



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE
FUNCIÓN A PARTIR DE REPRESENTACIONES
POR ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO
MEDIANTE SITUACIONES Y UN EJECUTABLE
VIRTUAL**

Fredy Zuluaga Ramírez

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

El Carmen de Viboral, Colombia



Comprensión del concepto de función a partir de representaciones por estudiantes
de grado noveno mediante situaciones y un ejecutable virtual

Fredy Zuluaga Ramírez

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Educación

Asesores (a):

Carlos Mario Pulgarín Pulgarín

Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Sandra Milena Londoño Orrego

Magíster en Educación

Línea de Investigación: Educación Matemática

Grupo de Investigación: Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit)

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

El Carmen de Viboral, Colombia

2020

*A toda mi familia por el apoyo
incondicional, en especial a mi madre Epifanía.*

AGRADECIMIENTOS

Gracias por apoyar este proceso a:

La Gobernación de Antioquia y a su programa becas de maestría, por favorecer la formación de los maestros del departamento y contribuir con el incentivo económico para llevar a cabo la profesionalización docente.

El Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia y en especial a los maestros directores de este proyecto, Sandra Milena Londoño Orrego y Carlos Mario Pulgarín Pulgarín, por su dedicación, paciencia y contribuciones para direccionar esta investigación.

La universidad de Antioquia y en particular a la Facultad de Educación y todos los maestros que hicieron parte de este proceso de formación académica.

Los compañeros y compañeras de la maestría en educación por sus comentarios, reflexiones y sugerencias para cualificar el trabajo de investigación.

Mi familia por la comprensión ante las ausencias, tiempos reducidos para compartir con ellos y el apoyo moral e incondicional brindado durante el desarrollo de esta investigación.

La Institución Educativa Rural Santa María del municipio El Carmen de Viboral en la cual se llevó a cabo esta investigación y a los estudiantes que amablemente hicieron parte activa de este proyecto.

TABLA DE CONTENIDO

Resumen.....	12
Introducción	15
Capítulo 1: Problema de Investigación	17
1.1. Revisión de la literatura.....	17
1.1.1. Investigaciones respecto a la función; concepto unificador y modelador	18
1.1.2. Algunos aspectos epistemológicos e históricos del concepto de función	20
1.1.3. Ejecutable virtual en la enseñanza del concepto de función	22
1.1.4. Enseñanza del concepto de función a través de situaciones	25
1.1.5. Comprensión del concepto de función en el plano.....	26
1.1.6. Teorías y enfoques relacionados en comprensión matemática.....	27
1.2. Planteamiento del problema.....	35
1.3. Pregunta de investigación	39
1.3.1. Objetivo general	39
1.3.2. Objetivos específicos.....	40
Capítulo 2: Marco Teórico.....	41
2.1. Teoría de la comprensión de Pirie y Kieren (PK)	41
2.2. Niveles de comprensión	46
2.2.1. Primer nivel: Conocimiento primitivo.....	46
2.2.2. Segundo nivel: Creación de imagen	46
2.2.3. Tercer nivel: Comprensión de la imagen.....	46
2.2.4. Cuarto nivel: Observación de la propiedad	47

2.2.5. Quinto nivel: Formalización	47
2.2.6. Sexto nivel: Observación.....	47
2.2.7. Séptimo nivel: Estructuración	47
2.2.8. Octavo nivel: Invención.....	48
2.3. Teoría de comprensión de PK en relación al concepto de función	48
2.4. Niveles de comprensión y descriptores asociados al concepto de función	48
2.4.1. Nivel uno, conocimiento primitivo.....	49
2.4.2. Nivel dos, creación de la imagen.....	50
2.4.3. Nivel tres, comprensión de la imagen	52
2.2.4. Nivel cuatro, observación de la propiedad	53
Capítulo 3: Marco Metodológico.....	55
3.1. Paradigma cualitativo.....	55
3.1.1. Comprender	57
3.1.2. Sintetizar	57
3.1.3. Teorizar.....	58
3.1.4. Re-contextualizar.....	58
3.2. Estudio de caso.....	59
3.3. Contexto y participantes.....	59
3.3.1. Criterios de selección de casos	61
3.3.2. Descripción de los casos.....	61
3.4. Técnicas de registro de información	62
3.4.1. La observación.....	62
3.4.2. La entrevista	65

3.4.2.1. Entrevista estructurada	66
3.4.2.2. Entrevista semiestructurada	66
3.5. Registros de los estudiantes.....	66
3.6. Análisis de datos en la investigación cualitativa.....	67
3.6.1. Pre-visualización de categorías emergentes	67
3.6.2. Validación de los datos.....	68
Capítulo 4: Resultados de Investigación.....	70
4.1. Caracterización encuentro # 1. Motivación e ideas previas	71
4.1.1. Descripción encuentro introductorio caso 1: Manu.....	72
4.1.2. Descripción encuentro introductorio caso 2: Lisa	73
4.1.3. Descripción encuentro introductorio caso 3: Eli	74
4.2. Caracterización encuentro # 2. Patrones y regularidades.....	75
4.2.1. Descripción situación uno cuadrados perfectos.....	75
4.2.2. Descripción situación tres manzanos.....	85
4.2.3. Trayectorias de comprensión.....	97
4.3. Caracterización encuentro # 3. Cambio y relaciones	100
4.3.1. Descripción situación cuatro chatear	101
4.3.2. Conclusiones sobre la descripción de la situación 4.....	106
4.4. Caracterización encuentro # 4. Relaciones proporcionales y gráficas	107
4.4.1. Descripción situación seis concentración de un medicamento.....	107
4.4.2. Conclusiones sobre la descripción de la situación 6.....	111
4.5. Caracterización encuentro # 5. Variación	112
4.5.1. Descripción situación ocho el peso de los sacos de papa	112

4.5.2. Conclusiones sobre la descripción de la situación 8.....	123
4.6. Descripción del encuentro # 6. Función lineal.....	123
4.6.1. Descripción situación nueve periódico The New York Times.....	124
4.6.2. Trayectorias de comprensión.....	135
4.7. Caracterización encuentro # 7. Exploración con el ejecutable virtual.....	138
4.7.1. Descripción situaciones con el ejecutable virtual.....	139
Capítulo 5: Conclusiones.....	154
5.1. Acerca de la pregunta de investigación.....	154
5.2. Con respecto a los objetivos.....	155
5.3. En relación a las categorías previsualizadas y emergentes.....	155
5.3.1. Categoría uno: Regularidad.....	156
5.3.2. Categoría dos: Representaciones.....	157
5.3.3. Categoría tres: Variación.....	158
5.3.4. Categoría cuatro: Proporcionalidad.....	159
5.3.5. Sobre el uso del ejecutable virtual.....	159
5.3.6. Recomendaciones para la enseñanza del concepto de función.....	161
5.3.7. Para futuras investigaciones.....	162
Referencias Bibliográficas.....	164
Anexos.....	169
1.1. Anexo A: Consentimiento informado.....	169
1.2. Anexo B: Encuentro motivación e ideas previas.....	170
1.3. Anexo C: Encuentro patrones y regularidades.....	174
1.4. Anexo D: Encuentro cambio y relaciones.....	178

1.5. Anexo E: Encuentro relaciones proporcionales y gráficas.....	180
1.6. Anexo F: Encuentro variación.....	182
1.7. Anexo G: Encuentro función lineal.....	184
1.8. Anexo H: Guión de entrevista semiestructurada.....	187
1.9. Anexo I: Estudio a priori de los diferentes encuentros	189

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Esquema representativo del modelo teórico APOE	31
Figura 2 Mapa conceptual acerca de la revisión de la literatura.....	35
Figura 3 Modelo para el crecimiento de la comprensión matemática	43
Figura 4 Complementariedad en los niveles de comprensión	45
Figura 5 Encuentros y fases del diseño metodológico.....	69
Figura 6 Estructura del capítulo resultados de investigación	71
Figura 7 Ideas acerca de ¿qué es la matemática? participante Manu	72
Figura 8 Ideas sobre ¿qué es la matemática? participante Lisa	73
Figura 9 Ideas acerca de ¿qué es la matemática? participante Eli	74
Figura 10 Esquema preliminar situación uno	75
Figura 11 Solución propuesta por Manu ítem (a).....	76
Figura 12 Respuesta propuesta por Lisa para el ítem (a).....	77
Figura 13 Respuesta ítem (a) situación uno participante Eli	78
Figura 14 Respuesta ítem (b) situación uno participante Manu	79
Figura 15 Solución ítem (b) situación uno participante Lisa.....	80
Figura 16 Respuesta ítem (b) situación uno participante Eli	81

Figura 17 Respuesta ítem (c) situación uno Manu	82
Figura 18 Solución ítem (c) situación uno Lisa	83
Figura 19 Argumentos expuestos por Eli para solucionar la cuestión c	84
Figura 20 Encabezado situación manzanos	85
Figura 21 Relación entre el terreno, pinos y manzanos participante Manu.....	86
Figura 22 Registro de datos acerca del terreno, pinos y manzano participante Lisa	87
Figura 23 Relación entre el terreno, cantidad de manzanos y coníferas participante Eli	88
Figura 24 Justificación de la relación entre el terreno, manzanos y pinos	89
Figura 25 Argumentos planteados por Lisa	90
Figura 26 Relación entre el terreno, manzanos y pinos Eli	91
Figura 27 Comparación entre el número de manzanos y pinos Manu.....	91
Figura 28 Análisis número de manzanos y pinos Lisa	92
Figura 29 Comparación manzanos y pinos Eli	93
Figura 30 Cálculo de manzanos y pinos participante Manu	94
Figura 31 Cálculo de manzanos y pinos participante Lisa	95
Figura 32 Cálculo de manzanos y pinos participante Eli.....	95
Figura 33 Conclusiones situación manzanos participante Manu	96
Figura 34 Conclusión situación manzanos participante Lisa.....	97
Figura 35 Trayectoria de comprensión situaciones 1 y 3 participante Manu	98
Figura 36 Trayectoria de comprensión situaciones 1 y 3 participante Lisa.....	99
Figura 37 Trayectoria de comprensión situaciones 1 y 3 participante Eli.....	100
Figura 38 Inicio situación 4 chatear.....	101
Figura 39 Descripción situación Berlín y Sydney participante Manu	101

Figura 40 Caracterización de situación Berlín y Sydney participante Lisa.....	102
Figura 41 Caracterización de la situación Berlín y Sydney participante Eli	102
Figura 42 Descripción situación (c) chatear Manu	103
Figura 43 Inferencias situación chatear participante Lisa	104
Figura 44 Análisis situación chatear participante Eli	105
Figura 45 Respuesta de otro compañero del curso	107
Figura 46 Introducción encuentro número cuatro.....	108
Figura 47 Respuesta ítem (a) situación medicamento participante Manu	108
Figura 48 Procedimientos respuesta ítem (a) participante Lisa.....	109
Figura 49 Respuesta acerca del ítem (b) participante Manu.....	110
Figura 50 Respuesta del participante Lisa	110
Figura 51 Respuesta de otro compañero del curso	112
Figura 52 Introducción encuentro número cinco.....	112
Figura 53 Procedimientos situación sacos de papa Manu	113
Figura 54 Argumentos participante Lisa	114
Figura 55 Solución planteada por Eli	115
Figura 56 Esquema o representación participante Manu.....	116
Figura 57 Solución propuesta por Lisa	117
Figura 58 Respuesta planteada al ítem (b) Eli	118
Figura 59 Respuesta ítem participante Manu	119
Figura 60 Solución propuesta por Lisa	119
Figura 61 Respuesta participante Eli	120
Figura 62 Solución ítem (e) Manu.....	121

Figura 63 Solución ítem (e) Eli.....	122
Figura 64 Solución de Otro compañero del curso	123
Figura 65 Encabezado situación nueve.....	124
Figura 66 Solución propuesta por Manu.....	125
Figura 67 Solución propuesta por Lisa	126
Figura 68 Solución participante tres Eli	127
Figura 69 Solución propuesta por Manu.....	128
Figura 70 Solución planteada por Lisa	129
Figura 71 Respuesta participante Eli	129
Figura 72 Representación propuesta por Manu	130
Figura 73 Respuesta participante Lisa	131
Figura 74 Solución propuesta por Eli	132
Figura 75 Respuestas ítems (d) y (e) participante Manu	133
Figura 76 Soluciones cuestiones (d) y (e) participante Lisa.....	134
Figura 77 Solución a las cuestiones (d) y (e) participante Eli	135
Figura 78 Trayectoria de comprensión situaciones ocho y nueve participante Manu...	136
Figura 79 Trayectoria de comprensión situaciones ocho y nueve participante Lisa	137
Figura 80 Trayectoria de comprensión situaciones ocho y nueve participante Eli	138
Figura 81 Introducción práctica académica con GeoGebra.....	139
Figura 82 Construcción con GeoGebra situación 5 caminar, Manu.....	140
Figura 83 Construcción con ejecutable virtual situación 8, Manu	141
Figura 84 Construcción GeoGebra situación 9, Manu	142
Figura 85 Construcción con ejecutable virtual situación 5, Lisa.....	145

Figura 86 Construcción con ejecutable virtual situación 8, Lisa.....	146
Figura 87 Construcción GeoGebra situación 9, Lisa.....	147
Figura 88 Construcción con ejecutable virtual situación 5, Eli	150
Figura 89 Construcción con ejecutable virtual situación 8, Eli	151
Figura 90 Construcción con GeoGebra situación 9, Eli	151
Figura 91 Esquema propuesto para la enseñanza del concepto de función	162

Resumen

La presente investigación de maestría se desarrolló en la línea de Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y tuvo como objetivo principal analizar la comprensión del concepto de función en un grupo de estudiantes de noveno grado. Para caracterizar la comprensión de los estudiantes se plantean diversas situaciones, en las cuales están vinculadas ideas que brindan fundamentos epistemológicos al concepto de función. Algunas de ellas son: relación, cambio, variación, dependencia, entre otras. Con el fin de describir la comprensión del concepto de función, se hace uso del modelo teórico propuesto por los investigadores norteamericanos Susan Pirie y Thomas Kieren en sus primeros cuatro niveles o estratos; además se tiene en cuenta los diversos registros de representación elaborados por los estudiantes durante la solución de las situaciones, el crecimiento de la comprensión y la movilización de un nivel a otro. Entre tanto, esta investigación aborda el estudio de caso instrumental para distinguir los elementos evidenciados en la comprensión de tres participantes en dirección a la obtención de resultados finales y conclusiones. Al finalizar la etapa de aplicación de guías físicas es utilizado el ejecutable virtual GeoGebra con el propósito de explorar en la comprensión de las situaciones a través de representaciones fluidas. Dentro de los resultados y conclusiones resaltan: En primer lugar el modelo teórico propuesto en la teoría de Pirie y Kieren posibilitó la creación de una ruta para caracterizar el proceso de comprensión de los estudiantes, a través de un sistema de descriptores en los cuales estuvieron enmarcadas las pre-categorías y al final categorías confirmadas. Además propició englobar acciones, evidencias de comprensión y procesos de pensamiento realizados por los participantes. Y en segundo lugar la aparente conexión o aceptación de los participantes con el uso del ejecutable virtual; confirma

en este trabajo de investigación horizontes y líneas de estudio futuras en dirección de analizar, ¿cómo las TIC transforman los espacios de enseñanza y aprendizaje?

Palabras clave: Función, Comprensión, Teoría Pirie y Kieren (PK), Variación, Representaciones, GeoGebra.

Abstract

The present master's research was developed in the line of Mathematical Education of the Faculty of Education of the University of Antioquia. Its main objective was to analyze the understanding of the mathematical concept of function in a group of ninth-grade students. To characterize the students' comprehension, several situations are presented, in which ideas that provide epistemological foundations to the mathematical concept of function are linked. Some of them are relationship, change, variation, dependence, among others. In order to describe the awareness of the mathematical concept of function, the theoretical model proposed by the North American researchers Susan Pirie and Thomas Kieren is used in its first four levels or strata. Besides, the diverse registers of representation elaborated by the students during the solution of the situations, the growth of understanding, and the mobilization from one level to another are taken into account. Meanwhile, this research addresses the instrumental case study to distinguish the elements evidenced in the understanding of three participants in the direction of obtaining final results and conclusions. At the end of the application stage of physical guides, the virtual application GeoGebra is used to explore the understanding of situations through fluid representations. Finally, the results and conclusions highlight: Firstly, the theoretical model proposed in Pirie and Kieren's theory made it possible to create a route to characterize the students' understanding process, through a system of descriptors in which the pre-categories and finally confirmed categories were framed. It is also allowed to include actions, evidence of

understanding, and thought processes carried out by the participants. And secondly, the apparent connection or acceptance of the participants with the use of the virtual application. It confirms in this research work future horizons and lines of study in the direction of analyzing, how do ICTs transform the spaces of teaching and learning?

Keywords: Mathematical Function, Understanding, Pirie and Kieren Theory (PK), Variation, Representations, GeoGebra.

Introducción

Esta investigación es el resultado del interés por la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, un tema relevante para docentes e investigadores en la educación secundaria, media e inicios de la universidad. Y es importante porque al margen de este concepto existen otros, que han ayudado a describir fenómenos y situaciones interesantes para la tecnología, ciencia y en general para la humanidad.

En torno a la pertinencia para diferentes investigadores, es preciso considerar dos tipos de investigaciones relacionadas con la didáctica de las funciones: En primer lugar, aquellas que se han ocupado de analizar el papel que juegan las diferentes clases de representación del concepto de función, y en segundo lugar, aquellas investigaciones vinculadas con el análisis de la noción de función como proceso y objeto (Ramos, 2005).

En el sentido de las dos perspectivas anteriores, esta investigación se interesa principalmente por el proceso de comprensión del concepto de función y al margen utiliza diferentes representaciones para analizar la comprensión de los participantes.

Además la función matemática es considerada una herramienta esencial que contribuye a la comprensión de diversas situaciones, porque es un concepto útil para entender cuestiones de la química, biología, economía y otras. En particular son comprensibles fenómenos relacionados con la física, al respecto es pertinente considerar la siguiente apreciación: “La percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelizar o matematizar relaciones entre magnitudes físicas u otras es una condición sine qua non para dar sentido al concepto de función en su totalidad” (Sierpinska, 1992, p. 42).

Adicionalmente, es común encontrar que las funciones matemáticas ayudan a interpretar relaciones entre variables, por ejemplo, la dependencia e independencia y la covariación; estas razones justifican el beneficio de indagar acerca del concepto de función matemática en el plano.

Por lo tanto, los argumentos anteriores movilizan el interés de esta investigación hacia uno de los propósitos de la educación secundaria y media, el cual es promover el desarrollo del pensamiento variacional y vincular a los estudiantes a situaciones que integren relaciones entre variables, reconocer cambios, lo que varía y permanece constante, establecer conjeturas y plantear modelos para describir fenómenos y situaciones.

Por consiguiente, se pretende potenciar en los participantes la idea de variación a partir de enunciados, tablas de valores, gráficas y expresiones algebraicas; así como incluir el uso del software educativo GeoGebra con el propósito de establecer conexiones con la ciencia y la Tecnología de la Información y Comunicación (TIC).

La presente investigación se halla estructurada en cinco capítulos:

El capítulo uno está compuesto por la revisión de la literatura, en torno a aspectos relacionados con el concepto de función y la comprensión matemática, además del planteamiento del problema y los objetivos de la investigación. Por su parte en el capítulo dos se presenta el marco teórico que sustenta la investigación, a partir de la teoría de comprensión propuesta por los investigadores norteamericanos Susan Pirie y Thomas Kieren. Hacen parte del capítulo tres los elementos relacionados con el accionar metodológico, entre ellos algunos referidos a la investigación cualitativa y el método estudio de caso. Por su parte el capítulo cuatro expone los resultados de la investigación a través del análisis de datos y la descripción de las trayectorias de comprensión de los estudiantes. Y por último en el capítulo cinco se recogen algunas de las conclusiones, recomendaciones y consideraciones finales sobre el trabajo de investigación.

Capítulo 1: Problema de Investigación

Hacen parte de este capítulo la presentación de diversos elementos teóricos que sustentan esta propuesta de investigación, resaltan las consideraciones relacionadas con aspectos epistemológicos e históricos del concepto de función, así como fundamentos asociados con la comprensión matemática, la aplicación de diversos registros de representación y el uso de software educativos en la enseñanza y aprendizaje. Además, se expone el planteamiento del problema y objetivos, también se plantean las dificultades encontradas durante el ejercicio de la enseñanza del concepto de función que dieron origen a esta investigación. El objetivo general propuesto está relacionado con analizar la comprensión del concepto de función en estudiantes de grado noveno y los objetivos específicos con describir y evidenciar aspectos en el proceso de comprensión.

1.1. Revisión de la literatura

Para la revisión de la literatura se tomaron algunos conceptos considerados ejes en la investigación entre ellos función, comprensión y GeoGebra, estos sirvieron para la búsqueda de artículos, libros, tesis de maestría y de doctorado. A medida que se hacía la lectura de algunos materiales, surgieron otros conceptos relevantes como variación, cambio, representaciones, historia y epistemología de las funciones. Con estas investigaciones y/o artículos se creó una matriz de datos en la cual se registró el nombre y ubicación, además del objetivo, pregunta de investigación, metodología y resultados encontrados; este análisis permitió filtrar la información e iniciar la construcción de la estructura teórica que sustenta esta investigación y en parte del estado del arte.

La exploración de la literatura se realizó principalmente a través de diversas bases de datos electrónicas entre ellas, Science Direct, EBSCO, SciELO, Erik, Dialnet y los repositorios

de la Universidad de Antioquia; se consultaron con preferencia las investigaciones y artículos publicados en las tres últimas décadas relacionadas con el concepto de función.

A continuación, se exponen los elementos teóricos que enriquecieron y direccionaron esta investigación:

1.1.1. Investigaciones respecto a la función; concepto unificador y modelador

El concepto de función es considerado de especial relevancia sobre todo por su amplia aplicabilidad e importancia en la educación matemática; por ejemplo, la función matemática es una de las relaciones más significativas, porque modela diferentes fenómenos de las ciencias sociales y naturales.

Conviene expresar que en la comunidad académica la pertinencia de las funciones ha incitado gran interés en algunos investigadores de diferentes organizaciones, según el Concilio Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) (1989/1991) de EEUU citados en Cuevas y Díaz (2014), la función es definida “concepto unificador en matemáticas” (p. 165). Sobre todo, por su cualidad de integrar diversos conceptos, re-significarlos y establecer conexiones entre ellos.

Cuevas y Díaz (2014) mencionan diferentes autores en relación al concepto de función, entre ellos Fey y Good (1985), proponen que el concepto de función sea el centro del álgebra escolar. También Kieran et al., (1993), sugieren introducirlo al inicio del curso del álgebra para desarrollar el pensamiento algebraico y funcional principalmente.

En relación con el pensamiento funcional Kieran (2007), citado en Senk, Thompson y Wernet (2014) indica: es necesario que los planes de estudio del área de matemáticas adquieran un carácter funcional, en particular estos deben fomentar el empleo de múltiples registros de representación, situaciones del mundo real y modelado de fenómenos; además justifica la

necesidad de pasar del pensamiento algebraico al funcional, para desarrollar procesos de pensamiento como identificar patrones, regularidades, generalizaciones y llegar a un pensamiento para establecer relaciones de dependencia funcional entre variables, es decir, pensar en términos de cantidades que varían. Sumado a lo anterior Cuevas y Díaz (2014) manifiestan la importancia de las funciones para modelar diversas situaciones y cohesionar otros conceptos:

Como es conocido el tema de funciones es piedra angular para el desarrollo de otros asuntos más avanzados de la propia matemática; modela también frecuentemente innumerables fenómenos: físicos, químicos, socioeconómicos, biológicos, por mencionar algunas ciencias. Y en el aspecto curricular es un contenido obligado desde los cursos de enseñanza secundaria hasta los universitarios. A pesar de ello, diversos investigadores reportan serias dificultades en los estudiantes para comprender el concepto de función, con la consecuente influencia en una mala interpretación de conceptos matemáticos que dependen en gran parte de la comprensión de dicho concepto. (p. 165)

Las afirmaciones expuestas anteriormente traen consecuencia que los investigadores consideren las funciones en el plano cartesiano como un elemento necesario de aprender por los estudiantes, a su vez los maestros requieren el conocimiento esencial de la gráfica y comprender la forma en que piensan los estudiantes acerca de las funciones, por ende, su enseñanza representa un desafío. Los investigadores agregan que, en la enseñanza del concepto de función es necesario incluir representaciones de enunciados, tablas, gráficas y expresiones algebraicas, así como la construcción e identificación de modelos lineales, cuadráticos, exponenciales y trigonométricos, tratándose de un concepto primordial que integra aprendizajes con otras disciplinas.

Sobre las representaciones Duval (1993), citado por Cuevas, et al., (2018) alude carencias en las acciones de los estudiantes para exponer la función en diferentes formas de representación y manifiesta, “que mientras algunos estudiantes son capaces de manejar algebraicamente las expresiones de una función lineal o afín, estos mismos se muestran incapaces de reconocer a las mismas en el plano cartesiano y viceversa” (p. 24).

En general las principales tendencias refuerzan la importancia de trabajar el concepto de función utilizando nociones fundamentales de cambio, relaciones y variación, sugieren usar diversas formas de representación, puesto que la función es un concepto básico en la educación escolar.

1.1.2. Algunos aspectos epistemológicos e históricos del concepto de función

Los análisis de diversas investigaciones Farfán y García (2005); Cuevas y Díaz (2014), documentan el proceso epistemológico e histórico del concepto de función, revelando algunos de sus desafíos y dilemas experimentados, también muestran el concepto de función en constante transformación de acuerdos y desacuerdos requeridos para evolucionar, e igualmente como su construcción histórica influye en la enseñanza y aprendizaje del concepto. A continuación, son expuestos diversos elementos epistémicos e históricos del concepto de función surgidos en pueblos y culturas para su configuración.

Para iniciar es preciso mencionar que varias características del concepto de función se pueden identificar en las primeras civilizaciones babilónicas y griegas. Sin embargo, es considerado que durante un periodo de 3700 años solo existió previsualizaciones de la noción de función y a la postre tuvo su mayor auge entre 1450 y 1650, y finalmente apareció solo hasta 1673 la palabra función por primera vez en manuscritos de Leibniz, *Methodur Tangentium Inversa* (Cuevas y Díaz, 2014).

Es así como, los babilónicos consideraron características implícitas de la función al describir el movimiento del sol, la luna y los planetas, por su parte los griegos expresaron el movimiento y el cambio algo externo a la matemática, con la sola excepción de aquello referido a los movimientos astronómicos, esta idea condujo a pensar más en términos de ecuaciones que de variables y supuso un obstáculo histórico en el desarrollo de las funciones (Farfán y García, 2005; Ramos, 2005).

De acuerdo con Porras (2011) el desarrollo histórico y epistemológico de la noción de función, se enmarca en los conceptos de movimiento, cambio, nociones de dependencia entre variables, y el concepto de pendiente está íntimamente ligado con el de covariación; por su parte la pendiente es interpretada como una razón de cambio entre la variable dependiente y la variable independiente, es decir, cambio de una magnitud respecto de la otra.

Es por ello que algunos de los aportes de Leibniz y Newton ayudaron de forma indirecta a la conceptualización de la idea de función como es presentada hoy en día en los libros de texto; ambos desde lugares distintos llegaron a nociones similares sobre el concepto de función, de esta manera existen semejanzas y diferencias acerca de la forma en que estos matemáticos y físicos abordaron el concepto de función:

Para Leibniz, al igual que para Newton, la función es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma. Ahora bien, Leibniz a diferencia de Newton, considera la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve. (Ramos, 2005, p. 82)

Es decir, Newton consideró la función desde un punto de vista físico en relación con el movimiento y Leibniz por su parte ofreció preferencia al estudio de la función a partir del

aspecto analítico. Este avance posibilitó a la sociedad científica y académica desarrollar innumerables adelantos científicos y tecnológicos, además de estudios de diferentes ciencias.

Las investigaciones anteriores mencionan también la dificultad del maestro para enseñar el concepto de función, producto en gran parte de las elaboraciones de los docentes en sus procesos de aprendizaje, sugieren entonces desaprender, reformular, re-conceptualizar y elaborar otros aprendizajes que expresen la complejidad del concepto y sus múltiples interpretaciones.

Sobre la complejidad del concepto de función Posada y Villa (2006) resaltan entre los elementos constituyentes del concepto de función, la noción de variación, cambio, tiempo y dependencia; sostienen que la noción de variable es la esencia de la función y la razón de cambio constante, es uno de los pilares fundamentales en la consolidación del concepto de función lineal.

Por último, los elementos epistémicos e históricos expuestos anteriormente justifican el valor de la génesis del concepto y su importancia a la hora de proponer espacios de enseñanza y aprendizaje, da

do que a través de ellos es posible conocer su estructura principal, con privilegio del estudio de las relaciones entre variables y, por lo tanto, acercarse a un pensamiento funcional.

1.1.3. Ejecutable virtual en la enseñanza del concepto de función

Las TIC ofrecen alternativas para enseñar y aprender a partir de juegos, gráficas, simuladores y otros, no obstante, diversos espacios académicos parecen permanecer ajenos a los retos que trae consigo la tecnología y la posmodernidad, es contradictorio entonces prescindir de las posibilidades y desafíos ofrecidos por la tecnología en los espacios académicos, precisamente Moreno y Waldegg (2002) afirman que existe una relación estrecha entre matemática y tecnología:

Las matemáticas, como toda otra actividad intelectual, sufren la profunda influencia de las tecnologías existentes. Con el correr del tiempo, las tecnologías se tornan “invisibles” y las actividades que se generan a partir de ellas se conciben como actividades matemáticas independientes de aquella tecnología. (p. 59)

El argumento anterior justifica el deber ético y profesional de los maestros, grupos e investigadores para repensar sus prácticas de aula, dispuestos a la transformación de diversos espacios académicos en los cuales las TIC se conviertan en una propuesta factible de utilizar como otra forma de aprendizaje y enseñanza.

De acuerdo con Barrera y Santos (2001); Prensky (2010) citados por Jiménez y Jiménez (2017) hoy en día existen nativos digitales, es decir, generaciones que nacieron con la tecnología, a las cuales el maestro debe enseñar utilizando los medios tecnológicos y no desconocer la necesidad que tiene la escuela de adaptarse a los nuevos escenarios, contextos y desafíos de la nueva era moderna. Y en la enseñanza de las matemáticas, la educación no se puede quedar atrás para adaptar la tecnología con el proceso de la construcción del conocimiento. Así, el estudio y la utilización de la tecnología puede convertirse en una poderosa herramienta para que los estudiantes creen diversas representaciones de situaciones, conceptos y en general de cientos de tareas que le permiten obtener un mejor análisis, inferencias y soluciones a sus problemas, preguntas o situaciones de estudio.

En consecuencia, es pertinente la utilización de software, programas y plataformas web para posibilitar en los estudiantes la interacción, simulación, representación de situaciones y diversos conocimientos durante la construcción y análisis del concepto de función. En este sentido el ejecutable virtual GeoGebra es considerada una herramienta útil para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como un programa dinámico que integra geometría, álgebra,

análisis y estadística, al respecto Carrillo (2012) menciona que; GeoGebra no es solo geometría (Geo), también es álgebra (Gebra), aunque en la realidad, es mucho más: es cálculo, es análisis y también estadística; en general, GeoGebra es una herramienta para hacer unas matemáticas dinámicas, interactivas y entretenidas en especial en los niveles educativos de primaria, secundaria y media académica.

Expuestos los argumentos anteriores es posible afirmar entonces que GeoGebra es una alternativa para trabajar diversos conceptos en el aula ya que proporciona diferentes entornos a los tradicionales, justamente el maestro investigador debe cuestionarse y suscitar espacios académicos en los cuales se utilicen herramientas virtuales.

Con respecto a la aplicación de herramientas tecnológicas en ámbitos académicos, es común encontrar sobre todo en los maestros de matemáticas diversos dilemas en torno a su utilización, por ejemplo ¿cuál es la forma de permitir el uso de la calculadora?, ¿cómo hacer uso de las plataformas virtuales, programas, software y otros elementos en el aula? con el transcurrir del tiempo estas cuestiones parecen ser retrógradas, en el sentido en que la sociedad de las TIC avanza a pasos agigantados y por lo tanto, para los maestros es necesario concentrar sus reflexiones acerca de cuál debe ser la relación de enseñanza y aprendizaje con estos elementos tecnológicos.

Justamente sobre las cuestiones de las TIC en las aulas, Ponte (2000) propone algunos interrogantes que se deben prever en relación con la práctica pedagógica:

[...] ¿Cómo cambian las TIC (o pueden alterar) la naturaleza de los objetivos educativos que persigue la escuela? ... ¿cómo cambian las relaciones entre los estudiantes y el conocimiento? ... ¿cómo cambian las relaciones entre estudiantes y maestros? ... ¿cómo

cambian la forma en que los maestros viven su profesión? ... ¿el surgimiento de la sociedad de la información requiere de una nueva pedagogía? (p. 71)

Los interrogantes anteriores en relación a las TIC, confirman la necesidad de cuestionar y repensar algunos de los propósitos de la enseñanza de las matemáticas en la escuela, además de vislumbrar las transformaciones de los espacios educativos y reflexionar sobre las relaciones entre conocimientos, estudiantes y maestros. Estas consideraciones continúan reafirmando la trascendencia de la incorporación y aplicación de las TIC en las aulas, sobre todo con respecto al rol que ejercen tanto maestros como estudiantes.

1.1.4. Enseñanza del concepto de función a través de situaciones

Con frecuencia los maestros expresan emplear diversas situaciones, o situaciones problema para materializar los procesos de enseñanza aprendizaje. Además, previamente, durante o posterior al desarrollo de las situaciones los maestros definen los conceptos inmersos o abordados, es decir, las temáticas y conocimientos estudiados en las clases. Sobre la definición de conceptos y uso de situaciones Vergnaud (1990) señala:

Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere importancia para el estudiante. (p.1)

En el sentido anterior, es común que a través de la enseñanza los conceptos se aborden acudiendo a situaciones con enunciados reales e hipotéticos, tablas, gráficas, esquemas y operaciones matemáticas. No obstante, para comprender un concepto matemático por medio de situaciones es necesario considerar, ¿qué es una situación? ¿cómo debe estar constituida? ¿cuál es la forma adecuada de vincular las situaciones con varios conceptos? entre otras cuestiones.

Para responder a los interrogantes anteriores y otros, Vergnaud (1990) distingue dos clases de situaciones operatorias a partir de los conocimientos que presentan los estudiantes en el momento de enfrentarse a una situación. La primera relacionada con las situaciones en las cuales el estudiante evidencia elementos suficientes para resolver sin mayores dificultades, y la segunda referida a las situaciones en las cuales el estudiante debe reflexionar, establecer hipótesis y conjeturas para llegar a una solución.

A partir de las situaciones en las cuales el estudiante debe elaborar mayores procesos de pensamiento, esta propuesta de investigación estructura distintas situaciones que permiten a los participantes hacer inferencias y deducciones en torno a conceptos como regularidad, patrones, cambio, relaciones, proporcionalidad, variación, covariación y por último función lineal. Estos conceptos conservan un sentido progresivo en relación con el concepto de función, esto es, conducen de manera intencionada la comprensión del estudiante a través de situaciones que subyacen al concepto de función.

