3); *definieron la parábola como lugar geométrico, a través de las interacciones del colectivo* (ver figura 114); *interaccionaron para determinar el procedimiento de construcción de perpendiculares*; *aportaron la construcción de la paralela al colectivo de profesoras* (ver diálogo 10, episodio 3), *definieron conceptos básicos geométricos, logrados en el colectivo, en bitácora* (ver figuras 111, 114, 121, 122).

Algo particular que se observó en la bitácora de la profesora Natalia, es que una segunda persona escribió sobre sus reflexiones. Esta persona la cuestionaba sobre lo que allí escribía y le aportaba desde su saber. Cuando se le indagó sobre quién era este personaje, ella mencionó que *compartía su bitácora con su pareja sentimental* (ver figura 116). Por ejemplo, cuando la profesora escribía que *el doblado de papel era una muy buena herramienta para probar, mostrar concretamente las propiedades matemáticas*, su pareja la interrogó: "*cómo así, no es un espacio de otra realidad, ¿por qué sería concreto para el estudiante?*"

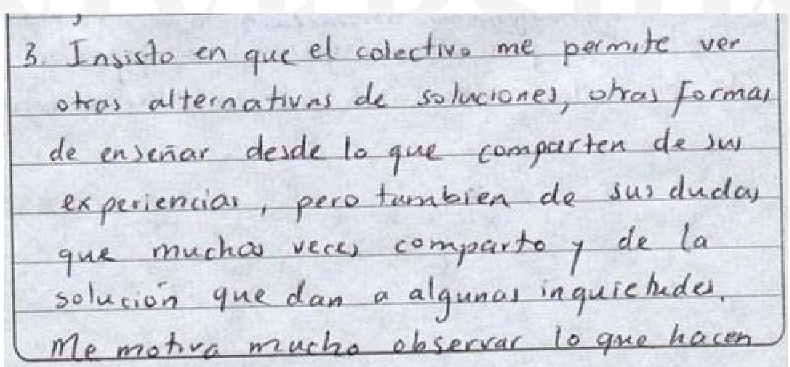

3. Insisto en que el colectivo me permite ver otras alternativas de soluciones, otras formas de enseñar desde lo que comparten de sus experiencias, pero tambien de sus dudas que muchas veces comparto y de la solución que dan a algunas inquietudes. Me motiva mucho observar lo que hacen

Figura 124: Bitácora profesora Natalia. Aporte del colectivo.

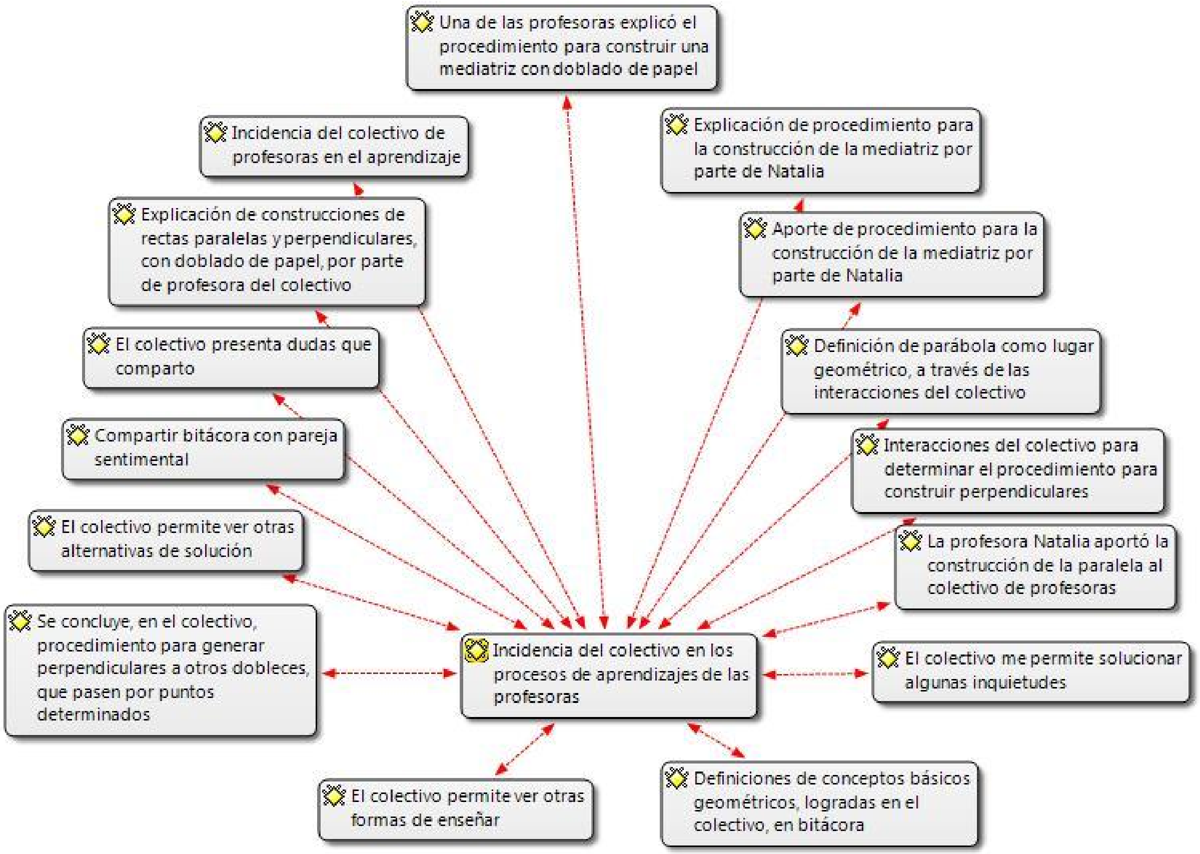


Figura 125: Esquema familia de códigos Incidencia del colectivo en los procesos de aprendizajes de las profesoras.

Reflexión sobre la práctica pedagógica (ver esquema en la figura 127). Como se ha observado en las demás familias de códigos, las profesoras pudieron hacer *reflexiones sobre su práctica pedagógica* al interaccionar dentro del colectivo con el doblado de papel, durante los tres encuentros del episodio. La reflexión se dio desde varios frentes: aplicación de actividad en el aula de clase, análisis de la geometría escolar, el uso del doblado de papel en el aula de clase y aporte del colectivo al conocimiento profesional.

La profesora Elizabeth diseñó y aplicó una actividad con sus estudiantes del grado octavo, sobre el Teorema de Pitágoras. Ella manifestó que durante la sesión, observó que *los estudiantes participaron activamente en las actividades propuestas con doblado de papel*, *pudieron verificar situaciones geométricas* y, en general, estuvieron *atentos*. El principal logro de la clase, según ella, fue en términos de habilidad en los dobleces, pues a los estudiantes les quedó de tarea analizar el área del cuadrado para mostrar el teorema. Además, la profesora pudo hacer uso de su *creatividad durante el desarrollo de la actividad, porque explicó otros conceptos geométricos que no había planeado*. Al respecto, ella manifestó:

> Pienso que logramos mucho en términos de habilidad en el doblado y, además, se me fueron ocurriendo cosas, o sea yo no tenía pensado explicarles tantas cosas desde el doblado sino que en la medida en que fuimos doblando, fuimos mirando, entonces ahí esto, ahí estos otros conceptos, entonces ya empecé a trabajar con ellos, entonces ya ellos me decían ¡ah sí profe! y tomamos unos conceptos en general, entonces da esa posibilidad. […] Entonces ellos estuvieron atentos, pudieron verificar, o sea para mí, por ejemplo, formalmente, es muy importante que ellos puedan verificar que la matemática sea más cercana porque para ellos las matemáticas ha sido muy abstracta entonces que ellos puedan doblar, moverse, que ellos mismos doblen ¡ah sí vea!, y que comprueben; por ejemplo no trabajamos con el transportador para ver si efectivamente daba noventa grados pero ellos ya saben por perpendicularidad, pero igual entonces ellos dicen ¡ah profe, vea!, que ellos lo puedan ver, mejor dicho eso es ya pues una ganancia, ya habrá que esperar más adelante qué y hasta dónde permanece, porque de todas maneras yo he tenido la experiencia en otros grupos, si permanece más el concepto cuando se trabaja con algo manual que cuando solo se habla, cuando es repeticiones mecánicas no sirve, y ahí voy…

Por otro lado, las profesoras generaron algunos diálogos alrededor de la *geometría escolar* y *su aplicabilidad en la vida*. Ellas resaltaron *el carácter demostrativo y formal que usualmente tiene la geometría en las carreras universitarias*, especialmente en las relacionadas con formación inicial de profesores. Esta situación podría afectar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en aulas de clase de primaria y de secundaria, por el temor que muchos profesores manifiestan frente a la geometría. Considerando tal situación, la profesora Vicky mencionó que "*la geometría era una cenicienta*", pues en muchas ocasiones, se dejan de lado sus procesos de enseñanza. Así mismo, también se mencionaron algunas *dificultades en la enseñanza de la geometría*. Al respecto, se propició el siguiente diálogo 20:

> Elizabeth: Y de hecho, uno le enseña esto a los muchachos, pero el concepto como tal no se deduce, se dice, se replica.
>
> Investigadora: La parábola es esto, la ecuación es esta, vamos a encontrar los focos, la directriz y aplique álgebra.
>
> Natalia: Y no se va uno a lo geométrico, sino que ahí se quedó.
>
> Investigadora: Exacto, se quedó en la fórmula y los muchachos llegan a la universidad conociendo las fórmulas, pero si usted le pregunta, por ejemplo, qué es una parábola
>
> Elizabeth: Incluso nosotros mismos, somos muy débiles en geometría
>
> Investigadora: Pero tan raro, pero si uno recibe cursos en la universidad.
>
> Elizabeth: Pero es igual, usted va a la universidad y ¿qué le enseñan? Lo mismo. El asunto es más desde las formas como estamos enseñando la matemática, por ser una ciencia exacta, entonces nosotros nos mantenemos en el mismo punto, la repetición de la repetidera. ¿Qué hace un profesor en la universidad? Si es muy de buenas, de pronto, le explica y si no, le llenan el tablero y ya, aplique. Normalmente, eso es lo que uno ve en la universidad, con los maestros de matemáticas, puede que otros maestros hagan una dinámica diferente. O por lo menos a mí me tocó así. Y el asunto de que usted entra ingeniería y lo tengo que rajar en matemáticas, porque tenemos que ser los más tesos, entonces se dedican al algoritmo y la geometría se obvia. ¿Quiénes ven geometría? Algunos ven un poco de geometría y ya. Los estudiantes se quedan en que usted les enseñó el procedimiento algorítmico, y ahí se quedan y ellos lo mecanizan. El asunto de la motivación es otra cosa, porque *la motivación es de uno*, ese cuento de que nosotros vamos a motivar eso es muy complicado.

Con respecto al uso del doblado de papel en el aula de clase, las profesoras reflexionaron sobre *la importancia del uso de material concreto, doblado de papel u otros recursos en el aula, para llegar a conceptos abstractos*, especialmente en aulas de clase de *primaria*. Se resaltó que el doblado de papel, en particular, permite el desarrollo de *la motricidad, la cual debería trabajarse desde los primeros años escolares*, dado que algunos estudiantes llegan a grados superiores y aún se percibe que realizan construcciones imprecisas tanto con doblado de papel, como con regla y compás, u otros materiales.

Por otro lado, las profesoras también analizaron algunas situaciones de aula y sintieron la necesidad de *buscar alguna figura para aplicar conceptos geométricos en el aula de clase* (ver figura 126). A su vez, ellas sintieron que *sus conocimientos se ponían en juego al intentar resolver preguntas relacionadas con construcciones con doblado de papel*; esto las llevó a reflexionar sobre lo que debería suceder también dentro del aula de clase, con los estudiantes, al *diseñar situaciones que permitan trabajar conceptos básicos* y, en general, posibilitar la producción de conocimiento geométrico.

Finalmente, se observó que, una vez más, el colectivo incidió de manera notable en los procesos de aprendizaje de las profesoras. En este sentido, se resaltó la *importancia del trabajo colaborativo al interior del mismo* y, claro está, en los procesos de enseñanza de la geometría (*diálogo sobre el uso del trabajo en equipo en el aula de clase*). Así mismo, se mencionó que *el colectivo permite ver otras formas de enseñar* (ver figura 124).

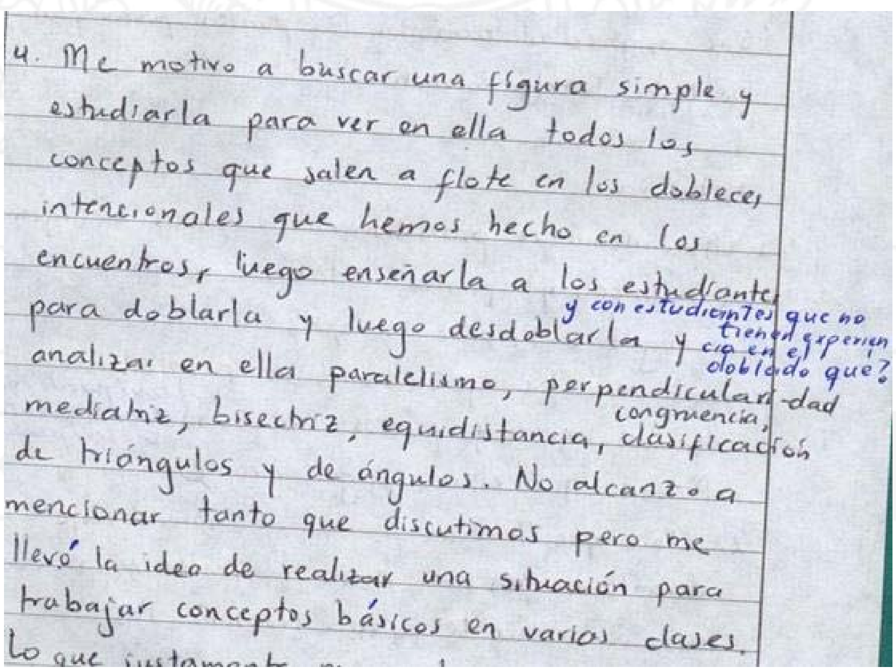

4. Me motivo a buscar una figura simple y estudiarla para ver en ella todos los conceptos que salen a flote en los dobleces intencionales que hemos hecho en los encuentros, luego enseñarla a los estudiantes y con estudiantes que no tienen experiencia en el doblado que? para doblarla y luego desdoblarla y analizar en ella paralelismo, perpendicularidad, mediatriz, bisectriz, equidistancia, congruencia, clasificación de triángulos y de ángulos. No alcanzo a mencionar tanto que discutimos pero me llevó la idea de realizar una situación para trabajar conceptos básicos en varias clases.

Figura 126. Bitácora profesora Natalia. Episodio 3.

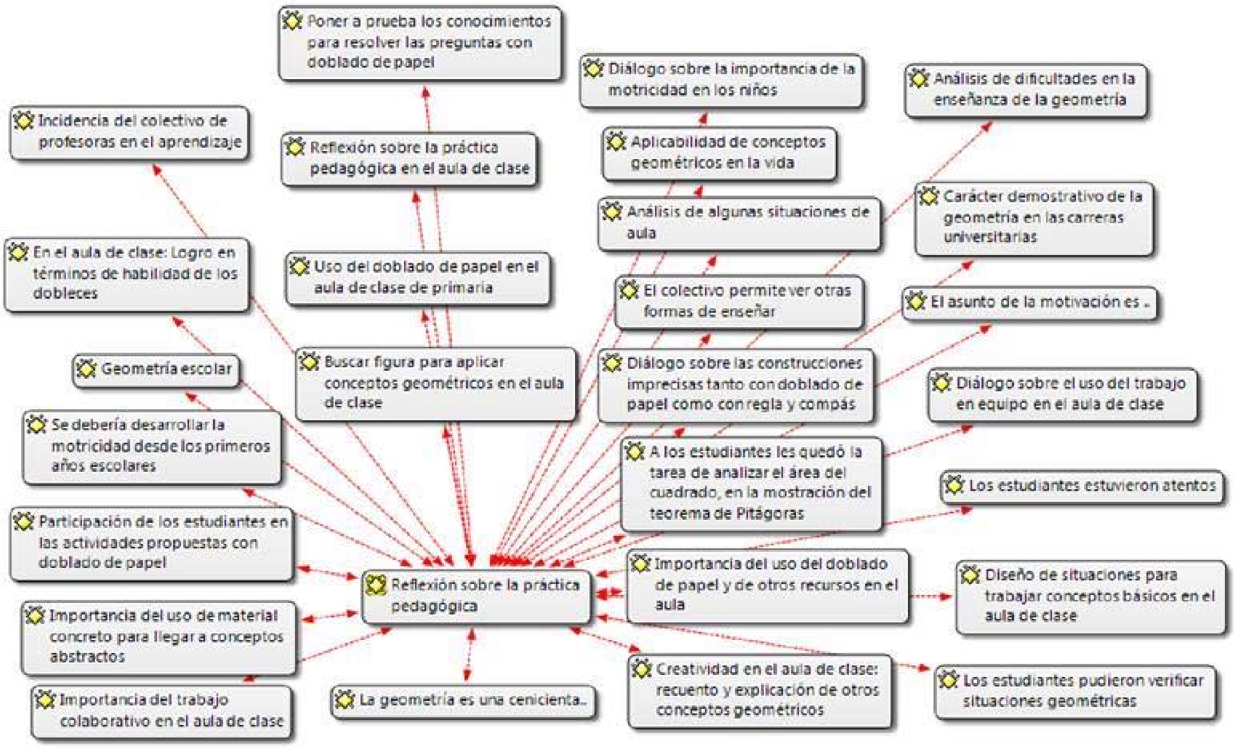


Figura 127: Esquema familia de códigos Reflexión sobre la práctica pedagógica.

4.5.4. Análisis del cuarto episodio: colectivo de la Institución Educativa.

El episodio cuatro se desarrolló en una sesión y media de trabajo, con un tiempo total aproximado de dos horas. Durante la misma, se abordó la construcción de la media y extrema razón de un segmento mediante el doblado de papel y se generó una justificación, desde argumentos matemáticos, acerca de su veracidad. Adicionalmente, se dialogó sobre la construcción euclidiana, a través del uso del software Geogebra, y se concluyó que se asociaba directamente con la construcción con doblado de papel. Como se hizo con los tres episodios anteriores, durante el análisis consideré las transcripciones de las observaciones, las construcciones hechas en papel de las profesoras y sus bitácoras personales.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Códigos y su agrupamiento.

La interpretación de construcciones con doblado de papel permite la comprensión, experimentación y visualización de conceptos (ver su esquema en la figura 130). El colectivo de profesoras ha encontrado en el doblado de papel un *aporte a su formación docente*, lo cual puede ser corroborado cuando la profesora Natalia escribió: "[…] *es fuerte el aporte que aun recibo del trabajo en estas sesiones con doblado de papel*" (figura 129). También lo relacionan con una herramienta que permite la *comprensión* de los conceptos, la *experimentación* y la *visualización*, aspectos que se percibieron cuando la misma profesora afirmó "[…] *el trabajo de conceptos o construcciones tan abstractas* […] *están al alcance de trabajarse en el aula con el doblado de papel como una herramienta muy segura, de acceso a todos y de fácil comprensión*" (figura 129). Se pudo evidenciar que las profesoras manifestaron *conjeturas visuales*, como por ejemplo, "*Le restamos a* $\overline{MB}$, *L/2 y ahí sabemos* $\overline{A'B}$" (ver diálogo 13, episodio 4) o cuando la profesora Elizabeth mencionó que la medida de los catetos del triángulo rectángulo son "$\overline{AB}$ *y* $\overline{AM}$ *y encuentro la hipotenusa* $\overline{MB}$. $\overline{AB}$ *mide L y* $\overline{AM}$ *mide L/2*" (ver diálogo 13, episodio 4).

Como se precisó anteriormente, un aspecto importante del doblado de papel, es el proceso de *experimentación*, que se puso de manifiesto en el diálogo que se suscitó para establecer las relaciones geométricas en los pasos seguidos y poder encontrar la proporción. Estas relaciones fueron: "$\overline{AM}$ *sobre* $\overline{MB}$" (ver diálogo 13, episodio 4), idea expuesta por la profesora Natalia cuando se preguntó por los procesos de traslación en la construcción; "$\overline{BX}$ *es igual a* $\overline{A'B}$" (ver diálogo 13, episodio 4) fue una observación de la profesora Vicky cuando se preguntó por el segmento $\overline{A'B}$. Adicionalmente, sobre la experimentación, la profesora Elizabeth precisó que "*el ejercicio práctico que favorece el doblado de papel y la verificación tangible de la teoría es una bondad que ofrece este colectivo*" (figura 128). Finalmente, se pudo evidenciar que las profesoras encontraron *implicaciones geométricas euclidianas* en los pasos de la construcción; por ejemplo, cuando la profesora Elizabeth mencionó que se forma un triángulo rectángulo en la construcción de la media y extrema razón (ver diálogo 13, episodio 4) o cuando se encontró el algoritmo para mostrar la divina proporción (figura 47 del episodio 4).

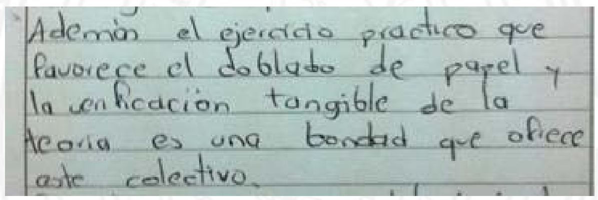
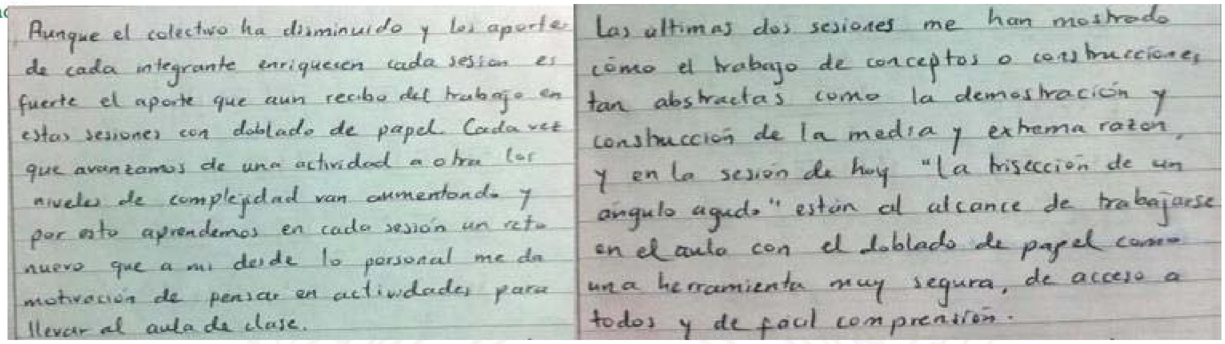

Además el ejercicio practico que
favorece el doblado de papel y
la verificación tangible de la
teoria es una bondad que ofrece
este colectivo.

Figura 128: Bitácora profesora Elizabeth. Episodio 4.

Por otro lado, considerando la construcción euclidiana en el software Geogebra, de la cual se analizaron algunas *conjeturas visuales e implicaciones geométricas*, de acuerdo con las discusiones del colectivo de profesoras, se determinó que la construcción de doblado de papel es la misma construcción euclidiana. Al respecto, la profesora Elizabeth manifestó: "*yo diría que el análisis comprensivo del doblado de papel me lleva a poder graficar utilizando el asistente* […] *y se hace doble aprendizaje porque entonces yo estoy mirando aquí* [señala la hoja] *y estoy mirando allá* [mira la pantalla] *y busco otras opciones, otras estrategias para poder llegar a… sin hacerlo simplemente haga allí, haga allá, sin ninguna razón*".


Aunque el colectivo ha disminuido y los aporte de cada integrante enriquecen cada sesion es fuerte el aporte que aun recibo del trabajo en estas sesiones con doblado de papel. Cada vez que avanzamos de una actividad a otra los niveles de complejidad van aumentando y por esto aprendemos en cada sesión un reto nuevo que a mi desde lo personal me da motivación de pensar en actividades para llevar al aula de clase.

Las ultimas dos sesiones me han mostrado cómo el trabajo de conceptos o construcciones tan abstractas como la demostración y construcción de la media y extrema razon, y en la sesion de hoy "la trisección de un ángulo agudo" están al alcance de trabajarse en el aula con el doblado de papel como una herramienta muy segura, de acceso a todos y de fácil comprensión.

Figura 129: Bitácora de la profesora Natalia. Episodio 4.

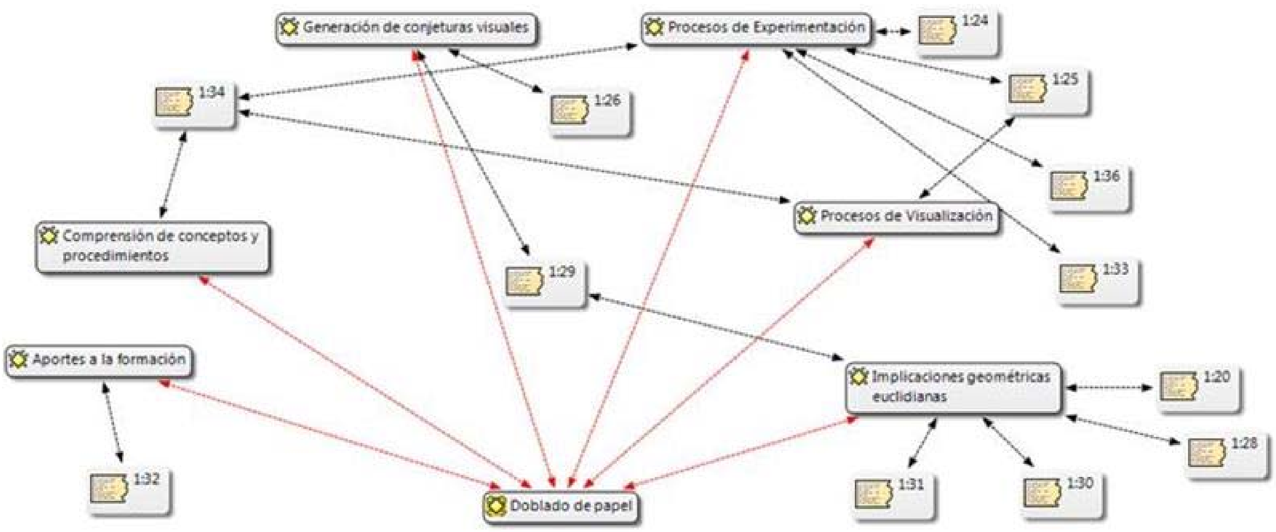


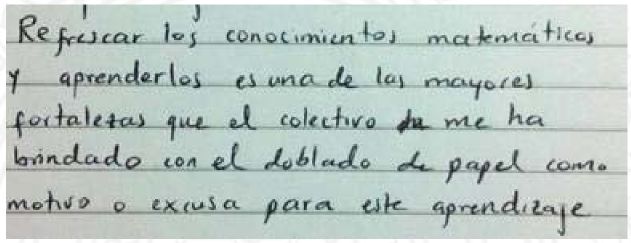
Figura 130: Esquema familia de códigos Doblado de papel.

La producción de conocimiento geométrico escolar se relaciona con la formación de profesores (ver su esquema en la figura 133). Durante el desarrollo de las sesiones, se ha encontrado que las profesoras relacionan su formación, con *los aportes recibidos del colectivo*. Al respecto, la profesora Elizabeth escribió: "*la socialización con mis compañeras me ha generado confianza y ha favorecido una apropiación diferente de los conceptos, teoremas de la geometría euclidiana*" (figura 131). También se puede percibir, en el fragmento anterior, que su formación parece estar mediada por la confianza que le brindan sus compañeras, lo que le ha generado la apropiación de *conocimientos disciplinares* sobre la geometría.

Basada en las observaciones registradas, percibí que las *tareas* de formación trabajadas con las profesoras, les permitió recordar, apropiarse o aprender conceptos geométricos y, a su vez, intentar analizar su pertinencia en el aula de clase. La profesora Natalia, al referirse al aporte del colectivo en cuanto a *sus conocimientos disciplinares*, agregó que "*refrescar los conocimientos matemáticos y aprenderlos es una de las mayores fortalezas que el colectivo me ha brindado con el doblado de papel como motivo o excusa para este aprendizaje*" (figura 132). Además, he notado *motivación* para participar de los encuentros programados. En este sentido, la profesora Natalia mencionó "*cada vez que avanzamos de una actividad a otra los niveles de complejidad van aumentando y por esto aprendemos en cada sesión un reto nuevo que a mi desde lo personal me da motivación de pensar en actividades para llevar al aula de clase*" (figura 129).

La formación de profesores no solo se asocia con el *conocimiento disciplinar* de las matemáticas, particularmente de la geometría en este estudio, sino que también se asocia con el *conocimiento de la enseñanza y del aprendizaje* de los estudiantes. Con relación a estos aspectos, la profesora Elizabeth precisó "*considero que he aprendido bastante, el reto es practicar con mis estudiantes y acercarlos de una manera más amena y concreta a conceptos relevantes de la geometría y sus aplicaciones en la cotidianidad*" (figura 131). La cita anterior muestra otro aspecto fundamental de la formación de profesores, que es la *reflexión sobre la práctica pedagógica*, situación que también ha surgido del análisis de este episodio. De hecho, la cita que se mencionó en el párrafo anterior, cuando la profesora

Natalia afirmó “[…] *aprendemos en cada sesión un reto nuevo que a mi desde lo personal me da motivación de pensar en actividades para llevar al aula de clase*” (figura 129), es un buen ejemplo de la manera en que las profesoras reflexionan sobre sus acciones en el aula de clase.



Refrescar los conocimientos matemáticos y aprenderlos es una de las mayores fortalezas que el colectivo ~~da~~ me ha brindado con el doblado de papel como motivo o excusa para este aprendizaje

Figura 132: Bitácora profesora Natalia. Episodio 4.

