



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO INCÓGNITA EN EL
MARCO DE LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES DEL
GRADO QUINTO DE BÁSICA PRIMARIA**

Autor

Helmer Danilo Diosa Bedoya

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación Medellín, Colombia

2019



Comprensión del concepto de variable como incógnita en el marco de la Enseñanza para la
Comprensión en estudiantes del grado quinto de Básica Primaria

Helmer Danilo Diosa Bedoya

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Educación

Asesor:

Juan David González Molina

Magíster en Educación

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Grupo de Investigación:

Educación Matemática e Historia Edumath

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación Medellín

Medellín, Colombia

2019

**“No vayas a donde el camino te lleve. Ve por donde no
hay camino y deja un sendero”.**

Ralph Waldo

*A Dios por permitirme soñar. A mis padres, por sus abrazos y sabiduría. A mis hermanas por
sus palabras de ánimo.*

*A Luciana, mi dulce amor. A Simón, mi bello ángel A Daniel Felipe, mi compañero de viaje,
por su apoyo y paciencia. A Dora Serna quien me enseñó a trazar los primeros trazos.*

*A Juan David que me enseñó a escribir cuando creí que ya lo sabía. A la Universidad de
Antioquia, por darme otra oportunidad.*

A mis estudiantes. A Concordia.

ACTA DE APROBACIÓN



DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA FORMATO DE ACTA DE EVALUACIÓN CALIFICACIÓN FINAL DEL TRABAJO DE GRADO

El día 3 de septiembre de 2020 a las 16:00, se reunieron a través de videoconferencia de la Universidad de Antioquia, Paula Andrea Rendón Mesa y Diana Patricia Acevedo Vélez, quienes en calidad de jurados acompañaron al director del trabajo de grado, Prof. Juan David González Molina, y a una representación del Comité de Programa, para presenciar la sustentación oral del trabajo de grado debidamente avalado para sustentación, titulado “Comprensión del concepto de variable como incógnita en el marco de la enseñanza para la comprensión en estudiantes del grado quinto de básica primaria”, el cual fue presentado por el estudiante Helmer Danilo Dios Bedoya, adscrito a la línea de formación “Educación matemática”, de la V cohorte del Programa Maestría en Educación (Modalidad Investigación) de la Universidad de Antioquia, sede Suroeste, municipio de Andes.

Terminada la sustentación, se procedió a la sesión de preguntas y comentarios por parte de los jurados. Luego de las intervenciones del/a estudiante, se solicitó a los evaluadores ingresar a una sesión privada con el fin de realizar la calificación de la sustentación oral y la calificación final del trabajo de grado, así:

Nombre del Jurado	Nota cuantitativa trabajo escrito	70 %	Nota cuantitativa sustentación oral	30 %	Nota cuantitativa final del trabajo de grado (ponderado 70 % + 30 %)
Paula Andrea Rendón Mesa	4.50	3.15	4.90	1.47	4.62
Diana Patricia Acevedo Vélez	5.00	3.50	4.90	1.47	4.97
Nota definitiva (promedio)					4.8

Posteriormente, el (la) representante del Comité de Programa procedió a calcular el promedio ponderado de las dos notas cuantitativas del trabajo final, obteniendo la nota de **cuatro-ocho (4,8)**. De acuerdo con la deliberación de los jurados, las siguientes razones justifican la calificación final del trabajo de grado:

Se destaca en el trabajo:

- El nivel y el sector educativo rural en el que el trabajo se desarrolla y tiene su impacto como contribución al campo de la Educación Matemática.
- El nivel de rigurosidad que se demuestra por parte del investigador con todos los elementos que se articulan, en consonancia con el horizonte y la pregunta de investigación.

Se recomienda:

- Resaltar la relevancia de los resultados en el campo teórico de la Educación Matemática en la ruralidad, con relación a la comprensión del concepto de variable como incógnita.

Finalmente, y para efectos del registro de la nota definitiva, el trabajo de grado es calificado como:



X	APROBADO (A): cuando la nota sea igual o superior a 3.5
	NO APROBADO (NA): cuando la nota sea inferior a 3.5

Así mismo y atendiendo a los criterios y procedimientos para el otorgamiento de distinciones que están reglamentados en el artículo 48 del Acuerdo Superior 432 de 2014 y en el artículo 21 del Acuerdo del Consejo de Facultad 385 de 2017. Este último acuerdo establece que:

Artículo 21. Criterios para el otorgamiento. Además de las condiciones obligatorias establecidas en el artículo 48 del Acuerdo Superior 432 de 2014, como los son que la calificación cuantitativa otorgada sea igual o superior a 4.5, que la recomendación sea unánime, que la justificación sea lo suficientemente sustentada por cada uno de los jurados, y que la decisión sea refrendada en acta de Consejo de Facultad de la Facultad de Educación, se establecen los siguientes criterios para su otorgamiento:

Tipo de distinción	Criterios para otorgar	
	Maestrías	Doctorado
Summa Cum Laude	Calificación final del trabajo de grado igual a 5.0 Publicación de un (1) artículo en revista indexada	Calificación final del trabajo de grado igual a 5.0 Publicación de al menos tres (3) artículos en revista indexada
Magna Cum Laude	Calificación final del trabajo de grado igual o mayor a 4.8 Publicación de un (1) artículo en revista indexada o ponencia internacional	Calificación final del trabajo de grado igual o mayor a 4.8 Publicación de al menos dos (2) artículos en revista indexada
Cum Laude	Calificación final del trabajo de grado igual o mayor a 4.5 Publicación de un (1) artículo en revista indexada o ponencia internacional o ponencia nacional	Calificación final del trabajo de grado igual o mayor a 4.5 Publicación de al menos un (1) artículo en revista indexada

Para el presente trabajo de grado:

	NO PROCEDE DISTINCIÓN
	SE RECOMIENDA DISTINCIÓN SUMMA CUM LAUDE
X	SE RECOMIENDA DISTINCIÓN MAGNA CUM LAUDE
	SE RECOMIENDA DISTINCIÓN CUM LAUDE

A esta acta, se anexan los argumentos correspondientes, en términos de la novedad e importancia de los resultados, el aporte e impacto al campo de estudio y la novedad en la metodología utilizada, en un texto firmado por los jurados en caso de que el trabajo de grado se le otorgue una distinción.

Como representante del Comité de Programa, el Prof. René Alejandro Londoño Cano presidió la reunión y procedió a la lectura pública del resultado. Siendo las 18:00, se da por terminado el acto de calificación final del trabajo de grado.



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

Para constancia, se firma en Medellín el día 3 de septiembre de 2020.

Paula Andrea Rendón Mesa
JURADO 1

Diana Patricia Acevedo Vélez
JURADO 2

René Alejandro Londoño Cano
REPRESENTANTE DEL COMITÉ DE PROGRAMA

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	4
1.1 Antecedentes	4
1.1.1 Componente histórico de la Variable cómo incógnita.....	5
1.1.2 Concepto de variable, interpretaciones o caracterizaciones.....	6
1.1.3 Consideraciones sobre la comprensión y la pertinencia del concepto matemático abordado en la academia, la vida y las ciencias.	11
1.1.4 Investigaciones sobre la comprensión, el objeto de estudio y el marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión.	12
1.1.5 Componente curricular y legal.....	15
1.1.6 Modelos flexibles: Escuela Nueva.....	30
1.1.7 Otras teorías de la comprensión.	31
1.1.7.1 Modelo Educativo de van Hiele.	31
1.1.7.2 Modelo educativo de Pirie y Kieren.	34
1.1.7.2.1 Niveles de comprensión según Pirie y Kieren.....	35
1.1.7.3 Marco de Enseñanza para la Comprensión.	36
1.1.7.3.1 Elementos del marco conceptual EpC.....	37
1.1.8 Conceptos disciplinares.	39
1.1.8.1 Variable.	39
1.1.8.2 Incógnita.	40
1.1.8.3 Número oculto o desconocido.....	40
1.1.8.4 Ecuación.	41
1.1.8.5 Ecuación de primer grado.....	42

1.1.8.6 Variación.....	42
1.2 Planteamiento.....	43
1.3 Justificación.....	47
1.4 Pregunta de investigación.....	49
1.5 Objetivos de la investigación	50
1.5.1 Objetivo general.....	50
1.5.2 Objetivos específicos.....	50
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	51
2.1 La comprensión.....	51
2.2 Marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión.....	52
2.3 Elementos y cualidades de la EpC	53
2.3.1 Elementos para la Enseñanza de la Comprensión.....	53
2.3.1.1 Tópicos generativos.....	53
2.3.1.2 Metas de comprensión.....	54
2.3.1.3 Hilo conductor.....	55
2.3.1.4 Desempeños de comprensión.....	56
2.3.1.5 Etapa de exploración.....	56
2.3.1.6 Etapa investigación guiada.....	57
2.3.1.7 Etapa proyecto final de síntesis.....	57
2.3.1.8 Evaluación diagnóstica continua.....	57
2.3.2 Cualidades de la comprensión.....	59
2.3.2.1 Dimensiones de comprensión.....	59
2.3.2.2 Dimensión de contenido.....	59
2.3.2.3 Dimensión de método.....	60

2.3.2.4	Dimensión de propósito.....	60
2.3.2.5	Dimensión de Formas de comunicación.....	60
2.3.2.6	Niveles de comprensión.	61
2.3.2.7	Nivel ingenuo.	62
2.3.2.8	Nivel de novato.....	62
2.3.2.9	Nivel aprendiz.	62
2.3.2.10	Nivel maestría.....	63
2.4	Relación entre los elementos, las cualidades de la comprensión y la investigación	63
CAPÍTULO 3. RECORRIDO METODOLÓGICO		71
3.1	Metodología	71
3.1.1	Fases del marco conceptual.	71
3.1.1.1	Fase de exploración.	72
3.1.1.2	Fase de investigación guiada.	72
3.1.1.3	Fase proyecto final de síntesis.....	72
3.2	Enfoque de la investigación	72
3.3	Método de investigación	73
3.4	Participantes	74
3.5	Técnicas e instrumentos	76
3.5.1	Rúbrica.....	76
3.5.2	Observación participante.	76
3.5.3	La entrevista semiestructurada.....	77
3.5.4	Dispositivos de almacenamiento.	77
3.5.5	Técnicas de análisis.	77
3.6	Ruta metodológica: unidad curricular	77

3.6.1	Propósito metodológico de la guía curricular.	78
3.6.2	Pensamientos y procesos que se desarrollan con la guía curricular.	78
3.6.3	Metas de comprensión.	79
3.6.4	Hilo conductor.	79
3.6.5	Etapa 1: fase de exploración.	80
3.6.5.1	Cuestionario.....	80
3.6.5.2	Actividades.	82
3.6.6	Etapa 2: fase de investigación guiada.	88
3.6.6.1	Actividades.	88
3.6.7	Etapa 3: fase de proyecto final de síntesis.	95
3.6.8	Actividades.	96
3.6.8.1	Guion para la entrevista semiestructurada.....	100
3.6.8.2	Categorías de la entrevista.....	100
3.6.9	Evaluación diagnóstica continua.	101
3.6.9.1	Autoevaluación.....	102
3.6.9.2	Coevaluación.	103
3.6.9.3	Rúbrica de desempeños de comprensión.....	104
3.7	Validez de la investigación 106	106
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS.....		107
4.1	Aspectos metodológicos del análisis de la información de corte cualitativo	107
4.2	Tipos de información recolectada	107
4.3	Análisis aplicación de cuestionario	108
4.4	Análisis aplicación unidad curricular	115
4.4.1	Evaluación diagnóstica continua de la unidad curricular.	133

4.5	Transcripción y análisis de la entrevista como instrumento del proyecto final de síntesis.	134
4.5.1	Análisis de la entrevista, parte 1 proyecto final de síntesis.....	135
4.5.2	Descriptores de nivel de los estudiantes durante el desarrollo de la entrevista semiestructurada por dimensiones.	141
4.6	Aplicación del cuestionario refinado, parte 2 proyecto final de síntesis.....	143
4.7	Los descriptores finales en los que se ubicaron los estudiantes	148
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....		150
5.1	Conclusiones a propósito de la pregunta de investigación.....	150
5.2	Conclusiones alrededor de los objetivos de investigación	153
5.3	Ubicación final de los estudiantes por nivel de comprensión	155
5.4	Contribuciones a la educación matemática	156
5.5	Posibles líneas de investigación	158
REFERENCIAS.....		160

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Marcos conceptuales y algunas consideraciones con relación a la comprensión	11
Tabla 2. Malla curricular de matemáticas grado 5 contenida en el plan de Estudios del Centro Educativo Rural Casa Grande	17
Tabla 3. Niveles de Comprensión de Van Hiele	33
Tabla 4. Características de las fases de Van Hiele	33
Tabla 5. Niveles de comprensión de Pirie y Kieren	35
Tabla 6. DBA grado quinto centrados en la variable	41
Tabla 7. Las dimensiones y sus rasgos	61
Tabla 8. Las cuatro dimensiones de la comprensión y sus rasgos	64
Tabla 9. La dimensión del conocimiento: sus rasgos y niveles de comprensión	65
Tabla 10. La dimensión de los métodos: sus rasgos y niveles de comprensión.....	66
Tabla 11. La dimensión de los propósitos: sus rasgos y niveles de comprensión	67
Tabla 12. La dimensión de las formas de comunicación: sus rasgos y niveles de comprensión..	69
Tabla 13. Tabla 1 de trabajo para el estudiante, fase de investigación guiada	89
Tabla 14. Tabla “el consecutivo” para el estudiante, fase de investigación guiada	89
Tabla 15. Descifrando ando. Juego de pistas	90
Tabla 16. Actividad variación de magnitudes 1	97
Tabla 17. Actividad variación de magnitudes 2.....	97
Tabla 18. Situación uso de variable (número de muñecas)	99
Tabla 19. Autoevaluación del estudiante	103
Tabla 20. Descriptores de categoría por nivel - dimensión de contenido	104
Tabla 21. Descriptores de categoría por nivel - dimensión de método	105
Tabla 22. Descriptores de categoría por nivel - dimensión de propósito	105
Tabla 23. Descriptores de categoría por nivel - dimensión de formas de comunicación	106
Tabla 24. Descriptores de nivel de Manuel durante el desarrollo del cuestionario en la fase de exploración por dimensiones	110
Tabla 25. Descriptores de nivel de Luciana durante el desarrollo del cuestionario en la fase de exploración por dimensiones	112

Tabla 26. <i>Descriptorios de nivel de Pedro durante el desarrollo del cuestionario en la fase de exploración por dimensiones</i>	114
Tabla 27. <i>Similitudes y distanciamientos entre los desempeños. Aplicación del cuestionario.</i> .	114
Tabla 28. <i>Transcripción de los argumentos de Manuel</i>	125
Tabla 29. <i>Transcripción de argumentos de Luciana</i>	125
Tabla 30. <i>Transcripción de argumentos de Pedro</i>	126
Tabla 31. <i>Respuestas construcción del concepto de variación</i>	127
Tabla 32. <i>Transcripción última actividad fase de proyecto final de síntesis</i>	132
Tabla 33. <i>Autoevaluación de estudiantes</i>	133
Tabla 34. <i>Rejilla de análisis: entrevista E1, E2 y E3 categoría C1: uso de la letra</i>	135
Tabla 35. <i>Rejilla de análisis: entrevista E1, E2 y E3 categoría C2: uso de la incógnita</i>	137
Tabla 36. <i>Rejilla de análisis: entrevista E1, E2 y E3 categoría C3: concepto de variable</i>	139
Tabla 37. <i>Descriptorios de nivel de los estudiantes durante el desarrollo de la entrevista semiestructurada</i>	141
Tabla 38. <i>Descriptorios de nivel de Manuel por dimensiones, tras el desarrollo del cuestionario en la fase del proyecto final de síntesis</i>	144
Tabla 39. <i>Descriptorios de nivel de Luciana por dimensiones, tras el desarrollo del cuestionario en la fase del proyecto final de síntesis</i>	145
Tabla 40. <i>Descriptorios de nivel de Pedro por dimensiones, tras el desarrollo del cuestionario en la fase del proyecto final de síntesis</i>	147
Tabla 41. <i>Descriptorios de nivel finales de Manuel, Luciana y Pedro</i>	148
Tabla 42. <i>Ubicación final de los estudiantes por nivel de comprensión</i>	155

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1.</i> Relación legal y curricular de la matemática en la escuela.....	25
<i>Figura 2.</i> Aprendizaje cíclico de los niveles de van Hiele	32
<i>Figura 3.</i> Estratos en el modelo de Pirie y Kieren	35
<i>Figura 4.</i> Rasgos efectivos de la evaluación diagnóstica (Stone, 1999).....	58
<i>Figura 5.</i> Vamos a la playa	83
<i>Figura 6.</i> El elefante pintor	83
<i>Figura 7.</i> Sacando la mascota a la calle	83
<i>Figura 8.</i> La familia de los Simpson.....	83
<i>Figura 9.</i> El químico	84
<i>Figura 10.</i> Perdida en el bosque	84
<i>Figura 11.</i> Actividad de razones y proporciones	96
<i>Figura 12.</i> El intervalo	98
<i>Figura 13.</i> Respuestas de Manuel al cuestionario de fase de exploración.....	109
<i>Figura 14.</i> Respuestas de Luciana al cuestionario de fase de exploración	111
<i>Figura 15.</i> Respuestas de Pedro al cuestionario de fase de exploración	113
<i>Figura 16.</i> Juego encuentra la diferencia	116
<i>Figura 17.</i> Juego de palabras “El mensaje x”	117
<i>Figura 18.</i> Trabajo con cuadrados mágicos	118
<i>Figura 19.</i> Cuadrados mágicos de Manuel, Luciana y Pedro	119
<i>Figura 20.</i> Respuesta de Manuel primera actividad fase de investigación guiada	120
<i>Figura 21.</i> Ejercicio del consecutivo de n realizado por Manuel	121
<i>Figura 22.</i> Ejercicio del consecutivo de n realizado por Luciana.....	121
<i>Figura 23.</i> Ejercicio del consecutivo de n realizado por Pedro	122
<i>Figura 24.</i> Solución actividad mensaje oculto Manuel y Luciana.....	123
<i>Figura 25.</i> Experiencia vivencial construcción concepto de variación	124
<i>Figura 26.</i> Respuesta de Manuel actividad de variable 2	130
<i>Figura 27.</i> Respuesta de Luciana actividad de variable 2	131

<i>Figura 28.</i> Respuesta de Pedro actividad de variable 2	131
<i>Figura 29.</i> Solución de Manuel al cuestionario	143
<i>Figura 30.</i> Solución de Luciana al cuestionario	145
<i>Figura 31.</i> Solución de Pedro al cuestionario	146

AGRADECIMIENTOS

Tras estas páginas escritas y las que estuvieron, tras innumerables noches de lectura y café, no están solo mis sueños, sino también el de muchos que creen que la educación es el instrumento efectivo para disminuir la desigualdad y la posibilidad de construir un mejor país. Por ello agradezco infinitamente a Dios por permitirme volar entre letras. A Juan David González por su paciencia, dedicación y por enseñarme a escribir. A los doctores René Alejandro Londoño, Edison Sucerquia, Pedro Vicente, Esteban Duarte, Jorge Eduardo Urueña López, Rodrigo Arturo Jaramillo Roldán; Eulalia Hernández Ciro y Carlos Mario Jaramillo por sus valiosos aportes a mi investigación. Al grupo de investigación Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) por su apoyo a esta investigación. A la Gobernación de Antioquia, por su apoyo a través del programa de becas de maestría. A los estudiantes Manuel, Luciana y Pedro y sus padres, que con su entrega, responsabilidad y disposición permitieron la aplicación de los instrumentos. A mi familia, que con su paciencia y amor me inspiraron para culminar este sueño. A mi esposo Daniel Felipe Calderón, quien con su silencio supo esperar, porque mi sueño lo hizo suyo. A la Universidad de Antioquia por llegar a las regiones. A Concordia por ser mi pedazo de cielo.

RESUMEN

La comprensión del concepto de variable como incógnita en el marco de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) es una investigación enfocada en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, a partir del contexto en el que se desenvuelven estudiantes de quinto grado, quienes trabajan bajo el modelo flexible de la Escuela Nueva y las actividades encaminadas a fortalecer algunos conceptos fundamentales del currículo de las matemáticas, como lo es el número oculto, la incógnita, la variable y la variación. Desde el estudio de caso, las cualidades de la comprensión en las que se encuentran las dimensiones de la comprensión, contenidas en el marco de referencia: dimensión de contenidos, dimensión de métodos, dimensión de propósitos y dimensión formas de comunicación, y la clasificación dentro de sus niveles, a partir de los descriptores finales, permitieron caracterizar la comprensión en cada uno de los tres participantes y ofrecer información de acuerdo con el nivel en que se encontraban en cada una de las dimensiones al iniciar el proceso de investigación, con respecto al objeto de estudio.

La comprensión como desempeño creativo se logra con base en la construcción personal de las vivencias y de las experiencias de los estudiantes, por ese motivo, en la presente investigación se describe cómo los estudiantes comprenden el concepto de variable como incógnita, y se determina el nivel de comprensión y el análisis de esa evolución en la forma de entender el concepto. En tal dirección, y con respeto del entorno en el que los estudiantes se forman, no solo en lo académico sino en lo personal, para el modelo por el que son atendidos se seleccionaron los tres casos en edades y géneros distintos. Lo anterior contribuyó a describir el modo como se entiende un concepto clave en el desarrollo del currículo, tal como lo expresan los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM), publicados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Palabras clave: comprensión, variable, incógnita, currículo, EpC, aprendizaje y enseñanza.

ABSTRACT

Understanding the concept of variable as unknown in the framework of the EpC it is an investigation focused on the teaching and learning processes from the context in which fifth grade students operate, who work under the flexible model of the New School and activities aimed at strengthening some fundamental concepts of the mathematics curriculum, such as the hidden number, the unknown, the variable and the variation. From the case study, the qualities of understanding in which the dimensions of understanding contained in the frame of reference are found: dimension of content, dimension of methods, dimension of purposes and the dimension of forms of communication, and classification within their levels, based on the final descriptors, they allowed characterizing the understanding in each of the three participants and offering information according to the level they were in each of the dimensions when starting the research process with respect to the object of study.

Understanding as creative performance is achieved, from the personal construction of the experiences and experiences of the students, that is why in this research we describe how students understand the concept of variable as unknown, and determine the level of understanding and analysis of that evolution in understanding such a concept. In this direction and respecting the environment in which the students operate not only academically but personally, the model by which they are served the three cases were selected in different ages and genders, which allowed describing the way in which it is understood a key concept in curriculum development, as expressed in the basic standards of mathematics competencies published by the Ministry of National Education.

Keywords: comprehension, variable, incognito, curriculum, EpC, learning and teaching.

INTRODUCCIÓN

El interés de este trabajo de investigación se centró en la comprensión de la variable como incógnita en estudiantes del grado quinto. Dentro del campo disciplinar, este concepto matemático es importante, debido a que permite simbolizar, generalizar, interpretar y manipular valores desconocidos en la formulación y solución de problemas de diferentes áreas de las ciencias. En ese sentido, en el campo de la educación se ha concluido que plantear diversas situaciones en las que la simbolización y la generalización forman parte del razonamiento, para la solución de problemas matemáticos, promueve en los estudiantes la comprensión de otras formas de manipulación y representación (Molina, 2009).

El estudio del concepto de variable como incógnita, en el marco de la EpC, se enmarcó en una justificación de carácter teórico, determinada por los problemas reportados en la literatura. Investigaciones como la de Küchemann (1980) se enfocaron en analizar las diferentes formas que tienen los estudiantes de interpretar los símbolos literales; Rosnick (1981) profundizó en las dificultades que muestran los estudiantes en la comprensión del uso de letras en ecuaciones, al trasladar un enunciado verbal a una expresión algebraica; asimismo, Usiskin (1988) definió que el concepto de variable se utiliza en diferentes contextos con significados distintos, y dependiendo del contexto, la variable se trata de diferente manera; Ursini (1994) revisó algunos resultados de investigaciones que estudian las dificultades de los alumnos que se inician en el estudio del álgebra, con diferentes usos de la variable; más adelante, Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996) investigaron la comprensión del concepto de variable en los siguientes usos: manipulación, interpretación y simbolización de las manifestaciones de esta, como número general, como número funcional y como incógnita; por último, Morales y Díaz (2003) expresaron que la variable es un concepto de gran importancia en las matemáticas y de difícil comprensión entre los estudiantes.

Por su parte, Trigueros, Ursini y Lozano (2000) realizaron un estudio en el que concluyeron lo siguiente:

Los resultados mostraron que si bien, los usos de la variable están presentes en los cursos de matemáticas, los estudiantes no adquieren la capacidad de interpretarlos, simbolizarlos

y manipularlos de manera satisfactoria; lo que impide una comprensión del carácter multifacético de este concepto. (p. 47)

Para Rojas (2010) el concepto de variable es primordial no solo para el aprendizaje de las matemáticas, sino para la enseñanza del álgebra. Es posible que al trabajar con la variable se presenten problemas puntuales como el de la incompreensión, definido por el autor en estos términos:

Cuando no se comprende uno de estos conceptos, se produce algo así como una reacción en cadena que lleva a que cada vez más conceptos sean incomprendidos, lo cual, como especulación plausible, puede ser una de las razones para la actitud displicente de los estudiantes para con las matemáticas. (p. 115)

Por lo anterior, se vislumbra la necesidad de realizar investigaciones en educación matemática sobre cómo plantear y orientar el aprendizaje de la variable como incógnita, como número general y como relación funcional, en estudiantes de diferentes grados escolares. El presente estudio plantea la descripción de la comprensión del concepto matemático de variable en uno de sus usos, cuando se involucra en los procedimientos para la solución de problemas en los estudiantes del nivel de primaria.

Esta investigación de tipo cualitativo pretende, entonces, describir cómo los estudiantes del grado quinto de Básica Primaria comprenden el concepto de variable como incógnita en el contexto de la EpC. De esta manera, busca determinar su nivel de comprensión con relación al concepto mencionado, y analizar la evolución del entendimiento de los estudiantes que participan en el proceso, a partir de los desempeños mostrados en cada una de las fases definidas en el marco conceptual, y desde las siguientes dimensiones: contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación.

Así, este proyecto de investigación está estructurado en cinco capítulos, a través de los cuales se dio sustento a una elaboración teórica que permitió dar respuesta a la pregunta de investigación y alcanzar los objetivos de investigación propuestos. A continuación, se describe su contenido.

Capítulo 1: en este apartado se exponen los antecedentes, el planteamiento del problema,

algunas consideraciones sobre la comprensión, los objetivos, se justifica la investigación y se presentan algunas investigaciones sobre la variable que constituyen antecedentes.

Capítulo 2: allí se exponen los fundamentos teóricos que guían la investigación, dentro del marco conceptual de referencia que es el de la EpC, como son los elementos y las cualidades y el modo como se relacionan con esta investigación.

Capítulo 3: contiene la descripción detallada de la metodología que se utilizó en el estudio, el tipo de investigación, el enfoque, el método, la población intervenida y los participantes, así como la descripción de técnicas e instrumentos utilizados en el proceso de recolección y el análisis de la información.

Capítulo 4: en este capítulo se presenta un análisis cualitativo de la información obtenida a la luz de la rúbrica de desempeños de comprensión, diseñada de acuerdo con los postulados de la EpC. Se describe el proceso de comprensión de los estudiantes intervenidos por medio del estudio de caso, y se sitúan en un nivel de comprensión según sus resultados con relación a los descriptores de nivel.

Capítulo 5: reúne las conclusiones a las que se llegó con los resultados del estudio, a propósito de la pregunta de investigación y del cumplimiento de los objetivos. Además, se plantean algunas consideraciones para la educación matemática y se proponen algunas posibles líneas de investigación.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas que respaldan el proceso de investigación.

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo se presenta una descripción de la importancia que tiene la algebrización de la matemática escolar, no solo en el nivel de secundaria, sino en el de primaria, y que teóricos como Vergel (2014) han definido como “álgebra temprana”. El álgebra se refiere al manejo simbólico, orientado a la resolución de ecuaciones y al estudio de polinomios, mientras el álgebra temprana se entiende como aquella algebrización necesaria desde los primeros grados de la básica.

Dicho lo anterior, y desde la práctica de aula en el nivel de primaria, es evidente que el currículo de las matemáticas tiene un cambio sustancial al finalizar el grado quinto. Investigadores como Palarea (1999) han dejado de manifiesto la situación como una ruptura entre el lenguaje aritmético y el lenguaje algebraico, en la que se observan “errores del álgebra que están en la aritmética y otros debidos a las características propias del lenguaje algebraico, como son los que proceden del mal uso del signo ‘=’ y de la sustitución formal” (p. 12), por lo que es clave evaluar la importancia del currículo de la matemática en la escuela, e incorporar a él el álgebra como un proceso ligado a los procedimientos aritméticos.

1.1 Antecedentes

Los antecedentes están descritos de acuerdo con el proceso de caracterización de la comprensión del concepto de variable como incógnita, asumido en este caso como objeto de estudio en el currículo de las matemáticas. Dichos antecedentes tienen en cuenta la importancia del pensamiento variacional y la incidencia de este en la actividad matemática del país.

Igualmente, estos abordan el componente histórico del objeto de estudio; la manera como el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos se han planteado desde las distintas políticas dadas por el MEN, como lo son los referentes nacionales de calidad y la legislación educativa; el rastreo de otras investigaciones en las que la variable en estudio constituye un concepto importante en el desarrollo del álgebra escolar; el aporte del marco de la EpC en otras investigaciones de tipo académico, y otras teorías de la comprensión.

Conviene distinguir que el pensamiento variacional y sus sistemas algebraicos y analíticos se

han asumido como uno de los pensamientos sobre los cuales se fundamenta la actividad matemática en Colombia. De acuerdo con el MEN (1998), estos se vinculan con la interrelación entre conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, lo que a su vez permite la identificación de núcleos conceptuales matemáticos como la divisibilidad, los modelos de función, las magnitudes, el álgebra en su sentido simbólico, los modelos matemáticos de tipos de variación, y el significado de variable como concepto clave de este pensamiento, entre otros elementos de la variación. Un manejo adecuado del pensamiento variacional y de sus sistemas algebraicos en el currículo matemático se centraría en evidenciar que el álgebra es un sistema de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio, por lo tanto, hace posible el diseño de situaciones de aprendizaje.

1.1.1 Componente histórico de la Variable cómo incógnita.

La historia de la variable está intrínsecamente ligada a la del álgebra, esta última conforma el contexto que permite exponer el concepto objeto de estudio de esta investigación: la variable como incógnita. En esta reseña histórica se tienen en cuenta las tres etapas enunciadas por Puig (1998) sobre el proceso de formalización del álgebra o la línea de avance, estas son: álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica.

- Álgebra retórica: etapa en la que los problemas y sus soluciones se describían a través del lenguaje natural, sin incluir ningún símbolo, ni siquiera de las operaciones. Es el álgebra de la edad clásica. Fue manejada desde los tiempos de los egipcios y babilonios hasta la obra de Diofanto (siglo III), en la que no existían palabras abreviadas ni símbolos especiales para representar la incógnita o valor específico de una cantidad desconocida; por ejemplo, para realizar la operación $5 \times 8 + 7 = 47$ se tendría que, desde el lenguaje natural, hacer referencia a lo siguiente: cinco por ocho, más siete, es igual a cuarenta y siete. Con base en el lenguaje natural, dicha operación sería sencilla de realizar, pero cuando esas expresiones empiezan a involucrar diferentes incógnitas, coeficientes y signos, implican un proceso más difícil de resolver.
- Álgebra sincopada: esta etapa se caracterizó por el uso de abreviaciones para las

incógnitas, aunque los cálculos se describían en lenguaje natural. Se considera que esta fase va desde la aritmética de Diofanto (siglo III) hasta Vieta (siglo XVI), este último considerado por algunos el padre del álgebra, por haber dado apertura a la fase simbólica. Era común, entonces, la utilización de algunos términos técnicos, pero su uso no era universal, un ejemplo de ello es que árabes y chinos continuaban efectuando sus cálculos de una forma diferente.

- **Álgebra simbólica:** el álgebra simbólica se originó gracias al uso novedoso que Francisco Vieta, en el siglo XVI, le dio a los literales para las incógnitas y los parámetros de las ecuaciones, con lo que propició un cambio en la manera de expresar cantidades desconocidas, de modo que se lograron transformar las soluciones generales a expresiones, y se empezó a usar el álgebra para demostrar las reglas que gobiernan las relaciones numéricas. En conclusión, en esta etapa se dio a conocer la diferencia entre la aritmética y el álgebra; se consideró que la aritmética trataba de números, mientras que el álgebra utilizaba letras.

En ese proceso de formalización del álgebra, René Descartes (1596-1650) tomó el análisis de Francisco Vieta para desarrollar su geometría analítica, y logró independizar el cálculo algebraico de la geometría. Además, utilizó, por primera vez, toda la notación actual, salvo la convención de considerar constantes a las primeras letras del alfabeto y variables a las últimas (Puig, 1998).

1.1.2 Concepto de variable, interpretaciones o caracterizaciones.

En correspondencia con la evolución del álgebra, se visibiliza el concepto de variable como término clave en el desarrollo del pensamiento variacional y de los sistemas algebraicos y analíticos. Este recorrido histórico tiene en cuenta a varios autores que hicieron alusión a algunas interpretaciones o caracterizaciones de las letras y de la variable.

Para empezar, Küchemann (1980) se centró en analizar las diferentes formas que tienen los estudiantes de interpretar los símbolos literales y de estudiar el significado asociado con la letra. Con ese fin, utilizó un cuestionario donde les pedía manipular expresiones algebraicas, y así

logró identificar seis formas de explicar los símbolos literales; estas interpretaciones se listan a continuación:

- Letra evaluada: a la letra se le asigna un valor numérico para evitar operar con una incógnita.
- Letra ignorada o no utilizada: la letra es ignorada o su existencia es reconocida, pero no se le atribuye ningún significado.
- Letra como objeto: se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como un objeto en sí. En este caso, se reduce el significado abstracto de la letra.
- Letra como incógnita específica: la letra representa un número particular, aunque desconocido, y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.
- Letra como número generalizado: se considera que la letra representa o es capaz de asumir diferentes valores.
- Letra como variable: se asume que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistémica entre dos conjuntos de valores de este tipo. (Morales y Díaz, 2003, p. 11)

Según Küchemann como se citó en García, Segovia y Lupiáñez (2014), esta clasificación de la interpretación de los símbolos literales es el reflejo de un grado de dificultad creciente, por lo que afirmó que un estudiante habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando sea capaz de trabajar con la “letra como variable” (p. 1550).

Otros autores como Trigueros et al. (1996) presentaron tres interpretaciones de la variable, entre ellas, aquella que la asume como incógnita. En dicho estudio expresaron que para lograr la comprensión de este concepto es fundamental abordarlo a partir de la simbolización, de la manipulación de variables que aparecen en la expresión y de la interpretación de esas variables involucradas. A continuación, se muestran las interpretaciones de la variable y las capacidades que se requieren para el manejo de estas.

Variable como incógnita: en este caso, en la expresión matemática se reconoce algo

desconocido que puede tomar un valor específico, y que mediante las operaciones aritméticas o algebraicas puede ser descubierto, de modo que la ecuación podría ser verdadera. Un manejo adecuado de la variable como incógnita, según Trigueros et al. (1996), implica las siguientes capacidades:

- Interpretar la variable como un número cuyo valor o valores específicos se pueden determinar a partir de las restricciones de un problema dado;
- manipular los elementos que componen una ecuación, parámetros e incógnita, independientemente de la operación o las operaciones involucradas;
- identificar y simbolizar la incógnita en problemas específicos, susceptibles a representarse mediante una ecuación. (p. 353)

Variable como número general: el estudiante reconoce patrones y reglas en secuencias numéricas donde se debe llegar a la simbolización de un método general, después de una simplificación y desarrollo de las expresiones algebraicas. Desde la perspectiva de Trigueros et al. (1996) el estudiante posee un manejo adecuado de la variable como número general cuando logra:

Interpretar la variable como representación de un número cualquiera en expresiones algebraicas tales como tautologías y expresiones abiertas; manipular la variable en ese tipo de expresiones, identificar y simbolizar el objeto general en situaciones particulares que pueden describirse en términos de una regla o método general. (p. 353)

Variable en relación funcional: en esta interpretación, el estudiante reconoce la correspondencia entre cantidades y determina los valores de las variables dependientes e independientes, expresando la relación funcional de forma tabular, gráfica o analítica. Para Trigueros et al., (1996), un manejo competente de este uso de la variable en una relación funcional implica que el estudiante pueda:

Reconocer las relaciones funcionales (en su representación analítica, gráfica o tabular) e interpretar las variables involucradas en forma tanto estática cuanto dinámica, dependiendo de la naturaleza del problema; manipular las variables para determinar los

valores o intervalos de variación que cada una de ellas puede tomar en términos de la otra y simbolizar situaciones que involucran una relación funcional. (p. 353)

Con relación a las tres interpretaciones descritas de la variable, y de acuerdo con lo afirmado por Trigueros et al. (1996), es importante precisar que los estudiantes deben estar en capacidad de interpretar y trabajar con números generales, con constantes, con incógnitas, con variables en una relación funcional, y de pasar de una a otra interpretación, incluso cuando diferentes caracterizaciones de la variable cuenten con igual representación simbólica.

Otros referentes para la investigación del objeto de estudio son Godino y Font (2003), quienes definieron la variable como “un símbolo (habitualmente una letra) que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean números u otros objetos” (p. 784). Estos autores describieron cuatro usos principales de las variables en matemáticas:

- “Las variables como incógnitas: la incógnita interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido. Al hallar el valor de esta, se hace verdadera la ecuación” (Godino y Font, 2003, p. 786).
- “Las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente: la relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra” (Godino y Font, 2003, p. 786).
- “Las variables como indeterminadas o expresión de patrones generales: la variable se usa en enunciados que son verdaderos para todos los números” (Godino y Font, 2003, p. 786).
- “Las variables como constantes o parámetros: se emplea una letra para representar una cantidad constante” (Godino y Font, 2003, p. 786).

Respecto al papel de los símbolos en estas variables, Wagner como se citó en Morales y Díaz (2003) expresó lo siguiente:

Los símbolos para las variables matemáticas adquieren un significado cuando aparecen en un contexto y representan algún referente: el símbolo y su referente determinan el papel semántico de una variable; el símbolo y su contexto determinan el papel sintáctico de la variable. (p. 112)

Aunque los autores anteriores no conceptualizaron el referente y el contexto, es preciso destacar que “el contexto y el referente determinan el papel matemático de la variable” (Morales y Díaz, 2003, p. 112), por lo que podría relacionarse el referente con el uso y el contexto con la situación de aprendizaje. Por lo anterior, y al analizar los usos, caracterizaciones o conceptos de la variable aportados por Küchemann, Godino y Font, y Trigueros, entre otros, se evidencia que el concepto de la variable es multifacético y depende de tres componentes: el símbolo, el referente y el contexto, desde el papel semántico, sintáctico y matemático, los cuales al combinarse contribuyen significativamente a la interpretación que se le puede dar a la variable. Sin embargo, dicha evidencia podría evocar dificultad para presentarle un concepto claro al estudiante, puesto que este varía dependiendo del contexto.

Desde la perspectiva del MEN (1998), el contexto “cumple un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas” (p. 24), que incorpora al proceso los ambientes que rodean el estudiante, y pretende, en todo caso, el desarrollo de una actitud crítica y flexible frente al uso de las matemáticas en situaciones de su mundo real. En el componente curricular se describe más a profundidad el contexto como un factor importante para organizar el currículo.

Finalmente, las interpretaciones realizadas por Küchemann son de carácter natural, en la medida en que se basan en las ideas y las representaciones que los estudiantes le dan a la letra, en términos de comprensión y desempeño; razón por la cual hay usos muy similares o no tan claros que pueden conducir a la ambigüedad si no se recurre a lo planteado y ejemplificado por el autor. A la vez, en lo planteado por Godino y Font (2003) con el Enfoque Ontosemiótico (EOS), se reconoce una clasificación a partir de la notación formal, y más desde el uso de la letra que de la variable, y se describe que el principal interés del uso de letras (variables) en matemáticas es que permiten expresar relaciones generales entre los objetos, de una manera eficaz.

Aunque en este estudio se tienen en cuenta las tres interpretaciones de variable enunciadas por Trigueros y otros autores, se decidió abordar únicamente el uso de la variable como incógnita, puesto que los referentes nacionales de calidad, consultados para el nivel de Básica Primaria, solo estudian el concepto de incógnita, de número oculto, de variación y de proporcionalidad.

1.1.3 Consideraciones sobre la comprensión y la pertinencia del concepto matemático abordado en la academia, la vida y las ciencias.

Para definir la pertinencia y argumentar la utilidad del objeto de estudio (la comprensión de un concepto matemático, que a su vez es la variable como incógnita), se recurre a la interpretación del tema desde diferentes bases teóricas y, en especial, desde el marco conceptual en el que se sustenta la propuesta de investigación: la EpC. Este modelo es un marco que ofrece un lineamiento conceptual sobre la comprensión, y brinda herramientas para la planificación y diseño de las prácticas de aula, cuyo fin es promover la comprensión desde el abordaje de un concepto. En palabras de Rendón (2009), “la Enseñanza para la Comprensión [...] amplía la visión del currículo, reconociendo múltiples relaciones de este con el entorno para contextualizar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos” (p. 51). Los argumentos antes expresados justifican la elección de dicho marco para la realización de este estudio.

A continuación, se hace una aproximación al concepto de comprensión desde la EpC, dado que en el numeral 2.2 se define la comprensión en el marco de esta investigación como el uso de un aprendizaje en diferentes contextos, por lo que se presenta como el proceso inherente no solo a la enseñanza, sino al desarrollo de temas de educación, tanto en el interior del aula como fuera de ella. En consonancia con lo anterior, Villa (2011) propuso algunos marcos conceptuales y algunas consideraciones con respecto a la comprensión que se sintetizan en la Tabla 1.