1.1.5. Comprensión del concepto de función en el plano

Diversas investigaciones hacen referencia a la comprensión del concepto de función, entre ellas encontramos:

Cano (2012) aborda la comprensión del concepto de función a través del marco teórico propuesto por el Grupo Cero de la Facultad de Educación de Harvard, hace especial énfasis en la definición del concepto a partir de una postura epistemológica y cognitivista; el interés de la investigación es el proceso cognitivo realizado por el estudiante en la comprensión de la noción de función. El marco para la comprensión resultó ser un camino útil para posibilitar la comprensión acertada del concepto, porque permitió focalizar el centro de atención en el tópico generativo (la función), construyendo mayores y mejores aprendizajes acerca del tema.

Por su parte Porras (2011) investiga sobre el concepto de función y argumenta su interés por los resultados deficientes en los primeros cursos de matemáticas en la universidad cuando los estudiantes inician el pregrado, sus objetivos principales son caracterizar una estructura teórica conceptual y describir un estado de la cuestión deseable, e identificar problemas y vacíos en el aprendizaje. Para tales fines define lo que él llama una Estructura Básica de Comprensión (EBC), a la cual se propone llegar por medio de la superación de las demandas cognitivas, es decir, actos de comprensión y superación de obstáculos asociados.

Las dos investigaciones anteriores acentúan el interés de la comunidad académica por estudiar el concepto de función y su comprensión, ya que es considerado primordial en los procesos de enseñanza aprendizaje, en la culminación de los estudios de bachillerato e inicio de la universidad, sus resultados comunes concluyen sobre la necesidad de proponer aprendizajes significativos, contextualizados y en especial comprensibles sobre la función, traducidos en procesos matemáticos con mayores aprendizajes.

1.1.6. Teorías y enfoques relacionados en comprensión matemática

La historia de la comunidad educativa se caracteriza por contradicciones y obstáculos para definir el término comprensión matemática, en especial Brownell y Sims (1946) citados en Meel (2003) expresaron la complejidad para definir el término comprensión matemática: “es muy difícil de encontrar o formular una definición técnicamente exacta de comprender o comprensión” (p. 225).

La afirmación anterior es relevante para el desarrollo de esta investigación, en cuanto uno de los interrogantes iniciales que dan origen a este trabajo está relacionado con la pregunta ¿cómo comprenden los estudiantes?, para responder a esta cuestión es necesario visualizar otras inquietudes, ¿cuál teoría o modelo de comprensión permite describir acertadamente la

comprensión del concepto de función?, estas preguntas y otras brindan sustento a lecturas de múltiples marcos destinados a pormenorizar sobre la comprensión matemática.

Resulta entonces pertinente conocer cómo diversos investigadores han asumido el término comprensión matemática. Así, según Meel (2003) antes del reconocido documento publicado por Skemp en 1978, es frecuente encontrar en la literatura apreciaciones que relacionan estrechamente la comprensión con el conocimiento, también la comprensión es asociada con la solución de operaciones algorítmicas y situaciones problemas. Cabe señalar que aún en algunas comunidades académicas pareciese estar presente la idea de que memorizar hechos, datos y/o algoritmos es significado de comprensión, por tal razón las actuales generaciones de educadores deben repensar el acto pedagógico de enseñanza y replantear varias de las formas de aprendizaje que continúan presentes en las aulas.

El trabajo de Skemp en el año 1976 es significativo para la comunidad académica, ya que en este se propone inicialmente la existencia de dos momentos básicos de comprensión: instrumental y relacional; la primera se refiere al empleo de reglas sin razón alguna y la segunda está en dirección de saber que se debe hacer y su justificación o por qué se hace, posteriormente la clasificación evolucionó e incluyó dos categorías más, lógica y simbólica, Skemp en 1982; este hecho marcó un hito en la historia de la comprensión, hasta entonces el término no había sido estudiado con rigurosidad y Skemp logró llamar la atención de la comunidad científica en torno a la comprensión matemática (Meel, 2003).

También es posible encontrar en la comunidad académica la comprensión asociada con la habilidad de las personas para establecer relaciones e identificar aspectos lógicos en situaciones, así como referida a las destrezas necesarias para comprender esquemas, símbolos y representaciones gráficas, esta posición podría ser equiparada con la comprensión relacional

mencionada en el párrafo anterior, es preciso destacar que esta investigación se interesa por analizar la comprensión de los estudiantes evidenciando los diferentes aspectos presentes y exteriorizados en el proceso.

Por lo tanto, las categorías o clasificaciones de la comprensión matemática en instrumental, relacional, lógica y simbólica como propuestas de enseñanza y aprendizaje constituyen diversos marcos, modelos y teorías para describir la comprensión matemática. Gran parte de las posturas son de corte constructivistas, a continuación se describen algunas de las líneas de comprensión:

1.1.6.1. Comprensión y la superación de obstáculos cognitivos. Los obstáculos cognitivos fueron definidos por primera vez por Bachelard en 1938 y se clasificaron en obstáculos genéticos o psicológicos y obstáculos didácticos u epistemológicos, estos últimos presentan una característica esencial: son inevitables ya que el individuo construye sus propias comprensiones de los conceptos matemáticos y los recorridos históricos han confirmado su existencia a través de investigaciones realizadas a los procesos de comprensión de los sujetos (Meel, 2003).

En general las personas construyen esquemas conscientes e inconscientes de pensamiento, estos pueden ser adquiridos genéticamente o transmitidos por la cultura y se convierten en elementos esenciales en los procesos de enseñanza y aprendizaje, en esta investigación se tiene en cuenta las concepciones iniciales de los participantes acerca de qué es la matemática, cuál es su finalidad y sobre todo para qué le sirve a la humanidad.

Por otra parte, Sierpinska (1990b) citada en Meel (2003), define la comprensión a partir de un acto, en sí, un acto relacionado con un proceso de interpretación, es decir, una dialéctica del desarrollo, entre más se elaboren suposiciones y se validen estas, los sujetos pueden aumentar

sus comprensiones. Alude también, el uso del análisis epistemológico de un concepto matemático ayuda a determinar la comprensión lograda por un estudiante a través de la observación sistemática de cómo él percibe el concepto.

Por lo tanto, la comprensión se deriva en las ideas, predisposiciones, preconcepciones, conexiones y esquemas de pensamiento percibidos y no percibidos por el estudiante; la superación de un obstáculo requiere evaluar opciones alternas, facilitar nuevos significados, relacionar las propiedades del concepto y buscar cómo estructurarlos de manera consciente.

1.1.6.2. Comprensión, definiciones e imágenes del concepto. Según Vinner (1991), el estudiante construye un concepto a partir de la recolección de imágenes mentales, representaciones, propiedades relacionadas y atribuidas a un concepto. La imagen del concepto sufre modificaciones continuas y está en estrecha relación con otros conocimientos asociados, de igual manera el estudiante en varios momentos hace uso de imágenes evocadas para reconfigurar sus comprensiones, en general la diferencia entre la nueva imagen y la imagen evocada favorece explicar las respuestas inconscientes de los estudiantes y las comprensiones o incomprensiones de los mismos (Meel, 2003).

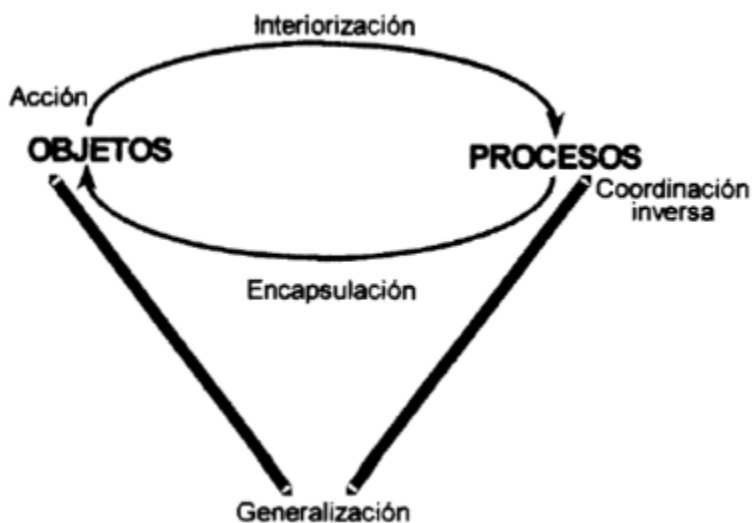
En este sentido la teoría de Vinner puede ser relacionada con algunos de los elementos teóricos propuestos en el modelo de comprensión de Pirie y Kieren, sobre todo por el uso de imágenes y la retrospección, es decir, mirar hacia atrás los aspectos esenciales en el aprendizaje de las personas. Es pertinente entonces para esta investigación considerar las imágenes construidas por los participantes durante las interpretaciones y aprendizajes, en particular el fenómeno evocación o retroceso mediante el cual el estudiante puede comprender una nueva cuestión y por lo tanto justificar su comprensión.

1.1.6.3. Teoría APOE de Dubinsky. De acuerdo con Asiala et al., (1996) citados por Meel (2003) el crecimiento de la comprensión inicia a partir de la manipulación de objetos físicos o mentales primeramente construidos para generar las acciones; las acciones son incorporadas para elaborar procesos que son encerrados para construir objetos. Los objetos pueden ser liberados de nuevo en dirección del proceso que los formaron. Por último, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas.

A continuación, se ilustra el esquema que representa el proceso dinámico de comprensión según la teoría APOE (Acción, proceso, objeto, esquema), en el modelo el elemento más significativo son las acciones, dado que a través de ellas los estudiantes generan diversos procesos con la finalidad de comprender algún concepto matemático.

Figura 1

Esquema representativo del modelo teórico APOE



Nota. Fuente. Meel (2003)

Como se puede observar en la Figura 1 durante la comprensión matemática varios de los elementos del modelo teórico (APOE) cumplen características cíclicas y de relación bidireccional, es decir, por medio de las acciones son reconocidos o identificados inicialmente

los objetos físicos o mentales, seguidamente a través de los procesos de interiorización y encapsulación pueden ser elaborados nuevos objetos y generalizaciones.

1.1.6.4. Comprensión y representaciones múltiples. Es natural que los sujetos a través de la palabra, el lenguaje, la pintura, imágenes y esquemas, representen sus creencias, ideas, concepciones y conocimientos; en ocasiones las representaciones usadas por las personas pertenecen a un conjunto de signos, en otras palabras, a un sistema con jerarquía y reglas, estos sistemas de signos son útiles para favorecer la comprensión de situaciones y fenómenos interesantes para los sujetos.

Para Kaput (1989) citado por Meel (2003), las representaciones múltiples proporcionan al estudiante la posibilidad de asimilar ideas nuevas y complejas, estas pueden relacionarse con los conocimientos previos a través de la redundancia generada por las representaciones. El término representación presenta diversas definiciones, entre ellas cognitiva y perceptiva, computarizada, explicativa, matemática y simbólica, el sistema de representación o sistema simbólico contribuye en la fijación o acomodación de objetos matemáticos enmarcados en un sistema lingüístico y cultural que es compartido por la comunidad.

En coherencia en esta investigación los símbolos son de especial relevancia, porque representan el significado atribuido por los participantes a las situaciones estudiadas y comprendidas; además los símbolos se traducen en escritos, notas, gráficas, tablas entre otras, y determinan en nuestra cultura la manera de comunicarnos, expresar ideas y sentimientos.

En conclusión, la comprensión matemática requiere ciertos procesos cognitivos, ellos imaginación, razonamiento, análisis, visualización y representaciones de objetos físicos o mentales; por ejemplo, históricamente el hombre ha utilizado diferentes formas de representaciones simbólicas en el cálculo numérico para construir variados sistemas de

numeración, todos ellos con una finalidad compartida, brindar una idea de número, cardinal, orden, entre otros aspectos. Así, se espera por medio de las representaciones múltiples redundar en una comprensión acertada, contribuir a la formalización de conceptos y generalización de regularidades del concepto de función.

1.1.6.4.1. Representaciones semióticas. En los procesos cognitivos las representaciones desempeñan un papel fundamental en la comprensión matemática, según Duval (2016) las matemáticas requieren de manera particular de las transformaciones de representaciones semióticas para su aprendizaje y comprensión. Semióticas en el sentido del uso de reglas de formación y manipulación, por ejemplo, el sistema cartesiano (ubicar graficas en el plano). Sobre la transformación de representaciones semióticas Duval plantea dos cualidades principales, tratamientos y conversiones.

Los tratamientos ocurren dentro de un mismo registro y se pueden definir en transformaciones de representaciones en un mismo sistema. Son ejemplos, sumas de fracciones, operaciones con decimales, resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones.

Las conversiones son transformaciones de representaciones que consisten en cambiar de registro conservando el mismo significado del objeto matemático, son ejemplos transformar una ecuación algebraica en su representación gráfica y un enunciado en lenguaje natural a una expresión algebraica; las conversiones generalmente causan mayor dificultad de comprensión en los estudiantes, debido a que es complejo comprender un mismo objeto matemático en dos registros diferentes y con distintas propiedades.

Así, para potenciar los aprendizajes de los estudiantes mediante la comprensión matemática del concepto de función, se hace necesario el empleo de diversas representaciones, con el fin de realizar transformaciones de un registro de salida a uno de llegada, se deben

analizar los diferentes registros de forma general o global variando las cualidades y propiedades del concepto estudiado, en definitiva, la comprensión matemática aparece anexa al estudio y aplicación de varios registros de representación.

1.6.4.2. Representaciones ejecutables. Según Moreno y Waldegg (2002), los sistemas ejecutables de representación se refieren a aquellos medios por los cuales el hombre realiza de manera virtual una acción que antes era primitiva, por ejemplo, graficar una función. Esto es, a través del software en la construcción de la función el estudiante incide de manera indirecta, en otras palabras, por medio de la representación ejecutable la relación con el objeto matemático cambia, en el sentido de que antes tal vez preponderaba el aspecto procedimental y en este momento cobra relevancia la interpretación y la comprensión del proceso elaborado.

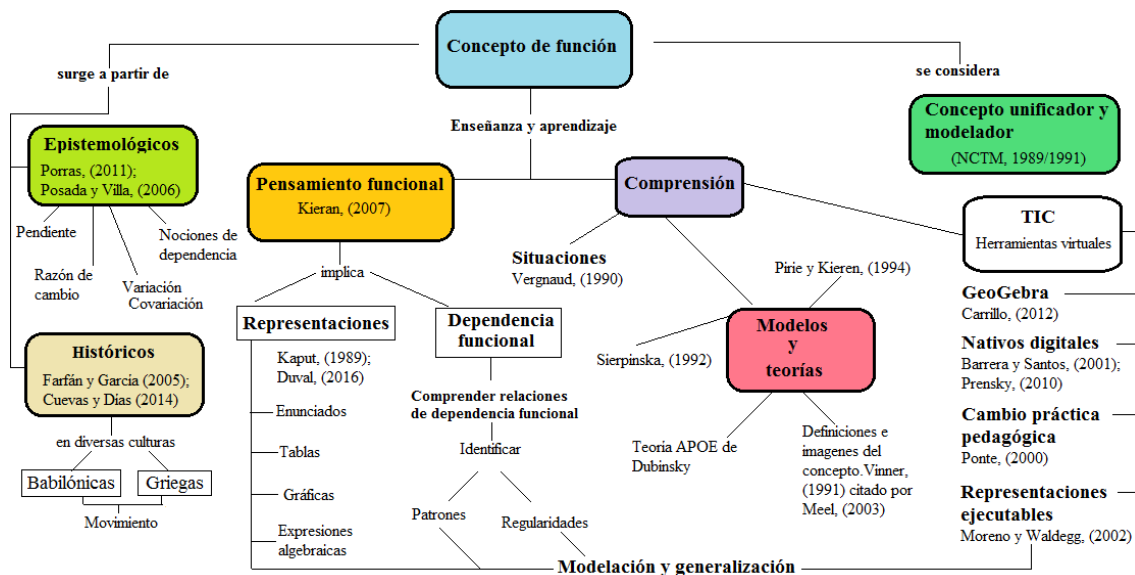
Moreno y Waldegg (2002), cuestionan además la tradición de enseñar matemáticas a partir de la fluidez de algoritmos y sugiere pasar a una fluidez representacional en la cual el estudiante abarque múltiples modos de representación y las comprensiones puedan ser generalizadas.

De lo anterior se justifica que valerse de las TIC prevé representar la función de forma dinámica, haciendo variaciones a algunos parámetros de la función, así como estudiar comportamientos y características, esto con el propósito de describir la comprensión realizada por los estudiantes en torno al concepto de función. En coherencia con Moreno y Waldegg (2002), el propósito de utilizar un ejecutable virtual, radicó en exponer y construir con los estudiantes el concepto de función a través de representaciones tabulares, gráficas y expresiones algebraicas o analíticas.

El siguiente esquema conceptual ilustra algunos de los elementos relevantes en la revisión de la literatura, a partir de la red de relaciones entre conceptos, teorías y algunos de los autores es posible inferir la estructura básica teórica que fundamenta esta investigación.

Figura 2

Mapa conceptual acerca de la revisión de la literatura



Nota. Fuente elaboración propia.

1.2. Planteamiento del problema

A través de la experiencia de enseñanza y aprendizaje del maestro de matemáticas, se puede notar con cierta particularidad como a los estudiantes se les dificulta comprender algunas nociones y conceptos propios del área.

Así, durante el proceso pedagógico de enseñanza del concepto de función en la Institución Educativa Rural Santa María del municipio El Carmen de Viboral se evidencian dificultades en los estudiantes para realizar procesos de razonamiento relacionados con la identificación de patrones, cambios de variables, características cualitativas del concepto de función y regularidades de ciertas situaciones prácticas. A la vez que se evidencia la presencia de

obstáculos para llevar a cabo comprensiones generalizadas, a través de la utilización de diferentes registros de representación y la vinculación de relaciones entre variables en la interpretación de situaciones. Además, los estudiantes presentan dificultades en sus procesos cognitivos para concebir la función como una herramienta apropiada para modelar diversas situaciones.

En el sentido anterior la comprensión del concepto de función es reducida a usar un simple algoritmo, ingresar valores a la variable X y calcular su correspondiente en Y ; de esta forma la comprensión del concepto de función adquiere poco significado y genera desmotivación su aprendizaje.

En coherencia Kilpatrick (1998) ha señalado que, las matemáticas se han convertido en un campo amplio de investigación, principalmente por el papel crucial que juegan para los aprendizajes posteriores, la vida adulta y sobre todo por las grandes dificultades que presenta para los estudiantes su aprendizaje.

De esta manera las flexiones en torno al papel del maestro-investigador llevan a repensar cuáles deben ser las acciones y estrategias pertinentes en el aula, para procurar aprendizajes de los estudiantes en los conceptos que presentan mayores dificultades y son esenciales para la práctica matemática, dado que las actividades propuestas en el aula juegan un papel fundamental en las comprensiones de los estudiantes. También Kilpatrick (1998) considera relevante el papel del maestro en cuanto que: “[...] los investigadores han observado que el contexto en el cual se desarrolla la clase, es esencial. En efecto, se ha visto que los programas juegan un papel muy importante, y también el tipo de actividades que se realicen con los estudiantes” (p. 57).

Como se indicó en el párrafo anterior, el contexto escolar, los programas y las actividades con las cuales los maestros elaboran conocimientos y propician diferentes procesos de

pensamiento en los ambientes escolares son de suma importancia; surge así la necesidad de que los docentes lleven a las clases múltiples formas de enseñanza, entre ellas diferentes a exponer contenidos, tomar nota por parte de los estudiantes y luego presentar sustentaciones. Es sabido que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es frecuente que los maestros hagan uso de distintos recursos y fuentes teóricas. No obstante, en las últimas décadas las TIC toman cada vez mayor fuerza, siendo una alternativa a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Añádase además que Rico (1998) plantea, se ha realizado un debate y una crítica fuerte a la finalidad a veces equivocada, falseada y simplificada, que tienen o que han tenido las matemáticas en la enseñanza tradicional. En particular, la crítica se dirige en dirección a la memorización de hechos, hacia la exclusiva ejercitación de destrezas, puesto que con esa orientación parece que el conocimiento matemático se planteara alejado del medio cultural, de los intereses y la afectividad del estudiante.

Como consecuencia, se obtiene una enseñanza tradicional que privilegia principalmente la repetición de datos con poco sentido y el uso de procesos algorítmicos y rutinarios, en los cuales el estudiante acostumbra utilizar modelos establecidos por el maestro y la matemática es concebida como una disciplina estática y acabada. Subyacente a esta situación se encuentran las comprensiones inconclusas del concepto de función, estas dificultan el aprendizaje e interés por las matemáticas, especialmente no favorecen y obstaculizan el desarrollo de conceptos con significado y validez tales como relación, dependencia, variación y otros.

De acuerdo con Duval (1988) citado por Gómez, et al., (2017), la comprensión de un concepto matemático descansa en la coordinación de al menos dos de sus registros de representación y esta se manifiesta en la rapidez y espontaneidad de la actividad cognitiva de

conversión, así encontramos que un elemento fundamental para la comprensión es el uso de diferentes registros de representación.

Surge entonces el interés por describir las comprensiones del concepto de función de los estudiantes de la Institución Educativa Rural Santa María del municipio de El Carmen de Viboral, en relación con el análisis de diversas situaciones abordadas por medio de representaciones verbales, gráficas, algebraicas y el uso de un ejecutable virtual. Se presume también a partir de las situaciones y uso de las TIC, generar estrategias para fortalecer procesos de pensamiento y aprendizajes significativos que posibiliten construir esquemas y crecer en la comprensión del concepto de función.

Llegar a la comprensión del concepto de función implica proponerlo en el aula a partir de sus fundamentos epistemológicos e históricos, haciendo uso de los términos que lo originan, esto es, aquellos que están en los cimientos y base del concepto. Por otro lado, es necesario incluir otras formas de aprendizaje, las cuales resalten relaciones presentes en el concepto, múltiples formas de representación, y en sí, el significado profundo de lo que es la función matemática en el plano cartesiano y sus representaciones análogas.

Las razones expuestas justifican la pertinencia de describir y caracterizar la comprensión de los participantes, en sus procesos de pensamiento relacionados con el aprendizaje del concepto de función, cuando estos utilizan diferentes representaciones y se profundiza con la aplicación de un ejecutable virtual. De igual manera plantean desafíos para el maestro que enseña matemáticas en la Institución Educativa Rural Santa María, de un lado debe discernir por qué a los estudiantes se les dificulta la comprensión del concepto de función, considerando que es un elemento básico propuesto en los Estándares de Competencias y Lineamientos Curriculares

del Ministerio de Educación Nacional, y de otro, proponer herramientas y estrategias de enseñanza aprendizaje que posibiliten analizar la problemática.

En conclusión, esta propuesta inicia en la base del concepto, en la epistemología que lo fundamenta, utiliza situaciones reales e hipotéticas en el desarrollo de la comprensión del concepto de función involucrando diversos registros de representación y recursos tecnológicos para la exploración y/o aplicación de las situaciones propuestas.

1.3. Pregunta de investigación

El análisis de la comprensión del concepto de función en estudiantes y algunas de las formas de enseñanza del maestro posibilitan repensar el aprendizaje en el aula. Así, por tal motivo se presenta como pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Rural Santa María del municipio El Carmen de Viboral, el concepto de función mediante diferentes representaciones de situaciones y el uso de un ejecutable virtual?

El interrogante anterior direcciona esta investigación a través de la descripción de los aprendizajes de los participantes y la reflexión sobre la práctica académica del maestro en formación, responder dicha cuestión implica el alcance de los resultados propuestos por medio de los siguientes objetivos.

1.3.1. Objetivo general

Analizar la comprensión del concepto de función en los participantes de la Institución Educativa Rural Santa María, a partir del uso de diversos registros verbales, numéricos, tabulares, gráficos y algebraicos; en situaciones orientadas con guías y mediadas con un ejecutable virtual.

1.3.2. Objetivos específicos

Describir la comprensión del concepto de función por parte de los participantes de noveno grado, a través de los primeros cuatro niveles propuestos en la teoría de Pirie y Kieren.

Distinguir los elementos evidenciados en procesos de comprensión del concepto de función por los estudiantes de noveno grado.

Capítulo 2: Marco Teórico

Este capítulo expone el marco teórico que delimita la investigación, en el cual se presentan algunos elementos de referencia de la teoría de comprensión de los investigadores Pirie y Kieren (PK), además de ciertas características del modelo teórico y la descripción de los niveles propuestos por los investigadores en relación con el concepto de función.

2.1. Teoría de la comprensión de Pirie y Kieren (PK)

De acuerdo con la revisión de la literatura y el acercamiento a ciertas teorías para la comprensión matemática, además de antecedentes del grupo de investigación Educación Matemática e Historia de la Universidad de Antioquia y la Universidad Eafit (Edumath) sobre investigaciones en torno a la comprensión y en coherencia con los intereses del investigador, se asume una teoría que permite analizar la comprensión del concepto de función en los estudiantes. En este sentido el marco teórico para la comprensión de los investigadores norteamericanos Susan Pirie y Thomas Kieren, resultó ser un modelo teórico con suficientes elementos, características y cualidades para describir la comprensión.

Pirie y Kieren citados en Meel (2003), plantean interrogantes pertinentes para buscar respuestas satisfactorias ante el fenómeno de la comprensión matemática, algunas son, ¿qué implica la comprensión matemática en sí misma?, consideran también posible brindar respuesta a preguntas formuladas por Sierpinska (1990), ¿la comprensión es un acto, una experiencia emocional, una forma de conocer o un proceso intelectual?, ¿existen niveles, grados o tipos de comprensión?, ¿se puede medir la comprensión y cómo?

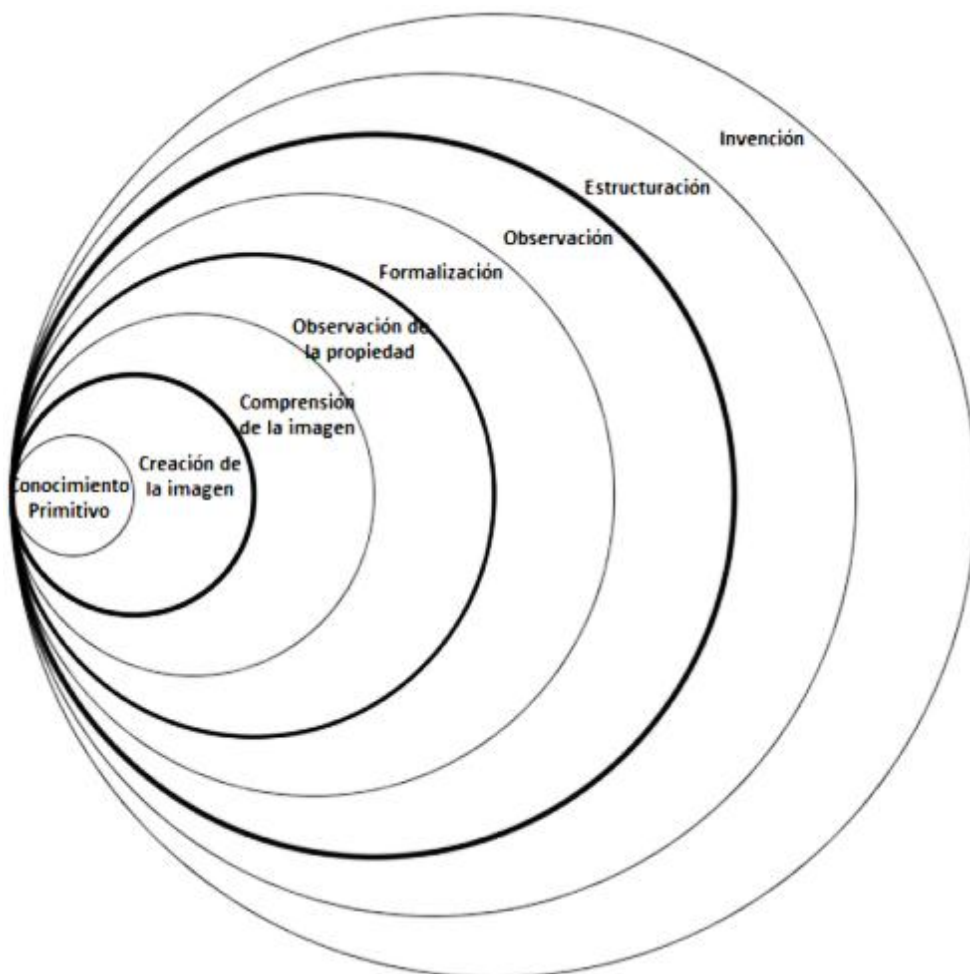
En la teoría los investigadores Pirie y Kieren (1994) definen la comprensión como un proceso cognitivo, estable pero no lineal y recursivo, es decir, la comprensión crece y puede ser

caracterizada por ciertos niveles, sin embargo, el sujeto constantemente re-elabora su comprensión y actúa con elementos de diversos niveles “estados”

El esquema que representa la teoría de PK, está constituido por una sucesión de círculos o capas “anidadas”, cada capa exterior contiene las anteriores y esta a su vez pertenece o encaja en las siguientes; estas propiedades justifican su carácter dinámico y global, a continuación, se relaciona el modelo representativo de la teoría.

Figura 3

Modelo para el crecimiento de la comprensión matemática



Nota. Fuente. Meel (2003)

La comprensión es entonces un proceso dinámico, en continua transformación y con características como replegarse o redoblar, también llamado por los investigadores *folding back* (Pirie y Kieren, 1994). A través de este mecanismo el estudiante retoma aprendizajes ya establecidos para construir nuevas conexiones con la finalidad de ser traducidas en comprensiones más elaboradas, es un suceso en el cual el sujeto regresa a un nivel de conocimiento anterior para comprender un elemento nuevo, es decir, es un proceso natural

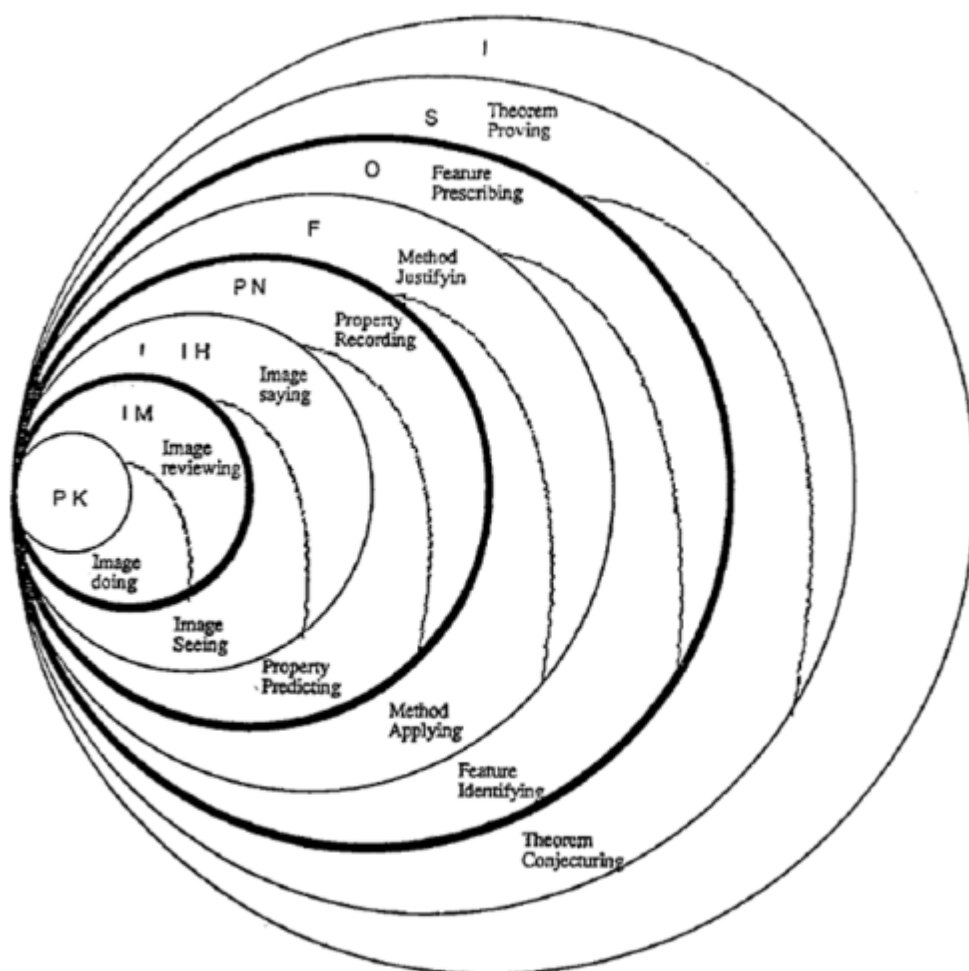
realizado por el inconsciente de la persona y se convierte en una herramienta de retrospección y reacomodación de diferentes conocimientos.

Así, en el transcurso de la comprensión de un concepto matemático un estudiante puede recurrir a construcciones de imágenes previamente elaboradas, valerse de estas le permite caracterizar, concientizar y formalizar lo que está aprendiendo, en este proceso la comprensión permanece en continua transformación y cambia cuando se modifican los niveles de comprensión; de hecho, cada nivel se encuentra contenido dentro de otros niveles.

Otra característica esencial de la teoría es la complementariedad entre la acción y la expresión, según Pirie y Kieren (1994), cada nivel de comprensión además del conocimiento primitivo está constituido por el nexo acción y expresión. Esta dualidad permite al estudiante el proceso de comprensión matemática, a menudo también en dirección opuesta, es decir, la expresión seguida de la acción. En particular para los niveles creación de la imagen, comprensión de la imagen y observación de la propiedad, los investigadores definen las siguientes complementariedades: hacer y revisar, ver y expresar, predecir y registrar. La Figura 4 representa los respectivos niveles de comprensión y las complementariedades entre ellos.

Figura 4

Complementariedad en los niveles de comprensión



Nota. Fuente. (Pirie y Kieren 1994, p. 176).

El crecimiento de la comprensión ocurre actuando inicialmente, seguida de la expresión; por lo tanto, en cualquier nivel o estrato las acciones y el desempeño son manifestaciones de las comprensiones previas de los estudiantes, estas se llevan a cabo con el propósito de llegar a la expresión. La acción incluye procesos y registros físicos, por su parte la expresión está relacionada con hacer evidente a los demás o a uno mismo el detalle de los procesos. De esta forma es importante generar espacios en el aula en los cuales los estudiantes verbalicen sus

aprendizajes, expliquen y diserten con sus compañeros para profundizar y crecer en las comprensiones.

2.2. Niveles de comprensión

A continuación, se describen los niveles o estratos expuestos en el modelo representativo de la teoría de comprensión, estos sirven como base para analizar el proceso de pensamiento realizado por los participantes a través de acciones cognitivas durante la comprensión y a la vez permiten describir la trayectoria recorrida por los estudiantes (Meel, 2003).

2.2.1. Primer nivel: Conocimiento primitivo

Se refiere al conocimiento base de los estudiantes, en otras palabras, a los saberes previos, el conocimiento intuitivo, las ideas y los argumentos iniciales con los cuales un sujeto actúa y expresa en primeras instancias. En general pocas veces un investigador tiene a total disposición el conocimiento primitivo de un estudiante, solo es posible realizar acercamientos y pre-visualizaciones del punto de partida. Según Pirie y Kieren (1989) “[...] primitivo no implica matemáticas necesariamente de bajo nivel, sino un punto de partida para el crecimiento de cualquier comprensión matemática particular” (p. 8).

2.2.2. Segundo nivel: Creación de imagen

Implica que el estudiante realice “algo” de forma mental, gráfica o simbólica para tener la idea de un concepto, exige además desarrollar conexiones entre conocimientos anteriores y símbolos, no necesariamente se refiere solo a imágenes pictóricas siendo estas importantes, son pertinentes además las representaciones realizadas en la psique del sujeto y sus pensamientos.