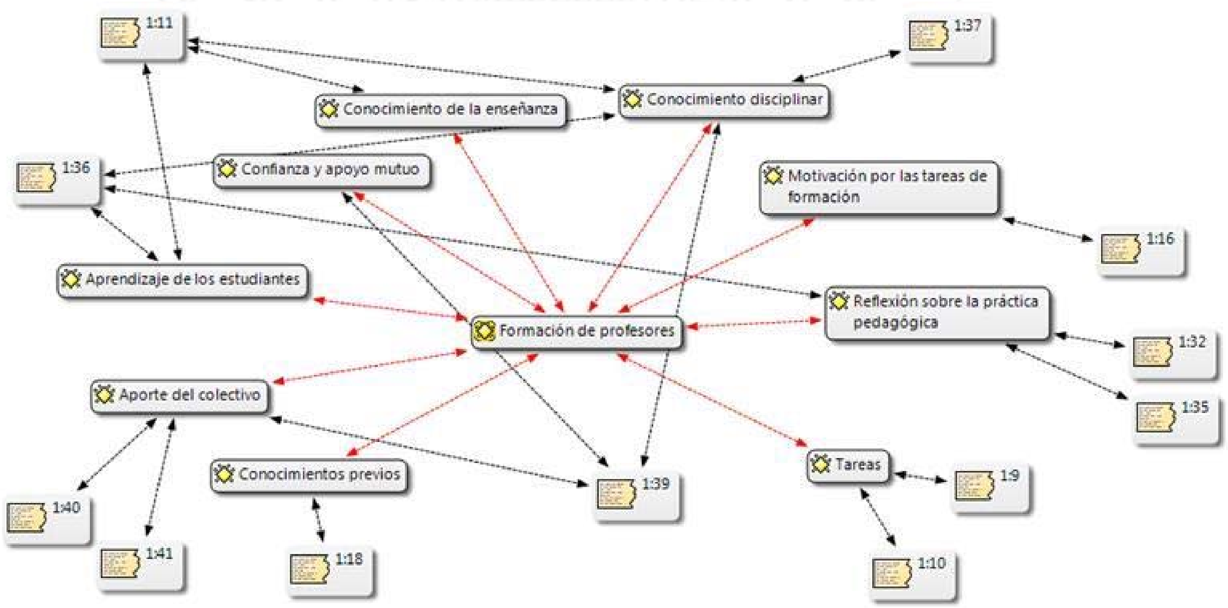


Figura 133: Esquema familia de códigos Formación de profesores.

La producción de conocimiento geométrico escolar emerge de un colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel (ver su esquema en la figura 135). Tal como se mencionó en categoría *la producción de conocimiento geométrico escolar se relaciona con la formación de profesores*, las participantes consideran que el colectivo les *aporta en gran* *medida a su formación como profesoras*, en tanto que les ha permitido generar un ambiente de *confianza* y respeto mutuo al interior del mismo, les ha brindado la posibilidad de apropiarse de conceptos y procedimientos, les ha permitido reflexionar sobre su práctica pedagógica o les ha dado alternativas de solución de inquietudes. En este sentido, la profesora Elizabeth escribió: "*la socialización con mis compañeras me ha generado confianza y ha favorecido una apropiación diferente de los conceptos, teoremas de la geometría euclidiana. Es muy enriquecedor escuchar y debatir sobre alternativas posibles para llegar a la solución de los interrogantes planteados*" (figura 131).

El *colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel* es un espacio en el que las profesoras pueden construir, consolidar o transformar tanto sus conocimientos geométricos, como los de su enseñanza (*colectivo de seres-humanos-con-medios*). En esta perspectiva, la profesora Elizabeth precisó "*el ejercicio práctico que favorece el doblado de papel y la verificación tangible de la teoría es una bondad que ofrece este colectivo*" (figura 128). Por su parte, la profesora Natalia manifestó: "*refrescar los conocimientos matemáticos y aprenderlos es una de las mayores fortalezas que el colectivo me ha brindado con el doblado de papel como motivo o excusa para este aprendizaje*" (figura 132). Adicionalmente, se ha notado que las profesoras, al interior del colectivo, se *apoyan mutuamente* aportando explicaciones al momento de abordar una instrucción que debe precisarse o cuando quieren justificar o argumentar alguna conjetura visual o algún hecho geométrico. De hecho, ellas manifiestan que también lo hacen por fuera de los encuentros formales.

Un aspecto de gran relevancia que se ha encontrado al analizar las interacciones del colectivo, es el hecho de que este les ha permitido a las profesoras *superar temores y/o dificultades*. Tal es el caso de la profesora Elizabeth, quien explicó: "*la comunicación facilitada a través del colectivo me ha permitido enfrentar temores hacia la asignatura de la geometría, ya que considerándola fundamental en mi proceso de aprendizaje personal, el desconocimiento me creó temores que hoy puedo enfrentar*" (figura 134). Al respecto, afirmó la profesora Elizabeth que "*la socialización con mis compañeras me ha generado confianza y ha favorecido una apropiación diferente de los conceptos, teoremas de la geometría euclidiana* […]" (figura 131).

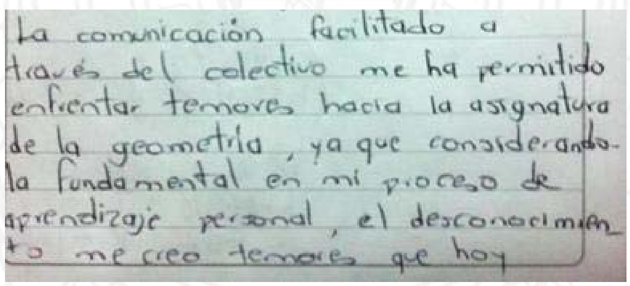

La comunicación facilitado a
través del colectivo me ha permitido
enfrentar temores hacia la asignatura
de la geometría, ya que considerando-
la fundamental en mi proceso de
aprendizaje personal, el desconocimien-
to me creo temores que hoy

Figura 134: Bitácora profesora Elizabeth. Episodio 4.

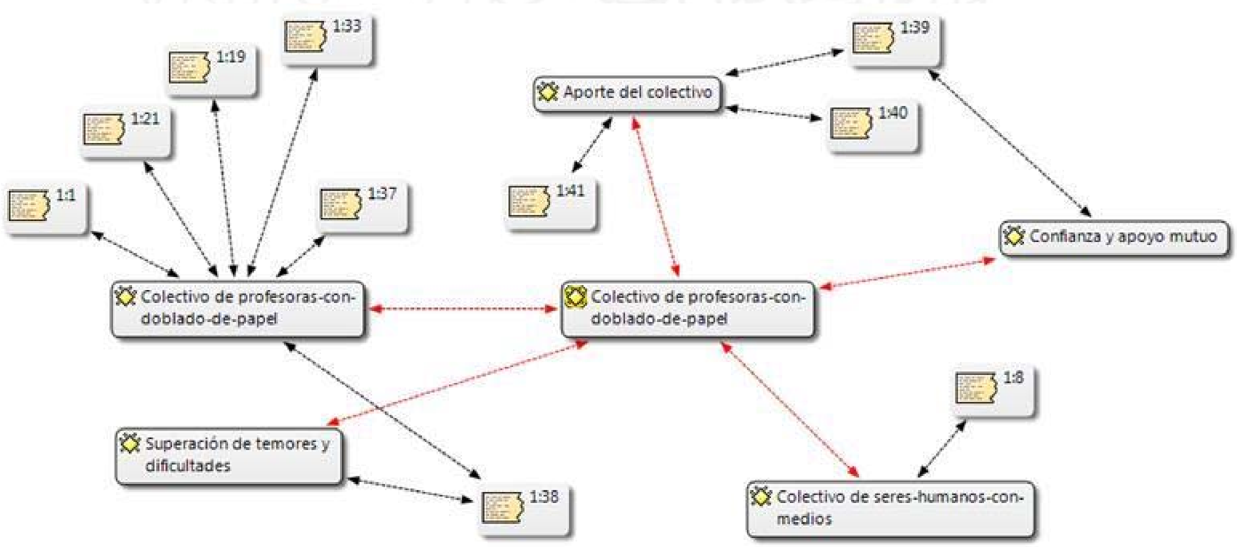


Figura 135: Esquema familia de códigos Colectivo de profesores-con-doblado-de-papel

4.5.5. Análisis del quinto episodio: colectivo de la Institución Educativa.

El episodio quinto se desarrolló en una sesión y media de trabajo, con un tiempo total aproximado de dos horas. En este se abordó la construcción de la trisección de un ángulo agudo, mediante el doblado de papel y se analizaron algunas implicaciones geométricas; además, se estudiaron algunas propiedades de la trisección de Arquímedes y su relación con los pasos de la trisección con doblado de papel. Para el análisis de las interacciones del colectivo, se retomaron las transcripciones de los videos, los materiales de las profesoras y sus bitácoras respectivas. Cabe aclarar que algunas reflexiones de las bitácoras, se hicieron con base en el cuarto episodio y en el quinto episodio; por esta razón, algunos registros serán retomados en este análisis.

Códigos y su agrupamiento.

Aporte del colectivo a la formación como profesoras (ver su esquema en la figura 136). Durante el encuentro, las profesoras manifestaron que el colectivo les aporta de manera significativa a su formación como profesoras. Por ejemplo, la profesora Elizabeth expresó en su bitácora: "*es enriquecedor escuchar y debatir sobre alternativas posibles para llegar a la solución de interrogantes*" (ver figura 131, del análisis de cuarto episodio). Frente a esto, la profesora Natalia afirmó que *es fuerte el aporte que aún recibe del colectivo* (ver figura 129, del análisis del cuarto episodio), dado que sintió *que aprendió en cada sesión un reto nuevo* (ver figura 129, del análisis del cuarto episodio). De hecho, ella misma precisó que "*refrescar los conocimientos matemáticos y aprenderlos es una de las mayores fortalezas que el colectivo me ha brindado con el doblado de papel*" (ver figura 132, del análisis del cuarto episodio).

La formación como profesoras también se ve permeada por los aprendizajes logrados y por la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos. En particular, la profesora Elizabeth afirmó que ella "*considera que ha aprendido bastante*" (ver figura 131, análisis del cuarto episodio) pues "*el colectivo favorece una apropiación diferente de los conceptos y teoremas de la geometría euclidiana*" (ver figura 131, análisis del cuarto episodio).

Además, un aspecto de gran relevancia en la conformación de un colectivo, es la generación de un ambiente de apoyo mutuo y confianza. En este sentido, las profesoras sintieron que "*la socialización con las compañeras les generó confianza*" (ver figura 131, análisis del cuarto episodio) y les permitió "*enfrentar temores*" que albergaban frente a la geometría (ver figura 134, del análisis del cuarto episodio).

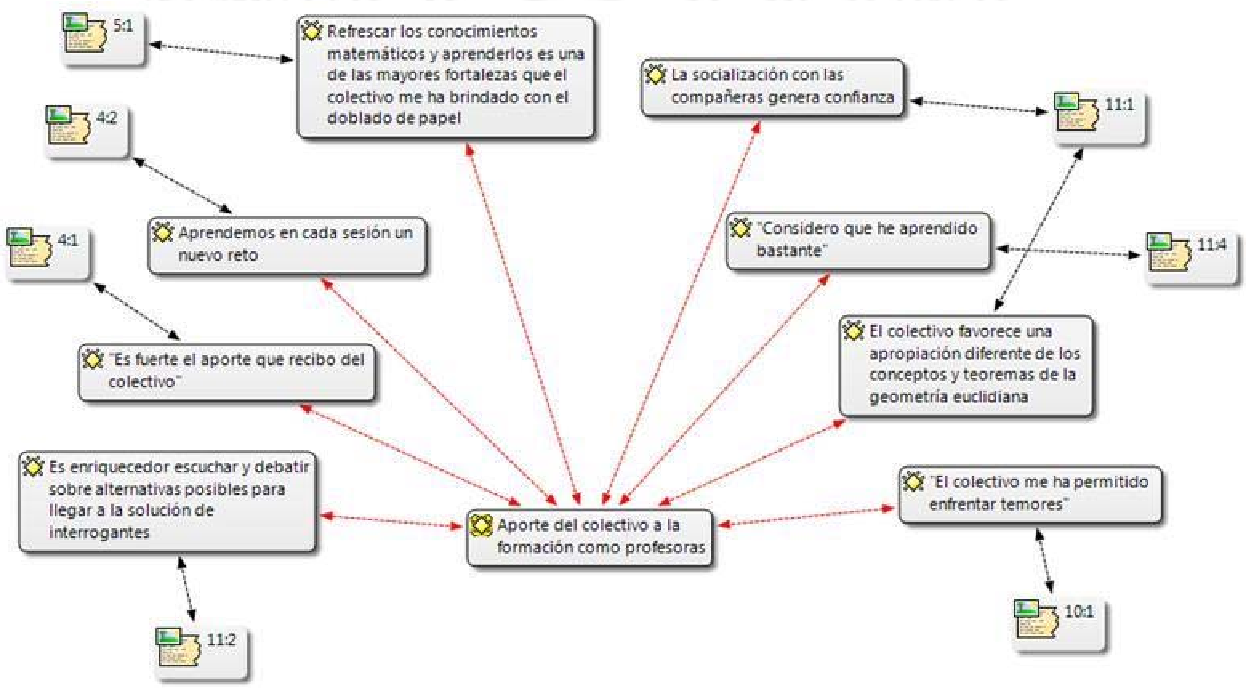


Figura 136: Esquema familia de códigos Aporte del colectivo a la formación como profesoras.

Comprensión y análisis de conceptos geométricos (ver su esquema en la figura 139). Las interacciones del colectivo permitieron que las profesoras se apropiaran de conceptos y procedimientos geométricos, de tal manera que les posibilitara su análisis y posible comprensión. El encuentro propició diálogos sobre los siguientes conceptos: *la mediatriz de un segmento* (ver diálogo 14), *las diferentes formas de demostrar la trisección de Arquímedes*, *la congruencia de triángulos*, *los conceptos primitivos de la geometría euclidiana*, *la propiedad que cumplen los puntos para pertenecer a la mediatriz* (ver diálogo 15), *diferencias entre mediatriz y bisectriz*.

El encuentro también permitió que las profesoras analizaran: *las implicaciones geométricas, paso a paso, de la construcción con doblado de papel en bitácoras* (ver figuras 137 y 58, del quinto episodio), *las implicaciones relacionadas con la mediatriz* (ver diálogos 14 y 15) y la *bisectriz*, y *la trisección propuesta por Arquímedes* (ver figura 60 del quinto episodio). Esta última, en particular, fue debatida y analizada (hecho que se puede observar en las *bitácoras*, figuras 138 y 60, del quinto episodio), de tal manera que se pudo lograr una *demostración a partir de ángulos inscritos y externos en circunferencias* (ver figura 138). Por lo tanto, se percibió que el colectivo favoreció "*una apropiación diferente de los conceptos y teoremas de la geometría euclidiana*" (ver figura 131, del análisis del cuarto episodio).

ABCD La hoja
Se dobla el ángulo NAD
Doblamos una perpendicular $\overline{PQ}$ a a $\overline{AB}$
y una paralela $\overline{ML}$ a $\overline{AB}$. $\overline{PQ}$ equidista
de $\overline{AD}$ y $\overline{ML}$
Llevamos A sobre algun punto de $\overline{PQ}$ y
que a la vez M coincida con el lado
del ángulo

- Nombramos un punto E en la paralela que es el que genera la paralela equidistante. Nombramos Z el punto del doblez sobre AD.
- Llevamos Z sobre E y marcamos el punto medio G y hacemos dos angulos de 90° ZG = GE
- Tenemos una tercera parte.
- Se hace una bisectriz sobre las dos terceras partes.

Figura 137: Bitácora profesora Natalia. Mostración trisección.

El $\measuredangle Z$ mide la semidiferencia de los arcos que subtiende

$$Z = \frac{X - Z}{2} \Rightarrow 3Z = X$$

Figura 138: Bitácora profesora Natalia Justificación trisección de Arquímedes.

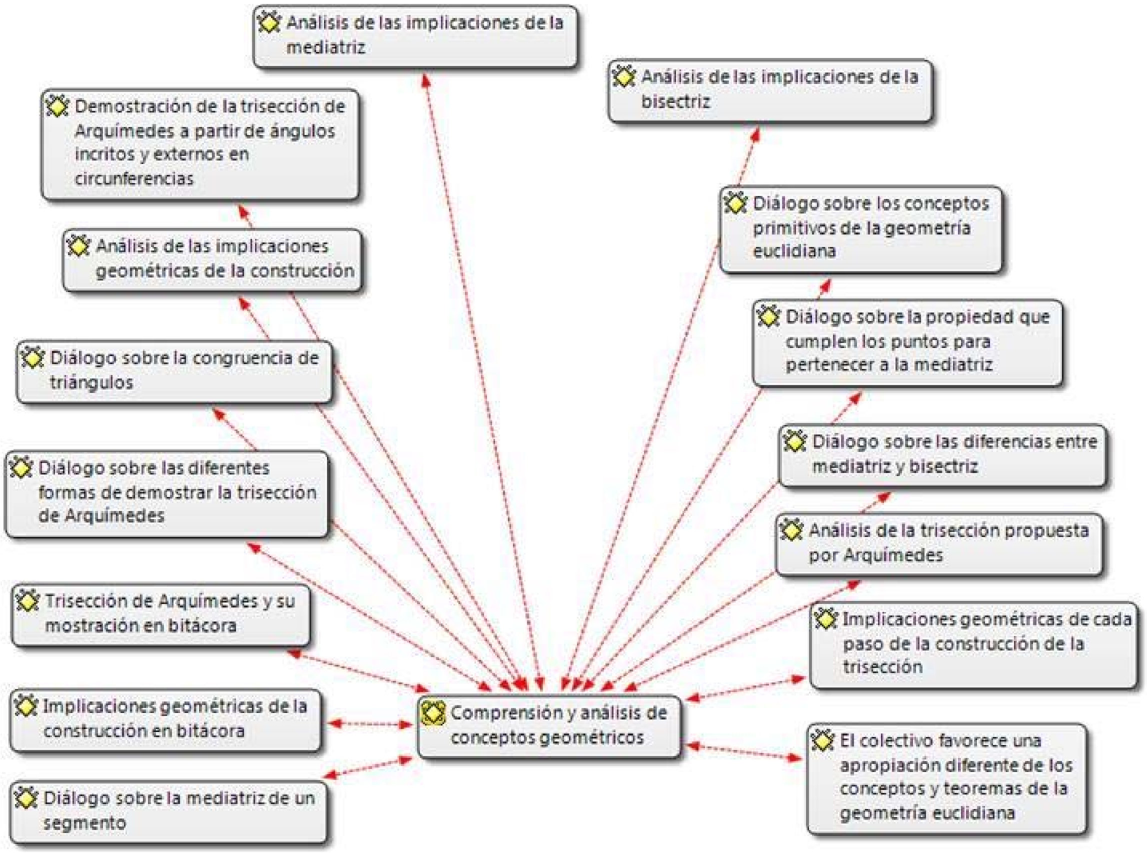


Figura 139: Esquema familia de códigos Comprensión y análisis de conceptos geométricos.

Dificultades (ver su esquema en la figura 140). Durante el encuentro, también se percibieron algunas dificultades, con respecto a *la generación de conjeturas falsas* y al *uso del lenguaje*. En el primer caso, se notó que Elizabeth o Vicky manifestaron algunas ideas particulares, con respecto a sus construcciones, que no se podían validar, de manera general, mediante argumentos con el uso del doblado de papel (igualdad de ángulos o lados, ver diálogo 16). En el segundo caso, la profesora Elizabeth exhibió algunas *dificultades en el uso del lenguaje geométrico*; cuando se les preguntó por la igualdad de los tres ángulos de la construcción de la trisección, ella mencionó que los ángulos eran perpendiculares. Por otro lado, cuando se le preguntó sobre el concepto de *triángulo isósceles*, ella manifestó "*tiene dos lados iguales y uno desigual*", lo cual es un vacío conceptual.

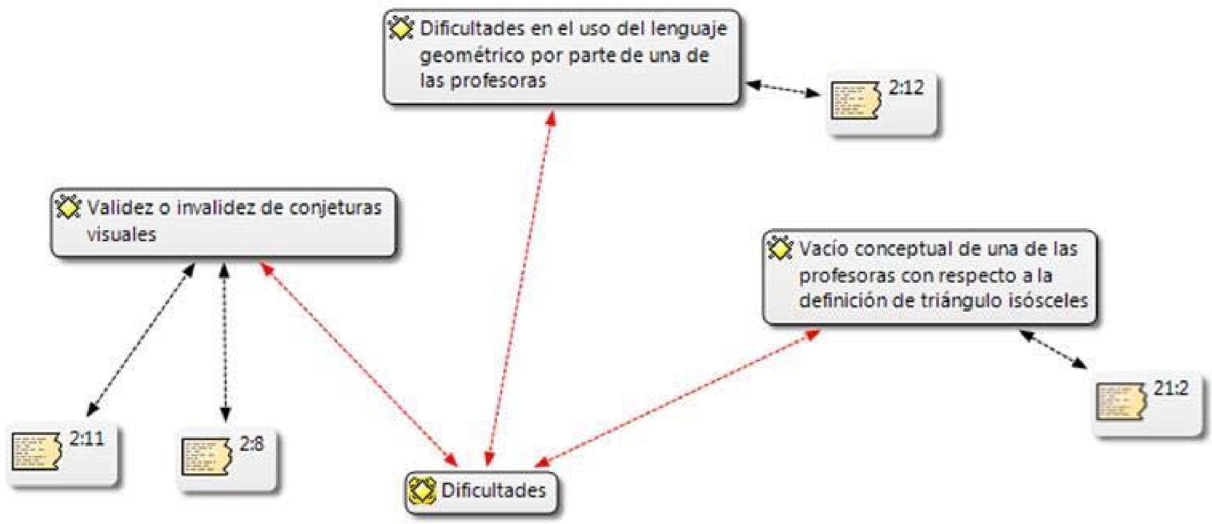


Figura 140: Esquema familia de códigos Dificultades.

Reflexión sobre la práctica pedagógica (ver su esquema en la figura 141). Hasta el momento, se percibió que los encuentros con las profesoras generan un ambiente propicio para la reflexión sobre la práctica pedagógica. En este escenario, se mencionó que "*el doblado de papel es una herramienta muy segura, de acceso a todos y de fácil comprensión*" (ver figura 129, análisis cuarto episodio), pues permite que los estudiantes se acerquen "*de una manera amena y concreta a conceptos relevantes de la geometría y sus aplicaciones en la cotidianidad*" (ver figura 131, análisis del cuarto episodio), es decir, "*conceptos tan abstractos pueden estar al alcance de trabajarse en el aula de clase*" (ver figura 129, análisis del cuarto episodio). Al respecto, la profesora Elizabeth afirmó "*el ejercicio práctico que favorece el doblado de papel y la verificación tangible de la teoría es una bondad del colectivo*" (ver figura 128, análisis del cuarto episodio).

Dado que las profesoras expresaron que "*aprenden en cada sesión un nuevo reto*" (ver figura 129, análisis del cuarto episodio), eso les permite estar "*motivadas para pensar en actividades para llevar al aula de clase"* (ver figura 129, análisis del cuarto episodio). Por consiguiente, *se convierte en un reto para practicar con los estudiantes* (ver figura 131, análisis del cuarto episodio) y generar actividades que propicien la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos.

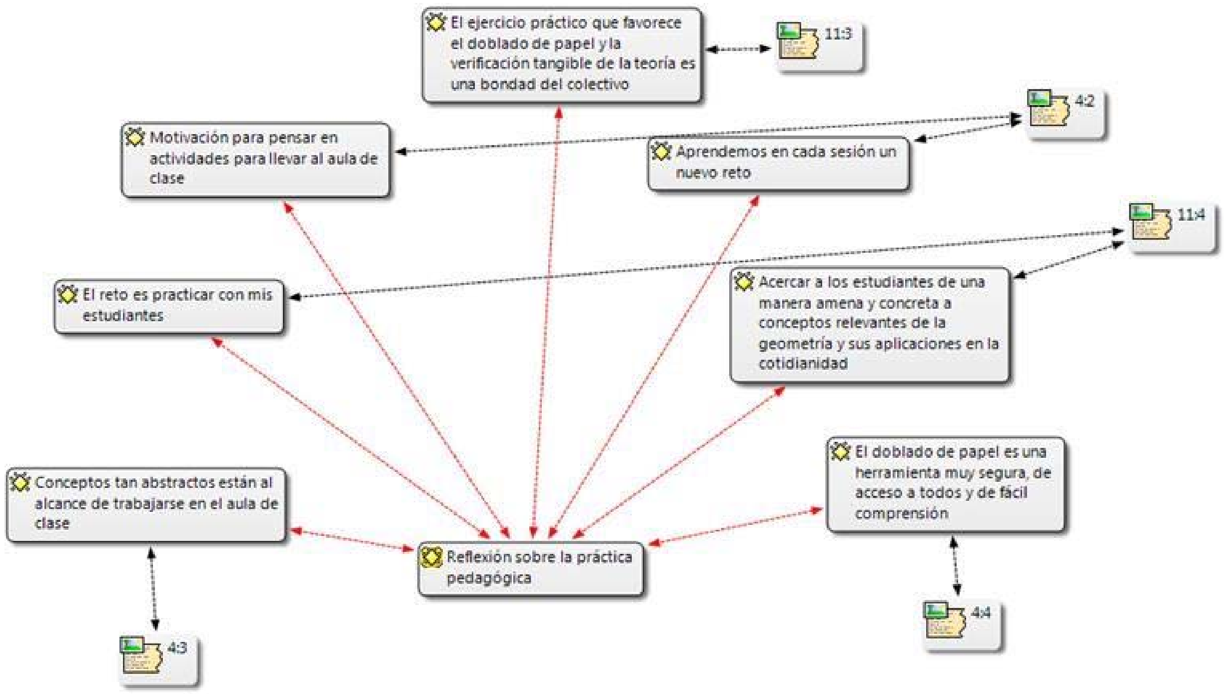


Figura 141: Esquema familia de códigos Reflexión sobre la práctica pedagógica.

Uso del doblado de papel para construir, experimentar, visualizar y probar hechos geométricos (ver su esquema en la figura 143). De acuerdo con las dinámicas que se generaron durante el encuentro, se percibió que el doblado de papel permite que las profesoras construyan y experimenten con el doblado de papel. En este sentido, se observó que las participantes: *construyeron la trisección de un ángulo agudo* (también se *dialogó sobre el repaso de la construcción*), mediante el doblado de papel (ver los *pasos para la* *trisección* en figura 58, del quinto episodio); *para dividir un ángulo en dos partes, llevaron un doblez sobre otro (construcción de bisectriz)*; *generaron un nuevo doblez: llevar un punto sobre un doblez, a la vez otro punto sobre otro doblez* (ver construcción de la trisección, figura 61, del quinto episodio); *analizaron nuevamente las construcciones de segmentos paralelos y perpendiculares*.

Si bien, los procesos de construir, experimentar, visualizar y generar conjeturas visuales, se relacionan entre sí en todo momento del trabajo de investigación, se enumeran a continuación aquellas acciones que se asocian directamente con la visualización y la generación de conjeturas, a partir de la construcción de la trisección, y que surgieron de las interacciones del colectivo de profesoras: *análisis de las implicaciones geométricas de cada paso de la construcción* (también se pueden observar en las *bitácoras*, ver figuras 58 y 59 del quinto episodio); *el primer paso se relacionó con el primer postulado de Euclides, por dos puntos pasa una única recta*; *el segundo paso consistió en llevar un segmento sobre sí mismo para construir una perpendicular*; *el tercer paso se asoció con llevar un punto sobre otro para generar una mediatriz* o *llevar un segmento paralelo sobre otro paralelo, para generar otra paralela que equidista de las anteriores*; *el cuarto paso consistió en generar un doblez si se lleva un punto sobre un segmento, al mismo tiempo otro punto sobre otro segmento*; *el quinto paso se relacionó con la construcción de una mediatriz si se lleva un punto sobre otro*; *el sexto paso consistió en prolongar un doblez para garantizar que por dos puntos pasa un único doblez*; *el séptimo paso se asoció con llevar un doblez sobre otro para generar una bisectriz* (todos los pasos, se pueden observar en las figuras 58 y 59, del quinto episodio).

Por otro lado, con el doblado de papel se pudieron probar, verificar y justificar hechos geométricos. A saber: *análisis de algunas ideas que pueden tomarse como verdaderas con doblado de papel* (axiomas o principios, ver figura 142); *mostración de la trisección del ángulo mediante el doblado de papel en bitácora* (ver figura 59, del quinto episodio*); mostración de dobleces paralelos y perpendiculares mediante el doblado de papel*; validez o invalidez de conjeturas visuales; diálogo sobre la mostración de segmentos perpendiculares; *relación de la trisección de Arquímedes con la de doblado de papel* y su *diálogo* (ver figura 58 o en *bitácora* ver figura 62, del quinto episodio); *se puede mostrar con doblado de papel que los tres ángulos de la construcción son iguales* (ver figura 59, del quinto episodio); *justificación de la trisección en bitácora* (ver figura 59, quinto episodio); *principio: por dos puntos solo pasa un doblez* (figura 142); *principio: un punto sobre otro punto genera una mediatriz* (figura 142*); principio: doblez sobre doblez genera una bisectriz* (figura 142); *principio: dado un punto y un doblez, se puede hacer un nuevo doblez que lleve el doblez sobre sí mismo y pase por el punto* (figura 142); *principio: dados dos puntos P1 y P2 y dos dobleces L1 y L2, se puede hacer un doblez que lleve el punto P1 sobre L1 y a su vez P2 sobre L2* (figura 142).