Tabla 1. *Marcos conceptuales y algunas consideraciones con relación a la comprensión*

Autor o compilador	Año de referencia	Marco teórico referido a la comprensión	Consideración sobre comprensión
Meel	2003	La comprensión como la superación de obstáculos cognitivos.	Los obstáculos cognitivos ayudan a identificar las dificultades que muestran los estudiantes, debido a que se relacionan con el proceso de aprendizaje, y posterior a ello, con la construcción de estrategias en ese mismo proceso.
Sierpinska (1990)	en Villa (2011)	La comprensión como un suceso relacionado con el proceso de interpretación.	La comprensión centra su atención en las ideologías, predisposiciones, preconcepciones y esquemas de pensamiento no percibidos por el estudiante.

Villa	2011	La comprensión como generadora de imágenes de un concepto y de su definición.	La comprensión se evidencia cuando el estudiante elabora la imagen de lo que es capaz de conceptualizar, puesto que la acepción formal del concepto es equivalente a la imagen del concepto construida por él.
Villa	2011	La comprensión como elemento integrador de los procesos de representación.	La comprensión está ligada con la construcción de significado, con la evolución en la construcción, y con el uso de representaciones y simbolizaciones.
Meel	2003	Dualidad entre las concepciones estructural y operacional.	Este autor consideró que la comprensión llega más allá de una capacidad para resolver problemas o de probar teoremas; según esta base teórica, es menester argumentar que la comprensión se constituye a partir de la construcción de vínculos entre los símbolos y no desde la réplica de fórmulas o postulados que requieren ser comprobados.
Asiala (1996), retomado por Meel (2003) y posteriormente por Villa.	(2011)	APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema)	Este autor reconoció que la comprensión de un elemento matemático se da a través de “manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos por formar acciones” (p. 221).

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con las consideraciones expuestas sobre el concepto en cuestión, y con la definición de la pertinencia del objeto de estudio, se entiende que el concepto de variable es primordial no solo para el aprendizaje de las matemáticas, sino para la enseñanza del álgebra, puesto que es a partir de la comprensión de este concepto que el estudiante empieza a entender los fenómenos de variación presentes en su cotidianidad.

1.1.4 Investigaciones sobre la comprensión, el objeto de estudio y el marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión.

Una de las investigaciones que se ocupa de las dificultades de la comprensión se denomina *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas* (Duval, 2016); esta constituye una versión más desarrollada del modelo cognitivo de la actividad

y el pensamiento matemático, presentado inicialmente en el 2002, cuya tesis se apoya en que “para determinar el origen de la incomprensión de los estudiantes, primero se deben establecer las condiciones cognitivas que hacen posible la comprensión” (p. 62).

Desde el marco de la EpC también se han llevado a cabo varias investigaciones. A nivel internacional, *La Enseñanza para la Comprensión como marco conceptual para el mejoramiento de la calidad educativa: La estrategia de la evaluación integrativa*, escrita por Clavel y Torres (2010), propició la construcción metodológica y la innovación en la planificación y construcción de instrumentos de evaluación. A la vez, en el artículo *Comprensión del aprendizaje en el aula de ciencias básicas: reflexiones desde estilos y enfoques cognoscitivos* (Ocampo, 2011), se determinó la efectividad del modelo de la EpC en la formación profesional.

Ahora bien, desde la visión de Hurtado (2015), manifestada en su artículo *Tendencias investigativas sobre el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión (EPC) en Hispanoamérica*, Colombia “es uno de los países que está implementando en el nivel de básica y media pública el enfoque de la EpC” (p. 5). Este autor nombró algunos de las investigaciones que aluden a este tema: Barrantes (2004); Ocampo y Molina (2010); Vélez, Segovia, López y Castro (2010). Entre ellas se destaca la tesis *El marco de la Enseñanza para la Comprensión aplicado al aprendizaje del concepto de campo eléctrico en estudiantes de ingeniería de sistemas* (Mejía, 2011) de la Universidad Nacional de Colombia, la cual se concentró en analizar cómo los estudiantes alcanzan distintos niveles de comprensión respecto al concepto objeto de estudio, y en determinar los resultados que se pueden establecer en la comprensión del concepto de campo eléctrico en estudiantes de tercer semestre de ingeniería de sistemas de la Universidad de los Llanos.

De parte del grupo de investigación Edumath-Eafit, en *La comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado*, escrito por Acevedo (2011), se caracterizó la comprensión de dicho concepto a través de cuatro niveles propuestos por el marco. En este caso, a partir de la implementación de una guía curricular, los estudiantes superaron dificultades vinculadas con la resolución de problemas probabilísticos. Otra de las investigaciones importantes por destacar es la de González (2014), quien presentó la tesis titulada *La comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el*

contexto de la agricultura del café, en la que planteó la elaboración e implementación de una guía curricular con la cual se buscaba que los estudiantes del grado quinto alcanzaran niveles cada vez más altos frente al manejo de los conceptos en cuestión. Por último, Rivera (2014) estudió los *Procesos de razonamiento y de comprensión con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa*, y se enfocó en describirlos a través de las explicaciones, con el fin de determinar las dimensiones y los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes.

En cuanto a la variable, esta ha sido objeto de investigación en el ámbito internacional y nacional, algunas investigaciones que la estudiaron se mencionan en los siguientes párrafos. *Los niños y las variables* de Ursini (1994) es un artículo en el que se revisan los resultados de algunas investigaciones que estudian las dificultades de los alumnos que se inician en el estudio del álgebra, con los diferentes usos de la variable.

En segundo lugar, se encuentra *Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV* (Tres usos de la Variable) (Juárez, 2011), y aunque no aborda el nivel de primaria, este estudio puede considerarse, debido a que muestra la manera como los docentes del área asumen la conceptualización de la variable; este hecho se relaciona con la realidad del centro educativo en el que se propone desarrollar la investigación, dado que los docentes de primaria, en su mayoría, no son formados en matemáticas. En tercer lugar, está la investigación titulada *Propuesta para la enseñanza en el aula del concepto de variable algebraica a través de situaciones problema* (Valencia, 2015), en la que se propuso el diseño de un proyecto de aula encaminado a la comprensión del concepto de variable algebraica, a través de situaciones problema en distintos contextos.

De las anteriores investigaciones, la de Hurtado (2015) abre la posibilidad de continuar indagando, desde lo conceptual lo metodológico y lo contextual, en situaciones que guardan una estrecha relación con el marco conceptual de EpC, con el uso de la variable en diferentes situaciones y con el tema de la comprensión, a partir de la perspectiva matemática.

1.1.5 Componente curricular y legal.

El abordaje del álgebra elemental es una parte fundamental del currículo de las matemáticas de la educación básica, una etapa en la que pueden surgir en los estudiantes diversas dificultades a causa de contenidos básicos como las variables, las expresiones algebraicas, el cálculo con expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones, entre otros. Dichos contenidos se asocian con unos métodos y reglas algebraicas específicas que, en parte, difieren notablemente de las reglas y métodos aritméticos aprendidos y utilizados por los estudiantes desde la educación inicial.

En consonancia con ello, Filloy y Rojano (1985) como se citó en Benalcázar (2012) plantearon lo siguiente:

Los primeros contenidos matemáticos elementales responden a la interacción que los niños tienen con el mundo exterior, es así como contenidos como partición, cantidad, reparto, ecuaciones e inecuaciones aritméticas como representación de las relaciones entre datos numéricos y muchas otras, se potencian en el estudiante a la hora de tener contacto con los objetos materiales. (p. 37)

De allí que el currículo deba estar diseñado con propuestas que van de lo concreto a lo abstracto, de lo simple a lo complejo, para permitirles a los estudiantes, en todo momento, tener un acercamiento a los objetos materiales, lo que les ayudará a solucionar problemas a los cuales se enfrenten día a día.

Se hace necesario comprender que las matemáticas en la escuela tienen un carácter procedimental, este desarrolla habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida en el aula y fuera de ella, con base en las características de su territorio, lo que hace que el currículo sea pertinente. Según Font (2006), en “situaciones de la vida real en las que las personas se sientan implicadas, se ha observado que estas utilizan matemáticas ‘propias’ que pueden ser muy diferentes a las que estudiaron en la escuela” (p. 2). Así, si el estudiante está involucrado en las situaciones presentadas, podrá recurrir a su formación matemática para la resolución de estas, y hará uso no solo del conocimiento, sino de su habilidad para solucionar problemas.

Cuando se aborda el currículo escolar es obligatorio incluir algunos referentes nacionales de calidad expedidos por el MEN, entre ellos están: los lineamientos curriculares, los EBCM, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y las mallas de aprendizaje. A continuación, se presenta una radiografía de lo que involucra cada uno de esos documentos rectores.

Los lineamientos curriculares del área de matemáticas (MEN, 1998) son las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares utilizadas para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias definidas por la Ley 115 de 1994 o Ley General de Educación. Por su parte, los EBCM (MEN, 2006) reflejan los ejes temáticos del plan de área y lo que todo escolar debe saber. Los DBA (MEN, 2015), en cambio, expresan los conocimientos, habilidades y actitudes que se deben desarrollar, y están definidos en el Proyecto Educativo Institucional y en las mallas de aprendizaje de Ministerio de Educación [MEN] (2017) como complemento a los DBA, para la organización curricular institucional y la relación conceptual de los pensamientos, los procesos generales, los conocimientos básicos, el contexto, los estándares y los aprendizajes.

De acuerdo con ello, el plan de área de matemáticas debe involucrar los siguientes elementos fundamentales para el diseño, ejecución y seguimiento del currículo:

- Procesos generales: estos guardan una estrecha relación con el aprendizaje, a partir del razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la modelación, la comunicación y la formulación; y la comparación y la ejercitación de procedimientos, en estos últimos se enfoca la investigación y la unidad curricular los asume como la oportunidad para analizar de qué modo los estudiantes comprenden el concepto de variable como incógnita.
- Conocimientos básicos: los conocimientos básicos se asocian con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, sistemas propios de las matemáticas, pensamiento y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Desde los conocimientos básicos descritos en los lineamientos curriculares y tenidos en

cuenta en los otros referentes de calidad, la presente investigación se ubica en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Dicha elección surge a partir de la necesidad de registrar ordenadamente la variación, la construcción de expresiones algebraicas y de situaciones que de manera clara evidencien la variación y, por consiguiente, el manejo correcto del concepto de variable como incógnita (Carranza y Guerrero, 2016).

- El contexto: hace referencia a los ambientes que rodean al hacer de ese contexto un escenario propicio para los estudiantes, y que le dan sentido a las matemáticas que estos aprenden. Será necesario entonces, como lo estableció el MEN (1998), “aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza” (p. 19); ese aprovechamiento debe estar a cargo del docente, quien puede estudiantes aprendan y adquieran los conocimientos descritos en el currículo escolar.

En la Tabla 2 se presenta cómo lo curricular (lineamientos curriculares, EBCM, los DBA y las mallas de aprendizaje) y este trabajo de investigación se articulan, debido a la organización sistémica de los contenidos inmersos en el currículo, los cuales se evidencian según el plan de área de matemáticas para el grado quinto del Centro Educativo Rural Casa Grande.

Tabla 2. *Malla curricular de matemáticas grado 5 contenida en el plan de Estudios del Centro Educativo Rural Casa Grande*

Periodo 1		Los números también cumplen reglas		
Desempeño general: resuelvo situaciones problema en contextos aritméticos, métricos, geométricos y de proporcionalidad, utilizando las propiedades de los números naturales, la teoría de números y la regla de tres simple directa e inversa.				
Estándares Básicos de Competencia	Desempeños	Guía	Conceptos procedimientos	Recursos
Resuelve y formula problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y operaciones. Predice patrones de variación en una secuencia numérica,	Calcula el m.c.m. (mínimo común múltiplo) y el m.c.d. (máximo común divisor) para resolver situaciones problema de la vida diaria.	Guía 1 Con el m.c.m. y m.c.d. resuelvo problemas.	Múltiplos y divisores de números naturales. Descomposición en factores primos. Calculo el m.c.m. y el m.c.d.	Tarjeta con números primos. Regla, tijeras.

geométrica o gráfica.

Usa diversas estrategias de cálculo y estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Identifica la potenciación y la radicación en contextos matemáticos.

Soluciona situaciones problema en contextos métricos utilizando la potenciación y sus propiedades.

Guía 2
Una nueva operación para solucionar problemas.

Potenciación
Área y volumen de objetos.

Regla.
Libra de arroz.
Juego de ajedrez.

Identifica, representa y utiliza ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.

Comprende la relación existente entre a potenciación y la radicación, y la utilizo para solucionar situaciones problema en contextos métricos.

Guía 3
¿Para qué nos sirve la radicación?

Radicación. Dimensiones de figuras. Área y volumen.

27 cubos de igual tamaño, tablero de ajedrez, papel cuadriculado, tijeras y regletas de Cuisenaire.

Compara y clasifica figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulo, vértices) y características.

Utiliza instrumentos de medición para clasificar triángulos, según la medida de sus ángulos y lados.

Guía 4
Ángulos y triángulos en los objetos.

Medida de ángulos.
Clasificación de ángulos a partir de su medida.
Clasificación de triángulos según la medida de sus ángulos.

Trasportador, regla, cartulina, pegante, tijeras, reloj y tangram de colores.

Criterios de desempeño:

- ✓ Resuelve situaciones problema calculando m.c.m. y m.c.d. de números naturales.
- ✓ Efectúa operaciones de potencias y radicales para resolver situaciones problema en contextos métricos.
- ✓ Utiliza de manera apropiada los instrumentos para tomar medidas de longitud y ángulos.

Periodo 2

Muchos cálculos podemos hacer con los números enteros y las fracciones

Desempeño general: comprende y aplica el concepto de número entero en operaciones como logaritmicación, potenciación y radicación.

Estándares Básicos de Competencia	Desempeños	Guía	Conceptos procedimientos	Recursos
Compara y clasifica objetos tridimensionales de acuerdo con sus componentes (caras, lados) y propiedades.	Utiliza la relación existente entre la potenciación y la radicación para calcular logaritmos simples.	Guía 5 ¿Cómo se relacionan la potenciación, la radicación y la	Potenciación, radicación y logaritmicación. Área, volumen y dimensiones de objetos.	Papel cuadriculado, cubos de colores o dados, tijeras y regla.

<p>Reconoce el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, masa, peso, duración, rapidez y temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.</p> <p>Predice patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.</p>	<p>Efectúa correctamente el cálculo de potencias, radicales y logaritmos para solucionar situaciones en distintos contextos.</p>	<p>Guía 6 Apliquemos la potenciación, la radicación y la logaritmación.</p>	<p>Aplicación de la potenciación, radicación o logaritmación. Solución de problemas.</p>	<p>Cartulina, tijeras y regla.</p>
<p>Resuelve y formula problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación, comparación e igualación.</p>	<p>Identifica el conjunto de los números enteros como una extensión de los números naturales y los utiliza para representar situaciones de la vida real.</p>	<p>Guía 7 Enteros positivos a la derecha y enteros negativos a la izquierda.</p>	<p>Números enteros. Representación gráfica de los enteros.</p>	<p>Cinta métrica, tiza y regla.</p>
<p>Resuelve y formula problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.</p> <p>Predice patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.</p>	<p>Resuelve situaciones de la vida cotidiana utilizando la suma y la resta de los números enteros.</p>	<p>Guía 8 ¿Para qué sirven los números enteros?</p>	<p>Operación con números enteros. Representación de los números enteros en la recta numérica. Aplicaciones de los números enteros.</p>	<p>Regla y lápiz.</p>

Interpreta las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte-todo, cociente, razones y proporciones.	Utiliza el concepto de fracción para hacer representaciones geométricas en contextos continuos y discretos.	Guía 9 ¿Cómo fraccionar?	Suma y resta de fracciones heterogéneas. Representación de fracciones en la recta numérica.	Regletas de Cuisenaire y regla.
Justifica el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.	Soluciona y plantea situaciones problema en las que debe efectuar operaciones con fracciones.	Guía 10 Realicemos operaciones utilizando fracciones	Situaciones multiplicativas con fracciones. Solución de problemas.	Hojas cuadrículadas.

Diferencia y ordena, en objetos, propiedades o atributos que se pueden medir (longitudes; distancias; áreas de superficies; volúmenes de cuerpos sólidos; volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de sólidos; duración de eventos o procesos de amplitud de ángulos).

Criterios de desempeño:

- ✓ Efectúa cálculos y realiza operaciones utilizando la potenciación, la radicación y logaritmicación.
- ✓ Utiliza los números fraccionarios para representar situaciones de cantidades en la vida diaria.
- ✓ Efectúa operaciones con números fraccionarios para resolver situaciones problema.

Periodo 3 Utilicemos adecuadamente los sistemas de medida

Desempeño general: utiliza los números decimales para representar situaciones cotidianas y solucionar problemas en contextos métricos.

Estándares Básicos de Competencia	Desempeños	Guía	Conceptos procedimientos	Recursos
Usa diversas estrategias de cálculo y estimación para resolver situaciones aditivas y multiplicativas.	Utiliza la representación de los números mixtos para representar cantidades no enteras mayores que la	Guía 11 Propias e impropias son las fracciones	Números mixtos. Fracciones propias e impropias.	Regla

	unidad, y resuelve situaciones problema con ellas.			
Utiliza la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciona estas dos notaciones con la de porcentaje.	Establece relaciones de equivalencia entre las fracciones y su correspondiente representación decimal.	Guía 12 Las fracciones y los números decimales.	Números decimales. Clasificación. Transformación de decimal a fracción y de fracción a decimal.	Regla.
Justifica relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos.	Utiliza modelos matemáticos para calcular el área y el perímetro de diferentes clases de polígonos.	Guía 13 Calculemos el área y perímetro de diferentes figuras.	Medidas de longitud y superficie. Conversión de unidades. Cálculo de perímetros y áreas. Clasificación de polígonos.	Cinta métrica, regla, papel o cartulina.
Identifica en el contexto de una situación la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.	Efectúa conversiones entre medidas de volumen y capacidad.	Guía 14 Determinemos el peso de los cuerpos.	Medidas de volumen, de peso, múltiplos, submúltiplos y sus relaciones.	Recipiente cubico de 1 cm, caja pequeña, arena, agua, botella, embudo, báscula.
Utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.	Efectúa conversión de unidades de peso y volumen para resolver problemas cotidianos.	Guía 15 Encontremos la capacidad de los objetos.	Conversión de medidas de volumen y capacidad.	Jeringa de 5 cm ³ , vaso, botella, jarra, regla, un recipiente con agua y embudo.
Construye y descompone figuras y sólidos a partir de condiciones dadas. Construye objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puede realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.	Construye sólidos a partir de sus representaciones planas y reconoce sus principales características.	Guía 16 Reconozcamos las características de los sólidos.	Características de los sólidos. Representación plana de sólidos.	Cubo de colores, dados o bloques lógicos, pitillos, plastilina, octavos de cartulina, tijeras, tubos, borradores, cajas, lápices, dados, tiza y monedas.

Criterios de desempeño:

- ✓ Comprende el significado de número mixto y realiza conversiones a fracción y viceversa.
- ✓ Calcula la representación decimal de una fracción.
- ✓ Calcula el área y el perímetro de polígonos utilizando modelos matemáticos.
- ✓ Reconoce las unidades de medida de peso y de volumen.
- ✓ Reconoce las características de los sólidos geométricos.

Periodo 4 Apliquemos nuestros conocimientos a la resolución de problemas

Desempeño general: utilizo los conocimientos numéricos para resolver situaciones problema en contextos métricos, geométricos y de variación.

Estándares Básicos de Competencia	Desempeños	Guía	Conceptos procedimientos	Recursos
<p>Identifica y justifica relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.</p> <p>Representa datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas y diagramas circulares).</p>	<p>Establece relaciones de congruencia y semejanza entre figuras planas y objetos del entorno.</p>	<p>Guía 17 ¡Utilicemos nuestro ingenio en la creación de figuras!</p>	<p>Figuras bidimensionales. Ejes de simetría.</p> <p>Figuras tridimensionales.</p> <p>Semejanza y congruencia.</p>	<p>Espejo, papel, tijeras, revistas o periódicos, hojas de papel y diferentes sólidos.</p>
<p>Compara diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.</p> <p>Usa e interpreta la media (o promedio) y la mediana, y compara lo que indican.</p> <p>Interpreta información presentada en tablas y gráficas (pictogramas, gráfico de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).</p> <p>Describe la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos, y la compara con el modo en que se distribuyen</p>	<p>Determina las características generales de un conjunto de datos, a partir del cálculo de la media, moda y mediana.</p>	<p>Guía 18 Caractericemos datos.</p>	<p>Medidas de tendencia central: media, mediana y moda.</p> <p>Tablas de frecuencia.</p>	<p>Regla</p>

en otros conjuntos de datos.

Construye y descompone figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.

Utiliza procesos formales para calcular el volumen y el área superficial de sólidos y objetos de mi entorno.

Guía 19
¿Qué medidas tienen en común las figuras planas y los sólidos?

Área superficial de poliedros.
Volumen de sólidos.

Recipientes redondos, rectangulares y regla.

Resuelve y formula problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas.

Analiza y explica relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas.

Utiliza la regla de tres para resolver situaciones problema en las que intervienen magnitudes que tienen proporcionalidad directa o inversa.

Guía 20
Reglas que aumentan y reglas que disminuyen.

Razones y proporciones.
Correlación de magnitudes.
Regla de tres simple directa e inversa.

Regla.

Resuelve y formula problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.

Utiliza y justifica el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social y económica, y referentes a las ciencias, mediante el uso de rangos de variación.

Resuelve problemas en los que se relacionan razones y porcentajes utilizando la herramienta tecnológica como medio de verificación.

Guía 21
Apliquemos las proporciones

Relaciones entre números: razones proporciones y porcentajes.
Cálculos con herramientas tecnológicas.

Regletas de Cuisenaire, cinta métrica, báscula y calculadora.

<p>Construye igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.</p> <p>Representa y relaciona patrones numéricos con tablas y reglas de verdad.</p> <p>Analiza y explica relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas.</p>	<p>Usa la representación y la solución de ecuaciones como una estrategia para solucionar problemas.</p>	<p>Guía 22</p> <p>Calculemos el término desconocido.</p>	<p>Ecuaciones. Igualdades.</p>	<p>Regletas de Cuisenaire.</p>
<p>Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.</p>	<p>Utilizo los conceptos de proporcionalidad para comprender la representación a escala de objetos.</p>	<p>Guía 23</p> <p>Solucionemos problemas de proporción.</p>	<p>Razones, proporciones.</p> <p>Trasformación de figuras en el plano: ampliación y reducción.</p> <p>Escalas de medida.</p> <p>Porcentajes.</p>	<p>Regletas de Cuisenaire.</p>

Criterios de desempeño:

- ✓ Utiliza parámetros geométricos para establecer relaciones de congruencia y semejanza.
- ✓ Utiliza la regla de tres simple directa e inversa para resolver situaciones problemas de proporcionalidad.
- ✓ Determina las características generales de un grupo de datos, a partir del cálculo de las medidas de tendencia central.
- ✓ Realiza de manera correcta los procedimientos matemáticos necesarios para solucionar ecuaciones.

A continuación, se presenta el marco legal que reglamenta la actividad matemática en Colombia. En esta figura se da a conocer una relación curricular entre la matemática de la escuela y la reglamentación de la actividad matemática del país.

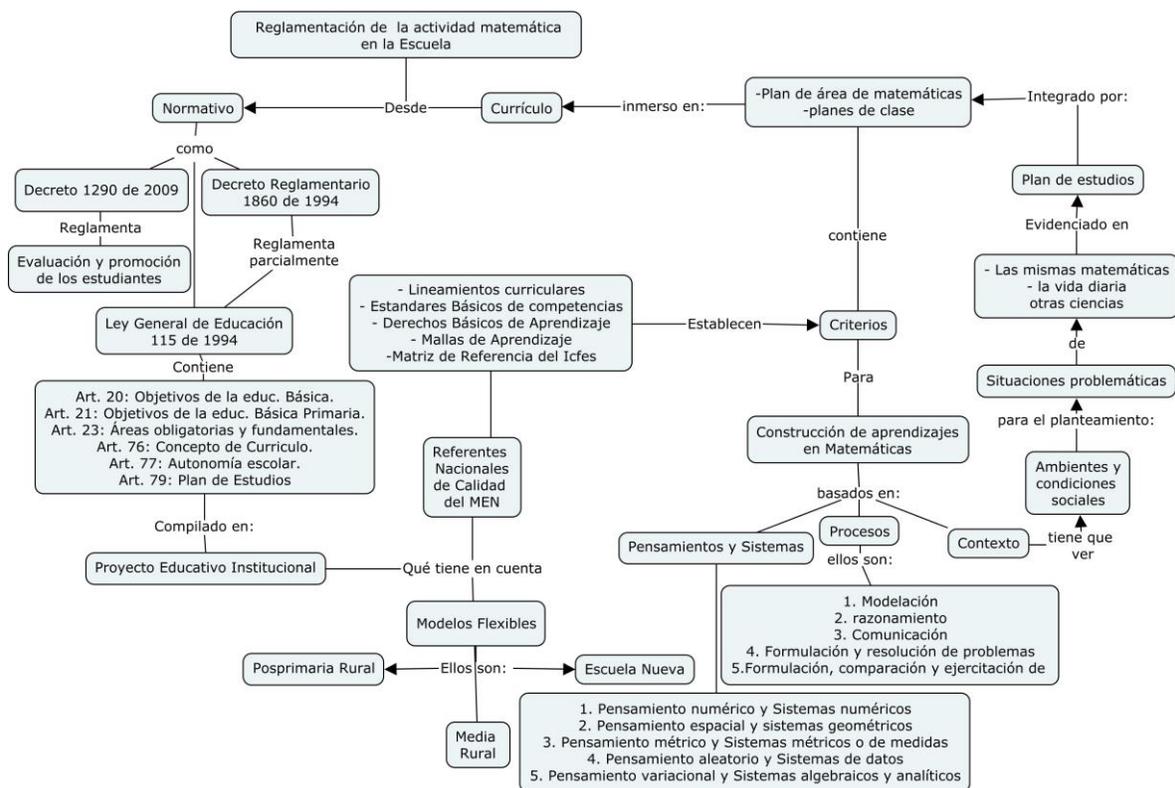


Figura 1. Relación legal y curricular de la matemática en la escuela

Fuente: elaboración propia

La realización del presente estudio se halla enmarcada en la Constitución Política de Colombia de 1991, la cual decreta, de acuerdo con el título II de los derechos, las garantías y los deberes, en el capítulo 1 sobre los derechos fundamentales, los siguientes asuntos:

“**Artículo 27.** El Estado garantiza las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra”.

Artículo 67. La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social: con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura.

La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia; y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente.

Ley General de Educación Ley 115 de 1994.

Artículo 5. Fines de la educación

De conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, la educación se desarrollará atendiendo a los siguientes fines:

[...] El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país.

La formación en la práctica del trabajo, mediante los conocimientos técnicos y habilidades, así como en la valoración del mismo como fundamento del desarrollo individual y social.

Artículo 21. Objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de primaria. Los cinco (de la educación básica que constituyen el ciclo de primaria, tendrán como objetivos 5) primeros grados específicos los siguientes:

- a) La formación de los valores fundamentales para la convivencia en una sociedad democrática, participativa y pluralista.
- b) El fomento del deseo de saber, de la iniciativa personal frente al conocimiento y frente a la realidad social, así como del espíritu crítico.
- c) El desarrollo de las habilidades comunicativas básicas para leer, comprender, escribir, escuchar, hablar y expresarse correctamente en lengua castellana y también en la lengua materna, en el caso de los grupos étnicos con tradición lingüística propia, así como el fomento de la afición por la lectura.
- d) El desarrollo de la capacidad para apreciar y utilizar la lengua como medio de expresión estética.
- e) El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos

conocimientos.

- f) La comprensión básica del medio físico, social y cultural en el nivel local, nacional y universal, de acuerdo con el desarrollo intelectual correspondiente a la edad.
- g) La asimilación de conceptos científicos en las áreas de conocimiento que sean objeto de estudio, de acuerdo con el desarrollo intelectual y la edad.
- h) La valoración de la higiene y la salud del propio cuerpo y la formación para la protección de la naturaleza y el ambiente.
- i) El conocimiento y ejercitación del propio cuerpo, mediante la práctica de la educación física, la recreación y los deportes adecuados a su edad y conducentes a un desarrollo físico y armónico.
- j) La formación para la participación y organización infantil y la utilización adecuada del tiempo libre.
- k) El desarrollo de valores civiles, éticos y morales, de organización social y de convivencia humana.
- l) La formación artística mediante la expresión corporal, la representación, la música, la plástica y la literatura.
- m) La adquisición de elementos de conversación y de lectura al menos en una lengua extranjera.
- n) La iniciación en el conocimiento de la Constitución Política, y
- ñ) La adquisición de habilidades para desempeñarse con autonomía en la sociedad.

Artículo 23. Áreas obligatorias y fundamentales. Para el logro de los objetivos de la educación básica se establecen áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento y de la formación que necesariamente se tendrán que ofrecer de acuerdo con el currículo y el Proyecto Educativo Institucional.

Los grupos de áreas obligatorias y fundamentales que comprenderán un mínimo del 80 % del plan de estudios, son los siguientes:

1. Ciencias naturales y educación ambiental.
2. Ciencias sociales, historia, geografía, constitución política y democracia.
3. Educación artística.
4. Educación ética y en valores humanos.
5. Educación física, recreación y deportes.
6. Educación religiosa.
7. Humanidades, lengua castellana e idiomas extranjeros.
8. Matemáticas.
9. Tecnología e informática.

Parágrafo. La educación religiosa se ofrecerá en todos los establecimientos educativos, observando la garantía constitucional según la cual, en los establecimientos del Estado ninguna persona podrá ser obligada a recibirla.

Decreto 1860 de 1994.

“Por el cual se reglamenta parcialmente la Ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales” (preámbulo).

Capítulo II. Organización de la educación formal.

Artículo 7:

[...] El proceso pedagógico de la educación básica comprende nueve grados que se deben organizar en forma continua y articulada que permita el desarrollo de actividades pedagógicas de formación integral, facilite la evaluación por logros y favorezca el avance y la permanencia del educando dentro del servicio educativo.

La educación básica constituye prerrequisito para ingresar a la educación media o acceder al servicio especial de educación.

Capítulo III. El Proyecto Educativo Institucional.

“Establece 14 aspectos mínimos para que todo establecimiento educativo elabore y ponga en

práctica con la participación de la comunidad educativa un PEI”.

Capítulo V. Orientaciones curriculares.

Este capítulo fue derogado, inicialmente, por el Decreto 0230 de 2002, y posterior a ello por el 1290 de 2009, sin embargo, es importante conocer los parámetros sobre la elaboración del currículo donde lo define como el producto de un conjunto de actividades organizadas y conducentes a la definición y actualización de los criterios, planes de estudio, programas, metodologías y procesos que contribuyan a la formación integral y a la identidad cultural nacional en los establecimientos educativos.

Capítulo VII. Evaluación y Promoción.

“Capítulo derogado por el 0230 de 2002 y como el capítulo anterior, por el 1290 de 2009”.

Decreto 1290 de 2009.

“Por el cual se reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media” (preámbulo).

Artículo 1. Evaluación de los estudiantes: La evaluación del aprendizaje de los estudiantes realizada en los establecimientos de educación básica y media, es el proceso permanente y objetivo para valorar el nivel de desempeño de los estudiantes.

Artículo 4. Definición del sistema institucional de evaluación [...]. El sistema institucional de evaluación de los estudiantes hace parte del Proyecto Educativo Institucional. Debe contar con el apoyo y la participación de cada uno de los estamentos del gobierno escolar, en un proceso de amplia reflexión, para ello es indispensable hacer una revisión exhaustiva del direccionamiento estratégico, las metas propuestas desde el PEI, el enfoque pedagógico que orienta la práctica educativa con el objeto de pensar el tema y los alcances de la evaluación.

Artículo 8. “Creación del Sistema Institucional de Evaluación de los estudiantes”.

Artículo 11. “Responsabilidades del establecimiento educativo”.

Documento 11 del MEN 2009 “Fundamentaciones y orientaciones para la

implementación del Decreto 1.290 de 2009”. En el cual se especifican las bases de la evaluación en las diferentes áreas y las opciones que tienen las instituciones de consensar aspectos propios según las necesidades y contextos particulares, centralizados en los consejos académicos. (p. 108)

1.1.6 Modelos flexibles: Escuela Nueva.

De acuerdo con la legalización y aprobación de estudios del Centro Educativo Rural Casa Grande, por parte de la Secretaría de Educación de Antioquia, mediante Resolución S227162 del 31 de diciembre de 2014, es el programa Escuela Nueva el modelo que debe implementarse en los procesos de enseñanza y aprendizaje, como respuesta metodológica a la prestación del servicio educativo. Este promueve procesos de aprendizaje activo, evaluación cualitativa y permanente, promoción flexible y fortalecimiento de la relación escuela-comunidad, a partir de cuatro componentes: factor curricular con estrategias adecuadas a las necesidades de los estudiantes; formación de maestro a maestro; comunitario, tendiente a fortalecer las relaciones de la escuela con el entorno; y el componente de gestión que permite una oportuna respuesta a las necesidades de los actores y de las escuelas.

Asimismo, el componente curricular tiene en cuenta el desarrollo de contenidos pertinentes, desde el punto de vista social, el aprendizaje colaborativo y el respeto por los ritmos de aprendizaje de los estudiantes. Los elementos de este componente, utilizados para orientar la adquisición de aprendizajes, son: las guías de aprendizaje que articulan los lineamientos curriculares y los EBCM, estos son textos diseñados para promover las estrategias del trabajo en equipo, la interacción, la evaluación motivadora, el uso de otros libros y de materiales educativos (François, 2003); los Centros de Recursos de Aprendizaje (CRA); y las adaptaciones que el docente realiza para cada una de las guías. Esas adaptaciones deben vincular los DBA (2015) y las mallas de aprendizaje del MEN (2017).

1.1.7 Otras teorías de la comprensión.

Son diversas las teorías sobre la comprensión que a partir de marcos y modelos han explicado el significado, la evolución, las acciones y las características conexas a la comprensión en matemática. De esa manera, se les ha posibilitado a los investigadores del área un modo de estructurar los análisis y las interpretaciones de la comprensión de los estudiantes.

Cuando se hace alusión a las teorías que abordan este concepto, es importante precisar que estas han aportado significativamente al estudio de la comprensión, a la evaluación sobre cómo los individuos la manifiestan y cómo, a partir de descriptores por nivel, se sitúan o caracterizan. A continuación, se describen algunas teorías que guardan una estrecha relación con el estudio de la comprensión: modelo educativo de van Hiele, modelo de Pirie y Kieren, y el marco conceptual de EpC.

1.1.7.1 Modelo Educativo de van Hiele.

Preocupados por la forma en que los estudiantes razonan frente a los conceptos geométricos, a la memorización del aprendizaje y no asimilación, de manera correcta, en 1959, los esposos Dina y Pierre van Hiele desarrollaron el modelo educativo para el desarrollo didáctico, enfocado en la geometría que se basa en el razonamiento. En este modelo, el aprendizaje está dado por procesos cognitivos y en ningún momento por la edad de los sujetos. Además, está determinado por dos piezas que Jaime (1993) como se citó en Vargas y Gamboa (2013) “define como aspectos básicos: el descriptivo y el instructivo” (p. 81); el descriptivo hace alusión a los tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes, por lo que se ubicarán en un nivel, mientras el instructivo orienta a los docentes sobre cómo organizar sus actividades para que los estudiantes accedan a un nivel de razonamiento superior al que poseen, lo cual es conocido como fases del aprendizaje.

En este contexto, el estudiante se sitúa en el nivel de razonamiento cuando empieza el proceso de aprendizaje, y según asimile los contenidos, puede ir avanzando al siguiente; el modelo los denomina fases u etapas, en cuyo contenido se hallan las pautas que el docente debe seguir o superar para la implementación de este. Con base en la caracterización de esas etapas, Corberán

(1994) expresó que en ellas “se propone una organización de la enseñanza que ayudará a los estudiantes a construir las estructuras mentales que les permitan lograr un nivel superior de razonamiento” (p. 13). Por lo anterior, es necesario precisar que las fases contienen el cúmulo de actividades que un individuo debe realizar para poder subir de nivel a nivel, y que al realizarlas nuevamente debe iniciar el proceso, pero en un nivel superior en la primera fase.

El modelo también exalta la presencia de diversas manifestaciones de razonamiento en matemáticas, tales como la argumentación, el razonamiento lógico y deductivo o el análisis de premisas. Lo anterior visibiliza la necesidad de que los docentes consideren la capacidad de razonamiento de sus estudiantes al decidir la estructura y el rigor de las clases, a partir de sus procesos de planificación, lo que redunda en una enseñanza cíclica en la que es pertinente mejorar la comprensión, mediante el uso de unas formas de razonamiento más sofisticadas (Corberán, 1994).

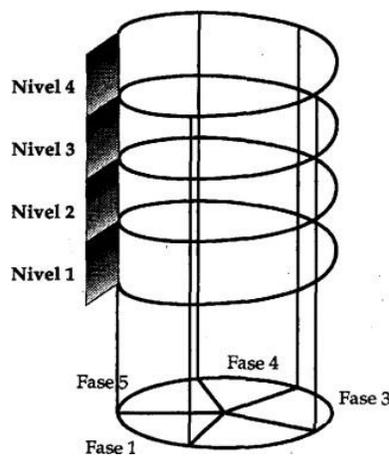


Figura 2. Aprendizaje cíclico de los niveles de van Hiele

Fuente: (Corberán, 1994)

A continuación, se detallan brevemente los alcances de cada uno de los niveles presentados por el modelo van Hiele.

Tabla 3. *Niveles de Comprensión Van Hiele*

Nivel	Descripción del nivel
Nivel 0 Visualización y reconocimiento	En este nivel el estudiante entiende el concepto geométrico como un todo, no distingue partes ni propiedades, aunque puede hacer algunas comparaciones, de acuerdo con las experiencias que tiene en su contexto.
Nivel 1 Análisis	En este nivel se distinguen las partes del ente geométrico y algunas propiedades matemáticas particulares, el sujeto aún no establece relaciones con otros objetos, y construye definiciones con base en las propiedades, pero no clasifica el ente como tal. Aquello fue explicado por González en los siguientes términos: “Poca precisión en la caracterización de las propiedades de las figuras planas” (p.47).
Nivel 2 Orden y clasificación	El individuo relaciona abiertamente las propiedades de los entes geométricos como características innatas, para luego realizar una clasificación por atributos. En esa medida, las definiciones empiezan a cobrar sentido. También responde a preguntas que se vinculan con las propiedades de otros elementos geométricos, aunque todavía no hay una comprensión del concepto.
Nivel 3 Razonamiento y deducción formal	El sujeto maneja y comprende el concepto, por lo que hace deducciones y demostraciones lógicas y sencillas. Comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de demostraciones diferentes.
Nivel 4 Rigor	Las personas que alcanzan este nivel son capaces de describir situaciones con un lenguaje técnico matemático. Pueden llevar a cabo razonamientos abstractos sobre entes geométricos, sin necesidad de representarlos, y cuentan con la capacidad de unir el lenguaje escrito y oral con el lenguaje geométrico.

En la tabla anterior se mencionaron las fases que intervienen en el desarrollo de los niveles, en la siguiente tabla se evidencian sus características:

Tabla 4. *Características de las fases según Van Hiele*

Fase 1. Información	Fase 2. Orientación dirigida	Fase 3. Explicitación	Fase 4. Orientación libre	Fase 5. Integración
La importancia no radica en que esos conocimientos previos sean correctos o incorrectos, lo relevante es la información que el docente toma de esa pesquisa, para que enmarque su práctica y reinvente su proceso de intervención, en el cual defina el punto de partida de cada estudiante.	Los estudiantes empiezan a explorar el objeto de estudio, resuelven actividades y problemas, y se les permite en todo momento el acceso, el descubrimiento, el aprendizaje y la comprensión de los conceptos para que, posterior a ello, logren realizar demostraciones.	Busca que los estudiantes intercambien sus experiencias, comenten lo que han observado, y den cuenta del desarrollo de las actividades presentadas, lo cual implica que terminen de aprender el nuevo vocabulario.	El estudiante deberá estar en capacidad de establecer relaciones, y de aplicar y combinar los conocimientos desarrollados en otras fases. Asimismo, el docente tendrá que plantear actividades que propicien diversas alternativas de solución.	En esta fase se pretende ayudarles a organizar los conocimientos que ya se han aprendido, por ende, no se introducen nuevos contenidos.

Fuente: elaboración propia

En conclusión, el modelo de van Hiele analiza los procesos de razonamiento, sin olvidar la premisa de que se aprende a razonar desde las propias experiencias, debido a que este centra su interés en la comprensión de conceptos y en el perfeccionamiento de las formas de razonamiento, y no propiamente en el aprendizaje de destrezas y habilidades.

1.1.7.2 Modelo educativo de Pirie y Kieren.

Esta teoría para la comprensión toma como referente la acepción que von Glasersfeld elaboró para este concepto:

El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe [...] entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión. (Meel, 2003, p. 235)

Con base en esta definición, Pirie y Kieren (1994) conceptualizaron la comprensión como un *todo dinámico, estratificado, recursivo, no lineal y jerarquizado* que integra una reorganización de las estructuras del conocimiento. En ese orden de ideas, dicha teoría se convierte en una herramienta que actúa como un lente a través del cual puede observarse el proceso de evolución de la comprensión matemática de un sujeto o de un grupo (Villa, 2011).

Hay una serie de procesos que los estudiantes llevan a cabo para la comprensión de un concepto en matemáticas, en los que es necesario evaluar el progreso, puesto que un nivel de mayor complejidad contiene a uno de menor complejidad. Este modelo contiene ocho categorías representadas por medio de un conjunto de elipses con un punto de encuentro que, a su vez, da cuenta del carácter creciente e inacabado de la comprensión matemática. Conviene distinguir que la teoría podría emplearse para describir estos niveles de comprensión y, además, para trazar las relaciones entre los conceptos y el aumento de esta en el tiempo (Thom y Pirie, 2006).