2.2.3. Tercer nivel: Comprensión de la imagen

Las imágenes asociadas con una actividad se reemplazan por una sola imagen mental, es decir, la comprensión de algún concepto matemático crece a partir de la construcción sucesiva de

imágenes, estas posibilitan atribuir patrones o regularidades a la situación estudiada. Una evidencia de cambio en la comprensión podría ser la no recurrencia a una imagen pictórica, por el contrario, si a la adquisición de imágenes mentales.

2.2.4. Cuarto nivel: Observación de la propiedad

El estudiante analiza la imagen pictórica o mental, la manipula y la caracteriza según sus atributos, además tiene la posibilidad de realizar distinciones, conexiones y combinaciones con otras imágenes, en este nivel el sujeto empieza a estructurar la comprensión con el propósito de iniciar formalizaciones de los aprendizajes.

2.2.5. Quinto nivel: Formalización

El estudiante es capaz de conocer las propiedades de las imágenes u objetos mentales, para establecer grupos con características comunes y lograr realizar definiciones matemáticas completas, en este nivel el estudiante define métodos para resolver situaciones.

2.2.6. Sexto nivel: Observación

Permite utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona, el estudiante es capaz de observar, estructurar y organizar los pensamientos personales y sus ramificaciones; igualmente puede realizar verbalizaciones sobre el concepto formalizado utilizando teoremas e identificando patrones que ayudan a hacer consciente el proceso de comprensión.

2.2.7. Séptimo nivel: Estructuración

Sucede cuando el sujeto a través de un sistema axiomático explica las interrelaciones de dichas observaciones, además logra plantear preguntas, ideas subyacentes y ejemplos que posibilitan la interconexión de varias teorías y su explicación. En este nivel el estudiante logra conectar las observaciones formales como una teoría y busca justificarlas por medio de argumentos lógicos.

2.2.8. Octavo nivel: Invención

En este punto el estudiante logra liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y tiene la posibilidad de plantear preguntas novedosas que tendrán por defecto la creación de un concepto nuevo (Meel, 2003).

2.3. Teoría de comprensión de PK en relación al concepto de función

Los niveles y características descritos anteriormente permiten analizar el proceso de comprensión realizado por un estudiante durante el aprendizaje de un concepto matemático, así, esta investigación describe la comprensión del concepto de función a partir de los cuatro primeros niveles propuestos en la teoría de PK, en el apartado siguiente se profundiza acerca de cómo son asumidos estos niveles en esta investigación y se complementan con los respectivos descriptores para cada nivel.

Surge así el interés de estudiar el concepto de función a partir de los conocimientos previos de los participantes, a través de situaciones diseñadas para la exploración de nociones de variación, cambio y relaciones entre variables. En ellas la creación de imágenes y diferentes representaciones de la función tal vez posibiliten la descripción de la comprensión del concepto, por medio de la caracterización de las propiedades, atributos y formas de la función. El propósito del estudio es entonces denotar la comprensión del concepto de función, durante el proceso de pensamiento y aprendizaje de los estudiantes, empleando la teoría de PK en sus primeros cuatro niveles.

2.4. Niveles de comprensión y descriptores asociados al concepto de función

A continuación, se presentan los niveles de comprensión asociados al concepto de función, además se plantean los respectivos descriptores para analizar la comprensión de los estudiantes. Los descriptores están enmarcados en los estratos iniciales de la teoría de PK y

permiten puntualizar los procesos estudiantiles de pensamiento durante el desarrollo de las situaciones.

En esta investigación se incluyen los primeros cuatro niveles o estratos propuestos en la teoría de Pirie y Kieren (1989), con la finalidad de describir la comprensión de los estudiantes del concepto de función; para retro-alimentar el análisis se tienen en cuenta además las diferentes representaciones propuestas por Duval (2016), estas las realizan los estudiantes utilizando diversos registros y facilitan la aprehensión de los conceptos matemáticos.

Los descriptores son denotados con la letra D y un número para su identificación; además se incluye un guión seguido de la letra N que corresponde al nivel y un dígito para enunciar el estrato. Por ejemplo, el descriptor D1-N1 corresponde al número uno del nivel uno y el D2-N2 corresponde al descriptor 2 del nivel o estrato 2, según la teoría de PK (Pulgarín, 2015).

2.4.1. Nivel uno, conocimiento primitivo

El conocimiento primitivo representa para esta investigación aquellos aprendizajes a priori que evidencian los estudiantes, se consideran insumos principales para orientar el inicio o continuación de las actividades y pueden estar representados en escritos, expresiones verbales, figuras, gráficos o símbolos. También en esta investigación conocimiento primitivo hace referencia a las ideas iniciales, eventualmente sin justificación que los estudiantes ofrecen, a los prerrequisitos numéricos de operaciones, conocimientos previos de matemáticas, ensayo y error, soluciones alternativas y también refiere a argumentos en el sentido de una solución.

En tanto que se desea conocer la comprensión del concepto de función ubicado en el currículo matemático escolar de grado noveno, a continuación, proponemos unos descriptores que podrían complementar la definición operativa que vimos antes. El propósito de los

descriptores es identificar el conocimiento inicial o ideas primarias con las cuales los estudiantes abordan la discusión de diferentes situaciones. Algunos descriptores son:

N1-D1: Identifica regularidades y patrones en situaciones que establecen correspondencias y/o relaciones a partir de la estructura del concepto de función.

Por medio de este descriptor se pretende describir las acciones realizadas por el estudiante para reconocer regularidades numéricas y/o geométricas en situaciones y enunciados.

N1-D2: Utiliza el lenguaje natural y enunciados para representar la comprensión de situaciones ligadas al concepto de función.

Este ítem describe los enunciados y oraciones preliminares que los estudiantes utilizan para acercarse a las situaciones de las guías. Son pertinentes los párrafos escritos y conversaciones.

N1-D3: Reconoce diferentes variables presentes en las situaciones vinculadas al concepto de función.

Este descriptor requiere que el estudiante señale cantidades y magnitudes. Las cantidades corresponden a unidades medibles y contables, estas pueden ser constantes o variantes. Algunas magnitudes relacionadas son tiempo, peso y distancia.

N1-D4: Identifica el vínculo de la proporcionalidad entre las variables presentes en situaciones asociadas al concepto de función.

A través de este descriptor se observa la forma en que el estudiante especifica como las magnitudes, cantidades y/o variables aumentan o disminuyen de acuerdo a la situación.

2.4.2. Nivel dos, creación de la imagen

En el segundo nivel la “creación de imagen” significa el inicio de la conceptualización, para Pirie y Kieren (1989), es el primer proceso recursivo de los estudiantes, “La primera

retrospección ocurre cuando el estudiante comienza a formar imágenes [...]” (p. 8). Este nivel se manifiesta por medio de diversas representaciones y estimula la aparición del siguiente nivel, la comprensión de la imagen.

Para este nivel los estudiantes deben percibir, asimilar ideas, representar sus pensamientos, modificar y hacer uso de símbolos e imágenes icónicas; la creación de la imagen es uno de los elementos fundamentales en la comprensión de los conceptos, porque permite la estructuración de ideas nuevas a partir de conexiones ya establecidas. Algunos descriptores son:

N2-D1: Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función.

El propósito de este descriptor es observar de qué modo los estudiantes generan ideas de secuencias, identifican cierto orden en la situación, frecuencias y/o repeticiones.

N2-D2: Visualiza a través de tablas las variables, datos e información involucrada en relación al concepto de función.

Este descriptor analiza cuando el estudiante organiza su información, la simplifica y relaciona en filas y columnas. Las tablas facilitan la observación de variables y la posibilidad de relacionarlas, además a partir de las tablas es posible generar gráficas, generalizaciones y modelos matemáticos.

N2-D3: Describe relaciones de dependencia entre variables.

Este descriptor juzga las relaciones de dependencia entre variables propuestas por los estudiantes, esto es, señala la forma a través de la cual el estudiante vincula las variables.

N2-D4: Representa la proporcionalidad de una situación mediante multiplicaciones y divisiones.

Este descriptor caracteriza las operaciones simbólicas realizadas por los estudiantes para relacionar de manera implícita ideas de proporcionalidad; algunas consideradas son “el doble, el triple, la mitad”.

2.4.3. Nivel tres, comprensión de la imagen

En este nivel los estudiantes requieren agrupar imágenes, asociar ideas aparentemente aisladas y establecer relaciones entre ellas; además deben elaborar distinciones entre imágenes y determinar propiedades específicas con el propósito de crear imágenes mentales. De acuerdo con Pirie y Kieren (1992), citados en Londoño, et al., (2017) “El desarrollo de tales imágenes mentales que no son más que imágenes orientadas por un proceso, libera al estudiante de las matemáticas a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares” (p. 9).

Es decir, en este nivel es necesario que el estudiante identifique elementos que se repiten de manera predecible, recurrente o varían en una situación. La aprehensión de la imagen implica hacerse una idea de algo, desencadena comprensiones que posibilitan deducciones cada vez mayores para ayudar a la transformación gradual de la comprensión. Son descriptores para el nivel.

N3-D1: Agrupa las características del patrón y establece conclusiones en situaciones que involucran relaciones en torno al concepto de función.

Este descriptor informa cómo el estudiante argumenta sobre las regularidades observadas en el patrón y justifica con criterios la relación estructural entre la disposición, composición o configuración determinada.

N3-D2: Utiliza gráficas en el plano cartesiano para representar diversas situaciones en relación a la comprensión del concepto de función.

Este descriptor analiza la comprensión de la covariación cuando el estudiante usa gráficas; en estas se relacionan cantidades y/o magnitudes. Las gráficas son relevantes porque permiten observar el crecimiento o decrecimiento de las variables.

N3-D3: Comprende relaciones de cambio entre variables.

Este descriptor describe la forma en que el estudiante justifica su comprensión del aumento o disminución entre variables.

N3-D4: Utiliza la regla de tres para comprender la proporcionalidad en situaciones asociadas con el concepto de función.

Este descriptor refiere planteamiento de reglas de tres por los estudiantes y las operaciones realizadas.

2.2.4. Nivel cuatro, observación de la propiedad

El cuarto nivel se compone de la caracterización de los atributos de imágenes, de la asociación y consolidación de una imagen mental general para describir la situación, se espera aquí que los estudiantes puedan establecer patrones y regularidades entre las diferentes representaciones propuestas. Pirie y Kieren (1994) expresan: “Un cuarto nivel o modo de comprensión ocurre cuando el estudiante manipula o combina aspectos de las imágenes para construir propiedades relevantes a la situación específica” (p. 170).

Es decir, el cuarto nivel de comprensión exige unir y complementar las particularidades de lo que se desea comprender; además de pensar en forma consciente acerca de las propiedades observadas, abstraer cualidades comunes y construir definiciones de los conceptos matemáticos, con significado y validez. En este nivel son importantes las representaciones por medio de sistemas simbólicos y signos, a continuación se declaran los descriptores para este nivel.

N4-D1: Deduce expresiones para generalizar las regularidades relacionadas con el concepto de función, a partir de la identificación de patrones en situaciones que involucran esquemas geométricos y numéricos.

Este descriptor describe los procesos de pensamiento para analizar y representar patrones en situaciones de variación respecto de aquello que cambia y lo que permanece invariante.

N4-D2: Representa por medio de expresiones algebraicas la comprensión del concepto de función.

En los niveles anteriores el estudiante ha comprendido que en ocasiones algunas tablas y gráficas pueden representar de manera implícita el concepto de función. Este descriptor señala la comprensión de la función a través de generalizaciones y formalizaciones por medio de modelos y ecuaciones.

N4-D3: Comprende relaciones de covariación ente variables.

En los descriptores de los niveles anteriores se ha considerado ha considerado cómo el estudiante reconoce la dependencia y el cambio entre variables, se espera en este punto describir las acciones realizadas por los estudiantes para argumentar procesos de covariación conjunta entre variables, es decir, en relación de los cambios de una variable respecto de la otra.

N4-D4: Reconoce constantes de proporcionalidad por medio de inferencias a partir de relaciones entre variables, con respecto al concepto de función.

Se pretende a través de este analizar la interpretación de la proporcionalidad y la idea de razón de cambio, por parte del estudiante.

Capítulo 3: Marco Metodológico

Corresponde a este capítulo la descripción del método utilizado en la investigación, trata el paradigma cualitativo, el estudio de caso, las técnicas de registro de información entre ellas las guías resueltas por los participantes, la observación y la entrevista. El propósito es desarrollar una investigación de tipo cualitativa, en la cual las características del objeto o situación estudiada corresponden a la descripción del fenómeno; esta investigación utiliza el método estudio de caso para comprender las particularidades y complejidades de la comprensión del concepto de función.

3.1. Paradigma cualitativo

El enfoque de esta investigación es fenomenológico, es decir, su interés es describir el acontecimiento de la comprensión matemática durante el aprendizaje del concepto de función, así pretendió analizar el crecimiento de la comprensión a través de los procesos de pensamiento de los estudiantes, a partir de la solución de situaciones reales e hipotéticas usando diversas representaciones. Para Sánchez (1998) el enfoque fenomenológico requiere:

De la reflexión crítica del investigador a partir de los datos empíricos, del desarrollo de la observación y reflexión sobre la situación estudiada. Así como acudir a la lógica de la interpretación, es decir, descubrir el significado y develar los mensajes ocultos o esenciales en lo no aparente. (p. 103)

Además, es importante tener en cuenta la experiencia vivida por los participantes en el transcurso de la comprensión del concepto de función, con el propósito de descubrir particularidades en los casos estudiados y establecer comparaciones a partir de semejanzas y diferencias entre los procesos cognitivos de los estudiantes.

Según Stake (1999), la investigación cualitativa es ante todo una forma de interpretar la realidad de un suceso, evento o situación, por medio de la cual se describe y se hace comprensible el fenómeno estudiado, se basa en los aciertos del investigador y en ella se develan las voces de los sujetos en ocasiones objetos de estudio, con sus contradicciones, singularidades y peculiaridades.

Ciertamente hacer investigación cualitativa requiere de un trabajo activo y dinámico, estas condiciones hacen indispensable un análisis riguroso de datos, en este sentido es necesario realizar preguntas sutiles, observaciones conscientes y búsqueda constante de respuestas a las preguntas planteadas. Además, es un proceso en el cual se analiza la convergencia de los datos, haciendo visible lo invisible, reconociendo lo importante en aquello que parece insignificante, vinculando datos, hechos y teorías aparentemente inconexas; es un camino en el cual la conjetura y la verificación deben estar presentes, y a la postre es un proceso innovador de organizar datos, buscando que el diseño analítico parezca simplemente obvio.

Al respecto Cerda (2011), plantea tres elementos necesarios en el desarrollo de la investigación cualitativa, credibilidad, transferibilidad o aplicabilidad y la confirmabilidad. El primer criterio está referido a la validez y a la certeza de los resultados, estos son confiables a partir de observaciones persistentes y el análisis de datos por medio de la triangulación. La transferibilidad o aplicabilidad determina la posibilidad de replicar el estudio o investigación en otros contextos, es un criterio que evidencia el rigor metodológico del trabajo investigativo. Y el tercer elemento es la confirmabilidad, se refiere a la posibilidad de otro investigador para seguir la ruta original.

Por su parte Morce (2003), define cuatro procesos cognitivos fundamentales para todos los métodos de investigación cualitativa: comprender, sintetizar, teorizar y re-contextualizar;

estos cuatro procesos deben concurrir la mayoría de las veces de forma secuencial, no es posible sintetizar sin antes comprender la situación, análogamente no se puede teorizar sin antes haber hecho afirmaciones generales sobre los participantes o fenómeno estudiado y la re-contextualización no puede ocurrir hasta que el fenómeno, conceptos o modelos de la investigación no se hayan desarrollado satisfactoriamente.

3.1.1. Comprehender

Para Fiel y Morce (1985), citados en Morce (2003), comprender todo sobre un fenómeno estudiado, tema o lugar, exige buscar datos, información relevante, leer investigaciones clásicas y recientes, así como otras menos reconocidas, tener la capacidad de identificar los conceptos y perspectivas de otros investigadores y adquirir la agudeza para reconocer cuando un dato es nuevo en la investigación.

Además, para llegar a caracterizar cómo comprenden los estudiantes el concepto de función el investigador debe contar con los suficientes datos para redactar una descripción coherente, elaborada y completa; también debe aprender de manera considerable sobre el fenómeno o la experiencia de los participantes, así el investigador requiere comprender sin juzgar y asumir una actitud de indagación activa.

3.1.2. Sintetizar

Para sintetizar es necesario ir de lo particular a lo general, analizar un caso, luego otros similares, interpretar, vincular datos con conceptos, vislumbrar relaciones, establecer hipótesis y comprobar hallazgos. Se refiere a la habilidad del investigador para concentrar la información del fenómeno y de las experiencias o de los participantes.

En esta investigación se analizan las acciones particulares de los estudiantes en sus procesos de pensamiento, con el propósito de caracterizar la manera como los diferentes casos comprenden el concepto de función.

3.1.3. Teorizar

Morce (2003) comenta, la teoría se construye a través de la comprensión y síntesis de los datos, esta brinda organización a la información y aplicabilidad a lo encontrado, llegar a la teoría implica especular y conjeturar, elegir, verificar y desaprobar, es maniobrar constantemente diseños teóricos manipulables hasta obtener el óptimo. Por lo tanto, teorizar es el trabajo real de la investigación cualitativa, en su transcurso se elaboran explicaciones alternas, estas se comparan con los datos, se vinculan con los hechos y se busca una teoría que los explique de manera simple, útil y pragmática.

3.1.4. Re-contextualizar

Según Morce (2003), en la re-contextualización la teoría debe ser generalizada y usada en otros ambientes, al margen de la nueva teoría se encuentra la preexistente, el desafío es colocar en conversación y sintonía los nuevos hallazgos, retroalimentarlos unos a otros y hacer que las nuevas contribuciones alimenten el campo disciplinar. Ciertamente la re-contextualización es la indiscutible fuerza de la investigación cualitativa, con ella la teoría, el principal producto de la investigación se puede aplicar a otras localidades, comunidades y poblaciones.

El interés de esta investigación es generar descripciones de las comprensiones de los estudiantes a partir de las situaciones propuestas en el aula, con el propósito de evidenciar algunos elementos característicos durante la comprensión del concepto de función en el plano por parte de los participantes. De esta forma se pretende indicar sobre la comprensión del concepto de función a través de procesos como sintetizar y teorizar, para este fin el estudio de

caso posibilita estudiar situaciones particulares, que luego son comparadas con otras y permiten construir entonces una idea general del evento observado en el grupo.

3.2. Estudio de caso

Como método trabajado en esta investigación, el estudio de caso examina y analiza en profundidad la interacción de los factores que producen cambio y crecimiento en los casos estudiados. Utiliza información empírica, cualitativa y cuantitativa, suele usar entrevistas, cuestionarios, diarios, autobiografías, documentos personales, colectivos e informes.

De acuerdo con Stake (1999), el estudio de caso instrumental pretende entre algunos aspectos, plantear y/o refinar una teoría para brindar elementos de explicación a un fenómeno, permite generalizar a partir de un conjunto de situaciones propias y específicas; es adecuado en las situaciones en las cuales el investigador puede escoger los participantes según sus criterios, intereses, posibilidades y tiempo de intervención.

Cabe señalar que el estudio de caso desarrollado en esta investigación es instrumental, porque pretende analizar el fenómeno de la comprensión del concepto de función en los estudiantes; el caso se utiliza para describir las particularidades de los participantes señalados, la elección de los casos típicos y atípicos tienen como interés generalizar algunos aspectos importantes en el aprendizaje de los estudiantes.

3.3. Contexto y participantes

La Institución Educativa Rural Santa María está ubicada en la zona rural del municipio El Carmen de Viboral, aproximadamente a una distancia de 5 kilómetros del casco urbano por vía con asfalto, los estudiantes pertenecen a las veredas del corregimiento Aguas Claras y zonas urbanas de los municipios de la Ceja, El Carmen de Viboral y Rionegro. La Institución tiene

aproximadamente 1000 estudiantes distribuidos en 6 sedes rurales, cerca de un 20% de los estudiantes llegan de cabeceras municipales aledañas y los demás de las zonas rurales.

El Establecimiento Educativo tiene por modalidad bachiller académico, los estudiantes graduados tienen la posibilidad de presentarse a la Universidad de Antioquia (Seccional Oriente) por su cercanía, cuenta además con otras opciones de educación superior como la Universidad Católica de Oriente, Politécnico Jaime Isaza Cadavid, entre otras, estas razones han motivado en la Institución acciones de docentes, directivos y comunidad académica en general para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Un elevado porcentaje de las familias pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3, en general los padres trabajan en floristerías y fincas, por lo tanto, algunas familias cambian de residencia con regularidad. Varios de los acudientes tienen estudios solo en el nivel primaria, bachillerato y algunos estudios profesionales. En este sentido, los espacios pedagógicos deben hacer un aporte importante en los procesos de formación de los estudiantes.

El modelo pedagógico de la Institución Educativa es holístico, el cual tiene por interés formar estudiantes con espíritu de superación, responsable, respetuoso y comprometido con la preservación del medio ambiente; busca propiciar aprendizajes significativos para ser aprovechados en la construcción de su proyecto de vida y en la transformación de su entorno familiar y comunitario.

La I.E.R. Santa María se beneficia con el acompañamiento pedagógico y formativo de la fundación Marina Orth, la cual desarrolla su programa en cuatro áreas: tecnología, robótica, idioma extranjero (inglés) y liderazgo. Y con la fundación Fraternidad Medellín, esta trabaja el proyecto formación vocacional en los grados noveno, décimo y undécimo.

Los participantes de la investigación son los estudiantes del grado noveno A del año 2019, con edades entre 14, 15, 16 y 17 años, de los cuales se tomó algunos casos con consentimiento de ellos mismos y los padres de familia. En el grado 9°A están matriculados 42 estudiantes, 21 mujeres y 21 hombres, en general es un grupo dinámico, activo, motivados por aprender y responsables académicamente.

3.3.1. Criterios de selección de casos

A partir de la población del grado 9°A, se toma una muestra intencional de aproximadamente diez estudiantes para hacer seguimiento al desarrollo de los encuentros iniciales uno y dos planteados en la investigación. Posteriormente por medio del conocimiento previo del investigador sobre los estudiantes y la solución de las situaciones Cuadrados perfectos, Esquema de escalera y la situación Manzanos, se decide tomar un grupo de estudiantes para analizar la comprensión del concepto de función a través de los procesos cognitivos de los participantes.

El caso a estudiar son tres participantes elegidos por los siguientes criterios: propositivos ante la solución de situaciones, comprometidos con sus procesos de aprendizaje, responsables para trabajar con guías de clase, interés por los elementos tecnológicos y capacidad discursiva para exteriorizar sus comprensiones.

3.3.2. Descripción de los casos

El estudiante caso 1 cuyo seudónimo es Manu, es seleccionado por su capacidad discursiva, responsabilidad e interés para el desarrollo de las situaciones, representa los estudiantes del grupo que en general cumplen la norma y son disciplinados durante las actividades.

El participante caso 2 cuyo seudónimo es Lisa es elegido por sus interesantes procesos mentales en ocasiones, como razonamientos elaborados, hipótesis, conjeturas y conclusiones acertadas. Representa una parte de los estudiantes que, aunque no siempre están dispuestos a trabajar siguiendo la norma rígidamente, hacen parte esencial del grupo 9ºA.

El participante caso 3 cuyo seudónimo es Eli es escogido por su interés para trabajar con las herramientas tecnológicas, representa aquellos sujetos que inicialmente pasan desapercibidos en el desarrollo de las actividades y hacen parte activa del proceso cuando el maestro propone nuevas alternativas de aprendizaje, también representa los estudiantes que siempre están a la expectativa del acontecer en el aula.

3.4. Técnicas de registro de información

Las técnicas de registro de información son esenciales en la investigación, estas representan el medio por el cual los datos son almacenados para un posterior análisis, en la indagación se utilizó observaciones del investigador, entrevistas semi-estructuradas, toma de notas de los estudiantes, videgrabaciones y fotografías.

Es por esto que esta investigación utiliza diferentes fuentes, principalmente los registros y documentos de los estudiantes, así como la observación y la entrevista para analizar la situación o fenómeno, busca la convergencia desde diferentes puntos de vista para establecer criterios de encuentro bajo los cuales se pueda establecer información relevante, conclusiones, e ideas útiles para describir el fenómeno.

3.4.1. La observación

La observación constituye uno de los pilares principales del conocimiento humano, a través de ella los sujetos se hacen conocedores de diferentes situaciones, la ciencia tiene sus

inicios fundamentalmente en la observación, esta exige una postura firme y una mirada clara en dirección a lo que se observa.

Para Cerda (2011), la observación está compuesta de la dualidad analítico-sintética, es decir, requiere la actuación del sentido de la persona y la interpretación de lo que se percibe para comprender una situación o evento. Demanda, además la necesidad de comprender las partes de una totalidad y tener la posibilidad de reconfigurarlas buscando comprender la situación de forma global, así, la percepción ayuda al sujeto a integrar las cualidades de la información que son percibidas de manera natural.

En esta investigación la observación es una forma discreta, sistemática, rigurosa y objetiva de escudriñar en los discursos, registros y acciones de los participantes de la investigación; es sobre todo paciente en cuanto permite el surgir de los acontecimientos de manera natural y depende en gran medida de las habilidades del investigador-observador para vislumbrar y comprender aquello que no está a simple vista. Por eso el investigador tiene el desafío de aislarse de sus preconcepciones, prejuicios y sesgos para observar de manera objetiva y limpia la situación.

3.4.1.1. La Observación no sistemática. Es aquella observación en la cual se evita establecer parámetros estandarizados, e instrumentos técnicos refinados, por el contrario, es un tipo de observación abierta sin mayores estructuraciones, estas razones no la justifican como una técnica desordenada, confusa o caótica (Cerda, 2011).

Al respecto conviene decir que la observación sistemática requiere hacer énfasis en aspectos como, sujetos involucrados, características, ambientes, objetivos, comportamiento de las personas y repetición del evento o situación analizada. Es la técnica preferida por un gran número de investigadores pertenecientes al paradigma cualitativo, en este trabajo de

investigación se realizan observaciones semi-estructuradas con el propósito de describir la comprensión del concepto de función en algunos de los niveles de la teoría de PK.

De esta manera es fundamental en el desarrollo de esta investigación las observaciones particulares y grupales de las situaciones que se presentan en el fenómeno estudiado, el registro debe hacerse en el momento preciso de lugar y tiempo, es recomendable no dejar pasar los momentos para tomar nota de las observaciones, porque después de que transcurren algunos días es común olvidar detalles importantes del proceso observado.

3.4.1.2. Fases de la observación. Con el propósito de establecer una directriz respecto de la observación, se establecen tres fases para llevar a cabo el proceso de registro de información, las fases están compuestas por grupos de guías con situaciones y objetivos similares, así como tiempos determinados, seguidamente son descritas:

3.4.1.2.1. Fase uno. Corresponde al inicio de la intervención los encuentros uno y dos, en estos se observa a los estudiantes a partir de sus conceptos previos relacionados con la idea de función, esta etapa permite realizar un análisis preliminar para redireccionar la investigación, en ella se percibe a los participantes cuando identifican regularidades, patrones y relaciones entre variables.

3.4.1.2.2. Fase dos. Pertenece a esta etapa de la investigación los encuentros tres y cuatro, estos exigen mayor rigurosidad, disciplina académica y labor por parte de los estudiantes e investigador. En este periodo los participantes son observados cuando establecen relacionales proporcionales, de dependencia y cambio en situaciones.

3.4.1.2.3. Fase tres. Corresponde a la etapa tres los encuentros cinco, seis y siete, en este periodo los estudiantes profundizan en la idea de función a través del uso diversas representaciones para comprender el concepto de función. Además, con el ejecutable virtual

GeoGebra debieron reafirmar sus conocimientos a través de representaciones como tablas, gráficas, expresiones analíticas y variaciones a los parámetros de la función lineal. También, se propone en este espacio algunas entrevistas a modo de cierre para establecer conclusiones a partir de la investigación realizada.

3.4.2. La entrevista

En esta investigación la entrevista tiene por objetivo primordial, conocer en profundidad aspectos del proceso cognitivo durante la comprensión del concepto de función en los estudiantes; con la entrevista se pretende llegar a múltiples visiones y realidades del caso estudiado, ya que a través de la indagación se provee la investigación de diversas voces y puntos de vista que enriquecen y originan horizontes para analizar el objeto de estudio. En concordancia para Cerda (1993) la entrevista cumple tres funciones en la investigación científica:

- “-Obtener información de individuos y grupos.
- Ofrecer información.
- Influir sobre ciertos aspectos de la conducta de una persona o un grupo (opiniones, sentimientos, comportamientos, etc.)” (p. 259).

A través de la entrevista se puede conocer las ideas, pensamientos y saberes del entrevistado, ella devela el dialogo de un emisor y receptor, previo acuerdo de las partes, garantizando respeto y confidencialidad en las opiniones. Así, en esta investigación se pretende facilitar la reconstrucción y descripción de la comprensión del concepto de función por medio de conversaciones cordiales, respetuosas y en un ambiente de mutua confianza.

Conviene distinguir según Cerda (2011), diferentes tipos de entrevistas sugeridas por los investigadores de acuerdo a objetivos, poblaciones y otros factores, entre ellas tenemos la entrevista estructura y semiestructurada.

3.4.2.1. Entrevista estructurada

La entrevista estructurada como su nombre lo sugiere tiene una ruta clara de preguntas previamente planeadas, las cuestiones son repetidas a todos los entrevistados, algunos investigadores consideran este tipo de entrevista semejante a un cuestionario.

3.4.2.2. Entrevista semiestructurada

Por su parte la entrevista no estructurada, es una conversación abierta y espontánea, en la cual el entrevistador es flexible en sus preguntas e incluye otras de acuerdo a la necesidad del momento, y el sujeto interrogado responde dentro de un marco de temas o ejes, entorno a los cuales es realizada la entrevista.

En coherencia en esta investigación se utiliza la entrevista semiestructurada de carácter focalizada, con la cual se pretende profundizar acerca de cómo los participantes comprenden el concepto de función, encaminando a los estudiantes de manera natural, evitando forzar la conversación y partiendo de preguntas generales para particularizar y puntualizar en información cada vez más certera sobre el tema investigado.

A través de la entrevista el maestro debe reflexionar sobre el concepto y sus dificultades de enseñanza aprendizaje, la intencionalidad es determinar con certeza el nivel de razonamiento del entrevistado e identificar las ideas que se encuentran en torno al objeto de estudio. En el modelo PK estas preguntas permiten saber cuáles son los conocimientos primitivos del estudiante.

3.5. Registros de los estudiantes

Son información valiosa documentada, escrita, dibujada, grabada y en general plasmada por los estudiantes, los apuntes y tomas de notas de los sujetos involucrados son analizados a partir de elementos teóricos y reflexiones del investigador.

En esta investigación los estudiantes desarrollan guías de trabajo en los diferentes encuentros, (ver anexos) cada una está dirigida a resolver situaciones relacionadas con el concepto de función, las guías parten de elementos estructurales del concepto y evolucionan a partir del tratamiento de diferentes registros de representación.

3.6. Análisis de datos en la investigación cualitativa

Investigar consiste en darle sentido a lo que vemos y observamos, es buscar relaciones entre las partes, a menudo los investigadores utilizan su intuición para interpretar la realidad de los eventos y fenómenos estudiados.

Esta investigación acoge las consideraciones expuestas por Cerda (2011), para realizar el respectivo estudio de datos, en su propuesta teórica recomienda llevar a cabo tres actividades intelectuales esenciales, analizar, sintetizar y comparar. Analizar implica realizar procesos de examinar, observar, diferenciar, determinar entre otros; la síntesis por su parte supone explorar las piezas que componen un todo y viceversa, y la comparación como antesala de la generalización sugiere establecer relaciones, semejanzas y diferencias entre los objetos y situaciones estudiadas.

El análisis de datos en esta investigación, exige imaginación, ingenio, constancia para sistematizar y organizar la información, fluidez mental, apertura a los imprevistos, e interés por los hechos y datos poco comunes que brindan explicación a la situación.

3.6.1. Pre-visualización de categorías emergentes

Esta investigación utiliza un sistema de conceptos claves o macro, expuestos en los descriptores de los niveles de comprensión, estos conceptos sirven de base para la observación y descripción de las unidades de análisis, aquí la codificación cumple un papel básico para que surjan otras categorías elementales o también para reafirmar algunas categorías previsualizadas.

3.6.2. Validación de los datos

La investigación cualitativa requiere de la interpretación certera y válida de los datos, siempre en armonía con los objetivos trazados, estrategias y técnicas utilizadas en el desarrollo de la investigación. Es relevante la continua reflexión del investigador, la conversación con otras voces involucradas, el análisis desde diferentes situaciones y sus puntos de vista son parte esencial en un proceso de indagación sutil y confiable; en esta investigación se utiliza la triangulación de los datos e información para garantizar el estudio de la situación en cuestión.

Con respecto a la triangulación o convergencia, ésta utiliza diferentes fuentes, métodos, teorías, e investigadores, con la intención de brindar fiabilidad, evitar sesgos e imprecisiones de un solo observador a partir de una sola técnica o única mirada. Las diferentes fuentes de información deben ser provistas por grupos diversos y heterogéneos, los múltiples instrumentos, guías de los estudiantes, observaciones y entrevistas posibilitan unificar criterios y permiten establecer puntos de afinidad y construcciones teóricas para describir la situación estudiada o fenómeno.

La Figura 5 ilustra los nombres de los respectivos encuentros, algunos de los objetivos planteados y las técnicas de registro de información propuestas en cada fase.

Figura 5*Encuentros y fases del diseño metodológico*

N°	Encuentros	Propósitos	Técnica, registro de datos	Fases
	Título			
1	Motivación e ideas previas	Conocer las ideas y preconcepciones de los estudiantes en torno a la cuestión ¿qué es la matemática?	-Observación -Guía resuelta por los estudiantes	Uno
2	Patrones y regularidades	Reconocer algunos patrones geométricos y regularidades, asimismo indicar relaciones implícitas entre variables e inducir procesos de generalización presentes en las situaciones.	-Observación -Guía resuelta por estudiantes -Grabaciones de audios	
3	Cambio y relaciones	Analizar situaciones en las cuales es posible inferir cambios entre variables, a partir del reconocimiento de relaciones.	-Observación -Guía resuelta por los estudiantes	Dos
4	Relaciones proporcionales y gráficas	Deducir relaciones proporcionales entre variables y relaciones de dependencia e independencia, a través del análisis de enunciados y gráficas.	-Observación -Guía resuelta por estudiantes	
5	Variación	Determinar constantes de proporcionalidad, resolver reglas de tres. Representar por medio de enunciados, tablas de valores, gráficas y/o modelos matemáticos.	-Observación -Guía resuelta por estudiantes -Grabaciones de audios	Tres
6	Función lineal	Profundizar en aprendizajes acerca del concepto de función, en particular elementos de la variación y relaciones entre variables, así como establecer conjeturas por medio del análisis de las situaciones.	-Observación -Guía resuelta por estudiantes -Grabaciones de audios -Entrevistas	
7	Práctica académica uso de GeoGebra	Explorar a través del ejecutable virtual la comprensión del concepto de función, a partir de conversiones entre diferentes representaciones, principalmente enunciados, tablas, gráficas y expresiones algebraicas o analíticas.	-Observación -Guía resuelta por estudiantes -Entrevistas -Grabaciones de pantallas	

Nota. Fuente elaboración propia.