Finalmente, con respecto al uso del doblado de papel en el aula de clase, la profesora Elizabeth afirmó "*el ejercicio práctico que favorece el doblado de papel y la verificación tangible de la teoría es una bondad del colectivo*" (ver figura 128, análisis del cuarto episodio); de hecho, ella misma precisó que "*el doblado de papel tiene otro sentido aparte de doblar por doblar*". De la misma manera, Natalia resaltó algunas bondades del uso del doblado de papel, "*es una herramienta muy segura, de acceso a todos y de fácil comprensión*" (ver figura 129 del análisis del cuarto episodio); adicionalmente, se mencionó que "*acerca a los estudiantes de una manera amena y concreta a conceptos relevantes de la geometría y sus aplicaciones en la cotidianidad*" (ver figura 131 del cuarto episodio), pues permite que *conceptos abstractos estén al alcance de trabajarse en el aula de clase* (ver figura 129, análisis del cuarto episodio), lo que motiva a las profesoras *a pensar en actividades para abordar con sus estudiantes* (ver figura 129, análisis del cuarto episodio).

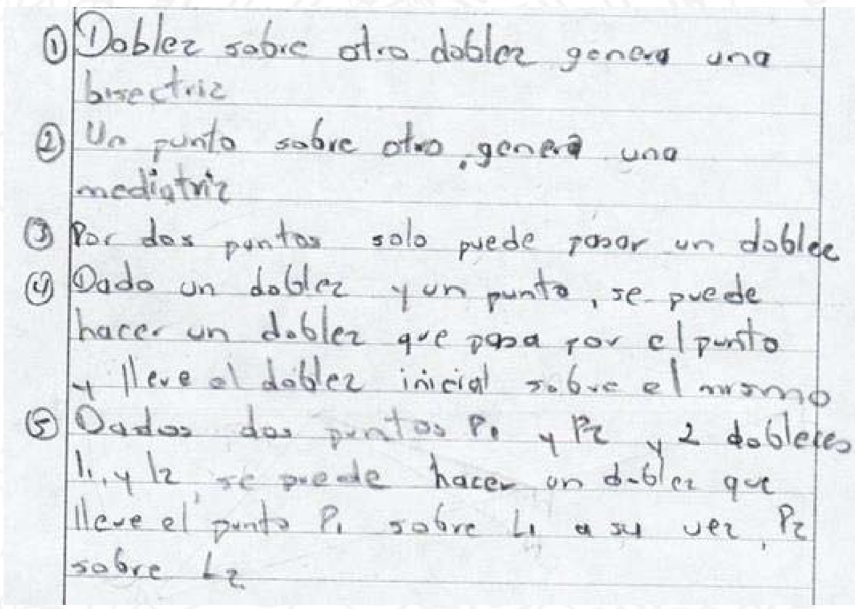

① Doblez sobre otro doblez genera una bisectriz
② Un punto sobre otro, genera una mediatriz
③ Por dos puntos solo puede pasar un doblez
④ Dado un doblez y un punto, se puede hacer un doblez que pasa por el punto y lleve el doblez inicial sobre el mismo
⑤ Dados dos puntos P_1 y P_2 y 2 dobleces l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que lleve el punto P_1 sobre L_1 a su vez, P_2 sobre L_2

Figura 142: Bitácora profesora Elizabeth. Proposiciones básicas del doblado de papel.

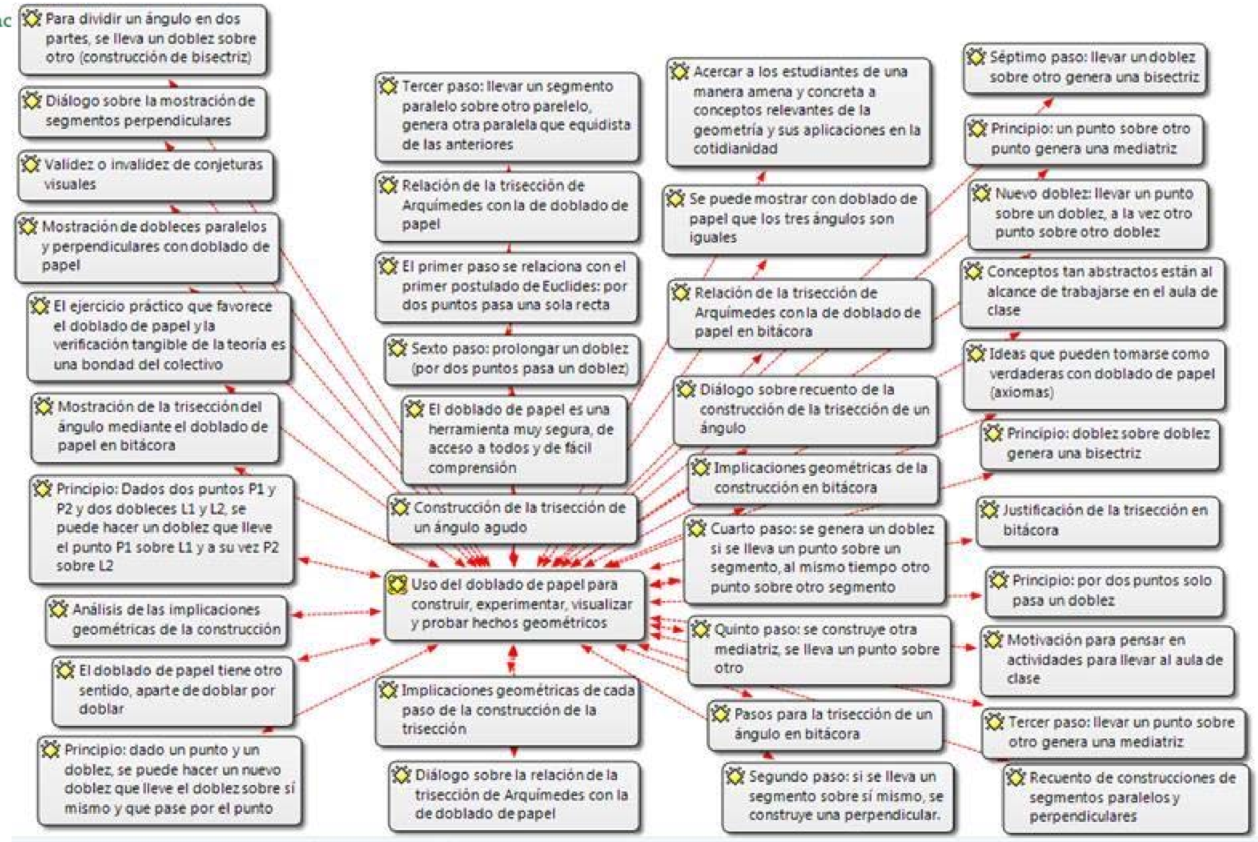


Figura 143: Esquema familia de códigos Uso del doblado de papel para construir, experimentar, visualizar, probar.

4.5.6. Análisis del sexto episodio: colectivo de la Institución Educativa.

El sexto episodio se desarrolló en un solo encuentro, el cual duró, aproximadamente, una hora y media. En este se abordaron los axiomas de la geometría del doblado de papel, que reciben el nombre de Axiomas de Huzita-Hatori. Para el análisis de los códigos y familias de códigos que emergieron, se consideraron los materiales de las profesoras, sus bitácoras y las transcripciones de los videos (observaciones). Es importante resaltar que durante este encuentro no se les solicitó a las participantes que escribieran alguna reflexión sobre sus procesos formativos, ni sobre su práctica pedagógica.

Códigos y su agrupamiento.

Análisis de los axiomas de Huzita-Hatori (ver su esquema en la figura 144). Estos axiomas son propios de la geometría del doblado de papel (Santa y Jaramillo, 2010), pero tienen algunas implicaciones geométricas que deben ser consideradas. Durante el encuentro, se realizaron varios análisis de cada uno de los axiomas y se determinaron algunos hechos geométricos y restricciones, algunas de ellas supeditadas al tamaño del plano finito, que en este caso es la hoja de papel. Las profesoras analizaron: *el primer axioma* y probaron que por dos puntos pasa un único doblez; *el segundo axioma* y determinaron que se genera una mediatriz; *el tercer axioma* y explicaron que se construye una *bisectriz*, que no es única si los dobleces se cortan dentro del plano determinado por la hoja de papel (ver figura 63, del sexto episodio); de manera muy general, el cuarto axioma, dado que se relaciona con la construcción de una perpendicular, hecho trabajado en encuentros anteriores; *el quinto axioma* (ver figura 64 del sexto episodio) y se concluyó que se asociaba directamente con las posiciones relativas de una circunferencia con una recta, por lo tanto tiene a lo sumo dos dobleces solución (se *analizó un caso en el que no era posible encontrar solución* y se discutió sobre la *unicidad del doblez*); *el sexto axioma* y se relacionó con la construcción de una tangente común a dos parábolas (ver figura 65 del sexto episodio) y, finalmente, *se analizó el séptimo axioma* y se establecieron algunas *implicaciones geométricas* y ciertas *restricciones* en su construcción (ver figura 66 del sexto episodio). En la bitácora de la profesora Vicky se pueden observar algunas conclusiones de estos análisis (ver figura 67 del sexto episodio).

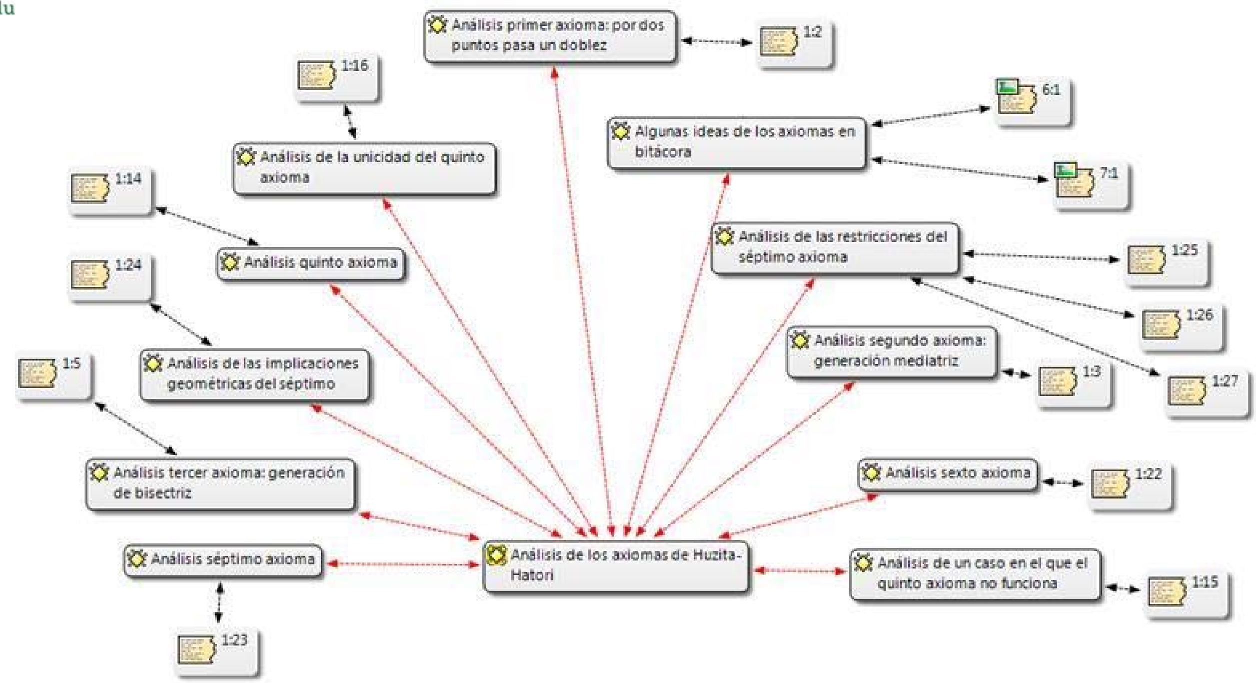


Figura 144: Esquema familia de códigos Análisis de los axiomas de Huzita-Hatori.

Diálogos e interacciones del colectivo con respecto a los axiomas de Huzita-Hatori (ver su esquema en la figura 145). Durante el encuentro se propiciaron varios diálogos e interacciones al interior del colectivo, con respecto a los axiomas de Huzita-Hatori. Entre ellos, se destacaron: *diálogo sobre la existencia de dobleces en el axioma 3* (ver diálogo 17); *diálogo sobre el axioma 3, si los dobleces son paralelos* (ver diálogo 17); *diálogo sobre la unicidad del axioma tres: si los dobleces se cortan en la hoja de papel, hay dos dobleces solución* (ver diálogo 17); *diálogo sobre el axioma 4* (ver diálogo 18); *diálogo sobre la construcción de los dobleces del quinto axioma*; *diálogo sobre el quinto axioma: incidencia de las distancias para encontrar los dobleces* (ver figura 146, ver diálogo 19); *diálogo sobre la relación del quinto axioma con las posiciones de una circunferencia y una recta*.

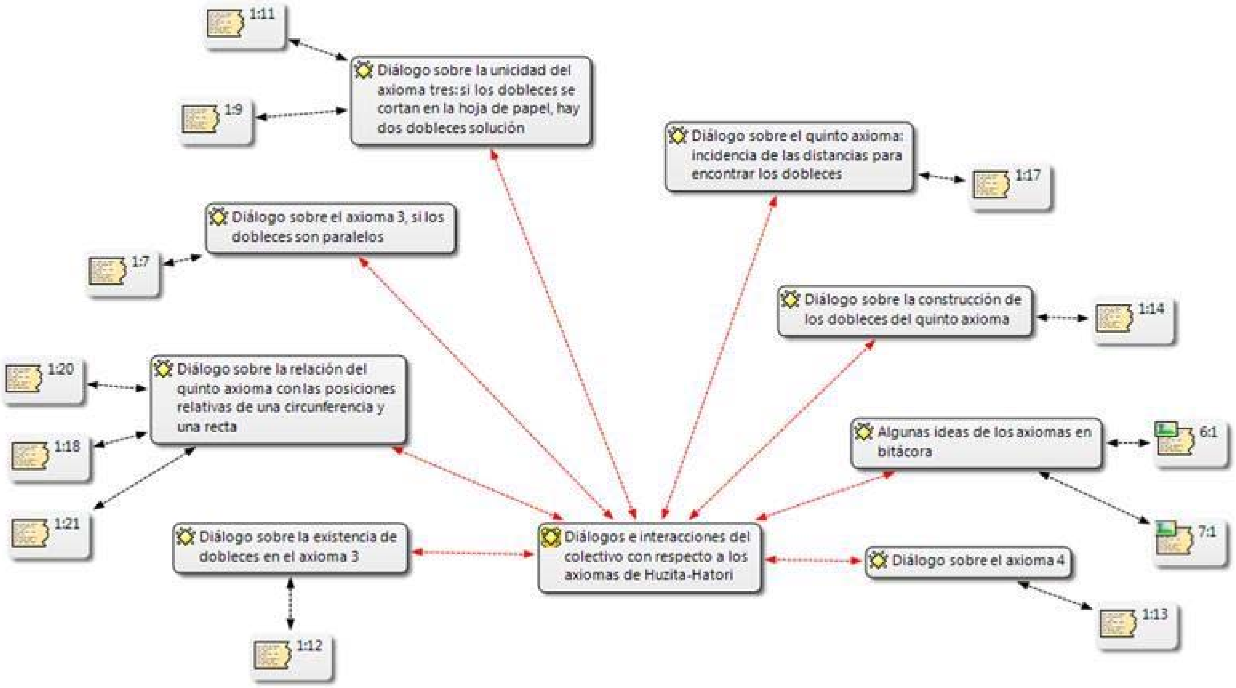


Figura 145: Esquema familia de códigos Diálogos e interaccione del colectivo con respecto a los axiomas.

Implicaciones geométricas de los axiomas de Huzita-Hatori (ver su esquema en la figura 147). El encuentro fue propicio para analizar algunas implicaciones geométricas que están inmersas en los axiomas de Huzita-Hatori. Con respecto al primer axioma, se determinó que se relacionaba con el primer axioma de Euclides, que afirma que por dos puntos pasa una única recta; con respecto al *segundo axioma*, se concluyó que genera el lugar geométrico *mediatriz*; del *tercer axioma* se mencionó que se relaciona con la construcción de una *bisectriz*, la cual puede ser *definida como lugar geométrico*, a través del doblado de papel. De este axioma también se estableció que *si los dobleces son paralelos y se aplica este, se construye una paralela que equidista de las dos paralelas anteriores* (ver diálogo 17); de la misma manera, también se concluyó *que la aplicación de este axioma cuando los dobleces son paralelos se relaciona con la construcción de una mediatriz, pues se lleva un punto sobre otro*.

Con respecto al cuarto axioma, se mencionó que se relaciona con la construcción de una perpendicular a un segmento que pase por un punto dado (ver diálogo 18). Del *quinto axioma se dijo que se relacionaba con las posiciones relativas de una circunferencia con una recta* (ver figura 146); el sexto axioma se asoció con la construcción de una tangente común a dos parábolas y se determinó que tenía varias restricciones a considerar (ver figura 146); finalmente, del séptimo axioma, se mencionó que solo tenía una solución, la cual se relaciona con una tangente a una parábola, de directriz L1, y que a su vez es normal a L2 (ver figura 146).

En general, se percibió que las profesoras analizaron con mayor profundidad las implicaciones de los axiomas 5, 6 y 7, dado que sus construcciones fueron nuevas para ellas. Adicionalmente, se observó que tales implicaciones y algunas ideas frente a estos, fueron escritas en sus bitácoras personales.

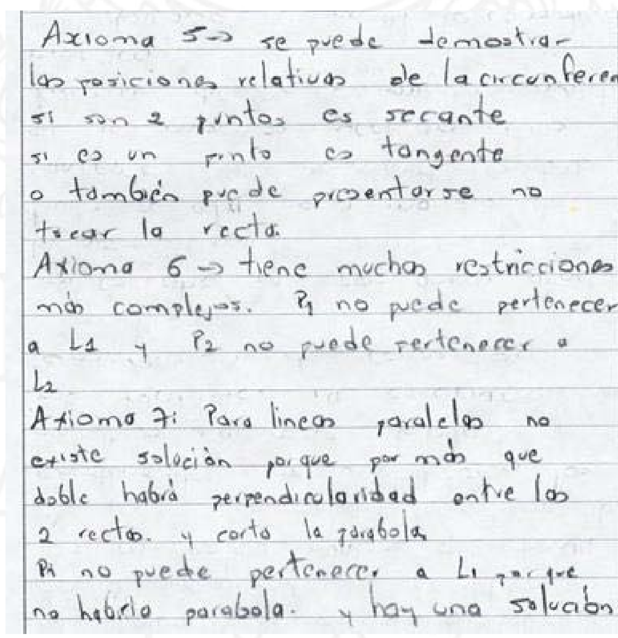

Axioma 5 → se puede demostrar
las posiciones relativas de la circunferencia
si son 2 puntos es secante
si es un punto es tangente
o también puede presentarse no
tocar la recta.
Axioma 6 → tiene muchas restricciones
más complejas. P1 no puede pertenecer
a L1 y P2 no puede pertenecer a
L2
Axioma 7: Para lineas paralelas no
existe solución porque por más que
doble habrá perpendicularidad entre las
2 rectas. y corta la parabola
P1 no puede pertenecer a L1 porque
no habría parabola. y hay una solución

Figura 146: Bitácora profesora Elizabeth. Algunas implicaciones de los axiomas.

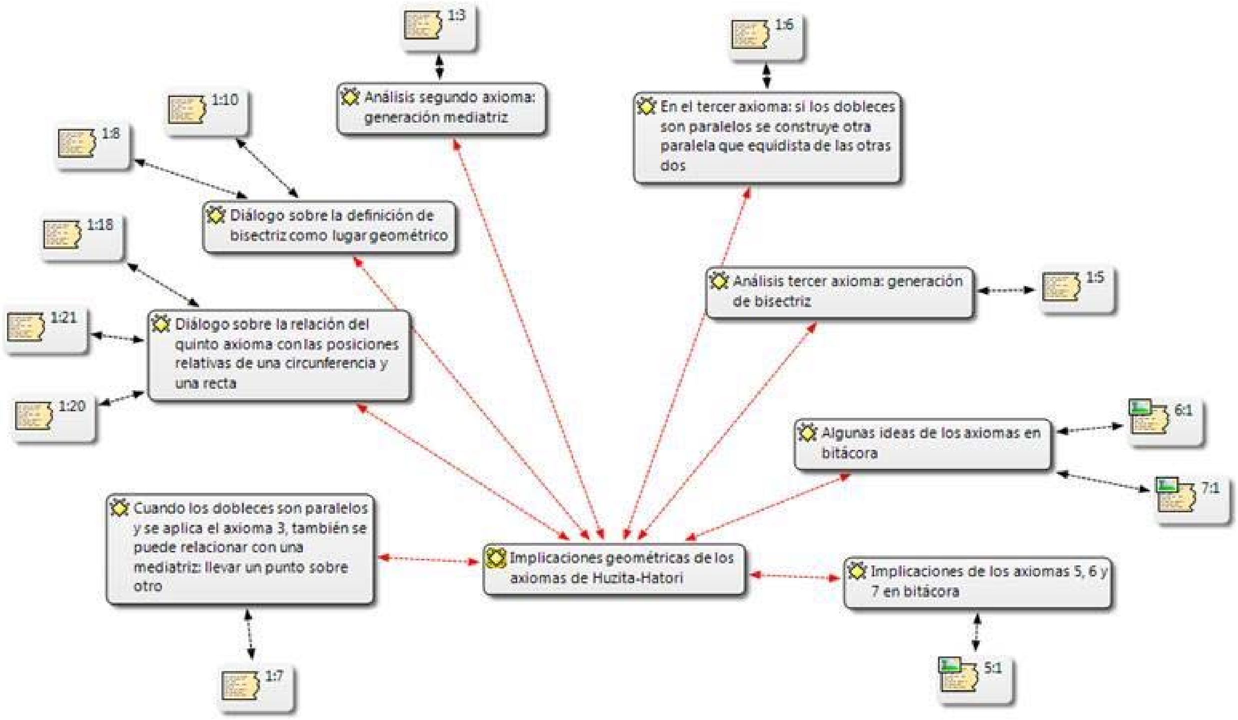


Figura 147: Esquema familia de códigos Implicaciones geométricas de los axiomas.

Uso del doblado de papel para la construcción y generación de conjeturas visuales (ver su esquema en la figura 149). Las construcciones que se propusieron de los axiomas de Huzita-Hatori, propiciaron un ambiente para la generación y posible validación de algunas conjeturas visuales. En particular, dada la *construcción del axioma 1*, se estableció que por dos puntos solo era posible construir un único doblez. El análisis del segundo axioma, permitió retomar la definición de *mediatriz como lugar geométrico y su construcción* asociada, a partir de la aplicación de dicho axioma. La *construcción del axioma 3*, relacionada con el lugar geométrico *bisectriz*, generó un diálogo sobre la existencia de los dobleces, que está supeditada al tamaño del papel; por lo tanto, *si los dobleces son paralelos se construye una paralela que equidista de las otras dos*; si los dobleces se cortan dentro del plano formado por la hoja, se obtienen dos soluciones; de lo contrario, solo se puede construir una solución (ver diálogo 17 y ver figura 63, del sexto episodio).

Con respecto a la *construcción del axioma 5*, se logró establecer una *relación directa con las posiciones relativas de una circunferencia y una recta*. Para llegar a tal conclusión, se generó un diálogo (diálogo 19) en el que se conjeturó sobre la *incidencia de las distancias para encontrar los dobleces* que cumplieran las condiciones. De la *construcción del axioma 6*, se establecieron algunas restricciones para garantizar su existencia, por ejemplo, que P1 no podía pertenecer a L1, ni P2 a L2; también se dialogó sobre la formación de dos parábolas de directrices L1 y L2, y focos P1 y P2, respectivamente (ver figura 65 del sexto episodio). De la *construcción del axioma 7* (ver figura 66 del sexto episodio), se estableció que el punto P1 no podía pertenecer al doblez L1 y que L1 no podía ser paralela a L2 (ver figura 146); a su vez, se mencionó que el axioma solo tenía una solución, que es tangente a una parábola de directriz L1 y foco P1, y normal a un doblez L2. Finalmente, se percibió que las profesoras tuvieron algunas dificultades para construir este último axioma (ver figura 148), pues los dobleces hechos no cumplían con las condiciones establecidas; en el caso mostrado, la profesora Vicky terminó aplicando el cuarto axioma, en lugar del séptimo.

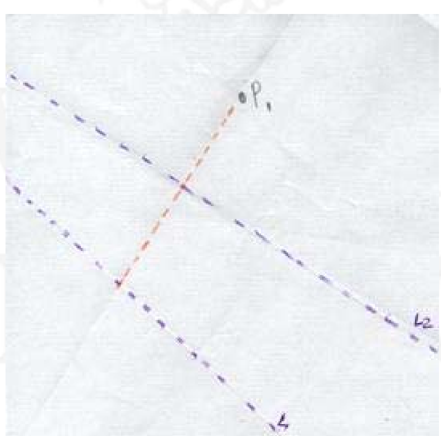


Figura 148: Construcción fallida axioma 7.

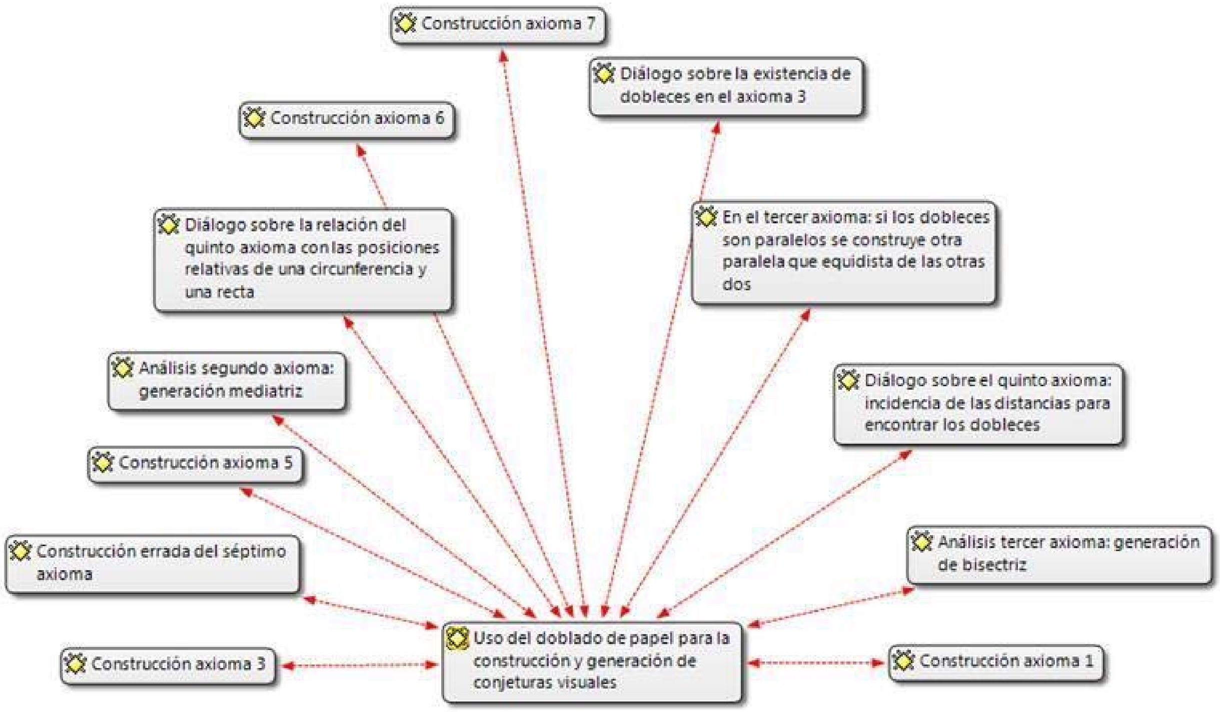


Figura 149: Esquema familia de códigos Uso del doblado de papel para la construcción y generación de conjeturas visuales.

4.5.7. Análisis del séptimo episodio: colectivo de la Institución Educativa.

En el último encuentro con las profesoras del colectivo, ellas tuvieron la oportunidad de presentar una tarea de formación, planeada y pensada por ellas previamente. Las participantes consultaron algunos axiomas de Euclides y de Hilbert, en la red, y los construyeron con doblado de papel, con el propósito de analizar otras implicaciones geométricas.

Para el análisis de este episodio, se consideraron varias fuentes de información: la transcripción del video del encuentro, las bitácoras personales de cada profesora, las construcciones con doblado de papel y una entrevista semiestructurada individual, que se llevó a cabo unas semanas después de finalizar el trabajo de campo. En el apartado anterior se pueden visualizar las preguntas.

Códigos y su agrupamiento.

Aportes del colectivo de profesores (ver esquema en la figura 150). Tal como se ha evidenciado en los episodios anteriores, el colectivo de profesoras aporta, de manera significativa, a la formación de cada una de sus integrantes. En este sentido, se observó que las participantes manifestaron que: *el trabajo en el colectivo me aportó a mi formación*; *se aprende desde lo que el otro enseña, aporta*; *el encuentro con los demás permite aprendizajes*; *el complemento del aprendizaje es el aporte de las compañeras*; *el colectivo permite abrir la mente, tener otras opciones*; *a pesar de que el colectivo era pequeño, uno aprende de los demás*. Frente a lo anterior, la profesora Elizabeth mencionó en su entrevista individual (fragmento de entrevista 1):

> Que me aportaron primero la parte pues disciplinar, el manejo de conceptos, poder mirar las teorías desde otro punto de vista; son fundamentales los encuentros de pares, yo siempre lo resalto y lo resaltaré, que son maravillosos porque le permite a uno abrir la mente, tener otras opciones, ver la creatividad del otro y de alguna manera ver la creatividad del otro le aflora a uno la creatividad, ver las destrezas y las habilidades del compañero le permiten a uno también ir como creciendo, ehh, el trabajo colaborativo, venga es que yo no soy capaz de hacer este doblado, venga no, hagámoslo así; entonces ese trabajo colaborativo es también muy importante; la disponibilidad que teníamos o sea que a pesar de que el grupo era pequeño y que estábamos con otras condiciones de cansancio o lo demás, estábamos dispuestas pues como a trabajar entonces eso también es bueno, y cuando uno confluye como todas esas cosas es un ambiente rico y se le va como el tiempo y […] sale uno contento porque aprendió cosas nuevas desde lo que el otro le enseña, desde lo que el otro le puede aportar, y el espacio de convivencia pues del encuentro, genera cercanía, genera unas redes diferentes de empatía, que pueden, que pueden generar otros lazos y que nos ayudan a mejorar pues en el proceso también.