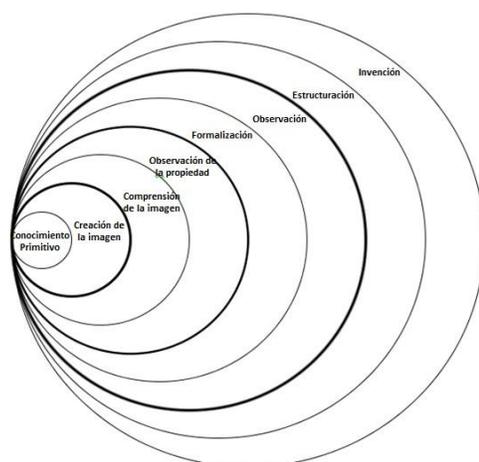


Figura 3. Estratos en el modelo de Pirie y Kieren

Fuente: (Meel, 2003)

La figura anterior muestra la evolución de la comprensión matemática, a partir de la consecución de los niveles potenciales que se delimitan cuando se declara un límite de falta de necesidad, allí el estudiante debe tener un nivel de comprensión más elevado para pasar a un nivel siguiente; dicho avance se debe al proceso de redoblaje (volver atrás) o a las acciones de complementariedad que aseguran esos pasos o esas fortalezas en cada uno de los niveles.

1.1.7.2.1 Niveles de comprensión según Pirie y Kieren

Los niveles del modelo permiten conceptualizar y describir las complejidades inherentes a la comprensión matemática. A continuación, se hace una breve descripción de cada nivel.

Tabla 5. Niveles de comprensión según Pirie y Kieren.

Nivel	Descripción del nivel
Nivel 1. Conocimiento primitivo	Se refiere al conocimiento inicial, intuitivo, previo, informal o a las experiencias de aprendizaje relacionadas con el concepto objeto de estudio (Meel, 2003).
Nivel 2. Construcción de la imagen	El estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores, en este caso, las imágenes no necesariamente son representaciones pictóricas, sino que transmiten el significado de cualquier imagen de tipo mental (Meel, 2003).
Nivel 3. Comprensión de la imagen	El estudiante examina una imagen mental y determina los distintos atributos asociados con dicha imagen; asimismo, no solo se queda en lo gráfico o en lo pictórico, pues centra su atención en los procesos mentales que se han fijado para la solución y comprensión de los

	problemas matemáticos.
Nivel 4. Observación de las propiedades	El estudiante es capaz de realizar actividades de los niveles anteriores, lo que posibilita encontrar vínculos entre una imagen y otra, con el fin de construir definiciones a partir de las actividades realizadas (Meel, 2003).
Nivel 5. Formalización	El estudiante conoce las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, y abandona los orígenes de la acción mental, para finalmente producir definiciones matemáticas completas. Sin embargo, en este nivel no es necesario un lenguaje matemático formal (Meel, 2003).
Nivel 6. Observación	El nivel potencia la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal. De ese modo, el estudiante es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento, así como las ramificaciones de este (Meel, 2003). En este nivel el estudiante puede correlacionar conceptos, teoremas y demostraciones, determinando conexiones a través del uso de su pensamiento formal.
Nivel 7. Estructuración	Respecto a este nivel, González (2014) expresó que “la imaginación y la capacidad de indagar sobre la alteración o cambio son permanentes, se es capaz de cuestionar el conocimiento vigente y de pensar en unas combinaciones entre ideas y conceptos o cambios en las formas de resolver un problema planteado no propuesto por otros” (p. 50); es decir, el estudiante está en capacidad de cuestionarse y de establecer relaciones que pongan en evidencia su nivel de comprensión.
Nivel 8. Invención	En este caso, el estudiante es capaz de liberarse del conocimiento estructurado, de crear preguntas y de desarrollar un concepto nuevo (Meel, 2003). En definitiva, el estudiante debe reinventarse y potenciar, por medio de la creatividad, la capacidad de generar nuevos aprendizajes, lo que podría convertirse en un conocimiento primitivo.

Fuente: elaboración propia

En síntesis, las anteriores teorías de la comprensión se enfocan en revelar lo que sucede a nivel cognitivo en el estudiante cuando este comprende un concepto, y no en la posibilidad de orientar y evaluar la comprensión, como sucede con la teoría que se describe en el siguiente apartado.

1.1.7.3 Marco de Enseñanza para la Comprensión.

La EpC nació como una propuesta que trata de superar las causas del “fracaso académico de los estudiantes” en el aula de clase. Perkins (2010) precisó que el primer cuestionamiento que debe hacerse un docente es qué quiere enseñar, y una vez hallada la respuesta, interesarse por cómo enseñarlo, es decir, por el diseño de las estrategias de intervención didáctica (los desempeños de comprensión). Cuando este autor planteó la pregunta sobre qué es la comprensión, adujo que “comprender es hacer uso activo del conocimiento”, esto significa pensar y actuar reflexivamente en cualquier circunstancia, a partir de lo que cada uno conoce.

De ahí se concluye que un estudiante puede demostrar que comprendió, según la EpC, cuando realiza interpretaciones, argumenta, da ejemplos, explica con sus palabras y es capaz de retomar un tema para volverlo a explicar, de forma más amplia. Estas situaciones se evidencian a partir de sus desempeños, en donde se ponen en juego sus aprendizajes, pero a partir de su realidad; solo así es posible concluir que verdaderamente una persona ha comprendido (Stone, 1999).

En términos históricos, el marco de EpC fue desarrollado en el Proyecto Cero de la Universidad de Harvard, con el propósito de mejorar y repensar la educación dentro y fuera de la escuela. Este marco pretende promover y reconocer los procedimientos básicos que cada docente debe saber al momento de planear una intervención en el proceso de enseñanza. Para ello, se parte de la respuesta a preguntas básicas como estas:

¿Qué estrategias debe utilizar el docente para que los estudiantes realmente comprendan?

¿Cómo saber lo que efectivamente han comprendido los alumnos?

¿Cómo manifiestan los alumnos su comprensión de los tópicos tratados en un curso o una unidad de trabajo? ¿Cómo el profesor puede apoyar de forma coherente el desarrollo de la comprensión? ¿Qué tipo de tareas son las más adecuadas para que los alumnos desarrollen? (Stone, 1999)

En pro de responder estas preguntas, el marco conceptual EpC desarrolló una propuesta basada en cuatro elementos y dos cualidades (estos contienen niveles y dimensiones de comprensión), los cuales fueron definidos por Perkins (1999) como fundamento de la EpC.

1.1.7.3.1 Elementos del marco conceptual EpC.

La EpC enfatiza en cuatro factores clave en su marco conceptual, estos son: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua. Cabe agregar que ninguno de ellos es secuencial (Blythe y Perkins, 1998).

- Tópicos generativos: se refieren a lo que es más importante que el estudiante aprenda dentro de una unidad. Son los temas, conceptos, ideas, etc. atractivos para el estudiante, en la medida en que despiertan su interés; a su vez, estos presentan una serie de características: son centrales para una o más disciplinas; llaman la atención de los

estudiantes; son accesibles por la cantidad de recursos que le permiten al estudiante investigar el tópico; pueden establecerse conexiones con otros tópicos; son experienciales y, sobre todo, despiertan el interés del docente (Blythe y Perkins, 1998).

- **Metas de comprensión:** estas metas enfocan los aspectos centrales del tópico, con ellas se especifica aquello que los estudiantes necesitan conocer. Existen metas abarcadoras denominadas hilos conductores, estas se entienden como preguntas clave que orientan una tarea. Se plantean para el trabajo de un año o para un conjunto de unidades, y en estos casos se articulan los temas y se les da sentido. En síntesis, constituyen una brújula para el docente y el estudiante.
- **Desempeños de comprensión:** son las actividades que realizan los estudiantes para demostrar su comprensión, por lo que constituyen el núcleo de desarrollo para esta, y en esa medida deben estar asociadas con las metas de comprensión. Los desempeños les exigen a los estudiantes ir más allá de la información dada, con el propósito de crear algo nuevo y de reconfigurar, expandir y aplicar lo que ya saben (Blythe y Gould, 1998; como se citó en Blythe y Perkins, 1998).
- **Evaluación diagnóstica continua:** este proceso implica asumir el desempeño y la realimentación como una necesidad de los estudiantes cuando trabajan en el desarrollo de la comprensión de un tópico o de un concepto específico, lo cual incluye responder claramente a los desempeños de comprensión de los estudiantes, de manera que sea posible mejorar sus próximos desempeños (Blythe, Bondy y Kendall, 1998).

En efecto, la EpC, gracias a su estructura, permite la flexibilidad de contenidos, espacios y tiempos, respetando el estilo y los ritmos de aprendizaje, así como la individualidad de los estudiantes, mientras fortalece la autonomía y la responsabilidad. En consonancia, la postura del maestro le facilita el uso de diversos recursos para hacer de la clase un encuentro ameno y significativo. Este marco conceptual se profundiza en un capítulo posterior, dado que es el marco referente para el presente trabajo de investigación.

Finalmente, en tanto el interés de este estudio es describir la comprensión del concepto de variable como incógnita, se eligió el marco conceptual de la EpC, puesto que este define ciertos

lineamientos para evaluarla o evidenciarla en los estudiantes; a la vez, posibilita orientar la comprensión del concepto desde la cotidianidad de los estudiantes; ofrece herramientas para planificar y diseñar actividades en una unidad curricular; y por último, ayuda a analizar el progreso a partir de los niveles de comprensión, según los descriptores de nivel que se determinaron en la rúbrica.

1.1.8 Conceptos disciplinares.

En este apartado se presentan algunas definiciones y conceptos que fueron importantes en el desarrollo de la unidad curricular, en el refinamiento de la rúbrica de niveles de comprensión, y en los instrumentos diseñados y aplicados. Entre estos se destacan las nociones de variable, incógnita, número oculto, ecuación, ecuación de primer grado, variación, y planteamiento y resolución de problemas.

1.1.8.1 Variable.

En su artículo *La conceptualización de la variable en la enseñanza media*, Trigueros et al. (2000) concibieron la variable como un concepto multifacético, debido a que su uso depende del contexto en el que se encuentre. Por ende, se destacan tres usos: la variable como incógnita, como número general y como relación funcional.

El concepto de variable como incógnita requiere que el estudiante: reconozca y edifique en un problema la existencia de un valor desconocido que se puede determinar; logre inferir que la variable simbólica que aparece en la ecuación puede tomar valores específicos; reemplace los valores de la variable en la ecuación, de tal manera que halle su solución; e identifique la incógnita en una situación dada y la represente simbólicamente en una ecuación.

Por otra parte, el concepto de variable como número general implica que el alumno: identifique patrones y reglas en secuencias numéricas y en grupos de problemas; interprete la variable simbólica como un objeto que podría tomar cualquier valor, y la entienda también como un objeto indeterminado que permite operar y manipular el símbolo, con el objetivo de reducir o desarrollar expresiones algebraicas.

Y como relación funcional el concepto de variable demanda del educando: reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones, tales como tablas, enunciados verbales, gráficas o expresiones analíticas; calcular los valores de la variable dependiente cuando se conozca la variable independiente; determinar los intervalos de variación de una variable cuando se conozcan los de la otra; y determinar la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación, en cualquier tipo de representación.

1.1.8.2 Incógnita.

Una incógnita es un valor desconocido que ha de buscarse y determinarse. Estas se simbolizan con las letras finales del alfabeto: x , y , z . Tal y como sucede en las constantes, cuando se tengan que manipular varias incógnitas, es recomendable numerarlas: x_1 , x_2 , $x_3 \dots x_n$, para evitar posibles equivocaciones.

1.1.8.3 Número oculto o desconocido.

El currículo de la matemática escolar presenta por separado la aritmética del álgebra, lo que ha generado una ruptura entre ambas formas de abordar los conceptos. Frente a ello, Gascón (1999) consideró lo siguiente:

La aritmética escolar trata siempre y únicamente con números concretos, el álgebra elemental (entendida como aritmética generalizada) se caracteriza por ser una especie de “lenguaje” en el que, además de números, también deben manipular símbolos que se interpretan ya sea como “números desconocidos específicos”. (p.78)

Según lo propuesto por Gascón (1999), y en contraste con los referentes nacionales de calidad, los números desconocidos equivalen a esos valores ocultos que están presentes en expresiones aritméticas como igualdades y ecuaciones numéricas. Así, con relación a este concepto disciplinar, los DBA (2017) estipularon los siguientes derechos básicos en el grado quinto.

Tabla 6. DBA grado quinto centrados en la variable

Grado	Derecho básico de aprendizaje	Evidencia de aprendizaje
Quinto	8. Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas.	Trabaja sobre números desconocidos para dar respuestas a los problemas.

Fuente: elaboración propia

Lo que busca la tabla anterior es dar a conocer, desde los DBA publicados por el MEN, de qué modo se aborda el concepto de número desconocido o número oculto como evidencia de aprendizaje en un grado en particular.

1.1.8.4 Ecuación.

Una ecuación es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus lados o miembros, y están separadas por el signo igual (=). Los lados o miembros, a su vez, están formados por términos dependientes que son combinaciones de constantes e incógnitas, y términos independientes que solo constituyen constantes. (Gutiérrez y Cortez, 2016, p. 12)

Algunos ejemplos son los siguientes:

$$x + 3 = 8, \quad x^2 + 5x + 2 = 3, \quad x = 9 - z,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 0,$$

Cada ecuación contiene al menos una incógnita y esta puede ser de diferentes grados.

En el caso de este estudio, una ecuación de primer grado con una incógnita se concibe como una afirmación que es verdadera o falsa, cuando se sustituye x por un elemento del dominio en consideración, en este caso, por un número entero. Igualmente, al conjunto de los elementos del dominio que hacen de la ecuación una proposición verdadera se le llama el conjunto solución de la ecuación.

Así, resolver una ecuación es encontrar su conjunto solución, es decir, descubrir todos los números que la hacen verdadera. Uno de los procedimientos para resolverlas consiste en transformarlas en ecuaciones que tengan las mismas soluciones, también llamadas ecuaciones

equivalentes, hasta llegar a su solución. En el grado quinto, como se ha estipulado en los DBA (2017), se espera que los estudiantes:

Amplíen el estudio de fenómenos de variación, en particular cuando se relacionan con proporcionalidad, y utilicen las propiedades de los sistemas de los números naturales y las fracciones para construir procedimientos no convencionales con el fin de resolver ecuaciones sencillas. (p. 4)

Dicho propósito compilado en el derecho básico de aprendizaje 9, y contenido en el pensamiento variacional que expresa, “utiliza operaciones no convencionales, encuentra propiedades y resuelve ecuaciones en donde están involucradas” (p. 10).

1.1.8.5 Ecuación de primer grado.

La ecuación de primer grado con una incógnita se delimita como una igualdad en la que existe un número entero desconocido, el cual se representa, usualmente, con la letra x , y es denominado incógnita o variable, no elevado al cuadrado ni al cubo, etc. Por ejemplo, $3x+6=3$. Se llama de primer grado, puesto que la incógnita solo aparece elevada a la potencia uno.

1.1.8.6 Variación.

Desde el punto de vista de Valencia (2015), “el significado sobre la variación puede establecerse a partir de situaciones problema referidas a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica” (p. 40). En esa medida, los estudiantes abordarán situaciones de su contexto en las que es posible evaluar cómo se dan dichos fenómenos.

En esta investigación el objetivo es desarrollar las siguientes competencias, propuestas por el MEN, en el pensamiento variacional y el sistema algebraico y analítico, y en el pensamiento métrico y los sistemas de medidas para el grado quinto, en los EBCM:

- Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida

social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación. (p. 83)

Con relación al concepto de variación, a continuación, se detallan algunos elementos que han sido estudiados desde lo disciplinar y lo procedimental.

A nivel disciplinar:

- Fenómenos de cambio y de variación.
- Proporcionalidad como patrón de variación.
- La variable como incógnita.
- La construcción de expresiones matemáticas a partir de enunciados.
- La variable como una generalización que puede tomar valores de un conjunto numérico.

A nivel procedimental:

- Formula, plantea, transforma y resuelve problemas, a partir de situaciones de la cotidianidad.
- Usa el lenguaje matemático formal.
- Presenta coherencia en su discurso.
- Domina procedimientos y algoritmos matemáticos, y conoce cómo, cuándo y por qué usarlos de manera correcta.

1.2 Planteamiento.

El interés en investigaciones sobre la integración del álgebra en el currículo de las matemáticas en educación Básica Primaria no es nuevo. Una de las propuestas curriculares que surgió en el año 2000, como resultado de estos estudios, es la de *Early algebra* de The National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (2000); en armonía con la idea allí propuesta, Kaput (2000) planteó “la algebrización del currículo” lo cual suponía enriquecer la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Para Molina (2009), “esta propuesta curricular persigue fomentar un aprendizaje con

comprensión de las matemáticas y, en especial, facilitar el aprendizaje del álgebra” (p. 136); la investigación de esta autora se centró en “trabajar la aritmética de un modo algebraico” (p. 135), a lo que Vergel (2014), en su tesis doctoral, definió como el “álgebra temprana” (p. 22).

Como se enunció en el componente curricular (apartado 1.1.5), es claro que el Ministerio de Educación Nacional promueve el aprendizaje del pensamiento variacional en primaria, lo que, se presume, permite una transición armónica entre la aritmética y el álgebra, a través de lo que algunos autores ya citados han concebido como álgebra temprana. Por ejemplo, Zapata (2019) manifestó que “contemplar la idea de inclusión del álgebra en la educación primaria, ha propiciado reflexiones en relación con posibles beneficios en la educación secundaria” (p. 7).

Al respecto de esta transición, Juárez (2011) concluyó que “la mayoría de los estudiantes tienen un bajo desempeño en el manejo de la variable y que, en términos generales, los alumnos se encuentran en un nivel inferior al 50 % del manejo adecuado de la variable” (p. 87). En ese sentido, “se han encontrado resultados poco alentadores acerca de cómo progresa la comprensión del concepto de variable a lo largo de la enseñanza media” (Lozano, 1998), los cuales podrían deberse a múltiples situaciones asociadas con la enseñanza o el aprendizaje.

A partir de las consideraciones hasta aquí expuestas, se pone de manifiesto la necesidad de ahondar en la comprensión de un concepto importante en el desarrollo del currículo de matemáticas, en el nivel de primaria, al que Morales y Díaz (2003) describieron así: “La comprensión del concepto de variable implica la posibilidad de superar la simple realización del cálculo y operaciones con letras o con símbolos” (p. 112).

Ahora bien, en el Centro Educativo Rural Casa Grande, ubicado en el municipio de Concordia, departamento de Antioquia, Colombia, al establecer comunicación con el colectivo de docentes en las jornadas de microcentro, y después de evaluar los procesos al interior de las aulas, se evidenció su preocupación frente a los criterios de desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas, cuando ingresan al nivel de secundaria. Para llegar a ese diagnóstico, también se revisaron los documentos que respaldan la práctica docente, entre ellos, el semanario pedagógico, definido como un instrumento de reflexión pedagógica que da cuenta del desarrollo del plan de clases cada semana.

Para el caso institucional, a través de diálogos informales, el trabajo con la variable se reduce a la sustitución de números por letras, en cuya situación las letras no adquieren significado y aparecen de forma aislada, cuando en realidad suponen la vinculación de procesos de generalización, simbolización y abstracción. Según Vergel (2014), como se citó en Mason (1996), “la generalización es el corazón de las matemáticas y consiste tanto en ver los casos particulares en la generalidad como en la generalidad a través de los casos particulares” (p. 22); este autor también expresó que la abstracción es aquello “que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos” (p. 31). En cuanto a la simbolización, White citado por Vergel (2014) la definió “como la característica principal de la existencia temporal y espacial de las cosas y de los eventos” (p. 35) que de acuerdo con lo que buscan y con la importancia en los procesos, requieren de la planificación de estrategias de enseñanza en el nivel de primaria.

Así, la presente investigación se centra en la comprensión que muestran los estudiantes sobre el concepto de variable, en especial, cuando son expuestos a la resolución de situaciones problema, en las que se hallan la simbolización, la representación y la manipulación de objetos como variables que, en definitiva, constituyen los procesos algebraicos. Aunque se tienen en cuenta los tres significados de variable enunciados por Trigueros et al. (1996), solo se profundiza en el uso de la variable como incógnita, pues al realizar el rastreo en los referentes nacionales de calidad, en concordancia con el plan de área, las otras dos interpretaciones no se presentan para el ciclo de primaria, e inclusive, en algunos ejes temáticos solo se utiliza la incógnita como número fijo y no como variable.

Por lo expresado en los referentes nacionales de calidad, como los Estándares de Competencias, los lineamientos curriculares, los DBA y las mallas de aprendizaje, se evidencia que es necesario comprender un concepto disciplinar desde el nivel de primaria, máxime cuando la necesidad de algebrizar el currículo es una estrategia coherente que debe llevarse a cabo a la par de la didáctica.

Debido a ello, y a la luz de la investigación, es importante citar a algunos autores que se han interesado en reconocer la importancia de la variable en el desarrollo del currículo. Entre ellos están Kieran y Filloy (1989), quienes propusieron un ejemplo del uso de variable como un valor a sustituir:

La experiencia de los niños en la escuela elemental con las letras en ecuaciones se reduce a menudo a fórmulas como $A = b \times h$, y relaciones entre unidades de medida como $10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$. La primera supone reemplazar b y h por valores diferentes para encontrar el área de rectángulos dados; la segunda regla se usa para encontrar, por ejemplo, el número de milímetros a que corresponde 5 centímetros. Este segundo uso de las letras como etiquetas es el que interfiere a menudo con la forma como los estudiantes llegan a entender el significado de los términos variables en las ecuaciones algebraicas. En la segunda “ecuación” de arriba, no solo se leen las letras como etiquetas, sino que además el signo igual se lee como una preposición: “hay 10 milímetros en 1 centímetro”. (p. 231)

En el mismo artículo, los autores argumentaron, a partir de un experimento de enseñanza que realizaron con niños de 12 y 13 años, cómo “es posible cambiar la percepción que tienen los estudiantes que comienzan el álgebra como algo unidireccional y con la respuesta en el lado derecho” (Kieran y Filloy, 1989, pp. 231-232), teniendo como objeto la concepción de que en una ecuación el resultado siempre debe ir después del igual, y sin olvidar que la lectura se realiza de izquierda a derecha. Asimismo, el artículo muestra que se puede cambiar la concepción de la ecuación como algo rígido. Dicho resultado es importante para este estudio, dado que es posible extender la escritura de ecuaciones a situaciones más generales de las que tradicionalmente se encuentran en los libros de texto, donde el resultado o valor numérico suele estar a la derecha del igual. Según los mismos autores, en aquellos libros el manejo de la ecuación se reduce al trabajo con “proposiciones de ‘sumando faltante’” (p. 231), como por ejemplo $4 \pm [] = 9$, y se descuida el concepto de variable como incógnita.

Por consiguiente, el concepto de variable como incógnita es útil en la comprensión de conceptos de álgebra, para el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos, y además está sustentado en la perspectiva del currículo colombiano, y los referentes nacionales de calidad –los EBCM, los LCM (Lineamientos Curriculares de Matemáticas), los DBA y las mallas de aprendizaje–, puesto que comprenderlo en el nivel de primaria facilitará la comprensión de otros conceptos en el nivel de secundaria, cuando el estudiante empiece a trabajar con otras caracterizaciones de la variable.

1.3 Justificación

Sumado a lo que se ha expuesto, proponer una investigación en primaria sobre el concepto de variable cómo incógnita es importante puesto que, según Valencia (2015), aún existe una dificultad por resolver. En su tesis de maestría, donde involucró a un grado séptimo, concluyó que una de las razones que hacen difícil la comprensión del concepto de variable es que se trata de un concepto que al interior de las matemáticas puede utilizarse de diferentes formas, y cuyas caracterizaciones varían de acuerdo con el problema en el que se encuentre inmerso. Una posible solución es algebrizar el currículo de primaria, al que Zapata (2019) precisó como “la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas de la educación primaria” (p. 25), pues hacerlo posibilita en grados superiores el acceso comprensivo de los estudiantes a conceptos algebraicos más complejos. Además, para Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005), debido que a la comprensión del carácter simbólico del álgebra merece un proceso de maduración y tiempo, es conveniente la iniciación de su enseñanza en los primeros grados.

Como se expresó en el componente curricular, los referentes nacionales de calidad publicados por el MEN son criterios y orientaciones curriculares que apoyan a los docentes en la planeación, con apoyo en el contexto educativo y en correspondencia con el Proyecto Educativo Institucional, los cuales guían los procesos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conviene aclarar que para el nivel de primaria se ha definido la incógnita como un valor a sustituir, pero no se ha designado el uso de esta como variable para generalizar, simbolizar y manipular objetos matemáticos. La letra como incógnita se concibe como un número desconocido, y el estudiante opera con esta para obtener dicho número, así se entrevé el uso de la incógnita como valor desconocido, aunque no se define aún como variable. Lo anterior podría llevar a lo que en el marco de la EpC se conoce como “concepción errónea” (p. 88).

El uso de variables, en general, se aborda en secundaria. Fujii (2004) como se citó en Gómez y Flores (2007) propuso “la creación de un puente entre los inicios del álgebra y la aritmética mediante el uso de expresiones numéricas generalizables” (p. 464), que más adelante denominó como cuasi-variables. Estas últimas constituye un enunciado numérico o grupo de enunciados del mismo tipo que indican una relación matemática subyacente, la cual permanece cierta para

cualquiera de los números que sean usados, por ejemplo, “ $78 - 49 + 49 = 78$ ” (p. 465); así, este puente propuesto guarda relación con las dificultades que los estudiantes tienen al comprender el uso de expresiones simbólicas en álgebra.

En ese orden de ideas, es pertinente que los investigadores en educación matemática planteen posibilidades para estudiar críticamente el concepto de variable, desde diversos enfoques, con el propósito de evaluar la comprensión de este en los grados de la Básica Primaria. Dada esta necesidad, Küchemann (1981) tipificó las interpretaciones que pueden dársele a la variable como letra en diferentes contextos algebraicos, en el nivel de secundaria, y que para el caso de este estudio es la variable como incógnita en el grado quinto de Básica Primaria.

Es posible concluir, entonces, que la inexactitud en el uso de la variable como incógnita representa un obstáculo de comprensión. A propósito de ello, Küchemann (1981) como se citó en Morales (2005):

Consideró la clasificación de la interpretación de los símbolos literales como el reflejo de un grado de dificultad creciente, y afirmó que un niño habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando sea capaz de trabajar con la “letra como variable”. (p. 23)

Este asunto es de especial importancia para la presente investigación en la que se caracteriza la comprensión y, por ende, el marco conceptual y la ruta metodológica deben permitir que se cumpla con tal objetivo. A continuación, se muestran algunas consideraciones relevantes del trabajo de Trigueros et al. (1996) frente al diseño de un cuestionario diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en niños de 13 años y que, posteriormente, fue adaptado para estudiantes de los primeros niveles de universidad. Este contiene 52 preguntas en donde no se requería de un manejo algebraico complejo, pues lo que se pretendía era realizar un análisis sobre cómo los estudiantes interpretaban, manipulaban y simbolizaban cada una de las maneras de nombrar la variable. Todo aquello se analizó desde la caracterización que ellos establecen en el uso de “la variable como incógnita, cuyo valor se puede determinar con exactitud tomando en consideración las restricciones del problema; la variable como número general, es decir, aquella que aparece en generalizaciones y en métodos generales” (p. 352).

La perspectiva con la que estos autores adaptaron y pusieron en contexto su cuestionario diagnóstico, en las tres categorizaciones o usos de la variable, los llevó a incluir lo que nombraron ítems (preguntas) que permitieran diferenciarlas, tales como la interpretación, la simbolización y la manipulación; estos facilitaron el ejercicio de observación para determinar cómo los estudiantes interpretaban acertadamente la variable involucrada, y así evidenciar si tenían la capacidad de simbolizar una situación en la que aparecía cierta caracterización de la variable y, por último, si eran capaces de manipular las variables que aparecían en una expresión (Trigueros, et al., 1996).

Dada la importancia histórica del concepto objeto de estudio y de lo que implica aplicarlo y comprenderlo en la actualidad, pues es clave en la transición que los estudiantes deben realizar desde lo aritmético a lo algebraico, la investigación planteada es pertinente en la medida en que algebriza el currículo y propende por la comprensión del dicho concepto, mientras propone reducir una brecha existente entre la aritmética y el álgebra.

Por otro lado, el marco conceptual que la orienta es el de la EpC. Desde la aplicabilidad de dicho marco se determina cómo los estudiantes entienden el concepto de variable en una de sus interpretaciones, dado que este favorece el logro de aprendizaje y por ello resulta ser útil como mecanismo de control sobre los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes. Como se ha aclarado, lo expuesto se relaciona con los referentes nacionales de calidad, el rastreo bibliográfico, el marco teórico a utilizar en la investigación, el objeto matemático que se constituye en el objeto de estudio y el análisis de la problemática identificada. En consecuencia, es posible plantear la pregunta de investigación.

1.4 Pregunta de investigación

¿De qué manera los estudiantes del grado quinto de Básica Primaria comprenden el concepto de variable como incógnita en el marco de la Enseñanza para la Comprensión?

1.5 Objetivos de la investigación

1.5.1 Objetivo general.

Describir cómo los estudiantes del grado quinto de Básica Primaria comprenden el concepto de variable como incógnita en el marco de la Enseñanza para la Comprensión.

1.5.2 Objetivos específicos.

- Determinar el nivel de comprensión del concepto de variable como incógnita de los estudiantes participantes en el proceso de investigación, en relación con los niveles del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.
- Analizar la evolución de la comprensión de los estudiantes participantes en el proceso de investigación, a partir de los desempeños mostrados en cada una de las fases definidas en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

En este capítulo se encuentra la referencia teórica que guía el proceso metodológico al interior del panorama investigativo, a partir del marco conceptual de la EpC, puesto que, según dicho marco, es posible describir la manera como los estudiantes comprenden el concepto de variable como incógnita, cómo se mueven ellos por las dimensiones del marco conceptual y cómo en este se define el tópico generativo, hasta determinar el nivel de comprensión que los estudiantes tienen de dicho concepto.

El marco conceptual de la EpC puede llegar a caracterizar la comprensión del concepto, el contexto y, principalmente, la comprensión, entendida esta como la capacidad de desempeño flexible y no solamente como la reproducción o memorización de un tópico en particular. Como lo argumentaron Blythe y Perkins (1998), “comprender es poder llevar a cabo una diversidad de acciones o ‘desempeños’ que demuestren que uno entiende el tópico y al mismo tiempo lo amplía, y ser capaz de asimilar un conocimiento y utilizarlo de una manera innovadora” (p. 40); dichas acciones reciben el nombre de desempeños de comprensión y buscan que los estudiantes vayan más allá de la adquisición del concepto y sepan usarlo en diferentes contextos. Adicionalmente, en la descripción de la EpC se hace énfasis en la acepción del término de la comprensión, en los elementos de la enseñanza, y en el modo en que se correlacionan estos con el objeto de estudio.

2.1 La comprensión

Este término se entiende como la capacidad que tienen los seres humanos de pensar y actuar de manera flexible en contexto, de acuerdo con lo que saben y aprenden, a través de las experiencias, y con el uso de las habilidades que han adquirido para entender el mundo que los rodea. Desde la perspectiva de Blythe (1999) respecto al acto de comprender, hacerlo “[...] implica ser capaz de realizar con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar, dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y volver a presentar el tópico de una nueva manera” (p. 39). Esa capacidad exige, por parte del estudiante, una nueva configuración de la temática abordada y otra mirada al concepto en cuestión, lo que

posibilita una nueva forma de comprenderlo.

Así, con la puesta en escena de las dimensiones del marco el objetivo es que los estudiantes no solo aprendan, sino que piensen a partir de lo que aprenden, que sus aprendizajes sean interesantes y aplicados a su contexto, y que lo adquirido se fundamente como base de un conocimiento superior, puesto que, cuando los estudiantes, por el contrario, no comprenden un concepto, puede presentarse una reacción en cadena que conlleva que otros usos y conceptos sean incomprendidos; inclusive, la conceptualización matemática en grados escolares siguientes llegaría a ser insuficiente, y su fin progresivo no se evidenciaría. En palabras de Batanero (2005), “la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto” (p. 257).

2.2 Marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión.

El marco de la EpC fue desarrollado en el Proyecto Cero de la Universidad de Harvard, con el propósito de mejorar la educación dentro y fuera de la escuela, y de exponer otros tipos de acciones pedagógicas que fomentaban la comprensión. Dicho marco debía ayudar a diseñar y a organizar las experiencias en el aula de clase, con el fin de que los estudiantes logaran comprensiones cada vez más profundas. Asimismo, este grupo de investigación debía propender por “conceptualizar las prácticas de los docentes en relación con la investigación que se realiza sobre enseñanza y aprendizaje” (Stone, 1999, p. 40). La EpC, entonces, ha buscado fomentar e identificar los procedimientos básicos para la planeación de intervenciones en el proceso de enseñanza.

En este contexto, los investigadores de la EpC de la Universidad de Harvard determinaron que la comprensión implica la capacidad de realizar, a partir de un tópico, una serie de actividades que estimulen el pensamiento, lo cual posibilita que los estudiantes replanteen sus propias comprensiones y solucionen problemas reales del aula y de su territorio; de ese modo, harían de su contexto un espacio dinámico, y evocarían, de un modo autónomo, la construcción del conocimiento, con base en las dimensiones del ser, el saber y el hacer (Blythe, 1999).

2.3 Elementos y cualidades de la EpC

Sus elementos fueron definidos por Perkins (1999) como la base de la EpC y una forma óptima de responder a las siguientes preguntas: ¿qué tópicos es preciso comprender?, ¿qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?, ¿cómo se puede promover la comprensión?, y ¿cómo es posible averiguar lo que comprenden los alumnos? Además, estos son empleados por cada docente o investigador para lograr la comprensión de conceptos en cualquier área del saber.

2.3.1 Elementos para la Enseñanza de la Comprensión.

Con el propósito de seleccionar los contenidos adecuados para enseñar, identificar qué es lo que los estudiantes aprenden con mayor destreza, reflexionar sobre lo que se enseña y observar cómo se manifiesta la comprensión, existen cuatro elementos fundamentales que cimientan dicho marco y que facultan su practicidad.

2.3.1.1 Tópicos generativos.

Estos hacen referencia a las ideas que establecen múltiples relaciones entre los temas y la vida de los estudiantes. Entre sus objetivos están impulsar la motivación, el interés y la accesibilidad, y establecer relaciones de comprensión; además, son aprendidos de diferentes formas, dado que determinan vínculos entre la vida de quienes interactúan y las ideas centrales de la disciplina. Este tipo de conexiones pueden entenderse, según Perrone como se citó en Stone (1999), como un rasgo recurrente; para este autor, constituyen aquello que hace referencia al currículo, el cual es diseñado precisamente para favorecer la comprensión.

En la visión de Stone (1999), el tópico es generativo cuando “es central para el dominio o la disciplina. Es accesible e interesante para los alumnos, excita las pasiones intelectuales del docente y se conecta fácilmente con otros tópicos” (p. 99). A su vez, los tópicos generativos deben tener las características expuestas a continuación:

- Ser centrales para un dominio o disciplina: esta característica sitúa al currículo como un elemento vivo, el cual se materializa en el aula de clase y debe configurar las conexiones entre las temáticas que allí se exponen, es decir, son los conceptos bases de la disciplina.

- Tópicos accesibles e interesantes para los alumnos y docentes: este rasgo implica que los tópicos generativos generan conexiones con las experiencias vividas por los estudiantes, teniendo en cuenta otras miradas, y a partir de diversas modalidades y recursos de aprendizaje. En este sentido, es de suma importancia la intervención del docente, pues este ejercicio se consolida como un modelo intelectual para que los estudiantes aborden con pasión, asombro y curiosidad el tópico, de acuerdo con su formación.
- Tópico rico en conexiones: la puesta en escena del tópico generativo debe evocar la indagación y la búsqueda de respuestas a preguntas profundas, en donde se respete la relación entre las experiencias previas de los estudiantes y las ideas propias de la misma disciplina; estas últimas han de despertar la curiosidad y de aumentar en ellos su nivel creativo, con el ánimo de retomar la interrelación de aprendizajes con otras áreas y la postura pedagógica del docente.

2.3.1.2 Metas de comprensión.

En términos de Stone (1999), las metas de comprensión guían el proceso formativo, delimitan el campo conceptual y afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos comprendan. Cuando se hace referencia a la delimitación del campo conceptual, aquello se menciona debido a los problemas que podrían producirse al definir tópicos generativos ricos en conexiones e intereses, abarcadores y amplios; en ese sentido, es fundamental que el docente se pregunte ¿qué es lo que específicamente quiere que sus alumnos aprendan?, y ¿por qué es importante que comprendan ese tema y no otros? En palabras de Blythe y Outerbridge (1998):

[Se] identifican los conceptos, procesos y habilidades que deseamos que nuestros alumnos comprendan [...]. Hay dos tamaños de metas de comprensión: las que corresponden a la unidad, que son bastante específicas, lo que usted desea que sus alumnos aprendan y a las abarcadoras o hilos conductores, que son más amplias. (p. 75)

Con base en los postulados de Stone (1999), las metas de comprensión deben tener las siguientes particularidades:

- Explícitas y públicas: las metas de comprensión tienen que involucrar diferentes

estamentos de la comunidad educativa (padres, acudientes, directivos, otros docentes y estudiantes), pues les ayudan a entender hacia dónde va la dinámica escolar, lo cual podría evocar una participación bastante activa en el proceso de refinamiento de las metas de comprensión, una vez que estas hacen parte de una conversación pública.

- Dispuestas en una estructura compleja: estas, desde el punto de vista de González (2014), deben organizarse en “una amplia red de conexiones con el objetivo de depurar los hilos conductores, hallar los elementos comunes a varios de ellos y establecer los puntos que los unen para hacer de ellas un material valioso como guía del curso” (p. 88). Dicha red que debe relacionar las metas generales que son más abarcadoras y con las metas definidas en la unidad curricular.
- Centrales para la materia: es preciso que se evidencien en las ideas formas de investigación y de comunicación, conceptos entrelazados con otras ideas y otros que deban ser comprendidos con claridad, para obtener una comprensión muchas más sofisticada (Stone, 1999). Por consiguiente, las metas de comprensión han de tener como finalidad la consecución de un trabajo significativo como herramienta de la comprensión, de modo que se dejarían de lado a los actores periféricos que impiden la consecución de las metas establecidas, inicialmente, por los docentes, y experimentadas en el aula por los estudiantes.

2.3.1.3 Hilo conductor.

El hilo conductor constituye una conexión íntima con las metas de comprensión planteadas a corto plazo, aunque se ha calculado su desarrollo a largo plazo. A partir de este se indica hacia dónde se quiere dirigir a los estudiantes para que logren la comprensión. González (2014) manifestó que su “intención [...] es motivar al estudiante a resolver problemas, impulsarlo a buscar información y a cuestionarse sobre la importancia de lo que está aprendiendo” (p. 129). Al mismo tiempo, en concordancia con los alcances de la definición, esta herramienta insta al docente a una participación directa al orientar las actividades diseñadas en la unidad curricular, y al estudiante a desarrollarlas; el hilo conductor, entonces, se entiende como el eje central del proceso de la enseñanza.

2.3.1.4 Desempeños de comprensión.

Autores como Blythe y Perkins (1998), como se citó en Acevedo (2011), concibieron los desempeños de comprensión como “actividades que desarrollan y a la vez demuestran la comprensión del estudiante en lo referente a las metas de comprensión, es el espacio en el que los estudiantes reconfiguran, expanden, extrapolan y aplican lo que saben en distintas situaciones” (p. 24). En este escenario, el estudiante se encuentra explorando varios campos y áreas del objeto de estudio, con el ánimo de establecer conexiones con su vida cotidiana, y es así como potencia su curiosidad y desarrolle habilidades para poner a prueba lo que ha aprendido, en desempeños que vayan más allá de lo procedimental.

Por lo anterior, Stone (1999) planteó la siguiente pregunta: “¿Qué pueden hacer los estudiantes para desarrollar y demostrar su comprensión?” (p. 110). A medida que se avanza en los tópicos, las actividades van variando y deben distinguirse de otros ejercicios comunes en el aula, pues el estudiante debe ser capaz de construir sus propias hipótesis e ideas; debido a ello, los desempeños se clasifican en tres categorías progresivas en las que el docente tendrá que mantener un doble centro de atención: tanto en los intereses de los alumnos, como en el objetivo de las metas de comprensión. A estas, Stone (1999) las asumió como etapas.

2.3.1.5 Etapa de exploración.

En esta etapa se relacionan los saberes previos y los intereses del estudiante frente a lo que desea aprender, así como el modo en que se pueden involucrar con el objeto de aprendizaje o tópico generativo, mediante ciertas conexiones. Los desempeños por explorar aparecen al principio de la unidad y sirven como insumo para atraer a los estudiantes al dominio de un tópico generativo; a su vez, estos presentan las características de final abierto y se pueden abordar en varios niveles, en los que es indispensable que el estudiante esté al margen de su nivel anterior de comprensión (Stone, 1999).

2.3.1.6 Etapa investigación guiada.

Esta etapa sobresale la importancia de que el estudiante se centre en lo que se relaciona con el tópico generativo y las metas de comprensión. Los desempeños, en la perspectiva de González (2014), “buscan involucrar a los estudiantes en el uso de ideas centrales para la comprensión de una meta” (p. 90). En ese contexto, el docente toma el papel de observador, registra datos, está atento al uso de un vocabulario rico y a la síntesis de notas de fuentes alrededor de una pregunta específica, con lo cual busca la consecución, por parte del estudiante, de una meta de comprensión. Por ende, la labor docente es clave en el desarrollo de esta etapa, puesto que son ellos los llamados a la aplicación de conceptos y métodos disciplinarios, a integrar sus conocimientos y a poner en acción una comprensión cada vez más compleja y sistematizada.

2.3.1.7 Etapa proyecto final de síntesis.

Es considerada como la tarea o el proyecto final en el que se evidencian con claridad los dominios que los estudiantes tienen de la comprensión del objeto de estudio, los cuales se han desarrollado a lo largo de la unidad curricular. En este caso, los desempeños deben ser abarcadores y responder a la conceptualización de lo que significa comprender, en palabras de Blythe y Perkins (1998) esto es “es poder llevar a cabo una diversidad de acciones o ‘desempeños’ que demuestren que uno entiende el tópico y al mismo tiempo lo amplía, y ser capaz de asimilar un conocimiento y utilizarlo de una forma innovadora” (p. 40). Esta etapa suele convertirse en un espacio para que los estudiantes den cuenta de lo que aprendieron o comprendieron, y sean capaces de darle aplicabilidad en su contexto.