Capítulo 4: Resultados de Investigación

El capítulo cuatro expone el análisis de los datos, mediante la descripción y caracterización de las evidencias de comprensión de los estudiantes, así mismo son presentadas las trayectorias de comprensión para los participantes y se establecen algunas conclusiones. Es preciso mencionar la importancia de las temáticas e ideas incluidas en las situaciones, estas obedecen al interés pedagógico y didáctico propuesto a partir del análisis histórico y epistemológico del concepto de función, entre algunas ideas resaltan patrón, regularidad, cambio, relación, proporcionalidad, dependencia, variación y covariación. A continuación, es evidenciado el proceso de comprensión de los participantes analizados durante el desarrollo de las diferentes situaciones en torno al concepto de función en el plano. La Figura 6 representa la estructura del capítulo.

Figura 6

Estructura del capítulo resultados de investigación

4.1. Caracterización encuentro # 1. Motivación e ideas previas	70
4.1.1. Descripción encuentro introductorio caso 1: Manu	71
4.1.2. Descripción encuentro introductorio caso 2: Lisa	72
4.1.3. Descripción encuentro introductorio caso 3: Eli	73
4.2. Caracterización encuentro # 2. Patrones y regularidades	74
4.2.1. Descripción situación uno cuadrados perfectos	74
4.2.2. Descripción situación tres manzanos	84
4.2.3. Trayectorias de comprensión	96
4.3. Caracterización encuentro # 3. Cambio y relaciones	99
4.3.1. Descripción situación cuatro chatear	100
4.3.2. Conclusiones sobre la descripción de la situación 4	105
4.4. Caracterización encuentro # 4. Relaciones proporcionales y gráficas	106
4.4.1. Descripción situación seis concentración de un medicamento	106
4.4.2. Conclusiones sobre la descripción de la situación 6	110
4.5. Caracterización encuentro # 5. Variación	111
4.5.1. Descripción situación ocho el peso de los sacos de papa	111
4.5.2. Conclusiones sobre la descripción de la situación 8	122
4.6. Descripción del encuentro # 6. Función lineal	122
4.6.1. Descripción situación nueve periódico The New York Times	123
4.6.2. Trayectorias de comprensión	134
4.7. Caracterización encuentro # 7. Exploración con el ejecutable virtual	137

4.1. Caracterización encuentro # 1. Motivación e ideas previas

El propósito del encuentro número uno consistió en reconocer saberes previos de los estudiantes, incitar opiniones y conceptos acerca de la pregunta ¿qué es la matemática?, el objetivo fue además transformar las ideas y pensamientos, buscando considerar la matemática compuesta por patrones y regularidades que describen fenómenos y situaciones de nuestro entorno.

Para ello se inició con la lectura titulada ¿qué es la matemática? tomada del prólogo del libro: El lenguaje de las matemáticas de Keith Devlin, y el video llamado “geometría de

fractales” de la dirección <https://www.youtube.com/watch?v=A4aEr9m--Pk>; estos recursos favorecieron comprender otras formas de concebir y aplicar las matemáticas.

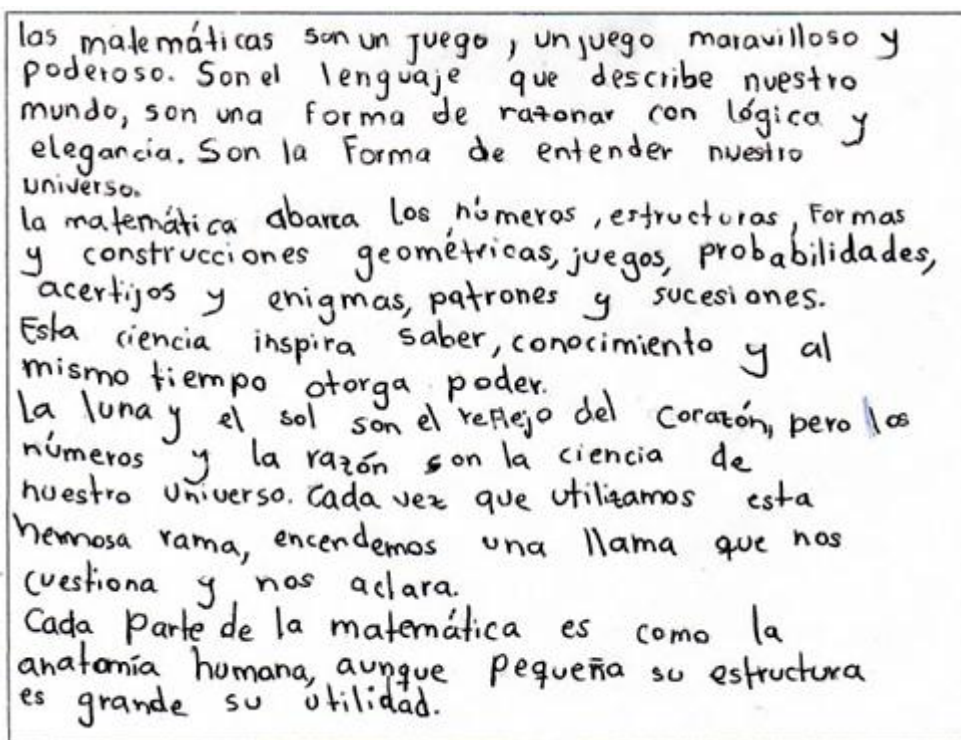
Seguidamente se describen los procesos de pensamiento en relación al concepto de función de los participantes con seudónimos Manu, Lisa y Eli.

4.1.1. Descripción encuentro introductorio caso 1: Manu

Durante el desarrollo del encuentro introductorio se observó en general a los estudiantes motivados e interesados por debatir sobre sus ideas, pensamientos y preconcepciones con respecto a la matemática. La Figura 7 representa las ideas del participante Manu.

Figura 7

Ideas acerca de ¿qué es la matemática? participante Manu



las matemáticas son un juego, un juego maravilloso y poderoso. Son el lenguaje que describe nuestro mundo, son una forma de razonar con lógica y elegancia. Son la forma de entender nuestro universo.

la matemática abarca los números, estructuras, formas y construcciones geométricas, juegos, probabilidades, acertijos y enigmas, patrones y sucesiones.

Esta ciencia inspira saber, conocimiento y al mismo tiempo otorga poder.

la luna y el sol son el reflejo del corazón, pero los números y la razón son la ciencia de nuestro universo. Cada vez que utilizamos esta hermosa rama, encendemos una llama que nos cuestiona y nos aclara.

Cada parte de la matemática es como la anatomía humana, aunque pequeña su estructura es grande su utilidad.

En la construcción anterior el estudiante expresa “las matemáticas son un lenguaje utilizado para entender y razonar sobre nuestro universo, son estructuras, formas, patrones y sucesiones...”, las afirmaciones expuestas brindan un sentido amplio de la matemática, sugieren

pertinencia y relevancia hacia esta disciplina, así es considerada una herramienta fundamental para describir, comprender y relacionar múltiples aspectos del entorno, principalmente números, juegos, acertijos, probabilidades y enigmas.

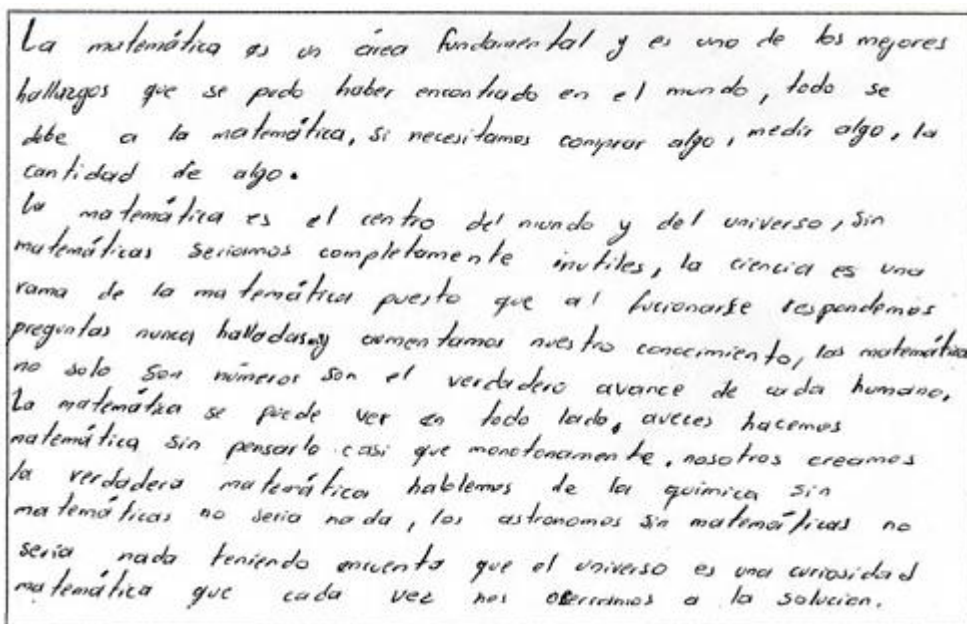
El escrito realizado por Manu muestra un pensamiento elaborado, abierto y dinámico, este se consolidó como punto de partida, es decir, aquello que se pretendía con el encuentro introductorio, el escrito sirvió además de ejemplo para la presentación, discusión profunda e idealización de algunas de las formas en que los estudiantes debieran considerar la matemática.

4.1.2. Descripción encuentro introductorio caso 2: Lisa

A continuación, la Figura 8 representa las ideas ante la pregunta ¿qué es la matemática? expuestas por Lisa.

Figura 8

Ideas sobre ¿qué es la matemática? participante Lisa



La matemática es un área fundamental y es uno de los mejores hallazgos que se pudo haber encontrado en el mundo, todo se debe a la matemática, si necesitamos comprar algo, medir algo, la cantidad de algo.

La matemática es el centro del mundo y del universo, sin matemáticas seríamos completamente inútiles, la ciencia es una rama de la matemática puesto que al formularse respondemos preguntas nunca halladas y aumentamos nuestro conocimiento, las matemáticas no solo son números son el verdadero avance de cada humano, la matemática se puede ver en todo lado, a veces hacemos matemática sin pensarlo casi que monotonamente, nosotros creamos la verdadera matemática hablemos de la química sin matemáticas no sería nada, los astrónomos sin matemáticas no sería nada teniendo en cuenta que el universo es una curiosidad matemática que cada vez nos acercamos a la solución.

Este participante propone una visión amplia de la matemática y la considera útil, ya que con esta es posible solucionar preguntas e inquietudes del ser humano y por lo tanto aumentar

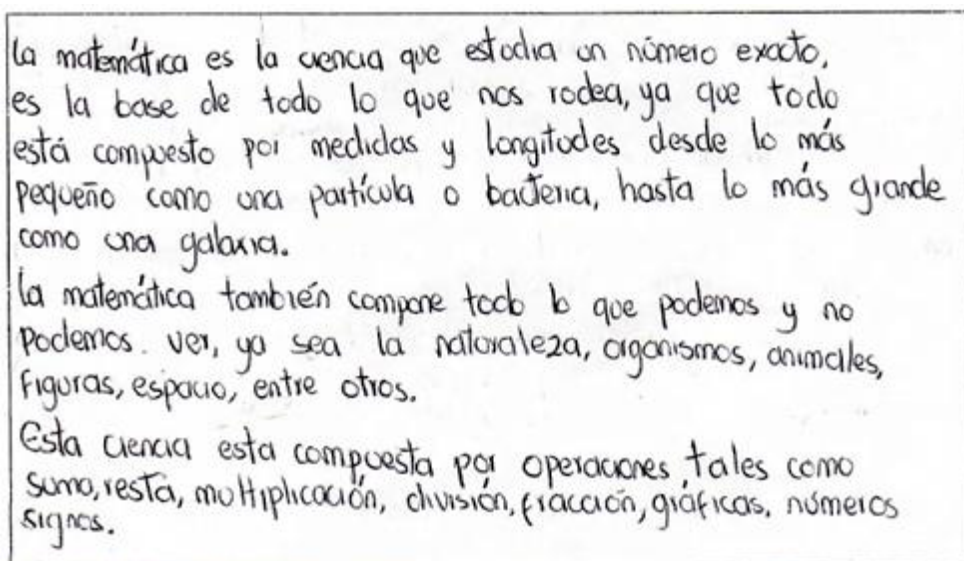
nuestro conocimiento. El participante señalado también concibe la matemática como una disciplina operativa en el sentido de realizar comparaciones, mediciones y otros cálculos; además resalta su importancia en diversos aspectos y acciones del hombre, relacionando la matemática con la química y astronomía para explicar múltiples fenómenos interesantes a la humanidad.

4.1.3. Descripción encuentro introductorio caso 3: Eli

La Figura 9 muestra los elementos expuestos por Eli.

Figura 9

Ideas acerca de ¿qué es la matemática? participante Eli



La matemática es la ciencia que estudia un número exacto, es la base de todo lo que nos rodea, ya que todo está compuesto por medidas y longitudes desde lo más pequeño como una partícula o bacteria, hasta lo más grande como una galaxia.

La matemática también compone todo lo que podemos y no podemos ver, ya sea la naturaleza, organismos, animales, figuras, espacio, entre otros.

Esta ciencia está compuesta por operaciones, tales como suma, resta, multiplicación, división, fracción, gráficas, números signos.

En la respuesta el estudiante relaciona la matemática con el uso de operaciones básicas, estudio de números, gráficas, signos y ecuaciones. Asimismo, propone comprender la matemática como ciencia y base de un sistema o estructura que permite estudiar formas, longitudes, medidas y situaciones del entorno. Así expresa el estudiante “desde lo más pequeño como una partícula o bacteria hasta lo más grande como una galaxia”.

Para concluir, varios de los estudiantes del curso reflejaron conocimientos primitivos, argumentos e ideas de la matemática vinculadas con hacer cuentas, operaciones básicas y en general utilizar el pensamiento numérico.

4.2. Caracterización encuentro # 2. Patrones y regularidades

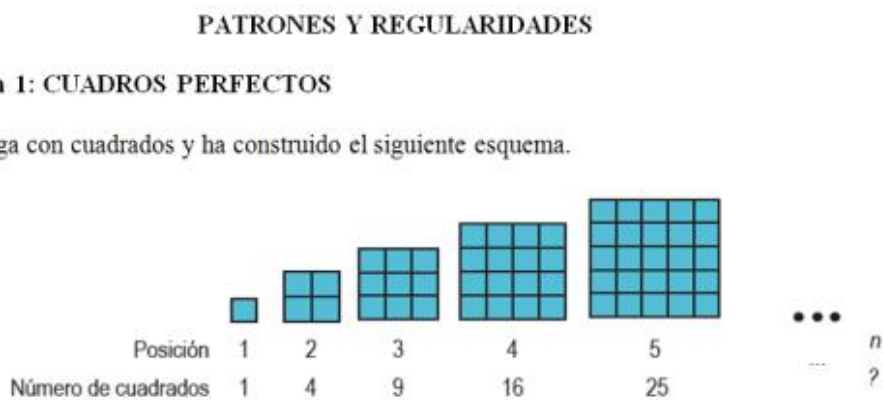
Para estimular el reconocimiento de secuencias, así como relaciones estructurales de conexión y/o correspondencia por parte de los estudiantes, se propuso el encuentro número dos titulado “Patrones y regularidades”, a continuación, es precisada la forma en que los estudiantes resolvieron la situación cuadrados perfectos.

4.2.1. Descripción situación uno cuadrados perfectos

El encuentro número dos estuvo relacionado con tres situaciones: cuadrados perfectos, esquema de escalera y manzanos, dado que las situaciones uno y dos son similares, en este análisis se omite la segunda situación y se realiza la descripción de las situaciones uno y tres. La Figura 10 representa el encabezado de la situación número uno.

Figura 10

Esquema preliminar situación uno

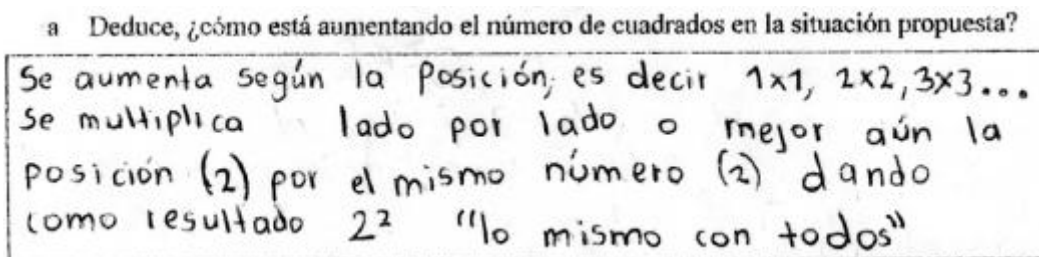


Como se puede notar en la posición uno, se tiene 1 cuadrado, en la posición dos, se observan 4 cuadrados, en la posición tres, se requieren 9 cuadrados, en la posición cuatro, 16 cuadrados, en la posición cinco, 25 cuadrados y así sucesivamente.

4.2.1.1. Descripción solución ítem (a) Manu. A continuación, se presenta el ítem y la respuesta elaborada por el participante.

Figura 11

Solución propuesta por Manu ítem (a)



Este participante representó su solución a través de la operación multiplicación “se multiplica lado por lado...”, sugirió elevar a la potencia dos para cada posición y relacionó la potenciación “ 2^2 ” e indicó con puntos suspensivos. Además, se puede observar en la respuesta del estudiante el inicio de procesos de generalización para encontrar el número de cuadrados en cualquier posición, ya que él escribe: “lo mismo con todos”

También es posible inferir en la respuesta del participante comprensión de las regularidades de la situación respecto de lo que está cambiando, según Díaz (2001), citado en Díaz y Cuevas (2014), los maestros deben buscar que el estudiante se interese en la explicación de los cambios y en encontrar regularidades entre los cambios. Que perciban los cambios y las relaciones entre ellos como un problema digno de una explicación científica.

En coherencia las razones anteriores justifican la clasificación del proceso de comprensión del estudiante en el estrato conocimiento primitivo y descriptor uno de la teoría PK; dado que el descriptor uno de este nivel hace referencia a las oraciones y enunciados realizados por el estudiante para reconocer regularidades numéricas y/o geométricas en situaciones. (N1-

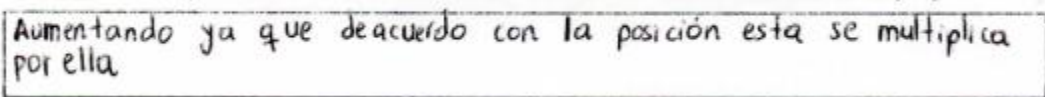
D1: Identifica regularidades y patrones en situaciones que establecen correspondencias y/o relaciones a partir de la estructura del concepto de función).

4.2.1.2. Descripción solución ítem (a) Lisa. Esta es la solución propuesta por Lisa al ítem **a** de la situación uno.

Figura 12

Respuesta propuesta por Lisa para el ítem (a)

a. Deduce, ¿cómo está aumentando el número de cuadrados en la situación propuesta?



Aumentando ya que de acuerdo con la posición esta se multiplica por ella

Para resolver este ítem el participante alude a elementos de la multiplicación y a la posición del esquema geométrico; en el análisis previo de las situaciones se clasificó las operaciones básicas en el nivel uno conocimiento primitivo de la teoría PK y el descriptor dos de este nivel se refiere al uso del lenguaje y los enunciados con los cuales el estudiante resuelve de manera implícita o sin brindar mayores detalles. Estas evidencias justifican relacionar las acciones del estudiante con el nivel uno conocimiento primitivo y descriptor dos de este nivel.

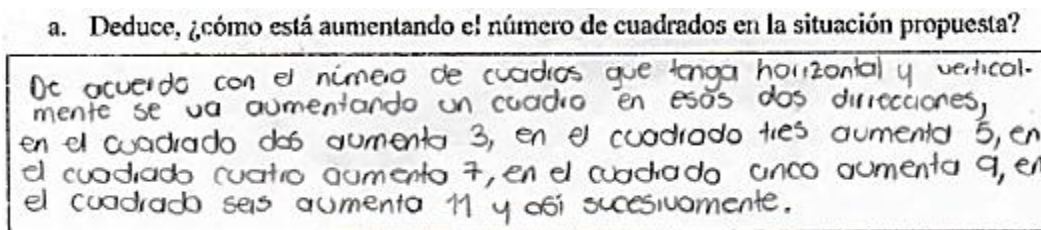
(N1-D2: Utiliza el lenguaje natural y enunciados para representar la comprensión de situaciones ligadas al concepto de función).

En general, varios de los estudiantes del curso regular resuelven el ítem anterior de manera similar a Lisa, por ejemplo, algunos escriben “cada número se multiplica por sí mismo” “esta aumentado debido a la imitación y continuidad de un patrón de multiplicar un número por sí mismo sucesivamente. Ejemplo: 2×2 , 3×3 ”. Estas respuestas y otras señalan la recurrente aplicación de la multiplicación a través de enunciados y permiten concluir que un número significativo de estudiantes solucionan la situación de esta forma.

4.2.1.3. Descripción solución ítem (a) Eli. La Figura 13 representa la respuesta esbozada por Eli para el ítem **a** situación uno.

Figura 13

Respuesta ítem (a) situación uno participante Eli



La solución de este estudiante se basa en el reconocimiento de sucesiones, para ello justificó el aumento de cuadrados en una secuencia de números impares, iniciando en “3, luego 5, posteriormente 7 y así sucesivamente...”. En esta respuesta el estudiante explica por medio de algunos conocimientos primitivos en relación con los números impares, no obstante, es relevante la capacidad analítica de Eli para deducir reglas de formación y aspectos periódicos de la tarea.

Con respecto a los niveles de comprensión y descriptores, en el nivel dos y descriptor uno se hace alusión a los enunciados utilizados por el estudiante para justificar características secuenciales y/o repetitivas en una situación, de esta manera, los argumentos anteriores permiten asociar el proceso de pensamiento del participante en el nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor uno. (**N2-D1:** Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función).

La forma anterior de inferir en torno a la cuestión se originó en menor medida en los compañeros del curso, otras respuestas similares son: “los cuadrados van aumentando a medida que avanzan los números primos, empieza con 1 después 3, 5, 7... y continua así”, “se va aumentando de 2 en 2 iniciando en 3, 5, 7, 9, 11, 13”. También los resultados muestran que una

gran parte de los estudiantes elaboraron enunciados para la descripción del ítem entre ellas, “elevar al cuadrado; aumentan cuadrados según la secuencia de números impares y otras”.

4.2.1.4. Descripción solución ítem (b) participante Manu. La finalidad de esta cuestión era estimular a los estudiantes a “crear una imagen”, pictórica, mental, numérica o un enunciado para su solución, seguidamente se exponen las respuestas de los tres participantes con la respectiva descripción. La Figura 14 es la solución exhibida por el participante Manu.

Figura 14

Respuesta ítem (b) situación uno participante Manu

b. ¿Cuántos cuadrados son necesarios utilizar en la posición 7 para conservar la misma dinámica de construcción? Explica cómo se pueden calcular.

1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	...	Para calcular el número de cuadrados se multiplica por sí mismo
1	4	9	16	25	36	49	...	Elevando el número al cuadrado
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	...	
1	4	9	16	25	36	49	...	

Este participante utiliza diversas formas en la situación, primero representa a partir de multiplicaciones y segundo a través de potencias, además, implícitamente sugiere generalizar por medio de puntos suspensivos, siendo este un antecedente al proceso de la formalización. En la caracterización previa de las situaciones se relacionó el uso de expresiones numéricas para identificar patrones en el nivel dos “creación de la imagen” y descriptor uno; como se puede observar las acciones de este estudiante cumplen con las características de este descriptor, en tanto que utiliza oraciones y expresiones numéricas para sustentar la respuesta. (N2-D1: Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función).

El siguiente fragmento de la entrevista final realizada a Manu, confirma el proceso de comprensión del estudiante a través de la identificación de regularidades y patrones.

...**Investigador:** Observa la figura, analiza y describe ¿cómo está cambiando?

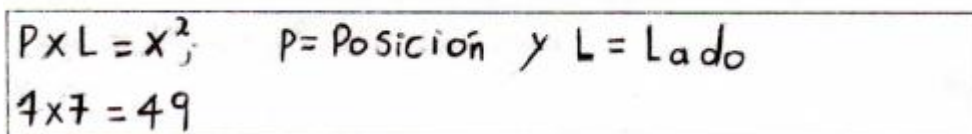
...**Manu:** Aumenta de tres en tres más la posición, en la uno normal un palito, en la dos tres en la mitad y por la posición se suman dos y así sucesivamente.

4.2.1.5. Descripción solución ítem (b) participante Lisa. La Figura 15 es la respuesta del participante.

Figura 15

Solución ítem (b) situación uno participante Lisa

b. ¿Cuántos cuadrados son necesarios utilizar en la posición 7 para conservar la misma dinámica de construcción? Explica cómo se pueden calcular.



$$P \times L = x^2; \quad P = \text{Posición} \quad \text{y} \quad L = \text{Lado}$$

$$4 \times 7 = 49$$

En este caso el participante hace uso de expresiones algebraicas para representar la comprensión de la situación “p = posición y l = lado”, para solucionar Lisa se crea una imagen mental de cómo están aumentando los cuadrados en cada lado y calcula para la posición requerida. Estas evidencias de comprensión del estudiante son categorizadas en el nivel dos, “creación de la imagen” y el descriptor uno. (**N2-D1:** Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función)

4.2.1.6. Descripción solución ítem (b) participante Eli. La Figura 16 es la solución propuesta por Eli.

Figura 16

Respuesta ítem (b) situación uno participante Eli

- b. ¿Cuántos cuadrados son necesarios utilizar en la posición 7 para conservar la misma dinámica de construcción? Explica cómo se pueden calcular.

49, multiplicando 7×7 o cualquier otro número por si mismo y así mantenemos la dinámica, de acuerdo con el número que siga en la secuencia

Para resolver este ítem el participante indica la operación multiplicación y generaliza el cálculo para cualquier otra posición a partir de la secuencia relacionada con la posición uno, dos, tres, cuatro y así sucesivamente. Es relevante en la solución, la intención de universalizar aquello que sucede para algunas posiciones y números de cuadrados, estas evidencias son ubicadas en el nivel dos, “creación de la imagen” y el descriptor uno. (N2-D1: Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función).

4.2.1.7. Descripción solución ítem (c) Manu. En esta parte de la situación se buscaba que los estudiantes dedujeran un modelo para describir la regularidad establecida. La Figura 17 es la respuesta propuesta por Manu.

Figura 17

Respuesta ítem (c) situación uno Manu

- c. ¿Cómo se puede hallar el número de cuadrados para cualquier posición (ejemplo la noventa), sin necesidad de hacer un dibujo?

$m \times m = m^2$	Se reemplaza la variable por el número que se busca en este caso 90.
$90 \times 90 = 90^2 = 8100 \rightarrow \text{Número de cuadrados}$	

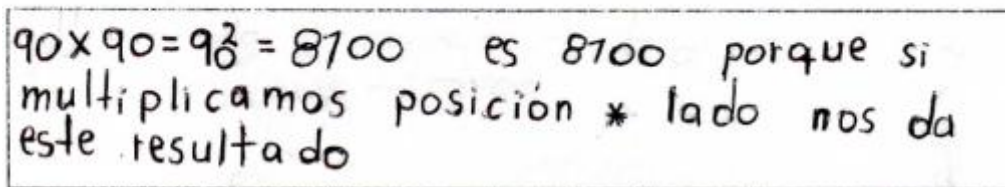
En esta cuestión el participante plantea un modelo y por medio de este calcula el número de cuadrados para la posición 90, el registro de Manu posibilita observar la aplicación acertada de procesos algorítmicos, es notable mencionar las explicaciones registradas a la derecha, estas aseveran la comprensión del estudiante sobre la situación, en particular el término variable hace alusión al cambio en la situación. Las evidencias de comprensión posibilitan vincular el proceso del participante al nivel tres, comprensión de la imagen y descriptor uno. (N3-D1: Agrupa las características del patrón y establece conclusiones en situaciones que involucran relaciones en torno al concepto de función)

4.2.1.8. Descripción solución ítem (c) Lisa. La Figura 18 expone la respuesta del participante.

Figura 18

Solución ítem (c) situación uno Lisa

- c. ¿Cómo se puede hallar el número de cuadrados para cualquier posición (ejemplo la noventa), sin necesidad de hacer un dibujo?



90 x 90 = 90² = 8100 es 8100 porque si multiplicamos posición * lado nos da este resultado

Lisa resuelve a partir de una expresión numérica y justifica con argumentos relacionados con la posición y el lado; en su razonamiento tal vez el participante este realizando un proceso de folding back, puesto que recuerda y utiliza aprehensiones anteriores desarrolladas en el ítem **b**. Pirie y Kieren (1994) precisan, durante la comprensión matemática los estudiantes en ocasiones hacen uso del mecanismo replegarse, es decir, regresar a niveles anteriores de comprensión:

Esta es la actividad, vital para el crecimiento de la comprensión, que revela la naturaleza no unidireccional de llegar a comprender las matemáticas. Cuando nos enfrentamos a un problema o pregunta en cualquier nivel, que no se soluciona de inmediato, es necesario replegarse a un nivel interno para ampliar la comprensión actual e inadecuada. (p. 173)

Como se evidencia en la imagen, en el caso Lisa existe dificultad para plantear un modelo y generalizar la situación; por tal razón el participante regresa a la comprensión anterior a partir de la idea de posición y lado. Considerando los criterios exhibidos en la solución a este ítem, este proceso de pensamiento es clasificado en el nivel dos “creación de la imagen” y descriptor uno. (**N2-D1**: Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función).

4.2.1.9. Descripción solución ítem (c) Eli. La Figura 19 expone la respuesta de Eli para el ítem c.

Figura 19

Argumentos expuestos por Eli para solucionar la cuestión c

c. ¿Cómo se puede hallar el número de cuadrados para cualquier posición (ejemplo la noventa), sin necesidad de hacer un dibujo?

$x \cdot 11 = 121$	$x = \frac{121}{11} = \frac{11}{1}$
$11x = 121$	
$x * x = x^2$	$x = 11$

Por medio de las observaciones se constató que Eli tuvo dificultades para proponer una respuesta y decidió buscar ayuda en otros compañeros para solucionar la situación. En la explicación se destaca la intención de formular una ecuación para una posición determinada; también es notable la aplicación de algoritmos aprendidos durante el año escolar, estos son usados como conocimientos primitivos que el participante evidencia en el momento de enfrentarse a la situación. Para Pirie y Kieren (1994), el conocimiento primitivo “es lo que el observador, el maestro o el investigador asume que la persona que hace la comprensión puede hacer inicialmente” (p. 170).

Para completar la solución a partir de sugerencias y comentarios brindados por el investigador Eli escribió $x * x = x^2$ como se observa en la parte inferior de la respuesta, y no consideró otros argumentos en su interpretación, esto demuestra la dificultad del participante para llegar a la deducción de un modelo matemático. El análisis anterior posibilita clasificar las manifestaciones de comprensión de Eli en el nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor uno. (N2-D1: Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función).

4.2.2. Descripción situación tres manzanos

El propósito de la situación manzanos consistió en identificar variables y relaciones entre ellas, observar propiedades en la situación e iniciar procesos de generalización, la Figura 20 representa la introducción de la situación tres.

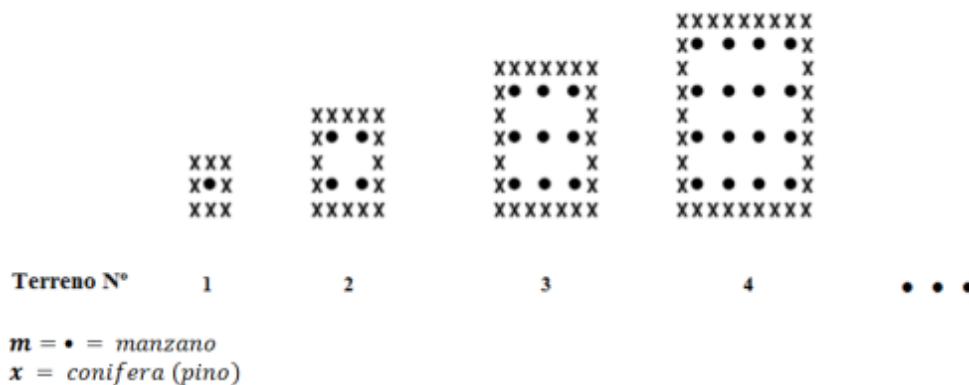
Figura 20

Encabezado situación manzanos

Situación 3: MANZANOS

Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado; con el propósito de proteger los manzanos del viento siembra coníferas (pinos) alrededor de la totalidad del huerto.

El siguiente es un esquema de la situación donde se puede apreciar la ubicación de los manzanos y de las coníferas para cualquier número (n) del terreno.



4.2.2.1. Descripción solución ítem (a) Manu. La Figura 21 representa la respuesta elaborada por Manu.

Figura 21

Relación entre el terreno, pinos y manzanos participante Manu

a. Establece relaciones entre pinos y manzanos según el número del terreno.

Terreno Nº	Cantidad de manzanos	Cantidad de coníferas (pinos)
1	7	8
2	14	16
3	21	24
4	28	32
5	35	40
6	42	48
7	49	56
8	56	64
9	63	72
10	70	80
:	.	.
n	$n \times 7 = n^2$	$8n = n \times 8$

Como se puede observar en la Figura 21 Manu registra con acierto la cantidad de manzanos y pinos según el terreno correspondiente. Así mismo, al final de las columnas agrega las expresiones o modelos para llegar a la generalización de la situación, tanto para el número de manzanos como el de coníferas.

El registro de datos del participante manifiesta la comprensión de la situación y estas evidencias pueden ser ubicadas en el nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor dos, ya que en este se plantea el uso de tablas, reconocimiento de las variables y su relación. (N2-D2: Visualiza a través de tablas las variables, datos e información involucrada en relación al concepto de función).

4.2.2.2. Descripción solución ítem (a) Lisa. La Figura 22 expone la respuesta planteada por Lisa.

Figura 22

Registro de datos acerca del terreno, pinos y manzano participante Lisa

a. Establece relaciones entre pinos y manzanos según el número del terreno.

Terreno N°	Cantidad de manzanos	Cantidad de coníferas (pinos)
1	1	8
2	4	76
3	9	24
4	16	32
5	25	40
6	36	48
7	49	56
8	64	64
9	81	72
10	100	80
:	12:1	88
n	$n \times n = n^2$	$8n$

Al igual que en el caso anterior Lisa registra con acierto la información en la Figura 22, las enmendaduras al final de las columnas sugieren que el participante estuvo probando con diferentes modelos para la generalización de la situación y al final llegó al modelo coherente. Este proceso de pensamiento del estudiante es clasificado en el nivel dos, “creación de imagen” y descriptor dos. (N2-D2: Visualiza a través de tablas las variables, datos e información involucrada en relación al concepto de función).

4.2.2.3. Descripción solución ítem (a) Eli. La Figura 23 es la respuesta de Eli para el ítem a.

Figura 23

Relación entre el terreno, cantidad de manzanos y coníferas participante Eli

a. Establece relaciones entre pinos y manzanos según el número del terreno.