Con respecto al aporte del colectivo al conocimiento de la geometría escolar, se observó que las profesoras tuvieron aprendizajes relacionados con la geometría y con sus procesos de enseñanza; en particular, ellas precisaron que: *el colectivo aportó en el conocimiento disciplinar*; *los encuentros me aportaron en la construcción de conceptos*; *los encuentros me aportaron en la búsqueda e innovación de estrategias que me aproximen al* *concepto*; *el colectivo me permitió despejar algunas dudas* (ver figura 76, del séptimo episodio); *el colectivo me ayudó a desarrollar destrezas a través del doblado* (ver figura 78, del séptimo episodio); *el aporte de las compañeras permite que uno replantee lo que sabe*; el colectivo permite *relacionar lo que las compañeras dicen con lo que yo pude consultar*; *las compañeras cuestionaban, reafirmaban o realimentaban los conceptos*. Con relación a lo anterior, la profesora Vicky explicó en su entrevista (fragmento de entrevista 2):

> A mí me aportaron en la parte de creatividad, en la parte de construcción de conceptos, en la parte de innovar y buscar estrategias que me aproximen a conceptos, que me desarrollen mi concepto, y el poder escuchar de los compañeros, la forma como ellos aportaban los conceptos, los cuales yo trataba de alguna manera de establecer con respecto a lo que había leído [consultado] sobre ellos. […] Aprendí a divertirme, me divertí mucho, y vi que pues que esos conceptos que eran tan difíciles de digerir escritos en un libro los podía aprender simplemente con las manos.

Frente a los aportes relacionados con la reflexión sobre la práctica pedagógica, las participantes manifestaron que: *los encuentros me permitieron reflexionar sobre mi práctica pedagógica*; *las interacciones con las compañeras me permitieron mirar distinto y plantear metodologías*, *el colectivo genera otras formas de ver y mejorar nuestras prácticas* (ver figura 77, del séptimo episodio); ellas pueden *proponer tareas de formación al colectivo; las compañeras me aportaron reflexión sobre la transversalidad del área*; *los encuentros me permitieron repensarme como maestra*; *es una ganancia compartir con profesores de otras áreas; he ganado del colectivo la inquietud de vivenciar en el aula de clase y aplicar para producir y sistematizar* (ver figura 76 del séptimo episodio*); los encuentros me generaron interés para plantear mi trabajo de aula*; *es muy valiosa la experiencia de lo que el otro dice*. En el siguiente extracto de la bitácora de la profesora Natalia, se pueden observar algunos de los códigos anteriores.

El colectivo no solo aportó en el conocimiento de la geometría escolar y en la reflexión sobre la práctica pedagógica, sino que también hizo aportes a nivel personal. En este sentido, algunas profesoras afirmaron que: *los encuentros me aportaron creatividad*; *escuchar a mis compañeros me realimenta como persona, como compañera, como profesora*; el colectivo permite *compartir experiencias*; *el colectivo me aportó sensibilidad para mirar las cosas de otra manera*. Frente a los códigos anteriores, la profesora Natalia explicó en su entrevista: "[el colectivo me aportó] *en parte sensibilidad pues por mirar, pues es que hay que mirarlo de otra manera, de muchas otras formas, como le digo, no sé, era como el antojo de uno decir: ¡qué bueno implementar esto o esto otro!, la expectativa de pronto es, si hago esto, que tal que si resulte lo mismo que a ellas…*".

Por otro lado, el colectivo se convirtió en un ambiente de apoyo mutuo, respeto, espontaneidad y confianza. Se percibió que no solo *se establecieron relaciones académicas con las compañeras*, sino que se propició un *conocimiento del otro como ser, como académico...*; así mismo, se resaltó la *importancia del trabajo colaborativo*. Por lo tanto, *el colectivo generó cercanía, confianza, empatía, otros lazos*. Al respecto, la profesora Elizabeth mencionó: "*el espacio de convivencia, pues del encuentro, genera cercanía, genera unas redes diferentes de empatía, que pueden, que pueden generar otros lazos y que nos ayudan a mejorar pues en el proceso también*".

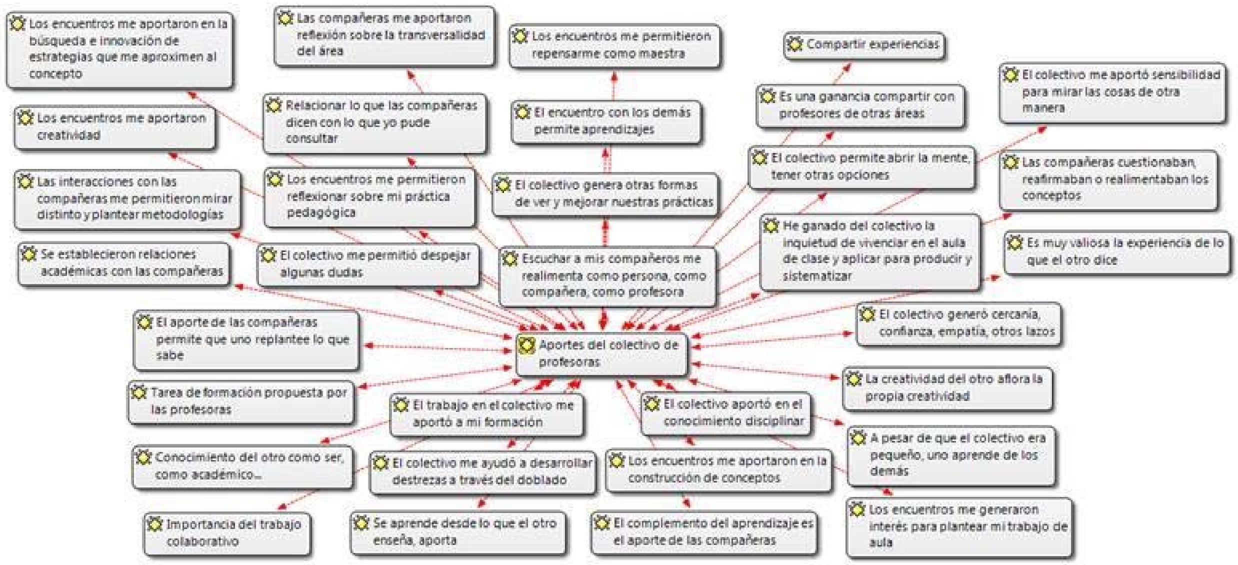


Figura 150: Esquema familia de códigos Aportes del colectivo de profesoras

Aprendizajes alcanzados durante los encuentros (ver esquema en la figura 151). Las profesoras afirmaron que durante los encuentros, que en total fueron diez, lograron consolidar aprendizajes, tanto desde la geometría escolar y sus prácticas pedagógicas, como algunos de índole personal. En este sentido, las participantes manifestaron*: a pesar de que el colectivo era pequeño, uno aprende de las demás*; *en la medida en que se dialoga con el otro, se aprende*; *el encuentro con los demás, permite aprendizajes; se aprende desde lo que el otro enseña, aporta*; *cada encuentro fue un aprendizaje*. Al respecto, la profesora Elizabeth explicó: “[se] *aprendió cosas nuevas desde lo que el otro le enseña, desde lo que el otro le puede aportar*”.

Frente a los aprendizajes logrados en geometría escolar, en concordancia con las prácticas pedagógicas, las participantes explicaron que *aprendieron conceptos, los recordaron o los fijaron*; es decir, tuvieron *un aprendizaje mayúsculo en términos de conceptos geométricos*, pues lograron *aprender conceptos que desconocían o que no* *manejaban* (por ejemplo, el concepto de *lugar geométrico*); *lograron comprender diferencias conceptuales* (por ejemplo, las *diferencias entre bisectriz o mediatriz*, el mismo concepto de *bisectriz*, ver figura 78, del séptimo episodio); *lograron apropiarse y comprender conceptos geométricos*; *aprendí a hacer otros procedimientos con doblado de papel que desconocía*; *con el doblado de papel aprendí a describir lo que se observa empleando conceptos propios de la geometría* (ver figura 78, del séptimo episodio); *el doblado de papel genera conocimientos*. En cuanto a los conceptos que se desconocían, la profesora Natalia expresó en su entrevista (fragmento de entrevista 3):

> El lugar geométrico, eso yo lo aprendí, me parece increíble que no lo viera en la universidad, pues incluso yo no recuerdo, demás que si lo había escuchado, pero no lo recuerdo; cuando nos definiste el lugar geométrico, volvimos y lo retomamos en otro momento, o sea eso fue una de las cosas que yo pues tenía completamente de lado, no lo conocía.

Las participantes también mencionaron que lograron aprendizajes de otro tipo, relacionados con valores grupales o personales. De hecho, explicaron que el aprendizaje estaba mediado por la *disposición personal* o motivación hacia los objetos de conocimiento y hacia los interrogantes planteados (*el aprendizaje se da motivado por los retos o interrogantes planteados*). En este sentido, la profesora Vicky precisó que había *aprendido a divertirse con el doblado de papel* (ver fragmento de entrevista 2); a su vez, la profesora Elizabeth explicó que se aprende sobre "*el otro sujeto como ser, o sea conocimiento del otro como ser pensante, como ser académico, como estudioso, pues como de alguna manera en su saber*",

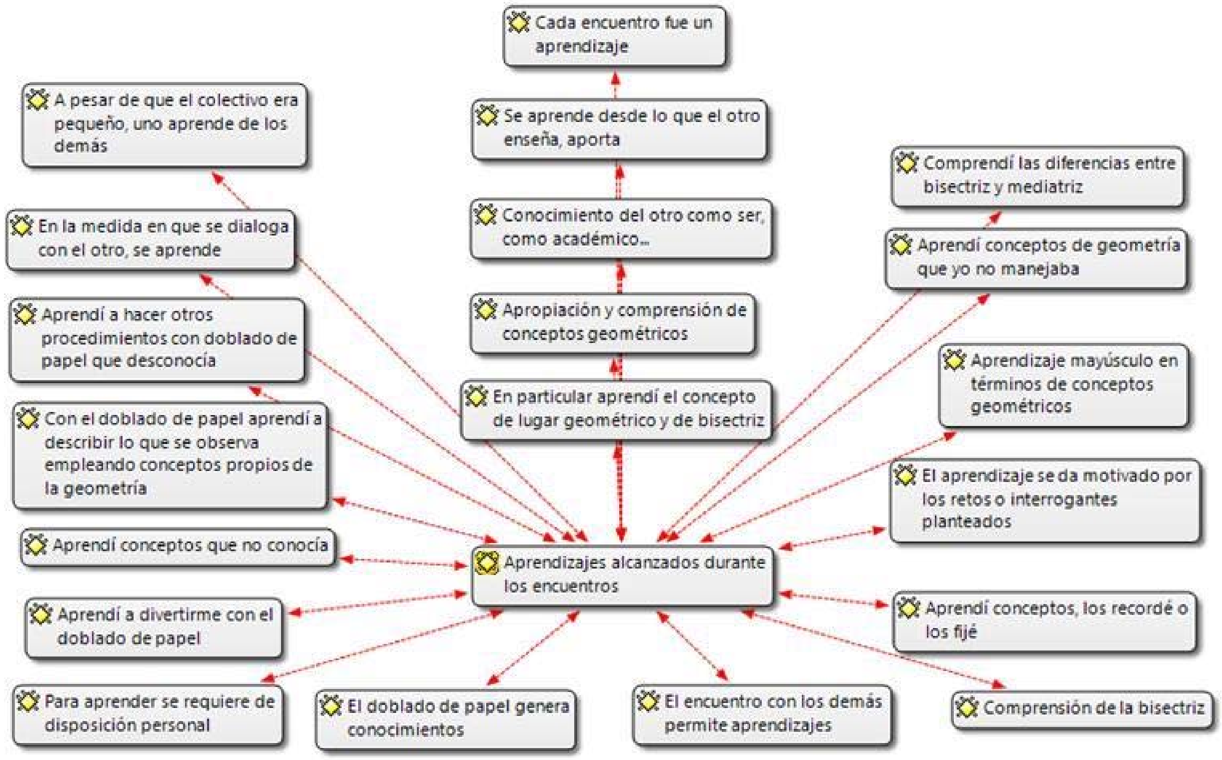


Figura 151: Esquema familia de códigos Aprendizajes alcanzados durante los encuentros.

Comprensión de conceptos de geometría escolar (ver esquema en la figura 152). Tal como se mencionó en la anterior familia de códigos, el doblado de papel es un medio que genera conocimientos y posibilita la comprensión de conceptos y procedimientos de geometría escolar. De acuerdo con el esquema 151, los códigos se relacionan directamente con la comprensión específica de conceptos de geometría, para su posible enseñanza en el aula de clase, y con el uso del doblado de papel, como medio para alcanzar dicha comprensión.

Con respecto a la comprensión específica de conceptos de geometría, para su posible enseñanza en el aula de clase, las participantes: *aprendieron conceptos que no conocían* (ver fragmento de entrevista 3, pág. 287); *dialogaron sobre la construcción de puntos con* *doblado de papel*; *tuvieron un aprendizaje mayúsculo en términos de conceptos geométricos*; *se apropiaron y comprendieron conceptos geométricos*; *usaron el doblado de papel para mostrar el teorema de Thales en el aula de clase*; *determinaron que por un punto pasan infinitos dobleces*; *fortalecieron conceptos vagos* (ver figura 68, del séptimo episodio); *analizaron el tercer axioma de Euclides* (ver figura 70, del séptimo episodio); *construyeron las paralelas de Hilbert* (ver figura 74, del séptimo episodio); *usaron el doblado de papel para trabajar el concepto de semejanza en el aula de clase*; *aprendieron conceptos, los recordaron y los fijaron*; *dialogaron sobre el paso de lo concreto a lo abstracto, en particular con respecto al infinito*; *aprendieron el concepto de lugar geométrico y de bisectriz*; *usaron el doblado de papel para definir la circunferencia en el aula de clase*; *analizaron el quinto axioma de Euclides* (ver figura 72, del séptimo episodio); *aprendieron conceptos de geometría que no manejaban* (ver fragmento de entrevista 3, pág. 287); *analizaron el axioma de las paralelas de Hilbert* (ver figura 74, del séptimo episodio); *comprendieron las diferencias entre bisectriz y mediatriz* (ver figura 78, del séptimo episodio); *desconocían el concepto de lugar geométrico* (ver fragmento de entrevista 3, pág. 287); *usaron el doblado de papel para mostrar el teorema de Pitágoras en el aula de clase*; *determinaron que puntos discretos pueden permitir comprender el concepto de circunferencia* (ver figura 70, del séptimo episodio); *dialogaron sobre el lugar geométrico circunferencia*; *comprendieron el concepto de lugar geométrico* (ver figura 78, del séptimo episodio).

Frente al uso del doblado de papel para la propiciar la comprensión de conceptos y procedimientos, las profesoras: *usaron el doblado de papel para mostrar el teorema de Thales en el aula de clase*; mencionaron que *el doblado de papel genera prácticas* *tranquilas, dinámicas, potenciadoras de conocimiento; dialogaron sobre la construcción del axioma 3 de Euclides con doblado de papel* (ver figura 70, del séptimo episodio); *usaron el doblado de papel para trabajar el concepto de semejanza en el aula de clase*; *usaron el doblado de papel para la comprensión de conceptos*; *realizaron la construcción: por un punto pasan infinitos dobleces* (ver figura 68, del séptimo episodio); *mencionaron que el doblado de papel acerca al conocimiento geométrico, a sus relaciones con el entorno y despierta la curiosidad por el aprendizaje* (ver figura 77, del séptimo episodio); *usaron el doblado de papel para definir la circunferencia en el aula de clase*; *dialogaron sobre por qué el postulado "por un punto pasan infinitos dobleces" no hace parte de los axiomas de Huzita-Hatori*; *dialogaron sobre la construcción del axioma 5 de Euclides con doblado de papel* (ver figura 72, del séptimo episodio); *afirmaron que el doblado de papel permite verificar y ver de manera concreta conceptos abstractos*; *revisaron los axiomas del doblado de papel*; *explicaron que el doblado de papel permite visibilizar conceptos* (ver figura 77, del séptimo episodio); *construyeron el tercer axioma de Euclides* (ver figura 70, del séptimo episodio); *usaron el doblado de papel para mostrar el teorema de Pitágoras en el aula de clase*; *construyeron puntos discretos de una circunferencia* (ver figura 70, del séptimo episodio); *dialogaron sobre construcción de rectas paralelas con doblado de papel*; afirmaron que *a uno le parece que con el doblado de papel entienden de inmediato*; *determinaron que los estudiantes comprenden más el concepto cuando se trabaja con el doblado de papel*.

A su vez, el colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel se convirtió en un espacio que *aportó al conocimiento disciplinar* de la geometría. En esta perspectiva, las profesoras manifestaron que *el colectivo les permitió despejar algunas dudas* (ver figura 77, del séptimo episodio) y, además, explicitaron que los encuentros les aportaron, específicamente, *en la construcción de conceptos* (ver fragmento de entrevista 2, pág. 284).

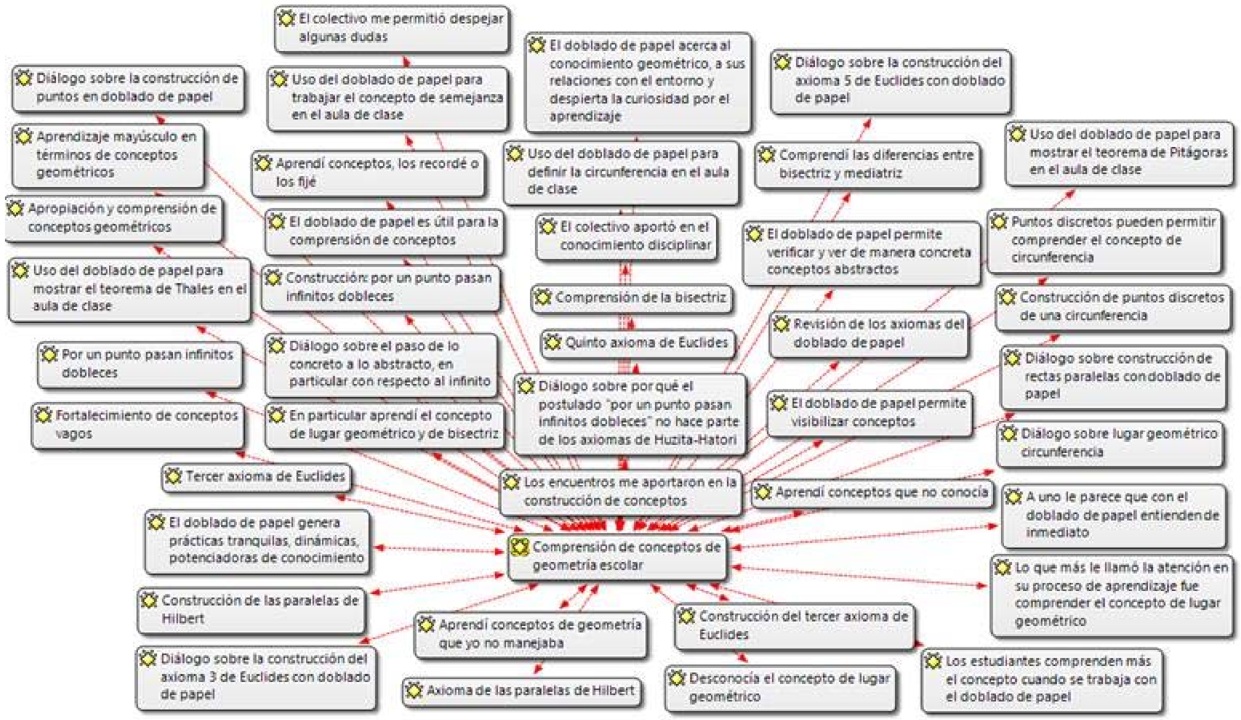


Figura 152: Esquema familia de códigos Comprensión de conceptos de geometría escolar.

Reflexionar sobre la práctica pedagógica (ver esquema en la figura 154). Durante este episodio, se observó que las profesoras *reflexionaron sobre su práctica pedagógica*, dado que mencionaron que *los encuentros les permitieron repensarse como maestras*, *repensar y transformar* su misma acción en el aula de clase para *replantear su trabajo* (ver figura 76, del séptimo episodio). En este sentido, reconocieron, en particular, que *la geometría era trabajaba de manera muy mecánica*, pues, en algunos casos, se sentían débiles para abordar su proceso de enseñanza. Al respecto, la profesora Elizabeth afirmó en su entrevista (fragmento de entrevista 4):

> Yo creo que aprendí mucho, o sea yo considero que mi proceso fue muy valioso pues vuelvo y lo repito, ehh porque primero me acerqué más a la geometría porque le he tenido miedo… *se me para el pelo*, pues cuando digo hay me toca dar geometría. Además pues me ha tocado pocas veces darla, entonces siempre me tengo que remitir, a leer a estudiar, y uno realmente lo termina haciendo muy mecánico, entonces el poder mirar otras situaciones ha sido bueno, de hecho por ejemplo ahora que estoy dando geometría, busco y digo a bueno esto me sirve con este doblado, esto no me sirve, ve, voy a implementar esto; entonces he ido buscando estrategias para meter el doblado dentro de los temas que estoy dando, entonces eso me sirvió bastante.

Con respecto al análisis de las prácticas pedagógicas, en relación con el uso del doblado de papel en el aula de clase, las profesoras: *dialogaron sobre posibles actividades en el aula de clase*; mencionaron que *el doblado de papel permite mejorar las prácticas educativas*; *precisaron que el doblado de papel permite mejorar el proceso personal como maestra*, entre otras. En este aspecto, la profesora Elizabeth usó el *doblado de papel para mostrar el teorema de Pitágoras en el aula de clase*; para hacerlo, ella *planeó su clase, determinó los pasos y los llevó al aula de clase*. Cuando llevó a cabo el trabajo con los estudiantes, *hizo preguntas a medida que se hacía la construcción* y se percató de que *trabajó más conceptos de los que tenía planeados*; de hecho, observó que *los estudiantes también preguntan y también aportan*. Ella pudo concluir, en su entrevista individual, que *el doblado de papel puede generar prácticas tranquilas, dinámicas y potenciadoras de conocimiento*.

Por otro lado, la profesora Natalia mencionó que ha llevado a cabo varias actividades con doblado de papel en el aula de clase: *para mostrar el teorema de Thales* y *para trabajar el concepto de semejanza* (ver fragmento de entrevista 5, párrafo 2). En particular, precisó que pudo *adaptarse a la metodología y generar estrategias en el aula de clase*, dado que fue difícil para ella, en un comienzo, *reemplazar los instrumentos geométricos tradicionales*, lo cual fue una ruptura con su práctica (ver figura 76, del séptimo episodio);

adicionalmente, precisó que piensa hacer uso de la *construcción de puntos discretos de la circunferencia* para lograr su definición como lugar geométrico. Es importante resaltar que la profesora también planeó una *actividad con triángulos que no le funcionó*, pues sintió que *no la orientó bien* y *se quedó en la parte lúdica sin trascender a lo abstracto.* En el siguiente fragmento de entrevista 5, se pueden observar algunos comentarios de la profesora Natalia.

> A uno le parece que entienden de inmediato, porque de pronto replican o hacen lo concreto que es; lo que me parece que todavía es dificultoso entonces es la manera como tenemos que pensar, como llevar a cabo la relación que hacen de eso que acaban de experimentar ahí con el concepto real, porque ellos lo hacen y siguen las instrucciones de lo que uno les dice, pero yo creo que todavía hace mucha falta de, no sé, de madurez, de análisis de mi parte mirar cómo logro llevar eso que ellos construyeron ya, al concepto, relacionar de pronto ese concepto; si uno dice, sí es fácil, no es que ellos lo hicieron muy bien, pero luego hágales esa mima actividad de otra manera y no, no, te ayuda, no sirvió, se quedó en lo lúdico, eso es lo que me parece, pues que tengo que ponerme a pensar, porque por ejemplo esas preguntas que nos hacías cada vez que nosotros hacíamos algo era lo que nos ayudaba a nosotras a construir lo que estábamos haciendo, yo pensé, listo, que ahí doblé esto pero detrás de eso había cinco preguntas que estaban muy bien formuladas, pues claro y ya eso no se le olvida a uno. Entonces con los estudiantes, eh, hay que hacer lo mismo, eh, yo no, no lo logré, pero sé que eso es lo que se tiene que hacer, mirar como una guía, algún ambiente diseñado que tras de eso lleve a buscar pues ya la abstracción, si eso es pues como lo que yo siento en la manera como ellos pueden aprender, que puede ser falso si uno no lo sabe dirigir, lo puede engañar a uno, si pues uno dice lo entendieron súper bien, pero no, o sea que me faltó, no lo hice como era...
>
> Cuando empecé a trabajar semejanza de triángulos se me ocurrió también hacerlo a partir de una hoja de papel y maduré pues la idea, entonces eso sí lo planeé, lo hice, y cuando lo hice me gustó, entonces es solamente falta de juicio, pero me gustó. Entonces ahí los muchachos en este periodo tienen dos, tres cositas con papel que hemos pegado ahí y me parece que ha sido pues falta de disciplina ponerme juiciosa a trabajarlo porque me parece que lo podemos hacer.

Frente a la relación entre las prácticas pedagógicas y el aporte del colectivo de profesoras, se evidenció que las participantes mencionaron que: e*l aporte de las compañeras permite que uno se replantee lo que sabe*; *han ganado del colectivo la inquietud de vivenciar en el aula de clase y aplicar para producir y sistematizar* (ver figura 76, del séptimo episodio); *escuchar a mis compañeros me realimenta como persona, como* *compañera, como profesora*; *las compañeras me aportaron reflexión sobre la transversalidad del área* (ver figura 76, del séptimo episodio); *el colectivo genera otras formas de ver y mejorar nuestras prácticas* (ver figura 77, del séptimo episodio); *las interacciones con las compañeras me permitieron mirar distinto y plantear metodologías*; *los encuentros me aportaron en la búsqueda e innovación de estrategias que me aproximen al concepto* (ver fragmento de entrevista 2, pág. 284); *el trabajo en el colectivo me aportó a mi formación*.

Por otro lado, las profesoras analizaron ciertas acciones que podrían considerar en el aula de clase, para mejorar su práctica pedagógica; entre estas, se pueden mencionar: *cuestionar a los estudiantes y generarles inquietudes frente a la geometría* (ver figura 76, del séptimo episodio); *tratar de construir los conceptos en el aula de clase*; *buscar estrategias para involucrar el doblado de papel con los temas que está dando*; *tratar de iniciar cada temática con alguna actividad de doblado de papel*; *repensar las estrategias para trabajar geometría*; *partir de preguntas bien formuladas* (ver fragmento de entrevista 5, pág. 293); *buscar otras estrategias de enseñar conceptos*; *diseñar actividades prácticas en geometría*; *analizar las actividades que se van a llevar al aula de clase*; *escribir un artículo o una ponencia sobre el uso del doblado de papel* (ver figura 153); *utilizar el doblado de papel para hablar de estructuras geométricas en enlaces químicos*.

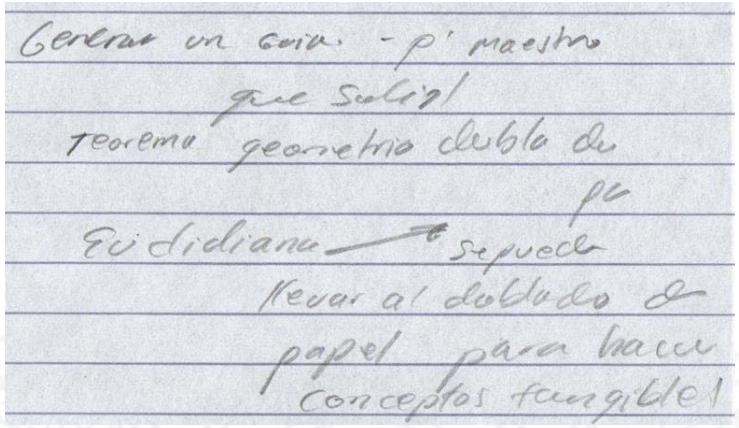

Generar un guía. - p' maestro
que solicit
Teorema geometría doblado de
pc
Euclidiana → se puede
llevar al doblado de
papel para hacer
conceptos tangibles

Figura 153: Bitácora profesora Vicky. Episodio 7.

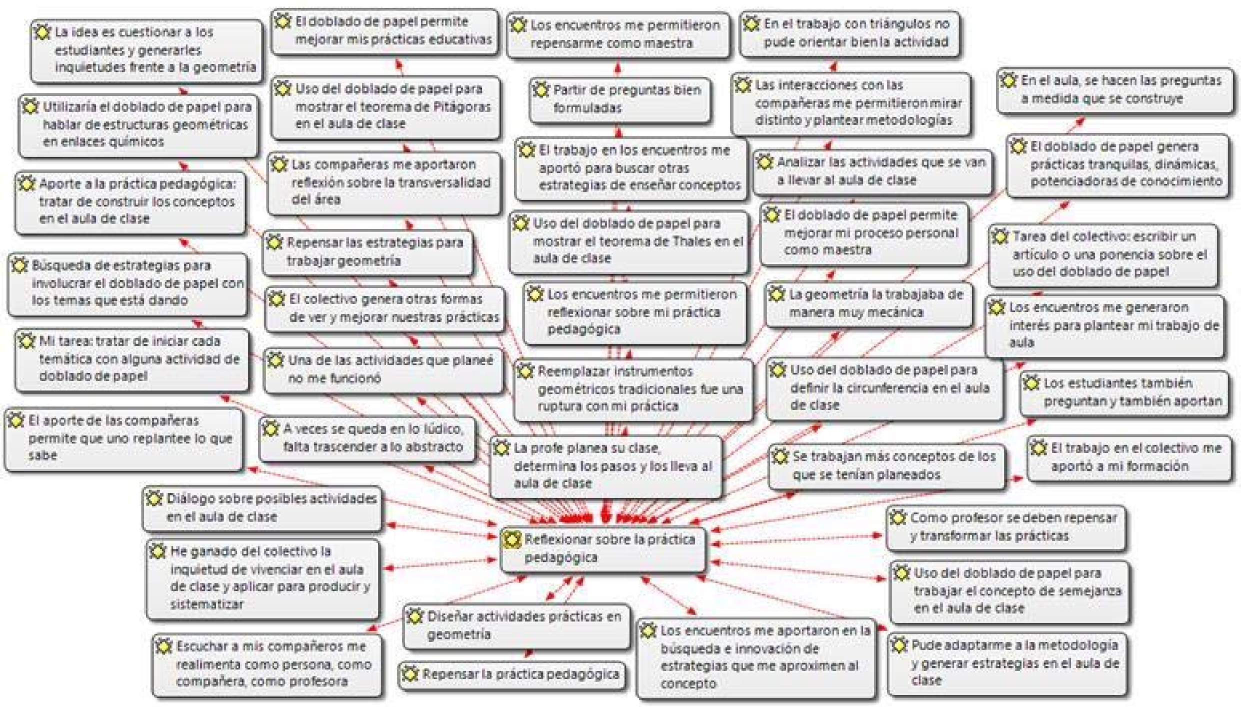


Figura 154: Esquema familia de códigos Reflexionar sobre la práctica pedagógica.