2.3.1.8 Evaluación diagnóstica continua.

Es el proceso de observar, por medio de los desempeños, el grado de comprensión alcanzado por los estudiantes, para ofrecerles retroalimentación constante de sus progresos o necesidades, a través de criterios claros, pertinentes y públicos. Los criterios de evaluación primero son fijados por el docente, pero luego los estudiantes implícitamente empiezan a hacer parte de ese proceso evaluativo. En su documento, Stone (1999) afirmó que la evaluación diagnóstica continua refuerza a la vez que evalúa el aprendizaje, y debe sustentarse según la publicación de los

critérios que han de estar anclados con metas de comprensión, evaluadas más tarde por los estudiantes y los docentes, dado que configuran la planificación y la estimación de su progreso. Con relación a lo anterior, La Figura 4 muestra los criterios indispensables para la constitución de una evaluación diagnóstica continua y confiable en el proceso.

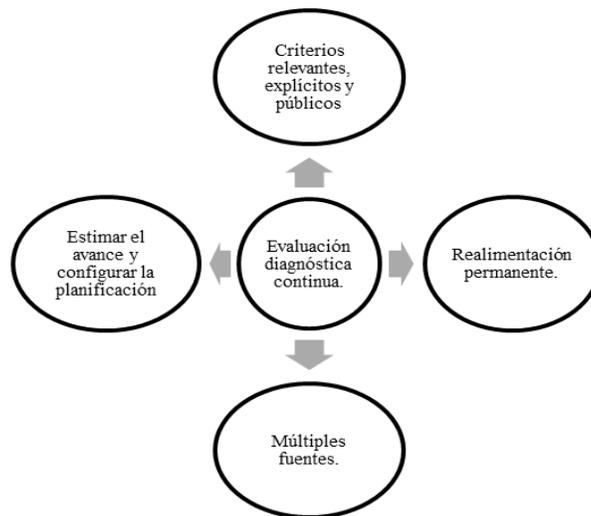


Figura 4. Rasgos efectivos de la evaluación diagnóstica (Stone, 1999)

Fuente: elaboración propia

La evaluación diagnóstica continua requiere de los siguientes elementos: unos criterios relevantes, explícitos y públicos que le dan un marco y que deben estar vinculados a las metas de comprensión; la realimentación permanente y constante para garantizar continuidad; las múltiples fuentes para que el proceso sea amplio y verificable; y por último, el estímulo del avance del estudiante y la configuración de la planificación del docente, sin perder de vista el cumplimiento de las metas de comprensión.

Finalmente, de acuerdo con la idea de evaluación diagnóstica, Patiño (2012) expresó que las valoraciones que suscitan la comprensión (más que simplemente evaluarla) tienen que ser algo más que una evaluación al final de una unidad. Estas valoraciones admiten que docente y alumno conozcan de cerca aquello que se ha comprendido.

2.3.2 Cualidades de la comprensión.

El marco conceptual de la EpC, para autores como Boix y Gardner (1999), surgió gracias a la relación directa entre la teoría y los datos, una relación que no solo aborda la comprensión no escolarizada, sino la comprensión disciplinaria suscitada en el trabajo del aula, como punto de partida para la consolidación de los niveles de comprensión. Tras el surgimiento del marco conceptual, las cualidades emergen del trabajo con los alumnos, y frente a esa reconfiguración los mismos autores concluyeron lo siguiente:

Para describir sistemáticamente las cualidades de la comprensión –en formas que sean a la vez respetuosas de la especificidad disciplinaria y válida en diferentes dominios– el marco conceptual de la comprensión destaca cuatro dimensiones de la comprensión: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación. Dentro de cada dimensión, el marco describe cuatro niveles de comprensión: ingenua, de principiante, de aprendiz y de maestría. (p. 230)

Así como las cualidades esbozan los rasgos esenciales de la comprensión y se describen a través de las dimensiones que evalúan su calidad, los descriptores como pilares ayudan al análisis de la comprensión (Acevedo, 2011).

2.3.2.1 Dimensiones de comprensión.

El marco conceptual de la EpC propone cuatro dimensiones que evalúan y caracterizan la comprensión en determinados factores y conductas disciplinares, estas se describen en los siguientes apartados.

2.3.2.2 Dimensión de contenido.

La primera dimensión guarda una estrecha relación con el currículo y con la manera como los estudiantes dominan la teoría, los conceptos y el razonamiento, por lo que pueden moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones. En términos de Stone (1999), esta “evalúa el nivel hasta el cual los alumnos han trascendido las perspectivas intuitivas o no escolarizadas” (p. 230); se trata, entonces, de una comprensión que está atribuida a lo práctico y a la experiencia, así

como a la consolidación del concepto con base en los saberes previos, por lo que criterios como las creencias intuitivas transformadas, y las redes conceptuales coherentes y ricas, parten del modo en que los estudiantes demuestran qué saben y razonan a partir de contenidos organizados dentro del currículo.

2.3.2.3 Dimensión de método.

Hace alusión a las formas de construir conocimientos, en las que se emplean diversas herramientas con las cuales los estudiantes refinan sus niveles de comprensión. Allí se tienen en cuenta los métodos, los criterios y los procedimientos. Sobre ello, Stone (1999) dedujo:

[Que] la dimensión de métodos evalúa la capacidad de los alumnos para mantener un sano escepticismo acerca de lo que conocen o lo que se les dice, así como su uso de métodos confiables para construir y validar afirmaciones y trabajos verdaderos, moralmente aceptables o valiosos desde un punto de vista estético. (p. 232)

Mientras la dimensión de contenidos tiene en cuenta la experiencia y las creencias intuitivas, la dimensión de métodos va más allá del sentido común, al considerar las construcciones, validaciones y descripciones realizadas por los estudiantes, desde la ejecución de métodos y procedimientos empleados en la construcción de su saber.

2.3.2.4 Dimensión de propósito.

Respecto a esta dimensión, Stone (1999) enunció que evalúa la capacidad de los alumnos para reconocer los propósitos y los intereses que orientan la construcción del saber, sus competencias para usar el conocimiento en múltiples situaciones, y las consecuencias de hacerlo. Igualmente, allí se relaciona la forma en que la práctica alimenta la teoría, y como esta puede ser utilizada en distintos contextos.

2.3.2.5 Dimensión de Formas de comunicación.

Se relaciona con el lenguaje y las formas con las que los estudiantes comunican a otros lo que han comprendido, así como con la situación, el contexto y los otros sujetos. La comunicación es

un eje articulador de la comprensión en la medida en que contiene, por un lado, la idea de entender a los otros estudiantes, de saber a quién se dirigen para crear la forma de comunicación más efectiva; por otro lado, implica conocerse a sí mismo para identificar cuál es la forma de comunicación en la que se tiene más habilidad. En concordancia con ello, Stone (1999) ha asegurado que esta dimensión “evalúa el uso, por parte de los alumnos, de sistemas de símbolos (visuales, verbales, matemáticos y cinestésicos, corporales, por ejemplo) para expresar lo que saben” (p. 237).

En resumen, las cuatro dimensiones resumen los rasgos esenciales de la experiencia de la comprensión y de los saberes disciplinares. En la siguiente tabla se evidencian sus características en premisas concretas:

Tabla 7. *Las dimensiones y sus rasgos*

Contenido	Métodos	Propósitos	Formas de comunicación
A. Creencias intuitivas transformadas.	A. Sano escepticismo.	A. Consciencia de los propósitos del conocimiento.	A. Buen manejo de los géneros de desempeños.
B. Redes conceptuales coherentes y ricas.	B. Construir conocimiento en el dominio.	B. Usos del conocimiento.	B. Usos efectivos de sistemas de símbolos.
	C. Validar el conocimiento en el dominio.	C. Manejo y autonomía.	C. Consideración de la audiencia y el contexto.

Fuente: (Hetland, Hammerness, Ungerm y Gray, 1999)

2.3.2.6 Niveles de comprensión.

La comprensión puede variar de una dimensión a otra, dependiendo de los desempeños específicos que se aborden al interior de estas. De ahí que se caractericen los cuatro niveles prototípicos de la comprensión por dimensión: de ingenuo, de principiante, de aprendiz y de maestría, y que Boix y Gardner como se citó en Stone (1999) las hayan conceptualizado como se presenta a continuación.

2.3.2.7 Nivel ingenuo.

Este nivel se basa en el conocimiento intuitivo, aquello que el estudiante ha construido de manera empírica. Los desempeños de los estudiantes en un nivel ingenuo tienden a generar descripciones imaginativas pero incorrectas del proceso. Al respecto, Rivera (2014) expresó que “en este nivel los estudiantes en sus explicaciones no dan cuenta de un proceso de análisis de la información coherente y rico en posibilidades” (p. 32), y son poco reflexivos ante el modo como el conocimiento es comunicado a otros.

2.3.2.8 Nivel de novato.

Fue Stone (1999) quien lo denominó nivel de comprensión de novatos. En él, los estudiantes describen los procedimientos y los objetivos de la construcción del conocimiento y de algunos conceptos, así como sus formas de expresión y comunicación. Conviene distinguir que la convalidación de estos procedimientos depende de los saberes impartidos por los docentes y de los contenidos de los libros, más que de los criterios de los estudiantes. Según Pogré (2012) como se citó en González (2014), “en este nivel los estudiantes no son conscientes de que el uso de este trae consecuencias, y la validación del saber está dada por la figura de autoridad” (p. 101).

2.3.2.9 Nivel aprendiz.

Se fundamenta en los saberes y en los disciplinarios modos de pensar de los expertos. Asimismo, los desempeños en este nivel demuestran una expresión y comunicación de conocimiento flexible y adecuado. Para Rivera (2014), “durante la construcción de razonamientos plasmados en las explicaciones, el estudiante es capaz de argumentar procesos y procedimientos utilizando conceptos propios de las matemáticas [...]” (p. 33), y existe una relación entre el conocimiento disciplinar, su uso y el contexto.

2.3.2.10 Nivel maestría.

Este nivel es integrador, creativo y crítico; en ese sentido, los estudiantes son capaces de moverse con flexibilidad entre dimensiones, y pueden usar el conocimiento para reinterpretar y actuar en el mundo que les rodea, a partir de su reflexión y espíritu crítico. Los desempeños en este nivel alcanzan un nivel más profundo, pues evidencian una comprensión que tiene la posibilidad de transversalizar varias disciplinas (Boix y Gardner, 1999).

2.4 Relación entre los elementos, las cualidades de la comprensión y la investigación

A continuación, se presenta un esbozo sobre cómo los elementos y cualidades de la comprensión fortalecen los fines de este estudio, a partir del marco conceptual de la EpC.

Tabla 8. *Las cuatro dimensiones de la comprensión y sus rasgos*

Conocimiento	Métodos	Propósitos	Formas
<p>A. <i>Creencias intuitivas transformadas</i></p> <p>¿En qué medida muestran los desempeños de los alumnos qué teorías y conceptos garantizados del dominio han transformado sus creencias intuitivas?</p>	<p>A. <i>Sano escepticismo</i></p> <p>¿En qué medida despliegan los alumnos un sano escepticismo hacia sus propias creencias y hacia el conocimiento de fuentes tales como textos, las opiniones de la gente y los mensajes de los medios de comunicación?</p>	<p>A. <i>Conciencia de los propósitos del conocimiento</i></p> <p>¿En qué medida ven los alumnos las cuestiones, los objetivos y los intereses esenciales que impulsan la investigación en el dominio?</p>	<p>A. <i>Dominio de los géneros de realización</i></p> <p>¿En qué medida despliegan los estudiantes un dominio de los géneros de desempeños en los que se comprometen, tales como escribir informes, hacer presentaciones o preparar el escenario de una pieza?</p>
<p>B. <i>Redes conceptuales ricas y coherentes</i></p> <p>¿En qué medida son capaces los alumnos de razonar dentro de redes conceptuales ricamente organizadas, moviéndose con flexibilidad entre detalles y visiones generales, ejemplos y generalización?</p>	<p>B. <i>Construir conocimiento en el dominio</i></p> <p>¿En qué medida usan los estudiantes estrategias, métodos, técnicas y procedimientos, similares a los usados por los profesionales del dominio, para construir conocimiento confiable?</p>	<p>B. <i>Usos del conocimiento</i></p> <p>¿En qué medida reconocen los alumnos una variedad de usos posibles de lo que aprenden?</p> <p>¿En qué medida consideran los alumnos las consecuencias de usar su conocimiento?</p>	<p>B. <i>Uso efectivo de sistemas de símbolos</i></p> <p>¿En qué medida exploran los estudiantes diferentes sistemas de símbolos para representar su conocimiento de maneras efectivas y creativas, por ejemplo, mediante el uso de analogías y metáforas, colores y formas o movimientos?</p>
	<p>C. <i>Validar el conocimiento en el dominio</i></p> <p>¿Depende la verdad, lo bueno y lo bello de afirmaciones autorizadas, o más bien de criterios públicamente aceptados como usar métodos sistemáticos, ofrecer argumentos racionales, tejer explicaciones coherentes, y negociar sentidos por medio de un diálogo cuidadoso?</p>	<p>C. <i>Buen manejo y autonomía.</i></p> <p>¿En qué medida evidencian los alumnos buen manejo y autonomía para usar lo que saben?</p> <p>¿En qué medida han desarrollado los estudiantes una posición personal alrededor de lo que aprenden?</p>	<p>C. <i>Consideración de la audiencia y del contexto.</i></p> <p>¿En qué medida demuestran los desempeños de los alumnos una conciencia de los intereses, necesidades, edades, maestría o antecedentes culturales de la audiencia?</p> <p>¿En qué medida demuestran conciencia del contexto de comunicación?</p>

Fuente: (Boix y Gardner, 1999)

Tabla 9. *La dimensión del conocimiento: sus rasgos y niveles de comprensión*

Rasgo	Definir preguntas por rasgos	Nivel 1. Ingenuo	Nivel 2. De principiante	Nivel 3. De aprendiz	Nivel 4. De maestría.
A. Creencias intuitivas transformadas	¿En qué medida demuestran los desempeños de los alumnos que las teorías y conceptos garantizados del dominio han transformado sus creencias intuitivas?	Faltan conceptos disciplinarios; prevalecen las creencias intuitivas, folclóricas o míticas.	Ecléctico. Los alumnos mezclan creencias intuitivas con fragmentos de conocimiento disciplinario, pero siguen dominando las visiones intuitivas.	Prevalecen las teorías y los conceptos disciplinarios. Pueden aparecer algunas creencias intuitivas. El conocimiento disciplinario sigue considerándose no vinculado con el sentido común.	Prevalecen los conceptos disciplinarios. Los alumnos reconocen la importancia del conocimiento disciplinario para refinar las creencias del sentido común y la importancia de este para inspirar, desarrollar y criticar el conocimiento disciplinario.
B. Redes conceptuales ricas y coherentes	¿En qué medida son capaces los alumnos de razonar dentro de redes conceptuales ricamente organizadas, moviéndose con flexibilidad entre detalles y visiones generales, ejemplos y generalizaciones?	Fragmentos o partes del conocimiento parecen aburridos, borrosos o no diferenciados. Los ejemplos y generalizaciones están desconectados. Incluso cuando se los insta, los alumnos ven los problemas desde el punto de vista de ejemplos específicos o de generalizaciones amplias.	Los estudiantes afirman conexiones simples, frágiles o ensayadas entre conceptos o ideas. Además, se extienden en ejemplos, pero no son capaces de vincularlos con generalizaciones o marcos del dominio. Cuando se los insta, los alumnos pueden pasar de ejemplos específicos a generalizaciones más amplias en formas ensayadas.	Los alumnos demuestran una fértil red de ideas o puntos de vista dentro de un dominio. Aunque pueden aparecer algunas brechas o contradicciones, se mueven espontáneamente entre ejemplos específicos y generalizaciones de la disciplina. Los estudiantes todavía no demuestran la capacidad de razonar creativamente dentro de estos marcos disciplinarios.	Los alumnos muestran redes altamente organizadas de ideas o puntos de vista dentro de un dominio. Los estudiantes dejan ver movimientos fluidos entre una rica variedad de ejemplos específicos y generalizaciones disciplinarias amplias. Los ejemplos y generalizaciones son usados reflexivamente para apoyarse unos a otros. Los alumnos crean nuevas asociaciones, ejemplos, interpretaciones o respuestas que son coherentes con marcos e ideas disciplinarias.

Fuente: (Boix y Gardner, 1999)

Tabla 10. *La dimensión de los métodos: sus rasgos y niveles de comprensión*

Rasgo	Definir preguntas por rasgos	Nivel 1. Ingenuo	Nivel 2. De principiante	Nivel 3. De aprendiz	Nivel 4. De maestría
A. Sano escepticismo	¿En qué medida despliegan los alumnos un sano escepticismo hacia sus propias creencias y hacia fuentes de conocimiento tales como libros de texto, opiniones de gente y mensajes de los medios?	<i>Conocimiento y mundo no se distinguen. Este asunto es incuestionable, puesto que se refiere al mundo. Los alumnos ven el mundo como inmediatamente captable, por lo tanto, ningún método específico es necesario para probar las afirmaciones.</i>	<i>El conocimiento es información sobre el mundo. El escepticismo no es tan evidente. Los alumnos ven la necesidad de respaldar sus afirmaciones, no obstante, es cuestión de demostrar que son acertadas, mas no de averiguar si sus creencias son correctas.</i>	<i>El conocimiento es humanamente construido. Con apoyo, pueden dudar y ser autocríticos o escépticos a cerca de lo que piensan, saben, oyen, leen y toman por contenido disciplinario.</i> En la mayoría de los casos, las críticas son escasas o ensayadas. Los alumnos centran su escepticismo en simples métodos o procedimientos. Además, pueden aparecer contradicciones o malas concepciones. En algunas ocasiones el escepticismo de los alumnos se vuelve nihilista, de modo que pone en cuestión cualquier creencia o conocimiento disciplinario.	<i>El conocimiento es humanamente construido, racionalmente discutible, guiado por un marco y provisorio. Los estudiantes dudan y son autocríticos o escépticos frente a lo que piensan, saben, oyen, leen y toman por contenido disciplinario.</i> Sus críticas por lo general se refieren a la base sobre la cual se construye el conocimiento disciplinario, es decir, perciben y usan múltiples métodos y procedimientos en un dominio, e implícitamente reconocen las limitaciones de los métodos. Cuando se les presentan nuevas pruebas, teorías o interpretaciones, los alumnos pueden centrar su escepticismo en la naturaleza provisorio del conocimiento disciplinario, en los objetivos que impulsan la construcción del conocimiento, o en los usos o consecuencias de este.
B. Construir conocimiento en el dominio.	¿En qué medida los alumnos usan estrategias, métodos, técnicas y procedimientos similares a los utilizados por profesionales en el dominio para construir conocimiento confiable?	Ningún método de construcción del conocimiento es evidente, más allá del ensayo y el error.	Los estudiantes empiezan a comprender que los métodos son útiles para construir conocimiento, pero aplican mecánicamente los procedimientos.	Los alumnos ven el valor de los métodos para construir conocimiento confiable. “El conocimiento es construido humanamente por medio de métodos”. Los alumnos tienden a usar un solo y simple método o procedimiento para construir conocimiento en el dominio.	Los estudiantes usan una variedad de métodos efectivamente, o utilizan métodos simples de forma sofisticada. Algunos alumnos perciben que los métodos emergen a través de una discusión pública y racional.

Fuente: (Boix y Gardner, 1999)

Tabla 11. *La dimensión de los propósitos: sus rasgos y niveles de comprensión*

Rasgo	Definir preguntas por rasgos	Nivel 1. Ingenuo	Nivel 2. De principiante	Nivel 3. De aprendiz	Nivel 4. De maestría
A. Conciencia de los objetivos del conocimiento.	¿En qué medida ven los alumnos cuestiones, objetivos e intereses que impulsan la investigación en el dominio?	Los alumnos no son conscientes de cuestiones y objetivos esenciales que impulsan la investigación en el dominio; es decir, no son conscientes del hecho de que aprenden lo que se les enseña.	Los estudiantes son conscientes de que cuestiones esenciales guían la investigación en el dominio, aunque esas cuestiones y objetivos no se vinculan claramente, o aquello se lleva a cabo mecánicamente con la investigación en el dominio.	Con apoyo, los alumnos pueden identificar cuestiones y objetivos esenciales que impulsan la construcción de conocimiento, y lo usan para reflexionar sobre la importancia de lo que aprenden en la escuela.	Los estudiantes buscan espontáneamente e identifican cuestiones y objetivos esenciales que guían la investigación humana, mientras reflexionan acerca de la importancia de lo que aprenden. Algunos alumnos reconocen estas cuestiones como parte significativa de su propia vida. Otros cuestionan el objetivo de la construcción de conocimiento en un dominio por las consecuencias potencialmente negativas de su uso.
B. Múltiples usos	¿En qué medida reconocen los alumnos una variedad de usos posibles de lo que aprenden? ¿En qué medida consideran los alumnos las consecuencias de usar su conocimiento?	Los alumnos no exploran el potencial de lo que aprenden más allá de las tareas prescritas. Sus desempeños demuestran poca o ninguna relación entre lo que aprenden en la escuela y las experiencias de la vida cotidiana.	Los alumnos exploran el potencial de lo que aprenden en la escuela cuando se supone que lo deben hacer. Los usos del conocimiento que identifican están atados estrechamente a rituales y tareas escolares, como hacer presentaciones o escribir ensayos. Con apoyo, los alumnos empiezan a conectar lo que aprenden con las experiencias cotidianas. Las conexiones pueden seguir siendo ensayadas. Ellos no examinan las consecuencias de usar el conocimiento más allá de las	Con apoyo, los estudiantes usan lo que aprenden en la escuela de muchas formas originales en la vida cotidiana, con el fin de resolver problemas prácticos, generar explicaciones, interpretarse a sí mismos y a los demás, y modificar situaciones. Espontáneamente reinterpretan la experiencia cotidiana a través de lentes aprendidas en la escuela; por ejemplo, los valores que orientan las decisiones están claramente informados por las visiones del mundo aprendidas en la escuela. Con una guía, algunos	Los alumnos espontáneamente usan el conocimiento de maneras nuevas o múltiples. Claramente perciben al conocimiento como una herramienta para predecir y controlar la naturaleza, orientar la acción humana o mejorar su entorno social o el mundo físico. Los alumnos, de forma espontánea, interpretan las experiencias de la vida cotidiana, a través de las visiones aprendidas en la escuela y las usan para interpretar lo que aprenden; por ejemplo, los valores que orientan sus decisiones están claramente informadas por visiones del mundo aprendidas en la escuela. Algunos evalúan

			paredes de la escuela.	alumnos examinan consecuencias prácticas, lógicas, sociales y morales de usar el conocimiento, apoyando, por ejemplo, una posición o visión del mundo y generando una reacción o cambio no intencional.	espontáneamente las consecuencias prácticas, lógicas, sociales y morales de usar el conocimiento: por ejemplo, apoyando una posición o cosmovisión y generando una reacción o cambio no intencional.
C. Dominio y autonomía.	<p>¿En qué medida evidencian los alumnos manejo y autonomía para usar lo que saben?</p> <p>¿En qué medida han desarrollado los alumnos una posición personal alrededor de lo que aprenden?</p>	<p>El uso del conocimiento por parte de los alumnos requiere de un considerable apoyo y depende de la instrucción de la autoridad. No hay pruebas de un crecimiento perdurable.</p> <p>Los alumnos no ven el sentido o la necesidad de desarrollar una posición personal acerca de lo que aprenden.</p>	<p>Al principio, los estudiantes necesitan ayuda para usar el conocimiento en situaciones nuevas, pero luego son capaces de hacerlo solos.</p> <p>Cuando los ayudan, los alumnos ven los intereses y posiciones de los autores o especialistas. Sin embargo, siguen tendiendo a verlos como no vinculados con una posición personal sobre el tópico que están aprendiendo.</p>	<p>Los alumnos usan lo que han aprendido libremente, no obstante, sus realizaciones siguen sin considerar las perspectivas o intereses de los demás.</p> <p>Algunos alumnos perciben cómo las posiciones, objetivos e intereses personales afectan la forma en que se construye el conocimiento.</p> <p>Advierten que, como los expertos, también tienen intereses y objetivos para aprender. Descubren que, como ellos, pueden desarrollar posiciones personales acerca de lo que aprenden. Sin embargo, los alumnos siguen percibiendo que estos intereses impulsan caprichosamente las motivaciones de la gente.</p>	<p>Los alumnos demuestran que son dueños de lo que han aprendido. Se sienten más poderosos para usar el conocimiento al margen de las preocupaciones autoritarias o las relaciones de poder. Lo hacen considerando cuidadosamente múltiples perspectivas y preocupaciones. Algunos perciben cómo las posiciones, objetivos e intereses personales afectan la forma en que se construye el conocimiento.</p> <p>Se dan cuenta de que, al igual que los expertos, ellos tienen intereses y objetivos para aprender. A la vez, identifican que pueden desarrollar posiciones personales acerca de lo que aprenden, tal como lo hacen los expertos. Los intereses y las posiciones personales no se consideran más caprichosas, sino arraigadas en visiones del mundo, marcos o antecedentes.</p>

Fuente: (Boix y Gardner, 1999)

Tabla 12. *La dimensión de las formas de comunicación: sus rasgos y niveles de comprensión*

Rasgo	Definir preguntas por rasgos	Nivel 1. Ingenuo	Nivel 2. De principiante	Nivel 3. De aprendiz	Nivel 4. De maestría.
A. Dominio general del desempeño.	¿En qué medida despliegan los alumnos los géneros de desempeños que emprenden, tales como escribir informes, hacer presentaciones, o preparar el escenario?	<p>Los géneros o tipos de desempeños con los cuales los alumnos comunican sus ideas parecen poco importantes para ellos.</p> <p>Los alumnos no son conscientes de que los géneros tienen reglas específicas.</p>	<p>Los estudiantes siguen los cánones de desempeños específicos ritualmente; por ejemplo, las presentaciones son asunto de seguir ciertas pautas e instrucciones.</p> <p>Cuando se los insta, pueden seguir con éxito instrucciones para desempeñarse en el nuevo género.</p>	<p>Los alumnos se comprometen en ricos desempeños de comprensión y se mueven con flexibilidad y expresivamente dentro del género o tipo de realización en cuestión.</p> <p>Ellos demuestran conciencia de las reglas cuando empiezan a explorar nuevos géneros.</p>	<p>Los alumnos emprenden ricos desempeños de comprensión y se mueven con flexibilidad y expresividad dentro del género o tipo de desempeño en cuestión.</p> <p>Algunos introducen nuevos y aceptables cambios en formas típicas de desempeñarse en cada género, o combinan con éxito géneros de manera aceptable.</p> <p>Varios demuestran dominio del género al manifestar un claro estilo o voz personal al desempeñarse en él.</p> <p>Cuando exploran nuevos géneros, los alumnos espontáneamente buscan desempeñarse según las reglas.</p>
B. Uso efectivo de sistemas de símbolos.	¿En qué medida exploran los alumnos diferentes sistemas de símbolos de forma efectiva y creativa, por ejemplo, usando analogías y metáforas, colores y formas o movimientos?	<p>Los sistemas de símbolos se usan sin reflexión, lo que da como consecuencia representaciones poco claras. No hay ninguna intención comunicativa o estética evidente.</p>	<p>Los alumnos muestran una familiaridad inicial con los sistemas de símbolos en cuestión; por ejemplo, cuando usan metáforas comunes, movimientos simples o desempeños equilibrados.</p> <p>Estos estudiantes tienden a usar un solo sistema de símbolos para expresar lo que han aprendido.</p>	<p>Los alumnos demuestran un dominio flexible y fácil de un sistema de símbolos: metáforas expresivas y analogías o cuidadosos movimientos corporales, por ejemplo.</p> <p>El centro de atención está en el propio sistema de símbolos; los alumnos exploran colores, términos y movimientos, pero con una atención que a menudo interfiere con el objetivo representativo del desempeño.</p> <p>Cuando se los motiva,</p>	<p>Los estudiantes demuestran un fácil acceso y un dominio flexible o grácil en diferentes formas de representación de lo que saben o una elevada maestría en un sistema de símbolos específico.</p> <p>Además, muestran una conciencia estética en su uso de sistemas de símbolos, un atractivo uso de metáforas y analogías, originalidad, parsimonia o elegancia. En cada caso, deliberadamente usan símbolos para apoyar metas representativas.</p> <p>Cuando es necesario, usan más de un sistema de símbolos, integrándolos con flexibilidad y sentido estético de formas que sirven al objetivo que tienen en mente.</p>

				los alumnos usan más de un sistema de símbolos y deciden cuál es el más poderoso para el objetivo que tienen en mente.	
C. Consideración de la audiencia y del contexto.	<p>¿En qué medida demuestran los desempeños de los alumnos una conciencia del público, tal como sus intereses, necesidades, edades, conocimiento o antecedentes culturales?</p> <p>¿En qué medida demuestran conciencia del contexto de la comunicación?</p>	<p>La comunicación es egocéntrica. Los públicos y contextos no se toman en cuenta.</p> <p>No es posible ninguna conciencia, es evidente la incomunicación.</p>	<p>La audiencia se toma en cuenta, pero con una perspectiva egocéntrica; se espera que el público se adecúe a la presentación y que asuma la carga de entenderla. La comunicación iguala a la transmisión.</p> <p>No se presta atención a las formas específicas en las cuales el contexto puede estar configurando la comunicación.</p> <p>Las fallas en la comunicación se ven como falta de atención por parte del público, como aspectos técnicos de la comunicación, o como términos o ilustraciones usadas sin que se las entienda.</p>	<p>Con apoyo, los estudiantes toman en cuenta al público, es decir, son sensibles a diferencias tales como género, intereses, necesidades, nivel de conocimiento y antecedentes culturales. Sin embargo, todavía no se perciben como público de otros.</p> <p>Los alumnos demuestran una conciencia inicial de algunas formas en que los contextos pueden afectar la comunicación, pero manejan mecánicamente los factores contextuales, si lo hacen.</p> <p>Los alumnos todavía no tienen un sentido realista de las dificultades de la comunicación. Para ellos, la comunicación es un asunto de intención, y se cree que querer comunicar es lograrlo.</p>	<p>Los alumnos toman en cuenta al público mostrándose sensibles a diferencias tales como género, intereses, necesidades, nivel de conocimiento y antecedentes culturales. También se ven como público de otros y son capaces de ofrecer una retroalimentación reflexiva.</p> <p>Algunos alumnos también son conscientes de las diversas exigencias que puedan imponer los contextos a la comunicación y pueden hábilmente usar factores contextuales para reforzar la comunicación.</p> <p>Los alumnos son claramente conscientes de las dificultades de la comunicación.</p> <p>Comunicarse con otros, a menudo, entrena comprender y afectar la visión del mundo, los marcos de referencia y las creencias de terceros.</p>

Fuente: (Boix y Gardner, 1999)

CAPÍTULO 3. RECORRIDO METODOLÓGICO

El presente capítulo plantea la metodología que condujo a dar respuesta a la pregunta de investigación y al cumplimiento de los objetivos. Se recurrió a la investigación de corte cualitativo, que consiste en la recolección y cualificación de información. Aquí se describirán el enfoque empleado, los participantes, las técnicas y los instrumentos de recolección de la información, la triangulación de la información y los descriptores de nivel dispuestos en el marco de referencia de la EpC articulados con la metodología propuesta.

3.1 Metodología

La investigación cualitativa se apoya en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de los seres vivos. La comprensión como objeto de estudio puede considerarse, a criterio del investigador, como una de esas acciones que puede ser entendida, analizada y descrita (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Por consiguiente, se define que la metodología de la presente investigación es cualitativa, de acuerdo con Creswell (2013b) y Newman (1994) como se citó en Hernández et al. (2014), quienes enunciaron que algunas de dichas acciones se soportan en las actividades propias del investigador debido a que “adquiere un punto de vista “interno” (desde dentro del fenómeno), aunque mantiene una perspectiva analítica o cierta distancia como observador externo” (p. 9), y que este “utiliza diversas técnicas de investigación y habilidades sociales de una manera flexible, de acuerdo a los requerimientos de las situaciones” (p. 9). Ambas afirmaciones son aplicables a este proceso de investigación que se enfoca en analizar la comprensión de un concepto importante para las matemáticas: la variable como incógnita. La investigación se propone en cuatro fases, atendiendo a las características de la metodología y articuladas con las fases o etapas del marco conceptual de la EpC.

3.1.1 Fases del marco conceptual.

Desde el marco conceptual propuesto las fases son consideradas categorías progresivas que relacionan lo que los estudiantes saben con los aprendizajes o comprensiones que logran respecto a un objeto de estudio. Entonces, las fases son las siguientes:

3.1.1.1 Fase de exploración.

De acuerdo con lo que se estableció en el capítulo 2, en la etapa o fase de exploración los estudiantes relacionan los saberes previos y los intereses de lo que quieren aprender. Por lo tanto, en esta fase se tendrán en cuenta el diseño y la aplicación de una actividad exploratoria que permita identificar los usos que los estudiantes del grado quinto le atribuyen al concepto de variable. Para este proceso se aplicó un *test* tipo cuestionario, el cual se utilizó también en la fase final de síntesis como respaldo a la entrevista semiestructurada. La unidad curricular también presenta actividades que involucran los propósitos de esta fase.

3.1.1.2 Fase de investigación guiada.

El estudiante debe centrarse en el tópico generativo y en las metas de comprensión. En esta fase se continúa con la implementación de la unidad curricular sobre el manejo de la incógnita, lo cual llevará a la comprensión. El taller propuesto para este momento presenta problemas creados por el investigador y por otros autores.

3.1.1.3 Fase proyecto final de síntesis.

Como ya se definió, en esta fase se evalúan los dominios que los estudiantes tienen de las metas de comprensión. En la unidad curricular se presentan actividades tendientes a evaluar el conocimiento que tienen los estudiantes acerca del uso de la variable como incógnita para una posterior apropiación de dicha caracterización. El cuestionario refinado y la entrevista semiestructurada ayudarán al desarrollo de esta fase.

3.2 Enfoque de la investigación

Desde un punto de vista cualitativo, como lo concibieron Hernández et al. (2014), un enfoque es un “conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo “visible”, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos” (p. 9). La presente investigación se enmarca en dicho enfoque puesto que tiene como finalidad describir, determinar y analizar el proceso de comprensión de los estudiantes del grado quinto sobre el concepto de variable como incógnita, para lo cual se diseñaron e

implementaron distintas técnicas e instrumentos y se aplicaron diferentes situaciones didácticas construidas por el investigador, por otros autores o sugeridas por los mismos escolares. Como elemento articulador de la metodología con el marco conceptual, la descripción se hizo a través del proceso de evaluación diagnóstica continua (Stone, 1999).

Si se centra la atención en el paradigma cualitativo es posible argüir que el enfoque es naturalista e interpretativo pues “estudia los fenómenos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y en su cotidianidad [...] intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen” (Hernández et al., p. 9). En ese sentido, resulta pertinente mencionar que el proyecto se llevó a cabo en la sede San José de la vereda El Golpe del municipio de Concordia, por lo cual los estudiantes estuvieron en su entorno cultural o natural, mientras el investigador intentaba describir el fenómeno de su comprensión acerca de un concepto específico.

3.3 Método de investigación

El método es un aparte importante del proceso investigativo, en este caso el método empleado, de orden cualitativo, fue el estudio de caso, el cual Martínez (2006) definió como “una herramienta valiosa de investigación, y su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se mide y registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado”(p. 4), puesto que esta según, Chetty (1996) como se citó en Martínez (2006) “es adecuada para investigar fenómenos en los que se busca dar respuesta a cómo y por qué ocurren” (p. 12). Por este motivo, analizar cómo se da la comprensión de un concepto matemático se convierte en un objeto de estudio significativo para la educación, sobre todo del área de las Matemáticas. El estudio de caso puede centrarse en ser una persona, un grupo de personas o de profesionales que estudian alguna situación (Stake, 1998). Para la presente investigación se tuvieron en cuenta las tres opciones anteriores. Adicionalmente, Stake (1998) planteó que hay tres tipos de estudios de caso que dependen de la finalidad última de cada uno:

- Estudio de caso intrínseco: casos con características propias, que poseen un valor en sí mismos y buscan alcanzar una mejor comprensión del caso concreto por estudiar. En este tipo de estudio de caso no se elige al caso porque sea representativo de otros casos o porque evidencie un determinado problema o rasgo, sino porque el caso en sí

es de interés.

- Estudio instrumental de casos: es un instrumento para conseguir algo diferente a la comprensión. Se parte del entendimiento de un estudio de caso particular para llegar a investigar a la necesidad de comprensión general.
- Estudio de caso colectivo: se realiza cuando el interés de la investigación se centra en un fenómeno, población o condición general seleccionando para ello varios casos que se han de estudiar intensivamente. (p. 16)

Para elegir bien el tipo de caso para un estudio, se deben escoger situaciones en las cuales las indagaciones sean bien acogidas y se pueda identificar un posible informador, además, que respondan a criterios como el tiempo del que se dispone para el trabajo de campo, la posibilidad de acceso y el alcance máximo de rentabilidad (Stake, 1998). Con base en lo anterior, se puede afirmar que para el caso particular de esta investigación se realizará un estudio de caso intrínseco dado que el caso en sí es de interés, no solo para la investigación, sino para la educación matemática.

3.4 Participantes

El Centro Educativo Rural Casa Grande del municipio de Concordia, Antioquia, está conformado por las sedes Casa Grande, El Cascajo, El Morito, La Costa, La Selva, León de Greiff, Mata de Monte, Morrón, Rumbadero, y San José que están ubicados entre el sureste y el noreste de la cabecera municipal, en las veredas Rumbadero, Pueblo Rico, Morrón, La Costa, El Cascajo, La Selva y El Golpe. El trabajo de campo se desarrolló en la sede Educativa San José, la cual cuenta con estudios aprobados según la Resolución Departamental S227162 del 31 de diciembre de 2014. Dicha institución atiende población rural dispersa sobre la ribera del río Cauca, bajo las metodologías de Escuela Nueva¹ y Posprimaria Rural². El área de Matemáticas

¹ Según el MEN (2014) es un modelo educativo que permite ofrecer primaria completa en escuelas multigrado con uno o dos maestros; integra de manera sistémica estrategias curriculares, comunitarias, de capacitación, seguimiento y administración, donde se promueve el aprendizaje activo, participativo y cooperativo y se fortalece la relación escuela-comunidad.

² Según el MEN (2014) es un modelo que permite que los niños, niñas y jóvenes del sector rural puedan acceder al ciclo de educación básica secundaria con programas pertinentes a su contexto.

tiene una intensidad semanal de cinco horas en los niveles de primaria y secundaria, y en último el área se divide en dos asignaturas, Matemáticas y Geometría.

El investigador trabaja como director rural en el Centro Educativo Rural en donde se llevó a cabo el proyecto, lo cual le permitió acceder bajo el rol de docente y observador de los participantes de la investigación. Inicialmente, se socializaron con los estudiantes de grado quinto y con la docente responsable de la dirección de grupo los criterios necesarios para participar del proceso de investigación. En el mismo diálogo se les expresó a los estudiantes que a partir de la aplicación de algunos instrumentos, como la unidad curricular, posiblemente se mejoraría la aptitud numérica y la capacidad para comunicar las ideas. Los criterios que se establecieron para la participación en el proyecto fueron:

- Cercanía del lugar de residencia del estudiante a la sede educativa y, así, la disponibilidad para cuando se realizará el trabajo de campo.
- Que tanto la familia como el niño tuvieran el interés de participar en la investigación y asumieran el compromiso de la entrega puntual de los trabajos.
- Motivación propia por pertenecer a la investigación.

Solo ocho estudiantes acudieron con el consentimiento informado, lo cual indicó que los seis restantes no estarían interesados en hacer parte de la investigación. No obstante, al analizar las condiciones de distancia tres de los primeros ocho estudiantes optaron por retirarse voluntariamente, debido a que su lugar de residencia estaba ubicado por encima de los 10 km sobre la ribera del río Cauca, lo cual dejó un grupo de cuatro estudiantes para el proceso. Pero, uno de estos fue trasladado a otra institución educativa, por lo cual en definitiva solo quedaron tres participantes. Dado que los estudiantes eran menores de edad, se vincularon algunos elementos éticos a la investigación como el marco legal, el consentimiento firmado por los padres de familia, la abstención de publicar fotografías y audios de los participantes y el uso de seudónimos para proteger sus identidades. Los seudónimos utilizados fueron: Manuel, Luciana y Pedro.

3.5 Técnicas e instrumentos

De acuerdo con lo expresado por Restrepo (1996) “los datos son hechos y lo fundamental de la investigación es idear técnicas y construir y refinar instrumentos que permiten interrogar objetivamente la realidad” (p. 106). Así, los instrumentos seleccionados posibilitaron la evaluación del avance de la comprensión de los estudiantes participantes con respecto al objeto de la incógnita como variable. Estos fueron:

3.5.1 Rúbrica.

Según González (2014) la rúbrica es un “aporte fundamental del marco conceptual de la EpC a la validación de la investigación” (p. 149), lo cual confirma que es una contribución importante para el análisis de la información recolectada a través de los instrumentos aplicados. Este instrumento relacionó las dimensiones y los niveles de la comprensión con categorías definidas y refinadas para guardar correspondencia con el objeto de estudio. Lo anterior llevó a construir unos descriptores de desempeño que permitieron determinar el nivel alcanzado por cada estudiante y analizar el proceso de comprensión del concepto de variable como incógnita. El proceso descriptivo de la comprensión de los participantes para ubicarla en los niveles de desempeño de cada dimensión se logró con la ejecución de la unidad curricular, la transcripción de las entrevistas, la práctica pedagógica del investigador y la observación participante.

3.5.2 Observación participante.

De acuerdo con las acepciones presentadas por Kawulich (2005), traducidas por López (2006), sobre la observación participante como método de recolección de la información se sustenta su utilización para la presente investigación.