Terreno N°	Cantidad de manzanos	Cantidad de coníferas (pinos)
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40
6	36	48
7	49	56
8	64	64
9	81	72
10	100	80
:	X^2 11	88
n	X^2 12	96

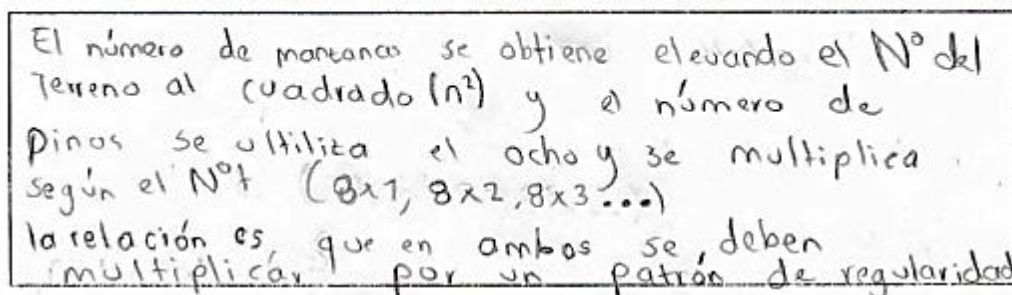
En la respuesta el participante plantea el número correcto de pinos hasta el terreno 10, de manera similar calcula con acierto la cantidad de manzanos para el mismo número de terreno; además propone al final de la columna una expresión para el cálculo de los manzanos. La ausencia de relaciones que vinculen las variables en la tabla, por ejemplo, el número de pinos se determina multiplicando 8 por el número del terreno, sugieren categorizar el proceso de pensamiento de Eli en el nivel uno “conocimiento primitivo” y descriptor tres. (N1-D3: Reconoce diferentes variables presentes en las situaciones vinculadas al concepto de función).

4.2.2.4. Descripción solución ítem (b) Manu. La Figura 24 es la respuesta exhibida por el estudiante.

Figura 24

Justificación de la relación entre el terreno, manzanos y pinos

- b. ¿Cuál es la relación que existe entre la posición del terreno, el número de manzanos y la cantidad de coníferas (pinos)?



El número de manzanos se obtiene elevando el N° del Terreno al cuadrado (n^2) y el número de pinos se utiliza el ocho y se multiplica según el N°t ($8 \times 1, 8 \times 2, 8 \times 3 \dots$) la relación es que en ambos se deben multiplicar por un patrón de regularidad

A través de este ítem se cuestionó a los estudiantes acerca del vínculo entre el terreno, el número de manzanos y la cantidad de pinos, es decir, es una cuestión que pretendía hacer visible las relaciones establecidas por los estudiantes entre las diferentes variables.

En la respuesta el participante Manu argumenta obtener el número de manzanos a partir del número del terreno, en otras palabras, plantea una relación de dependencia entre las dos variables terreno y manzanos. Por su parte, para el número de pinos identifica el patrón, “multiplicar por ocho” y al final justifica la necesidad de reconocer un patrón de regularidad en los procedimientos para calcular manzanos y pinos; los argumentos anteriores permiten clasificar el proceso de pensamiento del participante en el nivel tres, “comprensión de la imagen” y descriptor uno. (N3-D1: Agrupa las características del patrón y establece conclusiones en situaciones que involucran relaciones en torno al concepto de función).

4.2.2.5. Descripción solución ítem (b) Lisa. La Figura 25 representa la solución propuesta por el participante Lisa.

Figura 25

Argumentos planteados por Lisa

- b. ¿Cuál es la relación que existe entre la posición del terreno, el número de manzanos y la cantidad de coníferas (pinos)?

Que el número del terreno se multiplica por si mismo para bajar los manzanos

En este caso Lisa identifica la relación entre el terreno y el número de manzanos, para ello recurre a la operación multiplicación y describe la forma de hallar los manzanos y no relaciona otros comentarios acerca de, ¿cómo determinar el número de pinos?, por esta razón el proceso de pensamiento del participante es clasificado en el nivel dos “creación de la imagen” y descriptor tres (**N2-D3**: Describe relaciones de dependencia entre variables).

En la Figura 9 correspondiente a la solución del ítem b de la situación uno, el participante también recurre a la noción de multiplicación para responder la cuestión, esta redundancia de procedimientos indican que el estudiante utiliza de manera frecuente sus conocimientos relacionados sobre operaciones.

4.2.2.6. Descripción solución ítem (b) Eli. A continuación se expone la Figura 26, respuesta de Eli.

Figura 26

Relación entre el terreno, manzanos y pinos Eli

- b. ¿Cuál es la relación que existe entre la posición del terreno, el número de manzanos y la cantidad de coníferas (pinos)?

Se multiplica el número del terreno en la potencia de 2, y así se puede llegar a la cantidad de manzanos, por ejemplo, $2 \times 2 = 4$, $8 \times 8 = 64$.
 Y en la cantidad de pinos se multiplica 8 por el número del terreno, por ejemplo, $8 \times 3 = 24$, $8 \times 9 = 72$.
 La relación en los 3, es que en todos se multiplica por el número del terreno.

En la respuesta de Eli es posible inferir el planteamiento de una relación de dependencia entre el número del terreno y la cantidad de manzanos, para ello el estudiante utiliza argumentos referidos a la multiplicación y la potencia; por su parte para calcular la cantidad de pinos también menciona la necesidad de tener en cuenta el número del terreno. A partir de esta descripción el proceso del participante es asociado con el nivel tres, “comprensión de la imagen” y descriptor tres (N3-D3: Comprende relaciones de cambio entre variables).

4.2.2.7. Descripción solución ítem (c) Manu. La Figura 27 muestra la solución realizada por Manu.

Figura 27

Comparación entre el número de manzanos y pinos Manu

- c. ¿Existe algún valor para el cual, el número de manzanos es igual al número de coníferas? Justifica la respuesta.

Si, y como ejemplo esta el terreno 8 que tiene como cantidad de manzanos y de pinos 64.

El participante Manu soluciona a partir del análisis de la tabla del ítem **a**, sin embargo, no justifica la respuesta, las marcas donde el estudiante borró previamente conducen a pensar que había escrito otras apreciaciones iniciales. Estas evidencias de comprensión son clasificadas en el nivel uno “conocimiento primitivo” y descriptor dos (**N1-D2**: Utiliza el lenguaje natural y enunciados para representar la comprensión de situaciones ligadas al concepto de función).

Esta respuesta indica el carácter no lineal de la comprensión propuesto por Pirie y Kieren, dado que en un momento determinado para alguna cuestión por obvia que parezca la respuesta, es posible que a los sujetos se les dificulte solucionar.

4.2.2.8. Descripción solución ítem (c) Lisa. La Figura 28 exhibe la respuesta del participante Lisa.

Figura 28

Análisis número de manzanos y pinos Lisa

- c. ¿Existe algún valor para el cual, el número de manzanos es igual al número de coníferas? Justifica la respuesta.

Si porque estar en el 8º terreno y los pinos siguen la secuencia del 8º en el 64 se encontraron

La respuesta de Lisa permite entrever la relación entre las variables terreno y pinos, además es posible deducir que el estudiante hace referencia al terreno octavo y a los números múltiplos de ocho a partir de la idea de patrón, o como el participante expresa “secuencia”. Dadas estas evidencias de comprensión el proceso de Lisa es asociado con el nivel dos, “creación de imagen” y descriptor uno. (**N2-D1**: Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función).

4.2.2.9. Descripción solución ítem (c) Eli. La Figura 29 indica la respuesta de Eli a la cuestión c.

Figura 29

Comparación manzanos y pinos Eli

- c. ¿Existe algún valor para el cual, el número de manzanos es igual al número de coníferas? Justifica la respuesta.

64.
El número clave es 8, entonces si multiplicamos el número de pinos que es el 8 por el terreno número 8, es decir $8 \times 8 = 64$. la cantidad de manzanos en el terreno número 8 se multiplica $8 \times 8 = 64$.

En esta respuesta el participante Eli determina “el número clave es el ocho”, y lo utiliza para multiplicar por el número del terreno y calcular los pinos, de manera similar multiplica ocho por ocho para hallar la cantidad de manzanos, en esta solución el estudiante está justificando a través de la regularidad “ocho”, este proceso de pensamiento es clasificado en el nivel dos “creación la imagen” y descriptor tres (N2-D3: Describe relaciones de dependencia entre variables).

4.2.2.10. Descripción solución ítem (d) Manu. A continuación, es expuesta la solución del participante.

Figura 30

Cálculo de manzanos y pinos participante Manu

- d. ¿Cómo podemos determinar el número de manzanos y coníferas para cualquier número del terreno, por ejemplo el terreno N° 125? Explica la forma para hallarlos.

$\begin{array}{l} \text{N}^{\circ} \\ \text{manzanas} \\ n \times n = n^2 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N}^{\circ} \\ \text{pinos} \\ 8n \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N}^{\circ} \text{ manzanas} \\ = 125 \times 125 = \\ 15625 \\ \\ \text{pinos} \\ = 8 \times 125 = \\ 1000. \end{array}$
--	---	---

En la parte izquierda de la Figura 30 se puede observar la expresión algebraica para calcular la cantidad de manzanos y en el centro la expresión con la cual se puede determinar el número de pinos, también la respuesta plantea el proceso de generalización y el cálculo respectivo para el terreno número 125, estos argumentos posibilitan asociar el proceso de comprensión del participante con el nivel tres, “comprensión de la imagen” y descripto uno (**N3-D1**: Agrupa las características del patrón y establece conclusiones en situaciones que involucran relaciones en torno al concepto de función).

En esta respuesta al igual que en solución del ítem c de la situación uno, el participante Manu presenta de nuevo elementos relacionados con la generalización de regularidades a través de expresiones algebraicas.

4.2.2.11. Descripción solución ítem (d) Lisa. La Figura 31 expone la respuesta de Lisa.

Figura 31

Cálculo de manzanos y pinos participante Lisa

- d. ¿Cómo podemos determinar el número de manzanos y coníferas para cualquier número del terreno, por ejemplo el terreno N° 125? Explica la forma para hallarlos.

Se multiplica el número del terreno por si mismo para hallar el número de manzanos, se multiplica el número del terreno por 8.

N° Terreno : 125

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 125 \\ \hline 625 \\ 2500 \\ 12500 \\ \hline 15625 \end{array} \rightarrow \text{Número de manzanos}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 8 \\ \hline 1000 \end{array} \rightarrow \text{Número de pinos}$$

Por medio de la respuesta es posible predecir que Lisa brinda preferencias a las justificaciones verbales traducidas posteriormente en enunciados y operaciones matemáticas, de esta manera la comprensión de la situación permite al participante calcular el número de manzanos y pinos. Por las manifestaciones de comprensión anteriores el proceso del estudiante es vinculado al nivel tres, “comprensión de la imagen” y descriptor uno. (N3-D1: Agrupa las características del patrón y establece conclusiones en situaciones que involucran relaciones en torno al concepto de función).

4.2.2.12. Descripción solución ítem (d) Eli. La Figura 32 representa la respuesta de Eli.

Figura 32

Cálculo de manzanos y pinos participante Eli

- d. ¿Cómo podemos determinar el número de manzanos y coníferas para cualquier número del terreno, por ejemplo el terreno N° 125? Explica la forma para hallarlos.

Terreno N°	Cantidad de manzanos	Cantidad de pinos
125	$125 \times 125 = 15.625$	$125 \times 8 = 1000$

En la Figura 32 se puede notar que Eli bosqueja la respuesta por medio del algoritmo de la multiplicación, de esta forma halla la cantidad de manzanos y de pinos respectivamente, también es posible observar ausencia de procesos de generalización como lo solicitaba la pregunta. Por lo tanto, este proceso del participante es clasificado en el nivel dos “creación de la imagen” y descriptor uno. (N2-D1: Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función).

4.2.2.13. Descripción solución ítem (e) Manu. Seguidamente se presenta la respuesta del estudiante.

Figura 33

Conclusiones situación manzanos participante Manu

c. Establece conclusiones respecto de la situación

En los procesos anteriores se muestran patrones de regularidad. Todo tiene un proceso consecutivo

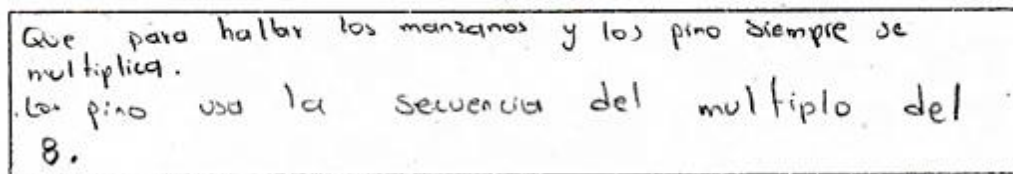
En la respuesta el participante sugiere la idea de regularidad y busca establecer un patrón con características de alguna forma “consecutivas”, el patrón describe entonces el comportamiento de la situación y como se observó en ítems anteriores Manu logró llegar a procesos de generalización. El proceso de pensamiento del estudiante permite asociarlo al nivel tres, “comprensión de la imagen” y descriptor uno. (N3-D1: Agrupa las características del patrón y establece conclusiones en situaciones que involucran relaciones en torno al concepto de función).

4.2.2.14. Descripción solución ítem (d) Lisa. En la Figura 34 se muestra la respuesta del participante Lisa.

Figura 34

Conclusión situación manzanos participante Lisa

e. Establece conclusiones respecto de la situación



Que para hallar los manzanos y los pino siempre se multiplica.
 Los pino usa la secuencia del múltiplo del 8.

En la respuesta de Lisa el participante justifica a través de la multiplicación, además indica la secuencia de los números múltiplos de ocho. Las evidencias de comprensión permiten asociar el proceso de pensamiento del estudiante en el nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor uno. (N2-D1: Usa enunciados y expresiones numéricas para justificar reglas de formación deducidas en patrones y/o situaciones relacionadas con el concepto de función).

4.2.3. Trayectorias de comprensión

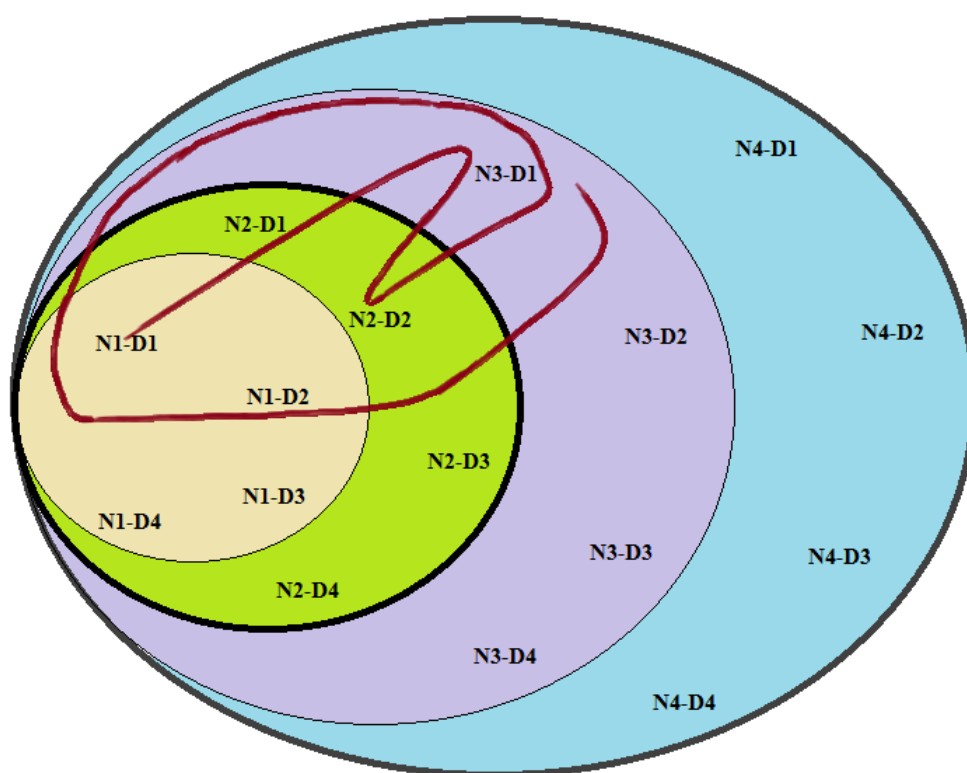
Algunos de los procesos de pensamiento de los participantes se categorizaron en los niveles sugeridos en el análisis previo de las situaciones (Ver anexo I). En este sentido los ítems **a** y **b** de la situación cuadrados perfectos y las cuestiones **a**, **b**, y **c**, de la situación manzanos fueron resueltas por los estudiantes ubicándose en ocasiones en niveles y descriptores propuestos en el análisis preliminar.

No obstante, los participantes Eli y Lisa tuvieron dificultades para proponer respuestas satisfactorias para la cuestión **c** de la situación cuadrados perfectos y el ítem **d** de la situación manzanos, estas preguntas exigieron un mayor nivel de razonamiento y discusión de los estudiantes y fue necesario que el investigador interviniera para orientar el proceso de comprensión y solución pretendida. La Figura 35 expone el recorrido del estudiante Manu, a través de los niveles de comprensión, en comparación con los otros dos casos este participante se

posicionó un mayor número de veces en el nivel tres, “comprensión de la imagen” y demostró progreso en la comprensión de las situaciones.

Figura 35

Trayectoria de comprensión situaciones 1 y 3 participante Manu



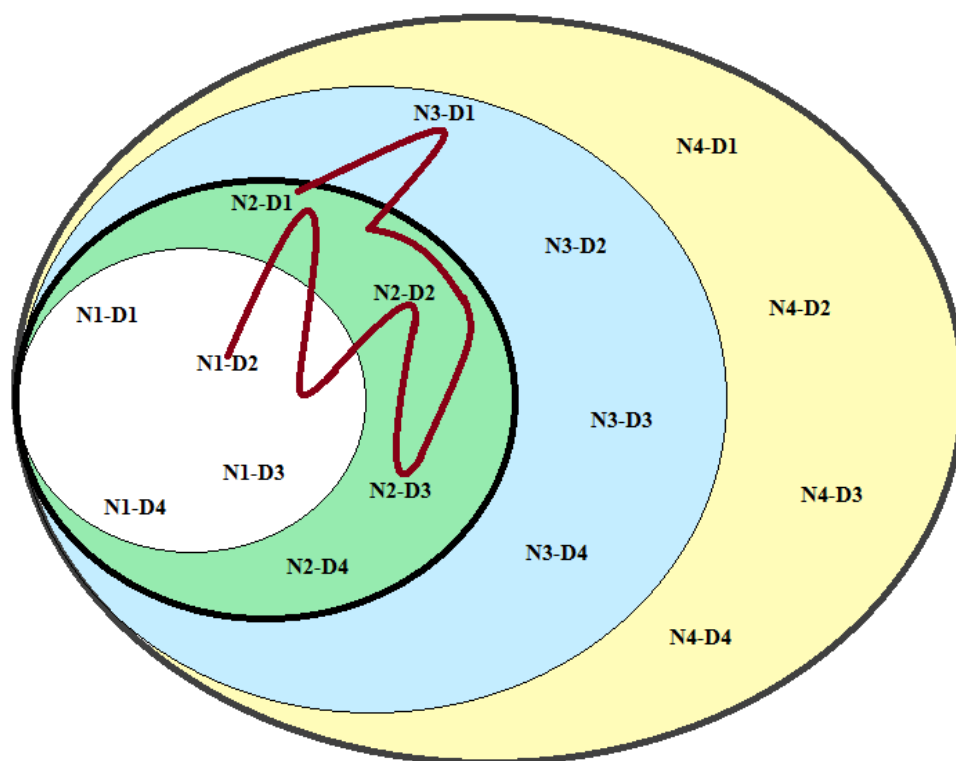
Nota. Fuente elaboración propia.

La dificultad de los estudiantes para resolver satisfactoriamente el ítem **c** de la situación cuadrados perfectos y el ítem **d** de la situación “manzanos” referidas a la deducción de procesos de generalización, indica que en los procesos de enseñanza aprendizaje deben prevalecer situaciones en las cuales sea posible formalizar y generalizar, esto sugiere la necesidad de trabajar en el aula diversas situaciones, donde el álgebra se aproveche como una herramienta útil para deducir patrones, modelar juegos matemáticos, acertijos, situaciones hipotéticas y reales.

Es evidente la facilidad de los participantes para asociar sus procesos de pensamiento con la “creación de imágenes”, en general las evidencias de comprensión de los participantes Manu, Lisa y Eli, se posicionaron en el nivel dos “creación de la imagen” en alguno de los ítems de las situaciones. La Figura 36 representa el recorrido por los niveles de comprensión para el caso Lisa.

Figura 36

Trayectoria de comprensión situaciones 1 y 3 participante Lisa



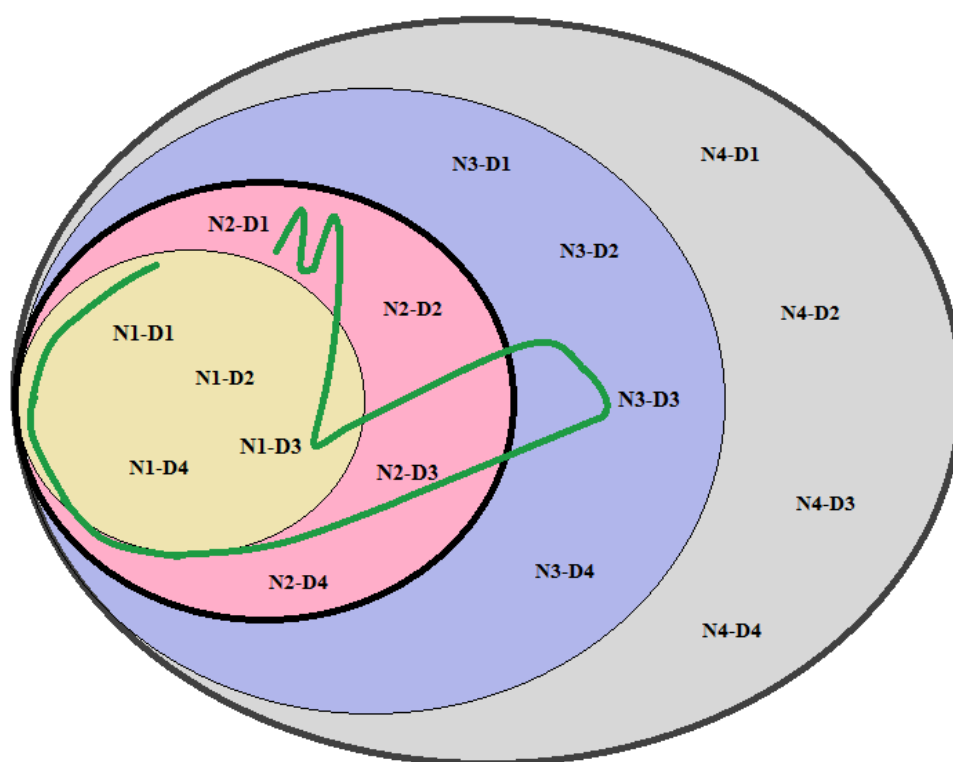
Nota. Fuente elaboración propia.

La Figura 36 muestra como durante el proceso de comprensión de Lisa, este participante recurre en varias ocasiones al nivel dos, “creación de la imagen” para elaborar una respuesta a las cuestiones de las situaciones.

En consecuencia, a partir de la descripción de las situaciones resueltas por los participantes es posible determinar diversas formas de comprensión, con aspectos comunes como el planteamiento de relaciones aditivas, multiplicativas, de potencias y reconocimiento de secuencias. La Figura 37 representa la trayectoria seguida por el participante Eli, a través de los niveles de comprensión.

Figura 37

Trayectoria de comprensión situaciones 1 y 3 participante Eli



Nota. Fuente elaboración propia.

4.3. Caracterización encuentro # 3. Cambio y relaciones

El encuentro número tres estuvo constituido por las situaciones chatear y caminar (ver anexo D), en este análisis se presenta los resultados de la situación cuatro y se omite la situación cinco, ya que en esta situación fue necesario que el investigador interviniera en la orientación

porque los estudiantes presentaron mayores dificultades en su comprensión y entonces se planeó retomar en el encuentro número 7.

4.3.1. Descripción situación cuatro chatear

Con el desarrollo de la situación cuatro, se propuso a los participantes vincular y establecer relaciones de cambio entre variables como tiempo y lugar. A continuación, se muestra el inicio de la situación cuatro “chatear”.

Figura 38

Inicio situación 4 chatear

CAMBIO Y RELACIONES

Situación 4: CHATEAR

Hans (de Berlín, Alemania) y Mark (de Sydney, Australia) se comunican a menudo utilizando el “chat” de internet. Ambos tienen que conectarse en línea simultáneamente para poder “chatear”. Deseando encontrar una hora apropiada para hacerlo, Mark buscó un mapa horario mundial y halló lo siguiente:



4.3.1.1. Descripción solución ítem (a) Manu. La Figura 39 representa el ítem **a** con la respuesta de Manu.

Figura 39

Descripción situación Berlín y Sydney participante Manu

a. Describe la situación según la hora en Berlín y Sydney.

Entre Berlín y Sydney hay 9 horas de diferencia
 Entre Greenwich y Berlín hay 1 hora de diferencia
 Entre Greenwich y Sydney hay 10 horas de diferencia

En la respuesta el participante determina una diferencia de nueve horas entre las ciudades de Berlín y Sydney, adicionalmente considera Greenwich como otro lugar y establece una comparación con las localidades de Berlín y Sydney. Estos argumentos justifican vincular el proceso de comprensión de Manu con el nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor tres. (N2-D3: Describe relaciones de dependencia entre variables).

4.3.1.2. Descripción solución ítem (a) Lisa. La Figura 40 representa la solución de Lisa.

Figura 40

Caracterización de situación Berlín y Sydney participante Lisa

a. Describe la situación según la hora en Berlín y Sydney.

Entre las dos ciudades se llevan 9 horas
y en Sydney es un día después ejemplo:
Berlín 1:00 AM de 16 de agosto x Sydney 10:00 de 17 Agosto

En este caso al igual que en el anterior Lisa identifica la diferencia de nueve horas entre el registro horario de los lugares Berlín y Sydney; además agrega “en Sydney es un día después...”, se puede notar en la respuesta del participante una apreciación de cambio de día, seguramente por las horas 1:00 a.m. y 10:00 a.m. Este proceso cognitivo del estudiante es clasificado en el nivel dos “creación de la imagen” y descriptor tres (N2-D3: Describe relaciones de dependencia entre variables).

4.3.1.3. Descripción solución ítem (a) Eli. La figura 41 expone la solución de Eli.

Figura 41

Caracterización de la situación Berlín y Sydney participante Eli

a. Describe la situación según la hora en Berlín y Sydney.

Hay 9 horas de diferencia entre Berlín y Sydney.

En este caso el participante Eli escribe “hay 9 nueve horas de diferencia entre Berlín y Sydney” y no extiende su justificación. Este estudiante es clasificado en el nivel uno “conocimiento primitivo” y descriptor dos. (**N1-D2**: Utiliza el lenguaje natural y enunciados para representar la comprensión de situaciones ligadas al concepto de función).

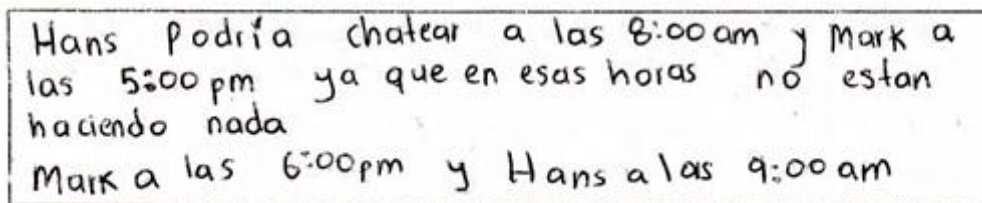
Seguidamente se expone el análisis del ítem c de la situación 4, el ítem b es omitido ya que es similar a la cuestión a, (ver anexo D).

4.3.1.4. Descripción solución ítem (c) Manu. La Figura 42 es la respuesta a la cuestión c exhibida por Manu.

Figura 42

Descripción situación (c) chatear Manu

- c. Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana de sus respectivas horas locales porque estarán durmiendo.
 ¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans?, encuentra mínimo dos respuestas diferentes, justifica.



Hans podría chatear a las 8:00 am y Mark a las 5:00 pm ya que en esas horas no están haciendo nada.
 Mark a las 6:00 pm y Hans a las 9:00 am

En este caso el participante Manu escribe dos soluciones, en primer lugar: “Hans podría chatear a las 8:00 a.m. y Mark a las 5:00 p.m...” y en segundo lugar: “Mark a las 6:00 p.m. y Hans a las 9:00 a.m.” la respuesta inicial es válida y evidencia la capacidad analítica y comprensiva del estudiante para hallar una solución satisfactoria a la situación. Por su parte en la segunda respuesta Hans no puede chatear a las 9:00 a.m. porque a esa hora debe ingresar a su respectivo colegio.

En la caracterización previa de los encuentros esta pregunta se categorizó en el nivel tres, “comprensión de la imagen”, por la capacidad exploratoria que exige para brindar una respuesta adecuada a la situación. Es relevante la solución del participante, dado que acierta en una de las respuestas y demuestra aprehensión y entendimiento, por lo tanto, las manifestaciones de comprensión de Manu son ubicadas en el nivel tres, “comprensión de la imagen” y descriptor tres. (N3-D3: Comprende relaciones de cambio entre variables).

4.3.1.5. Descripción solución ítem (c) Lisa. La Figura 43 representa la cuestión c y la respuesta planteada por Lisa.

Figura 43

Inferencias situación chatear participante Lisa

- c. Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana de sus respectivas horas locales porque estarán durmiendo.
¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans?, encuentra mínimo dos respuestas diferentes, justifica.

Podrían chatear de 7:00 a 9:00 de mañana porque en ese tiempo no están haciendo nada y de 4:30 a 11:00 de la noche porque ya fueron al colegio

En este caso el participante Lisa justifica de la siguiente manera: “Podrían chatear de 7:00 a 9:00 de la mañana porque en ese tiempo no están haciendo nada y de 4:30 a 11:00 de la noche porque ya fueron al colegio” en la respuesta el estudiante no particulariza para una hora específica en la que Mark y Hans puedan chatear juntos, en general plantea 2 intervalos en la solución. De la respuesta se puede deducir que el participante resuelve la cuestión usando conocimientos primitivos referidos a la lectoescritura, es decir, hace comprensión literal del

enunciado y se le dificulta asimilar nuevas ideas o crear nuevas imágenes ya que actúa a partir de las primeras impresiones; por estas razones el proceso de comprensión del participante es clasificado en el nivel uno “conocimiento primitivo” y descriptor dos. (N1-D2: Utiliza el lenguaje natural y enunciados para representar la comprensión de situaciones ligadas al concepto de función).

4.3.1.6. Descripción solución ítem (c) Eli. La Figura 44 expone la solución propuesta por el participante Eli.

Figura 44

Análisis situación chatear participante Eli

- c. Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana de sus respectivas horas locales porque estarán durmiendo.
¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans?, encuentra mínimo dos respuestas diferentes, justifica.

Handwritten solution by Eli:

① De 9 am a 4:30 pm son 7 horas
De 11 pm a 7 am son 8 horas
 $\frac{15h}{24h} = 9h$

Mark estudia 9am (7h) sale 4:30pm
Hans estudia 12am (7h) sale 7:00am
Mark duerme 11 pm (8h) despierta 7:00am
Hans duerme 2pm (8h) despierta 10 pm

Se retrocedió el horario, porque Sydney le lleva a Berlin 9 horas de diferencia adelantado pueden chatear a las 7am

② Hans a las 8am y Mark a las 5pm
Mark a las 6pm y Hans a las 9am

9h y media libre.

En la solución de Eli, el participante inicia describiendo las horas que Hans y Mark utilizan respectivamente para estudiar y dormir, en la respuesta es comprensible los horarios propuestos para Mark en sus actividades, sin embargo, son confusos los horarios para Hans, dado que los tiempos no corresponden con las horas destinadas para dormir y estudiar. En definitiva, el participante comprende que los lugares se llevan nueve horas de diferencia y establece solo una respuesta lógica para el ítem al final de su elaboración; “Hans a las 8 a.m. y Mark a las 5 p.m...”. Estos argumentos justifican asociar el proceso de comprensión de Eli con el nivel dos,

“creación de la imagen” y descriptor tres, considerando que evidencia una comprensión parcial de la situación. (N2-D3: Describe relaciones de dependencia entre variables.

4.3.2. Conclusiones sobre la descripción de la situación 4

En general los participantes Manu, Lisa y Eli identificaron con relativa facilidad la diferencia entre las horas de los lugares Berlín y Sydney, así utilizaron palabras y números para representar sus comprensiones, entre ellas horas, ciudades, países y horarios adelantados o atrasados, por ejemplo “me devuelvo 9 horas”. Los participantes Manu y Eli crecieron en la comprensión de la situación o demostraron mayores evidencias de comprensión que el caso Lisa, dado que los participantes 1 y 3 identifican cambios y relaciones en la situación, ya que lograron establecer parte de la respuesta satisfactoria para el ítem (c) y por el contrario al caso 2 Lisa se le dificultó por ejemplo evidenciar elementos de variación en este ítem.

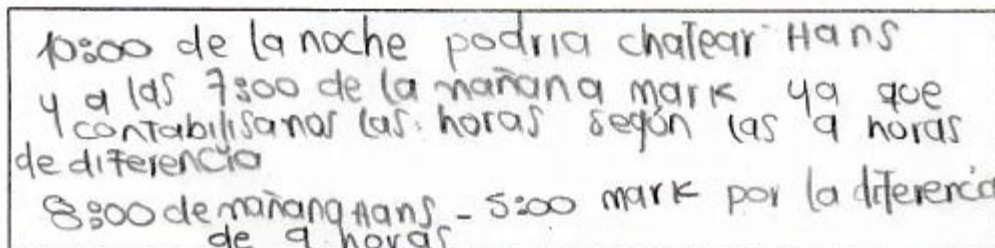
A través del análisis acerca de cómo el resto de los compañeros del grupo resolvieron el ítem (c) de la situación, el cual básicamente solicitaba encontrar dos rangos de tiempo que mantuviesen una diferencia horaria de nueve horas con determinadas condiciones. Se encontró que un número reducido de estudiantes logró comprender la situación y llegar a una respuesta totalmente válida. La Figura 45 representa una de las respuestas de los estudiantes.

Figura 45

Respuesta de otro compañero del curso

- c. Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana de sus respectivas horas locales porque estarán durmiendo.

¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans?, encuentra mínimo dos respuestas diferentes, justifica.



11:00 de la noche podría chatear Hans
y a las 7:00 de la mañana Mark ya que
contabilizamos las horas según las 9 horas
de diferencia.
8:00 de mañana Hans - 5:00 Mark por la diferencia
de 9 horas

A través de la respuesta es posible observar la forma en que el participante halló las horas indicadas para chatear Hans y Mark, sobresale las palabras contabilizamos y diferencia, es decir, el estudiante realizó un análisis de los rangos de tiempo a partir de las horas y lugares (cambio y relaciones).

4.4. Caracterización encuentro # 4. Relaciones proporcionales y gráficas

El objetivo del encuentro número 4 consistió en proponer a los estudiantes el estudio de relaciones proporcionales entre variables a partir del análisis de enunciados y gráficas; la siguiente es la descripción del proceso de comprensión elaborado por los participantes tipificados Manu y Lisa. El encuentro estuvo compuesto por las situaciones 6 y 7. (Ver anexo encuentro E).

4.4.1. Descripción situación seis concentración de un medicamento

A través del desarrollo de esta situación se estimuló sobre todo en los estudiantes la comprensión de relaciones proporcionales inversas. La Figura 46 representa el encabezado de la situación 6.

Figura 46

Introducción encuentro número cuatro

RELACIONES PROPORCIONALES Y GRAFICAS

Situación 6: CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO

Luisa es ingresada en un hospital y es necesario aplicarle una inyección de penicilina. Su cuerpo descompone gradualmente la penicilina, de modo que una hora después de la inyección, solo el 60% de la penicilina permanece activa. Es decir, al final de cada hora contiene activo el 60% de la penicilina presente del final de la hora anterior.