Usar el doblado de papel para la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos (ver su esquema en la figura 155). El último episodio me permite establecer que las profesoras consideran que el doblado de papel es un medio que propicia la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos. En esta perspectiva, las profesoras manifestaron que este medio se caracteriza por: *ser útil para la comprensión de* *conceptos* (ver figura 77, del séptimo episodio); *acercar al conocimiento geométrico, a sus relaciones con el entorno y despertar la curiosidad por el aprendizaje* (ver figura 77 del séptimo episodio); *demostrar y hacer más tangibles los conceptos* (ver figura 77 del séptimo episodio); *ponerlo a uno a pensar*; *generar prácticas tranquilas, dinámicas, potenciadoras de conocimiento*; *ser práctico*; *generar conocimientos*; *permitir verificar y ver de manera concreta conceptos abstractos*; *fortalecer conceptos vagos* (ver figura 77 del séptimo episodio); *ser sencillo, pero puede desencadenar una cantidad de preguntas y retos*; generar *entendimiento de inmediato* (ver fragmento de entrevista 5, pág. 293); generar *apropiación y comprensión de conceptos geométricos* (ver figura 77 del séptimo episodio); permitir que los estudiantes *comprendan más el concepto*; *ser un medio de fácil acceso*; permitir *visibilizar conceptos* (ver figura 77 del séptimo episodio).

Con respecto a la comprensión de conceptos específicos, las participantes: *dialogaron sobre la construcción de puntos en doblado de papel*; *hicieron la construcción: por un punto pasan infinitos dobleces* (ver figura 68 del séptimo episodio); *hicieron la construcción del tercer axioma de Euclides* (ver figura 70 del séptimo episodio); determinaron que *por un punto pasan infinitos dobleces* (ver figura 69 del séptimo episodio); *comprendieron las diferencias entre bisectriz y mediatriz* (ver figura 78 del séptimo episodio); dialogaron sobre *construcción de rectas paralelas con doblado de papel*; *dialogaron sobre la construcción del axioma 5 de Euclides con doblado de papel*; *hicieron la construcción de las paralelas de Hilbert* (ver figura 74 del séptimo episodio); *dialogaron sobre el lugar geométrico circunferencia*; *usaron el doblado de papel para trabajar el concepto de semejanza en el aula de clase*; *determinaron que se podían enseñar conceptos básicos con doblado de papel*; *dialogaron sobre la construcción del axioma 3 de*

Euclides con doblado de papel; *construyeron el quinto axioma de Euclides* (ver figura 72, del séptimo episodio); *comprendieron la bisectriz* (ver figura 78, del séptimo episodio); *dialogaron sobre el paso de lo concreto a lo abstracto, en particular con respecto al infinito*; *usaron del doblado de papel para definir la circunferencia en el aula de clase*; *construyeron puntos discretos de una circunferencia* (ver figura 70 del séptimo episodio); establecieron que *puntos discretos pueden permitir comprender el concepto de circunferencia*.

Frente a la relación del doblado de papel con la práctica pedagógica, las profesoras precisaron que: el doblado de papel fue *una experiencia completamente nueva*, que les permitió *mejorar las prácticas educativas*; *pueden usar el doblado de papel como una forma dentro de la didáctica* para *mejorar el proceso personal como maestras*; usaron el doblado de papel para *mostrar el teorema de Pitágoras* y *el teorema de Thales* en el aula de clase, *a partir de preguntas que se le pueden hacer al estudiante cuando realiza los dobleces*; sin embargo, las profesoras precisaron que *a veces se quedaron en lo lúdico y que hizo falta trascender a lo abstracto* (ver fragmento de entrevista 5, pág. 293).

El uso del doblado de papel también se relacionó con el aprendizaje. En este sentido, las participantes establecieron que: *aprendieron conceptos que no conocían* (ver fragmento de entrevista 3); *aprendieron conceptos, los recordaron o los fijaron*; *la parte práctica del doblado fue la herramienta de aprendizaje*; *aprendieron a hacer otros procedimientos con doblado de papel que desconocían*; *con el doblado de papel aprendieron a describir lo que se observa empleando conceptos propios de la geometría* (ver figura 78, del séptimo episodio); *aprendieron conceptos de geometría que no manejaban* (ver figura 78, del séptimo episodio); *aprendieron a divertirse con el doblado de papel* (ver fragmento de entrevista 2, pág. 284); *desconocían el concepto de lugar geométrico* (ver fragmento de entrevista 3, pág. 287).

Finalmente, se percibió que las profesoras sintieron la necesidad de utilizar el doblado de papel en el aula de clase. De hecho, la profesora Elizabeth y la profesora Natalia ya lo han puesto en marcha con algunas actividades relacionadas con el Teorema de Pitágoras, Teorema de Thales, semejanza, circunferencia, entre otras. En el caso de la profesora Vicky, ella piensa usar el doblado de papel *para hablar de estructuras geométricas en enlaces químicos*. La profesora Natalia mencionó *que iba a tratar de iniciar cada temática con alguna actividad de doblado de papel* y, la profesora Elizabeth, afirmó que *es necesario analizar las actividades que se van a llevar al aula de clase* para poder acercar a los estudiantes a "*conocimientos geométricos y a sus relaciones con el entorno*" (ver figura 77 del séptimo episodio).

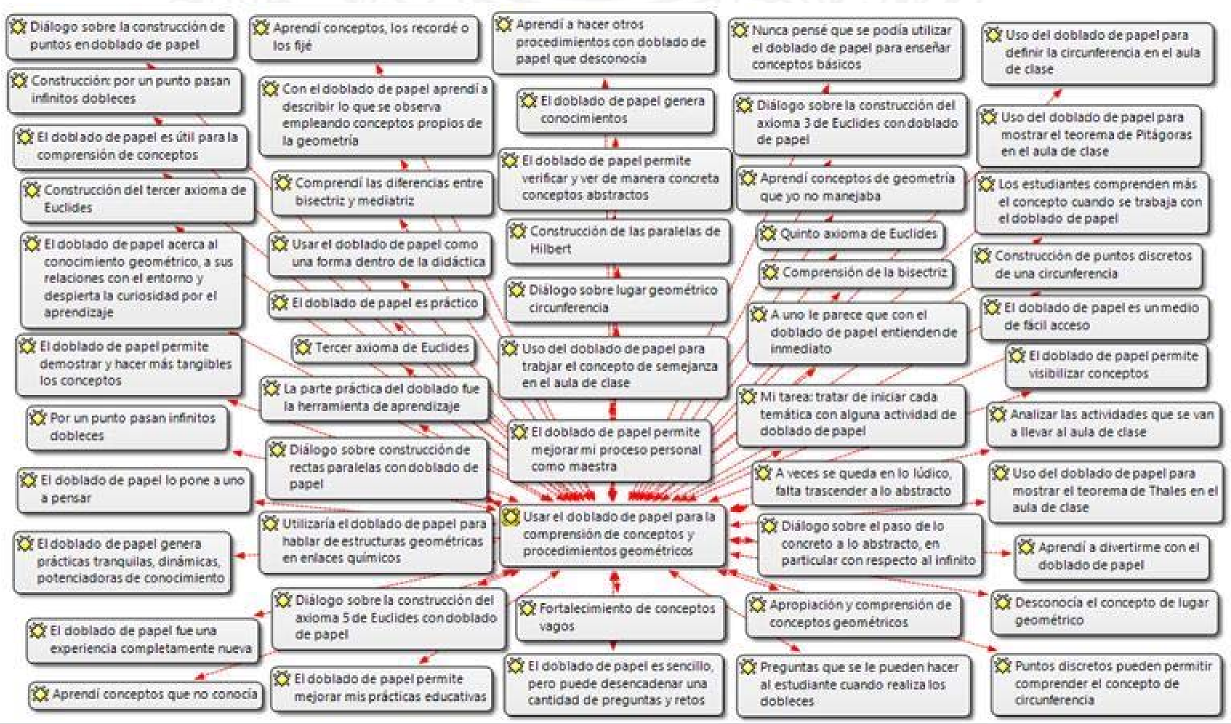


Figura 155: Esquema familia de códigos Usar el doblado de papel para la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos.

4.5.8. Análisis de las interacciones del colectivo Molly-asesora-doblado-de-papel.

Mientras desarrollaba el trabajo de campo en la Institución Educativa, con las profesoras Natalia, Elizabeth y Vicky, a la par, acompañé un proceso de formación a nivel de maestría, en un programa virtual de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas; en este proceso orienté a una profesora en el desarrollo de su tesis de maestría, cuyo tema fue la comprensión del concepto de volumen mediante el doblado de papel. El colectivo estuvo compuesto tanto por la profesora Molly, como por mí, en calidad de asesora e investigadora; ambas interactuamos con el doblado de papel para generar una guía curricular que les permitiera a los estudiantes del grado décimo, comprender el concepto de volumen.

Para generar códigos y familias de códigos, consideré como unidades de análisis algunas ideas de: (1) una narración hecha por ella, que fue solicitada específicamente para los efectos del estudio, (2) las respuestas a unas preguntas puntuales que le formulé cuando participó de un taller con otros profesores, y (3) su tesis de maestría. A continuación, presento su narración y las respuestas textuales a las preguntas que se le plantearon.

Narración.

> Después de trabajar con el concepto de volumen, aplicándolo en algoritmos matemáticos, me doy cuenta que los estudiantes lo hacen de una forma mecánica, sin saber exactamente qué significa. Soy consciente de que la poca comprensión de los conceptos genera dificultades en los desempeños escolares, debido a que sin la conceptualización y los métodos apropiados, los estudiantes no tendrían la posibilidad de expresar ideas, ni tener representaciones de las mismas, es decir, no podría ser posible dar significado a los conceptos ni valorarlos, por lo que tampoco se podrían relacionar con la realidad ni con el quehacer cotidiano; lo anterior me

llevó a buscar estrategias pedagógicas que permitan a los estudiantes tener experiencias y comprender los conceptos.

Contemplando esta inquietud, me encuentro con la profesora Zaida, inquieta por la calidad de la educación y estudiosa del doblado de papel, quien me propone encaminarme por este medio, no conocido profundamente por mí, pero deseosa de aprender y compartirla con mis estudiantes.

Inicialmente dudé que lo recibirían con agrado por ser de grado décimo, sin embargo comenzamos haciendo formas geométricas, moldeando y visualizando el volumen de sólidos platónicos que fuimos construyendo y observando. Se presentaron algunas dificultades como en el seguimiento de instrucciones y en dispersión, debido a que el grupo estaba conformado por más de 40 estudiantes; la dificultad que inicialmente era mayor, se fue mermando a medida que los estudiantes fueron haciendo trabajos colaborativos que les permitía compartir lo que aprendían con los demás estudiantes.

Me reunía periódicamente con mi asesora, comentándole mis progresos y la necesidad de ir avanzando en la comprensión del concepto de volumen. En las diferentes asesorías que se hicieron se discutieron razones teóricas que pudieran fortalecer el medio utilizado y la consecución de los conocimientos que brindarían la conceptualización del concepto de volumen; además se discutieron, en las asesorías, la metodología que permitiera un aprendizaje más activo y significativo por parte del estudiante; para esto mi asesora aportó significativamente con su experiencia, se planearon las actividades y se fueron evaluando para sacarle el mayor provecho, esto produjo un avance más rápido y provechoso que fue dejando los objetivos cumplidos. Las discusiones que se hicieron permitieron que me motivara a sacar de mi experiencia conocimientos y actitudes para crear y fortalecer algunas actividades que se fueron haciendo necesarias para llegar poco a poco a los objetivos propuestos, con toda esta experiencia me di cuenta que como profesor es necesario estar capacitándose continuamente para innovar en el aula de clase, pues los estudiantes requieren cada vez más, de cambios en sus modos de aprendizaje, se debe jugar con la curiosidad y la participación colaborativa de los mismos.

El explorar el doblado de papel en mi trabajo como profesora, posibilitó dar respuesta a una necesidad pedagógica que favoreció la renovación en mi forma de enseñar, pude tener una implicación activa del estudiante en su aprendizaje, realizando sus propios esquemas de experiencias, conocimientos y desarrollo de su autonomía.

De allí se generaron actividades de apoyo guiadas por la Enseñanza para la Compresión, involucrando algoritmos matemáticos que partían de su experiencia en el doblado de papel; la profesora me guía por los axiomas del doblado de papel, se hicieron búsquedas bibliográficas del tema como apoyo al medio del doblado de papel y con esto pasamos del diseño del cubo al cálculo de cuántos cabían en una caja de determinadas dimensiones. Luego se pasaron a otros poliedros, los estudiantes consultaron historias de los sólidos platónicos, los hacían mediante el doblado de papel y los compartían con sus compañeros mediante exposiciones en las cuales contaban sus hallazgos y enseñaban a hacerlos mediante el doblado de papel.

Observé con la experiencia, que el doblado de papel se convirtió en una herramienta versátil, flexible e innovadora y sobre todo cautivadora de la atención de los estudiantes. El estudiante tuvo la oportunidad de trabajar objetos tridimensionales obtenidos por su construcción mediante el doblado de papel a diferencia de los enfoques tradicionales que se han hecho con dibujos y esquemas que se realizan en hojas de papel que no son más que representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales en dos dimensiones. Siento que hacen falta más trabajos con este medio, que permitan a los estudiantes, mediante la manipulación y la observación de sus diseños, comprender otros conceptos difíciles para ellos, como el teorema de Pitágoras, el teorema de Thales, elementos geométricos, entre otros.

A pesar de que los estudiantes todo lo quieren ver y tener en sus computadores y celulares, la felicidad y el asombro que se visualiza en sus caras después de hacer con sus manos un diseño con doblado de papel, no se puede comparar, cuando hicimos los cubos y se les pidió que los desdoblaran para hacer observaciones y trascender en el concepto buscado, se negaban con firmeza a no hacerlo, porque sentían que era su creación y se dañaría, se tuvo que hacer trabajo de convencimiento para que permitieran el desdoble.

Los estudiantes dispersos, se comprometieron y disfrutaron el trabajo, participaron con agrado y lograban los objetivos con más facilidad que los medios convencionales utilizados en el aula.

El doblado de papel fue una herramienta pedagógica fácil de conseguir y de utilizar en las aulas de clase, que ayudó a conceptualizar el concepto de volumen, no necesito utilizar reglas, escuadras, graduadores ni compás. Con gran precisión se pudieron realizar construcciones geométricas, sin temor a perder la observación y la claridad de sus características. Realmente fue un medio que cambió mi forma de dar clase donde el estudiante manejaba con agrado el ser, el saber y el hacer de una forma integral.

Respuestas a preguntas.

1. ¿Qué se aprendió de la jornada?
   El doblado de papel es una técnica flexible, innovadora, en la cual se puede trabajar con precisión, permitiendo trabajar algunos aspectos geométricos; la recreación de Arquímedes en la trisección del ángulo, se apreció perfectamente en el doblado de papel, lo que me generó curiosidad y motivación, quedé inquieta por observar otras demostraciones con el doblado de papel.

2. ¿Cómo se aprendió?
   Mediante un conversatorio muy agradable y una metodología semi socrática muy bien intencionada, además de una clara exposición.

3. ¿Las discusiones en el grupo de profesores contribuyeron con la producción de conocimiento geométrico? ¿Por qué?
   Sí, porque permite compartir apreciaciones conceptuales y además ir generando conocimiento a medida que se van colocando en una puesta en común los conceptos.

4. ¿Qué actividades se podrían diseñar en el aula de clase que permitan que los estudiantes generen procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo – con – doblado de papel?
El conversatorio tipo taller, está bien, pero acompañado de una situación problema, que permita dar cuenta del concepto o contenido que se quiere trabajar, la exposición es un buen recurso que también se presta para aprender en un grupo.

Códigos y su agrupamiento.

Análisis de la práctica pedagógica (ver esquema en la figura 156). Los encuentros periódicos entre Molly y yo, el diseño y revisión de actividades al interior del colectivo y la puesta en escena de las mismas en el aula de clase, propiciaron que la profesora analizara continuamente su práctica pedagógica. Con respecto al colectivo de profesoras, Molly mencionó que "*las discusiones que se hicieron permitieron que me motivara a sacar de mi experiencia conocimientos y actitudes para crear y fortalecer actividades*" (ver narración).

Frente al doblado de papel y a su relación con la práctica pedagógica, la profesora explicó que, cuando desarrolló algunas actividades con los estudiantes del grado décimo, *ellos participaron con entusiasmo de las mismas*, generándose *un ambiente de trabajo colaborativo* (ver narración); de hecho, precisó que *los estudiantes participaron de manera activa y autónoma de su proceso de aprendizaje* (ver narración). Por otro lado, ella manifestó que las actividades diseñadas con doblado de papel permiten que los estudiantes "*manejen con agrado el ser, el saber y el hacer de una forma integral*". Además, frente a su formación como profesora, también precisó que el doblado de papel le generó *curiosidad y motivación* para observar o analizar otras demostraciones con este medio, lo que le podría permitir una *búsqueda de estrategias pedagógicas para generar comprensión de conceptos* en los estudiantes.

La profesora Molly pudo reflexionar sobre su quehacer como profesora, hecho que le permitió determinar que *el doblado de papel le cambió su forma de dar clase* y *le favoreció la renovación en su forma de enseñar* (ver narración). A su vez, pudo concluir que *los profesores necesitan estar formándose continuamente*, para innovar sus clases y responder a los nuevos modos de aprendizaje de los estudiantes (ver narración). En este sentido, manifestó que siente que hacen falta más trabajos, con doblado de papel, que permitan la manipulación y visualización de conceptos difíciles o abstractos (*conceptos que se pueden abordar en el aula de clase*: teorema de Pitágoras, teorema de Thales, entre otros) por parte de los estudiantes. Adicionalmente, precisó que *se deberían diseñar actividades, con doblado de papel, a través del uso de situaciones problema*, para contextualizar los aprendizajes y propiciar mayores comprensiones.

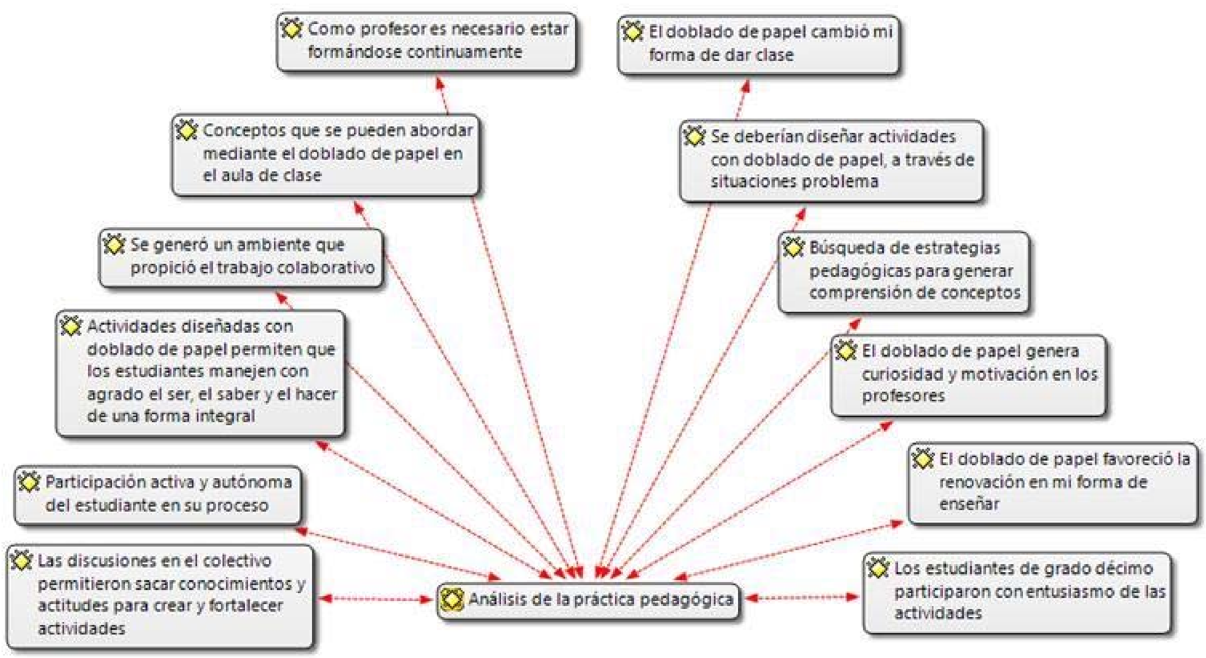


Figura 156: Esquema familia de códigos Análisis de la práctica pedagógica.

El colectivo aporta a la formación como profesor (ver esquema en la figura 159). La profesora Molly sintió que el colectivo de profesoras le *aportó de manera significativa* a su proceso formativo. Ella consideró, de manera particular, con respecto a su asesora, que *había encontrado a alguien que la podía orientar en su camino* de construcción de una tesis de maestría, utilizando el doblado de papel como medio para la comprensión de conceptos, aunque confesó que, al principio, se reservaba sus dudas frente al trabajo directo con los estudiantes. Molly manifestó que su asesora y colega del colectivo le "aportó significativamente desde su experiencia".

Las reuniones periódicas del colectivo se convirtieron en el espacio propicio para generar *discusiones sobre el uso del doblado de papel* y *sobre conceptos y procedimientos geométricos* (ver narración); estas discusiones, a su vez, *permitieron sacar conocimientos y actitudes para crear y fortalecer actividades*, hecho que se puede percibir en su informe final de tesis (ver extracto de tesis en las figuras 157 y 158)[15]. Por lo tanto, la profesora concluye que *el colectivo permite no solo compartir apreciaciones sino también generar conocimiento*.

[15] Por motivos de confidencialidad, el informe final de esta tesis no se presenta en este estudio.

6.4.2.1 *Fase de Exploración.*

Con el desarrollo de esta fase, se pretende indagar por los conocimientos previos que tienen los estudiantes frente al concepto de volumen. Para ello, se realizarán las siguientes acciones:

- Construir un cubo mediante el doblado de papel.
- Encontrar elementos que permitan indagar sobre el concepto de volumen.
- Indagar el concepto de volumen en el ambiente familiar.
- Socializar los hallazgos del concepto de volumen con los estudiantes de 10°1.
- Comunicar y proponer una actividad que contenga el concepto volumen.

6.4.2.2 Fase de Investigación Guiada.

En esta fase se propenderá por el desarrollo de actividades intencionadas que llevarán a los estudiantes a ir avanzando en su nivel de comprensión con respecto al concepto de volumen.

6.4.2.2.1 Actividad de transformación con diferentes configuraciones volumétricas. Se hará la construcción de un tren de cubos unidos entre sí, que le permitirá al estudiante comprender que cuerpos con diferente forma pueden tener el mismo volumen, además, que la forma y el volumen son conceptos diferentes.

Figura 157: Fragmento de tesis de la profesora Molly.

6.4.2.3 Fase del proyecto final de síntesis.

Cada equipo de estudiantes elige una figura modular, con doblado de papel, para realizar las siguientes acciones

– Consultar su historia y sus generalidades.

– Encontrar la manera de hallar su volumen haciendo uso de métodos matemáticos.

– Presentar un trabajo escrito.

– Presentar una exposición al grupo.

Se sugieren algunos poliedros como: el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro, el icosaedro, el prisma y la pirámide.

Figura 158: Fragmento de tesis de la profesora Molly.

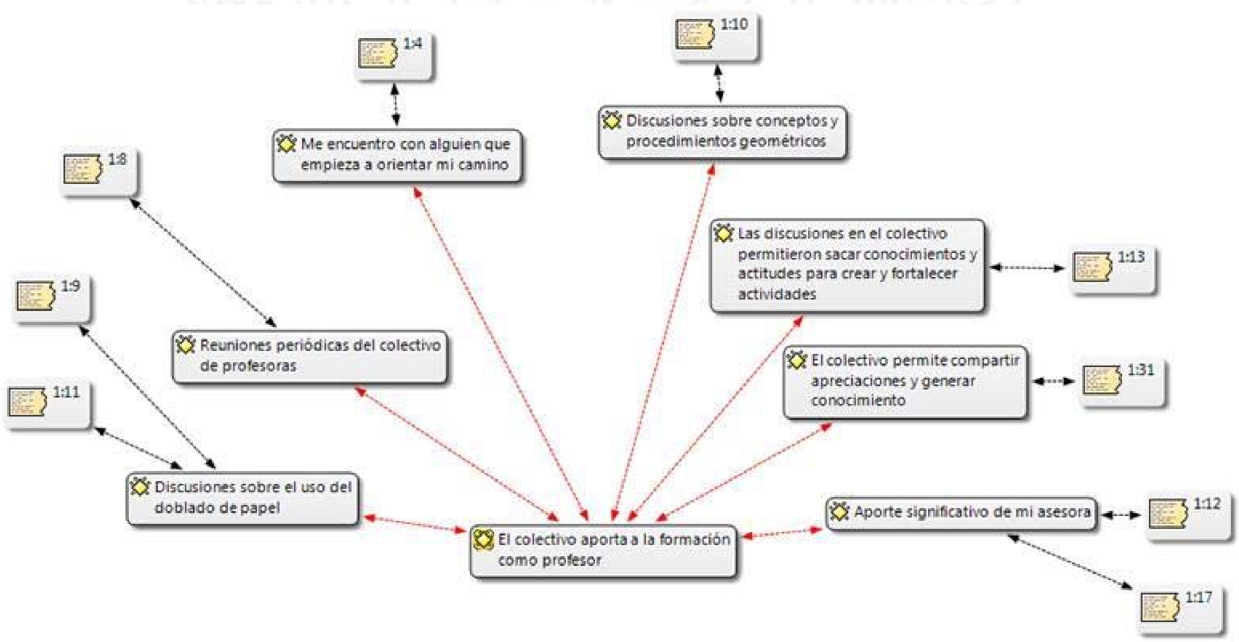


Figura 159: Esquema familia de códigos El colectivo aporta a la formación como profesor.

Uso del doblado de papel para la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos (ver esquema en la figura 162). Los encuentros con la profesora Molly permitieron que se analizara el uso del doblado de papel en la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos. En particular, se generaron diálogos y *discusiones sobre su uso* en el aula de clase, que llevaron a inferir que este medio *permite trabajar aspectos geométricos*, al *experimentar y visualizar* las figuras, permite generar *construcciones precisas* y alcanzar *la conceptualización de conceptos* (ver narración). Sin embargo, el doblado de papel no solo aporta al conocimiento disciplinar de la geometría, sino que propicia espacios de *participación activa y autónoma de los estudiantes en sus procesos* de aprendizaje (ver figura 160 y fragmento de tesis 161).

También se percibió que el estudio profundo del doblado de papel por parte de la profesora Molly y el diseño y puesta en marcha de actividades a través de este medio, le permitieron *cambiar su forma de dar clase* y le *favorecieron en la renovación de su forma de enseñar*. De hecho, la profesora manifestó que el doblado de papel "*es una herramienta versátil, flexible e innovadora*", que no solo capta la atención de los estudiantes (ver narración), sino que genera *curiosidad y motivación* en los profesores (ver respuesta pregunta 1) para observar o generar demostraciones.

En este escenario, la profesora sintió la necesidad de *analizar otros conceptos que se podrían abordar, mediante el doblado de papel, en el aula de clase*, situación que también la llevó a reflexionar sobre *el diseño de actividades mediante el uso de situaciones problemas*, que puedan ser significativas para el estudiante. De todos modos, las actividades que la profesora diseñó en su guía curricular permitieron que *los estudiantes* *manejaran con agrado el ser, el saber y el hacer de una forma integral* (ver último párrafo de la narración).

Figura 160: Trabajo autónomo y participativo de los estudiantes. Tesis de Molly.

Durante la fase de investigación guiada, los estudiantes trabajaron en grupos de estudio, en los cuales se delegaron responsabilidades, como hacer registros del tema escogido para compartir con los demás compañeros, por ejemplo. Estas actividades asignadas, junto con la exposición final de la unidad curricular, durante la fase de proyecto final de síntesis, permitieron que los estudiantes no solo trabajaran en temáticas escogidas por ellos, de acuerdo a sus motivaciones, sino que les posibilitó demostrar la comprensión del concepto de volumen en los diferentes poliedros expuestos. Es decir, pusieron en práctica lo aprendido mediante la construcción de poliedros, con doblado de papel, al identificar los elementos necesarios para definir y calcular el volumen de los mismos. Esta tarea, además, se complementó con la historia e importancia de los poliedros elegidos.

Con respecto al uso del doblado de papel, Rodríguez (2006) concluye que "[…] la práctica del origami puede tener una marcada influencia en el desarrollo de la percepción viso-espacial de las personas que lo practican" (p. 63). En este orden de ideas, se puede inferir que la técnica del origami, le permitió a los estudiantes desarrollar sus capacidades senso perceptivas; cuando siguen instrucciones de doblado de papel, lo posicionan en un espacio con tres dimensiones, en las cuales se puede observar el fondo de la figura formada; además, permite la coordinación de las manos, la imaginación, la memoria y el pensamiento, posibilitando una labor de inteligencia y concentración, provocando desarrollos cognitivos y psicomotores en los estudiantes.