Las observaciones facultan al observador a describir situaciones existentes usando los cinco sentidos, proporcionando una “fotografía escrita” de la situación en estudio” [...] “es el proceso que faculta a los investigadores a aprender acerca de las actividades de las personas en estudio en el escenario natural. (p. 2).

Por ende, lo anterior se conecta con el enfoque naturalista definido anteriormente en el enfoque, la observación participante entonces se respalda con el semanario pedagógico de la

institución y que llevan sus docentes. Ello posibilita que el investigador registre el seguimiento de los estudiantes participantes en el proceso de investigación.

3.5.3 La entrevista semiestructurada.

La entrevista se define como una técnica en función del investigador y un instrumento al servicio del objeto de la investigación, deberá ser, según Hernández et al. (2006), “íntima, flexible y abierta” (p. 597). Este instrumento se relaciona con la expectativa de que los participantes expresen sus puntos de vista frente al objeto de investigación, es un proceso íntimo donde no hay señalamientos o prejuicios frente a las respuestas dadas, y es abierto porque las preguntas así lo guían. El tipo de entrevista utilizado es el semiestructurado, pues parte de preguntas planeadas que pueden ajustarse a las condiciones académicas de los estudiantes, a sus saberes adquiridos y admite la interlocución entre los actores. Su elección obedece a la dicha posibilidad de adaptación y flexibilidad, dado que es un medio para motivar a los estudiantes participantes, aclarar términos, identificar ambigüedades y reducir formalismos.

3.5.4 Dispositivos de almacenamiento.

Con el propósito de conservar las evidencias estas fueron grabadas en audio, video y registro fotográfico, con previa autorización de los participantes o quienes ejercen su patria potestad.

3.5.5 Técnicas de análisis.

El proceso de análisis de la información se realizó a partir de la triangulación de fuentes, en la cual se tuvo en cuenta el concepto disciplinar, el marco conceptual de referencia y el cumplimiento del objetivo de la investigación y la armonía de estos con la observación participante. Para comparar y contrastar la información recolectada se empleó una rúbrica denominada dimensiones de categorías por nivel; las categorías de esta fueron elaboradas *a priori* y refinadas durante las fases de la investigación.

3.6 Ruta metodológica: unidad curricular

En este apartado se presenta el camino seguido en el desarrollo de la investigación. Contiene los elementos de la metodología elegidos con base en el marco conceptual de la EpC, y el tipo de

problema por resolver u objeto de estudio, los cuales se compilaron en una unidad curricular. La unidad curricular se define como un entramado de actividades de enseñanza, aprendizaje y evaluación que tiene una relación fuerte con las metas de comprensión, lo que posibilita el desarrollo de los desempeños en los estudiantes (Perrone como se citó en Stone 1999).

Uno de los componentes de dicha unidad curricular son las situaciones presentadas a los estudiantes, las cuales son semejantes a las que pueden ocurrir en su cotidianidad con relación al tópico generativo propuesto, y pueden ser sugeridas por el investigador, otros autores o los mismos estudiantes. De acuerdo con Acevedo (2011) esta ofrece la oportunidad de “de resolver situaciones que le inquietan” (p. 49), por lo cual las situaciones planteadas deben ir dirigidas a ver los desempeños de comprensión como una parte integral, y buscar la pertinencia y posterior análisis de los procesos de comprensión en los estudiantes.

3.6.1 Propósito metodológico de la guía curricular.

Describir la comprensión del concepto de variable como incógnita a través del desarrollo de acciones contextualizadas que asuman la existencia de un valor desconocido que se puede determinar al cual se le denomina incógnita.

3.6.2 Pensamientos y procesos que se desarrollan con la guía curricular.

Los pensamientos que se fortalecen con el desarrollo de las acciones didácticas contenidas en la unidad curricular son el pensamiento numérico y el algebraico, y así se optimizan procesos generales como formular y resolver problemas, comunicar, razonar, comparar y ejercitar procedimientos (MEN, 1998). De esta manera, se busca facilitar la comprensión y la articulación de los conceptos abordados en cada actividad con base en las diferentes fases de los desempeños de comprensión, elemento clave de la EpC.

Después de una lectura de la dinámica escolar se llegó a la siguiente pregunta como tópico generativo: ¿cómo se relaciona el concepto de variable con la variación de fenómenos de la cotidianidad? Durante el período de ejecución de la unidad curricular los estudiantes buscaron la manera de responder a tal interrogante, pero para que la búsqueda fuera orientada, como se establece en la fase de ejecución del marco conceptual, se definieron algunas metas de

comprensión que delimitaron el tópico generativo.

3.6.3 Metas de comprensión.

Las metas de comprensión identifican los conceptos, procesos y destrezas, así como la descripción de las comprensiones, que deben desarrollar los estudiantes durante el proceso de intervención. Las metas planteadas fueron:

- Comprender, a partir del juego y de saberes previos, el concepto de número desconocido.
- Reconocer el concepto de variable en situaciones cotidianas.
- Comprender el concepto de variable como incógnita a partir del trabajo con ecuaciones y de proporcionalidad.

3.6.4 Hilo conductor.

El hilo conductor establece una conexión íntima con las metas de comprensión planteadas a corto plazo, solo que este está dado para que se desarrolle a largo plazo, pues indica hacia donde se quiere dirigir a los estudiantes para que logren la comprensión. González (2014) enunció que “la intención de este es motivar al estudiante a resolver problemas, impulsarlo a buscar información y a cuestionarse sobre la importancia de lo que está aprendiendo” (p. 129). Por tanto, el hilo conductor permite al docente orientar las actividades diseñadas hacia el estudiante, es decir, hacia su participación en cada una de ellas, el fomento de la inquietud y el entusiasmo por el tema abordado. Dicho esto, el hilo conductor de la presente investigación fue: ¿cuál es la importancia que reviste la comprensión de la variable como incógnita en el abordaje de futuros conceptos matemáticos, en la definición del currículo y en la comprensión de situaciones de la vida diaria?

La unidad curricular tiene tres talleres que responden cada uno a las tres fases propuestas por el marco conceptual de la EpC. Dicha unidad tiene un propósito que guarda relación con el tópico generativo y cada taller posee un propósito que responderá a las metas de comprensión. Las actividades propuestas deben estar ancladas a las fases de exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis. La fase de exploración permitirá indagar sobre los conceptos previos que los estudiantes tienen sobre el tópico generativo o las temáticas que guardan cierta

correspondencia con el objeto de estudio. Por su parte, en la fase de investigación guiada el docente orientará la comprensión con actividades que propician el aprendizaje y que son necesarias en la adquisición de las metas de comprensión. Por último, la fase del proyecto final de síntesis hace alusión a la conclusión en la que el estudiante evidencia la comprensión del concepto matemático. Los talleres se presentan de manera secuencial, respondiendo a las características de dichas fases y a los desempeños de comprensión definidos por Acevedo (2011) como “todas las actividades que los estudiantes hacen para desarrollar y demostrar su comprensión” (p. 85).

3.6.5 Etapa 1: fase de exploración.

La fase de exploración se realizó en varios momentos de acuerdo con la participación de los estudiantes y el refinamiento del instrumento utilizado. Para iniciar, se aplicó un cuestionario (descrito en el numeral 3.6.4.1) en un grupo de grado quinto del mismo Centro Educativo Rural, pero en una sede diferente (Sede educativa Rumbadero), que luego de ser refinado fue aplicado en la sede San José. Dicho cuestionario centraba su atención en la manera en que los estudiantes solucionarían tres situaciones: suma sin incógnita, suma con incógnita y un problema de producto. Adicionalmente indagaba sobre los posibles saberes previos que los estudiantes tenían respecto al objeto de estudio.

La idea de este instrumento era visibilizar los avances de los estudiantes respecto al manejo y comprensión del objeto de estudio. El cuestionario no fue socializado, pues no se buscaba establecer respuestas correctas o incorrectas, solo respuestas que mostraran el estado inicial de comprensión de los estudiantes participantes. Por ese motivo, como ya se mencionó, fue aplicado en dos oportunidades, la fase de exploración y la fase del proyecto final de síntesis. A continuación, se presenta el instrumento validado.

3.6.5.1 Cuestionario.

Hola querido estudiante. En tus manos tienes un cuestionario que no es una evaluación, es un instrumento que busca recoger información para una investigación. Ten calma, utiliza lo que has aprendido en tu proceso de formación matemática. A continuación, encontrarás varias situaciones matemáticas a las que deberás dar respuesta.

1. “Mi abuelo tenía una coneja y compró otros cuatro conejos en la tienda agropecuaria. ¿Cuántos conejos tiene ahora mi abuelo?”

$$1 + 4 = \boxed{}$$

Ahora cuéntame cómo hiciste para hallar el total si este era desconocido.

2. “En la nevera había 3 botellas de jugo de naranja. Mi padre ha ido a comprar y ha traído alguno más ¿Por qué ahora hay 4 jugos de naranja? ¿Cuántos jugos de naranja ha traído mi padre?” ¿Cómo encontraste el número oculto?

3. Ayuda a Mateo a encontrar la respuesta a la siguiente situación problema: “En 3 cajas hay cierta cantidad de dulces y por fuera de las cajas hay 10 dulces más” Si el número de dulces es 22. ¿Cuántos dulces hay juntando los de las 3 cajas?”

4. Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes expresiones. No olvides que x representa el valor de un número.

$$1 + 4 = x \text{ ¿Cuál es el}$$

$$\text{valor de } x? \quad 3 + x = 4$$

$$\text{¿Cuál es el valor de } x?$$

$$3x + 10 = 22 \text{ ¿Cuál es el valor de } x?$$

5. De acuerdo con el enunciado plantea la expresión matemática correspondiente.

- Un número desconocido más tres es igual a nueve ¿cuánto vale el número desconocido?

- A un número desconocido se le resta 7 y el resultado es 21 ¿cuál es el número desconocido?

- Un número desconocido se multiplica por 4 y el producto es 12.

3.6.5.2 Actividades.

Propósito del taller: con el presente taller se busca que los participantes se acerquen, desde el juego y sus saberes previos, y a partir de diferentes actividades que involucren la manipulación de material concreto y que sean de gran interés para los estudiantes del grado quinto, al manejo del concepto de incógnita.

Actividad 1. Juego “El incógnito”.

Acciones:

1. Los estudiantes, con el acompañamiento del docente investigador, hacen una circunferencia, de la cual, por iniciativa propia, un estudiante será el espía.
2. Con el estudiante fuera de la circunferencia, el docente debe orientar que entre los estudiantes que se quedan al interior del aula se elija un líder, quien realizará movimientos y dará instrucciones que todos deben seguir. Como elemento principal se señala que no deben permitir que el espía descubra quién es el líder.
3. Cuando el espía ingrese al aula se le explicará su responsabilidad de encontrar cuál es el líder, quien para él será la incógnita. Se le indica que debe hacerlo a través de la observación y la atención.
4. El líder, incógnito para el espía, debe empezar a realizar movimientos y gestos que los estudiantes deben seguir y en la medida que el estudiante espía dé la oportunidad, el movimiento deberá cambiar.

Actividad 2. Juego de imágenes. Encuentra las diferencias.

Acciones:

1. Se fijan en los tableros dos imágenes que sean aparentemente iguales, por tratarse de niños, se espera que sean llamativas. El propósito es que a través de la atención y la observación los estudiantes encuentren las diferencias.
2. Los estudiantes se dividen en grupos de trabajo. A cada grupo se le entrega una ficha que contiene dos imágenes iguales. Con lápiz deben identificar cuáles son las diferencias entre ellas. Al encontrar las diferencias deben definir con sus palabras el concepto de

incógnita. Las fichas deben pasar por cada uno de los grupos. Las imágenes serán las siguientes:

Ficha 1

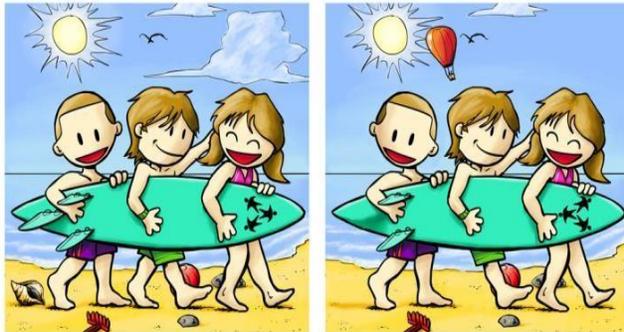


Figura 5. Vamos a la playa

Fuente: Google Imágenes

Ficha 2



Figura 6. El elefante pintor

Fuente: Google Imágenes

Ficha 3



Figura 7. Sacando la mascota a la calle

Fuente: Google Imágenes

Ficha 4



Figura 8. La familia de los Simpson

Fuente: Google Imágenes

Ficha 5



Figura 9. El químico

Fuente: Google Imágenes

Ficha 6



Figura 10. Perdida en el bosque

Fuente: Google Imágenes

Actividad 3. Juego de palabras “El mensaje x”.

Acciones:

Se le entregará a cada estudiante una ficha que tendrá la instrucción de descifrar el mensaje incógnito (“comprender es una habilidad”). Para eso, el estudiante realizará 24 operaciones que involucran números enteros entre -20 y 20. Cada resultado corresponde a una letra de la tabla del código secreto. El número de la operación le proporcionará el sitio de la letra en el mensaje. Así, si el ejercicio 1 da como resultado -15, deberá colocar en el sitio 1 la letra que corresponde al resultado -15.

Operaciones:

1. $-4+6+3-10=$

2. $6+10-10-2=$

3. $-12+8-10=$

4. $9+3-20+6=$

5. $-15+3-1+10-4=$

6. $6+3-13=$

7. $-5+3+1=$

8. $10-9+2-6=$

9. $8+6-3=$

10. $6+5-4-10-2=$

11. $-12+4+1=$

12. $-3-7+20=$

13. $10+2-14-6=$

14. $-5+3-11=$

15. $9+4-12-5=$

16. $8+3-9+4=$

17. $5-10-4=$

18. $3+2-6+3=$

19. $4+5+2=$

20. $6+1-8-5=$

21. $-13+2-4=$

22. $15-30+2=$

23. $7+1-13+15+6=$

D	-16
E	11
P	-2
A	16
L	-6
R	1
U	-8
D	-3
I	11
M	-14
N	-13
R	-5
A	-4
D	-13
C	-5
A	-9
E	-7
I	-15
O	4
B	2
S	10
E	-4
H	6
N	-1

24. $10+10-25-9-2=$

El mensaje x es:

Actividad 4. El cuadrado mágico.

Acciones:

Para ejecutar esta actividad se les entregan a los estudiantes unos cuadrados mágicos en madera y algunas fichas con diferentes números para completar. Se explica que los cuadrados mágicos son distribuciones de números en celdas que se disponen formando un cuadrado, de forma que la suma de cualquiera de las filas, de cualquiera de las columnas y de las dos diagonales principales da siempre el mismo resultado. Al número resultante se le denomina constante o suma mágica. En el tablero se da un ejemplo del proceso para desarrollar un cuadro mágico. Cuando se hayan despejado las dudas se empiezan a resolver los contenidos en el material manipulativo. Los cuadrados mágicos que se entregarán a los estudiantes tendrán las siguientes representaciones:

6		
	5	9
		4
Suma =		

2	12	
	8	
	4	
Suma =		

7		
2	4	6
Suma =		

6		
	5	
		4
Suma =		

4	7	
	5	
	3	
Suma =		

7	9	11
		10
Suma =		

4		
3		
8		6
Suma =		

2		
		3
	1	
Suma =		

Actividad 5. La caja misteriosa.

Acciones:

Daniel tiene una caja misteriosa que convierte un número en otro. La atención es indispensable para comprender qué es lo que allí sucede.

1.  $+2 = 6$

2. Explica qué pasó en la caja misteriosa.

3. Tal parece que a 2 le debes sumar una cantidad desconocida (que podrías llamar b), para obtener 6. Es decir que $2 + b = 6$

Compara tu explicación con la siguiente imagen.

$2 + 4 = 6$. ¿Estás de acuerdo con lo que acabas de observar?

4.  $+3 = 9$

3 es convertido en 9. Explica qué pasó en la caja misteriosa.

5. Observa el siguiente diagrama y explica qué pasa en la caja misteriosa.



5 fue convertido en 8 por la caja misteriosa, por lo que podría pensarse que a los números de la columna izquierda se les debe sumar una cantidad desconocida (que llamaremos b) para obtener los números de la columna derecha. ¿Encontraste el valor de b en cada situación?



Compara tu respuesta con la siguiente imagen.

En correspondencia con el horizonte investigativo el desarrollo de la etapa 1 posibilitó la indagación de saberes previos, como indican marco conceptual y los principios disciplinares.

3.6.6 Etapa 2: fase de investigación guiada.

Este taller presenta situaciones creadas por el investigador, otros autores y los estudiantes de acuerdo con sus contextos. En esta fase se requiere conocer los saberes previos de los estudiantes, realizar la intervención del docente y usar un concepto no abordado en el nivel de la Básica Primaria como el de variable.

Propósito del taller: se busca que los estudiantes participantes progresen en el proceso de comprensión frente al concepto de la variable como incógnita, y aplicar conceptos y métodos disciplinarios.

3.6.6.1 Actividades.

Actividad 1. Qué tanto sé.

Acciones:

El docente entrega a los estudiantes dos tablas. En la primera se les pregunta por el doble, el triple, el cuádruple y el quíntuple de un número, y en la segunda deben encontrar el consecutivo de un número. Se brindan las orientaciones que se consideren necesarias.

Tabla 13. *Tabla 1 de trabajo para el estudiante, fase de investigación guiada*

Número	Doble del número	Triple del número	Cuádruple del número	Quíntuple del número
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
X				

Fuente: elaboración propia

El consecutivo

Si x es un número natural (0, 1, 2, 3...) su consecutivo es el número que le sigue. Con ayuda de tus compañeros completa la tabla.

Tabla 14. *Tabla “el consecutivo” para el estudiante, fase de investigación guiada*

Número natural	Consecutivo uno	Consecutivo dos	Consecutivo tres
2	2+1	2+2	2+3
3			
4			
N			
X			

Fuente: elaboración propia

Responder: ¿cómo se obtuvieron los consecutivos de los números presentados?

Actividad 2. Descifrando ando³.

Acciones:

En parejas analizan y resuelven las siguientes pistas y escriben en el tablero el valor que representa cada letra para descifrar el mensaje. La pareja que encuentre más rápido el mensaje será la ganadora.

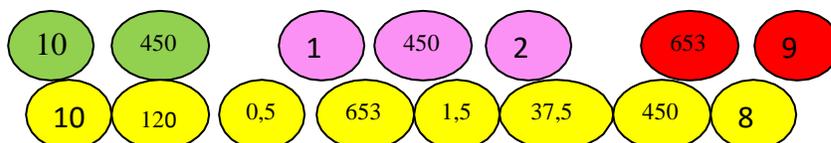


Tabla 15. *Descifrando ando. Juego de pistas*

L	=	La edad de Mateo si el doble de esta es 20 años.
E	=	El precio de un borrador menos \$147 (precio \$800).
T	=	La octava parte del precio de un huevo (precio \$300).
A	=	La mitad del precio de la botella de agua (precio \$900).
S	=	El triple de 3.
Z	=	La edad de Lina que equivale a 18 dividido entre 9.
I	=	El precio del lápiz dividido entre 5 (precio \$600).
B	=	La mitad de 1.
R	=	Un número que tres veces el mismo es igual a 4,5.
D	=	Un número que disminuido en 3 es 5.
P	=	La diferencia entre 3 y 2.

Fuente: elaboración propia

Actividad 3. Jugando al cálculo mental.

Acciones:

Ahora haremos varios ejercicios de cálculo mental. Con esta práctica repetida de operaciones, se espera que logres resolverlas lo más rápido posible en la cabeza, es decir, sin necesidad de utilizar papel y lápiz.

³ Actividad extraída de la guía de aprendizaje de Matemáticas del grado 5. Fundación Volvamos a la gente.

1. $[3 + (8 \times 4) + 9] =$

2. $[(3 \times 4) + 6 + 25] =$

3. $[(3 + 8) \times 4] + 9 =$

4. $[(20 \div 5) + 12] - 8 =$

5. $[((30 + 8) - 10) + 5] =$

Anotación: el ejercicio de cálculo mental es orientado por el investigador y no hay jerarquía de operaciones, pues cuando se realiza la primera operación, el resultado se conecta con la siguiente. Ejemplo $3+5 \times 4 \div 8 = 4$, toda vez que $3+5$ es igual a 8, 8 multiplicado por 4 es igual a 32 y ese resultado dividido 8 es igual a 4.

Actividad 4. Ubico la incógnita.

Acciones:

En la siguiente ficha debes ubicar y encerrar en un círculo la incógnita de cada ecuación.

1. $3x - 4 = 12$

2. $10x + 2 = 12$

3. $3x + 2x = 30$

4. $7x - x = 12$

5. $8x - 4x - 2x = 4$

6. $5x + 3x - 8 = 32$

7. $2x - 4 = 26$

8. $9x - 3 = 21$

9. $x - 4 = 12$

10. $6y - 8 = 6$

Actividad 5. ¿Qué es la ecuación?

Acciones:

Después de la explicación del docente y de leer la siguiente información escribe tus conclusiones:

Una ecuación es una igualdad que tiene una o varias incógnitas. El término que desconocemos en una ecuación se llama incógnita. Cuando encontramos su valor y este hace verdadera la igualdad hemos solucionado la ecuación.

Ejemplo: El doble de la edad de Mateo es 20 años, n es el nombre que le damos a la incógnita, entonces la edad de Mateo es 10 años.

$$2 \times n = 20$$

$$2 \times 10 = 20$$

$$n = 10$$

Recuerda: para que una expresión matemática se considere una ecuación, debe cumplir con los siguientes criterios debe ser una igualdad, debe contener al menos una incógnita (letra) la igualdad solo puede solucionarse con ciertos valores de sus incógnitas.

Actividad 6. Proyección del video “Despeje de ecuaciones para principiantes”, cómo realizar el procedimiento de despeje en una ecuación.

Acciones:

Se proyectará el video de cómo resolver ecuaciones con una incógnita disponible en el *link*:

<https://www.youtube.com/watch?v=9Ly9qasM8IM>

Actividad 7. Resolviendo ecuaciones.

Acciones:

Se les entregará a los estudiantes una ficha que contiene varias ecuaciones que se deben resolver teniendo en cuenta que las igualdades deben ser verdaderas y que se debe comprobar el valor de la incógnita en cada ecuación.

1. $5x + 3 = 18$

2. $x + 8 = 12$

3. $x + 1 - 3 = 10$

4. $4x + 5 = 21$

5. $9 + x = 14$

6. $3x + x = 20$

7. $y - 8 = 15$

Actividad 8. Planteando ecuaciones.

Acciones:

Se les entregan a los estudiantes diversas situaciones problema a las cuales se debe plantear una ecuación y resolverla. Las situaciones serán las siguientes:

- Felipe compró 30 caramelos para el día de su cumpleaños. Si él pagó \$750, ¿cuánto costó cada caramelo?
- Juan está leyendo un libro de cuentos. El lunes leyó 12 páginas, el miércoles leyó 15 páginas. Si el libro tiene 98 páginas, ¿cuántas páginas le faltan por leer?
- El recorrido de Lucía de la escuela a la casa, pasando por la iglesia, es de 24 cuadras, si entre la iglesia y la casa hay 15 cuadras, ¿cuántas cuadras hay entre la escuela y la iglesia?
- Andrés cancela en la tienda de la escuela \$2000 que había quedado debiendo de la semana anterior. Si su padre le dio un billete de \$5000, ¿con cuánto dinero deber regresar Andrés a su casa, sabiendo que no puede gastar nada?

Actividad 9. Trabajo en clase. Construcción del concepto de variación.

Acciones:

A partir de diferentes situaciones presentadas el estudiante podrá construir el concepto de variación. Las situaciones serán las siguientes:

- Tiempo de desplazamiento de la pelota 1. El estudiante deberá registrar 5 tiempos y observar las condiciones en que la pelota es lanzada. Esas condiciones fueron fuerza, distancia de recorrido, velocidad.
- Tiempo de desplazamiento de la pelota 2. Al igual que en la situación anterior, el estudiante deberá registrar 5 tiempos. Se busca que el estudiante establezca la diferencia entre la pelota 1 y la pelota 2.
- Tiempo de desplazamiento de 2 estudiantes diferentes. A cada estudiante deberán registrársele 5 tiempos.
- Tiempo de llenado de recipiente de agua. El estudiante deberá registrar 5 tiempos.
- Transporte de silletería para un evento. Esta situación se evalúa desde el tiempo que tarda 1 solo trabajador en mover 20 sillas de un lugar a otro, se hace el mismo experimento con 2, 3 y 4 trabajadores. El resto de los estudiantes registra los tiempos.

Luego los estudiantes deben responder.

1. ¿Por qué los tiempos son diferentes en la situación 1?
2. ¿Por qué los tiempos de desplazamiento de las pelotas 1 y 2 son diferentes en su gran mayoría?
3. ¿De qué depende que los estudiantes 1 y 2 hayan registrado tiempos distintos, sabiendo que realizaron el mismo recorrido?
4. ¿Por qué puede variar el tiempo de llenado de un recipiente?
5. Explica con tus palabras el fenómeno presentado en la situación del transporte de silletería.

Actividad 10. Tarea. Acciones:

Se les deja una serie de preguntas a los estudiantes para que resuelvan con ayuda de sus padres en tiempo extraescolar. Se enfatizó en la importancia de tener en cuenta las actividades realizadas en la escuela. Las preguntas propuestas son:

1. ¿Qué es variación?

2. ¿A qué se le puede llamar variable?
3. ¿Qué otros fenómenos varían en nuestro contexto?
4. ¿Qué es una incógnita?
5. ¿Qué es un número oculto?

El desarrollo de esta etapa permitió responder desde el marco conceptual de la EpC mediante a la rúbrica propuesta. Si en la etapa 1 los estudiantes habían quedado en un nivel determinado, las actividades de esta etapa que orientaban la comprensión en los estudiantes deberían haberlos llevado a un nivel superior.

3.6.7 Etapa 3: fase de proyecto final de síntesis.

Con esta fase se pretende que el estudiante trabaje de manera autónoma y evidencie el dominio del concepto de variable como incógnita en medio de situaciones diseñadas por el docente y otros autores. De acuerdo con Acevedo (2011) esta fase “les exige a los estudiantes integrar las distintas comprensiones desarrolladas en los saberes previos y por ende mostrar con claridad el dominio que tienen los estudiantes de las metas de comprensión establecidas” (p. 31). Esta fase contiene tres momentos: el momento inicial es la realización de cinco actividades incluidas en la unidad curricular, el momento intermedio es la aplicación de la entrevista semiestructurada definida en el apartado 3.5.3 y el momento final es la segunda aplicación del cuestionario de la fase de exploración.

Propósito del taller: se busca que los estudiantes participantes evidencien el dominio de los conceptos de variable como incógnita y de variación, y que respondan al planteamiento de situaciones que involucran el uso de números desconocidos y de la incógnita.

3.6.8 Actividades.

Actividad 1. Trabajemos con la guía de aprendizaje. Tomada de la Guía de matemáticas grado quinto de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 19).

Si el precio de 2 peras es de \$900, el precio de 9 peras será mayor.

Ana había aprendido un método para solucionar este tipo de situaciones: las razones y las proporciones.

Entonces planteó la siguiente proporción:

$$\frac{2}{9} = \frac{900}{x} \quad x = \text{valor de 9 peras}$$

Ana aprendió que en una proporción los productos cruzados son iguales:

$$\begin{aligned} 2 \text{ por } x \text{ es igual a } 9 \text{ por } 900 \\ 2 \cdot x = 9 \cdot 900 \end{aligned}$$

Para calcular el valor de x , se divide cada una de las partes de la igualdad entre 2, así:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot x}{2} &= \frac{9 \cdot 900}{2} \\ 1 \cdot x &= \frac{9 \cdot 900}{2} \\ x &= \frac{8.100}{2} \\ x &= 4.050 \end{aligned}$$

Ana debe pagar \$4.050 por 9 peras.

Figura 11. Actividad de razones y proporciones

Fuente: tomada de la Guía de matemáticas grado 5° de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (p. 19)

Los estudiantes deberán responder a las siguientes preguntas:

1. ¿De qué otra manera solucionarías la situación presentada?
2. Si Ana compra 20 peras, ¿cuánto dinero debe pagar?
3. Si el precio de las dos peras es de \$1200, ¿cuánto dinero debe cancelar Ana por las nueve peras?

Actividad 2. Variación de magnitudes.

Acciones:

Se busca representar gráficamente situaciones de la vida cotidiana en la que hay dependencia entre dos magnitudes. Por ejemplo, se pregunta ¿cuánto cuesta un lápiz?, ¿cuánto cuestan dos lápices?, ¿cuánto cuestan 3 lápices? Se usan tablas que mezclen lo numérico con lo gráfico.

Tabla 16. *Actividad variación de magnitudes 1*

Condición: Cada niño aporta 3 canicas para el proyecto de artística.

Cantidad de niños	¿Cuántas canicas aportarán?
2	
3	
4	
5	

Fuente: elaboración propia

Tabla 17. *Actividad variación de magnitudes 2*

Condición: El conejo come 2 lechugas por día. En una semana ¿cuántas lechugas se comerá?

Número de días	Cantidad de lechugas
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Fuente: elaboración propia

A cada niño se le dan tres bolas de pimpón, ¿cuántas bolas de pimpón se necesitan para cinco niños?, ¿y para tres?, ¿y para dos? Representa la información en una tabla como las trabajadas en los numerales 1 y 2.

Actividad 3. El intervalo

Acciones:

Para el desarrollo de esta actividad se tiene en cuenta que los estudiantes trabajan con el

conjunto de los números enteros. Un intervalo es el conjunto de números que se encuentran entre dos números dados, estos dos números pueden estar o no en dicho conjunto. Los trabajaremos desde la recta numérica.

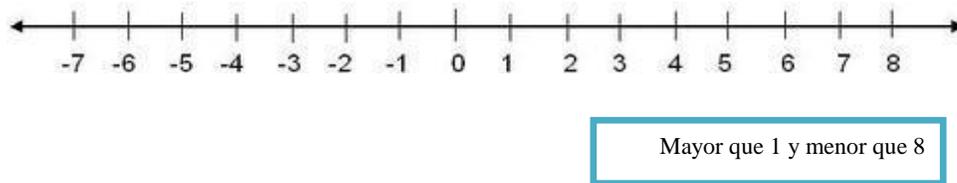
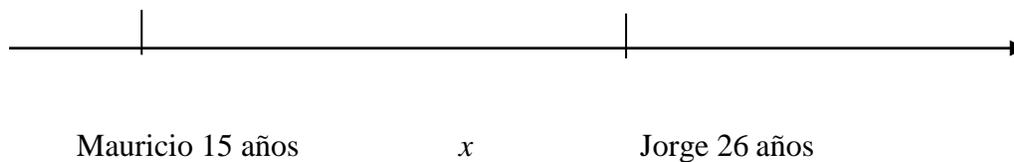


Figura 12. El intervalo

Fuente: elaboración propia

- ¿Qué edad puede tener Milena, si es mayor que Mauricio y menor que Jorge? A Milena la llamaremos x .



Registra a continuación los valores que puede tomar x .

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- ¿Qué edad tiene Leidy si es mayor o igual que la edad de Daniel y menor que Simón?
Halla las probables edades de Leidy teniendo en cuenta que Daniel tiene 12 años y Simón tiene 15 años. Representa la respuesta en la recta numérica.

Actividad 4. Solucionando situaciones que involucran el uso de la variable.

Acciones:

Responder a las situaciones:

- En el conjunto de los números N . Encuentra dos números que sumados den 10 y que al multiplicarlos entre sí se obtenga el más alto de los productos. ¿Cuáles podrían ser los

valores desconocidos y cual el valor de X , teniendo en cuenta que X es el producto?

- Manuela tiene 60 muñecas para repartir entre las invitadas a su fiesta de cumpleaños, pero no sabe cuántas amigas llegarán, por lo tanto, no sabe cuántas muñecas corresponderían a cada asistente. Debes determinar el número de muñecas por repartir de acuerdo con la cantidad de niñas en la fiesta, ten en cuenta que a cada una le corresponde la misma cantidad de muñecas.

Tabla 18. *Situación uso de variable (número de muñecas)*

Número de niñas	Número de muñecas
1	
2	
3	
4	
5	
6	

¿Y por qué no están los números del 7 al 9?

Fuente: elaboración propia

Actividad 5: Evaluación de la etapa 3

Acciones:

La evaluación del taller contará con la participación de la docente titular del grupo, de los estudiantes y del investigador. Se realiza la dinámica tingo tango y entre los estudiantes deberá rotarse un paquete que contiene en su interior las siguientes preguntas:

- ¿Cómo le parecieron las actividades propuestas en el desarrollo de la unidad curricular?
- ¿Qué aprendió de las actividades propuestas?
- ¿Qué aprendió nuevo en el área?
- Defina que es una incógnita

- Responda ¿qué es variación?
- ¿Qué es una variable?
- ¿Qué actividad le llamó la atención y por qué?

De acuerdo con Küchemann (1980) para que un niño tenga una comprensión de los inicios del álgebra es necesario que sea capaz de trabajar, por lo menos, con problemas simples que requieran el uso de la letra como incógnita específica. Las letras entonces equivalen a un valor numérico que puede variar de un uso a otro. Como parte de esta fase es importante definir el guion para el desarrollo de la entrevista semiestructurada propuesta, que tendrá en cuenta algunas maneras de interpretar los símbolos literales presentes de manera inferencial en las preguntas planteadas.

3.6.8.1 Guion para la entrevista semiestructurada.

Fecha:

Hora:

Lugar:

Nombre del estudiante:

Entrevista a los estudiantes Manuel, Luciana y Pedro del grado quinto del Centro Educativo Rural Casa Grande Sede San José del municipio de Concordia.

El objetivo de esta entrevista es obtener respuestas directas, en cuanto a la comprensión del concepto de variable como incógnita. La información obtenida es confidencial y los nombres de los estudiantes involucrados fueron cambiados por seudónimos.

3.6.8.2 Categorías de la entrevista.

C1. Uso de la letra.

- ¿Se pueden realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con números? ¿Por qué?
- ¿Se pueden realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con letras? ¿Por qué?
- ¿Cuál es fórmula para hallar el área de un cuadrado?

- ¿Cuál es la fórmula para hallar el área de un triángulo?
- Si se tienen 5 frutas entre bananos y mangos en una bolsa y de esas frutas 2 son bananos, ¿cuál es el número de mangos?

C2. Uso de la incógnita.

- ¿Qué es un número oculto?
- ¿Qué se requiere para conocer el total ganado en pesos cuando se conoce el número de kilos de café recolectados por un trabajador durante una semana de cosecha?
- ¿Sabes qué es una incógnita?
- ¿Sabes cuál es la importancia de una incógnita?
- ¿Cómo se despeja una incógnita en una ecuación?

C3. Concepto de variable.

- ¿Qué fenómenos varían en tu contexto?
- Si tienen las letras R, O, A y M, ¿qué palabras se pueden formar?
- Si m es igual a 4, ¿cuánto es $4m + 3$?
- Si en el ejercicio anterior m es una variable, ¿qué es una variable?

El desarrollo de la etapa 3 facilitó hacer un cierre a la investigación y tener los insumos suficientes para el informe final que se presenta en los capítulos 4 y 5.

3.6.9 Evaluación diagnóstica continua.

Este elemento clave de la EpC debe entenderse como un proceso integral, sistemático y público que responde a los desempeños alcanzados y no alcanzados, como se definió en el capítulo 2 del presente informe de investigación. Durante la ejecución de los instrumentos de la propuesta de intervención se realizó una coevaluación que al ser aplicada de manera continua en cada una de las actividades de las fases facilitó la retroalimentación sobre la comprensión del concepto de variable como incógnita en los estudiantes. Para el proceso de seguimiento se contó además con los instrumentos diseñados para la recolección de la información, como el

cuestionario, la entrevista semiestructurada y los registros obtenidos a través de la observación. Además, en la etapa final del proceso se aplicó otro instrumento contemplado en el Sistema Institucional de Evaluación que fue la autoevaluación, esta constó del análisis de unas preguntas orientadoras y diez ítems y que se explicitan más adelante. El proceso de evaluación continua se acompañó con la rúbrica de desempeños de comprensión y finalmente fue compilado en esta.

De acuerdo con lo que busca la evaluación diagnóstica continua, en el desarrollo de las actividades de desempeños de la fase de exploración se tuvieron en cuenta los aspectos: manejo del concepto de incógnita, saberes previos sobre fenómenos de variación presentes en su cotidianidad y el procedimiento para despejar en una ecuación una incógnita. En la fase de investigación guiada se valoró la ejecución de las actividades propuestas en la unidad curricular, y en el proyecto final de síntesis se centró la atención en el progreso de comprensión del tópico por los estudiantes, la responsabilidad en la entrega de trabajos, el manejo del concepto de variable como incógnita y su comprensión en acciones de la cotidianidad.

De igual forma, la evaluación de la unidad curricular se realizó en concordancia con las estrategias de la autoevaluación y la coevaluación contempladas en el SIE del Centro Educativo Rural Casa Grande, integrado dentro de la concepción del marco teórico, y los ítems de dicha evaluación fueron contruidos por el investigador.

3.6.9.1 Autoevaluación.⁴

Para el desarrollo de la autoevaluación se tuvieron en cuenta las siguientes preguntas orientadoras. Estas no fueron respondidas por el estudiante, pues eran una introducción para diligenciar la tabla presentada.

- ¿Soy consciente de los avances obtenidos durante la ejecución de las actividades contenidas en los tres talleres?
- ¿Soy consciente de las situaciones que me hicieron difícil el aprendizaje de conceptos?
- ¿Cuál fue la actitud que asumí para participar de las actividades programadas?

⁴ De acuerdo con el SIE de la Institución es el proceso de reflexión que realiza cada uno de los estudiantes de su actuación en la construcción del aprendizaje, permitiendo tomar decisiones al respecto.

- ¿Soy consciente de los conceptos que no comprendí en su totalidad?

En la siguiente tabla, el estudiante debe valorar cada ítem entre 1 y 4 el nivel de avance en los indicadores que se presentan, donde 1 es el nivel bajo, 2 es un nivel básico, 3 es el nivel alto y 4 es el nivel superior. Además, deben justificar su nivel.

Tabla 19. *Autoevaluación del estudiante*

Ítem	Indicador	Nivel	Justificación
1	Es responsable en la entrega de actividades.		
2	Participa en las actividades propuestas por el investigador.		
3	Define con mis palabras el concepto de incógnita.		
4	Realiza operaciones que involucran números.		
5	Posee habilidades para encontrar mensajes y números ocultos.		
6	Tiene claro el concepto de ecuación y es capaz de plantearlas de acuerdo con la información suministrada.		
7	Identifica la incógnita en una ecuación lineal.		
8	Plantea y resuelve situaciones donde se evidencian fenómenos de variación.		
9	Reconoce el intervalo como un conjunto de valores que puede tomar x .		
10	Utiliza el intervalo para el establecimiento de relaciones biunívocas (\leq , \geq , $=$).		

Fuente: elaboración propia

3.6.9.2 Coevaluación.⁵

En compañía del investigador los estudiantes discuten sobre aspectos de la unidad curricular, como los elementos más relevantes, las soluciones que se dieron a las diferentes actividades planteadas y lo que se aprendió en relación con el concepto de variable como incógnita. La coevaluación estuvo presente en todo el proceso, debido a que los conceptos, los momentos y las experiencias fueron socializadas y en algunos casos refutadas, con el fin de buscar en todos los casos la claridad desde el concepto disciplinar.

⁵ Favorece la valoración mutua entre pares (estudiante-estudiante-maestro) para determinar logros, dificultades y actividades de refuerzo.

3.6.9.3 Rúbrica de desempeños de comprensión.

Como contribución del marco conceptual de la EpC a la validación de la investigación, se elaboró y refinó una rúbrica que tuvo en cuenta las categorías elegidas *a priori*. Para cada una de estas se redactaron unos descriptores que, como su nombre lo indica, permitieron describir y determinar el proceso de comprensión del concepto de variable como incógnita. Este proceso de descripción de la comprensión requirió, además, de la transcripción de las entrevistas semiestructuradas, los conversatorios en clase, la socialización de saberes previos y la observación participante, así como el análisis de los instrumentos desarrollados en la investigación. Esta constatación permitió analizar el proceso de comprensión de cada participante y la consecuente ubicación en el nivel de comprensión en las categorías de cada dimensión.

A continuación, se presentan las categorías y los descriptores de desempeño por nivel en cada una de las dimensiones que refiere el marco conceptual de la EpC.

Tabla 20. *Descriptores de categoría por nivel - dimensión de contenido*

Nivel - categoría	Variación	Número oculto	Variable como incógnita
Ingenuo	Manifiesta no saber qué es la variación.	Manifiesta no saber qué es un número oculto.	No reconoce la variable en una expresión matemática.
Novato	Solo presenta como ejemplos de variación los manejados en clase.	Solo presenta como ejemplos de número oculto los utilizados en clase.	No establece diferencias entre los conceptos de variable y de incógnita.
Aprendiz	Reconoce por qué se da la variación.	Propone expresiones matemáticas haciendo uso del número oculto.	Establece diferencias entre los conceptos de variable e incógnita.
Maestría	Explica cuáles fenómenos de su contexto varían y por qué.	Establece relaciones entre los conceptos de número oculto y variable como incógnita.	Encuentra similitudes entre los conceptos de número oculto y variable como incógnita.

Fuente: elaboración propia

Dado que el término de variación se asumió como un término genérico necesario para integrar el concepto de número oculto y de incógnita en la dimensión de contenidos, en la dimensión de

métodos ese término no se vinculará a los procedimientos, por tanto, allí solo se ocupará de las dos categorías inicialmente mencionadas.