Considera que a Luisa se le ha administrado una dosis de 300 miligramos de penicilina a las 8:00 de la mañana.

4.4.1.1. Descripción solución ítem (a) Manu. Se presenta a continuación el ítem con la respectiva respuesta de Manu.

Figura 47

Respuesta ítem (a) situación medicamento participante Manu

- a. Representa el comportamiento de la penicilina que permanecerá activa en la sangre de Luisa desde las 08:00 a.m. hasta las 11:00 a.m.

300 mg → 100%	$300 \text{ mg} \times \frac{60\%}{100\%} = 180 \text{ mg}$
? → 60%	
180 mg → 100%	$180 \text{ mg} \times \frac{60\%}{100\%} = 108 \text{ mg}$
? → 60%	
108 mg → 100%	$108 \text{ mg} \times \frac{60\%}{100\%} = 64 \text{ mg}$
? → 60%	

En la solución el participante Manu propone varias reglas de tres para hallar el porcentaje de penicilina que permanece activo transcurrido un lapso de una hora, además en la respuesta es posible observar la comprensión del procedimiento algorítmico para resolver la regla de tres. Los argumentos anteriores permiten relacionar el proceso de pensamiento del caso con el nivel tres,

“comprensión de la imagen” y descriptor cuatro. (N3-D4: Utiliza la regla de tres para comprender la proporcionalidad en situaciones asociadas con el desarrollo del concepto de función).

4.4.1.2. Descripción solución ítem (a) Lisa. La Figura 48 es la respuesta de Lisa.

Figura 48

Procedimientos respuesta ítem (a) participante Lisa

- a. Representa el comportamiento de la penicilina que permanecerá activa en la sangre de Luisa desde las 08:00 a.m. hasta las 11:00 a.m.

The handwritten work shows three separate rule-of-three calculations:

$$\begin{array}{l} 300 \rightarrow 100\% \\ 1,88 \rightarrow 60\% \\ x = 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100 \rightarrow 100\% \\ ? \rightarrow 60\% \\ x = 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 108 \rightarrow 100\% \\ ? \rightarrow 60\% \\ x = 64,8 \end{array}$$

Below the calculations, it says: "Lo que le queda a Luisa en total es 64,8 miligramos."

En el procedimiento de Lisa se observan los cálculos matemáticos necesarios para hallar las cantidades de penicilina transcurrida cada hora, también es evidente la aplicación de algoritmos básicos como la multiplicación y la división. Por otra parte, la forma de ubicar la solución en el recuadro hace notable un pensamiento tal vez no lineal, es decir, no mecanizado en el sentido de plantear las reglas de tres de manera aleatoria en la solución. Estas evidencias de comprensión ubican el proceso del participante en el nivel “comprensión de la imagen” y descriptor tres. (N3-D3: Comprende relaciones de cambio entre variables).

4.4.1.3. Descripción solución ítem (b) Manu. La Figura 49 representa la respuesta de Manu.

Figura 49

Respuesta acerca del ítem (b) participante Manu

- b. Describe la relación existente entre el tiempo y la concentración de penicilina en el cuerpo de Luisa.

El medicamento va reduciendo un 60% cada hora teniendo en cuenta la penicilina de la hora anterior.
A las 8:00am tuvo activo en su sangre 180mg, a la hora siguiente solo tuvo activo 108mg y al final quedó activo en su sangre un 64mg de medicamento

En la respuesta el participante Manu justifica a partir de la lectura del enunciado, esto es, parafrasea la situación y añade información generada en el desarrollo del ítem (a), conoce que el medicamento está reduciendo cada hora y comenta cuál es la cantidad; como el estudiante está describiendo y para ello usa enunciados verbales su proceso de pensamiento es asociado al nivel uno “conocimiento primitivo” y descriptor cuatro. (N1-D4: Identifica el vínculo de la proporcionalidad entre las variables presentes en situaciones asociadas al concepto de función).

4.4.1.4. Descripción solución ítem (b) Lisa. La Figura 50 expone la respuesta del ítem b elaborada por Lisa,

Figura 50

Respuesta del participante Lisa

- b. Describe la relación existente entre el tiempo y la concentración de penicilina en el cuerpo de Luisa.

En cada hora le queda el 60% de la penicilina si en la primera hora le inyectan 300ml el 60% sería 180 en la segunda le queda otro 60% que sería 108 y a la tercera le queda otro 60% que sería 64,8

Este participante de manera similar que Manu responde a través del proceso realizado en el ítem (a), para ello describe y comenta cuál es la cantidad de penicilina que permanece activa

cada hora. Estos argumentos justifican asociar el proceso de comprensión de Lisa con el nivel uno “conocimiento primitivo” y descriptor cuatro. (**N1-D4**: Identifica el vínculo de la proporcionalidad entre las variables presentes en situaciones asociadas al concepto de función).

4.4.2. Conclusiones sobre la descripción de la situación 6

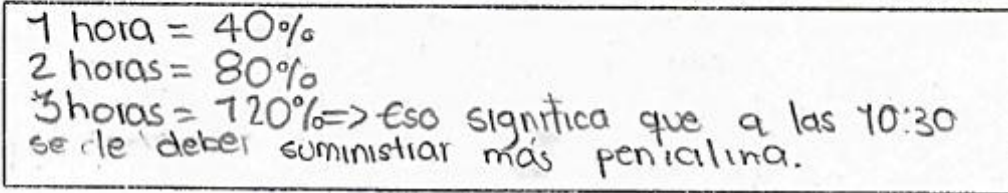
Los dos participantes descritos anteriormente Manu y Lisa, evidenciaron elementos relacionados con nociones de proporcionalidad, también es posible observar en las respuestas el uso acertado de procesos algorítmicos como reglas de tres, divisiones y multiplicaciones. No obstante, es preciso considerar que los participantes debieron haber establecido relaciones explícitas de dependencia entre variables en el sentido inverso o reglas de tres inversas, sobre todo cuando se les interrogó por la relación entre el tiempo y la penicilina (cuestión **b**). Haciendo alusión a la teoría de PK es posible considerar un proceso recursivo en las respuestas de los participantes, debido a que estos justifican el ítem (**b**), principalmente por el proceso de comprensión realizado en la cuestión (**a**).

Con el propósito de enriquecer la discusión sobre el desarrollo de esta esta situación, se revisaron las otras guías de los compañeros restantes del curso, encontrando que un grupo considerable de estudiantes tienen dificultades para comprender las particularidades de la cuestión, es decir, la manera en que está cambiando la cantidad de penicilina en el cuerpo de Lisa en función del tiempo. La Figura 51 expone la respuesta de uno de los estudiantes del grupo 9ºA, es representativa debido a que varios compañeros respondieron de manera similar.

Figura 51

Respuesta de otro compañero del curso

- b. Describe la relación existente entre el tiempo y la concentración de penicilina en el cuerpo de Luisa.



1 hora = 40%
 2 horas = 80%
 3 horas = 120% => eso significa que a las 10:30 se le debe suministrar más penicilina.

En la imagen el participante está considerando el porcentaje sobre el valor inicial de la penicilina (300 mg), por tal razón indica la necesidad de aplicar penicilina a las 10:30 a.m.

4.5. Caracterización encuentro # 5. Variación

Por medio del encuentro número 5 los participantes dedujeron de manera explícita el concepto de función a través de la comprensión de vínculo entre variables.

4.5.1. Descripción situación ocho el peso de los sacos de papa

El desarrollo de la situación 8 posibilitó en los estudiantes procesos de pensamiento asociados con inferir relaciones de dependencia, covariación y propiciar el empleo de varias representaciones. La Figura 52 representa el inicio de la situación 8, “El peso de los sacos de papa”.

Figura 52

Introducción encuentro número cinco

VARIACIÓN**Situación 8: EL PESO DE LOS SACOS DE PAPA**

Mariana trabaja en la placita de mercado y sabe que dos sacos de papa tienen un peso de 160 kg, ayúdala a deducir: ¿cuál es el peso de 1, 1.5, 2.5, 3, y cuatro sacos de papa respectivamente?, ¿cuál es el peso de 7 sacos de papa?, ¿y de 13 sacos de papa?

A continuación, se describen los procedimientos realizados por los tres participantes.

4.5.1.1. Descripción solución ítem (a) Manu. La Figura 53 representa la respuesta elaborada por Manu.

Figura 53

Procedimientos situación sacos de papa Manu

a. Procedimientos, cálculos, representaciones.

Si dos sacos de papas pesan 160kg, uno solo pesa la mitad de este, que equivale a 80kg y para los decimales sacamos la mitad de ese 80 y da 40kg.

$\begin{array}{r} 160 \overline{) 2} \\ 00 \overline{) 80} \end{array}$	$\begin{array}{r} 80 \overline{) 2} \\ 00 \overline{) 40} \end{array}$	<p>para hallar los enteros multiplico 80kg por el número de sacos, pero para decimales me devuelvo al resultado anterior y solo le sumo 40kg</p>
<p>S</p> <p>1 = 80 kg</p> <p>1,5 = 120 kg</p> <p>2 = 160 kg</p> <p>2,5 = 200 kg</p> <p>3 = 240 kg</p> <p>3,5 = 280 kg</p> <p>4 = 320 kg</p> <p>4,5 = 360 kg</p>	<p>S</p> <p>5 = 400 kg</p> <p>6 = 440 kg</p> <p>7 = 560 kg</p> <p>8 = 640 kg</p> <p>9 = 720 kg</p> <p>10 = 800 kg</p> <p>11 = 880 kg</p> <p>12 = 960 kg</p> <p>13 = 104 kg</p>	

El participante Manu inicia el desarrollo de la situación por medio de inferencias según el peso de dos sacos de papa, de esta forma sugiere cómo calcular el peso para cantidades enteras y fraccionadas de sacos, para ello describe en una columna el peso respectivo de los sacos desde el número uno hasta el 13. En el lado derecho de la respuesta expone la aplicación de relaciones proporcionales para hacer los cálculos a través de la multiplicación y la resta, estos argumentos justifican la clasificación del proceso cognitivo de Manu en el nivel dos, “creación de la imagen” y el descriptor cuatro. (N2-D4: Representa la proporcionalidad de una situación mediante multiplicaciones y divisiones).

4.5.1.2. Descripción solución ítem (a) Lisa. La Figura 54 es la propuesta de solución de Lisa.

Figura 54*Argumentos participante Lisa***a. Procedimientos, cálculos, representaciones.**

160 → 100%	1.5 sacos	2.5 sacos	3 sacos	4 sacos
? → 50%	120 Kg	200 Kg	240 Kg	320 Kg
= 80	por que un			
1 sacos	sacos pesa			
por que si 2	80 y la mitad			
sacos pesan 160	de otro sacos			
La mitad seria 80	seria 40			
	80 + 40 = 120			
7 sacos	13 sacos			
560 Kg	1040 Kg			
por que 8 x 7	por que se			
56	puede multiplicar			
	80 que esto que			
	vale un sacos			
	por 13			

Este participante propone inicialmente una regla de tres, en ella considera el peso de dos sacos de papa como el cien por ciento y se cuestiona ¿cuál es el valor del cincuenta por ciento?, así mismo, utiliza nociones de mitad, estructuras multiplicativas y aditivas para calcular los respectivos pesos. No obstante, aunque Lisa no realizó todos los cálculos es notable su comprensión de la situación y el planteamiento de razonamientos e inferencias, por estas razones el proceso de pensamiento del estudiante es asociado en el nivel tres, “comprensión de la imagen” y el descriptor cuatro de este estrato. (N3-D4: Utiliza la regla de tres para comprender la proporcionalidad en situaciones asociadas con el desarrollo del concepto de función).

4.5.1.3. Descripción solución ítem (a) Eli. Esta es la respuesta expuesta por el participante Eli.

Figura 55

Solución planteada por Eli

a. Procedimientos, cálculos, representaciones.

Handwritten work showing the calculation of the weight of potato sacks:

$$\begin{array}{r} 160 \\ 30 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array} = 1 \text{ saco de papa pesa } 30 \text{ kg}$$

$$30 + 40 = 1.5 \text{ sacos de papa pesa } 120 \text{ kg}$$

$$30 + 30 + 40 = 2.5 \text{ sacos de papas pesan } 200 \text{ kg}$$

$$30 + 30 + 30 = 3 \text{ sacos de papas pesan } 240 \text{ kg}$$

$$30 + 30 + 30 + 30 = 4 \text{ sacos de papas pesan } 320 \text{ kg}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 7 \\ \hline 560 \end{array} = 7 \text{ sacos de papas pesan } 560 \text{ kg}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 13 \\ \hline 390 \\ \hline 1040 \end{array} = 13 \text{ sacos de papas pesan } 1040 \text{ kg.}$$

El participante Eli plantea inicialmente el algoritmo de la división para calcular el peso de un saco de papa, luego realiza sumas consecutivas y por último multiplicaciones para hallar el peso de los otros sacos. Además, el estudiante deduce de forma correcta el peso de medio saco papa, para así determinar el peso de cantidades decimales de sacos. En los procedimientos de Eli se observa comprensión de la situación; dado que el descriptor cuatro del nivel “creación de la imagen” se refiere a las operaciones básicas con las cuales el estudiante evidencia aspectos de la proporcionalidad, este proceso del estudiante es vinculado con el nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor cuatro. (N2-D4: Representa la proporcionalidad de una situación mediante multiplicaciones y divisiones).

4.5.1.4. Descripción solución ítem (b) Manu. Esta es la respuesta bosquejada por el estudiante.

Figura 56

Esquema o representación participante Manu

b. Elabora una representación gráfica, tabla y/o esquema para describir la situación.

$P = 80 \text{ kg}$											
P	80 kg	120 kg	160 kg	200 kg	240 kg	280 kg	320 kg	360 kg	400 kg	440 kg	560 kg
S	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6	7
P	640 kg	720 kg	800 kg	880 kg	960 kg	104 kg					
S	8	9	10	11	12	13					
$P = 80 \text{ kg} * S = \text{Ecuación}$ El peso es igual a 80 kg por la cantidad de sacos											

En este caso el participante Manu inicia determinando el peso de un saco de papa y construye una tabla de valores con las variables peso y número de sacos, la estructura de la tabla posibilita comprender implícitamente la idea de función, ya que existe una correspondencia uno a uno, esto es, a la variable dependiente peso se le asigna su valor en función de la cantidad de sacos.

En la última parte el estudiante Manu propone un modelo matemático con el fin de generalizar la situación y hallar el peso para cualquier número de sacos, en palabras del participante una “ecuación”, en la cual “El peso es igual a 80 kg por la cantidad de sacos”, estos argumentos evidencian la comprensión del estudiante a partir de la relación entre las variables y la regularidad aumentar de a 80 kg, por estas razones el proceso cognitivo de Manu es clasificado en el nivel cuatro “observación de la propiedad” y descriptor dos. (N4-D2:

Representa por medio de expresiones algebraicas la comprensión del concepto de función a partir de tablas y gráficas).

El siguiente fragmento de la entrevista final realizada al participante Manu, confirma el proceso de comprensión del estudiante a través del cual logra elaborar tablas y establecer en ellas relaciones de correspondencia entre variables.

...**Investigador:** ¿Puedes indicar una tabla para representar el cambio?

...**Manu:** La posición y número de postes, en la posición 1, un palito, en la posición 2, cinco palitos, en la posición 3, nueve palitos, en la posición 4, trece palitos... mmm estoy sumando de a cuatro.

4.5.1.5. Descripción solución ítem (b) Lisa. La Figura 57 representa la respuesta del estudiante.

Figura 57

Solución propuesta por Lisa

b. Elabora una representación gráfica, tabla y/o esquema para describir la situación.

sacos	1	1.5	2.5	3	4	7	13
kg	80	120	200	240	320	560	1040

De esta forma es más fácil para mi entender las cosas

El participante Lisa realiza una tabla de valores, en la fila superior registra la cantidad de sacos y en la fila inferior el número de kilogramos, la caracterización permite observar que el estudiante comprende la situación a partir de la dependencia entre variables; para ello registra en primera instancia la variable independiente sacos y luego la dependiente peso, además, es posible inferir que estos resultados surgen del análisis del ítem a de dicha situación, por consiguiente las evidencias de comprensión de Lisa son clasificadas en el nivel dos “creación de la imagen” y

descriptor dos. (N2-D2: Visualiza a través de tablas las variables, datos e información involucrada en relación al concepto de función).

4.5.1.6. Descripción solución ítem (b) Eli. La Figura 58 representa la solución propuesta por el estudiante.

Figura 58

Respuesta planteada al ítem (b) Eli

b. Elabora una representación gráfica, tabla y/o esquema para describir la situación.

Nº de sacos de arroz	Peso de sacos de arroz
1	80 kg
1.5	120 kg
2.5	200 kg
3	240 kg
4	320 kg
7	560 kg
13	1040 kg

El participante Eli resuelve de manera similar que el caso 2 Lisa, para ello cambia la orientación de la tabla y utiliza un esquema en sentido vertical, en la columna del lado izquierdo registra el número de sacos y en la del lado derecho el peso en kilogramos, este proceso de comprensión del estudiante es vinculado con el nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor dos. (N2-D2: Visualiza a través de tablas las variables, datos e información involucrada en relación al concepto de función).

4.5.1.7. Descripción solución ítem (c) Manu. La Figura 59 expone la solución del estudiante.

Figura 59

Respuesta ítem participante Manu

- c. ¿Cómo es posible determinar el número de sacos contenidos en 1400 kg de papa?, plantea un procedimiento, cálculo y/o representación para la solución.

Handwritten work for Manu:

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow 80 \text{ kg} \\
 ? \rightarrow 1400 \text{ kg} \\
 \text{Regla de 3} \\
 17.5 \text{ sacos equivalen} \\
 \text{a } 1400 \text{ kg de papa}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 \times 1400 \\
 \hline
 1400
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1400 / 80 \quad X = 17.5 \\
 \begin{array}{r}
 1400 \overline{) 80} \\
 50 \\
 \underline{400} \\
 00
 \end{array}
 \end{array}$$

El participante Manu plantea una regla de tres, realiza las respectivas multiplicaciones y divisiones, además escribe un enunciado final para afirmar la respuesta, estos argumentos ubican el proceso del estudiante en el nivel tres, “comprensión de la imagen” y descriptor cuatro. (N3-D4: Utiliza la regla de tres para comprender la proporcionalidad en situaciones asociadas con el desarrollo del concepto de función).

4.5.1.8. Descripción solución ítem (c) Lisa. La Figura 60 es la respuesta del participante.

Figura 60

Solución propuesta por Lisa

- c. ¿Cómo es posible determinar el número de sacos contenidos en 1400 kg de papa?, plantea un procedimiento, cálculo y/o representación para la solución.

Handwritten work for Lisa:

$ \begin{array}{r} 80 \\ \times 17.5 \\ \hline 400 \\ 560 \\ 80 \\ \hline 1400.0 \end{array} $	<p>Si 80×13 daba 1040 multiplicamos por 17 y quedaba muy baja y por 18 más alta multiplicamos por 17.5.</p>
---	---

En este caso el participante Lisa propone solucionar a través de sus conocimientos sobre operaciones básicas, es decir, se acerca a la respuesta a partir de multiplicaciones aproximadas. Estos argumentos permiten vincular el proceso del estudiante con el nivel dos, “creación de la

imagen” y descriptor cuatro. (N2-D4: Representa la proporcionalidad de una situación mediante multiplicaciones y divisiones).

4.5.1.9. Descripción solución ítem (c) Eli. Enseguida se expone la respuesta del participante.

Figura 61

Respuesta participante Eli

- c. ¿Cómo es posible determinar el número de sacos contenidos en 1400 kg de papa?, plantea un procedimiento, cálculo y/o representación para la solución.

$$80 \cdot 17.5 = \begin{array}{r} 80 \\ \times 17.5 \\ \hline 400 \\ 560 \\ 80 \\ \hline 1400.0 \end{array}$$

El participante Eli resuelve a partir de la operación multiplicación, implícitamente sugiere conocer el peso de 17.5 sacos de papa, estos procedimientos indican que el estudiante previamente había resuelto la situación tal vez de manera mental, así el proceso del participante es asociado al nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor cuatro. (N2-D4: Representa la proporcionalidad de una situación mediante multiplicaciones y divisiones).

4.5.1.10. Descripción solución ítem (e) Manu. La Figura 62 representa la solución del participante.

Figura 62*Solución ítem (e) Manu*

- e. La matemática permite describir las situaciones por medio de **patrones o regularidades**, a continuación completa las siguientes filas según el número de sacos y los kilogramos correspondientes.

Cantidad de kilogramos de papa en 8 sacos	=	8×80	=	640
Kg (9)	=	9×80	=	720 Kg
Kg (12)	=	12×80	=	960 Kg
Kg (25)	=	25×80	=	2000 Kg
Kg (s)	=	$80 \times s$	=	Kilogramos (peso)

Escribe 2 conclusiones al respecto.

- El peso es igual o equivale a 80kg por la cantidad de sacos.
- Para encontrar los kg o los sacos se pueden tomar en cuenta los datos dados y hacerse una regla de 3.

La Figura 62 expone la forma en que el participante Manu logra registrar los datos en la tabla, es pertinente hacer mención al reglón en el cual el estudiante generaliza a través de una expresión algebraica con la cual es posible calcular el peso de cualquier número de sacos. Este proceso de pensamiento del participante es asociado al nivel cuatro, “observación de la propiedad” y descriptor cuatro. (**N4-D4: Reconoce constantes de proporcionalidad por medio de inferencias a partir de relaciones entre variables, con respecto al concepto de función**).

4.5.1.11. Descripción solución ítem (e) Eli. La Figura 63 representa la respuesta del estudiante.

Figura 63

Solución ítem (e) Eli

- e. La matemática permite describir las situaciones por medio de patrones o regularidades, a continuación completa las siguientes filas según el número de sacos y los kilogramos correspondientes.

Cantidad de kilogramos de papa en 8 sacos	=		= 640
Kg (9)	=	9 x 80	= 720
Kg (12)	=	12 x 80	= 960
Kg (25)	=	25 x 80	= 2,000
Kg (s)	=		=

Escribe 2 conclusiones al respecto.

1. El patrón que siempre se sigue es cualquier número por 80, ejemplo 40×80 , 31×80 .

2. Cuando el número de sacos aumenta, también aumenta el peso del saco.

En este caso el participante Eli deduce que en la situación existe una constante, “El patrón que siempre se sigue es cualquier número por 80...”. Además, hace alusión a la relación de covariación entre las variables de la situación, “cuando el número de sacos aumenta, también aumenta el peso...”. Adicionalmente se observa ausencia de elementos en la tabla que permitan generalizar el cálculo del peso para cualquier número de sacos, ya en evidencias de procesos de pensamientos anteriores se ha notado que el caso Eli carece de algunos criterios para plantear procesos de modelación y generalización. Estas razones justifican asociar el proceso de comprensión del participante en el nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor cuatro. (N2-D4: Representa la proporcionalidad de una situación mediante multiplicaciones y divisiones).

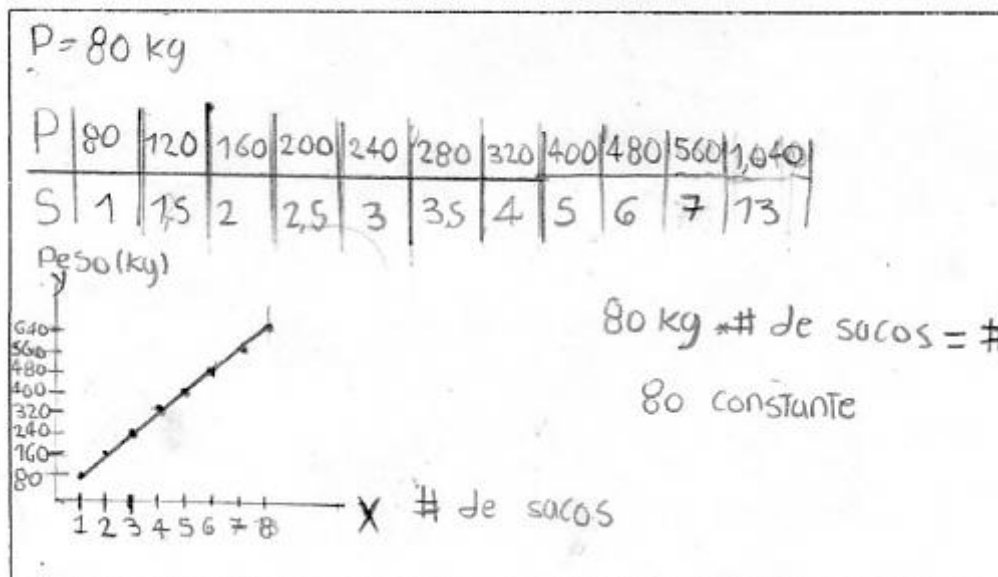
4.5.2. Conclusiones sobre la descripción de la situación 8

Para retroalimentar el análisis realizado a los participantes Manu, Lisa y Eli, seguidamente, se relaciona una de las formas de resolver el ítem (b) por los otros compañeros del curso, cabe resaltar que ninguno de los casos particularmente caracterizados elaboró un esquema de función lineal a través de la recta, por su parte una minoría de los pares del grado utilizó una representación similar a la siguiente.

Figura 64

Solución de Otro compañero del curso

- b. Elabora una representación gráfica, tabla y/o esquema para describir la situación.



En la Figura 64 resalta la representación de la situación a través de la gráfica (función lineal) que representa la relación entre las variables.

4.6. Descripción del encuentro # 6. Función lineal

El objetivo del encuentro número seis radicó en profundizar en la comprensión del concepto de función por parte de los participantes, para ello la situación presenta elementos de variación y covariación.

4.6.1. Descripción situación nueve periódico *The New York Times*

El siguiente es el encabezado de la situación.

Figura 65

Encabezado situación nueve

FUNCIÓN LINEAL

Situación 9: PERIÓDICO THE NEW YORK TIMES
Valerie trabaja como vendedora del periódico "the new york times" y por razones de cambio de administración la empresa está ofreciendo dos nuevas alternativas de contrato.

Alternativa uno.
Un salario básico de US\$50 diarios y una comisión de US\$7 por cada periódico vendido.

4.6.1.1. Descripción solución ítem (a) Manu. Esta es la respuesta del participante a la cuestión **a**.

Figura 66

Solución propuesta por Manu

a. ¿Cuánto dinero ganaría en un día, si Valerie realizará, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 ventas?

$50 + 7 * V$ Ecuación = Salario Fijo, más la comisión multiplicado por el número de periódicos vendidos. $V = \#$ de periódicos vendidos

① $50 + 7 * 1 = 50 + 7 = \$57$
 ② $50 + 7 * 2 = 50 + 14 = \$64$
 ③ $50 + 7 * 3 = 50 + 21 = \$71$
 ④ $50 + 7 * 4 = 50 + 28 = \$78$
 ⑤ $50 + 7 * 5 = 50 + 35 = \$85$
 ⑥ $50 + 7 * 6 = 50 + 42 = \$92$
 ⑦ $50 + 7 * 7 = 50 + 49 = \$99$
 ⑧ $50 + 7 * 8 = 50 + 56 = \$106$
 ⑨ $50 + 7 * 9 = 50 + 63 = \$113$
 ⑩ $50 + 7 * 10 = 50 + 70 = \$120.$

880

El estudiante Manu inicia con un bosquejo del modelo matemático que describe la situación, en sus palabras “ecuación = salario fijo, más la comisión multiplicado por el número de periódicos vendidos” y a continuación registra en forma de columna el salario básico, adicionando la comisión según la cantidad de periódicos vendidos y así sucesivamente.

Es notable en el participante la comprensión de la situación a partir del modelo planteado, en consecuencia, la ecuación permite a Manu calcular con facilidad el dinero devengado según los periódicos vendidos y establecer una respuesta satisfactoria a la cuestión, estos argumentos posibilitan relacionar el proceso del estudiante con el nivel cuatro “observación de la propiedad” y descriptor cuatro. (N4-D4: Reconoce constantes de proporcionalidad por medio de inferencias a partir de relaciones entre variables, con respecto al concepto de función).

4.6.1.2. Descripción solución ítem (a) Lisa. A continuación se expone la respuesta del estudiante al ítem a.

Figura 67

Solución propuesta por Lisa

a. ¿Cuánto dinero ganaría en un día, si Valerie realizará, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 ventas?

$ \begin{array}{r} 47 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \\ 35 \\ 42 \\ +49 \\ 56 \\ 63 \\ 70 \\ \hline 385 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 385 \text{ si vende } 10 \\ +50 \text{ El salario} \\ \hline 435 \end{array} $	$ \begin{array}{l} 7 \times 1 = 7 + 50 = 57 \\ 7 \times 2 = 14 + 50 = 64 \\ 7 \times 3 = 21 + 50 = 71 \\ 7 \times 4 = 28 + 50 = 78 \\ 7 \times 5 = 35 + 50 = 85 \\ 7 \times 6 = 42 + 50 = 92 \\ 7 \times 7 = 49 + 50 = 99 \\ 7 \times 8 = 56 + 50 = 106 \\ 7 \times 9 = 63 + 50 = 113 \\ 7 \times 10 = 70 + 50 = 120 \end{array} $ <p>Se multiplica el número de periódicos vendidos más el salario</p>
---	--	--

En la parte izquierda de los procedimientos de Lisa el participante suma el dinero ganado asumiendo que Valerie realiza una venta, dos ventas, tres ventas, cuatro ventas... hasta 10 ventas, luego agrega el salario básico correspondiente a US 50 y establece una de las respuestas. Esta es la primera aproximación que tuvo el estudiante ante la situación.

Posteriormente el participante Lisa realiza los procedimientos de la derecha y en ellos se observa que brinda prioridad a la constante siete, utilizándola para multiplicar por el número de periódicos según el orden de los números naturales y de esta manera obtiene el valor de los respectivos periódicos. Con esta descripción se deduce que implícitamente el participante está planteando la idea de función lineal a partir de la identificación de parámetros constantes en la situación (siete y cincuenta), además, comprende la dependencia del valor de los periódicos en función de la cantidad de los mismos. Dadas las evidencias de comprensión del estudiante, este proceso de pensamiento es asociado con el nivel tres, “comprensión de la imagen” y descriptor tres. (N3-D3: Comprende relaciones de cambio entre variables).

4.6.1.3. Descripción solución ítem (a) Eli. En la Figura 68 se presenta la respuesta del estudiante.

Figura 68

Solución participante tres Eli

a. ¿Cuánto dinero ganaría en un día, si Valerie realizará, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 ventas?

Handwritten student solution for item (a) showing calculations for 1 to 10 sales and a note about a daily newspaper sale.

$7 \times 1 = 7 + 50 = 57$	\rightarrow si vendiera un periódico en un día, se ganaría 57
$7 \times 2 = 14 + 50 = 64$	
$7 \times 3 = 21 + 50 = 71$	
$7 \times 4 = 28 + 50 = 78$	
$7 \times 5 = 35 + 50 = 85$	
$7 \times 6 = 42 + 50 = 92$	
$7 \times 7 = 49 + 50 = 99$	
$7 \times 8 = 56 + 50 = 106$	
$7 \times 9 = 63 + 50 = 113$	
$7 \times 10 = 70 + 50 = 120$	

Al igual que Lisa el participante Eli relaciona inicialmente la constante de proporcionalidad que indica la pendiente de la función (el número 7), seguidamente multiplica esta constante por los números naturales desde el uno hasta el diez y adiciona el salario básico (cincuenta) para obtener el resultado final. También agrega a la derecha “si Valerie vendiera un periódico en un día, se ganaría USD 57”. Como el estudiante identifica la relación de dependencia entre las variables este proceso de comprensión es clasificado en el nivel tres, “comprensión de la imagen” y descriptor tres. (N3-D3: Comprende relaciones de cambio entre variables).

4.6.1.4. Descripción solución ítem (b) Manu. La figura 69 representa la solución propuesta por Manu.

Figura 69*Solución propuesta por Manu*

- b. Expresa la relación que existe entre el salario total devengado a diario y el número de periódicos vendidos, a partir de los “cálculos y/o procedimientos anteriores”.

A medida que venda sus periódicos tendrá un aumento en su salario básico de \$7, quedando así o representando la tabla del 7 más sus \$50 de pago fijo.

A mayor cantidad de periódicos vendidos, mayor cantidad de dinero.

Su valor aumenta de 7 en 7.

En esta respuesta el caso Manu inicia escribiendo “A medida que venda los periódicos tendrá un aumento en su salario básico de USD 7, quedando así o representado la tabla del 7 más sus USD 50 de pago fijo”, en esta respuesta es posible intuir la concepción de covariación en el estudiante, es decir, mientras una variable aumenta la otra también lo hace, a mayor cantidad de periódicos vendidos mayor cantidad de dinero.

De la respuesta anterior se infiere que el participante responde con base a la idea de función, dado que establece la relación entre variables, la correspondencia uno a uno y la idea de proporcionalidad. Los argumentos anteriores permiten clasificar el proceso de comprensión de Manu en el nivel cuatro “observación de la propiedad” y descriptor número tres. (**N4-D3:** Comprende relaciones de covariación ente variables).

4.6.1.5. Descripción solución ítem (b) Lisa. La figura 70 exhibe la solución propuesta por el participante.

Figura 70*Solución planteada por Lisa*

- b. Expresa la relación que existe entre el salario total devengado a diario y el número de periódicos vendidos, a partir de los “cálculos y/o procedimientos anteriores”.

Entre más periódicos vendidos más gana

En este caso el participante Lisa responde “entre más periódicos venda más gana”, al igual que en la respuesta anterior de Manu, también existe una idea de correlación y dependencia entre variables, este proceso de pensamiento del estudiante es clasificado en el nivel “comprensión de la imagen” y descriptor tres. (N3-D3: Comprende relaciones de cambio entre variables).

4.6.1.6. Descripción solución ítem (b) Eli. La figura 71 representa la solución del estudiante.

Figura 71*Respuesta participante Eli*

- b. Expresa la relación que existe entre el salario total devengado a diario y el número de periódicos vendidos, a partir de los “cálculos y/o procedimientos anteriores”.

Cada que Valerie vende periódicos la suma de dinero que aumenta son 7\$

En este caso el participante Eli justifica “cada que Valerie vende periódicos la suma de dinero que aumenta son 7”, se puede afirmar que identifica un patrón, una regularidad un aumento constante. Esta evidencia de comprensión del estudiante es categorizada en el nivel tres, “comprensión de la imagen” y descriptor número uno. (N3-D1: Agrupa las características del patrón y establece conclusiones en situaciones que involucran relaciones en torno al concepto de función).

4.6.1.7. Descripción solución ítem (c) Manu. La siguiente es la justificación brindada por el estudiante.

Figura 72

Representación propuesta por Manu

- c. Representa a través de una gráfica, tabla o esquema la relación entre el número de periódicos "the new york times" y los ingresos correspondientes.

Tabla de valores

$V = \#$ de periódicos vendidos.
 $S =$ Sueldo
 $C =$ Comisión

V	1	2	3	4	5	6	7	8
S+C	50+7	50+14	50+21	50+28	50+35	50+42	50+49	50+56
	\$57	\$64	\$71	\$78	\$85	\$92	\$99	\$106

V	9	10
S+C	50+63	50+70
	\$113	\$120

para cualquier valor

$$\frac{V}{S+C} = 50 + 7 * V$$

En esta respuesta el estudiante Manu justifica mediante una tabla de valores estructurada en sentido horizontal, nombrando cada una de las variables y constantes en su planteamiento. Es significativo resaltar la expresión ubicada en el lado inferior derecho con la cual el participante pretende generalizar para cualquier número de periódicos vendidos. Este proceso de comprensión del estudiante es vinculado con el nivel cuatro, observación de la propiedad y descriptor dos. (N4-D2: Representa por medio de expresiones algebraicas la comprensión del concepto de función a partir de tablas y gráficas).