Figura 161: Fragmento de tesis de la profesora Molly.

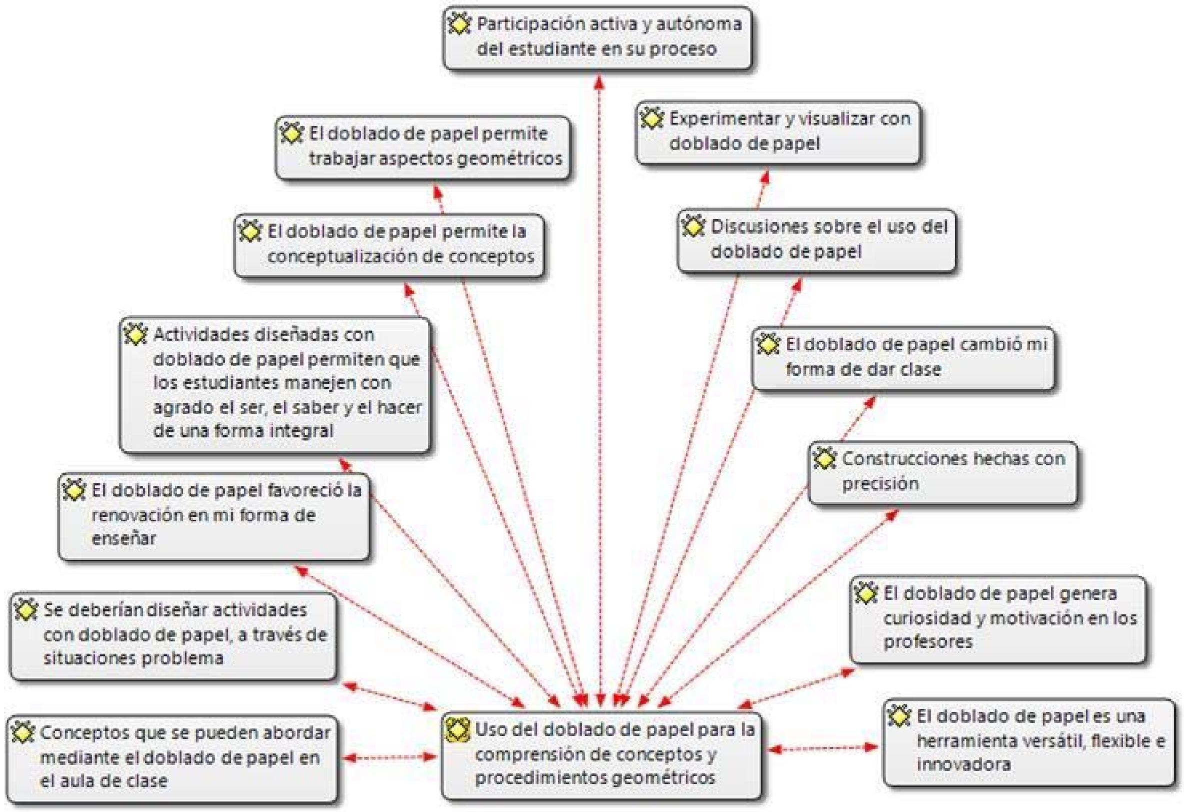


Figura 162: Esquema familia de códigos Uso del doblado de papel para la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos.

Con el análisis de los siete episodios de manera individual y con el análisis de las situaciones vividas por el segundo colectivo (nivel 2 de la investigación basada en diseño), se procede a realizar un análisis retrospectivo, que permita la triangulación general de los análisis individuales, de mis observaciones como investigadora y del referente conceptual (nivel 3 de la investigación basada en diseño) para, posteriormente, extraer un sistema categorial, con su respectiva tematización. Esta segunda triangulación se presenta en el capítulo 5, de resultados y discusión.

5. Resultados y discusión

En este capítulo pretendo realizar un análisis retrospectivo de todos los episodios que analicé, en el capítulo anterior, de manera simultánea; por lo tanto, considero el nivel 3 de la investigación basada en diseño. Este análisis retrospectivo me permite generar un sistema categorial, al agrupar las familias de códigos que surgieron. Posteriormente, a la luz de lo que emergió del análisis de los episodios, el marco referencial y mis observaciones generales como investigadora, tematizo cada una de las categorías; esto me permite describir la producción de conocimiento geométrico escolar que emergió del colectivo[16] de profesores-con-doblado-de-papel y, a su vez, caracterizar el mismo colectivo.

5.1. Análisis general retrospectivo

Para la descripción de cada una de las categorías emergentes, realizaré un análisis global entre: (1) lo que emergió del análisis de cada episodio, (2) el constructo teórico *seres-humanos-con-medios* y otros referentes teóricos y (3) mis observaciones como investigadora.

5.1.1. Agrupamiento de familias de códigos.

De los análisis de los siete episodios del primer colectivo, y del análisis de la narración del segundo colectivo, surgieron 39 familias de códigos, las cuales voy a clasificar en las siguientes categorías (tabla 6). Es importante considerar que algunas familias se repiten en ciertas categorías, dado que estas últimas están estrechamente

[16] Aunque los análisis se hicieron en dos colectivos diferentes de profesoras-con-doblado-de-papel, me voy a referir, de manera general, a la producción de conocimiento que emerge de un colectivo de profesores-con-doblado, dado que se observó que las características de ambos colectivos, fueron muy similares.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

relacionadas; en este sentido, considero que no hay un límite visible entre una categoría y otra.

Tabla 6: Agrupación de familias de códigos en categorías.

Categorías	Familias de códigos
Comprender conceptos y procedimientos de geometría escolar (16 familias).	Desarrollo de conceptos de geometría escolar.
	Desarrollo y análisis de conocimientos geométricos.
	Comprensión y análisis de conceptos de geometría escolar.
	Uso del doblado de papel para la comprensión de conceptos de geometría escolar.
	Comprensión y análisis de conceptos geométricos mediante el doblado de papel.
	Comprensión y análisis de conceptos y procedimientos de geometría académica.
	Análisis logrados durante el encuentro.
	Aprendizajes logrados durante el encuentro.
	Diálogos e interacciones del colectivo con respecto a la geometría escolar.
	El doblado de papel permite la comprensión y análisis de conceptos.
	Comprensión y análisis de conceptos geométricos.
	Implicaciones geométricas de los axiomas de Huzita-Hatori.
	Aprendizajes alcanzados durante los encuentros.
	Comprensión de conceptos de geometría escolar.
	Usar el doblado de papel para la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos.
	Uso del doblado de papel para la

	comprensión de conceptos y procedimientos geométricos.
Usar el doblado de papel para construir, visualizar (generar conjeturas), experimentar y probar (10 familias).	Uso del doblado de papel para la comprensión de conceptos de geometría escolar. Comprensión y análisis de conceptos geométricos mediante el doblado de papel. Incidencia del doblado de papel en el aula de clase. El doblado de papel permite la comprensión y análisis de conceptos. La interpretación de construcciones con doblado de papel permite la comprensión, experimentación y visualización de conceptos. Uso del doblado de papel para construir, experimentar, visualizar y probar hechos geométricos. Análisis de los axiomas de Huzita-Hatori. Uso del doblado de papel para la construcción y generación de conjeturas visuales. Usar el doblado de papel para la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos. Uso del doblado de papel para la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos.
Reflexionar en y para la práctica pedagógica (9 familias).	Reflexión sobre la práctica pedagógica. Incidencia del doblado de papel en el aula de clase. Reflexión sobre la práctica pedagógica. Análisis logrados durante el encuentro. Reflexión sobre la práctica pedagógica. Reflexión sobre la práctica pedagógica. Aprendizajes alcanzados durante los

	encuentros. Reflexionar sobre la práctica pedagógica. Análisis de la práctica pedagógica.
Interacciones del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel: aporte a la formación continua (11 familias).	Aporte del colectivo de profesoras. Confianza y reconocimiento del otro como profesor. El colectivo aporta a la formación de las profesoras en geometría escolar. Aprendizajes logrados durante el encuentro. Diálogos e interacciones del colectivo con respecto a la geometría escolar. Incidencia del colectivo en los procesos de aprendizaje de las profesoras. La producción de conocimiento geométrico escolar emerge de un colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel. Aporte del colectivo a la formación como profesoras. Diálogos e interacciones del colectivo con respecto a los axiomas de Huzita-Hatori. Aportes del colectivo de profesores. El colectivo aporta a la formación como profesor.
Formación de profesores (6 familias).	La producción de conocimiento geométrico escolar se relaciona con la formación de profesores. Aprendizajes alcanzados durante los encuentros. Aporte del colectivo a la formación como profesoras. El colectivo aporta a la formación como profesor. El colectivo aporta a la formación de las profesoras en geometría escolar. Incidencia del colectivo en los procesos de aprendizaje de las profesoras.

Dificultades (2 familias).	Dificultades generales. Dificultades.

5.1.2. Categorías que emergieron del análisis de los episodios (tematización).

En los siguientes apartados voy a describir y a tematizar, a la luz de los referentes teóricos, las categorías que emergieron del análisis global. Es importante resaltar que no hay una jerarquización en la presentación de las categorías.

Categoría 1: Comprender conceptos y procedimientos de geometría escolar.

Un aspecto que fue reiterativo en el análisis de los episodios y de la narración, fue que durante los encuentros, las profesoras lograron comprender conceptos y procedimientos de geometría, asociados de manera particular a su proceso de enseñanza en el aula de clase. Sin embargo, esta comprensión se vio mediada siempre por el colectivo mismo de profesoras y sus interacciones con el doblado de papel. Es decir, fue precisamente en este escenario donde se propició este proceso de comprensión.

Al respecto, la profesora Vicky mencionó, en su entrevista, que logró aprendizajes "*en la parte de construcción de conceptos, en la parte de innovar y buscar estrategias que me aproximen a conceptos, que me desarrollen mi concepto…*" (Fragmento de entrevista 2, análisis del séptimo episodio). De hecho, ella misma explicó que "*esos conceptos que eran tan difíciles de digerir escritos en un libro los podía aprender simplemente con las manos…*" (Fragmento de entrevista 2, análisis del séptimo episodio). De la misma manera, la profesora Elizabeth manifestó que "*el colectivo de doblado de papel ha generado en mí,* *un aprendizaje de la geometría que fortalece los conceptos vagos que tenía. Me permitió observar lo intangible en tangible, se visibilizaron las palabras en cada doblado y me facilitaron la apropiación y comprensión de conceptos geométricos*" (figura 77, del séptimo episodio).

De acuerdo con Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014) pensar-con-tecnologías en un colectivo particular se relaciona directamente con el aprendizaje matemático, el cual se caracteriza por la producción de conocimiento matemático, el mismo pensamiento matemático y la producción de significados. En esta perspectiva, de acuerdo con lo surgido en el trabajo de campo, asumo, de manera análoga, la comprensión de conceptos y procedimientos de geometría escolar como un proceso de aprendizaje matemático.

El proceso de comprensión en el colectivo, no solo se relacionó con el conocimiento del contenido geométrico, sino también con el uso de procedimientos y métodos de geometría escolar, la articulación entre la teoría y la práctica y, por último, con las formas de comunicar dicha comprensión, a través de la manifestación de ideas al colectivo, las reflexiones escritas en las bitácoras o narraciones, las entrevistas y el trabajo mismo en el aula de clase. Adicionalmente, se percibió que las profesoras usaron este conocimiento, de manera flexible en el aula de clase o para desarrollar algunas tareas de formación. Esto me lleva a relacionar la comprensión con las ideas de Perkins (1999) y Boix y Gardner (1999). Para Perkins (1999) la comprensión se asocia con la capacidad de desempeño flexible, en el cual las personas pueden pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que saben. Es decir, comprender un tópico es "explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria" (p. 73).

Por su parte, Boix y Gardner (1999) explican que la comprensión tiene cuatro dimensiones que la describen: contenido, que evalúa la trascendencia del conocimiento no escolarizado al conocimiento en que se puede actuar con flexibilidad; métodos, que reconoce la capacidad de usar métodos viables para construir o validar conjeturas; propósitos, que analiza la capacidad de reconocer las intenciones que orientan la construcción del conocimiento, es decir, relaciona la teoría con la práctica y, finalmente, formas de comunicación, que evalúa el uso de sistemas de símbolos para comunicar lo que se comprendió (Boix y Gardner, 1999).

Las profesoras Natalia, Elizabeth, Vicky y Molly, lograron comprender conceptos y procedimientos de geometría escolar al usarlos con flexibilidad en diferentes momentos y espacios (en particular, se resaltaron los siguientes conceptos: lugar geométrico, mediatriz, bisectriz, volumen, entre otros). Por ejemplo, la profesora Natalia mencionó al respecto "*el lugar geométrico, eso yo lo aprendí, me parece increíble que no lo viera en la universidad, pues incluso yo no recuerdo, demás que si lo había escuchado, pero no lo recuerdo; cuando nos definiste el lugar geométrico, volvimos y lo retomamos en otro momento, o sea eso fue una de las cosas que yo pues tenía completamente de lado, no lo conocía*" (fragmento de entrevista 3, análisis del séptimo episodio).

Además, las profesoras utilizaron diferentes métodos para resolver tareas de formación y para proponer una, desde sus saberes y experiencias (construcción de rectas paralelas y perpendiculares, construcción de triángulos equiláteros, construcción de los axiomas de Huzita-Hatori, entre otros). De hecho, las profesoras Elizabeth, Natalia y Molly, han analizado la pertinencia de ciertos conceptos geométricos para llevarlos al aula de clase, a partir de construcciones con doblado de papel. Al respecto, la profesora Elizabeth explicó en el siguiente fragmento de entrevista 6:

> Yo ahorita con ellos trabajé el teorema de Thales, solamente desde el doblado y lo hicimos, o sea construimos el teorema a partir de la deducción del doblado de papel y estoy mirando pues en lo que sigue cómo se va trabajando; el teorema de Pitágoras también lo fuimos trabajando así, que ese pues de pronto si tú nos lo habías enseñado, pero el teorema de Thales no, sino que cuando dije voy a dar el teorema de Thales, yo dije bueno voy a ver si esto me sale, lo empecé a trabajar y me dio, y ya cuando me fui a trabajar con los muchachos, la comprensión ha sido otra cosa, porque ellos dicen, ah, profe si, cuando doblamos; ah, sí, cuando hicimos tal cosa, ah, sí, esto era igual, esto no era igual, esto si es proporcional, esto no es proporcional… Entonces ellos esos conceptos también los han tenido diferentes, que en otros momentos me ha tocado dar también el teorema y los muchachos no tienen tanta comprensión, solamente es el algoritmo, la fórmula y ya.

De acuerdo a lo anterior, se observa que las profesoras pudieron articular aspectos teóricos abordados en los encuentros, con aspectos prácticos, relacionados con su trabajo en el aula de clase. Así mismo, se puede inferir que las participantes comunicaron sus comprensiones a partir de las interacciones dentro del colectivo, las reflexiones de sus bitácoras, las respuestas a las preguntas de las entrevistas, la narración de experiencias y de vivencias propias en el aula de clase. Por lo tanto, se puede concluir que dentro del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel se generó un proceso de comprensión de conceptos y procedimientos de geometría escolar.

Categoría 2: Usar el doblado de papel para construir, visualizar (generar conjeturas), experimentar y probar.

De acuerdo con el trabajo de campo, se observó que el doblado de papel es un medio que permite construir figuras, visualizar sus mosaicos de pliegues para generar conjeturas visuales, permite experimentar y crear nuevos dobleces, para hacer mostraciones[17] y probar dichas conjeturas. Todas estas acciones, propiciaron, de acuerdo con la primera categoría, la comprensión de conceptos y procedimientos de geometría escolar al interior del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel. En este sentido, Santa y Jaramillo (2010) afirman que el doblado de papel es una alternativa para mejorar los procesos de razonamiento en geometría, porque permite procesos de visualización y de experimentación, que posibilitan manipular una hoja de papel para generar dobleces, lanzar conjeturas y justificar, de manera formal, las construcciones realizadas. Al respecto, la profesora Elizabeth, al responder la pregunta ¿qué le aportó el uso del doblado de papel a su formación?, precisó lo siguiente en el siguiente fragmento de entrevista 7:

> A visibilizar conceptos, a visibilizar conceptos, a bajar la teoría a lo concreto, a, ehh, mejorar mi proceso personal como maestra, emm, a mejorar mis prácticas educativas, mis prácticas pedagógicas en el aula, a repensarme las estrategias que estoy utilizando para trabajar con los muchachos en la geometría, entonces todo eso confluye para uno poder tomar otras determinaciones y poder hacer otras cosas en el aula.

La profesora Natalia también se refirió a la importancia del doblado de papel en su formación, en el siguiente fragmento de entrevista 8:

> En particular, primero una estrategia completamente nueva porque la experiencia o el acercamiento que yo tenía con el doblado del papel nunca lo tomé por la parte, bueno, geométrica, porque implícitamente cuando yo realizaba algunas figuras con los estudiantes era eso, pero nunca partí de los conceptos básicos, nunca pensé que se podía utilizar esa herramienta para enseñar los conceptos básicos.

De acuerdo con Royo (2002), la manera más válida de probar la relación entre la geometría y el doblado de papel, es "desplegar un modelo y observar el cuadrado inicial: aparece ante nuestros ojos un complejo de cicatrices que no es sino un grafo que cumple

[17] Mostración: "acercamiento de carácter operatorio y multisensorialmente tangible a conceptos científicos de tipo matemático, físico, biológico o químico" (Monsalve y Jaramillo, 2003, p. 16).

unas ciertas propiedades" (p. 178). Por lo tanto, en la perspectiva de este autor, de manera intuitiva, hay una especie de matemáticas implícitas en el doblado de papel, que funcionan cuando se construyen modelos (Royo, 2002). De la misma manera ocurrió en el colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel, la construcción de las figuras y el análisis del mosaico de pliegues, permitió que se generaran y probaran (o se invalidaran) algunas conjeturas.

Frente a la visualización, en particular, Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014) mencionan que esta se torna en un proceso fundamental de pensamiento matemático, por las siguientes razones: envuelve un esquema mental que representa la información visual o espacial; es un proceso de formación de imágenes que posibilita la entrada en escena de representaciones de objetos matemáticos para pensar matemáticamente; ofrece medios para que las conexiones entre las representaciones puedan ocurrir; es protagonista en la producción de sentidos y en el aprendizaje matemático. En este sentido, de acuerdo con las vivencias de las participantes, se puede inferir que el doblado de papel es un medio que permite que las profesoras: generen esquemas mentales para representar la información de los mosaicos de pliegues; trasciendan de lo concreto y formen imágenes mentales para representar conceptos geométricos; puedan establecer relaciones entre objetos tangibles y sus procesos de abstracción; puedan producir sentidos frente a los conceptos mismos, al relacionarlos con aspectos de su cotidianidad y con el aula de clase y, finalmente, puedan generar procesos de comprensión; es decir, las profesoras tuvieron la oportunidad de crear, transformar o consolidar redes de relaciones[18] con doblado de papel, las cuales se relacionan, de acuerdo con este estudio, con la reorganización del pensamiento

[18] Una red de relación será entendida como un esquema mental que transforma o incorpora al anterior, nuevos conceptos o nuevas relaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990).

(Tikhomirov, 1981), tal como se demuestra en los diálogos, bitácoras, materiales y entrevistas de todos los episodios descritos.

Con respecto a los procesos de visualización, la profesora Elizabeth, en una reflexión escrita en su bitácora (ver figura 77, séptimo episodio) precisó: "*El doblado de papel lo considero como una herramienta útil y pertinente para la comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes quienes aún aprenden mejor desde lo concreto… El poder ver y analizar cada axioma, teorema u otro por medio de los dobleces los acerca más al conocimiento geométrico y a sus relaciones con el entorno, y despierta la curiosidad por el aprendizaje*".

De acuerdo con Borba, Scucuglia y Gadanidis, la noción de experimentación con tecnologías (en este caso, experimentación con doblado de papel) debe atribuir un *diseño experimental* a una actividad matemática, de tal forma que se propicien escenarios de investigación matemática, es decir, ambientes heurísticos de descubrimiento, de formulación de conjeturas acerca de un problema y búsqueda de posibles y diversas soluciones. En este sentido, experimentar con tecnologías puede ser entendido como el uso de tecnologías informáticas en el estudio de conceptos o en la exploración de problemas matemáticos (Borba y Penteado, 2001; Borba y Villarreal, 2005).

Los encuentros del colectivo se constituyeron en espacios en los que las profesoras dialogaron e interaccionaron con construcciones con doblado de papel. En estos escenarios, se generaron conjeturas visuales, se probaron o invalidaron, de acuerdo con la geometría del doblado; se hicieron mostraciones de axiomas y teoremas; se plantearon y resolvieron algunos interrogantes y problemas; se plantearon nuevos interrogantes y tareas; se reflexionó sobre la práctica pedagógica y la misma enseñanza de la geometría en el aula de clase.

De acuerdo con Ball y Cohen (1999), las actividades o tareas de formación deben recrear situaciones auténticas de las prácticas pedagógicas, que les permitan a los profesores acceder, utilizar y desarrollar el conocimiento disciplinar, el de la pedagogía y el de aprendizaje de los estudiantes, de forma simultánea. Por lo tanto, se puede mencionar que los encuentros, junto con las tareas de aprendizaje trabajadas, se convirtieron en espacios auténticos de investigación sobre geometría escolar.

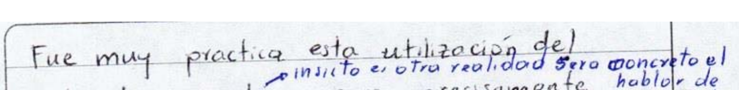
Frente a los procesos de experimentación, la profesora Molly escribió en su narración lo siguiente: "*observé con la experiencia, que el doblado de papel se convirtió en una herramienta versátil, flexible e innovadora y sobre todo cautivadora de la atención de los estudiantes. El estudiante tuvo la oportunidad de trabajar objetos tridimensionales obtenidos por su construcción mediante el doblado de papel a diferencia de los enfoques tradicionales que se han hecho con dibujos y esquemas que se realizan en hojas de papel que no son más que representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales en dos dimensiones. Siento que hacen falta más trabajos con este medio, que permitan a los estudiantes, mediante la manipulación y la observación de sus diseños, comprender otros conceptos difíciles para ellos, como el teorema de Pitágoras, el teorema de Thales, elementos geométricos, entre otros*".

Por lo tanto, la categoría "usar el doblado de papel para construir, visualizar (generar conjeturas), experimentar y probar" se convierte en una de las más importantes, pues se relaciona directamente con la producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel. ¿Cómo se produce conocimiento geométrico escolar? A través del uso del doblado de papel, como medio para construir figuras, visualizarlas, experimentar con ellas, generar conjeturas, probar hipótesis y analizar situaciones de aula, en un colectivo particular.

Categoría 3: Reflexionar en y para la práctica pedagógica.

Se percibió en las sesiones de trabajo, que las profesoras reflexionaron y analizaron sobre su propia práctica pedagógica; de hecho, no solo dialogaron sobre algunas dificultades que presentan los estudiantes frente a sus procesos de aprendizaje de geometría, sino que generaron acciones en el aula de clase, utilizando el doblado de papel como medio potenciador de la comprensión. En este sentido, de acuerdo con Ponte (2012), los profesores aprenden de su actividad y de la reflexión continua en torno a esta, cuando participan en prácticas sociales como los colectivos de profesores.

Al respecto, la profesora Natalia escribió en una de sus reflexiones "*la observación me hizo pensar mucho, responder preguntas, las dificultades que se nos presentaron en uno de los dobleces o la identificación de figuras me hace entender aún más por qué se presentan dificultades en los estudiantes, en este grupo somos como ellos: es decir, estos conocimientos nuevos nos hacen dudar, lo veo en la forma como todos nosotros como compañeros nos preguntamos o nos preocupamos por lo que no entendemos o no podemos hacer*" (ver figura 20, segundo episodio). Además, agregó lo siguiente frente a su proyección en el aula de clase: "*Fue muy práctica esta utilización del material concreto, porque precisamente es lo que me da ideas para el trabajo en el aula, como si durante el*


Fue muy practica esta utilización del

ejercicio la figura o los pasos me hablaran para organizar la clase en la cual pienso impartir el concepto que puedo abordar" (ver figura 163).

Posteriormente, en la entrevista final, la profesora Natalia reiteró lo siguiente frente a la reflexión sobre su práctica pedagógica (fragmento de entrevista 9):

> Siempre que uno aprende algo, le fortalece su labor, entonces me actualizó en muchas cosas, en conocer por lo menos la estrategia, utilizar el doblado de papel como una forma dentro de la didáctica, lo actualiza a uno cuando lo pone a pensar; yo siempre lo he visto así, qué bueno hacerlo de esta otra forma… Entonces fue un pedacito más de la formación, no tan riguroso, no de tanta intensidad, pero si le hace a uno saber un poquito más; yo conversaba por las noches con mi esposo, y le contaba eso, y él decía sí, es que eso es nuevo, es que eso no lo habíamos pensado. Entonces, si, son cosas que le van haciendo a uno repensar su práctica pedagógica, movilizar pues otras cosas de los estudiantes; ver otras cosas, eso es, moviliza en uno nuevas didácticas, nuevas prácticas.

En esta categoría, también se puede traer a colación la observación de la profesora Elizabeth, cuando reflexionó sobre la interdiciplinariedad de las áreas y sobre su propia práctica: "*Las ideas mencionadas por los compañeros desde las diferentes perspectivas de las áreas permiten el enriquecimiento profesional y personal para las prácticas pedagógicas*". En este escenario, se puede mencionar que el desarrollo profesional de los profesores involucra "el desarrollo progresivo de potencialidades y la construcción de nuevos saberes; está marcado por las dinámicas sociales y colectivas, y depende de las formas de articular intereses, necesidades y recursos del profesorado" (Ponte, 2012, p. 9).

En el caso de la profesora Vicky, por ejemplo, que no es del área de matemáticas, se percibió un interés y una necesidad marcada de pertenecer al colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel, dado que deseaba desarrollar potencialidades y nuevos saberes en geometría, a través de las interacciones del mismo colectivo. Ella manifestó que estos conceptos le son útiles para abordar la temática de enlaces químicos a nivel de estructuras de sólidos; tal parece que este tema no lo había trabajado aún porque sentía muchos vacíos conceptuales en geometría. Frente a su proceso de formación, la profesora Vicky mencionó, en su entrevista final, lo siguiente (fragmento de entrevista 10):

> De alguna manera hay otras formas de abordar los conceptos, no solamente cantando o recitando definiciones sino que eso puede darle pie a uno para buscar otras estrategias de enseñar conceptos sin tener que dar la definición sino que la definición se construya en el grupo. [¿Y eso ayuda a su formación?] Claro, porque uno muchas veces va con los muchachos a definirles cosas y muchas veces es bueno que ellos, a medida que van trabajando, vayan construyendo las definiciones y después establecer si esa definición si es apropiada y simplemente reorganizarla de acuerdo con lo que hay teóricamente […] Ya uno mira que no necesariamente tiene que ser con doblado de papel, sino que debe buscar otras estrategias dentro del área que puedan desarrollar esas mismas capacidades que vos trataste de hacer con nosotros, pues nos hiciste desarrollar y tal vez, de alguna manera, apropiarnos de esos conceptos.

La profesora Molly también resaltó la manera en que el colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel aportó a la reflexión sobre su práctica pedagógica: "*el explorar el doblado de papel en mi trabajo como docente, posibilitó dar respuesta a una necesidad pedagógica que favoreció la renovación en mi forma de enseñar, pude tener una implicación activa del estudiante en su aprendizaje, realizando sus propios esquemas de experiencias, conocimientos y desarrollo de su autonomía*" (narración profesora Molly).

De acuerdo con Ponte y Chapman (2008), un aspecto fundamental de la formación de profesores, es el relacionado con la identidad, aspecto que se asocia directamente con la reflexión sobre la práctica pedagógica. En esta perspectiva, "la formación del profesorado debería esforzarse por proporcionar a los profesores en formación oportunidades que les permitan comprender, apreciar y abrazar la complejidad de su práctica como base para la investigación en curso" (p. 256). El mismo Ponte (2012) afirma que en los procesos de formación de profesores, para favorecer el desarrollo profesional del profesorado, es necesario: (1) hacer uso de la colaboración, (2) poner la práctica como punto de partida de la formación y (3) investigar sobre la práctica como un proceso clave para la construcción del conocimiento.

Si bien el trabajo con el colectivo no se constituyó en sí mismo en un proceso formal de formación de profesores, sí se puede mencionar que hubo una formación, a pequeña escala, en un período de tiempo, en geometría escolar. Las profesoras tomaron sus propias prácticas pedagógicas como un punto de partida para formarse en geometría, a través de un trabajo colaborativo. Ellas no generaron procesos de investigación, pero sí pudieron reflexionar sobre su quehacer como profesoras y sobre sus acciones en el aula de clase.

La profesora Natalia, por ejemplo, pudo poner en marcha algunas actividades con doblado de papel en su aula de clase. Abordó conceptos como el de semejanza, teorema de Thales, concepto de circunferencia, entre otros. Sin embargo, una de las actividades planeadas no le funcionó. Ella reflexionó sobre la situación y pudo concluir: "*lo que me parece que todavía es dificultoso entonces es la manera como tenemos que pensar, como llevar a cabo la relación que hacen de eso que acaban de experimentar ahí con el concepto real, porque ellos lo hacen y siguen las instrucciones de lo que uno les dice, pero yo creo que todavía hace mucha falta de, no sé, de madurez, de análisis de mi parte mirar cómo logro llevar eso que ellos construyeron ya, al concepto, relacionar de pronto ese concepto*

[…] Yo no, no lo logré, pero sé que eso es lo que se tiene que hacer, mirar como una guía, algún ambiente diseñado que tras de eso lleve a buscar pues ya la abstracción".