Tabla 21. *Descriptor de categoría por nivel - dimensión de método*

Nivel - categoría	Número oculto	Variable como incógnita
Ingenuo	No encuentra el valor desconocido en una expresión matemática.	No encuentra el valor de la variable en una expresión matemática.
Novato	Utiliza el tanteo u otro procedimiento para hallar un valor desconocido en una expresión matemática.	Utiliza el tanteo u otro procedimiento para determinar el valor de la variable.
Aprendiz	Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática.	Utiliza diferentes algoritmos para determinar el valor de la variable.
Maestría	Halla y verifica los valores desconocidos del número oculto.	Encuentra y corrobora el valor de la variable en una expresión matemática.

Fuente: elaboración propia

Tabla 22. *Descriptor de categoría por nivel - dimensión de propósito*

Nivel - categoría	Relación variación-contexto	Relación número oculto-variable como incógnita
Ingenuo	No relaciona el concepto de variación con fenómenos del contexto.	No relaciona el número oculto con la variable como incógnita.
Novato	Identifica fenómenos del contexto que son susceptibles de variación.	Establece similitudes entre número oculto y la incógnita.
Aprendiz	Relaciona el concepto de variación con fenómenos del contexto.	Establece similitudes entre número oculto, incógnita y la variable.
Maestría	Interpreta la variación como un fenómeno de cambio presente en el contexto cultural, las matemáticas y otras áreas.	Relaciona los elementos que componen una ecuación, parámetros e incógnita con número oculto y variable.

Fuente: elaboración propia

Tabla 23. *Descriptorios de categoría por nivel - dimensión de formas de comunicación*

Nivel - categoría	Lenguaje matemático formal	Coherencia en el discurso
Ingenuo	No hace uso del lenguaje formal para señalar un número oculto, la incógnita o la variable.	Utiliza palabras del lenguaje natural para explicar de forma intuitiva la variación.
Novato	Muestra familiaridad con sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático.	Utiliza términos o conceptos no acordes para organizar los argumentos de las explicaciones para dar cuenta de la variación.
Aprendiz	Reconoce y enuncia los elementos de sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas.	Argumenta y explica de forma clara la situación de variación.
Maestría	Explica con propiedad cuándo la incógnita es un número fijo y cuándo es una variable para establecer relaciones de proporcionalidad.	Hace uso correcto y amplio de terminología matemática para exponer resultados y argumentos.

Fuente: elaboración propia

El proceso de construcción de la rúbrica se convirtió en una herramienta fundamental para la caracterización de la comprensión del concepto de variable como incógnita en los participantes de la investigación. Los desempeños se fueron refinando, replanteando y transformando durante el desarrollo de las distintas etapas (Stone, 1999).

3.7 Validez de la investigación

La validez de la información contenida en la investigación se relaciona con la constatación de fuentes, pues se comparó la información producida por cada participante con los instrumentos de recolección de información y con los elementos y cualidades de un marco conceptual que guarda una estrecha relación con el objeto de estudio, como se mostrará en el capítulo de análisis.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS

Este capítulo está dedicado a los resultados encontrados sobre cómo comprenden el concepto de variable como incógnita un grupo de tres estudiantes (Manuel, Luciana y Pedro) del grado quinto del Centro Educativo Rural Casa Grande Sede Educativa San José del municipio de Concordia, Antioquia. Se mostrará el análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario diseñado en la fase de exploración, de los desempeños de comprensión de los estudiantes en la aplicación de la unidad curricular, y de la entrevista de la fase del proyecto final de síntesis. Posteriormente, se presentarán los descriptores finales en los que se ubican los estudiantes de comprensión según las cuatro dimensiones establecidas por el marco conceptual de la EpC, a la luz de la rúbrica de desempeños de comprensión.

Para realizar el análisis se tuvieron en cuenta los aspectos metodológicos, el tipo de información recolectada y la descripción de los cuestionarios que relacionan los resultados de las fases aplicadas, para así extraer los significados y conclusiones de la investigación.

4.1 Aspectos metodológicos del análisis de la información de corte cualitativo

El análisis cualitativo debe ser ordenado y riguroso; como lo planteó Álvarez (2003) el análisis cualitativo debe ser un proceso flexible con el que se busca llegar a una mejor comprensión de un fenómeno que se encuentra determinado por los objetivos de la investigación. En este caso el proceso consistió en describir cómo los estudiantes del grado quinto de Básica Primaria comprenden el concepto de variable como incógnita en el marco de la EpC.

4.2 Tipos de información recolectada

Como es propio de la investigación cualitativa, en este trabajo de investigación se cuenta con una cantidad considerable de información procedente de las producciones realizadas por los estudiantes y de la observación participante del investigador consignada en el semanario pedagógico. Dentro de esta se encuentran:

- Respuestas dadas por los estudiantes en la fase de exploración al cuestionario.
- Respuestas y procedimientos en la fase de investigación.

- Autoevaluación de los estudiantes de acuerdo con el proceso de participación en la investigación y desarrollo de la guía curricular.
- Respuestas de los estudiantes en la entrevista semiestructurada.
- Respuestas de los estudiantes al cuestionario refinado sobre el manejo de la incógnita, aplicado en el Proyecto final de síntesis.
- Anotaciones realizadas por los estudiantes y por el investigador durante el proceso de obtención y análisis de la información.
- Grabaciones en audio de las entrevistas.

4.3 Análisis aplicación de cuestionario

Se analizó el cuestionario de cada uno de los participantes con el ánimo de hacer un informe tipo diagnóstico que muestre su nivel de comprensión. Como se definió desde la sección 3.6.1 el cuestionario se aplicó en dos oportunidades, en aras de establecer un comparativo en la evolución de los escolares intervenidos respecto al manejo de conceptos en un momento inicial y al finalizar la aplicación de la unidad curricular en la fase del proyecto final de síntesis. A continuación, se presenta la radiografía de dicha evolución en cada una de las fases y los resultados obtenidos en la fase de exploración.

Caso 1: Manuel.

Durante el desarrollo del cuestionario Manuel se mostró tranquilo. Al observar la forma en que el estudiante responde a las situaciones planteadas en los puntos 1 y 2, fue evidente que hay una mayor dificultad cuando la incógnita es uno de los sumandos, en vez del resultado. Mediante el desarrollo del currículo en matemáticas, con la utilización de números más complejos y la puesta en marcha de la unidad curricular resolverá estos cálculos utilizando la sustracción; inicialmente se busca que con números simples resuelva la situación “¿qué número tengo que sumar a 3 para que sea igual a 4?”. De esta forma se amplía su concepto de adición y mejora sus habilidades de cálculo mental. El ejercicio planteado ayuda al estudiante a no encasillarse en que una adición es solamente aquello que tenga la forma $1 + 4 = \zeta?$, lo que posibilitará el trabajo con expresiones que involucran el uso de incógnitas.

En el desarrollo del tercer punto se evidenció un problema de comprensión que radica en no entender qué es lo que está preguntando la situación presentada. Era un problema de multiplicación que se podría resolver utilizando el tanteo o, llevado a un nivel superior, se podría llegar al resultado planteando una ecuación de primer grado con una sola incógnita, por lo cual se haría necesario que el estudiante conociera el procedimiento para realizar el despeje de incógnitas dentro de una ecuación y luego recurriera al procedimiento de la sustitución para constatar si el valor encontrado es el correcto. En lo que se refiere a los resultados obtenidos del punto 4 se puede argüir que Manuel puede identificar la incógnita dentro de una ecuación, pero desconoce el proceso para hallar su valor numérico; además, reconoce el símbolo como elemento de lenguaje matemático, pero no realiza una reflexión sobre la manera como este opera dentro de una ecuación.

1. "Mi abuelo tenía una coneja y compró otros cuatro conejos en la tienda agropecuaria. ¿Cuántos conejos tiene ahora mi abuelo?"

$1 + 4 = 5$

Ahora cuéntame, cómo hiciste para hallar el total si este era desconocido.

sume $4+1$ y medio 5

2. "En la nevera habían 3 jugos de naranja. Mi padre ha ido a comprar y ha traído alguno más ¿Por qué ahora hay 4 jugos de naranja. ¿Cuántos jugos de naranja ha traído mi padre?"

¿Cómo encontraste el número oculto?

$3 + 1 = 4$

sumando en la mente

3. Ayuda a Mateo a encontrar la respuesta a la siguiente situación problema: "En 3 cajas hay cierta cantidad de dulces y por fuera de las cajas hay 10 dulces más" Si el número de dulces es 22. ¿Cuántos dulces hay en las 3 cajas?"

en cada caja hay 4 dulces

4. Encuentra el valor de la incógnita. No olvides que "X" representa el valor de un número.

a. $1 + 4 = X$. Cuál es el valor de "X"?

representa el valor del número

b. $3 + X = 4$. ¿Cuál es el valor de "X"?

representa el número

c. $3X + 10 = 22$. ¿Cuál es el valor de "X"?

representa el número

Para mí, es importante tu apreciación. ¿Cómo te sentiste con el desarrollo de la actividad?

bien por que es una actividad muy buena.

Caso I. Manuel

Figura 13. Respuestas de Manuel al cuestionario de fase de exploración

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con lo mencionado, el nivel de comprensión inicial de Manuel con relación a las dimensiones y a sus descriptores de nivel es ingenuo, lo que indica el punto de partida para la investigación que se ocupa de indagar cómo el estudiante comprende el concepto de un objeto matemático. Esto permitirá llegar a determinar cuál es su nivel y analizar su evolución frente al

uso de la variable como incógnita en una situación presentada.

Tabla 24. *Descriptor de nivel de Manuel durante el desarrollo del cuestionario en la fase de exploración por dimensiones*

Dimensión	Descriptor de nivel	Nivel
Dimensión de contenido	- Manifiesta no saber qué es un número oculto.	Ingenuo
	- No reconoce la variable en una expresión matemática.	
Dimensión de métodos	- No encuentra el valor desconocido en una expresión matemática.	Ingenuo
	- No encuentra el valor de la variable en una expresión matemática.	
Dimensión de propósitos	No relaciona número oculto con la variable como incógnita.	Ingenuo
Dimensión de formas de comunicación	No hace uso del lenguaje formal para señalar un número oculto, la incógnita o la variable.	Ingenuo

Fuente: elaboración propia

Caso 2: Luciana.

Luciana se mostró muy tranquila y segura para resolver el cuestionario. Como en el caso anterior, los puntos 1 y 2 planteaban al estudiante dos situaciones que debía resolver teniendo en cuenta lo que es una suma sin incógnita y una suma con incógnita, lo cual Luciana resolvió de manera adecuada, pues mostró familiaridad con los sistemas de símbolos y las fórmulas dentro del lenguaje matemático. Según la dimensión de formas de comunicación esto podría tomarse como una característica del rasgo de consideración de la audiencia y el contexto, puesto que Luciana está usando, como lo expresaron Boix y Gardner (1999), “factores contextuales para reforzar la comunicación” (p. 256), lo cual pone de manifiesto sus creencias y sus saberes adquiridos previo al abordaje de las situaciones planteadas.

Por su parte, en el punto 3 se evidenció un problema de comprensión de la estudiante, dado que respondió de manera incorrecta tras el uso de un mal procedimiento que no soluciona el problema planteado, pues la estudiante multiplicó 22×3 , al resultado le sumó 13 resultante de asociar el número de dulces que estaban por fuera y el número de cajas. Es necesario, entonces, que la estudiante despliegue una serie de procesos cognitivos que posibiliten dar una respuesta correcta a una situación que obviamente ella no conoce, pero que debe partir de su formación

matemática en cuanto al manejo de las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división. Desde la dimensión de propósitos y su rasgo característico de múltiples usos y consecuencias, se debe evaluar, según Boix y Gardner (1999), “en qué medida reconocen los alumnos una variedad de usos posibles de lo que aprenden” (p. 252).

Igualmente, en el punto 4 en el cual se solicitó encontrar el valor de x la estudiante presentó de manera correcta su respuesta, lo cual demostró su capacidad para hacer cálculos recurriendo al tanteo, aunque no hay evidencia del proceso desarrollado para llegar a la respuesta correcta. Además, se pudo notar que la relación que hace Luciana de la letra x es en el símbolo de la multiplicación, por lo cual la definió como *por*.

1. "Mi abuelo tenía una coneja y compró otros cuatro conejos en la tienda agropecuaria. ¿Cuántos conejos tiene ahora mi abuelo?"

$1 + 4 = 5$

Ahora cuéntame, cómo hiciste para hallar el total si este era desconocido.

facil uno mas cuatro igual a cinco

2. "En la nevera habían 3 jugos de naranja. Mi padre ha ido a comprar y ha traído alguno más ¿Por qué ahora hay 4 jugos de naranja. ¿Cuántos jugos de naranja ha traído mi padre?"

¿Cómo encontraste el número oculto?

$3 + 1 = 4$

como encontré el numero oculto sumando tres mas uno igual a cuatro

3. Ayuda a Mateo a encontrar la respuesta a la siguiente situación problema: "En 3 cajas hay cierta cantidad de dulces y por fuera de las cajas hay 10 dulces más" Si el número de dulces es 22. ¿Cuántos dulces hay en las 3 cajas?"

*los dulce que di en las tres cajas es de 76
dulces en las tres cajas*

4. Encuentra el valor de la incógnita. No olvides que "X" representa el valor de un número.

a. $1 + 4 = X$. ¿Cuál es el valor de "X"?

el valor de por es 5

b. $3 + X = 4$. ¿Cuál es el valor de "X"?

el valor de por es de 1

c. $3X + 10 = 22$. ¿Cuál es el valor de "X"?

el valor de por es de 4

Para mí, es importante tu apreciación. ¿Cómo te sentiste con el desarrollo de la actividad?

vien ESTUVO dificil pero al final la respondi

Caso 2. Luciana

Figura 14. Respuestas de Luciana al cuestionario de fase de exploración

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con la caracterización de las respuestas de Luciana, su nivel de comprensión inicial se presenta a continuación.

Tabla 25. *Descriptor de nivel de Luciana durante el desarrollo del cuestionario en la fase de exploración por dimensiones*

Dimensión	Descriptor de nivel	Nivel
Dimensión de contenido	- Solo presenta como ejemplos de número oculto los manejados en clase. - No establece diferencias entre los conceptos de variable e incógnita.	Novato
Dimensión de métodos	- Utiliza el tanteo u otro seudoprocedimiento para hallar un valor desconocido en una expresión matemática. - Utiliza el tanteo u otro seudoprocedimiento para determinar el valor de la variable.	Novato
Dimensión de propósitos	Establece similitudes entre número oculto y la incógnita.	Novato
Dimensión de formas de comunicación	No hace uso del lenguaje formal para señalar un número oculto, la incógnita o la variable.	Ingenuo

Fuente: elaboración propia

Caso 3: Pedro.

Aunque Pedro recibió el cuestionario, se mostró esquivo para responderlo. Lo cual se convirtió en un desafío interesante de valorar para el investigador, en relación con el seguimiento que se puede hacer de la evolución de la comprensión del participante. Con relación a las preguntas 1 y 2, que involucran los conocimientos que el estudiante tiene con respecto a la adición, se evidenció que pese a que el estudiante diligenció los espacios de manera correcta no justificó el porqué de su respuesta, lo cual puede entenderse como una falta de dominio del concepto y de argumentación para los procedimientos matemáticos planteados. Esto mostró que Pedro no hace uso del lenguaje formal para señalar un número oculto, la incógnita o la variable, desempeño que dentro de la dimensión de formas de comunicación lo ubicó en el nivel de ingenuo, pues, según Boix y Gardner, (1999) no hay “ninguna intención comunicativa o estética evidente” (p. 254), que puede deberse a dificultades del estudiante para interpretar y dar cuenta de sus procedimientos.

De igual manera, en el punto 3 la respuesta de Pedro dio cuenta de su poco nivel de comprensión respecto a este tipo de planteamientos, por lo cual podría pensarse que se le dificulta hallar un valor desconocido a partir de una expresión matemática. La situación matemática presentada le permite al estudiante obtener una información que desconoce; esta

consiste en encontrar el número de dulces que hay en tres cajas a partir de datos conocidos, aplicando distintos procedimientos matemáticos. Se pudo ver, entonces, que el estudiante no relacionaba el número oculto con la variable como incógnita, por lo cual, según el dominio y la autonomía, rasgos de la dimensión de propósitos en el nivel ingenuo los estudiantes. De acuerdo con Boix y Gardner (1999) en este nivel los estudiantes no sienten la necesidad de evidenciar una posición personal acerca de lo que aprenden, como fue el caso de Pedro.

Finalmente, en la pregunta número 4 que solicita al estudiante encontrar el valor de la x no fue posible realizar una descripción del dominio del estudiante pues no respondió ninguno de los tres literales propuestos; de acuerdo con la actitud con la que Pedro recibió el cuestionario esto pudo deberse a un asunto emocional.

1. "Mi abuelo tenía una coneja y compró otros cuatro conejos en la tienda agropecuaria. ¿Cuántos conejos tiene ahora mi abuelo?"

$1 + 4 = 5$

Ahora cuéntame, cómo hiciste para hallar el total si este era desconocido.

hallándolo

2. "En la nevera habían 3 jugos de naranja. Mi padre ha ido a comprar y ha traído alguno más ¿Por qué ahora hay 4 jugos de naranja. ¿Cuántos jugos de naranja ha traído mi padre?"

¿Cómo encontraste el número oculto?

$3 + 1 = 4$

encontrándolo

3. Ayuda a Mateo a encontrar la respuesta a la siguiente situación problema: "En 3 cajas hay cierta cantidad de dulces y por fuera de las cajas hay 10 dulces más" Si el número de dulces es 22. ¿Cuántos dulces hay en las 3 cajas?"

6

4. Encuentra el valor de la incógnita. No olvides que "X" representa el valor de un número.

a. $1 + 4 = X$. ¿Cuál es el valor de "X"?

5

b. $3 + X = 4$. ¿Cuál es el valor de "X"?

9

c. $3X + 10 = 22$. ¿Cuál es el valor de "X"?

na

Para mí, es importante tu apreciación. ¿Cómo te sentiste con el desarrollo de la actividad?

mal por que era muy difícil

Caso 3. Pedro

Figura 15. Respuestas de Pedro al cuestionario de fase de exploración

Fuente: elaboración propia

En consonancia con la descripción realizada del caso de Pedro. Se presentan los siguientes descriptores de nivel desde las diferentes dimensiones, ubicándolo en general en un nivel ingenuo.

Tabla 26. *Descriptor de nivel de Pedro durante el desarrollo del cuestionario en la fase de exploración por dimensiones*

Dimensión	Descriptor de nivel	Nivel
Dimensión de contenido	- Manifiesta no saber qué es un número oculto. - No reconoce la variable en una expresión matemática.	Ingenuo
Dimensión de métodos	- No encuentra el valor desconocido en una expresión matemática. - No encuentra el valor de la variable en una expresión matemática.	Ingenuo
Dimensión de propósitos	No relaciona número oculto con la variable como incógnita.	Ingenuo
Dimensión de formas de comunicación	No hace uso del lenguaje formal para señalar un número oculto, la incógnita o la variable.	Ingenuo

Fuente: elaboración propia

Es importante precisar que los resultados obtenidos dieron cuenta de los niveles iniciales de comprensión en los cuales estaban ubicados los estudiantes participantes de la investigación, los cuales servirán como referente para determinar el nivel final y la evolución presentada por cada uno. A continuación, se presenta una tabla que muestra similitudes y distanciamientos entre los desempeños mostrados por los estudiantes.

Tabla 27. *Similitudes y distanciamientos entre los desempeños. Aplicación del cuestionario.*

Similitudes	Distanciamientos
1. Los numerales 1 y 2 fueron resueltos por los tres estudiantes. Manuel presentó mayor dificultad cuando la incógnita es uno de los sumandos en vez del resultado, mientras que Pedro, aunque mostró el resultado correcto no lo justificó.	1. Con relación a los literales 1 y 2 Luciana mostró familiaridad con los sistemas de símbolos y las fórmulas dentro del lenguaje matemático.
2. En el desarrollo del numeral 3 Luciana y Manuel presentaron un problema de comprensión al enfrentarse a la solución de la situación planteada. No reconocían una variedad de usos posibles de lo que han aprendido en la formación matemática escolar.	2. Pedro, desde la dimensión de formas de comunicación, no mostró intención comunicativa para exponer sus resultados y, desde la dimensión de propósitos, no sintió la necesidad de evidenciar una posición personal acerca de lo que ha aprendido.
3. En el desarrollo del numeral 4 Manuel identificó la incógnita dentro de una ecuación, pero desconocía el proceso para hallar su valor numérico.	3. Se evidenció que Luciana hace uso del tanteo para llegar a las respuestas de planteamientos presentados.
4. Al terminar el desarrollo del cuestionario Manuel y Pedro se ubicaron en un nivel de ingenuo.	4. A diferencia de Luciana, Manuel reconoció el símbolo como elemento del lenguaje matemático.
	5. Del numeral 4 no fue posible realizar la descripción del dominio de Pedro puesto que no lo realizó.
	6. Al finalizar el desarrollo del instrumento Luciana se ubicó en un nivel de novato.

Fuente: elaboración propia

4.4 Análisis aplicación unidad curricular

La unidad curricular, está conformada por tres talleres, cada uno atribuido a una fase. La fase de exploración cuenta con 5 actividades, la fase de investigación guiada contiene 10 actividades y la fase de proyecto final de síntesis con 5 para un total de 20 actividades.

Las actividades de la fase de exploración ayudan a que los estudiantes perciban conexiones entre el tópico generativo y sus propios intereses y conocimientos (¿cómo se relaciona el concepto de variable con la variación de fenómenos de la cotidianidad?). La exploración es importante, pues esta indica el nivel de comprensión en el que los escolares se encuentran respecto a un tema en particular. Por eso, las actividades se presentaron con una intención académica unida con lo que más les apasiona, el juego.

La primera actividad “El incógnito” era una estrategia de juego grupal, que involucraba a estudiantes con el investigador. El estudiante espía debía encontrar al incógnito, ese estudiante que estaba coordinando los movimientos del resto de grupo. Intencionalmente, de manera intercalada a los tres estudiantes participantes de la investigación (Manuel, Luciana y Pedro) se les nombró espías. La primera espía en salir, después de hacer varios juegos, fue Luciana. Al ingresar al aula, empezó a observar el comportamiento del grupo y a analizar quién podía ser el compañero incógnito y después de agotar sus intentos posibles pudo indicar quién era el estudiante incógnito. Luego, el estudiante que pasó a ser espía fue Manuel y luego Pedro, quienes no presentaron dificultad para señalar quién era el compañero incógnito. En conclusión, el espía es el estudiante que va a resolver el problema, el estudiante que realiza los movimientos es la incógnita y los demás son las posibles variables que se ven afectados por la incógnita. En términos metodológicos ¿qué se espera del estudiante cuando traslade una situación a la parte algorítmica?, que entienda que hay un elemento desconocido al cual se hace necesario asignar un valor.

Por lo tanto, este tipo de actividades potenciarían el acercamiento y la solución de la pregunta de investigación: ¿cómo comprenden los estudiantes el concepto de variable como incógnita? Cabe destacar que fue notable la disponibilidad y gusto de los participantes por la actividad realizada. Así, desde el marco de la EpC, la actividad se relaciona con las metas de comprensión: entender el concepto de número desconocido y reconocer el concepto de variable en situaciones

cotidianas, a partir del juego y de saberes previos, que hacen parte de la vida cotidiana de los estudiantes.

Por otro lado, el juego de imágenes pretendía que los estudiantes encontraran las diferencias entre los pares de imágenes, lo cual resultó interesante para ellos. El grupo se dividió en duplas, y cada una debía pasar por todas las estaciones de pares imágenes. Al finalizar se ubicaron en una sola mesa para que entre todos concluyeran cuáles eran las diferencias que quizás otros no habían encontrado.



Figura 16. Juego encuentra la diferencia

Fuente: elaboración propia

Otra de las actividades que fue bien recibida por los estudiantes fue la actividad del juego de palabras “el mensaje x”, que buscaba que los estudiantes realizaran 24 operaciones que involucraban números enteros desde -20 hasta +20 para encontrar la letra correspondiente en la tabla del código secreto. El mensaje que se encontraba oculto era “comprender es una habilidad”. Los tres estudiantes respondieron de manera acertada al ejercicio propuesto como se muestra a continuación.

Investigación: La Comprensión del concepto de variable como incógnita.

Descifrar el mensaje incógnita. Para eso, debes realizar 24 operaciones que involucren números enteros entre -20 y +20. Cada resultado corresponde a una letra de la tabla del código secreto. El número de la operación lo proporcionará el sitio de la letra en el mensaje. Así, si el ejercicio 1 da como resultado -15, deberás colocar en el sitio 1, la letra que corresponde al resultado -15.

21. $-13+2-4 = -15$ I
 22. $15-30+2 = -13$ D
 23. $7+1-13+15+6 = +16$ A
 24. $10+10-25-9-2 = -16$ D

El Mensaje "X" es:
Comprender es una habilidad

Operaciones:

- $-4+6+3-10 = -5$ G
- $6+10-10-2 = +4$ O
- $-12+8-10 = -14$ H
- $9+3-20+6 = -2$ P
- $-15+3-1+10+4+8 = +16$ A
- $6+3-13 = -4$ E
- $-5+3+1 = -1$ N
- $10-9+2-6 = -3$ D
- $8+6-3 = +11$ E
- $6+5+4-10-2 = -3$ R
- $-12+4+1 = -7$ E
- $-3-7+20 = +10$ S
- $10+2-14-6 = -8$ U
- $-5+3-11 = -13$ N
- $9+4-12-5 = -4$ A
- $8+3-9+4 = +6$ H
- $5-10-4 = -9$ A
- $3+2-6+3 = -1$ N
- $4+5+2 = +11$ E
- $6+1-8-5 = -6$ L

D	-16
E	11
F	2
A	16
L	-6
R	1
U	-8
D	-3
I	11
M	-14
N	-13
H	-5
A	-4
D	-13
C	-5
A	-9
E	-7
I	-15
O	4
B	2
S	10
E	-4
H	6
N	-1

Manuel

Investigación: La Comprensión del concepto de variable como incógnita.

Descifrar el mensaje incógnita. Para eso, debes realizar 24 operaciones que involucren números enteros entre -20 y +20. Cada resultado corresponde a una letra de la tabla del código secreto. El número de la operación lo proporcionará el sitio de la letra en el mensaje. Así, si el ejercicio 1 da como resultado -15, deberás colocar en el sitio 1, la letra que corresponde al resultado -15.

21. $-13+2-4 = -15$ I
 22. $15-30+2 = -13$ D
 23. $7+1-13+15+6 = +16$ A
 24. $10+10-25-9-2 = -16$ D

El Mensaje "X" es:
Comprender es una habilidad

Operaciones:

- $-4+6+3-10 = -5$ G
- $6+10-10-2 = +4$ O
- $-12+8-10 = -14$ H
- $9+3-20+6 = -2$ P
- $-15+3-1+10+4+8 = +16$ A
- $6+3-13 = -4$ E
- $-5+3+1 = -1$ N
- $10-9+2-6 = -3$ D
- $8+6-3 = +11$ E
- $6+5+4-10-2 = -3$ R
- $-12+4+1 = -7$ E
- $-3-7+20 = +10$ S
- $10+2-14-6 = -8$ U
- $-5+3-11 = -13$ N
- $9+4-12-5 = -4$ A
- $8+3-9+4 = +6$ H
- $5-10-4 = -9$ A
- $3+2-6+3 = -1$ N
- $4+5+2 = +11$ E
- $6+1-8-5 = -6$ L

D	-16
E	11
P	-2
A	16
L	-6
R	1
U	-8
D	-3
I	11
M	-14
N	-13
H	-5
A	-4
D	-13
C	-5
A	-9
E	-7
I	-15
O	4
B	2
S	10
E	-4
H	6
N	-1

Luzana

Investigación: La Comprensión del concepto de variable como incógnita.

Descifrar el mensaje incógnita. Para eso, debes realizar 24 operaciones que involucren números enteros entre -20 y +20. Cada resultado corresponde a una letra de la tabla del código secreto. El número de la operación lo proporcionará el sitio de la letra en el mensaje. Así, si el ejercicio 1 da como resultado -15, deberás colocar en el sitio 1, la letra que corresponde al resultado -15.

21. $-13+2-4 = -15$ I
 22. $15-30+2 = -13$ D
 23. $7+1-13+15+6 = +16$ A
 24. $10+10-25-9-2 = -16$ D

El Mensaje "X" es:
Comprender es una habilidad

Operaciones:

- $-4+6+3-10 = -5$ G
- $6+10-10-2 = +4$ O
- $-12+8-10 = -14$ H
- $9+3-20+6 = -2$ P
- $-15+3-1+10+4+8 = +16$ A
- $6+3-13 = -4$ E
- $-5+3+1 = -1$ N
- $10-9+2-6 = -3$ D
- $8+6-3 = +11$ E
- $6+5+4-10-2 = -3$ R
- $-12+4+1 = -7$ E
- $-3-7+20 = +10$ S
- $10+2-14-6 = -8$ U
- $-5+3-11 = -13$ N
- $9+4-12-5 = -4$ A
- $8+3-9+4 = +6$ H
- $5-10-4 = -9$ A
- $3+2-6+3 = -1$ N
- $4+5+2 = +11$ E
- $6+1-8-5 = -6$ L

D	-16
E	11
P	-2
A	16
L	-6
R	1
U	-8
D	-3
I	11
M	-14
N	-13
H	-5
A	-4
D	-13
C	-5
A	-9
E	-7
I	-15
O	4
B	2
S	10
E	-4
H	6
N	-1

Activar Windows
Ve a Configuración predictiva

Figura 17. Juego de palabras "El mensaje x"

Fuente: elaboración propia

Por su parte, el trabajo con cuadrados mágicos buscaba que los estudiantes hallaran y verificaran los valores de un número oculto. Además, se evaluó el método que el estudiante usó para encontrar la respuesta. Pese a que los escolares mostraron interés por trabajar con números ocultos la realización les tomó un tiempo considerable, por lo cual Pedro no finalizó la actividad, tal vez por un problema de comprensión. Resulta interesante mencionar que, al realizar el proceso de retroalimentación de la actividad, una estudiante expresó haber intentado ubicar los números de forma consecutiva, es decir, llenar en cuadrado mágico de izquierda a derecha tomando números consecutivos, lo cual, mediante una exploración más profunda, podría darle a la solución del problema, pero eso no concierne al presente informe. Adicionalmente, como actividad de profundización se dispuso de ocho modelos de cuadrados mágicos extras que ya tenían algunos números y los estudiantes debían poner los números faltantes y hallar la constante o suma mágica.

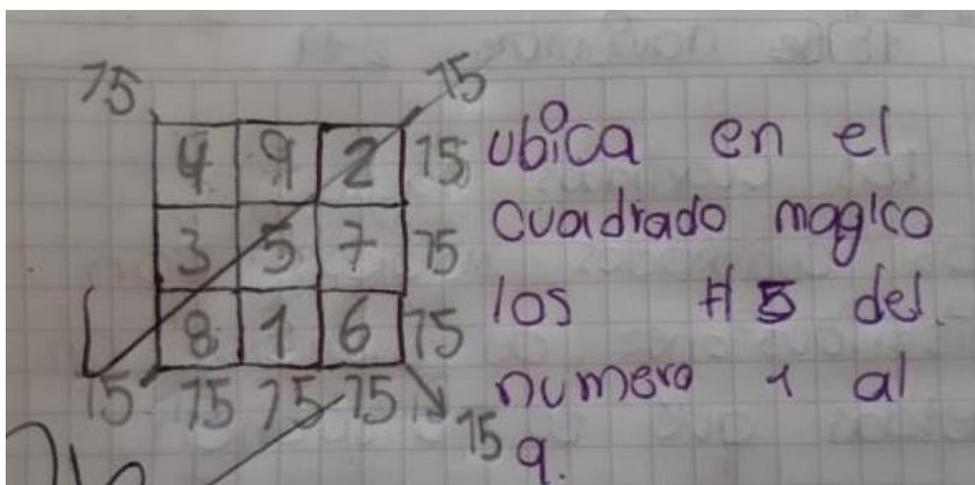


Figura 18. Trabajo con cuadrados mágicos

Fuente: elaboración propia

En la profundización Manuel solucionó los dos cuadrados mágicos que se le dieron, lo cual demostró su habilidad para hacerlo. En el primero encontró que la constante o suma mágica era 15, al utilizar los números del 1 al 9 y en el segundo la suma era 24 y empleó los números 6, 12, 10, 16, 8, 0, 6, 4 y 14. Estos resultados podrían ubicarlo en un nivel de maestría, de acuerdo con los niveles de desempeño del marco conceptual de la EpC en la dimensión de métodos, pues halló y verificó los valores de un número oculto en una expresión matemática. Luciana, aunque presentó el mismo proceso que Manuel, no escribió cuál era la constante o suma mágica, lo cual se puede relacionar más con una falta de atención que a un problema con los procedimientos que siguió buscar el resultado, y esto la ubicaría en un nivel de aprendiz. Por su parte, aunque Pedro determinó que en el primer cuadrado mágico la constante era 15, su colocación de los números fue incorrecta, pues repitió los números. Y el segundo cuadrado mágico no lo realizó por su nivel de complejidad. Es prudente expresar que durante la explicación y el trabajo inicial de exploración de la actividad el estudiante participó y llegó a la solución correcta del cuadrado mágico inicialmente trabajado; sin embargo, se ubicaría nuevamente en un nivel de ingenuo, pues no encontró el valor desconocido en una expresión matemática.



Figura 19. Cuadros mágicos de Manuel, Luciana y Pedro

Fuente: elaboración propia

La última actividad de la fase de exploración fue el trabajo con la caja misteriosa que permitía ver a cada uno cómo un número que pasaba por la caja se convertía en otro número, lo cual atrajo la atención de los estudiantes. Estos asimilaron que el lenguaje metafórico usado hacía parte de la estrategia para comprender que si a un número se le suma otro el resultado cambia y que el tema que se estaba abordando era el de suma con incógnita. Las argumentaciones dadas por Manuel, Luciana y Pedro fueron coherentes con el proceso que se realizó con la caja misteriosa, pues sus argumentos coincidieron en que, si a un número natural se le adiciona un número desconocido, su resultado será otro número natural; que si a un número se le suma una incógnita esa incógnita representa otro número; y que el valor de la incógnita debe ser correcto para que la igualdad sea verdadera.

La fase de investigación guiada constó de 10 actividades que buscaban que los estudiantes participantes progresaran en su proceso de comprensión frente al concepto de la variable como incógnita. Ritchhart, Stone, Buchovecky y Hetland (1999) expresaron que “a medida que los alumnos desarrollan conocimientos y habilidades, su trabajo se vuelve cada vez más complejo” (p. 172), por eso, las actividades planteadas tenían un carácter progresivo con el fin de conducir a la adquisición de nuevos conocimientos o, simplemente, al refinamiento de los saberes intuitivos.

En la primera actividad de esta fase, denominada ¿Qué tanto sé?, se les solicitaba a los

estudiantes que diligenciaran dos tablas. En la primera se les preguntaba por el doble, el triple, el cuádruple y el quíntuple de un número. Las respuestas mostraron que los estudiantes tenían un buen dominio del múltiplo de un número natural, como lo muestra la hoja del procedimiento de Manuel.

Investigación: La Comprensión del concepto de variable como incógnita.

Actividad. Completa el cuadro.

Número	Doble del número	Triple del número	Cuádruple del número	Quíntuple del número
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	16	24	32
5	10	15	20	25
6	12	18	24	30
7	14	21	28	35
8	16	24	32	40
9	18	27	36	45
10	20	30	40	50
x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$

Figura 20. Respuesta de Manuel primera actividad fase de investigación guiada

Fuente: elaboración propia

La segunda tabla consistía en encontrar el consecutivo de un número. Si x es un número natural, su consecutivo es el número que le sigue, por lo cual se orientó a los estudiantes para que, junto con sus compañeros, definieran los consecutivos de los números contenidos en la tabla. Manuel, Luciana y Pedro lo realizaron sin problema, lo cual comprobó una apropiación de la actividad, pero al responder la pregunta ¿Cómo se obtuvieron los consecutivos de los números presentados? la argumentación de Manuel fue insuficiente para develar una verdadera comprensión del objeto de la actividad.

EL CONSECUTIVO

Si x es un número natural $(0, 1, 3, \dots)$, su consecutivo es el número que le sigue. Con ayuda de tus compañeros completa la tabla.

Número natural	Consecutivo uno	Consecutivo dos	Consecutivo tres
2	2+1	2+2	2+3
3	3+1	3+2	3+3
4			
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$
x	$x+1$	$x+2$	$x+3$

Responder: ¿Cómo se obtuvieron los consecutivos de los números presentados?



Scanned with
CamScanner

se suman

Manuel

Figura 21. Ejercicio del consecutivo de n realizado por Manuel

Fuente: elaboración propia

Por su parte, Luciana diligenció de manera correcta la tabla y tras indagar sobre los procesos seguidos para la obtención de los números consignados argumentó que se obtuvieron gracias al ejemplo del mismo instrumento. La dimensión de formas de comunicación en el nivel de novato define que los estudiantes siguen procesos por ejemplos en los cuales siguen ciertas instrucciones.

EL CONSECUTIVO

Si x es un número natural $(0, 1, 3, \dots)$, su consecutivo es el número que le sigue. Con ayuda de tus compañeros completa la tabla.

Número natural	Consecutivo uno	Consecutivo dos	Consecutivo tres
2	2+1	2+2	2+3
3	3+1	3+2	3+3
4	4+1	4+2	4+3
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$
x	$x+1$	$x+2$	$x+3$

Responder: ¿Cómo se obtuvieron los consecutivos de los números presentados?

se obtuvieron
gracias al ejemplo
que decía 2+1, 2+2
y 2+3

Luciana.



Scanned with
CamScanner

Figura 22. Ejercicio del consecutivo de n realizado por Luciana

Fuente: elaboración propia

Por último, Pedro también desarrolló de manera correcta la tabla, pero su respuesta a la pregunta sobre la obtención de los números resultantes fue poco profunda, lo cual lo ubicaría en un nivel de novato en la categoría de coherencia en el discurso desde la dimensión de formas de comunicación, debido a que utiliza términos no acordes para organizar el argumento de las explicaciones para dar cuenta de la variación. Asimismo, desde el rasgo de consideración de la audiencia y el contexto, de acuerdo con Boix y Gardner (1999), el estudiante aún no se percibe a sí mismo como público, puesto que la comunicación iguala a la transmisión.

EL CONSECATIVO

Sí x es un número natural (0, 1, 3,...), su consecutivo es el número que le sigue. Con ayuda de tus compañeros completa la tabla.

Número natural	Consecutivo uno	Consecutivo dos	Consecutivo tres
2	2+1	2+2	2+3
3	3+1	3+2	3+3
4	4+1	4+2	4+3
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$
x	$x+1$	$x+2$	$x+3$

Responder: ¿Cómo se obtuvieron los consecutivos de los números presentados?

*Facil teniendo el número natural y descomponiendo el consecutivo
1, 2, 3*

Scanned with CamScanner

Pedro.

Figura 23. Ejercicio del consecutivo de n realizado por Pedro

Fuente: elaboración propia

Para la segunda actividad los estudiantes mostraron un gran interés por participar. En parejas analizaron y resolvieron las pistas para escribir en el tablero el valor que representaba cada letra y descifrar el mensaje. La pareja ganadora fue la pareja conformada por Manuel y Luciana. Desde la dimensión de métodos, se pudo notar que los estudiantes utilizaron diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática, lo cual los ubicó en un nivel de aprendices, debido a que realizaron de manera correcta la lectura de los enunciados y el planteamiento de los algoritmos, lo que les permitió descifrar el mensaje. En el caso de Pedro, no fue posible ubicarlo en un nivel dentro de la dimensión de métodos, puesto que la actividad fue definida para que una pareja resultase ganadora, sin embargo, los avances de Pedro fueron satisfactorios, logrando formar las palabras iniciales “La paz es”.

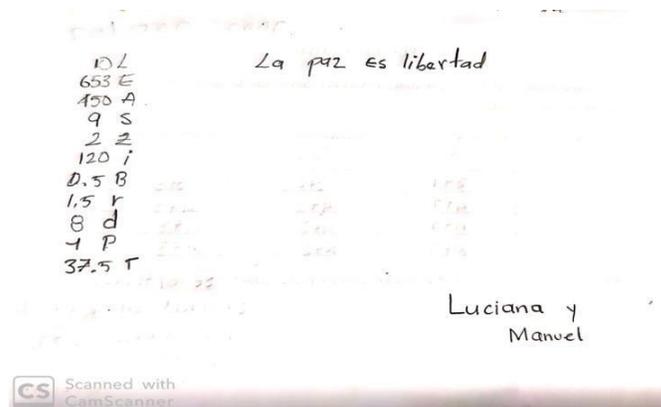


Figura 24. Solución actividad mensaje oculto Manuel y Luciana

Fuente: elaboración propia

Las actividades 3, 4, 5, 6, 7 y 8 contenidas en el apartado 3.6.5.1 guardan una estrecha relación entre sí dentro de esta fase de investigación guiada, pues como bien se dijo eran progresivas y buscaban consolidar el conocimiento sobre los conceptos de variable e incógnita y sus diferencias. A partir de estas, se encontró que, desde la dimensión de formas de comunicación, Manuel y Luciana reconocían y enunciaban los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas y presentaban argumentos y explicaciones claros sobre el concepto abordado, por lo cual se ubicaron en un nivel de aprendices. Por el contrario, Pedro utilizó términos o conceptos no acordes para organizar los argumentos de las explicaciones para dar cuenta de la variación, y se ubicó en el nivel de novato.

La actividad 7, cuyo propósito era la resolución de ecuaciones, sufrió una modificación en cuanto a su modo de aplicación, pues no se entregó en fichas, sino que fue desarrollada en el tablero, con el fin de atender las dudas inmediatas de los estudiantes. Puede decirse que Manuel, Luciana y Pedro respondieron de manera correcta a las ecuaciones entregadas, lo cual indicó que contaban con habilidades para el trabajo de este tipo de expresiones matemáticas. Desde la dimensión de métodos se afirma que los estudiantes utilizan diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido y determinar el valor de la variable en una expresión matemática, por tanto, estaban en un nivel de aprendices. De igual manera, de acuerdo con los descriptores de nivel en la dimensión de formas de comunicación, estarían en el mismo nivel, dado que reconocen y enuncian elementos de sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas, al lograr despejar incógnitas y comprobar si los valores encontrados hacían que las igualdades fueran verdaderas.