4.6.1.8. Descripción solución ítem (c) caso 2: Lisa. En la tabla número 73 se expone la solución propuesta por el estudiante.

Figura 73

Respuesta participante Lisa

- c. Representa a través de una gráfica, tabla o esquema la relación entre el número de periódicos “the new york times” y los ingresos correspondientes.

# periódicos vendidos	Total por cada periódico	Salario	Total
1	7	50 \$	57
2	14	50	64
3	21	50	71
4	28	50	78
5	35	50	85
6	42	50	92
7	49	50	99
8	56	50	106
9	63	50	113
10	70	50	120

El participante Lisa reseña en la columna uno el número de periódicos, en la columna dos la comisión según corresponda con la cantidad de periódicos vendidos y en la tres el salario básico diario, por último, en la columna final el estudiante totaliza el dinero devengado. Esta producción del participante es ubicada en el nivel dos “creación de la imagen” y descriptor dos. (N2-D2: Visualiza a través de tablas las variables, datos e información involucrada en relación al concepto de función).

4.6.1.9. Descripción solución ítem (c) Eli. En la Figura 74 se presenta la respuesta del participante Eli.

Figura 74

Solución propuesta por Eli

- c. Representa a través de una gráfica, tabla o esquema la relación entre el número de periódicos “the new york times” y los ingresos correspondientes.

# Periódicos	Ingresos de Ventas	Salario básico	Total
1	7	50 \$	57
2	14	50 \$	64
3	21	50 \$	71
4	28	50 \$	78
5	35	50 \$	85
6	42	50 \$	92
7	49	50 \$	99
8	56	50 \$	106
9	63	50 \$	113
10	70	50 \$	120

El participante Eli resolvió de manera similar al caso dos Lisa, para lo cual elaboró una tabla estructurada en sentido vertical, en la columna uno relacionó el número de periódicos vendidos, en la dos los ingresos según corresponda a los periódicos, en la tres el salario básico diario y en la cuatro el dinero total ganado. Estas evidencias de comprensión del participante son clasificadas en el nivel dos, “creación de la imagen” y descriptor dos. (N2-D2: Visualiza a través de tablas las variables, datos e información involucrada en relación al concepto de función).

4.6.1.10. Descripción solución ítems (d) y (e) Manu. Las siguientes son las respuestas elaboradas por el estudiante.

Figura 75

Respuestas ítems (d) y (e) participante Manu

- d. ¿Describe cómo están relacionadas las variables, por ejemplo existe alguna dependencia entre ellas?, justifica la respuesta.

Si existe una dependencia ya que si se venden muchos periódicos; esto se verá reflejado en el dinero que reciba. Es decir que quedará su sueldo más el aumento de la comisión.

- e. Elabora alguna expresión (ecuación, modelo matemático) con el cual se pueda hallar el salario de Valerie para cualquier número de periódicos vendidos.

Ecuación: $50 + 7 * V$

Explicación de la ecuación: El 50 se extrae del salario fijo que tiene Valerie, y ese número lo sumamos con la comisión multiplicada por el # de periódicos vendidos.

$V = \#$
periódicos
vendidos

La Figura 75 expone la solución de los dos últimos ítems de la primera parte del encuentro número 6, en ella es posible notar las relaciones de dependencia y de covariación interpretadas por el participante Manu a partir del análisis de la situación. La forma de resolver el ítem (e) confirma la caracterización que se ha venido realizando al caso Manu durante la descripción acerca de cómo el estudiante comprende las situaciones. De manera similar a respuestas anteriores, el participante exhibe procesos de comprensión relacionados con la identificación de patrones, regularidades, relaciones de dependencia, covariación y modelos para generalizar las situaciones. Estas evidencias de comprensión son ubicadas en el nivel cuatro, observación de la propiedad y descriptor dos. (N4-D2: Representa por medio de expresiones algebraicas la comprensión del concepto de función a partir de tablas y gráficas).

4.6.1.11. Descripción solución ítems (d) y (e) Lisa. A continuación, son expuestas las respuestas del participante.

Figura 76

Soluciones cuestiones (d) y (e) participante Lisa

- d. ¿Describe cómo están relacionadas las variables, por ejemplo existe alguna dependencia entre ellas?, justifica la respuesta.

si hay una dependencia ya que entre más vendes más dinero ganas

- e. Elabora alguna expresión (ecuación, modelo matemático) con el cual se pueda hallar el salario de Valerie para cualquier número de periódicos vendidos.

$x * 7 + 50 =$

En las respuestas del participante Lisa es posible inferir la comprensión del vínculo entre las variables y la elaboración de la expresión algebraica con la cual es posible determinar el salario de Valerie para la venta de cualquier número de periódicos. De manera similar que en respuestas anteriores el participante es poco descriptivo para exponer la solución. Estas evidencias de comprensión permiten asociar el proceso cognitivo de Lisa con el nivel tres “comprensión de la imagen” y descriptor dos. (N3-D2: Utiliza gráficas en el plano cartesiano para representar diversas situaciones en relación a la comprensión del concepto de función).

4.6.1.12. Descripción solución ítems (d) y (e) Eli. Las siguientes son las respuestas.

Figura 77

Solución a las cuestiones (d) y (e) participante Eli

- d. ¿Describe cómo están relacionadas las variables, por ejemplo existe alguna dependencia entre ellas?, justifica la respuesta.

Entre más periódicos vendes, más dinero gana por la comisión

- e. Elabora alguna expresión (ecuación, modelo matemático) con el cual se pueda hallar el salario de Valerie para cualquier número de periódicos vendidos.

$7 \cdot X = ? + 50\$$ <p> Valor de comisión ↓ número de periódicos ↓ </p>	<p>Ejemplo</p> $7 \cdot 14 = 98 + 50 = 148$
---	---

En la respuesta del participante Eli es posible observar la comprensión de la situación a partir de la conexión entre las variables y la propuesta del modelo matemático o ecuación para matematizar la situación. Eli se ha caracterizado por indicar minuciosamente cada detalle en las situaciones y preferir las representaciones a través de enunciados y oraciones. En esta solución es pertinente resaltar el crecimiento de la comprensión identificando parámetros y atributos de la situación, así como la posibilidad de llegar a un modelo para generalizar la situación.

4.6.2. Trayectorias de comprensión

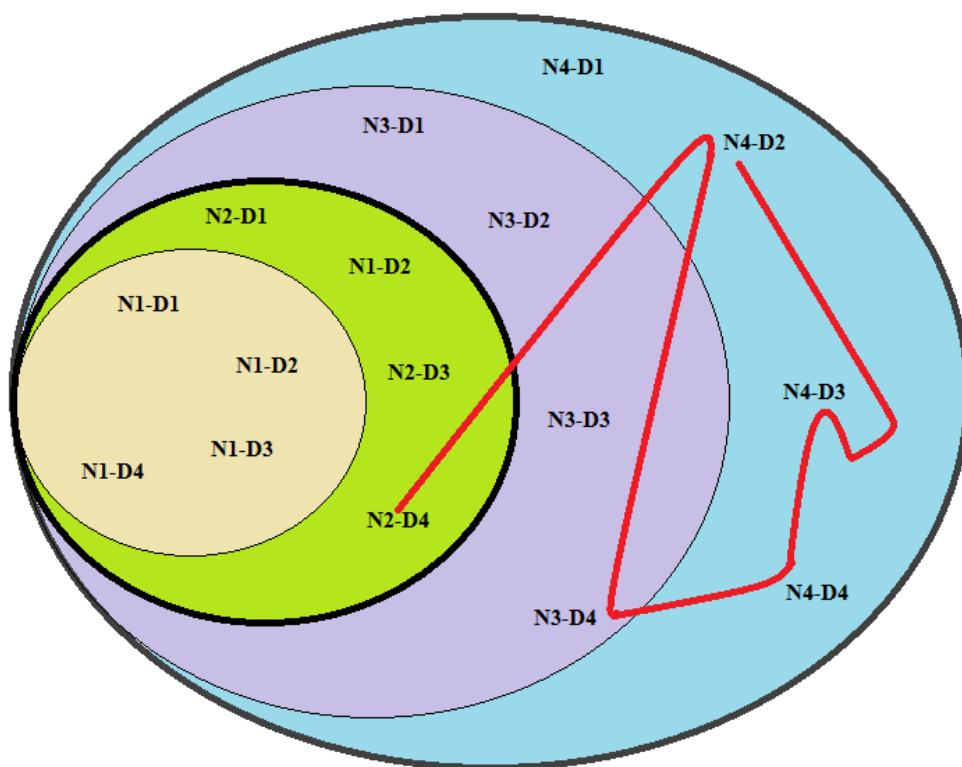
A diferencia de las trayectorias de comprensión presentadas cuando los participantes elaboraron las situaciones uno y tres; el análisis de los desplazamientos de Manu, Lisa y Eli por los niveles de comprensión durante el desarrollo de las situaciones ocho y nueve, expone crecimiento en los procesos de comprensión en general en los tres casos.

El análisis también muestra consistencia en la identificación de algunas particularidades de los participantes, en especial Manu pareciese crecer con mayor rapidez en su comprensión, adquiriendo cada vez, ideas y nociones sobre el concepto de función. La Figura 78 representa la

trayectoria de comprensión de Manu, a través de las situaciones el peso de los sacos de papa y el periódico The New York Times.

Figura 78

Trayectoria de comprensión situaciones ocho y nueve participante Manu

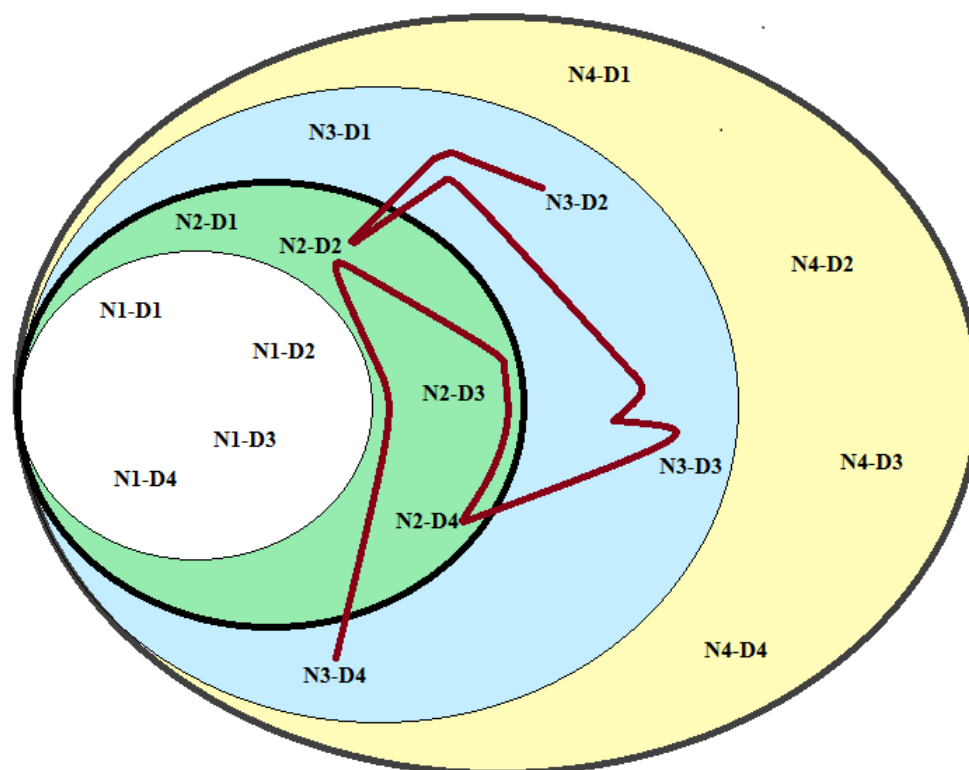


Nota. Fuente elaboración propia.

Por su parte a través del análisis del proceso de comprensión de Lisa, es recurrente notar en el estudiante el uso de operaciones básicas, reglas de tres, tablas de valores, así como ideas de proporcionalidad, relaciones de dependencia entre variables y algunos aspectos de la covariación. La Figura 79 representa la trayectoria de comprensión en los niveles PK, seguida por el participante Lisa.

Figura 79

Trayectoria de comprensión situaciones ocho y nueve participante Lisa

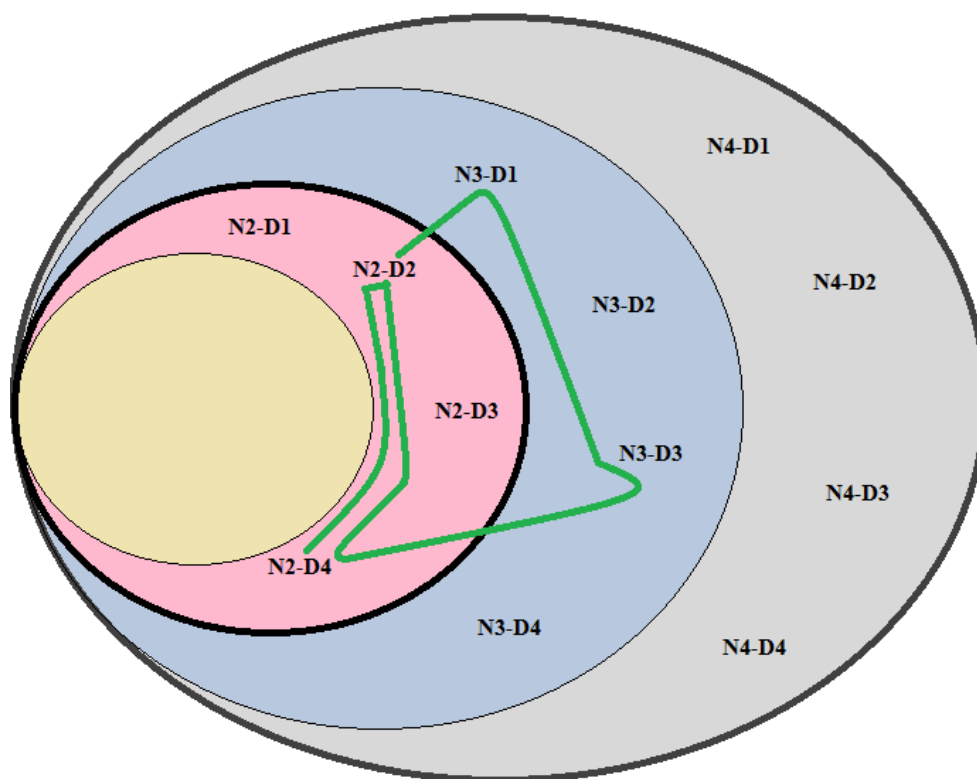


Nota. Fuente elaboración propia.

A su vez el análisis de la comprensión del participante Eli muestra el uso reiterativo de operaciones básicas, tablas de valores, ideas de proporcionalidad y relaciones de dependencia. Llama la atención el empleo de términos como regularidad y patrón para explicar las cuestiones de las situaciones y el avance en procesos de modelación y generalización. La Figura 80 exhibe la trayectoria de comprensión de Eli por los niveles de comprensión según la teoría PK.

Figura 80

Trayectoria de comprensión situaciones ocho y nueve participante Eli



Nota. Fuente elaboración propia.

4.7. Caracterización encuentro # 7. Exploración con el ejecutable virtual

Durante el desarrollo del proceso académico con el ejecutable virtual GeoGebra se retomaron las situaciones cinco, ocho y nueve de los encuentros tres, cinco y seis respectivamente. (Ver anexos encuentros). El sentido de aprovechar el ejecutable virtual radicó en proponer la solución de las situaciones de forma dinámica y fluida. Así, con la aplicación del ejecutable se amplió y profundizó en la comprensión del concepto de función por medio de conversiones entre diferentes representaciones, principalmente enunciados, tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

4.7.1. Descripción situaciones con el ejecutable virtual

El trabajo con el ejecutable virtual GeoGebra estuvo compuesto por cuatro sesiones de 2 horas cada una, en las cuales participó todo el grupo (42 estudiantes) entre ellos los casos particularmente analizados, los estudiantes estuvieron organizados por parejas en un computador en el cual se alternaron para elaborar las situaciones. Las dos primeras sesiones fueron dispuestas para reconocer el ejecutable virtual y realizar tareas direccionadas por el investigador entre ellas, generar tablas, vincular gráficas y analizar aspectos de variación en las funciones. Para las otras sesiones los estudiantes llevaron sus notas y guías con las cuales reanudaron las situaciones mencionadas anteriormente y se propusieron representarlas a través de GeoGebra.

Seguidamente es exhibido el inicio de la práctica académica con el ejecutable virtual GeoGebra, las acciones de los participantes ante las cuestiones y la reflexión del investigador. El siguiente es el encabezado del encuentro número siete.

Figura 81

Introducción práctica académica con GeoGebra

PRÁCTICA ACADÉMICA USO DE GEOGEBRA

Para las situaciones cinco, ocho y nueve (caminar, peso de los sacos de papa, y el periódico “the new york times”) abordadas en los encuentros 3, 5 y 6 respectivamente, elaborar las siguientes tareas y responder las cuestiones con la justificación necesaria.

A continuación, se presenta los ítems de esta práctica, las respuestas del participante Manu y la respectiva descripción.

4.7.1.1. Descripción solución ítem (a) Manu. La siguiente es la cuestión y la respuesta del estudiante.

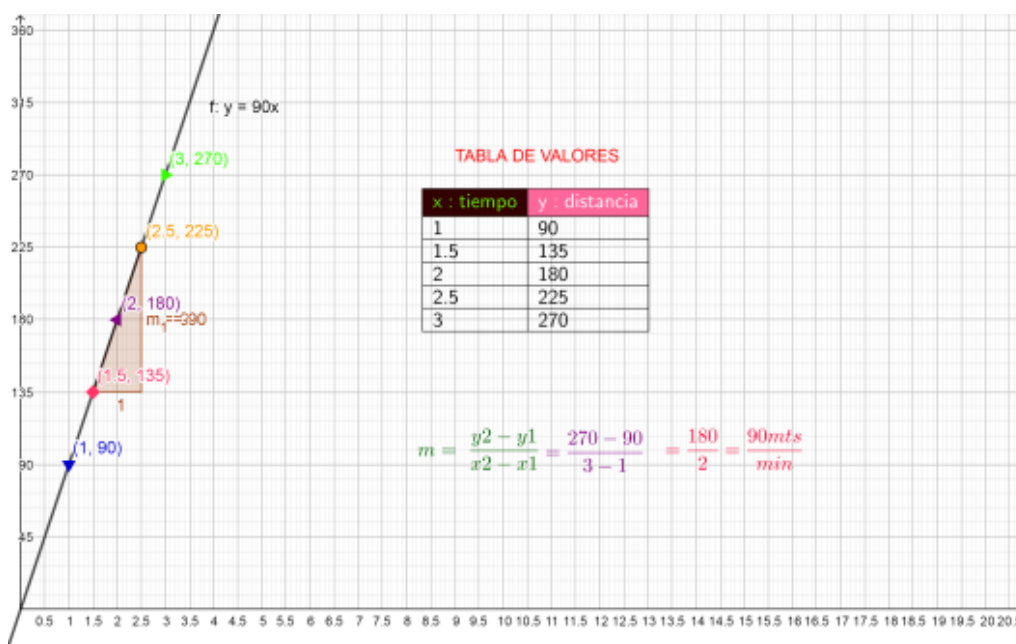
a. Para las situaciones tituladas caminar, peso de los sacos de papa y el periódico el The New York Times con la ayuda del ejecutable virtual elaborar una tabla de valores, la

representación gráfica, calcular la pendiente de la recta y considerar la expresión algebraica o analítica. Luego usar vista grafica al portapapeles (copiar, capturar pantalla) y pegar en la plantilla correspondiente para solucionar las cuestiones b, c, d y e.

La Figura 82 representa la construcción realizada por Manu, con el ejecutable virtual para la situación cinco nombrada caminar.

Figura 82

Construcción con GeoGebra situación 5 caminar, Manu

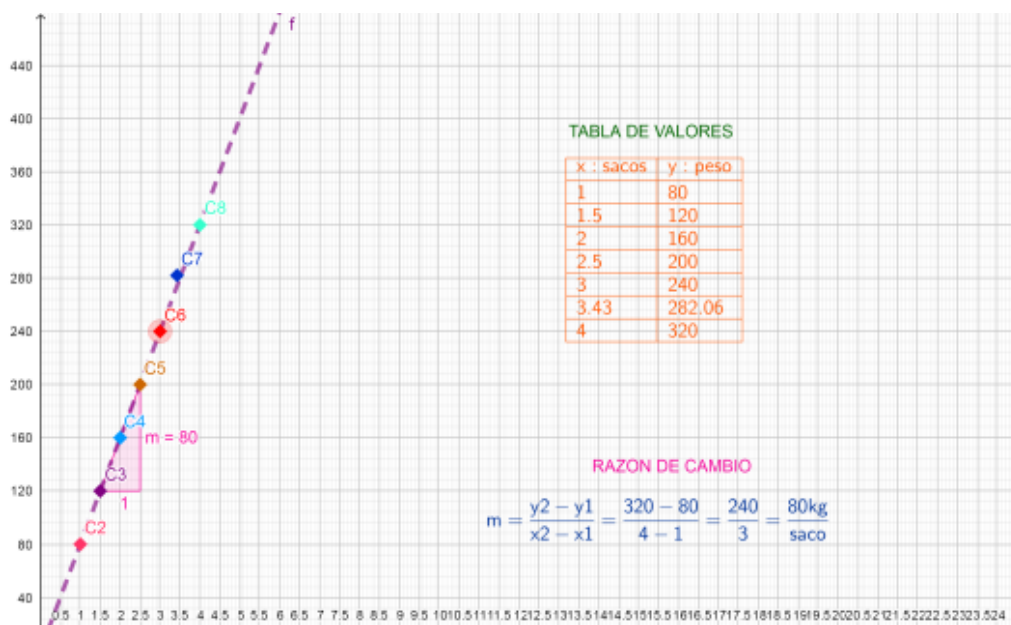


La Figura 82 plasma el modo en que el participante Manu representa la situación a partir de la construcción de la tabla de valores, genera la línea recta o función lineal con las respectivas coordenadas, la expresión algebraica, el cálculo de la pendiente y sus unidades correspondientes.

La Figura 83 representa la construcción elaborada por Manu, para la situación ocho nombrada sacos de papa.

Figura 83

Construcción con ejecutable virtual situación 8, Manu

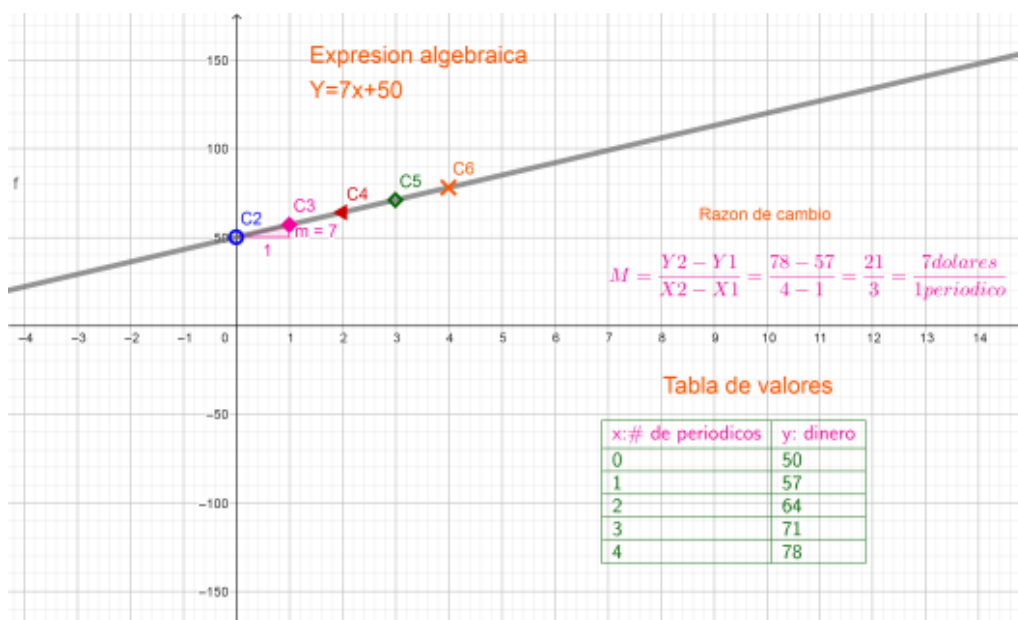


En la Figura 83 el participante Manu elabora la tabla de valores, la recta que representa la función o relación entre las dos variables y determina la pendiente. En comparación con la gráfica anterior es significativa puesto que agrega la noción de razón de cambio para nombrar la pendiente.

La Figura 84 representa la situación nueve, titulada el periódico The New York Times en ella es notable el avance en la construcción de las cualidades de la imagen por medio de la comprensión de la situación.

Figura 84

Construcción GeoGebra situación 9, Manu



4.7.1.2. Descripción solución ítem (b) Manu. Responde las siguientes preguntas para la situación caminar, peso de los sacos de papa y periódico The New York Times.

b. ¿Cuáles variables es posible identificar en cada situación?

Variable “X”: Tiempo

Variable “Y”: Distancia

Manu: Ambas tienen un patrón de regularidad, ya que a medida que avanza el tiempo la persona también avanza constantemente. Se evidencia en la vista algebraica que por cada minuto transcurrido la persona avanza 90 m.

Descripción del investigador: En la respuesta del participante Manu es pertinente señalar algunos términos utilizados, entre ellos “patrón de regularidad y constante”, estos evidencian la comprensión del estudiante sobre la situación, a partir de razonamientos sobre la covariación, es decir, a medida que aumenta el tiempo también incrementa la distancia.

4.7.1.3. Descripción solución ítem (c) Manu. Seguidamente se presenta la cuestión y respuesta del estudiante.

c. ¿Se puede identificar alguna constante de proporcionalidad en las situaciones?, ¿cuáles?, justifica.

Manu:

En la situación # 5 la constante es 90 m

En la situación # 8 la constante es 80 kg

En la situación # 9 la constante es USD 7

Descripción del investigador: El participante identifica las diferentes constantes para cada una de las situaciones, con las variables relacionadas en el eje Y: metros, kilogramos y dólares respectivamente; también es posible reconocer que el estudiante comprende la situación a partir de la variación “cada minuto la persona avanza 90 metros, un saco tiene un peso de 80 kilogramos, y cada periódico vendido representa un aumento de 7 dólares”

4.7.1.4. Descripción solución ítem (d) Manu. A continuación, se expone la pregunta y la respuesta del estudiante.

d. ¿Qué significado representa la pendiente de la recta para cada una de las situaciones?, justifica.

Manu: La pendiente de la recta de cada situación muestra una creciente, las tres están inclinadas hacia la derecha, lo que significa que hay una inclinación.

Descripción del investigador: En la respuesta del participante es posible distinguir que comprende la situación a partir de “algo” que crece, en esta situación las variables aumentan en el sentido positivo y el estudiante igualmente menciona en el enunciado la inclinación hacia la derecha.

4.7.1.5. Descripción solución ítem (e) Manu. Seguidamente se relaciona la cuestión y respuesta del estudiante.

e. Escribe algunas conclusiones y/o apreciaciones sobre el uso del ejecutable virtual GeoGebra.

Manu: Realmente como todo en la vida, empezar es lo más difícil, adquirir nuevos conocimientos y relacionarnos con cosas nuevas siempre para mí será un poco complejo, sin embargo, nunca nos quedamos pasmados en un solo lugar y después de un tiempo todo ira adquiriendo una facilidad mayor. Fue una experiencia chévere, puesto que las matemáticas no son solo libros y tablero, con esta actividad también nos damos cuenta que pueden ser computadores y en general tecnología.

Descripción del investigador: En la conclusión de Manu es pertinente resaltar los argumentos positivos sobre el desarrollo de las situaciones con el ejecutable virtual, de igual manera el referirse al aprendizaje de las matemáticas por medio de otros elementos diferentes a “solo libros y tableros” entre ellos herramientas tecnológicas.

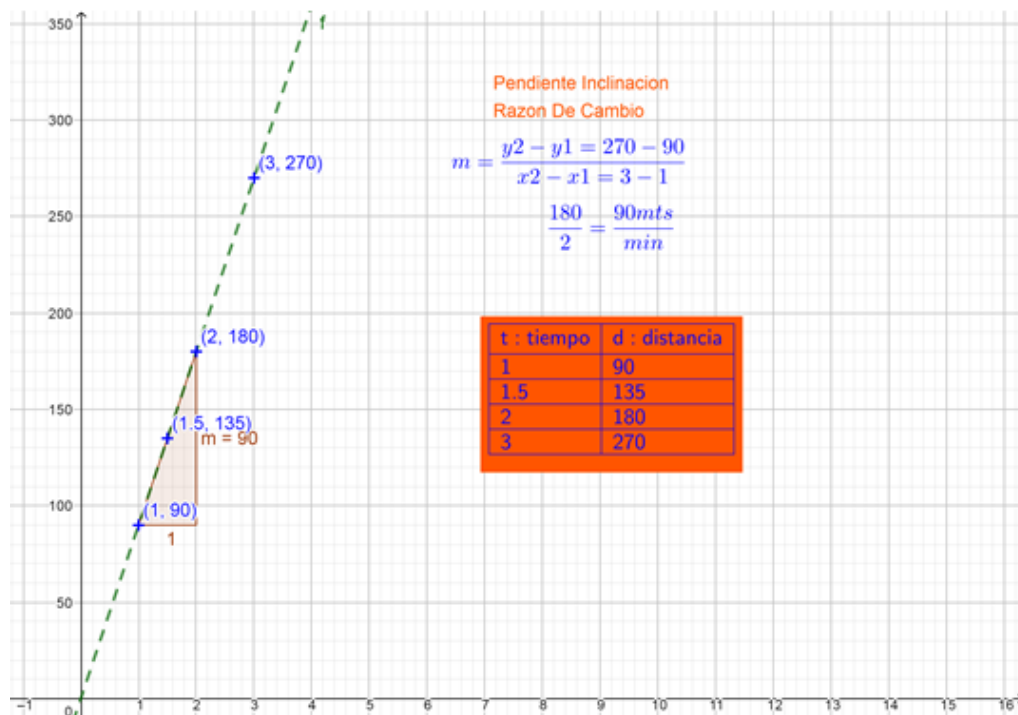
4.7.1.6. Descripción solución ítem (a) Lisa. La siguiente es la cuestión y la respuesta del estudiante.

a. Para las situaciones tituladas caminar, peso de los sacos de papa y el periódico The New York Times con la ayuda del ejecutable virtual GeoGebra elaborar una tabla de valores, la representación gráfica, calcular la pendiente de la recta y considerar la expresión algebraica o analítica. Luego usar vista grafica al portapapeles (copiar, capturar pantalla) y pegar en la plantilla correspondiente para solucionar las cuestiones b, c, d y e.

La Figura 85 representa la construcción realizada por Lisa, con el ejecutable virtual GeoGebra para la situación cinco nombrada caminar.

Figura 85

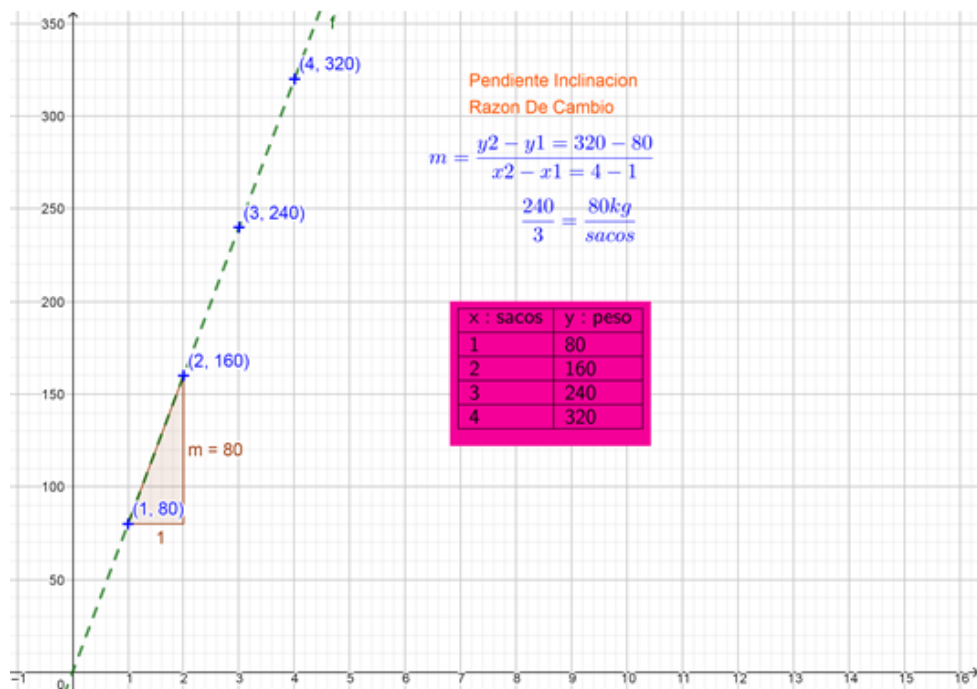
Construcción con ejecutable virtual situación 5, Lisa



En la Figura 85 se puede evidenciar el uso acertado de diferentes representaciones para la situación entre ellas la tabla de valores y gráfica. Además del cálculo de la pendiente o razón de cambio.

Figura 86

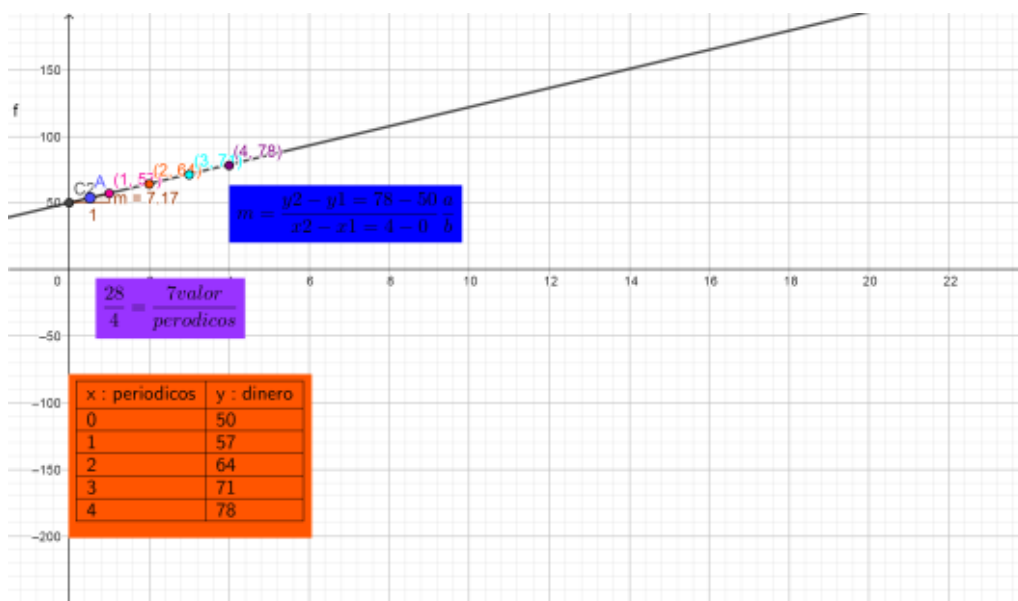
Construcción con ejecutable virtual situación 8, Lisa



La siguiente construcción fue elaborada por el participante Lisa por medio del ejecutable GeoGebra para situación 9 periódico The New York Times.