En este escenario, el desarrollo de una visión flexible y multifacética del conocimiento matemático puede contribuir, significativamente, a que el profesor sea capaz de dialogar con sus estudiantes, de reconocer y validar, cuando sea necesario, ciertos puntos de partida adoptados para la construcción de un concepto o de un procedimiento, o de evaluar una determinada elaboración conceptual como adecuada para cierto grado, o que sea necesaria una reelaboración en grados posteriores (Moreira y David, 2005a). En la línea de estos autores, en el trabajo escolar, es fundamental que el profesor pueda involucrar a sus estudiantes en un conjunto de situaciones didácticas adecuadas o problemas, que no solo posibiliten desafiar sus saberes anteriores, sino que les permita reflexionar sobre nuevos significados o nuevos dominios de dichos saberes.

Categoría 4: Interacciones del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel: aporte a la formación continua.

La construcción social del conocimiento en colectivos de profesores, fue un tema reiterativo en cada uno de los análisis de los encuentros. Esto se pudo percibir en variadas ocasiones. Por ejemplo, en una de las reflexiones de la profesora Natalia, se observó "*el colectivo fue el complemento de lo que aprendí, pues todas sus dudas hacen que me retracte de lo que pienso o al contrario hacen que lo afirme. Sus aportes espontáneos son lo más útil y me dan confianza para pensar en la aplicación de estos conceptos en el aula*". Por su parte, la profesora Elizabeth afirmó que "*la escucha del compañero genera la dispersión de temores que se traen por el poco manejo de conceptos, las ideas de los* *mismos generan otras formas de ver y mejorar nuestras prácticas*" (ver figura 77, del séptimo episodio). De hecho, esta misma profesora manifestó en la entrevista que "*son fundamentales los encuentros de pares, yo siempre lo resalto y lo resaltaré, que son maravillosos porque le permiten a uno abrir la mente, tener otras opciones, ver la creatividad del otro y de alguna manera ver la creatividad del otro le aflora a uno la creatividad, ver las destrezas y las habilidades del compañero le permiten a uno también ir como creciendo, ehh, el trabajo colaborativo…*" (Fragmento de entrevista 1).

Por lo tanto, las producciones verbales y escritas de las profesoras, me permiten corroborar la tesis de Borba y Villarreal (2005) en la que afirman que el conocimiento matemático emerge de un proceso de construcción hecho por un grupo de personas, al que se le llama colectivo, cuando usan determinados medios. Es decir, "el conocimiento es producido por un colectivo compuesto de humanos-con-medios o de humanos-con-tecnologías" (Borba y Villarreal, 2005, p. 23). En este caso, la producción de conocimiento geométrico escolar emergió de ese colectivo de profesoras, dado que el doblado de papel, como medio, condicionó la naturaleza del conocimiento que se produjo. Las profesoras pudieron construir figuras, experimentar, visualizar, expresar conjeturas visuales, dialogar con otras profesoras, probar, comprender conceptos y procedimientos; además, reflexionar sobre su práctica pedagógica en el aula.

Por otro lado, uno de los aspectos importantes para la conformación de un colectivo, es el reconocimiento del otro como persona, como un primer paso para la generación de un ambiente de espontaneidad, apoyo y respeto mutuo (Fiorentini, 2008). Desde la primera sesión y durante los demás encuentros, las participantes se motivaron en propiciar un espacio de esta índole. Incluso, así lo mencionó la profesora Elizabeth en una de las puestas en común, cuando respondió a la pregunta ¿qué aprendió del desarrollo de la actividad?: "*la importancia del conocimiento del otro como ser humano, no solo profesional*". Del mismo modo, en la entrevista final, ella precisó que logró consolidar: "*conocimiento del otro sujeto como ser, o sea conocimiento del otro como ser pensante, como ser académico, como estudioso, pues como de alguna manera en su saber, ehh, es muy valiosa la experiencia de lo que el otro dice, el escuchar el compañero es muy muy valioso…*". Por consiguiente, el colectivo se constituyó en un espacio de diálogo, colaboración, confianza, apoyo, superación de temores, comprensión de conceptos y procedimientos de geometría escolar, interacción con el doblado de papel, reflexión sobre y para la práctica pedagógica, entre otros aspectos. Es importante resaltar que estas características hacen parte de un colectivo colaborativo, desde las ideas de Fiorentini (2008); el constructo teórico de *seres-humanos-con-medios* no presenta el colectivo de esta manera, sino que lo asocia con las interacciones entre los humanos y los medios.

Frente a eso, la profesora Natalia también mencionó: "*Pues dentro del mismo trabajo de nosotras como compañeras me parece que hubo un trabajo colaborativo, 100%. Esta es mi labor, esto hago yo, pero no podía dejarlo ahí solo, sin mirar qué aportaban las compañeras y después del aporte de ellas, uno replantea lo que sabe, entonces eso fue ahí importante, estuvo presente en todos los encuentros, aprendí de las didácticas pues a partir de ese trabajo colaborativo de las compañeras, que fue completamente diferente*". Lo anterior, se corrobora con la teoría, dado que los profesores aprenden sus conocimientos profesionales (el conocimiento sobre la enseñanza, la didáctica de las matemáticas y el conocimiento de las matemáticas como un área escolar), aprenden los valores profesionales, aprenden sobre sus roles profesionales y desarrollan su identidad, en estrecha relación con otros profesores (Ponte et al., 2009).

Ponte y Chapman (2008) afirman que para un proceso de formación inicial de profesores, se deben considerar algunos ámbitos, entre los que resaltan: 1) el desarrollo del conocimiento matemático, (2) el desarrollo de sus conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas, y (3) el desarrollo de su identidad profesional. En general, estos tres aspectos también son claves para un proceso de formación continua de profesores. Incluso, fueron vivenciados al interior del colectivo: se pudo evidenciar que las profesoras pudieron comprender conceptos y procedimientos de geometría escolar, aspecto que se relaciona directamente con el conocimiento matemático y el de su enseñanza; pudieron reflexionar sobre su práctica pedagógica al analizar sus quehaceres en el aula de clase y repensarse como profesoras. En conclusión, las interacciones del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel aportaron de manera significativa a la formación docente.

Categoría 5: Formación de profesores.

La categoría anterior permitió concluir que las interacciones del colectivo aportaron a la formación continua como profesores. Incluso, si se analizan las demás categorías, se percibe que todas se pueden incluir dentro de esta categoría. En general, el trabajo de campo y el análisis de todos los episodios y narraciones, me permiten inferir que las profesoras desarrollaron conocimientos geométricos (lugar geométrico, mediatriz, bisectriz, volumen, entre otros), conocimientos sobre geometría escolar (conocimiento sobre la enseñanza y la didáctica de la geometría) y reflexionaron sobre su práctica pedagógica y su acción en el aula de clase. Todos estos aspectos hacen parte de un proceso de formación de profesores, a pequeña escala, en un período de tiempo.

De acuerdo con Ponte et al. (2009), los profesores aprenden de sí mismos y de su reflexión sobre su práctica. Sin embargo, este aprendizaje toma lugar en la escuela, que es un contexto particular en un ambiente de tipo social. Esto es, dicho aprendizaje está mediado por la interacción con los demás, sobre todo con sus estudiantes, sus colegas, directivos, padres de familia y otros miembros de la comunidad educativa. Al respecto, la profesora Elizabeth mencionó (fragmento de entrevista 11):

> Como maestro se tiene que repensar todos los días, o sea nuestra misión es de repensarnos y transformar nuestras prácticas, pensando precisamente en transformar a los chicos, ¿cierto? En esa medida cada vez que nosotros queremos encontrar una estrategia diferente que pueda motivar o incentivar el conocimiento y que pueda incentivar al estudiante a hacer cosas diferentes, es valioso. Entonces en esa medida me permitió repensarme como maestra, buscar estrategias nuevas, buscar formas creativas de mejorar el aprendizaje, eh, construir de alguna manera situaciones que permitan que en los muchachos, eh, fluyan otros aspectos distintos, no solamente los académicos, sino otros aspectos alrededor de la creatividad, de la innovación, del gusto por aprender; entonces en esa medida creo que fue muy importante, y lo otro es que, eh, el escuchar a mis compañeros me retroalimenta como persona, como ser humano, como profesora, como compañera […]

En el caso de la profesora Natalia, ella mencionó en el fragmento de entrevista 9 que "*siempre que uno aprende algo, le fortalece su labor, entonces me actualizó en muchas cosas, en conocer por lo menos la estrategia, utilizar el doblado de papel como una forma dentro de la didáctica, lo actualiza a uno cuando lo pone a pensar; yo siempre lo he visto así, qué bueno hacerlo de esta otra forma… Entonces fue un pedacito más de la formación, no tan riguroso, no de tanta intensidad, pero si le hace a uno saber un poquito más*". En el anterior fragmento se puede percibir que para esta profesora, los encuentros se convirtieron en un proceso de formación a pequeña escala, que no fue formal y riguroso, pero aportó al conocimiento de la geometría escolar. De acuerdo con Morán (2006), "aprendemos mejor cuando vivenciamos, experimentamos, sentimos. Aprendemos cuando relacionamos, establecemos vínculos, lazos entre lo que estaba suelto, caótico, disperso, integrándolo en un nuevo contexto, dándole significado, encontrando un nuevo sentido" (p. 23).

Para la profesora Vicky, su proceso de formación estuvo relacionado con el conocimiento disciplinar, dado que ella manifestó que recibió aportes "*en la parte de construcción de conceptos, en la parte de innovar y buscar estrategias que* [la] *aproximen al concepto, que* [le] *desarrolle* [el] *concepto*" (fragmento de entrevista 2) y con el conocimiento de la enseñanza y la reflexión sobre la práctica pedagógica misma, pues tuvo acceso a "*otras formas de abordar los conceptos, no solamente cantando o recitando definiciones sino que eso puede darle pie a uno para buscar otras estrategias de enseñar conceptos sin tener que dar la definición sino que la definición se construya en el grupo*" (fragmento de entrevista 10).

Finalmente, concluyo que la formación de profesores, para este estudio, está relacionada con:

La comprensión (Perkins, 1999) de conceptos y procedimientos de geometría escolar (categoría relacionada con el conocimiento de contenido y el conocimiento de la enseñanza de Ponte y Chapman, 2008).

El uso del doblado de papel para construir, visualizar (generar conjeturas), experimentar y probar (categoría relacionada con: el conocimiento de contenido y el conocimiento de la enseñanza de Ponte y Chapman, 2008; *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal, 2005; Borba, 2012; Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014).

La reflexión en y para la práctica pedagógica (Ponte y Chapman, 2008; Ponte et al., 2009; Ponte, 2012).

Interacciones del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel (categoría relacionada con las comunidades de aprendizaje de Ponte et al., 2009 y con la producción de conocimiento en colectivos de *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal, 2005).

Categoría 6: Dificultades.

Las dificultades a las que me refiero en esta categoría, tienen relación, en primer lugar, con los análisis que se lograron frente a las dificultades en la enseñanza de la geometría. Por ejemplo, en uno de los encuentros, la profesora Elizabeth mencionó: "*A mí me cuesta mucho esas cosas de geometría, porque siempre me la han enseñado así, y la memorización no ayuda mucho, en cambio, de pronto así, tiene otros elementos y como uno de acá puede sacar tantas cosas… Por ejemplo, lugar geométrico, uno es ¿qué es eso?*". (Tercer episodio).

Esto me lleva a inferir varias situaciones: en las instituciones universitarias se están llevando a cabo procesos de enseñanza de la geometría rigurosos; dado que los profesores tienen dificultades en la comprensión de algunos conceptos geométricos, presentan temor para propiciar procesos de enseñanza de la misma; en algunas instituciones de educación básica, no se posibilitan procesos de aprendizaje de geometría. Al respecto, la profesora Vicky mencionó que "*la geometría es una cenicienta*" (Tercer episodio).

En segundo lugar, las profesoras tuvieron dificultades para construir algunas figuras o procedimientos. De hecho, en los primeros encuentros, las participantes hicieron procedimientos a "ojo", de carácter informal, que no se podían justificar con la geometría del doblado de papel. Incluso, en el episodio tres y en el episodio seis, se presentaron las figuras de algunas construcciones mal elaboradas. Es claro que esto no genera procesos válidos de visualización, experimentación y de justificación, porque se estaría razonando sobre mosaicos de pliegues mal elaborados. Sin embargo, en el transcurrir de los encuentros, se percibió que las profesoras presentaron avances significativos en sus construcciones.

En tercer lugar, se observaron dificultades relacionadas con el uso impreciso del lenguaje geométrico, debido al desconocimiento o confusión de conceptos o de procedimientos. Por ejemplo, la profesora Vicky, en su discurso, usó de manera imprecisa varios conceptos; pero es una situación normal porque su proceso fue diferente del de las demás compañeras, dado que ella no es profesora de matemáticas, sino de química. Sin embargo, la profesora Elizabeth, que sí es profesora de matemáticas, también exhibió algunos vacíos conceptuales. El más representativo fue mencionar que un triángulo isósceles es aquel que "*tiene dos lados iguales y uno desigual*".

5.2. Caracterización de la producción de conocimiento geométrico escolar

De acuerdo con las seis categorías establecidas en el apartado anterior y con su caracterización a la luz del trabajo de campo y de los referentes conceptuales, se puede concluir que la producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel es equiparable con un proceso de formación continua de profesores en esta área específica, en un período de tiempo (en este caso, un semestre). Por lo tanto, la producción de conocimiento, para este colectivo particular, tiene las siguientes características (tabla 7):

Tabla 7: Caracterización de la producción de conocimiento geométrico escolar.

Producción de conocimiento geométrico escolar	**Características generales**
Producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel: Proceso de formación continua en geometría escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel, en un período de tiempo.	Comprender conceptos y procedimientos de geometría escolar (característica relacionada con: el conocimiento de contenido y el conocimiento de la enseñanza de Ponte y Chapman, 2008; comprensión de Perkins, 1999). Usar el doblado de papel para construir, visualizar (generar conjeturas), experimentar y probar (característica relacionada con: el conocimiento de contenido y el conocimiento de la enseñanza de Ponte y Chapman, 2008; *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal, 2005; Borba, 2012; Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014). Reflexionar en y para la práctica pedagógica (Ponte y Chapman, 2008; Ponte et al., 2009; Ponte, 2012). Interacciones del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel (característica relacionada con las comunidades de aprendizaje de Ponte et al., 2009 y con la producción de conocimiento en colectivos de *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal, 2005).

En la figura 164, se presenta el proceso de producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel, con colores degradados, pues las acciones que lo caracterizan no tienen unos límites definidos.

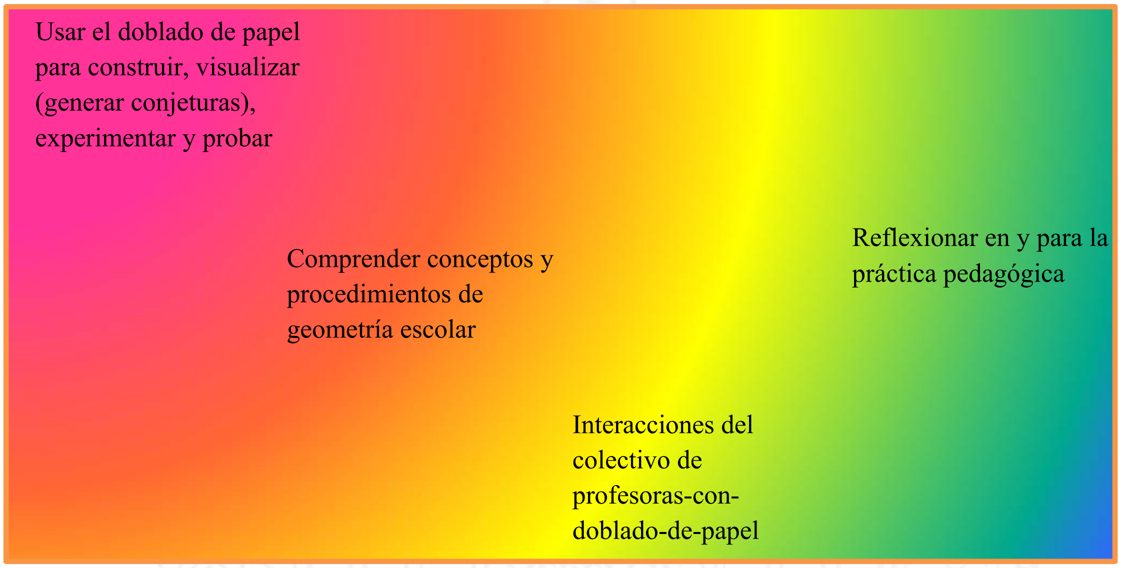


Figura 164: Caracterización de la producción de conocimiento geométrico escolar (interpretación personal).

Por otro lado, el trabajo de campo y el análisis de las observaciones, de las bitácoras y narraciones de las profesoras y de la entrevista final individual, me permiten inferir unos niveles de producción de conocimiento geométrico escolar, al interpretar las interacciones de cada una de ellas. En este orden de ideas, observo un nivel sobresaliente, en el que se encuentra la profesora Natalia; un nivel bueno, en el que puedo ubicar a la profesora Elizabeth y a la profesora Molly y, finalmente, un nivel aceptable, en el que ubico a la profesora Vicky. En la siguiente tabla 8 relaciono las características de la producción de conocimiento geométrico escolar, con los niveles mencionados.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Tabla 8: Características de la producción en niveles.

Características	**Nivel Sobresaliente** **Caso: Natalia**	**Nivel Bueno** **Casos: Elizabeth y Molly**	**Nivel Aceptable** **Caso: Vicky**
Comprender conceptos y procedimientos de geometría escolar	Identificar conceptos y procedimientos de geometría escolar. Usar métodos para construir, visualizar y probar conjeturas visuales. Relacionar y discutir la geometría escolar en un ambiente de clase, de manera directa. Usar la geometría escolar en otros contextos escolares (en la vida personal, por ejemplo).	Identificar conceptos y procedimientos de geometría escolar. Usar algunos métodos para construir, visualizar y probar conjeturas visuales. Relacionar y discutir la geometría escolar en un ambiente de clase, de manera directa.	Identificar conceptos y procedimientos de geometría escolar. Usar ciertos métodos (algunos erróneos) para construir, visualizar y probar conjeturas visuales.
Usar el doblado de papel para construir, visualizar (generar conjeturas), experimentar y probar	Plantear construcciones con doblado de papel. Generar conjeturas visuales con doblado de papel. Generar procesos de experimentación (construcciones auxiliares) con doblado de papel. Hacer mostraciones con doblado de papel.	Generar conjeturas visuales con doblado de papel (algunas erróneas). Generar procesos de experimentación (construcciones auxiliares) con doblado de papel (algunos erróneos). Hacer algunas mostraciones con doblado de papel.	Generar conjeturas visuales con doblado de papel (algunas erróneas). Generar procesos de experimentación (construcciones auxiliares) con doblado de papel (algunos erróneos).
Reflexionar en y para la práctica pedagógica	Analizar sus acciones en el aula de clase. Repensar sus	Analizar sus acciones en el aula de clase. Generar actividades	Analizar sus acciones en el aula de clase. Fortalecer su

	acciones en el aula de clase. Generar actividades de aula usando el doblado de papel. Evaluar actividades de aula usando el doblado de papel. Fortalecer su desarrollo profesional docente.	de aula usando el doblado de papel. Fortalecer su desarrollo profesional docente.	desarrollo profesional docente.
Interacciones del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel	Aportar al colectivo conocimientos de geometría escolar, al usar el doblado de papel. Aportar al colectivo métodos para resolver interrogantes y problemas con doblado de papel. Aportar al colectivo las experiencias en el aula de clase, con el doblado de papel. Trabajar de manera colaborativa. Reconocer al otro como persona y como académico.	Aportar al colectivo, conocimientos de geometría escolar, al usar el doblado de papel. Aportar al colectivo las experiencias en el aula de clase, con el doblado de papel. Trabajar de manera colaborativa. Reconocer al otro como persona y como académico.	Aportar al colectivo, conocimientos de geometría escolar, al usar el doblado de papel. Trabajar de manera colaborativa. Reconocer al otro como persona y como académico.

5.3. Caracterización del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel

De acuerdo con las seis categorías descritas en apartados anteriores, se puede determinar que el colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel se convirtió un espacio de aprendizaje, donde cada una aportaba desde sus conocimientos, experiencias, necesidades, saberes cotidianos, entre otros. Este espacio fue de confianza, respeto, apoyo mutuo, espontaneidad (Fiorentini, 2008), reconocimiento del otro, trabajo colaborativo, superación de miedos y colegialidad. Estos aspectos, de índole personal, no son considerados en el constructo teórico de *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005), en tanto que en este, el sujeto epistémico es un colectivo de *humanos-con-medios* conformado por humanos, cuya cognición es de naturaleza social, y por medios, artefactos o herramientas, que condicionan la producción de conocimiento, y son una componente esencial de dicho sujeto (Villarreal, 2012).

En este orden de ideas, se percibió que los medios utilizados para la producción del conocimiento fueron: el doblado de papel (visualización y experimentación), las interacciones que se generaron, el lenguaje verbal y no verbal, el diálogo, entre otros. En este sentido, los medios actuaron como reorganizadores del pensamiento (Borba y Villarreal, 2005), los cuales fueron parte constitutiva del colectivo. Es decir, no fueron un suplemento (Tikhomirov, 1981) de la producción de conocimiento, sino que hicieron parte activa de la misma; no sustituyen (Tikhomirov, 1981) la actividad humana, sino que posibilitaron, en las interacciones de humanos y medios, que emergiera el conocimiento geométrico escolar; no se percibió alguna dicotomía (Lévy, 1993) entre humanos y medios, pues, como se dijo anteriormente, se observó una unidad entre actores humanos y no humanos, que no tiene unos límites definidos. Las profesoras produjeron conocimiento geométrico escolar en un colectivo-con-doblado-de-papel.

Por lo tanto, las interacciones de este colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel, aportaron, de manera significativa, a la formación continua de las profesoras, porque permitieron:

–La comprensión de conceptos y procedimientos de geometría escolar.

–El uso del doblado de papel para construir, visualizar (generar conjeturas), experimentar y probar.

–Reflexionar en y para la práctica pedagógica.

Finalmente, el desarrollo y puesta en marcha del trabajo de campo, con las profesoras de la institución educativa y con la estudiante de maestría, me permitió vivenciar discusiones, participar en diálogos, escuchar y compartir experiencias, necesidades, dudas e intereses. Me permitió observar, de primera mano, la motivación de las profesoras por participar, de manera activa, de las situaciones planteadas por el estudio, aun cuando el grupo estaba formado por personas de diferente área y experiencias vividas variadas. De hecho, esas manifestaciones pueden apreciarse en sus producciones escritas dispuestas en sus bitácoras, en sus narraciones y algunos apartados de los videos. Por lo tanto, formar parte del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel, me dio la oportunidad de formarme, de reflexionar sobre mis conocimientos disciplinares, sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría y, en general, sobre mi desarrollo profesional docente.

6. Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo presento las principales conclusiones de la investigación, considerando tanto el análisis de cada uno de los episodios, como el sistema categorial y su tematización, surgido en el capítulo 5. En primer lugar, me centro en la respuesta a la pregunta de investigación; seguidamente, explicaré la consecución de los objetivos, tanto el general, como los específicos; posteriormente, explicitaré los aportes del estudio a la Educación Matemática y las futuras líneas de investigación que pueden abrir los resultados de esta investigación. Finalmente, discutiré algunas dificultades y me permitiré contribuir con recomendaciones que pueden posibilitar futuras tareas de formación y la conformación de colectivos-con-doblado-de-papel.

6.1. Respuesta a la pregunta de investigación

Considerando ciertos vacíos conceptuales que exhiben algunos profesores en sus procesos de enseñanza de la geometría y, teniendo en cuenta que, hasta el momento, no se ha establecido una caracterización de la producción de conocimiento geométrico escolar que puede emerger de un colectivo particular-con-doblado-de-papel, en el estudio me focalicé en responder a la pregunta ¿cómo producir conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel?

Para lograr validar el estudio, conformé dos grupos diferentes de profesoras para discutir y razonar hechos de geometría escolar a través del doblado de papel, mediante el desarrollo de unas tareas de formación, que fueron diseñadas y refinadas, de manera conjunta con el grupo de profesoras, considerando el contexto de las mismas, sus necesidades e intereses en conceptos y procedimientos geométricos. En un momento determinado, ambos grupos se convirtieron en colectivos colaborativos (Fiorentini, 2008), pues en el interior de cada uno de ellos, se generó un ambiente de confianza, superación de miedos y temores, apoyo, cooperación, voluntad, colegialidad y respeto.

De acuerdo con las experiencias vividas durante el trabajo de campo, se percibió que las discusiones académicas al interior de los colectivos, en torno a conceptos y procedimientos de geometría escolar, se dieron mediante el doblado de papel, el uso del lenguaje verbal y no verbal, los procesos de experimentación, de visualización, entre otros medios materiales o inmateriales. Las profesoras, en conjunto, pudieron generar conjeturas visuales, discutirlas, analizarlas, experimentarlas con el doblado de papel y probarlas o desecharlas.

Considerando lo manifestado por las profesoras y las vivencias en el transcurso de cada una de los encuentros, puedo concluir que el colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel fue un espacio para la formación de las profesoras, pues tuvieron la oportunidad de comprender conceptos y procedimientos de geometría escolar, de generar un proceso de aprendizaje personal, académico y profesional, discutir en y para su práctica pedagógica, analizar situaciones de enseñanza, sus roles como profesoras; en general, el proceso de formación a pequeña escala que se propició durante el trabajo de campo, les permitió ampliar, transformar o consolidar su desarrollo profesional.

En este sentido, ¿la pregunta de investigación fue respondida? El trabajo de campo y el análisis de la información, me permiten afirmarlo. De acuerdo con el capítulo cinco, el proceso de producción de conocimiento geométrico se asemeja a un proceso de formación continua de profesores en geometría en un corto período de tiempo. En este orden de ideas, se puede afirmar que se produce conocimiento geométrico escolar cuando (ver tabla 7):

– Los profesores pueden comprender (Perkins, 1999) conceptos y procedimientos de geometría escolar. En este caso, se estarían considerando los conocimientos de contenido y los de la enseñanza, de acuerdo con Ponte y Chapman (2008).

– Los profesores usan el doblado de papel para construir figuras, visualizarlas (generar conjeturas), experimentar y probar (esta característica considera el conocimiento de contenido y el conocimiento de la enseñanza de Ponte y Chapman, 2008; *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal, 2005; Borba, 2012; Borba, Scucuglia y Gadanidis, 2014). Como consecuencia de esta característica, se propician procesos de comprensión de conceptos de geometría escolar.

– Los profesores reflexionan en y para su práctica pedagógica, lo que les puede permitir ampliar o transformar su desarrollo profesional docente, al interaccionar con otros pares (Ponte y Chapman, 2008; Ponte et al., 2009; Ponte, 2012).

– Los profesores interaccionan con otros profesores y con el doblado de papel, para comprender conceptos y procedimientos, para experimentar, visualizar y probar, para discutir y reflexionar sobre su práctica pedagógica y, en general, para ampliar su desarrollo profesional docente (característica relacionada con el constructo *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal, 2005; el desarrollo profesional docente de Ponte, 2012 y las comunidades de aprendizaje de Ponte et al., 2009).

De acuerdo con las características anteriores, el colectivo produce conocimiento de geometría escolar cuando realiza alguna o todas las acciones mencionadas. Cabe resaltar que dichas acciones no son excluyentes; de hecho, entre ellas se generan relaciones de inclusión, de causa, de efecto, que no fueron analizadas en este estudio. Debido a lo argumentado en párrafos anteriores, la pregunta de investigación fue respondida en su totalidad.

6.2. Consecución de los objetivos planteados

El objetivo general "analizar cómo se produce conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel", planteado para dar respuesta a la pregunta de investigación, fue alcanzado mediante el análisis de los episodios, pues en cada uno de ellos se pretendía comprender e interpretar, de manera profunda, las interacciones de colectivos con doblado de papel, en la construcción de conocimientos, en particular, aquellos relacionados con la geometría escolar. Posteriormente, el análisis retrospectivo, la consolidación de un sistema categorial y su tematización, me permitieron describir la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge de dichos colectivos y, a su vez, caracterizarlos.

En este sentido, el análisis de cada episodio y, seguidamente, el análisis retrospectivo, se centraron en aquellos aspectos específicos que podrían estar relacionados con la producción de conocimiento geométrico escolar. Es decir, estudié detalladamente las interacciones de los colectivos con el doblado de papel, las discusiones sobre conceptos y procedimientos de geometría escolar, las conjeturas visuales que emergieron de los diálogos, los procesos de experimentación con doblado de papel, los procesos de visualización que surgieron de la interpretación del mosaico de pliegues, las posibles pruebas visuales de conjeturas, las discusiones sobre situaciones de enseñanza, los aportes de información dados por las profesoras, las reflexiones sobre las prácticas pedagógicas, el uso del doblado de papel en el aula de clase, entre otras situaciones.

El análisis cualitativo de las anteriores situaciones, junto con los dos procesos de triangulación que desarrollé, tanto en el nivel 2 y nivel 3 de la investigación basada en diseño, me permitieron dar consecución a los dos objetivos específicos planteados:

–*Describir la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge de un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel*. Tal como lo mencioné en el apartado 6.1, la producción de conocimiento geométrico escolar se relaciona con un proceso de formación continua de profesores a pequeña escala; dicha producción se describe de la siguiente manera: comprensión de conceptos y procedimientos de geometría escolar; utilización del doblado de papel para construir figuras, experimentar, visualizar y probar; reflexión en y para la práctica pedagógica e interacción con otros profesores y con el doblado de papel.