Para la actividad 8 se requería estar muy atento a cómo los estudiantes leían los enunciados y cómo los transferían a expresiones un poco más complejas. En general, los estudiantes entregaron resultados siguiendo procedimientos aritméticos sencillos, pero dejaron de lado lo que se les solicitaba en el problema que era formular una ecuación ($12 + 15 + x = 98$) y que a través del despeje obtuvieran el resultado que consiguieron desde la aritmética. Por ende, desde la dimensión de formas de comunicación se evidenció los estudiantes mostraban conocimiento de los sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático, por lo cual estaban en un nivel de novatos.

Por ejemplo, para la segunda situación planteada “Juan está leyendo un libro de cuentos. El lunes leyó 12 páginas, el miércoles leyó 15 páginas. Si el libro tiene 98 páginas, ¿cuántas páginas faltan por leer?” Manuel y Pedro dijeron que se debían sumar las páginas leídas el lunes con las del miércoles y luego del total de las páginas del libro le restaban 27, por lo cual faltarían por leer 71 páginas. A su vez, Luciana manifestó que, si se tenían 98 páginas, a ese total se le restaban 12 que leyó el lunes, es decir que quedaban 86, luego se le restaban las que leyó el miércoles que fueron 15, así que quedaban por leer 71 páginas.

La actividad 9, que buscaba la construcción del concepto de variación, introdujo a los estudiantes en una actividad experiencial, en la cual la observación era fundamental para la toma de tiempos y el posterior análisis de las situaciones para responder algunas preguntas. La socialización de la experiencia se realizó a través de audios para su posterior transcripción.



Figura 25. Experiencia vivencial construcción concepto de variación

Fuente: elaboración propia

Tabla 28. *Transcripción de los argumentos de Manuel*

Pregunta	Argumento
¿Por qué los tiempos son diferentes en la situación 1?	Porque al tirar la pelota rueda en velocidades diferentes.
¿Por qué los tiempos de desplazamiento de las pelotas 1 y 2 son diferentes en su gran mayoría?	Porque hay pelotas que ruedan más que las otras por sus diferencias en su peso.
¿De qué depende que los estudiantes 1 y 2 hayan registrado tiempos distintos, sabiendo que realizaron el mismo recorrido?	Al hacer los desplazamientos se van cansando y van mermando la velocidad.
¿Por qué puede variar el tiempo de llenado de un recipiente?	Porque la canilla puede mermar el agua o aumentarla para llenar el recipiente más rápido.
Explica con tus palabras el fenómeno presentado en la situación del transporte de silletería.	Porque el primer estudiante al transportar la silletería iba disminuyendo la velocidad e iba cansándose y más lento las transportaba. Cuando fueron dos el tiempo disminuyó y cuando eran tres disminuyó un poco más.

Fuente: elaboración propia

Según la dimensión de formas de comunicación y la categoría de coherencia en el discurso Manuel se ubicó en un nivel de novato, puesto que utilizó términos o conceptos no acordes para organizar los argumentos de las explicaciones para dar cuenta de la variación.

Tabla 29. *Transcripción de argumentos de Luciana*

Pregunta	Argumento
¿Por qué los tiempos son diferentes en la situación 1?	Porque tiraban la pelota a diferente velocidad.
¿Por qué los tiempos de desplazamiento de las pelotas 1 y 2 son diferentes en su gran mayoría?	Porque la pelota 1 la tiraban más duro y la pelota 2 la tiraban más despacio y porque la pelota 2 era más pesada que la pelota 1.
¿De qué depende que los estudiantes 1 y 2 hayan registrado tiempos distintos, sabiendo que realizaron el mismo recorrido?	Porque todos dos caminaban a ritmos diferentes.
¿Por qué puede variar el tiempo de llenado de un recipiente?	Porque abrió el grifo a distintas potencias.
Explica con tus palabras el fenómeno presentado en la situación del transporte de silletería.	Los tiempos son diferentes, un compañero tardó más porque estaba cargando las sillas solo, cuando cambiaron a dos compañeros mermó el tiempo porque les rendía más y se cansaban menos.

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con la dimensión de formas de comunicación y la categoría de coherencia en el discurso Luciana se ubicó en un nivel de aprendiz, puesto que argumentó y explicó de forma clara situación de variación.

Tabla 30. *Transcripción de argumentos de Pedro*

Pregunta	Argumento
¿Por qué los tiempos son diferentes en la situación 1?	Porque la pelota 1 se desplaza a diferentes velocidades.
¿Por qué los tiempos de desplazamiento de las pelotas 1 y 2 son diferentes en su gran mayoría?	Por la fuerza con que lanzaban las pelotas 1 y 2.
¿De qué depende que los estudiantes 1 y 2 hayan registrado tiempos distintos, sabiendo que realizaron el mismo recorrido?	Porque el estudiante uno caminó normalmente y el segundo lo hizo a distintas velocidades.
¿Por qué puede variar el tiempo de llenado de un recipiente?	Porque el agua en el tiempo 2 era menos, en el tiempo 1 era más bastante.
Explica con tus palabras el fenómeno presentado en la situación del transporte de silletería.	Porque un solo trabajador se demora en transportar las sillas 12 minutos, pero cuando aumentan los trabajadores disminuye el tiempo.

Fuente: elaboración propia

A partir de la dimensión de formas de comunicación y la categoría de coherencia en el discurso Pedro, al igual que Luciana se ubicó en un nivel de aprendiz.

La última actividad de la fase de investigación guiada se diseñó para que los estudiantes a partir de las vivencias en su tiempo extraescolar respondieran a cinco preguntas que hacían alusión a la construcción del concepto de variación y del significado de variable, al conocimiento de fenómenos que varían en sus contextos, y al concepto de incógnita y número oculto. Dichos cuestionamientos fueron repetitivos en todo el desarrollo de la investigación con el propósito de evaluar la evolución de la comprensión del concepto objeto de estudio en los estudiantes. Las respuestas de los estudiantes se muestran a continuación, transcritas tal cual se registraron en los cuadernos.

Tabla 31. *Respuestas construcción del concepto de variación*

Pregunta	Respuesta Manuel	Respuesta Luciana	Respuesta Pedro
¿Qué es variación?	La variación se presenta en los números cuando va de menor a mayor o de mayor a menor.	La variación es cuando disminuye o aumenta algo. La estudiante presenta un dibujo, donde expone lo siguiente: una piscina bota en la noche 40 litros de agua y en el día bota otros 40 litros, entonces se demora 5 días en vaciar la piscina del todo.	Es algo que puede disminuir o aumentar
¿A qué se le puede llamar variable?	La velocidad de un automóvil.	A la velocidad de una moto, al precio del mercado, al pasaje porque a veces vale más.	A un número o a una cantidad.
¿Qué otros fenómenos varían en nuestro contexto?	La temperatura de un termómetro.	El jabón Axión disminuye porque lo gastamos.	Cuando van muchas personas a mi casa disminuye el espacio y cuando se van el espacio aumenta.
¿Qué es una incógnita?	Es una respuesta de algo que esperamos ver o encontrar.	Es un número que puede ser cualquiera, pero se necesita una operación matemática.	Es algo que no conocemos, como un número desconocido que puede ser cualquiera.
¿Qué es un número oculto?	Es un número que se obtiene al realizar una operación.	Es un número que hay que encontrar.	Es un número que no conocemos y hay que descubrirlo por medio de una operación.

Fuente: elaboración propia

Cabe resaltar que las respuestas fueron mostrando cada vez una mejor comprensión por parte de los estudiantes. Estos presentaban, en su mayoría, una mejor capacidad para conceptualizar a partir de la presentación de ejemplos. En relación con la categoría de variación, desde la dimensión de contenidos, se pudo notar que Manuel y Pedro presentaron los ejemplos de variación manejados en clase y otros que podrían asemejarse a estos, lo cual los ubicó en un nivel de novatos. En el caso de Luciana, ella mostró una mayor comprensión del concepto de variación puesto que reconoció por qué se da y lo explicó a partir de algunos ejemplos como la velocidad de una moto, el precio del mercado y los costos de pasajes, lo que la situó en un nivel de aprendiz.

En cuanto a la dimensión de propósitos, en la categoría de relación variación y contexto Manuel y Pedro se encontraban en el nivel de novatos, puesto que identificaron fenómenos del

contexto que son susceptibles de variación, como la temperatura y la capacidad en un espacio cuando hay cierto número de personas. Mientras que Luciana, quien relacionó los conceptos de variación con fenómenos del contexto, presentó ejemplos y definió el concepto de variación, se ubicó en un nivel de aprendiz. Según la categoría de relación de número oculto y variable como incógnita es importante precisar que Manuel no relacionó el número oculto con la variable como incógnita, así que se ubicó en el nivel de ingenuo; Pedro estableció similitudes entre número oculto y la incógnita, así que correspondió a un nivel de novato; y Luciana, al mostrar mayor comprensión, pues estableció similitudes entre número oculto, incógnita y la variable, se ubicó en el nivel de aprendiz.

Ahora bien, en la fase del proyecto final de síntesis cada estudiante debía desarrollar de forma más independiente las actividades diseñadas, pues se buscaba una síntesis profunda y una extensión de la comprensión que se ha construido a través de la unidad curricular. Para eso se dispuso de cinco actividades secuenciales. La primera actividad estaba dirigida al trabajo con razones y proporciones y se basaba en el libro guía de los propios estudiantes, el cual presentaba una situación problema y la manera como la protagonista lo solucionaba. En aras de profundizar la actividad se hicieron otras preguntas a los estudiantes.

Para responder Manuel y Luciana utilizaron diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática, lo cual corresponde al nivel de aprendiz. Su respuesta fue que si Ana debía cancelar por las 20 peras un valor de \$9000 y el precio de dos peras era de \$1200 el dinero que debía cancelar era \$5400. Según los estudiantes se debía tener en cuenta que, si se incrementaba el valor de las peras, también aumentaba el precio que se debía cancelar. Agregaron que podrían haber llegado al mismo resultado al saber que una pera costaba \$450, si se multiplicaba ese valor por 9, el resultado serían los mismos \$4050. Lo anterior denota un buen razonamiento y dominio de las operaciones matemáticas básicas de ambos estudiantes, puesto que siguieron el patrón propuesto por la guía sobre las razones y las proporciones. Por su parte, Pedro realizó las operaciones desde la aritmética, y recurrió en la mayoría de las oportunidades al tanteo otro procedimiento como estrategia válida para encontrar resultados, así que estaba en un nivel de novato.

En la segunda actividad se trabajó la variación de magnitudes. Fue diseñada para que los

estudiantes combinaran lo gráfico con lo numérico. En esta Manuel, Luciana y Pedro mostraron un nivel de aprendices al proponer expresiones matemáticas haciendo uno de número oculto. En el desarrollo de la actividad número 3 los estudiantes trabajaron con los números enteros y debían realizar operaciones sencillas. En esta se conceptualizaba el intervalo, se daban ejemplos para ampliar el concepto y se les solicitaba a los participantes que a partir de la lectura de algunas situaciones registraran los valores que podía tomar x en cada caso. La primera pregunta indagaba sobre la edad de Milena teniendo como referencia que era mayor que Mauricio, pero menor que Jorge.

Los participantes Manuel y Luciana respondieron que las posibles edades de Milena estaban entre los 16 y los 25 años, dado sería mayor que Mauricio que tiene 15 años y menor que Jorge que tiene 26; así que los valores de x eran todas las edades que podía tener Milena. Pedro expresó que Milena tenía 20 años y, aunque su respuesta cumplía con la condición de la situación planteada, no tenía en cuenta el concepto de intervalo ni señalaba todas las posibilidades que cumplían con tal condición. Por consiguiente, de acuerdo con la dimensión de método es posible indicar que Pedro, al utilizar el tanteo u otro procedimiento para determinar el valor de la variable, lo cual lo posicionó en el nivel de novato; mientras que Manuel y Luciana estaban en el nivel de aprendices, pues utilizaron diferentes procedimientos para determinar el valor de la variable. La segunda situación, igual que la primera, presentaba unas condiciones para hallar la edad de y si era mayor o igual a la edad de m y menor que la edad de t , teniendo en cuenta que m tenía 12 años y t 15. Esta vez debían representar la situación en la recta numérica. Manuel, Luciana y Pedro respondieron bien a la pregunta de la situación y presentaron sus rectas numéricas para respaldar su respuesta, la respuesta era que y podía tener 12, 13 o 14 años.

En la actividad número 4, en la cual se trabajaba el concepto de variable, había dos enunciados. El primero indicaba que se debía encontrar en el conjunto de los números naturales dos números que sumados dieran 10 (x) y que al multiplicarlos entre sí se obtuviera el más alto de los productos. Manuel expuso que los números que cumplían la primera condición eran: 1+9; 2+8; 3+7; 4+6; 5+5; 6+4; 7+3; 8+2; 9+1 y 10+0. Para la segunda condición, de acuerdo con el producto de los números anteriores estaban: 9; 16; 21; 24; 25 y 0, entonces, la única opción que cumplía las dos condiciones era $5+5 = 10$ y $5 \times 5 = 25$. Luciana, inicialmente argumentó que los números que cumplían esas condiciones eran el 6 y el 4. Pero al analizar su respuesta a

profundidad se dio cuenta que 5×5 es igual a 25 y que 25 es mayor a 24. La respuesta de Pedro fue similar a la de Manuel, pero se diferenciaban por el proceso de argumentación de Manuel y por el tiempo que tardó Pedro para llegar a la respuesta. El segundo enunciado presentaba un problema en el cual Manuela tenía 60 muñecas para repartir de manera equitativa en su fiesta, pero no sabía cuántas asistentes habría. Los estudiantes contaban con una tabla para facilitar su proceso de respuesta el cual se muestra a continuación.

Manuel

Manuela tiene 60 muñecas para repartir entre las invitadas a su fiesta de cumpleaños, pero no sabe cuántas amigas llegarán, por lo tanto, no sabe cuántas correspondieran a cada asistente. debes determinar el número de muñecas a repartir de acuerdo a la cantidad de niñas en la fiesta, ten en cuenta que a cada una le corresponde la misma cantidad de muñecas.

Número de niñas	Numero de muñecas
1	60 muñecas
2	30 muñecas
3	20 muñecas
4	15 muñecas
5	12 muñecas
6	10 muñecas
10	6 muñecas

CS Scanned with CamScanner por qué no están los números 7 ... 9?

Figura 26. Respuesta de Manuel actividad de variable 2

Fuente: elaboración propia

La repartición que hizo Manuel da cuenta de su manejo del concepto de divisores, pero no respondió la pregunta, lo cual indicaría un problema de argumentación. Desde la dimensión de contenidos el estudiante establece diferencias entre los conceptos de variable e incógnita, lo que la sitúa en el nivel de Aprendiz. Desde la dimensión de formas de comunicación, se ubicó en un nivel ingenuo, pues, según Boix y Gardner (1999) consideran “comunicación egocéntrica. Los públicos y contextos no se toman en cuenta” (p. 256). Pero, para el investigador tal situación pudo haber obedecido a la falta de atención por parte del estudiante.

Manuela tiene 60 muñecas para repartir entre las invitadas a su fiesta de cumpleaños, pero no sabe cuántas amigas llegarán, por lo tanto, no sabe cuántas corresponderían a cada asistente. debes determinar el número de muñecas a repartir de acuerdo a la cantidad de niñas en la fiesta, ten en cuenta que a cada una le corresponde la misma cantidad de muñecas.

Luciana.

Número de niñas	Numero de muñecas
1	60 muñecas
2	30 muñecas
3	20 muñecas
4	15 muñecas
5	12 muñecas
6	10 muñecas
10	6 muñecas

¿y por qué no están los números 7... 9? por que la cantidad de muñecas hay que repartirlas en iguales partes

CS Scanned with CamScanner

Figura 27. Respuesta de Luciana actividad de variable 2

Fuente: elaboración propia

Aunque Luciana realizó todo el proceso y argumentó que no estaban los números del 7 al 9 porque se debía repartir por partes iguales la cantidad de muñecas existente, requiere trabajar más en el lenguaje matemático y en el aprendizaje de los elementos del currículo del área, como el concepto de divisibilidad y el de divisores de un número. Desde la dimensión de contenidos la estudiante establece diferencias entre los conceptos de variable e incógnita, lo que la sitúa en el nivel de Aprendiz al igual que se ubicó en la dimensión de formas de comunicación.

Manuela tiene 60 muñecas para repartir entre las invitadas a su fiesta de cumpleaños, pero no sabe cuántas amigas llegarán, por lo tanto, no sabe cuántas corresponderían a cada asistente. debes determinar el número de muñecas a repartir de acuerdo a la cantidad de niñas en la fiesta, ten en cuenta que a cada una le corresponde la misma cantidad de muñecas.

Pedro.

Número de niñas	Numero de muñecas
1	60 muñecas
2	30 muñecas
3	20 muñecas
4	15 muñecas
5	12 muñecas
6	10 muñecas
10	6 muñecas

¿y por qué no están los números 7... 9?

CS Scanned with CamScanner X que pasa más de 60 muñecas.

Figura 28. Respuesta de Pedro actividad de variable 2

Fuente: elaboración propia

En la respuesta de Pedro se encontró un argumento superficial, pues no se puede comprobar lo que dijo con el cuestionamiento realizado, lo cual indicaría que en la dimensión de contenidos estaría en un nivel ingenuo, debido a que le faltan conceptos disciplinarios y prevalecen en él las creencias intuitivas. Sin embargo, desde la dimensión de formas de comunicación se ubicó en un nivel de novato, pues utiliza términos o conceptos no acordes para organizar los argumentos de las explicaciones para dar cuenta de la variación.

Con la última actividad propuesta de esta fase se buscó evaluar a través de una dinámica la implementación de la unidad curricular. Contó con la participación de la docente titular del grupo, los estudiantes y el docente investigador. Se realizó la dinámica tingo tango, en la cual se rotaba un recipiente con unas preguntas y los estudiantes manifestaron en todo momento disposición por participar del desarrollo de estas, hablaron sobre sus aciertos, angustias, resultados y múltiples aprendizajes al participar de la implementación de la unidad curricular. A continuación, se presenta la transcripción de las respuestas en la dinámica realizada.

Tabla 32. *Transcripción última actividad fase de proyecto final de síntesis*

Pregunta	Manuel	Luciana	Pedro
¿Cómo te parecieron las actividades propuestas en el desarrollo de la unidad curricular?			Buenas, pero a veces difíciles, a veces no sabía que contestar.
¿Qué aprendiste de las actividades propuestas?		Aprendí a realizar ecuaciones, a identificar una incógnita, a reconocer que en la vida de nosotros hay cosas que varían y a muchas cosas más.	
¿Qué aprendiste nuevo en el área?	Que n es un número.		A leer bien los problemas de matemáticas, el consecutivo de un número.
Define qué es una incógnita		Es un número que tiene un valor y en la ecuación se puede encontrar cual es.	
Responde ¿Qué es variación?			Cosas que se cambian, que aumentan o se disminuyen.

¿Qué es una variable?		Algo que cambia.
¿Qué actividad te llamó más la atención y por qué?	La caja misteriosa. Un número se convierte en otro nuevo y ahí vi que se le suma un número que no conocemos.	Las actividades en el patio porque aprendimos qué es variación y qué son las variables.

Fuente: elaboración propia

4.4.1 Evaluación diagnóstica continua de la unidad curricular.

La evaluación de la unidad curricular se realizó de acuerdo con las estrategias de la autoevaluación y la coevaluación contempladas en el SIE del Centro Educativo Rural Casa Grande. A continuación, se muestra la transcripción de las autoevaluaciones de Manuel, Luciana y Pedro.

Tabla 33. Autoevaluación de estudiantes

Indicador	Manuel		Luciana		Pedro	
	Indicador	Justificación	Indicador	Justificación	Indicador	Justificación
Es responsable en la entrega de actividades.	4	Considero que soy responsable con la entrega de tareas	4	Me gusta ser responsable con las tareas y siempre entregué todas las actividades al profesor.	3	Sí. Aunque a veces fallo en eso.
Participa en las actividades propuestas por el maestro investigador.	3	Sí. Solo que hay veces que uno está indispuesto.	4	Me gusta mucho aprender y las actividades que nos trajo fueron muy buenas.	2	Sí me gustaban las actividades, pero a veces no quise responder así supiera.
Defina con sus palabras el concepto de incógnita.	4	Aprendí que es una incógnita.	4	Aprendí eso y muchas cosas más.	4	Sí, aprendí qué era una incógnita y un número oculto.
Realiza operaciones que involucran números Z.	4	Trabajo con números positivos y negativos.	4	Aprendí a trabajar con la recta numérica y con números positivos y negativos.	3	Sí, pero a veces me equivoco.
Posee habilidades para encontrar mensajes y números ocultos.	4	Lo que más me gustó fueron esas actividades para encontrar mensajes ocultos.	4	Fueron actividades muy divertidas que me gustaron mucho.	3	Sí me gustan.

Tiene claro el concepto de ecuación y es capaz de plantearlas de acuerdo con la información suministrada.	2	Porque soy capaz de solucionarlas, pero cuando las tengo que inventar no fui capaz.	2	Ahí me fue un poco mal, porque no hice lo que me dijeron.	2	Fue una actividad muy difícil, pero yo sí sé hacer ecuaciones.
Identifica la incógnita en una ecuación lineal.	4	Sí.	4	Sí. Yo soy capaz de saber dónde está la incógnita.	4	Sí la identifico.
Plantea y resuelve situaciones donde se evidencian fenómenos de variación.	3	Me gustó mucho el trabajo en la cancha con lo de variación.	2	Debo trabajar más en eso, pero me parece muy bueno ese tema.	3	Algunas veces.
Reconoce el intervalo como un conjunto de valores que puede tomar x .	4	Me pareció fácil esa actividad.	3	Me pareció fácil lo de las edades en la recta numérica.	4	Sí eso lo aprendí con las edades.
Utiliza el intervalo para el establecimiento de relaciones biunívocas (\leq , \geq , $=$).	4	Sé cuándo un número es mayor o menor.	4	Sí sé cuándo un número es menor o mayor.	4	Yo sé cuándo un número es menor o mayor.

Fuente: elaboración propia

4.5 Transcripción y análisis de la entrevista como instrumento del proyecto final de síntesis.

A continuación, se realiza la transcripción de las entrevistas realizadas Manuel (E1), Luciana (E2) y Pedro (E3). Las categorías de análisis de la investigación se distinguirán respectivamente con las siguientes siglas. C1: uso de la letra, preguntas 1 a la 5; C2: uso de la incógnita, preguntas 6 a la 9; y C3: concepto de variable, preguntas 10 a la 13.

4.5.1 Análisis de la entrevista, parte 1 proyecto final de síntesis.

La tendencia se valoró de acuerdo con una de las dimensiones de la EpC y los descriptores finales de nivel contemplado en la rúbrica de desempeños de comprensión.

Tabla 34. *Rejilla de análisis: entrevista E1, E2 y E3 categoría C1: uso de la letra*

Pregunta	Argumento E1	Tendencia	Argumento E2	Tendencia	Argumento E3	Tendencia
¿Se pueden realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con números? Explique su respuesta.	Sí se pueden realizar.	Dimensión formas de comunicación: la respuesta a la pregunta realizada muestra, según la categoría lenguaje matemático formal, que el estudiante reconoce y enuncia los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas. En esta dimensión el estudiante se ubica en el nivel de aprendiz.	Sí se pueden realizar con los números naturales y con los enteros.	Dimensión formas de comunicación: la respuesta a la pregunta realizada, según la categoría lenguaje matemático formal, que el estudiante reconoce y enuncia los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas no solo del conjunto de los números N, sino del conjunto de los números Z. En esta dimensión el estudiante se puede ubicar en el nivel de aprendiz.	Sí.	Dimensión formas de comunicación: la respuesta a la pregunta realizada muestra, según la categoría lenguaje matemático formal, que el estudiante reconoce y enuncia los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas. En esta dimensión el estudiante se ubica en el nivel de aprendiz.
¿Se pueden realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con letras? Explique su respuesta.	Sí se pueden realizar dichas operaciones.	Dimensión de formas de comunicación: utiliza los conceptos estudiados apoyándose en ellos para dar argumentación de su respuesta, demostrando un dominio flexible y fácil de un sistema de símbolos dentro del lenguaje matemático. Aunque no explica su respuesta de acuerdo con el trabajo realizado en el aula, el estudiante podría ubicarse en un nivel de aprendiz en esta dimensión.	Sí se pueden realizar	Dimensión de formas de comunicación: utiliza los conceptos estudiados apoyándose en ellos para dar argumentación de su respuesta, demostrando un dominio flexible y fácil de un sistema de símbolos dentro del lenguaje matemático. Aunque no explica su respuesta de acuerdo con el trabajo realizado en el aula, la estudiante podría ubicarse en un nivel de aprendiz en esta dimensión.	También se pueden realizar.	Dimensión de formas de comunicación: utiliza los conceptos estudiados apoyándose en ellos para dar argumentación de su respuesta, demostrando un dominio flexible y fácil de un sistema de símbolos dentro del lenguaje matemático. Aunque no explica su respuesta de acuerdo con el trabajo realizado en el aula, el estudiante podría ubicarse en un nivel de aprendiz en esta dimensión.

¿Cuál es la fórmula para hallar el área de un cuadrado?	Lado por lado.	Dimensión de formas de comunicación: el estudiante reconoce y enuncia los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas, da cuenta de los conocimientos adquiridos con antelación en el desarrollo del currículo. De acuerdo con su desempeño la estudiante debería ubicarse en el nivel de aprendiz.	La fórmula es: largo por ancho.	Dimensión de formas de comunicación: la estudiante reconoce y enuncia los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas, da cuenta de los conocimientos adquiridos con antelación en el desarrollo del currículo. De acuerdo con su desempeño la estudiante debería ubicarse en el nivel de aprendiz.	Lado por lado.	Dimensión de formas de comunicación: el estudiante reconoce y enuncia los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas, da cuenta de los conocimientos adquiridos con antelación en el desarrollo del currículo. De acuerdo con su desempeño la estudiante debería ubicarse en el nivel de aprendiz.
¿Cuál es la fórmula para hallar el área de un triángulo?	También lado por lado.	Dimensión de formas de comunicación: no muestra familiaridad con los sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático. Se encuentra en un nivel ingenuo.	La fórmula para hallar el área de un triángulo es base por altura dividido 2.	Dimensión de formas de comunicación: demuestra un fácil acceso y un dominio flexible en diferentes formas de representación (símbolos y fórmulas) dentro del lenguaje matemático. La estudiante escribió la fórmula en el papel, lo que la ubica en un nivel de aprendiz.	Base por altura dividido dos.	Dimensión de formas de comunicación: muestra familiaridad con sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático. El estudiante se encuentra en un nivel de novato. Aunque la pregunta no solicitaba explicar la fórmula ni aplicarla a una situación, se desconoce si el estudiante tiene memorizada la fórmula o efectivamente sabe aplicarla.
Si se tienen 5 frutas en una bolsa y de esas frutas 2 son bananos, ¿cuál es el número de mangos?	Tres	Dimensión de métodos: utiliza el tanteo u otro procedimiento para hallar un valor desconocido en una expresión matemática. Por lo anterior, el estudiante podría ser ubicado en el nivel de novato.	Tres es el número de mangos.	Dimensión de métodos: utiliza el tanteo u otro procedimiento para hallar un valor desconocido en una expresión matemática. Por lo anterior, la estudiante podría ser ubicada en el nivel de novato.	Tres	Dimensión de métodos: el estudiante utiliza el tanteo u otro procedimiento para hallar un valor desconocido de una expresión matemática. Se encuentra en un nivel de novato.

Fuente: elaboración propia

Tabla 35. *Rejilla de análisis: entrevista E1, E2 y E3 categoría C2: uso de la incógnita*

Pregunta	Argumento E1	Tendencia	Argumento E2	Tendencia	Argumento E3	Tendencia
¿Qué es un número oculto?	Un número oculto es una letra que representa un número desconocido que podemos cambiar por cualquier número.	Dimensión de contenidos: el estudiante en esta dimensión podría ubicarse en un nivel de novato; su respuesta evidencia que no establece diferencias entre el concepto de número oculto e incógnita.	Puedo definir un número oculto buscando a qué número pertenece según la operación. Es oculto porque no sabemos a qué número es igual.	Dimensión de propósitos: la estudiante en esta dimensión podría ubicarse en un nivel de novato; su respuesta muestra dominio del concepto y establece relaciones de similitud con el concepto de incógnita.	Un número oculto es un número que uno desconoce.	Dimensión de contenidos: el estudiante en esta dimensión podría ubicarse en un nivel de novato, su respuesta solo presenta como ejemplos de número oculto los manejados en clase, por tanto, no establece relaciones de similitud con el concepto de incógnita.
¿Qué se requiere para conocer el total devengado en pesos cuando se conoce el número de kilos recolectados por un caficultor?	Haríamos una multiplicación. Multiplicamos los kilos que se cogió el trabajador por el valor del kilo.	Dimensión de métodos: el estudiante utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática. En esta dimensión podría ubicarse al estudiante en un nivel de aprendiz.	A cómo están pagando los kilos de café.	Dimensión de métodos: la estudiante usa ejemplos de manera reflexiva, su respuesta es coherente con lo que busca la pregunta. Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática. Podría ubicarse en el nivel de aprendiz.	El kilaje a cómo lo pagan.	Dimensión de métodos: el estudiante utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática, lo que lo ubica un nivel de aprendiz. Desde la categoría de coherencia en el discurso el estudiante utiliza palabras del lenguaje natural para explicar de forma intuitiva la respuesta a la situación abordada.
¿Qué es una incógnita?	Un número que no conocemos su valor.	Dimensión de formas de comunicación: el estudiante no hace uso del lenguaje formal para señalar un número oculto, la incógnita o la variable. De acuerdo con esta dimensión podría ubicarse el estudiante en un nivel de ingenuo.	Es un número oculto que a base de una operación se tiene que buscar qué número es.	Dimensión de formas de comunicación en la categoría de coherencia en el discurso: la estudiante argumenta y explica de forma clara el concepto de incógnita, puesto que reconoce y enuncia los elementos de sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas. Podría ubicarse en un nivel de aprendiz.	Es un número.	Dimensión de formas de comunicación: el estudiante no hace uso del lenguaje formal para señalar un número oculto, la incógnita o la variable. Su concepto muestra poco dominio. El estudiante podría ubicarse en el nivel de ingenuo.

¿Cómo se despeja una incógnita en una ecuación?	Cuando se está sumando se pasa al otro lado a restar; cuando se está restando se pasa a sumar; cuando se está dividiendo se pasa a multiplicar; y cuando se está multiplicando se pasa a dividir.	Dimensión de formas de comunicación: el estudiante muestra familiaridad con los sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático, desempeño que los sitúa en un nivel de novato.	Los valores que están al lado de la x van a un lado, y los números que no la tienen van al otro y luego se hacen las operaciones.	Desde la dimensión de formas de comunicación la estudiante demuestra dominio flexible de lo que sabe con relación a la pregunta que se le hace, lo que le permite emprender ricos desempeños de comprensión. Desde la dimensión de métodos, su respuesta da cuenta que utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática. La estudiante podría ubicarse en el nivel de aprendiz.	Dejando la equis a un lado.	Desde la dimensión de contenidos: el estudiante no establece diferencias entre los conceptos de variable y de incógnita. Desde la dimensión de formas de comunicación el estudiante no da cuenta del proceso que se debe seguir para despejar una incógnita que era la pregunta que se le hizo. Se ubica en un nivel novato.
---	---	--	---	---	-----------------------------	--

Fuente: elaboración propia

Tabla 36. *Rejilla de análisis: entrevista E1, E2 y E3 categoría C3: concepto de variable*

Pregunta	Argumento E1	Tendencia	Argumento E2	Tendencia	Argumento E3	Tendencia
¿Qué fenómenos varían en tu contexto?	La temperatura, la nevera de la casa, la corriente de los ríos.	Dimensión de contenidos: el estudiante solo presenta como ejemplos de variación los manejados en clase. Esto lo sitúa en un nivel de novato.	En nuestra vida podemos ver que varían por ejemplo el agua del tanque del lavadero, del tanque del inodoro aumenta cuando hace el proceso de llenado y disminuye al vaciarlo, también cuando comemos en el plato va disminuyendo la cantidad de comida inicial.	Dimensión de contenido: la respuesta dada por la estudiante explica qué fenómenos de su contexto varían y por qué. Está en el nivel de maestría.	La cantidad.	Dimensión de contenidos: la respuesta dada por el estudiante no permite evaluar en él un desempeño, pues su respuesta mostró poca elaboración. Podría ubicarse en el nivel de ingenuo.
Si tiene las letras R, O, A y M ¿Qué palabras se pueden formar?	Puedo formar las palabras ROMA, RAMO, OMAR, MORA.	Dimensión de propósitos: la respuesta dada por el estudiante muestra que identifica fenómenos del contexto que son susceptibles de variación. Se podría ubicar al estudiante en el nivel de novato.	Las palabras que podemos formar son: ROMA, AMOR, RAMO.	Dimensión de propósitos: la estudiante identifica fenómenos del contexto que son susceptibles de variación, podría ubicarse en el nivel de novato.	ROMA, RAMA, MORA, AMOR.	Dimensión de propósitos: propone creativamente estrategias para solucionar la situación planteada. La combinación estaba dada para que el estudiante organizara 8 combinaciones, sin embargo, organizó 4, lo cual evidencia que el estudiante posee acercamientos al principio de combinación. El estudiante identifica fenómenos del contexto que son susceptibles de variación así que podría ubicarse en el nivel de novato.
Si m es igual a 4, ¿cuánto es $4m+3$?	$4+4+4+4$ Son 16 más 3 es igual a 19.	Dimensión de métodos: el estudiante utiliza diferentes algoritmos para determinar el valor de la variable. De acuerdo con su respuesta se	Es 4×4 más tres es igual a 19.	Dimensión de métodos: la estudiante utiliza diferentes algoritmos para determinar el valor de la variable. De acuerdo con el desempeño anterior	Once, porque si m vale 4, se le suman 4 y luego 3, eso es igual a 11.	Dimensión de métodos: el estudiante no propone estrategias para solucionar el problema planteado. Tuvo la capacidad de mostrar un

		podría ubicar en el nivel de aprendiz.		podría ubicarse en el nivel de aprendiz.		modelo de respuesta a la pregunta realizada; sin embargo, su respuesta muestra un problema de dominio del conocimiento. No encuentra el valor de la variable en una expresión matemática. Por lo anterior, el estudiante podría ubicarse en el nivel de ingenuo
En la pregunta anterior si m es una variable, ¿qué es una variable?	En ese ejercicio una variable son los diferentes valores que puede tener la letra m .	Dimensión de contenidos: el estudiante establece diferencias entre los conceptos de variable e incógnita, lo que lo ubicaría en un nivel de comprensión de aprendiz.	Es algo que disminuye o aumenta cada cantidad.	Dimensión de formas de comunicación: la estudiante en esta pregunta no logra relacionar eficientemente los conceptos aprendidos con la situación planteada. Su respuesta evidencia inseguridad en los argumentos o explicaciones para dar cuenta de la variación y para conceptualizar el término de variable, lo que ubicaría a la estudiante en un nivel de comprensión de novato.	No sé.	Desde la dimensión de propósitos: el estudiante en esta pregunta no logra relacionar eficientemente los conceptos aprendidos anteriormente con la situación planteada, no relaciona el número oculto con la variable cómo incógnita. Desde la categoría de lenguaje matemático formal no hace uso del lenguaje formal para definir qué es la variable. Es importante precisar que el estudiante no se dispuso para la respuesta a la pregunta, pues mostró al final de la entrevista poco interés.

Fuente: elaboración propia

4.5.2 Descriptores de nivel de los estudiantes durante el desarrollo de la entrevista semiestructurada por dimensiones.

En la tabla siguiente los números corresponden al número de la pregunta y las letras con número a los participantes como en el numeral anterior (E1: Manuel, E2: Luciana y E3: Pedro).

Tabla 37. *Descriptores de nivel de los estudiantes durante el desarrollo de la entrevista semiestructurada*

Dimensión	Nivel ingenuo	Nivel novato	Nivel aprendiz	Nivel maestría
Contenido	10. Manifiesta no saber qué es variación (E3)	6. No establece diferencias entre los conceptos de variable y de incógnita (E1). 10. Solo presenta como ejemplos de variación los manejados en clase (E1). 6. Solo presenta como ejemplos de número oculto los manejados en clase (E3). 9. No establece diferencias entre los conceptos de variable y de incógnita (E3).	13. Establece diferencias entre los conceptos de variable como incógnita (E1).	10. Explica qué fenómenos de su contexto varían y por qué (E2).
Métodos	12. No encuentra el valor de la variable en una expresión matemática (E3).	5. Utiliza el tanteo u otro seudoprocedimiento para hallar un valor desconocido en una expresión matemática (E1, E3).	7. Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática (E1, E2, E3). 12. Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática (E1). 7. Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática (E2).	

Propósitos	13. No relaciona el número oculto con la variable como incógnita (E3).	11. Identifica fenómenos del contexto que son susceptibles de variación (E1, E2, E3). 6. Establece similitudes entre número oculto, incógnita y la variable (E2).	
Formas de comunicación	4. No muestra familiaridad con los sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático (E1). 8. No hace uso del lenguaje formal para señalar un número oculto, la incógnita o la variable (E1, E3).	9. Muestra familiaridad con los sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático (E1). 4. Muestra familiaridad con sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático (E3). 13. Se evidencia inseguridad en los argumentos o explicaciones para dar cuenta de la variación (E2).	1 y 2 Reconoce y enuncia los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas (E1, E2 y E3). 1, 3, 4, 8 y 9. Reconoce y enuncia los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas (E2).

Fuente: elaboración propia

4.6 Aplicación del cuestionario refinado, parte 2 proyecto final de síntesis

Como se indicó en el apartado 3.6.1 de la fase de exploración, la idea de la aplicación del instrumento en esta fase era visibilizar los avances y la evolución de los estudiantes respecto al manejo y la comprensión del objeto de estudio. Por lo anterior, se procede a presentar evidencias de dicha aplicación en el último trimestre del año 2019 con los escolares intervenidos (ver figuras 29, 30 y 31). Se presentan los trabajos desarrollados por los estudiantes y luego los descriptores de nivel de desempeño alcanzados. Resulta pertinente resaltar que se evidenció en los tres estudiantes una evolución favorable sobre su comprensión del concepto de variable cómo incógnita, en la cual intervienen otros conceptos construidos en la formación matemática en los grados anteriores como los conceptos de adición, sustracción, multiplicación, y el concepto de igualdad.

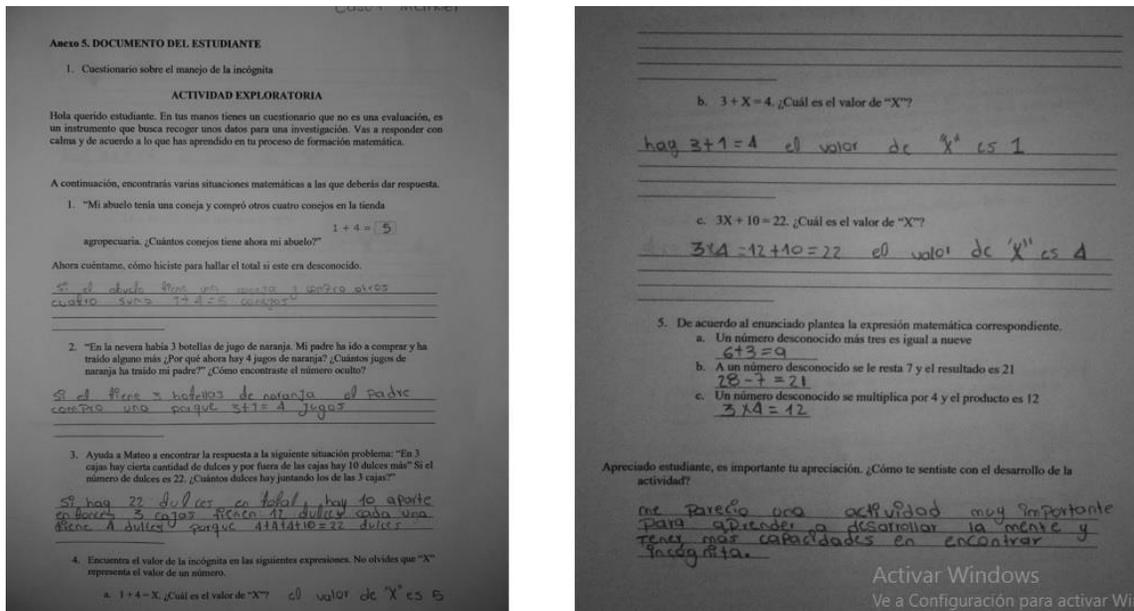


Figura 29. Solución de Manuel al cuestionario

Fuente: elaboración propia

Tabla 38. *Descriptor de nivel de Manuel por dimensiones, tras el desarrollo del cuestionario en la fase del proyecto final de síntesis*

Dimensión	Descriptor de nivel	Nivel
Dimensión de contenido	- Propone expresiones matemáticas haciendo uso del número oculto. - Establece relaciones entre los conceptos de número oculto y variable como incógnita.	Aprendiz
Dimensión de métodos	Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática y para determinar el valor de la variable.	Aprendiz
Dimensión de propósitos	Establece similitudes entre número oculto y la incógnita.	Novato
Dimensión de formas de comunicación	Reconoce y enuncia los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas.	Aprendiz

Fuente: elaboración propia

En el caso de Manuel la evolución se puede constatar, pues al responder al cuestionario por primera vez en la dimensión de contenidos se encontraba en un nivel ingenuo, en el cual manifestaba no saber qué era un número oculto; mientras que en el último cuestionario resuelto propone expresiones matemáticas haciendo uso del número oculto. En la misma dimensión en la categoría de variable se encontraba en nivel ingenuo, pues no reconocía la variable en una expresión matemática, pero después si pudo establecer diferencias entre los conceptos de variable e incógnita. Por ende, en ambos desempeños se ubicó en un nivel de aprendiz.

En la dimensión de métodos inicialmente se ubicó en un nivel de ingenuo, puesto que no encontró el valor desconocido y el valor de la variable en una expresión matemática. Al finalizar, fue evidente el dominio de los temas abordados al utilizar diferentes algoritmos para hallar un valor que no se conoce y para determinar el valor de la variable. Su argumento y procedimientos mejoraron considerablemente, lo cual lo ubicó en un nivel de aprendiz. En la dimensión de propósitos en un inicio también se ubicó en un nivel ingenuo pues no relacionaba el número oculto con la variable como incógnita; posteriormente sí estableció similitudes entre ambos conceptos, lo cual lo situó en el nivel de novato.

Finalmente, en la dimensión de formas de comunicación la evolución de la comprensión se logró, dado que Manuel pasó de un nivel ingenuo a un nivel de aprendiz, puesto que al finalizar reconocía y enunciaba los elementos de los sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas.

Como lo expresaron, Boix y Gardner (1999) “los alumnos emprenden ricos desempeños de comprensión y se mueven con flexibilidad y expresividad dentro del género o tipo de desempeño en cuestión” (p. 254). Esa flexibilidad se evidenció en el paso de un nivel a otro, al mostrar avances significativos.

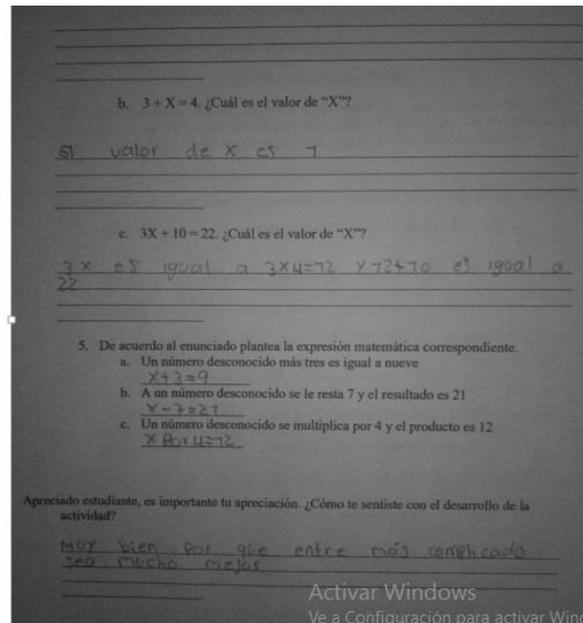
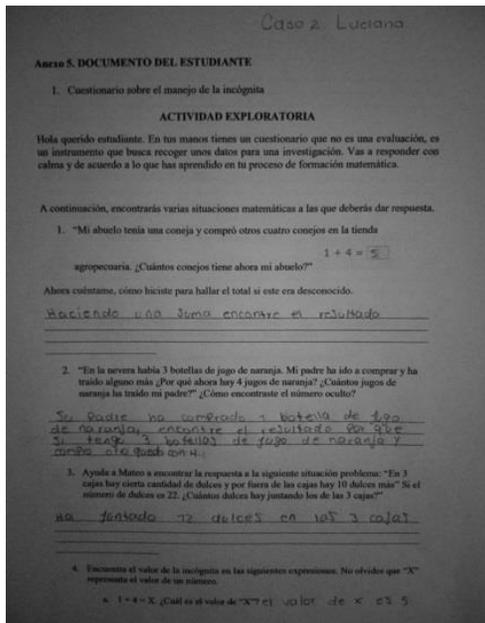


Figura 30. Solución de Luciana al cuestionario

Fuente: elaboración propia

Tabla 39. Descriptores de nivel de Luciana por dimensiones, tras el desarrollo del cuestionario en la fase del proyecto final de síntesis

Dimensión	Descriptor de nivel	Nivel
Dimensión de contenido	- Propone expresiones matemáticas haciendo uso del número oculto. - Establece relaciones entre los conceptos de número oculto y variable como incógnita.	Aprendiz
Dimensión de métodos	Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática y para determinar el valor de la variable.	Aprendiz
Dimensión de P	Establece similitudes entre número oculto, incógnita y la variable.	Aprendiz
Propósitos		
Dimensión de formas de comunicación	Reconoce y enuncia los elementos se sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas.	Aprendiz

Fuente: elaboración propia

En el caso de Luciana los resultados fueron favorables y se evidenciaron a partir de un avance progresivo y satisfactorio de los desempeños de comprensión. Desde la dimensión de contenidos es importante precisar que la estudiante al iniciar la fase de exploración se situó en un nivel de novato, pues solo presentaba como ejemplos de número oculto los manejados en clase y no establecía diferencias entre los conceptos de variable e incógnita. Por lo anterior, su participación de manera activa fue importante en el desarrollo de las diferentes actividades que fueron permitiendo que la estudiante mejorará en la forma de comunicar sus resultados y que así pudiera exponer con claridad los procedimientos que realizaba, lo anterior que redundó en que en la dimensión de formas de comunicación pasará de un nivel ingenuo a un nivel de aprendiz.

En la dimensión de métodos al igual que la dimensión de contenidos la estudiante se ubicó al final en un nivel de aprendiz. Dicho nivel fue alcanzado debido a que utilizó diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática, hizo reemplazos y explicó sus resultados. Con relación a la dimensión de propósitos también se situó en un nivel de aprendiz, puesto que estableció similitudes entre número oculto y la incógnita, lo cual le permitió a Luciana conceptualizar la variable y acercarse de manera directa al concepto de variación durante el proyecto final de síntesis.

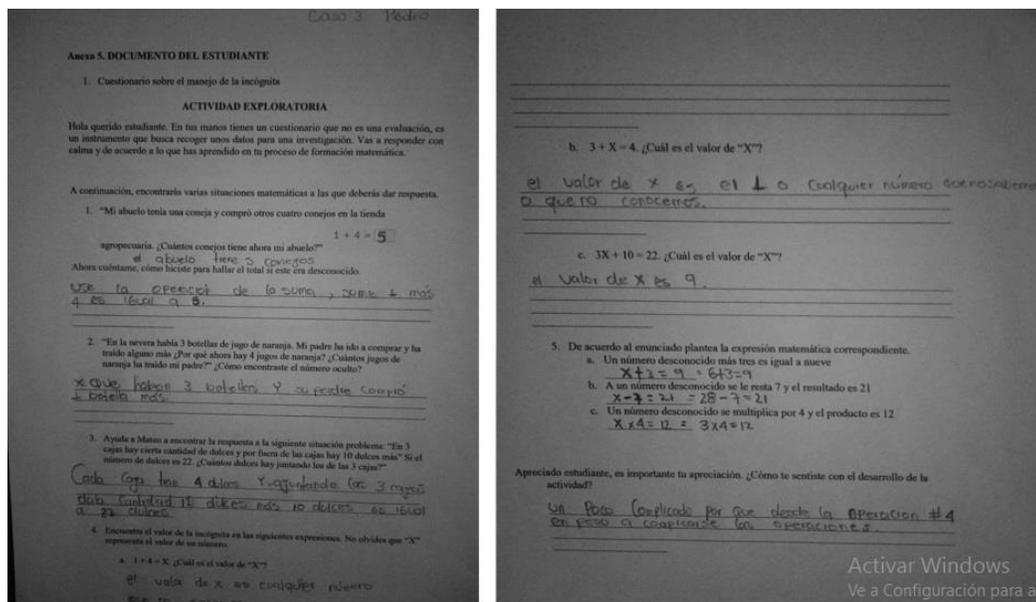


Figura 31. Solución de Pedro al cuestionario

Fuente: elaboración propia

Tabla 40. *Descriptor de nivel de Pedro por dimensiones, tras el desarrollo del cuestionario en la fase del proyecto final de síntesis*

Dimensión	Descriptor de nivel	Nivel
	- Propone expresiones matemáticas haciendo uso del número oculto.	Aprendiz
Dimensión de contenido	- Establece relaciones entre los conceptos de número oculto y variable como incógnita.	
Dimensión de métodos	- Utiliza el tanteo u otro seudoprocedimiento para hallar un valor desconocido en una expresión matemática. - Utiliza el tanteo u otro seudoprocedimiento para determinar el valor de la variable.	Novato
Dimensión de propósitos	Establece similitudes entre número oculto y la incógnita.	Novato
Dimensión de formas de comunicación	Muestra familiaridad con sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático.	Novato

Fuente: elaboración propia

En el caso de Pedro, quien inicialmente se ubicó en las dimensiones de contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación en un nivel ingenuo evidenciándose la falta de argumentación matemática, también se evidenció cierta evolución, pues se logró que el estudiante se moviera con flexibilidad entre dimensiones y niveles y que sus resultados fueran mejores. De acuerdo con la dimensión de contenidos el estudiante propuso expresiones matemáticas haciendo uso del número oculto y estableció diferencias entre los conceptos de variable como incógnita, lo cual lo ubicó en un nivel de aprendiz. Asimismo, en la dimensión de métodos pasó de un nivel en el que presentaba dificultades para el encontrar el valor desconocido en una expresión matemática a un nivel en el cual puede utilizar el tanteo u otro seudoprocedimiento para hallarlo y para determinar el valor de la variable, el nivel novato.

En la dimensión de propósitos empezó en un nivel ingenuo y tras responder el cuestionario se ubicó en un nivel novato; pasó de no relacionar el número oculto con la variable como incógnita a establecer similitudes entre número oculto y la incógnita. En la dimensión de formas de comunicación después de no hacer uso del lenguaje formal para señalar un número oculto, la incógnita o la variable, pasó a mostrar cierta familiaridad con los sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático.

4.7 Los descriptores finales en los que se ubicaron los estudiantes

A continuación, se presentan los desempeños alcanzados por Manuel, Luciana y Pedro tras la aplicación de los diferentes instrumentos del proceso de investigación, de acuerdo con las dimensiones que según Boix y Gardner (1999) “ilustran la naturaleza multidimensional de la comprensión” (p.239). La ubicación en un nivel de comprensión que puede variar de dimensión a dimensión, pues los estudiantes podrán presentar algunos desempeños más fuertes que otros. En general, el trabajo evidenció que los estudiantes progresaron en la comprensión del concepto de variable cómo incógnita a través del abordaje de los conceptos de número oculto, de incógnita y de variación.

La siguiente compilación se logra a partir de los niveles en que fueron ubicados los estudiantes en cada una de las actividades y descritas en el presente informe de investigación.

Tabla 41. *Descriptores de nivel finales de Manuel, Luciana y Pedro*

Dimensión	Caso	Descriptor de nivel	Nivel
Dimensión de contenido	Manuel	Solo presenta como ejemplos de variación los manejados en clase.	Novato
		Propone expresiones matemáticas, haciendo uso del número oculto.	Aprendiz
		Establece relaciones entre los conceptos de número oculto y variable como incógnita.	Aprendiz
	Luciana	Propone expresiones matemáticas, haciendo uso del número oculto.	Aprendiz
		Establece relaciones entre los conceptos de número oculto y variable como incógnita.	Aprendiz
		Explica por qué se da la variación.	Aprendiz
	Pedro	Solo presenta como ejemplos de variación los manejados en clase.	Novato
		Propone expresiones matemáticas, haciendo uso del número oculto.	Aprendiz
		Establece relaciones entre los conceptos de número oculto y variable como incógnita.	Aprendiz
Dimensión de métodos	Manuel	Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática.	Aprendiz
		Utiliza diferentes algoritmos para determinar el valor de una variable.	Aprendiz
	Luciana	Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor	Aprendiz

		desconocido en una expresión matemática.	
		Utiliza diferentes algoritmos para determinar el valor de una variable.	Aprendiz
	Pedro	Utiliza el tanteo u otro seudoprocedimiento para determinar el valor de la variable.	Novato
		Utiliza diferentes algoritmos para hallar un valor desconocido en una expresión matemática.	Aprendiz
	Manuel	Establece similitudes entre número oculto y la incógnita.	Novato
Dimensión de propósitos		Relaciona el concepto de variación con fenómenos del contexto.	Aprendiz
	Luciana	Relaciona el concepto de variación con fenómenos del contexto.	Aprendiz
		Relaciona los elementos que componen una ecuación, parámetros e incógnita con número oculto y variable.	Maestría
	Pedro	Identifica fenómenos de contexto que son susceptibles de variación.	Novato
		Establece similitudes entre número oculto y la incógnita.	Novato
Dimensión de formas de comunicación	Manuel	Reconoce y enuncia los elementos de sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas.	Aprendiz
		Utiliza términos o conceptos no acordes para organizar los argumentos de las explicaciones para dar cuenta de la variación.	Novato
	Luciana	Reconoce y enuncia los elementos de sistemas de símbolos en las expresiones matemáticas.	Aprendiz
		Argumenta y explica de forma clara situación de variación.	Aprendiz
	Pedro	Muestra familiaridad con los sistemas de símbolos y fórmulas dentro del lenguaje matemático.	Novato
		Utiliza términos o conceptos no acordes para organizar los argumentos de las explicaciones para dar cuenta de la variación.	Novato

Fuente: elaboración propia

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo, en un primer momento se presentan las conclusiones con relación a la pregunta de investigación y a los objetivos propuestos y la relación de estos con el marco de referencia de la EpC, y después se esbozan algunos aportes al desarrollo del currículo de la matemática en la escuela y el planteamiento de posibles líneas de investigación.

5.1 Conclusiones a propósito de la pregunta de investigación

La pregunta de investigación que guio este trabajo investigativo fue ¿De qué manera los estudiantes del grado quinto de Básica Primaria comprenden el concepto de variable como incógnita en el marco de la Enseñanza para la Comprensión? A partir de esta se hizo un análisis que contiene las cuatro dimensiones de la comprensión: contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación, así como una clasificación dentro de los niveles de cada dimensión de acuerdo con unos descriptores establecidos. Lo anterior permitió caracterizar la comprensión de cada uno de los tres participantes y ofrecer información del nivel en que se encontraban al iniciar y finalizar el proceso de investigación. Esto se hizo a través de la ejecución de instrumentos metodológicos como la unidad curricular, el cuestionario y la entrevista semiestructurada.

Para los participantes fue beneficioso realizar las actividades propuestas durante las fases de exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis, puesto que los llevó al avance entre los niveles de comprensión en cada una de las categorías presentadas. Para la respuesta a la pregunta de investigación fue de vital ayuda el estudio de caso y la rúbrica de desempeños de comprensión elaborada y refinada, que tuvo en cuenta categorías elegidas *a priori*, dado que estos permitieron describir, analizar y determinar la evolución del nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes. Las dimensiones propuestas por el marco de referencia de la EpC fueron esenciales pues:

La dimensión de contenidos se encuentra presente en todo el desarrollo de la unidad curricular, las actividades propuestas asisten a los preconceptos que los estudiantes traían consigo y a los conocimientos que estos poco a poco fueron construyendo en torno al concepto

de variable como incógnita, lo cual Stone (1999) definió como lo que “los alumnos ya saben y aquello que están interesados en aprender” (p. 112). En el desarrollo inicial de las actividades los estudiantes sacaron a la luz sus creencias intuitivas y folklóricas (Boix y Gardner, 1999) acerca de las situaciones que debían resolver, por lo cual se ubicaron de modo general en un nivel de comprensión ingenuo, pues faltaban conceptos disciplinarios que guardan correspondencia con el objeto matemático de estudio, como el manejo de algoritmos. Sin embargo, durante el avance en la unidad curricular lograron refinar sus concepciones intuitivas, bien sea mezclándolas “con fragmentos de conocimiento disciplinario” (Boix y Gardner, 1999, p. 246) o demostrando una rica red de ideas o criterios dentro de un dominio, así se generaron contradicciones, lo cual los ubicó en un nivel final de aprendices. Es importante resaltar que ninguno de los estudiantes se ubicó en el nivel de maestría en esta dimensión.

Desde la dimensión de métodos se evidenció que la ejecución de las actividades propuestas en la unidad curricular les permitió a los estudiantes desarrollar diferentes “estrategias, métodos, técnicas y procedimientos” (Boix y Gardner, 1999, p. 244) con el propósito de construir un conocimiento que les permitió ofrecer argumentos racionales, un saber confiable en la resolución de situaciones que involucraron el manejo del número oculto y la variable como incógnita. En las categorías de esta dimensión los estudiantes utilizaron diferentes algoritmos que los llevaron a pasar de basarse en seudoprocedimientos, como el tanteo a emplear procedimientos elaborados y determinar el valor de la variable. De esto se puede concluir que los estudiantes comprendieron, a partir del uso de los procedimientos y métodos aprendidos en el aula, la resolución de situaciones planteadas dentro del currículo.

En la dimensión de propósitos, según Boix y Gardner (1999) existe “consciencia de los propósitos de conocimiento, múltiples usos del conocimiento y un buen manejo de la autonomía” (p. 236-237), se evidenció que los estudiantes fueron capaces de transversalizar eso que aprendieron, en el desarrollo de la entrevista, del cuestionario y de la unidad curricular demostraron autonomía para usar lo que saben y usaron su criterio personal para contrastar lo que aprendieron. La ruta metodológica dispuso situaciones semejantes a las generadas en su diario vivir con el fin de que el estudiante estableciera conexiones entre el conocimiento, la práctica y su cotidianidad. A partir de las categorías de la relación variación-contexto y número oculto-variable como incógnita permitió visibilizar cómo los estudiantes comprendían el objeto

de estudio en situaciones contextualizadas, en las cuales identificaron fenómenos que son susceptibles de variación.

Para acercarse al proceso de comprensión de los estudiantes de un objeto matemático desde la dimensión de formas de comunicación es necesario centrar la atención en lo que, según Boix y Gardner (1999), “evalúa el uso, por parte de los alumnos, de sistemas de símbolos (visuales, verbales, matemáticos y cinestésicos corporales, por ejemplo) para expresar lo que saben” (p. 237). Para lo anterior se tuvieron en cuenta los desempeños propuestos, como explicar un algoritmo, el procedimiento para hallar un número desconocido o nombrar una incógnita, explicar el fenómeno de variación y establecer la relación entre número oculto y variable como incógnita, esto con el fin de valorar la categoría de coherencia en el discurso, en la manera como los estudiantes exponían sus argumentos, sociabilizaban sus producciones o presentaban las evidencias de su proceso.

Los estudiantes no dieron cuenta de un lenguaje matemático formal en un nivel de maestría, debido a que en algunas situaciones de aprendizaje no identificaron los diferentes sistemas de símbolos para representar su saber de manera segura y creativa, por lo tanto no hay conciencia del contexto de comunicación (Boix y Gardner, 1999); es decir, continuaron utilizando su lenguaje cotidiano y reproduciendo sus procedimientos como si fuese una receta que mostrara el paso a paso, más allá de evaluar o explicar lo que está sucediendo dentro de la expresión o situación presentada.

Por lo anteriormente expuesto, se puede deducir que los estudiantes comprenden el concepto de variable, según el análisis que hicieron de los fenómenos de su cotidianidad, las situaciones presentadas por el investigador, que guardan una estrecha relación con la proporcionalidad, y el trabajo con ecuaciones lineales de primer grado con una sola incógnita. Mediante el desarrollo de la unidad curricular se abordó el concepto de variable cómo incógnita y el concepto de variación y, para dar respuesta la pregunta de investigación, se determinó que la incógnita en la ecuación no es una variable, sino un número fijo que después de hallar su valor debe verificarse para establecer si la igualdad es verdadera.

5.2 Conclusiones alrededor de los objetivos de investigación

El objetivo general de la investigación era describir cómo los estudiantes del grado quinto de Básica Primaria comprenden el concepto de variable como incógnita en el marco de la EpC. Bajo dicho propósito se construyó y se refinó una rúbrica de desempeños de comprensión, compuesta por unas categorías elegidas *a priori* con base en la perspectiva de las dimensiones y los niveles del marco de referencia, la cual permitió la presentación de unos descriptores de nivel que permitieron describir la comprensión del concepto matemático abordado.

Asimismo, las fases de la comprensión seguidas contribuyeron al logro de dicho objetivo. En la fase de exploración fue importante tener un acercamiento a los conocimientos intuitivos o académicos que los estudiantes tenían sobre la variable, la incógnita, y el número oculto y relacionarlos con el objeto matemático abordado por la investigación. Esta fase involucró el desarrollo de un cuestionario y realización de actividades mediadas por el juego que revelaron los saberes previos para responder al marco conceptual y a los principios disciplinares. Por su parte, la fase de investigación guiada llevó a describir la comprensión del concepto de variable como incógnita y a observar el progreso comprensivo de los estudiantes. Por último, en la fase del proyecto final de síntesis se aplicó nuevamente el cuestionario refinado, se desarrollaron cinco actividades y se aplicó una entrevista semiestructurada que corroboraron el avance de la comprensión de los estudiantes involucrados con la investigación.

En cumplimiento del objetivo general, y según el marco metodológico, se exige describir los hechos que se originaron con el proyecto, respondiendo a la ética del investigador y la validez de la información suministrados por los estudiantes. Tales descripciones fueron narradas a la luz de los aportes teóricos contenidos en el marco de referencia de la EpC y se integraron nuevos sentidos en relación con las comprensiones que surgieron dentro del aula de la sede San José del Centro Educativo Rural Casa Grande del municipio de Concordia.

Después de la adopción y desarrollo de las fases de la comprensión, la presentación del análisis de Manuel, Luciana y Pedro, y de haber efectuado las constataciones correspondientes entre la rúbrica de desempeños, las respuestas y procedimientos de los estudiantes es pertinente decir que el objetivo general fue logrado. Consecuentemente, el alcance de los objetivos específicos de la investigación dio soporte al logro del objetivo general. El primero de ellos

consistía en determinar el nivel de comprensión del concepto de variable como incógnita de los estudiantes participantes en el proceso de investigación, en relación con los niveles del marco conceptual de la EpC. Esto se logró a partir de la rúbrica de desempeños de comprensión, mediante la cual se plasmó el nivel de comprensión de los estudiantes durante las actividades desarrolladas en la etapa de exploración y su avance durante la ejecución de la investigación guiada y el proyecto final de síntesis.

Como segundo objetivo específico se planteó analizar la evolución de la comprensión de los estudiantes participantes en el proceso de investigación a partir de los desempeños mostrados en cada una de las fases definidas en el marco conceptual de la EpC. El análisis de esa evolución permitió evaluar la pertinencia de los elementos y las cualidades de la comprensión; además, mostró un avance significativo entre los conocimientos intuitivos que los estudiantes evidenciaron inicialmente y los conocimientos que probaron al finalizar el proceso respecto a la identificación del concepto de variación en el contexto, el uso y comprensión del concepto de variable como incógnita, a partir de la vinculación del juego, los saberes previos y la comprensión en sí misma.

En correspondencia con lo anteriormente expresado, la consecución de los objetivos específicos: determinar el nivel de comprensión del concepto de variable como incógnita y analizar la evolución de la comprensión de los estudiantes Manuel, Luciana y Pedro; bajo los criterios del marco de la EpC, permitió alcanzar el propósito central de esta investigación: describir cómo los estudiantes comprenden el concepto de variable como incógnita, puesto que al ubicarlos en un nivel de acuerdo al alcance de las metas se determina su comprensión y al analizar su estado inicial y compararlos a cómo terminaron se visibiliza esa evolución que tuvieron con relación al objeto de estudio. Es menester entonces enunciar que del trabajo investigativo se generaron algunos aportes adicionales que tienen que ver con el manejo de lenguaje matemático y el desarrollo de competencias lingüísticas, como la argumentación y la interpretación, al mejorar la capacidad para controvertir o justificar las apreciaciones de los estudiantes haciendo de sus discursos construcciones lógicas y coherentes. Lo anterior, aunque no está vinculado directamente con los objetivos general y específicos de esta investigación, configuran una contribución al desarrollo del currículo de las matemáticas.

5.3 Ubicación final de los estudiantes por nivel de comprensión

A continuación, se presenta un resumen de los niveles alcanzados por los estudiantes en cada una de las categorías elaboradas para las dimensiones de la EpC.

Tabla 42. *Ubicación final de los estudiantes por nivel de comprensión*

Dimensión	Categorías y niveles					
	Variación	Nivel	Número oculto	Nivel	Variable como incógnita	Nivel
Dimensión de contenido	Manuel	Novato	Manuel	Aprendiz	Manuel	Aprendiz
	Luciana	Aprendiz	Luciana	Aprendiz	Luciana	Aprendiz
	Pedro	Novato	Pedro	Aprendiz	Pedro	Aprendiz
Dimensión de métodos	Número oculto		Nivel	Variable como incógnita		Nivel
	Manuel		Aprendiz	Manuel		Aprendiz
	Luciana		Aprendiz	Luciana		Aprendiz
Dimensión de propósitos	Relación variación-contexto		Nivel	Relación número oculto-variable como incógnita		Nivel
	Manuel		Aprendiz	Manuel		Novato
	Luciana		Aprendiz	Luciana		Maestría
Dimensión de formas de comunicación	Lenguaje matemático formal		Nivel	Coherencia en el discurso		Nivel
	Manuel		Aprendiz	Manuel		Novato
	Luciana		Aprendiz	Luciana		Aprendiz
	Pedro		Novato	Pedro		Novato

Fuente: elaboración propia

5.4 Contribuciones a la educación matemática

Según el diccionario *Pequeño Larousse Ilustrado* (2012) variable es un adjetivo para calificar algo que cambia, lo que varía; variación es la acción de cambiar o variar; mientras que cambio como elemento común es el efecto de la variación. Por tanto, puede concluirse que las definiciones de variable y variación se relacionan con la conceptualización de cambio, pero cada palabra tiene un significado y una función, propios en su acepción que las diferencian del concepto de cambio.

Diversas investigaciones han abordado el concepto de variable y de variación en varios grados de secundaria como rasgos distintivos del lenguaje algebraico, pero han dejado de lado la formación matemática inicial y la construcción de conceptos que el niño hace a partir de las experiencias en el aula. En concordancia con esto, se encontró que, en el currículo de matemáticas del ciclo de primaria, desde los referentes nacionales de calidad divulgados por el Ministerio de Educación Nacional y revisados en la investigación, no se aborda el concepto de variable y de variación como fenómeno de cambio. La investigación no solo aporta al estudio general de la comprensión del concepto de variable como incógnita, sino que además se enfoca en el contexto rural, un contexto poco investigado, en el cual las condiciones varían de acuerdo con el tipo de población atendida, el modelo de educación flexible y el modo de atención multigrado en el cual los estudiantes convergen en su proceso académico con estudiantes de otros niveles académicos.

La incógnita, se define como una letra para representar valores desconocidos, nombrados por los estudiantes como números ocultos, pero no como una herramienta para representar la variación; pues no toda variable es incógnita y no toda incógnita es variable, como es el caso del uso de letras en las ecuaciones, que pese a ser incógnitas hacen referencia única y exclusivamente a números fijos.

Adicionalmente, un escenario en el cual se abordó el concepto de variación y se tomó la variable como incógnita es un trabajo con proporciones donde se tuvo en cuenta la regla de proporcionalidad como un procedimiento que a partir de datos conocidos permitió la obtención de datos desconocidos. El docente, bajo la implementación del modelo de Escuela Nueva, puede realizar adaptaciones curriculares a su planeación y permitir al estudiante analizar cuales

fenómenos de su entorno varían y cómo la resolución de situaciones de esta índole puede ayudar a la comprensión del concepto de variación y de variable en los estudiantes.

En vista de que el concepto de variable y de variación son importantes para el desarrollo del currículo de las matemáticas, teniendo como referente los cinco procesos generales y los diferentes pensamientos y sus sistemas, es importante que dicho currículo favorezca la construcción y la consolidación del concepto de número y el trabajo aritmético de operaciones antes que abordar tal concepto. Así se conseguiría un proceso continuo y firme que establezca relaciones entre los números y la variable; si el desarrollo del currículo presenta a los estudiantes “tareas apropiadas para superar el salto entre la aritmética y el álgebra, y entre el uso de números y letras, ellos podrían pasar de una concepción estática a una concepción dinámica de los símbolos, evitando así muchas dificultades” (Andrade, 1998, p. 13). Lo anterior, supondría una reflexión y posterior cambio de los procesos de enseñanza en el aula por parte de los docentes responsables del desarrollo del currículo de matemáticas en los diferentes niveles.

El marco conceptual de EpC es importante para el análisis de situaciones que involucran la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales para el desarrollo del currículo del área en el entorno escolar desde el nivel inicial de preescolar, hasta distintos niveles o estadios académicos como el universitario. Igualmente, los aportes de la investigación al área también pueden centrarse en términos de la comprensión, pues la EpC está fundada, según Stone (1999), “en la definición de la comprensión como desempeño creativo” (p. 123), en la cual la invención personal no es heredada o transmitida, sino es por su parte una construcción personal a partir de las vivencias y de las experiencias de los estudiantes. De lo anterior partió la idea de la presente investigación de hacer una descripción de cómo los estudiantes comprenden el concepto de variable cómo incógnita para lograr determinar el nivel de comprensión y el análisis de su evolución en la comprensión del concepto respetando su entorno natural, tanto académico como personal.

La ruta metodológica desde la cual se construyeron la unidad curricular y la rúbrica de desempeños de comprensión son un aporte valioso a la educación matemática en tanto posibilitaron la comprensión del concepto de variable como incógnita. Además, permitió determinar en un momento dado el nivel de comprensión de los estudiantes en el nivel de Básica

Primaria a la luz del marco de la EpC que enmarcó la investigación realizada.

5.5 Posibles líneas de investigación

Es menester por parte del investigador dejar planteadas algunas posibles líneas de investigación dirigidas a la academia y a la institución que facilitó sus estudiantes y espacios físicos, buscando en todo caso la sensibilidad por la investigación de problemas presentados en el aula en la formación matemática de los estudiantes y que son insumo de los procesos educacionales e investigativos respaldados por la práctica pedagógica y de acuerdo con el marco conceptual de la EpC.

Respecto a la EpC como marco conceptual y metodológico puede articularse y complementar el modelo pedagógico de Escuela Nueva para las Instituciones Educativas del país, donde el docente fije una posición crítica frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje y enseñanza y comprensión y siga acciones que transformen los procesos de memorización y las formas de evaluación en el aula, como las pruebas estandarizadas o de periodo, que sesgan el proceso comprensivo de los estudiantes, debido a que los resultados se dan de manera cuantitativa conforme con lo definido en el Sistemas Institucionales de Evaluación. Por lo anterior el marco de la EpC puede adoptarse como marco de formación docente, para la planeación curricular y evaluación como eje articular de todas las áreas en los establecimientos educativos y como instrumento de reforma a los Sistemas Institucionales de evaluación y Promoción.

Aparte de abordar la comprensión del concepto de variable como incógnita en los estudiantes del grado quinto, la cual desempeña un papel preponderante en la transición de los ciclos de primaria y secundaria, esta investigación abre la posibilidad de ampliar el trabajo de acuerdo con otras dos interpretaciones de variable propuestas por Trigueros et al. (1996), la variable como número general y como número funcional.

En lo que se refiere al currículo de las matemáticas, podría realizarse un análisis documental sobre lo que definen los referentes nacionales de calidad y los contenidos de las guías de aprendizaje como instrumento garante de la implementación del modelo pedagógico de Escuela Nueva. Según la fundamentación matemática es importante que se investigue sobre la comprensión del concepto de variable como número general y como número funcional, no solo

en el nivel de secundaria sino en el nivel de primaria. Finalmente, podría considerarse la incorporación del concepto de variación y de variable en el nivel de Básica Primaria, puesto que estos no están inmersos en el currículo ni definidos desde el MEN.

REFERENCIAS

- Acevedo, D. (2011). *Comprensión del concepto de probabilidad es estudiantes de décimo grado*.
Obtenido de Universidad de Antioquia:
http://bibliotecadigital.udea.edu.co/dspace/bitstream/10495/7536/1/AcevedoDiana_2011_ComprensionConceptoProbabilidad.pdf
- Álvarez, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. México: Paidós educador.
- Andrade, C. (1998). Dificultades en el aprendizaje de la noción de variación. *Revista EMA, 1(1)*, 241-253.
- Asamblea Nacional Constituyente de Colombia. (1991). *Constitución política de Colombia*. Bogotá: Legis.
- Barrantes, G. (2004). *Implementación del enfoque pedagógico Enseñanza para la Comprensión aplicado en el colegio Saulo de Tarso*. Obtenido de Universidad de la Sabana:
<http://intellectum.unisabana.edu.co:8080/jspui/bitstream/10818/3232/1/132017.pdf>
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(3)*, 247-263.
- Benalcázar, L. (2012). *Las ecuaciones de primer grado en la escuela: dificultades y tratamiento*. Obtenido de Universidad del Valle- Sede Pacífico:
<http://funes.uniandes.edu.co/11573/1/Benal%C3%A1zar2012Las.pdf>
- Blythe, T., y Outerbridge, D. (1998). Metas de comprensión en Blythe. En *La Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente* (págs. 65-86). Buenos Aires: Paidós.
- Blythe, T., y Perkins. (1998). Comprender la comprensión . En *Blythe. La Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente* (págs. 35-42). Buenos Aires: Paidós.
- Blythe, T. (1999). *Enseñanza para la Comprensión Guía para el docente*. Buenos Aires: Paidós.
- Blythe, T., y Perkins, D. (1998). *La Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente*. México: Paidós.
- Blythe, T., Bondy, E., y Kendall, B. (1998). Evaluación diagnóstica continua. En T. Blythe,

- Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente.* Buenos Aires: Editorial Paidós.
- Boix, V., y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? . En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (págs. 215-256). Buenos Aires: Paidós.
- Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., y Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 53-59.
- Carranza, S., y Guerrero, M. (2016). El pensamiento aleatorio como fundamento para el desarrollo del pensamiento matemático y sus componentes. (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Clavel, M., y Torres, J. (2010). *La Enseñanza para la Comprensión como marco conceptual para el mejoramiento de la calidad educativa: la estrategia de la evaluación integrativa.* San Juan Argentina: Universidad Nacional de San Juan.
- Congreso de la República de Colombia. (1994). Ley 115 de 8 de febrero de 1994. Diario Oficial No. 41.214 . Bogotá, Colombia.
- Corberán, R. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de Razonamiento de van-Hiele.* Madrid, España: CIDE.
- Duval, R. (2016). *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas.* Obtenido de Universidad Distrital Francisco José de Caldas: <http://funes.uniandes.edu.co/12213/1/Duval2016Un.pdf>
- Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía*, 355, 52-54.
- François, M. (2003). *Marketing de las artes y la cultura.* Colombia: Grupo Planeta (GBS).
- Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente. (s.f.). *Guía de matemáticas grado 5°.* Bogotá, Colombia: Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente.
- García, J., Segovia, I., y Lupiáñez, J. (2014). El uso de las letras como fuente de errores de estudiantes universitarios en la resolución de tareas algebraicas. *Bolema: Boletim de*

- Educação Matemática*, 28(50), 1545-1566.
- Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, 11(1), 77-88.
- Godino, J., y Fond, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. *Matemáticas y su Didáctica para Maestros*, 767-826.
- Gómez, E., y Flores, D. (2007). *La noción de variable. Un estado del arte*. México: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, CIMATE - UAGRO.
- González, J. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café*. Obtenido de Universidad de Antioquia:
http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/6518/1/JuanGonzalez_2014_perimet-roarea.pdf
- Gutiérrez, R., y Cortez, M. (2016). *Estrategias didácticas en el proceso enseñanza aprendizaje de las ecuaciones lineales con una variable, en 8vo grado del Instituto Ramón Matus Acevedo turno matutino municipio de Jinotepe departamento de Carazo, durante el II semestre del año 2016*. Obtenido de Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua:
<https://repositorio.unan.edu.ni/7237/1/11328.pdf>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de investigación*. México: McGraw-Hill Internacional.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial McGraw-Hill Education.
- Hetland, L., Hammerness, K., Unger, C., & Gray, W. (1999). ¿Cómo demuestran los alumnos que comprenden? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (págs. 257-297). Buenos Aires: Paidós.
- Hurtado, G. (2015). Tendencias investigativas sobre el enfoque de Enseñanza para la Comprensión (EpC) en Hispanoamérica. *Revista del Centro de Investigación de la Universidad la Salle*, 11(43), 21-60.

- Jiménez, V., y Comet, C. (2016). Los estudios de casos como enfoque metodológico Case studies as a methodological approach. *ACADEMO Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades*, 3(2), 1-11.
- Juárez, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: Un análisis mediante el modelo 3UV. *Revista de didáctica de las matemáticas Números*, 76, 83-103.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Scienc.
- Kawulich, B. (2005). La observación participante como método de recolección de datos. *Revista Forum: Qualitative Social Research*, 6(2), 1-23.
- Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240.
- Küchemann, D. (1980). *Children's understanding of mathematics*. London: Hart. K.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart, *Children's Understanding of Mathematics* (págs. 102-119). London: John Murray.
- Larousse. (2012). *Pequeño Larousse Ilustrado*. Francia: Larousse.
- Lozano, D. (1998). *El concepto de variable: evolución a lo largo de la instrucción matemática*. México: ITAM.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión* (20), 165-193.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee, *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. London: KluwerAcademic Publisher.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*, 6(3), 221-278.

- Mejía, C. (2011). *El marco de la Enseñanza para la Comprensión aplicado al aprendizaje del concepto de campo eléctrico en estudiantes de Ingeniería de Sistemas*. Obtenido de Universidad Nacional de Colombia:
<http://bdigital.unal.edu.co/4382/1/04868123.2011.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie lineamientos curriculares*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2014). *El sentido de la Educación Inicial (Documento No. 20)*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2017). *Mallas de Aprendizaje Matemáticas grado 5°*. Bogotá: MEN.
- Molina, M. (2009). *Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria*. Obtenido de https://www.researchgate.net/profile/Marta_Molina/publication/26585698_Una_Propuesta_de_Cambio_Curricular_Integracion_del_Pensamiento_Algebraico_en_Educacion Primaria_Proposal_of_a_Curricular_Change_Integration_of_Algebraic_Thinking_in_Elementary_Educatio
- Morales, L. (2005). *El concepto de variable: su evolución historia y su caracterización en textos, con profesores y estudiantes*. Obtenido de Universidad de Sonora:
<http://www.repositorioinstitucional.uson.mx/bitstream/handle/unison/372/moralesperallinam.pdf?sequence=1>
- Morales, L., y Díaz, J. (2003). *Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario*. Obtenido de Universidad de Sonora: <https://semana.mat.uson.mx/Memorias/lina.pdf>
- National Council of Teacher of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Virginia: Reston.

- Ocampo, A. (2011). *Comprensión del aprendizaje en el aula de Ciencias Básicas: reflexiones des de los estilos y enfoques cognoscitivos*. Obtenido de Universidad Internacional SEK: <http://www2.udec.cl/ofem/recs/anteriores/vol912012/artinv9112a.pdf>
- Ocampo, K., y Molina, F. (2010). *Enseñar para un adecuado desempeño cotidiano*. Al Tablero, periódico del Ministerio de Educación Nacional.
- Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexión de una investigación. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números*, 40, 3- 28.
- Patiño, S. (2012). La Enseñanza para la Comprensión (EpC) Propuesta metodológica centrada en el aprendizaje del estudiante. *Revista Humanizarte*, 8, 1-10.
- Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Wiske, *La Enseñanza para la Comprensión* (págs. 69–92). Buenos Aires: Paidós.
- Perkins, D. (2010). *Enseñanza para la Comprensión EpC*. Obtenido de <https://www.slideshare.net/cavalos82/la-enseanza-para-la-%20comprension-2010>
- Pirie, S., y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.
- Presidencia de la República de Colombia. (1994). Decreto 1860 de agosto 3 de 1994. Bogotá, Colombia.
- Presidencia de la República de Colombia. (2009). Decreto 1290 de 16 de abril de 2009. Bogotá, Colombia.
- Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa II* (págs. 109-131). México, D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rendón, P. (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en la Enseñanza para la Comprensión*. Obtenido de Universidad de Antioquia, Medellín: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/525/1/ConceptualizacionRazonCambio01.pdf>
- Restrepo, B. (1996). *Investigación en Educación: paradigmas metodológicos en investigación en*

- Educación*. Bogotá, Colombia: Instituto Colombiano para el Fomento a la Educación [ICFES].
- Ritchhart, R., Stone, M., Buchovecky, E., y Hetland, L. (1999). ¿Cómo se ve en la práctica la Enseñanza para la Comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (págs. 169-212). Buenos Aires: Paidós.
- Rivera, G. (2014). *Procesos de razonamiento y comprensión con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa*. Obtenido de Universidad de Antioquia:
http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/6456/1/GladysRivera_2014_razonamientoestructura.pdf
- Rojas, P. (2010). *Iniciación al álgebra escolar: elementos para el trabajo en el aula. 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Obtenido de Universidad Distrital Francisco José de Caldas:
http://funes.uniandes.edu.co/1168/1/115_Iniciacin_al_lgebra_Escolar_Elementos_para_el_Trabajo_en_el_Aula_Asocolme2010.pdf
- Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The mathematics teacher*. 74 (6), 418-420.
- Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de caso*. Madrid, España: Editorial Morata, S.L.
- Stone, M. (1999). *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Paidós.
- Thom, J., y Pirie, S. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Journal of mathematical Behavior* , 25, 185-195.
- Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S., y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las Ciencias (14)*, 351-363.
- Trigueros, M., Ursini, S., y Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática*, 12(2), 27-48.

- Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática*, 06(03), 90-108.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En F. Coxford, *The Ideas of Algebra, K-12* (págs. 8-19). National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA.
- Valencia, P. (2015). *Propuesta para la enseñanza en el aula del concepto de variable algebraica, a través de situaciones problema*. Obtenido de Universidad Nacional de Colombia: <http://bdigital.unal.edu.co/48661/1/43273768.2015.pdf>
- Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). El modelo de van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.
- Vélez, C., Segovia, I., López, M., y Castro, H. (2010). *Orientaciones pedagógicas para la educación artística en básica y media*. Ministerio de Educación Nacional. Viceministerio de educación preescolar, básica y media. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340033_archivo_pdf_Orientaciones_Edu_Artistica_Basica_Media.pdf
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grado de educación primaria (9-10 años)*. Obtenido de Universidad Distrital Francisco José de Caldas: <http://funes.uniandes.edu.co/4054/1/Vergel2014Formas.pdf>
- Villa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada: un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. Obtenido de Universidad de Antioquia: <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/handle/123456789/1521>
- Zapata, S. (2019). *Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano*. Obtenido de Universidad de Antioquia: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/14855>