–*Caracterizar el colectivo de profesores-con-doblado-de-papel a la luz del constructo teórico seres-humanos-con-medios fundamentado por Borba y Villarreal (2005)*. De la misma manera como se mencionó en el apartado 6.1, el colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel (lo generalizo para ambos colectivos), se convirtió en un espacio de interacción, donde las profesoras (me incluyo), con los medios materiales o inmateriales (doblado de papel, lenguaje, visualización, experimentación, entre otros) producían conocimiento geométrico escolar, cuando comprendían conceptos y procedimientos de geometría escolar, analizaban situaciones de enseñanza, superaban temores, reflexionaban sobre su práctica pedagógica, obtenían aprendizajes académicos, personales y profesionales, entre otros. Por lo tanto, el colectivo no solo les aportó a su formación como profesoras, sino que, en mi caso, me aportó a mi formación como profesora e investigadora. Adicionalmente, dicho colectivo se transformó en un encuentro constituido por la confianza, la voluntad, la colegialidad, el respeto, el apoyo, la espontaneidad, la igualdad, el diálogo, entre otros aspectos.

6.3. Aportes a la Educación Matemática

Quizás, uno de los principales aportes al constructo teórico de *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005) y, a su vez, a la Educación Matemática, es la descripción de la producción de conocimiento geométrico escolar que emerge de un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel, pues es equiparable a un proceso de formación continua de profesores a pequeña escala (capítulo 5). Así mismo, la caracterización del colectivo, también sería un aporte tanto al constructo teórico, como a la Educación Matemática. Adicionalmente, se logró establecer una caracterización individual de la producción de conocimiento geométrico escolar de las profesoras, a partir de la descripción de dicha producción (ver tabla 8).

Las tareas de formación generadas conjuntamente con el colectivo, desarrolladas, refinadas y evaluadas en el transcurso del trabajo de campo, también constituyen un producto innovador para la Educación Matemática (esto constituye una de las intenciones de la investigación basada en diseño, Doerr y Wood, 2006). Dichas tareas se diseñaron con el colectivo de profesoras teniendo en cuenta sus intereses, sus intenciones, sus necesidades y sus temores. De hecho, intenté que encarnaran aspectos auténticos de la práctica docente

(Ball y Cohen, 1999), para que las profesoras pudieran reflexionar en y para su práctica pedagógica, al generar y evaluar situaciones para llevarlas al aula de clase. Adicionalmente, las tareas se relacionaron con conceptos y procedimientos de la geometría del doblado de papel, que no eran muy comunes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de geometría: trisección de un ángulo agudo, media y extrema razón y Axiomas de Huzita-Hatori.

En el marco teórico consideré las ideas de Bicudo (2014), desde la fenomenología, para dar el concepto de ser humano, como un cuerpo-encarnado intencionalmente, que retorna a lo que está a su alrededor, estando *con* y en *este* mundo, es decir, unido al mundo-vida. Considerando lo hallado en mi investigación, puedo inferir que el ser humano del constructo teórico *seres-humanos-con-medios*, es un ser viviente, en un espacio y tiempo determinado, constituido por su cultura (de ahí el colectivo que lo encultura, Bishop, 1999), por sus vivencias, experiencias, necesidades, historias de vida, lenguaje, entre otros, que comparte con otros, a los que llama pares. Es un ser que puede formar a otros, formarse de otros y reformarse (Freire, 1997). En este sentido, me permito afirmar que el concepto de ser humano, desde mi perspectiva, puede aportarle al constructo teórico de Borba y Villarreal (2005).

El concepto de medio también fue discutido en el marco teórico, desde las ideas de Tikhomirov (1981), Borba (1999), Souto (2013) y Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014). De acuerdo con esta investigación, el medio se entendió, de manera más general y más global, como aquel recurso o artefacto (material o inmaterial) que permite la producción de conocimiento y, en general, la reorganización del pensamiento que, de acuerdo a lo encontrado en el trabajo de campo, se puede entender como la creación o transformación de redes de relaciones[19], las cuales se construyen en colectivos. Por lo tanto, en el presente estudio, tanto el doblado de papel, como el lenguaje verbal o no verbal y los procesos de experimentación y visualización, fueron tomados como medios, los cuales hicieron parte activa y constitutiva de la producción de conocimiento geométrico escolar de los profesores del colectivo. Es posible que la concepción de medio, en el contexto del doblado de papel, y el concepto de reorganización del pensamiento abordado en este estudio, pueda ser un aporte que enriquezca el constructo teórico de *seres-humanos-con-medios*.

El colectivo, de acuerdo a lo vivenciado en el desarrollo de este estudio, se puede entender como un encuentro entre humanos y medios, que se presenta de manera indisoluble, dado que los medios (materiales o inmateriales) constituyen al ser humano. Este encuentro permite interacciones entre los humanos con los humanos (a través del lenguaje, que también es un medio), y entre los humanos con los medios (que pueden ser materiales); permite, a través de diálogos, discusiones, procesos de experimentación, procesos de visualización, reflexión sobre las prácticas pedagógicas, comprensión de conceptos y procedimientos, producir conocimiento geométrico escolar. Es importante resaltar que, pese a que la hoja de papel hace parte de un conjunto de materiales concretos, se podría pensar que constituye un sistema indisociable con los humanos (unión de humanos y medios), que media la actividad humana (Tikhomirov, 1981; Bicudo, 2014). Sin embargo, de acuerdo con este estudio, detrás del uso del doblado de papel, se evidenciaron otros procesos como: uso del lenguaje, procesos de experimentación, procesos de visualización, generación de conjeturas visuales, pruebas visuales, discusiones, diálogos,

[19] Una red de relación será entendida como un esquema mental que transforma o incorpora al anterior, nuevos conceptos o nuevas relaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990).

entre otros, al interior del colectivo; lo que permite concluir que el colectivo es una unidad indisoluble, donde no hay unos límites visibles entre los humanos y los medios. Este hecho podría ser fundamental para ampliar la visión del constructo teóricos *seres-humanos-con-medios*, con respecto a la noción del colectivo.

Finalmente, otro producto relevante de la tesis doctoral, fue la concreción de una tesis de maestría, en el marco del programa de Enseñanza de las Matemáticas, del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, desarrollada por la profesora Molly. Esta tesis emergió del colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel, compuesto por la profesora en formación y por mí, en calidad de asesora. Nuestras interacciones, discusiones, construcciones, experimentaciones, conjeturas visuales y su validación, nos permitieron comprender conceptos de geometría, analizar su pertinencia en el aula de clase y reflexionar sobre nuestras prácticas pedagógicas; por lo tanto, el colectivo nos permitió producir conocimiento geométrico escolar.

6.4. Futuras líneas de investigación

Este estudio puede dar paso a la propuesta de otras investigaciones entre las cuales, pueden considerarse:

– La consolidación de colectivos de profesores-con-medios, como espacios de formación continua que produzcan conocimientos matemáticos escolares, para intentar solucionar ciertos vacíos conceptuales que pueden tener los profesores en saberes disciplinares, pedagógicos y didácticos.

– La investigación sobre la práctica pedagógica propia para ponerla en el centro de formación del profesorado, tal como lo propone Ponte (2012). En Colombia, los procesos de formación revelan la ausencia de una articulación entre las estructuras curriculares, con la investigación y las interacciones entre la teoría y la práctica (Guacaneme, Obando, Garzón y Villa-Ochoa, 2013); dicha desarticulación, quizás, no aportaría al desarrollo profesional docente y no pondría como eje fundamental de formación la práctica pedagógica propia de cada profesor.

–El diseño de tareas de formación que permitan que los profesores comprendan conceptos y procedimientos de matemáticas escolar, usen medios para experimentar, visualizar y probar hechos matemáticos, reflexionen en y para su práctica pedagógica y puedan interactuar con otros pares, para ampliar, consolidar o transformar su desarrollo profesional docente.

–El uso del doblado de papel para la comprensión de otros conceptos de geometría escolar o, incluso, de matemáticas escolares (funciones trigonométricas, series, teoría de grafos, entre otros conceptos).

–La generación de espacios en las Instituciones Educativas, que perduren en el tiempo, como una propuesta desde el Ministerio de Educación Nacional, en los que los profesores puedan conformar colectivos para analizar y discutir asuntos relacionados con las matemáticas escolares y sus prácticas pedagógicas.

6.5. Dificultades

En todo proceso de formación que implique una investigación cualitativa, se presentan múltiples dificultades que pueden transformar las generalidades del estudio o implicar cambios en el trabajo de campo. A continuación, presento algunas de estas dificultades:

–Debido a la gran cantidad de información que logré recolectar en bitácoras, transcripciones de observaciones, construcciones de las profesoras, entrevistas, narraciones, una tesis de maestría, sentí, en algún momento del análisis, que me estaba perdiendo en un mar de datos. Sin embargo, la utilización del Atlas.ti me permitió organizar y sistematizar la información relevante, para poder generar una ruta de análisis y propiciar un camino para la discusión de los resultados.

–La conformación de uno de los colectivos (Molly-Asesora-doblado-de-papel) se hizo, inicialmente, por asignación, dado que desde el programa de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, me correspondió asesorar la tesis de Molly (ver apartado 4.5.8). En ese caso, la conformación inicial del grupo, no fue por voluntad propia de ninguna de las partes. Sin embargo, a medida que se generaron las reuniones, se notó un trabajo de carácter colaborativo, que propició un ambiente de apoyo, espontaneidad y confianza (Fiorentini, 2008); por lo tanto, puedo concluir que la producción de conocimiento estuvo mediada por el colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel.

–El colectivo que se conformó en la Institución Educativa, fue inicialmente de seis profesoras. Sin embargo, las múltiples ocupaciones de ellas, más otras situaciones extra oficiales, tuvieron consecuencias nefastas para el grupo, pues finalmente quedó conformado

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

por tres profesoras (Elizabeth, Natalia y Vicky); aunque yo, en calidad de investigadora y de profesora en formación, también hice parte de dicho colectivo. De todos modos, las interacciones que se dieron al interior del mencionado colectivo de profesoras-con-doblado-de-papel, me permitieron responder la pregunta de investigación y dar consecución a los objetivos planteados.

–Otra situación que también afectó el trabajo de campo, fue la poca disponibilidad horaria que tenían las tres profesoras del colectivo. En algunas ocasiones fue difícil conciliar un horario de reunión, considerando que era tiempo de ellas, es decir, los encuentros se hacían en tiempo extra escolar; por lo tanto, dependía de la voluntad de las profesoras quienes, en todo momento, manifestaron estar interesadas en las actividades que se realizaban en los encuentros y, por ende, hacían un gran esfuerzo para consensuar algún horario.

– Noté que no era pertinente pedirles a las profesoras del colectivo que realizaran algunas actividades en casa. Los quehaceres de ellas en sus hogares, más el tiempo familiar, impedían que dedicaran tiempo a otras actividades académicas. Por lo tanto, en los encuentros se debían hacer todas las actividades y tareas de formación planeadas. Sin embargo, percibí una gran fortaleza: ellas trabajaban en equipo dentro de la Institución Educativa, cuando yo no estaba, reflexionando sobre su práctica pedagógica y diseñando actividades para el aula de clase, que realmente ejecutaron en sus grados respectivos (ver apartados de las entrevistas, en el análisis del séptimo episodio).

6.6. Recomendaciones

Con respecto al trabajo de campo y a los resultados de la investigación, considero que se deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

–Utilizar el software Atlas.ti para la organización y sistematización de la información. Muchas investigaciones cualitativas recolectan infinidad de datos y el análisis de los mismos, se puede tornar engorroso si no se tiene una ruta estructurada para su interpretación.

–Cada Institución Educativa debería incentivar y conservar la conformación de colectivos de profesores-con-medios, para la producción de conocimiento matemático escolar. Al interior de estos colectivos se pueden dar procesos de formación continua, a corto o mediano plazo, que podrían permitir la ampliación, consolidación o transformación del desarrollo profesional docente.

–Para que los colectivos de profesores-con-medios funcionen, se debería consensuar y negociar una ruta metodológica, con tareas de formación, para que los profesores puedan comprender conceptos y procedimientos, usar los medios para experimentar, visualizar y probar hechos, reflexionar en y para su práctica pedagógica e interaccionar para mejorar el desarrollo profesional docente de cada uno de los miembros.

–Sería interesante crear una conciencia colectiva en los profesores, para que desarrollen tareas en sus hogares. Para ello, se necesita de mayor motivación e interés por los objetos de estudio matemáticos. En el peor de los casos, la recomendación sería no dejarle tareas a los profesores para la casa.

–Las tareas de formación diseñadas, deben encarnar aspectos auténticos de las prácticas pedagógicas de los docentes y deben considerar sus intereses, preocupaciones, necesidades, deseos, motivaciones y temores.

–Hasta el momento, no he encontrado investigaciones que indiquen que los colectivos deben estar conformados por algún número particular de integrantes; sin embargo, sugiero que el número de profesores del colectivo de profesores-con-doblado-de-papel no sea superior a diez, debido a que la realización de las construcciones requiere de mucha concentración, agilidad y motricidad fina; esta situación puede verse favorecida si el número de integrantes es menor, dado que quien orienta la actividad puede estar observando las construcciones de cada uno de los participantes. De hecho, las discusiones alrededor de la experimentación y de la visualización del mosaico de pliegues de las figuras, puede enriquecerse si las construcciones son hechas con precisión.

7. Referencias bibliográficas

Aballe, M. (2000). Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de Primaria. *UNO*, 25, 89-107.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Ball, D. y Cohen, D. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes and L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco: Jossey Bass.

Ball, D., Hoover, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), pp. 389 – 407.

Ball, D. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of mathematics education. *American Educator*, *16*(2), 14-18; 46-47.

Barbosa, S. (2009). *Tecnología de Información y Comunicación. Función compuesta y regla de la cadena* (tesis de doctorado). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP.

Barrantes, M. (2002). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la Geometría escolar y su enseñanza – aprendizaje*. Tesis doctoral no publicada. España: Universidad de Extremadura.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11, 49-60.

Bicudo, M. (2014). *Ciberespaço: possibilidades que se abrem ao mundo da educação*. São Paulo, Brasil: Livraria da física.

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Blythe, T. y Perkins, D. (1998). Comprender la Comprensión. En T. Blythe (Ed.), *Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente.* Buenos Aires: Paidós.

Bogdan, R. y Biklen, S. (2006). Investigação cualitativa em educação. Traducción: Santos y Batista. Portugal: Porto Editora LDA.

Boix, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles con las cualidades de la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 215 – 256). Buenos Aires: Paidós.

Borba, M. (1993). *Students understanding of transformations using multi-representational software*. (Tesis doctoral). Universidad de Cornell, Ithaca, Estados Unidos.

Borba, M. (1999). Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização de Pensamento. En: M. Bicudo (org.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas* (pp. 285-295). São Paulo: Editora UNESP.

Borba, M. (2002). Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática. En: Sociedad Brasilera de Psicología de Educación Matemática (Comp.), *I Simposio Brasileiro de Psicología de Educación matemática* (pp. 135-146). Brasil: UTP.

Borba, M. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM Mathematics Education, 44*(6), pp. 801 - 814. Doi: 10.1007/s11858-012-0436-8

Borba, M. y Penteado, M. (2001). *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M., Scucuglia, R. e Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em educação matemática. Sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. y Villarreal, M. (1998). Graphing calculator and reorganization of thinking: the transition from functions to derivate. En: Program Committee of the 22nd PME Conference (eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 136-143). South Africa: Program Committee of the 22nd PME Conference.

Borba, M. y Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.

Cardozo, C., Elejalde, R., y López, G. (2001). *De la lógica a las funciones*. Medellín: Universidad Pontificia Bolivariana.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. En: *Relime* (número especial), pp. 83 – 102.

Cerda, H. (2008). *Los elementos de la investigación*. Bogotá: Editorial Búho.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria & Educação, (2), 177-229.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.

Contreras, L. y Blanco, L. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *XXI Revista de Educación*, 3, pp. 211 – 220.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México: Fondo de Cultura Económica.

D'Ambrosio, U. (1999). La transferencia del conocimiento matemático a las colonias: Factores sociales, políticos y culturales. En: *LLULL* (22), pp. 347 – 380.

Doerr, H. y Lesh, R. (2003) Designing Research on Teachers' Knowledge Development. *Merga –Proceedings*, 1, 262-269. Recuperado de: http://www.merga.net.au/documents/RR_doerlesh.pdf

Doerr, H. y Wood, T. (2006). Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In M. Borba (Ed.), *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática* (pp. 113-130). Belo Horizonte: Autêntica.

Esteley, C. (2006). Reseña del libro: Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking. Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. En: *Yupana*, 3 (6), pp. 89 – 93.

Etcheverry, N., Evangelista, N., Reid, M., Torroba, E. y Villarreal, M. (2004). Fomentando discusiones en un ambiente computacional a través de la experimentación y la visualización. *Zetetiké*, *12*(21), 57-81.

Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. En: *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *23*(2), pp. 217 – 226.

Fiorentini, D. (2008). ¿Investigar prácticas colaborativas o investigar colaborativamente? En M. Borba y J. Araújo (Eds.), *Investigación Cualitativa en Educación Matemática* (pp. 43-72). Balderas: Limusa.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 8*, 153-165.

Freire, P. (1997). *Pedagogía de la Autonomía. Saberes necesarios para la práctica educativa.* México: Siglo Veintiuno Editores.

Gaines, B. (2013). Knowledge acquisition: Past, present and future. En: *Int. J. Human-Computer Studies* (71), pp. 135–156.

Geretschläger, R. (1995). Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. *Mathematics Magazine*, (5), pp. 357 – 371.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (20), pp. 13 – 31.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. En: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), pp. 325-355.

Guacaneme, E., Obando, G., Garzón, D. y Villa-Ochoa, J. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia.

En: *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* (8), pp. 11-49.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.

Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry. En: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, pp. 143 – 158.

ICMI (1998). Anexo: Discussion Document for an ICMI Study. En: C. Mammana and V. Villani (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 2st Century* (pp. 337-346). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Jaramillo, D., Obando, G. y Beltrán, Y. (2009). El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase. En: *Memorias del X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, pp. 1 – 17.

Jaime, A y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiele. En: S, Llenares, M.V. Sánchez (eds), Teoría y Práctica en Educación Matemática. España: Alfar, p. 295 – 384.

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.

Lang, R. (1996 – 2015). *Origami and Geometric Constructions.* Recuperado de: http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf

Lesh, R. (2002). Research design in mathematics education: Focusing on design experiments. In: L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 27 – 49). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. y Kelly, A. (2000) Multitiered Teaching Experiments. In A. Kelly, R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 197-230). New Yersey: Lawrence Erlbaum Associates. Recuperado de: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/00_1.html

Lévy, P. (1993). As tecnologias da inteligencia. O futuro do pensamento nu era da Informática. C.I. Costa (Traductor). *Les technologies de I'intelligence*. Brasil, Sao Pablo: Editora 34.

Lopera, R. (2014). *Comprensión del concepto de volumen mediante el doblado de papel en el marco de la Enseñanza para la Comprensión* (tesis de maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Martínez, A. y Juan, F. (1989). *Una Metodología activa y lúdica en la enseñanza de la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Serie Documentos: Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Moran, J. (2006). Ensino e aprendizagem innovadores com tecnologías audiovisuais e telemáticas. En J.M. Moran, M.T. Masseto y M.A. Behrens (Ed.), *Novas Tecnologias e mediação pedagógica* (pp. 11 – 66). Sao Pablo: Papirus Editora.

Moreira, P. y David, M. (2005a). O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista Brasileira de Educação*, (28), 50-62.

Moreira, P. y David, M. (2005b). *A formação matemática do professor. Licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica.

Moreira, P. (2004). *O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica*, (tese doutoral no publicada). Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais.

Motta, E. (2013). 25 Years of Knowledge Acquisition. En: *Int. J. Human-Computer Studies* (71), pp. 131–134.

Nührenbörger, M. y Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in Mthematics Teacher Education. In: Tirosh, D. Y Wood, T (eds). *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 2: Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 157–181). Rotterdam: Sense Publishers.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la Comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* (pp. 69-95). Buenos Aires: Paidós.

Ponte, J. y Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge and Practice. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of*

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

mathematics education: Past, present and future (pp. 461–494). Rótterdam, The Netherlands: Sense.

Ponte, J. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., … Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in and from Practice. R. Even, D. Ball (eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (pp. 185 - 209). United States: Springer. Doi: 10.1007/978-0-387-09601-8 17

Pogré, P. (2012). *Enseñanza para la Comprensión. Un marco para el desarrollo profesional docente.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid. Recuperada de la base de datos DIALNET (57811_pogre_paula.pdf).

Quintana, A. (2006). Metodología de Investigación Científica Cualitativa. En: A. Quintana y W. Montgomery (Eds.), Psicología: Tópicos de actualidad (pp. 47-84). Lima: UNMSM.

Radford, L. (2004). Semiótica cultural y cognición. En: *Conferencia plenaria dada en la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* México: Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En: *Relime* (número especial), pp. 103 – 129.

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Algibe.

Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma: Revista de Matemáticas,* (21), pp. 175 – 192.

Row, S. (1966). *Geometric Exercises in Paper Folding.* New York: Dover Publications.

Sánchez, M. (2007). Reseña de "Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation de Marcelo Borba y Mónica Villarreal. En: *Educación Matemática*, *19*(2), pp. 129 – 132.

Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa*. Colombia: ARFO. Recuperado de http://contrasentido.yukei.net/wp-content/uploads/2007/08/modulo4.pdf

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la Geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín.

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la Geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31). Recuperado de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_contentytask=viewyid=169yItemid=1

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. En: *Memorias del I Congreso* *de Educación Matemática de América Central y el Caribe CEMACYC*. República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra PUCMM.

Santa, Z. y Jaramillo, C. (en prensa). Colectivo de “maestros en formación continua con doblado de papel” y su producción de conocimiento geométrico. En: *Memorias del 15° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, pp. 212-217.

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2015). Producción de conocimiento geométrico de un colectivo–con–doblado de papel: el caso de la trisección de un ángulo. En: *Memorias de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas, México: Comité Interamericano de Educación Matemática. Recuperado de: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/516/236

Santa, Z., Jaramillo, C. y Borba, M. (2015a). Processos de produção de conhecimento geométrico na construção da média e extrema razão. Em Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Ed.), *Anais do 4° Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 3161-3166). Ilhéus: Universidade Estadual de Santa Cruz UESC.

Santa, Z., Jaramillo, C. y Borba, M. (2015b). El doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (46), 154-168. Recuperado de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/706/1233

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Soares, D. (2012). *Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* (tese de doutorado no publicada). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Río Claro, SP.

Soares, D. y Borba, M. (2014). The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. *ZDM Mathematics Education,* 1 – 13.

Souto, D. (2013). *Transformações expansivas em um curso de educação matemática a distância online,* (tese de doutorado no publicada). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Río Claro, SP.

Stake, R. (1999). *Investigación con Estudio de Casos*. España: Ediciones Morata S.L.

Stone, M. (1999). La importancia de la comprensión. En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*, (pp. 21 – 34). Buenos Aires: Paidós.

Stone, M. (1999). ¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica,* (pp. 95 - 126). Buenos Aires: Paidós.

Tikhomirov, O. (1981). The psychological consequences of computerization. In: Wertsch, J. (Ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology* (pp. 256-278). New York: M. E. Sharpe Inc. Recuperado de: http://www.dma.uem.br/kit/textos/pcm/tikhomirov.doc

Torroba, E., Etcheverry, E. y Reid, M. (2009). Explorando el Rol de la Visualización en Experiencias de Cátedra. En: *TEyET Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, (3), pp. 1 – 7.

Van Hiele, P. (1986). Structure and Insight. A theory of Mathematics Education. London: Academic Press.

Van Hiele, P. (1990). *El problema de la comprensión*. (A. Gutiérrez, traducción). Proyecto de investigación: Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. (Tesis doctoral presentada en 1957).

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría. En: *UNICIENCIA*, *27*(1), 74-94

Vélez, L., Galvis, J. y Villa-Ochoa, J. (2013). Integración de tecnologías en el aula de clase de matemáticas. ¿Una necesidad para el profesor? En: Congresso Internacional de Ensino da Matemática (Eds.), Memorias VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática (pp. 1-13). Canoas: ULBRA.

Villa-Ochoa J. y Ruiz M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. En: *Revista Educ. Matem. Pesq., São Paulo*, *12*(3), pp. 514 – 528.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. En: *Innovación y Experiencias VEsC*, *3*(5), pp. 73 – 94.

Villarreal, M. y Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and … notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education, 42*, pp. 49-62.

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en geometría en primer año de secundaria. *Números*, *78*, 73-94.

Watson y Sullivan (2008). Teacher Learning about task and lessons. In: Tirosh, D. Y Wood, T (eds). *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 2: Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 109–134). Rotterdam: Sense Publishers.

Zulatto, R. (2007). *A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores* (tese de doutorado no publicada). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Río Claro, SP.

8. Anexos

8.1. Divulgación de los resultados ante la comunidad académica

8.1.1. Producción científica.

El estudio ha sido divulgado en los siguientes artículos:

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico mediante la geometría del doblado de papel. En: *Revista Científica* (pp. 232-235). Registro ISSN: 0124-2253. Recuperado de: http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/6547

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2014). Producción de conocimiento geométrico en un colectivo de "maestros–con–doblado de papel". En*: Revista de Educación en Ciencias*, 15, pp. 121-122. ISSN: 0124-5481.

Santa, Z. y Jaramillo, C. (en prensa). Colectivo de "maestros en formación continua con doblado de papel" y su producción de conocimiento geométrico. En: *Memorias del 15° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, pp. 212-217.

Santa, Z., Jaramillo, C. y Borba, M. (2015a). Processos de produção de conhecimento geométrico na construção da média e extrema razão. Em: *Memorias del 4° SIPEMAT Brasil*, pp. 3161-3166. ISSN: 2446-6336.

Santa, Z., Jaramillo, C. y Borba, M. (2015b). El doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico. En: *Revista Virtual de la Universidad Católica*

del Norte, 46, pp. 154-168. ISSN: 0124-5821. Recuperado de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/706/1233

8.1.2. Participación en eventos.

La investigación la he divulgado en los siguientes eventos nacionales o internacionales:

V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Universidad de Medellín, Medellín, Antioquia, 2013. Uso de la geometría del doblado de papel y del asistente RYC en la producción de conocimientos relativos a lugares geométricos (p. 141). ISBN: 978-958-8815-13-8.

14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa Asocolme, Barranquilla, Atlántico, 2013. Producción de conocimiento geométrico mediante la geometría del doblado de papel (pp. 232-235). ISSN: 0124-2253. Recuperado de: http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/6547

I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe CEMACYC, Santo Domingo, República Dominicana, 2013. Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. ISBN: 978-9945-415-55-1. Recuperado de: http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/216-400-1-DR-C.pdf

VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Universidad de Medellín, Medellín, Antioquia, 2014. La producción de conocimiento de un colectivo de "maestros en formación continua – con – doblado de papel".

2d International Congress of Science Education ICSE 2014. UNILA, Foz de Iguazú, Brasil, 2014. Producción de conocimiento geométrico en un colectivo de "maestros–con–doblado de papel" (pp. 121-122). ISSN: 0124-5481.

Memorias del 15° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Bucaramanga, Santander, 2014. Colectivo de "maestros en formación continua con doblado de papel" y su producción de conocimiento geométrico (pp. 212-217). ISSN en trámite.

XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM, Chiapas, México, 2015. Producción de conocimiento geométrico de un colectivo – con – doblado de papel: el caso de la trisección de un ángulo. ISSN en trámite. Recuperado de: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/516/236

4° Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática SIPEMAT, lhéus, Bahia, Brasil, 2015. Processos de produção de conhecimento geométrico na construção da média e extrema razão (pp. 3161-3166). ISSN: 2446-6336.

8.2. Consentimiento informado profesora Elizabeth

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

INVESTIGACIÓN EN CURSO: PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO EN UN COLECTIVO DE "MAESTROS–CON–DOBLADO DE PAPEL"

CANDIDATA A DOCTORA: ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ

OBJETIVO GENERAL: Analizar cómo se generan procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, de tal manera que aporten a su desarrollo profesional docente.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria, ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en un colectivo – con – doblado de papel; además, permita la revisión de todas sus producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo doctoral.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del o la participante: [redacted]

Cédula: 43[redacted]

Lugar y fecha (día/mes/año): Febrero 10-15

8.3. Consentimiento informado profesora Natalia

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

INVESTIGACIÓN EN CURSO: PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO EN UN COLECTIVO DE "MAESTROS–CON–DOBLADO DE PAPEL"

CANDIDATA A DOCTORA: ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ

OBJETIVO GENERAL: Analizar cómo se generan procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, de tal manera que aporten a su desarrollo profesional docente.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria, ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en un colectivo – con – doblado de papel; además, permita la revisión de todas sus producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo doctoral.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del o la participante: [redacted]

Cédula: 32[redacted]

Lugar y fecha (día/mes/año): Medellin, febrero 10 de 2015

8.4. Consentimiento informado profesora Vicky

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

INVESTIGACIÓN EN CURSO: PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO EN UN COLECTIVO DE "MAESTROS–CON–DOBLADO DE PAPEL"

CANDIDATA A DOCTORA: ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ

OBJETIVO GENERAL: Analizar cómo se generan procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, de tal manera que aporten a su desarrollo profesional docente.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria, ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en un colectivo – con – doblado de papel; además, permita la revisión de todas sus producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo doctoral.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del o la participante: [redacted]

Cédula: 42 [redacted]

Lugar y fecha (día/mes/año): I.E. G.A.A. 10 Feb 2016

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

8.5. Consentimiento informado profesora Molly

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

INVESTIGACIÓN EN CURSO: PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO EN UN COLECTIVO DE "MAESTROS–CON–DOBLADO DE PAPEL"

CANDIDATA A DOCTORA: ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ

OBJETIVO GENERAL: Analizar cómo se generan procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, de tal manera que aporten a su desarrollo profesional docente.

Apreciadas y apreciados maestros.

Les solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria, ser observado, filmado, grabado o fotografiado, cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en un colectivo – con – doblado de papel; además, permita la revisión de todas sus producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del trabajo doctoral.

Es importante mencionar que, en todo momento del estudio, los investigadores se comprometen a:

- Guardar y proteger la privacidad de los participantes.
- Proteger tanto la identidad de los participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo los investigadores tendrán acceso a la información brindada por los participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del Participante: Molly

Cédula: — o —

Lugar y fecha (dia/mes/año): Medellín, 19 de junio de 2014