Figura 87

Construcción GeoGebra situación 9, Lisa



Descripción del investigador: En las Figuras 85, 86 y 87 el estudiante expone tablas de valores, las gráficas o líneas rectas que representa la función lineal y la pendiente o razón de cambio, es posible además notar la ausencia de algunos títulos necesarios para nombrar cada una de las partes de la representación, en general en el transcurso de las sesiones con el uso de GeoGebra y la observación del caso Lisa es posible inferir que es necesario potenciar y reforzar las relaciones con el ejecutable virtual y elementos tecnológicos.

4.7.1.7. Descripción solución ítem (b) Lisa. Responde las siguientes preguntas para la situación caminar, peso de los sacos de papa y periódico The New York Times.

b. ¿Cuáles variables es posible identificar en cada situación?

Lisa:

Caminar: tiempo y distancia

Sacos de papa: peso y sacos

Periódicos: periódico y dinero

Descripción del investigador: El estudiante Lisa nombra todas las variables identificadas en cada situación a diferencia del participante Manu.

4.7.1.8. Descripción solución ítem (c) Lisa. El siguiente es el ítem y la respuesta del estudiante.

c. ¿Se puede identificar alguna constante de proporcionalidad en las situaciones?, ¿cuáles?, justifica.

En la primera es 90 porque es la cantidad de pasos que siempre aumenta.

En la segunda es 80 porque es la cantidad de peso que aumenta.

En la tercera es 7 porque es la cantidad que aumenta el salario según la cantidad de periódicos.

Descripción del investigador: Lisa relaciona la constante de proporcionalidad con el aumento de las magnitudes en las situaciones, de este modo, en cada enunciado el estudiante reitera el término “aumentar” en el sentido elevar y crecer las distintas variables.

4.7.1.9. Descripción solución ítem (d) Lisa. Seguidamente se expone la pregunta y la respuesta del estudiante.

d. ¿Qué significado representa la pendiente de la recta para cada una de las situaciones?, justifica.

Es en lo que aumenta una situación.

Descripción del investigador: El participante Lisa relaciona la pendiente con el incremento de las diferentes variables de cada situación.

4.7.1.10. Descripción solución ítem (e) Lisa. Seguidamente es expuesta la pregunta y la respuesta del estudiante.

e. Escribe algunas conclusiones y/o apreciaciones sobre el uso del ejecutable virtual GeoGebra.

Es más fácil hacer tablas de valores y comprender gráficas.

Descripción del investigador: Se resalta en el comentario de Lisa el término comprender, como un concepto que hace alusión al análisis y aprensión de tablas de valores y gráficas.

4.7.1.11. Descripción solución ítem (a) Eli. Los siguientes son los ítems de esta práctica, las respuestas del participante Eli y la respectiva descripción.

a. Para las situaciones tituladas caminar, peso de los sacos de papa y el periódico The New York Times con la ayuda del ejecutable virtual GeoGebra elaborar una tabla de valores, la representación gráfica, calcular la pendiente de la recta y considerar la expresión algebraica o analítica. Luego usar vista grafica al portapapeles (copiar, capturar pantalla) y pegar en la plantilla correspondiente para solucionar las cuestiones b, c, d y e.

Figura 88

Construcción con ejecutable virtual situación 5, Eli

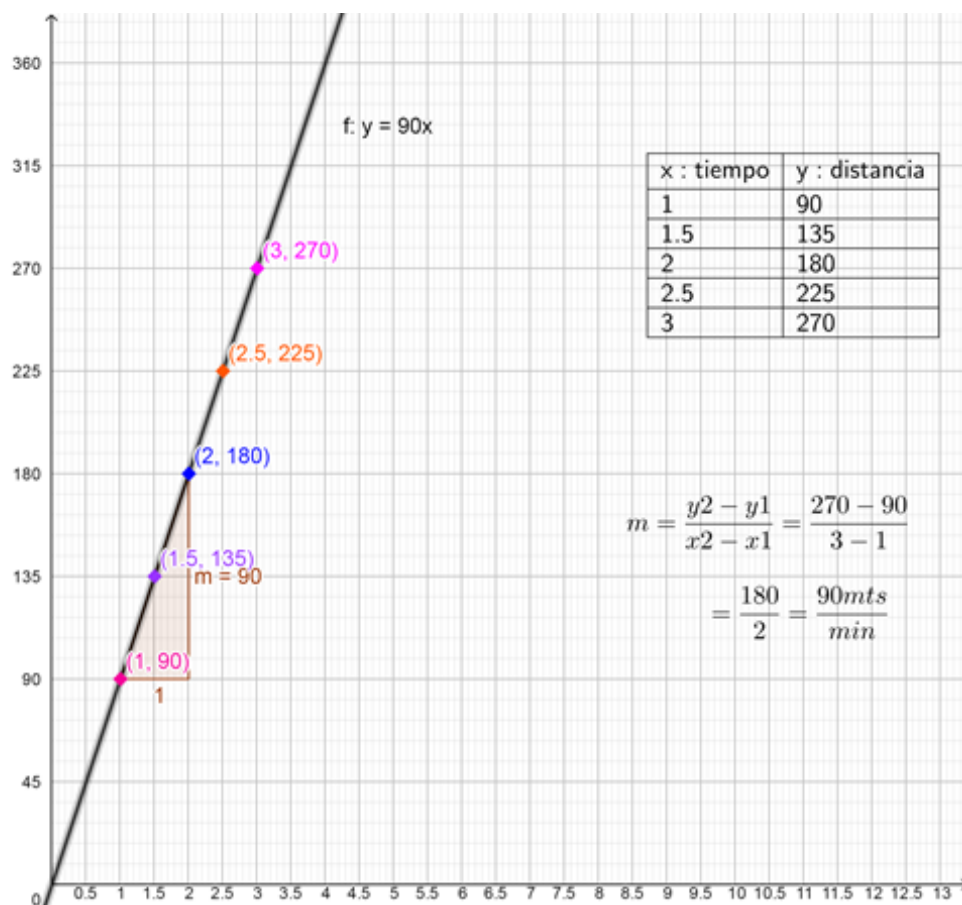


Figura 89

Construcción con ejecutable virtual situación 8, Eli

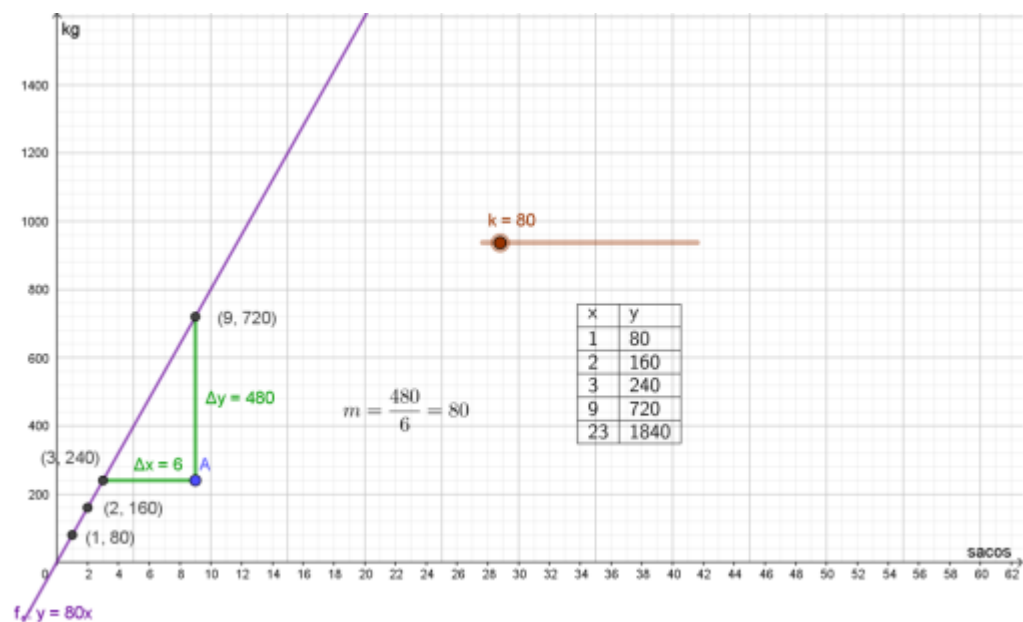
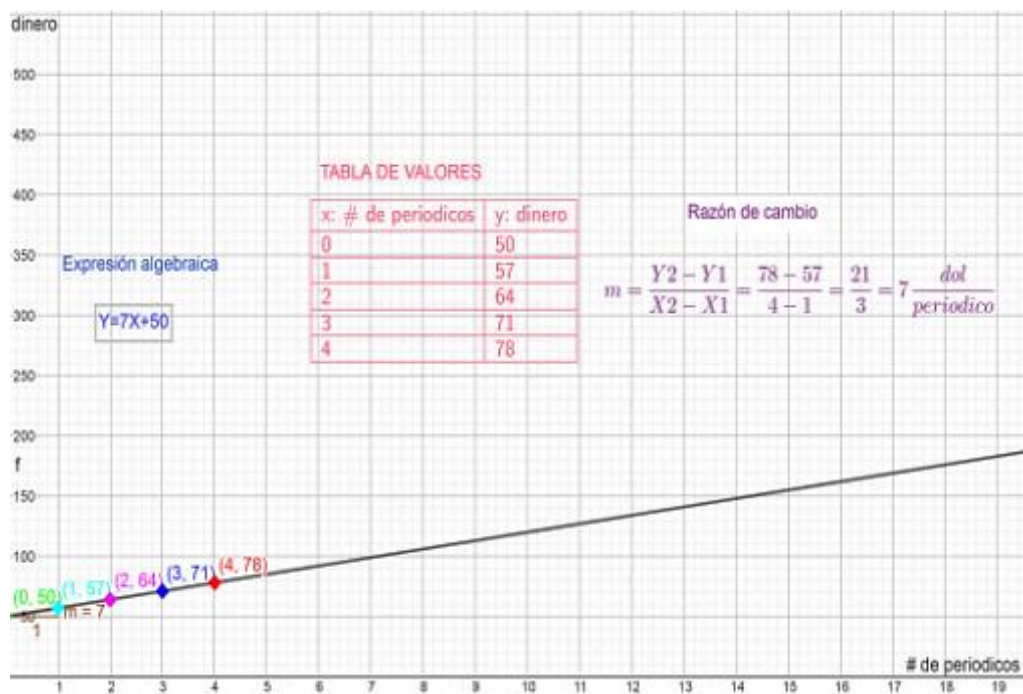


Figura 90

Construcción con GeoGebra situación 9, Eli



Descripción del investigador: En las Figuras 88, 89 y 90 realizadas por Eli, en torno a las situaciones es posible observar la tabla de valores en la cual se relacionan las variables, el cálculo de las pendientes con las respectivas unidades nombradas como la razón de cambio y la expresión algebraica, además de la respectiva representación gráfica y el reconocimiento de algunos ejes.

4.7.1.12. Descripción solución ítem (b) Eli. Responde las siguientes preguntas para la situación caminar, peso de los sacos de papa y periódico The New York Times.

b. ¿Cuáles variables es posible identificar en cada situación?

Situación # 1: tiempo y distancia.

Situación # 2: peso y sacos.

Situación #3: número de periódico y dinero.

Descripción del investigador: El participante Eli señala las variables correspondientes en las tres situaciones e indica la relación de covariación ente las variables independiente y dependiente.

4.7.1.13. Descripción solución ítem (c) Eli. A continuación, se presenta la pregunta y respuesta del estudiante.

c. ¿Identificas alguna constante de proporcionalidad en las situaciones?, justifica.

En la situación 1 la constante es 90, porque cada que aumenta el tiempo, también aumenta la distancia que se recorre y este siempre aumenta en la constancia de 90.

En la situación 2 cada que aumenta la cantidad de sacos, es igual que el peso, es decir, en ambos aumenta, siendo así la constancia 80.

En la situación 3 la constante es 7, ya que por cada periódico que se vende, aumenta 7 dólares.

Descripción del investigador: En la justificación de Eli, el participante esta relacionando la constante de proporcionalidad con el incremento en las variables, expresa que para las situaciones analizadas un aumento en una variable genera el incremento de la otra.

4.7.1.14. Descripción solución ítem (d) Eli. Seguidamente se expone la cuestión y respuesta del estudiante.

d. ¿Qué significado representa la pendiente de la recta para cada una de las situaciones?, justifica.

Representa el aumento de todos los aspectos en cada una de las situaciones, ya sea el peso, la distancia y la ganancia de dichas situaciones.

Descripción del investigador: El participante Eli asocio la pendiente de la recta con el aumento de las variables de la situación.

4.7.1.15. Descripción solución ítem (e) Eli. Enseguida es reseñada la cuestión y la respuesta del estudiante.

e. Escribe algunas apreciaciones sobre el uso del ejecutable virtual GeoGebra.

Es una manera más dinámica de aprender sobre temas de estadísticas, entender el mundo de las matemáticas, incluso representando situaciones de la vida cotidiana podemos darnos cuenta que todo tiene incluida la matemática.

Descripción del investigador: Para el participante Eli, GeoGebra le generó impresiones de ser un ejecutable virtual útil para comprender situaciones de nuestro entorno, aprender de forma dinámica y considerar la matemática incluida en diversas situaciones.

Capítulo 5: Conclusiones

Hace parte de este capítulo la discusión en torno a las conclusiones y recomendaciones, se inicia con la recapitulación de la pregunta de investigación para dar respuesta a la necesidad educativa, posteriormente se aborda el análisis del alcance de los objetivos general y específicos. Además, se hace alusión a algunos elementos metodológicos en cuanto al uso del modelo teórico para la comprensión matemática propuesto por Pirie y Kieren. También, son mencionados aspectos relevantes acerca del análisis histórico epistemológico, la utilización del ejecutable virtual GeoGebra y la aplicación de diversas representaciones para la enseñanza del concepto de función.

Las siguientes líneas tienen el propósito de reflexionar en relación con elementos significativos en el desarrollo de esta investigación, no pretenden bajo ninguna perspectiva finiquitar o concluir de manera dictatorial alguna afirmación, por el contrario, es pertinente asumir la investigación como un proceso cíclico trascendente, es decir, es un accionar evolutivo en el cual se está en constante reelaboración y transformación de ideas y pensamientos.

5.1. Acerca de la pregunta de investigación

Para responder a la pregunta de investigación, ¿cómo comprenden los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Rural Santa María del municipio El Carmen de Viboral, el concepto de función mediante diferentes representaciones de situaciones y el uso de un ejecutable virtual? se direccionó el accionar investigativo desde dos frentes; por un lado el cómo relacionado con la manera, la forma o el modo, en este sentido fueron fundamentales las representaciones de enunciados, tablas, gráficas y expresiones algebraicas o analíticas realizadas por los estudiantes. Y por otro lado el cómo en relación con la vía o el camino construido por los estudiantes, al respecto, el modelo teórico de la comprensión propuesto por los investigadores

Pirie y Kieren permitió delimitar la trayectoria seguida por los participantes analizados en su proceso de pensamiento a partir de los niveles de comprensión y los descriptores.

5.2. Con respecto a los objetivos

Esta investigación planteó el objetivo principal de analizar la comprensión del concepto de función en estudiantes de noveno grado, para tal fin fueron propuestas y rediseñadas diversas situaciones de enseñanza aprendizaje con las cuales se abordaron elementos epistemológicos y constitutivos del concepto de función.

Respecto del proceso de comprender un concepto matemático, esta acción de pensamiento implicó a los participantes analizar, establecer relaciones, identificar aspectos lógicos, entender esquemas y símbolos, elaborar imágenes mentales, representaciones y conversiones entre diferentes registros de representación, entre otras.

Considerada la complejidad para describir la comprensión del concepto de función en los estudiantes, el modelo teórico de comprensión elaborado por Pirie y Kieren aplicado en esta investigación, propició englobar acciones, evidencias y procesos de pensamiento realizados por los participantes Manu, Lisa y Eli. Además, permitió la creación de una ruta para caracterizar el proceso de comprensión de los estudiantes a través de un sistema de descriptores, en los cuales estuvieron enmarcados algunos conceptos claves que a su vez favorecieron la confirmación de las categorías previsualizadas.

5.3. En relación a las categorías previsualizadas y emergentes

A partir de un análisis minucioso de los diferentes descriptores expuestos en los niveles de comprensión uno a cuatro, es posible notar que el descriptor uno de cada nivel estuvo referido con interés en los conceptos regularidad y patrón; con la finalidad de establecer correspondencias o relaciones a partir de la estructura del concepto de función en diversas situaciones. Por su

parte, el segundo descriptor de cada nivel permitió describir las acciones de pensamiento vinculadas con representaciones por medio de enunciados, tablas, gráficas y expresiones algebraicas para representar el concepto función. A su vez, el tercer descriptor de cada nivel denotó en particular los procesos de pensamiento relacionados con la variación y covariación entre variables de las situaciones. Y por último, el cuarto descriptor caracterizó los procesos de pensamiento con respecto del concepto de proporcionalidad vinculado a la idea de función lineal.

La organización anterior permitió la descripción de la comprensión del concepto de función a través de los procesos cognitivos de los participantes analizados, por medio de un sistema de conceptos claves sintetizados en cuatro categorías fundamentales durante el estudio de las unidades de análisis.

Paralelamente, este accionar investigativo posibilitó refinar los descriptores de los niveles de comprensión mediante una matriz de resultados, en la cual se registraron varios de los conceptos claves y algunos relacionados; de esta manera se realizó seguimiento a los participantes Manu, Lisa y Eli a partir de los conceptos más recurrentes en sus procesos cognitivos, con el propósito de llegar a la saturación para distinguir los elementos evidenciados en la comprensión del concepto de función por parte de los estudiantes. A continuación, son relacionadas las categorías definitivas:

5.3.1. Categoría uno: Regularidad

A partir del análisis de resultados se evidenció en las comprensiones de los tres casos de estudiantes Manu, Lisa y Eli, algunas ideas relacionadas con la categoría regularidad haciendo referencia a los términos “secuencia, lo mismo con todos, así sucesivamente, el número clave es el...”, y en un número menor de ocasiones a la palabra patrón.

El concepto regularidad se convirtió en una categoría fundamental porque a través de la identificación de patrones geométricos y numéricos, los estudiantes crecieron en su proceso de comprensión. Estos procesos de pensamiento posibilitaron identificar el objeto involucrado en la situación matemática, concretamente características constantes y aquellas que varían de manera predecible en situaciones relacionadas explícitamente con la variación en la función lineal.

5.3.2. Categoría dos: Representaciones

Las trayectorias de comprensión construidas por medio del análisis de los procesos cognitivos de los participantes según los niveles PK, muestran en los estudiantes crecimiento en los procesos de pensamiento durante el desarrollo de las situaciones, sobre todo, a partir de conversiones entre diferentes representaciones.

Al respecto, el segundo descriptor de cada nivel de comprensión precisó las acciones de los estudiantes por medio de diversas representaciones, y a través de este, se evidenció la pertinencia de incluir en las estrategias de enseñanza aprendizaje, la conceptualización mediante gráficas y expresiones algebraicas o analíticas, ya que, en general los tres participantes Manu, Lisa y Eli hacen uso reiterativo de enunciados, expresiones numéricas relacionadas con operaciones básicas y registran la información en tablas para describir algunas relaciones entre variables involucradas en las situaciones.

El análisis del participante Manu evidenció la forma en que el estudiante adquiere progresivamente comprensión del concepto de función, así, es común en sus manifestaciones de comprensión la elaboración de expresiones algebraicas con la finalidad de precisar particularidades de las situaciones y la conceptualización de algunas nociones claves, entre ellas cambio, covariación y regularidad.

Por su parte los participantes Lisa y Eli, aunque en ellos no fue reiterado el uso de un lenguaje matemático formal, las evidencias en los procesos de pensamiento permiten de igual modo inferir crecimiento en la comprensión del concepto de función, por ejemplo, a través de la identificación de relaciones de dependencia entre variables.

Respecto del orden cronológico dado a las situaciones considerado a partir del análisis histórico epistemológico, las manifestaciones de comprensión de los participantes muestran que esta ruta resultó útil, toda vez que los estudiantes lograron crecer en sus procesos de comprensión iniciando con situaciones representadas en enunciados, luego por medio de tablas, gráficas y por último expresiones algebraicas o analíticas.

En algunas situaciones el proceso de comprensión también fue iniciado por medio de tablas o gráficas, para luego ser transformado en enunciados y expresiones algebraicas. Al respecto es preciso mencionar que durante el encuentro número seis, situación el periódico The New York Times, un número considerable de estudiantes establecieron relaciones entre variables y finalmente generaron representaciones por medio de la gráfica de la función lineal, esto sucedió luego de haber estudiado otros registros de representación en situaciones anteriores.

5.3.3. Categoría tres: Variación

Sobre la variación, el cambio, la dependencia entre variables y la covariación, el análisis de los procesos de pensamiento en torno a estos conceptos, permitió concluir sobre la necesidad de incorporar en el aula variadas situaciones para involucrar nociones de cambio y relaciones de dependencia entre variables.

Por ejemplo, en las situaciones peso de los sacos de papa y el periódico The New York Times, los tres participantes Manu, Lisa y Eli, representaron en repetidas ocasiones las comprensiones por vía de tablas de valores; las tablas expresaron de manera implícita la idea de

función a partir de la dependencia y correspondencia entre las variables. Por su parte, en cuanto al concepto de covariación los participantes expusieron en sus justificaciones ideas similares y referidas a: si una variable aumenta la otra igualmente lo hace.

5.3.4. Categoría cuatro: Proporcionalidad

Con respecto a la proporcionalidad los participantes Manu, Lisa y Eli, plantearon relaciones entre las variables que implícitamente conducen a la idea de comparación, así expresaron nociones como mitad, el doble, ocho veces y otros valores. Las manifestaciones de comprensión resaltan destrezas procedimentales sobre todo en el participante Manu y el participante Lisa para resolver procesos algorítmicos a través de reglas de tres. No obstante, el análisis también señala la necesidad de potenciar la comprensión de relaciones inversas entre variables, es decir, situaciones en las cuales si una variable aumenta la otra disminuye.

En conclusión, los argumentos anteriores indican la necesidad de proponer durante el transcurso de la enseñanza del concepto de función, situaciones y formas de aprendizaje a través de las cuales se favorezca en los estudiantes el crecimiento progresivo en la comprensión de relaciones entre variables, con rigor y minuciosidad, a partir de las especificidades o particularidades de una situación.

5.3.5. Sobre el uso del ejecutable virtual

Por medio del ejecutable virtual GeoGebra, los participantes Manu, Lisa y Eli representaron las situaciones mediante tablas de valores, las vincularon con la línea recta o gráfica de la función lineal, relacionaron la pendiente como la razón de cambio y la representación analítica con la expresión algebraica, además, es posible identificar el empleo adecuado de las variables asociando en el sentido correcto la variable independiente y la dependiente.

Con respecto del participante Manu, durante las construcciones sucesivas de imágenes el estudiante modificó la forma de los puntos y de la línea recta, de igual modo, la manera de nombrar las partes que constituyen los aspectos centrales de la situación, es decir, por ejemplo, en la Figura 84 relacionada con el periódico el The New York Times, el estudiante nombró el término razón de cambio y construyó la expresión algebraica, no relacionada en la Figura de la situación caminar.

Sobre el participante Lisa, las observaciones y las evidencias del trabajo con el ejecutable virtual, indican la necesidad de estimular en el estudiante el contacto con elementos tecnológicos y el desarrollo de las matemáticas con otras formas de aprendizaje, diferentes a explicaciones magistrales y guías físicas. Por su parte el participante Eli, demostró entusiasmo, comprensión de las actividades a realizar y un interés permanente por el desarrollo de las situaciones con el ejecutable virtual.

Estas evidencias posibilitan vislumbrar rutas nuevas e ideas, por cuanto el trabajo académico con el ejecutable virtual GeoGebra resultó ser una alternativa viable para llevar a cabo diferentes procesos de enseñanza y aprendizaje. En relación a estos, la herramienta virtual permitió utilizar la función como un elemento experimental, a partir de la construcción de diversas formas de representación, en otras palabras, los participantes tuvieron la posibilidad de realizar una tabla de valores de correspondencia funcional (existe una relación de dependencia entre las variables) y transformarla en una línea recta o función lineal, además de, la oportunidad de interactuar cambiando datos u/o parámetros de las tablas y expresiones algebraicas de funciones, estas condiciones permiten percibir entre el estudiante y el ejecutable virtual GeoGebra un entorno propicio para aprendizajes significativos.

No obstante, dada la preponderancia de esta investigación en relación con situaciones orientadas y desarrolladas a partir de guías físicas y la aparente conexión y aceptación de los participantes al uso del ejecutable virtual; este trabajo de investigación confirma horizontes y líneas de investigación futuras en dirección de estudiar, cómo las TIC transforman los espacios de enseñanza y aprendizaje.

5.3.6. Recomendaciones para la enseñanza del concepto de función

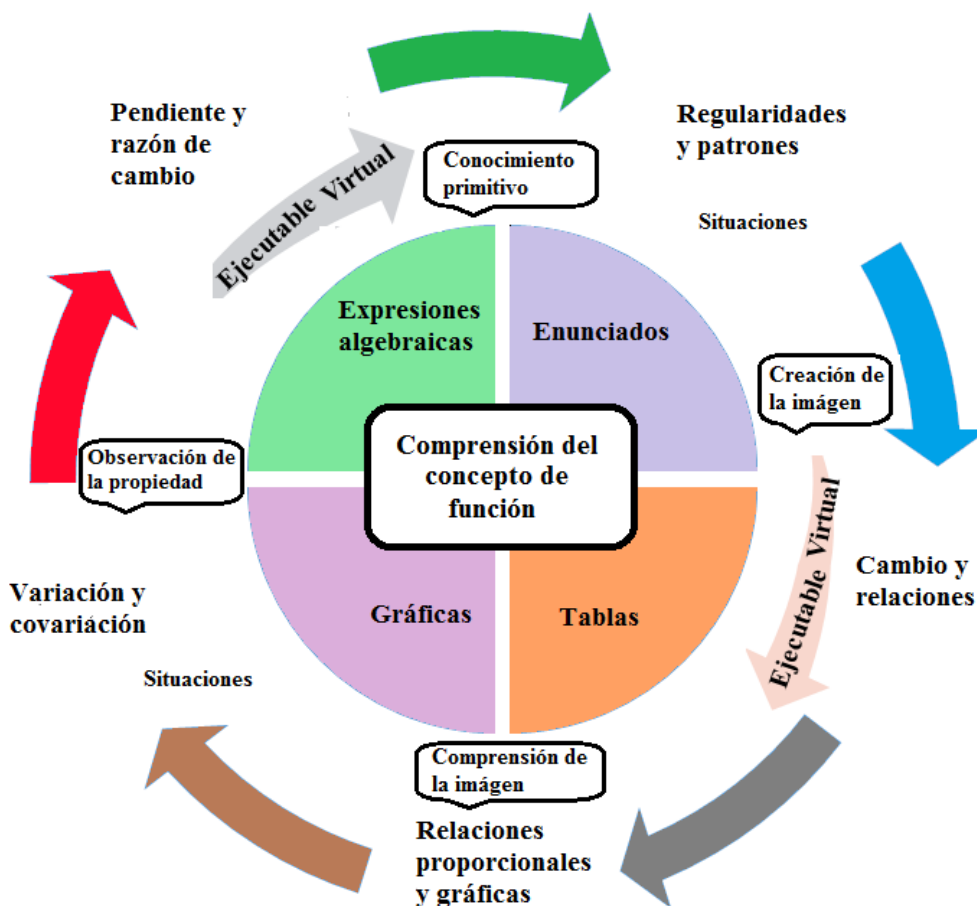
En cuanto a la enseñanza del concepto de función, en esta investigación se constató la necesidad de incluir variadas formas de aprendizaje para inducir en el estudiante la comprensión del concepto. En coherencia con Pirie y Kieren (1994) para llegar a entender un concepto matemático es necesario moverse por diferentes niveles de comprensión de manera gradual con avances y retrocesos.

Así, en esta investigación se inició con situaciones vinculadas al concepto de función para incorporar regularidades y patrones en situaciones representadas a partir de enunciados y esquemas. Posteriormente se incluyeron situaciones asociadas al cambio y relaciones de dependencia entre variables. Seguido de estas, fueron propuestas situaciones con el interés pedagógico de evidenciar relaciones proporcionales entre variables. Y por último se propuso a los participantes resolver situaciones relacionadas con la variación y la covariación, representadas por medio de tablas, gráficas, expresiones algebraicas y mediadas a través del ejecutable virtual GeoGebra.

El siguiente esquema sintetiza una propuesta de enseñanza y aprendizaje para la comprensión del concepto de función a partir de los cuatro primeros niveles propuestos en la teoría de PK, la conversión por medio de diferentes representaciones de situaciones y el uso de un ejecutable virtual.

Figura 91

Esquema propuesto para la enseñanza del concepto de función



Nota. Fuente elaboración propia

5.3.7. Para futuras investigaciones

Durante la investigación las situaciones realizadas en el aula se llevaron a cabo con la totalidad del grupo (42 estudiantes), esto favoreció que diversos participantes se acercaran al desarrollo de las situaciones, y por lo tanto, permitió al investigador definir con mayor certeza los casos particulares a estudiar. Sin embargo, en próximas investigaciones es pertinente considerar el número de estudiantes con los cuales se realizan las situaciones, ya que, un número elevado de ellos complejiza la toma de notas, videos, grabaciones y las formas de aprendizaje dentro del aula.

Es preciso reiterar la relevancia de la elección de los participantes a estudiar en una investigación, con el propósito de adquirir un conocimiento significativo de los sujetos, y por ende, la comprensión global de la situación o fenómeno estudiado.

Dado que, como fue constatado por medio del análisis de resultados, el proceso de la comprensión del concepto de función resultó inherente a cada participante, estudiante y en general para todo sujeto; es decir, los participantes presentaron características y detalles propios en sus evidencias de comprensión, a lo sumo, en ocasiones similares a otras comprensiones de los compañeros del curso.

Los argumentos del párrafo anterior justifican la pertinente de enfocar próximas investigaciones en un sentido mejor acotado, esto es, desarrollar una cantidad menor de situaciones en el aula para ser analizadas y orientarlas con mayor proporción acerca del uso de recursos tecnológicos y software académico en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función; toda vez que en esta investigación se evidenció en los participantes motivación, interés y a la vez admiración en su proceso de aprendizaje a través del uso del ejecutable virtual GeoGebra.

Para concluir, entender la forma cómo un estudiante comprende el concepto de función resulta relevante y a la vez complejo, así, para investigaciones futuras es pertinente poner especial atención en la elaboración de los descriptores o indicadores de comprensión para ser analizados en las evidencias de comprensión de los participantes; esta nota de orden metodológico y operativo ayudaría a focalizar el centro de atención en los intereses propios de la investigación.

Referencias Bibliográficas

- Cano, J. M. (2012). *La definición del concepto de función bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión en estudiantes de Grado 11 de una institución educativa oficial de Medellín* (Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia).
<http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1727/1/JC0771.pdf>
- Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 29, 9-22. <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo5.pdf>
- Cerda, H. (1993). *Los elementos de la investigación: Cómo reconocerlos, diseñarlos y construirlos*. Editorial El Buzo.
- Cerda, H. (2011). *Los elementos de la investigación: Cómo reconocerlos, diseñarlos y construirlos*. Editorial Magisterio.
- Cuevas, C. A. y Díaz, J. L. (2014). La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. *El Cálculo y su Enseñanza*, 5(5), 165-179.
http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/P12.bbf0a982b7788f.pdf
- Cuevas, C. A., Delgado, M., y Martínez, M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y el concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. *Revista Logos Ciencia y Tecnología*, 10(2), 20-38.
<https://doi.org/10.22335/rlct.v10i2.557>
- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval, y A. S. Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

https://www.academia.edu/27318074/Comprensi%C3%B3n_y_aprendizaje_en_matem%C3%A1ticas_perspectivas_semi%C3%B3ticas_seleccionadas

Farfán, R. M. y García, M. A. (2005). El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. En J. Lezama., M. Sánchez., y J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, (pp. 489- 494).

<https://www.clame.org.mx/documentos/alme%2018.pdf>

Gómez, A. L., Guirette, R., y Morales, F. (2017). Propuesta para el tratamiento de interpretación global de la función cuadrática mediante el uso del software GeoGebra. *Educación Matemática*, 29(3), 189-224. Doi: 10.24844/EM2903.07

Jiménez, J. G. y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, 4(7), 1-17. <http://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654/736>

Sánchez, S. (1998). *Epistemologia da pesquisa em educação*. Editorial Praxis.

Senk, S. L., Thompson, D. R., y Wernet, J. LW. (2014). Curriculum and Achievement in Algebra 2: Influences of Textbooks and Teachers on Students' Learning about Functions. En Y. Li, y G. Lappan (Eds.), *Mathematics Curriculum in School Education* (pp. 515-540). Editorial Springer. Doi 10.1007/978-94-007-7560-2

Kilpatrick, J. (1998). Seminario de Investigación. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia* (pp. 51-67). <http://funes.uniandes.edu.co/679/>

Londoño, R. A., Jaramillo, C. M., y Esteban, P. V. (2017). Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de

- conceptos matemáticos. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 9(2), 121-133.
<https://doi.org/10.22335/rlct.v9i2.451>
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(3), 221-278.
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560303>
- Morce, J. M. (2003). *Asuntos críticos en los métodos de investigación cualitativa*. Editorial Universidad de Antioquia.
- Moreno, L. y Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. En *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia. Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 40-66). Editor Ministerio de Educación Nacional (MEN), Colombia.
- Pirie, S. y Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. For the Learning of Mathematics. *Publishing Association Stable* 9(3), 7-11. Springer.
<http://www.jstor.org/stable/40248156>
- Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26(2/3), 165-190. Springer. <https://www.jstor.org/stable/i277342>
- Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? *Revista Iberoamericana de Educación* 24, 63-90.
<https://rieoei.org/historico/documentos/rie24a03.PDF>
- Porras, F. (2011). *El concepto de función en la transición bachillerato universidad* (Tesis de Maestría, Universidad del Valle). <http://funes.uniandes.edu.co/11543/1/Porra2012El.pdf>

Posada, F. A. y Villa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* (Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia).

<http://bibliotecadigital.udea.edu.co/dspace/handle/10495/7093>

Pulgarín, C. M. (2014). *Aproximación del concepto de curva mediante el pliegue de superficies en el marco de la teoría de Pirie y Kieren* (Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia).

http://www.ingeniaudea.co/pluginfile.php/75252/mod_resource/content/2/APROXIMACION%20DEL%20CONCEPTO%20DE%20CURVA%20MEDIANTE%20EL%20PLIEGUE%20DE%20SUPERFICIES%20EN%20EL%20MARCO%20DE%20LA%20TEORIA%20DE%20PIRIE%20Y%20KIERN.pdf

Ramos, B. (2005). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios Institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. La investigación didáctica sobre las funciones* (Tesis

Doctoral, Universidad de Barcelona). <https://www.tdx.cat/handle/10803/1313#page=23>

Rico, L. (1998). La comunidad de educadores matemáticos y la situación actual en España. En J.

Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia* (pp. 19-39).

<http://funes.uniandes.edu.co/679/>

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function.

https://www.researchgate.net/publication/238287243_On_understanding_the_notion_of_function

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2, 3), 133-170. <http://www.ecosad.org/laboratorio->

virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf

Anexos

1.1. Anexo A: Consentimiento informado



COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO *Consentimiento informado*

Consentimiento de participación

Yo _____ estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada “Comprensión del concepto de función a partir de representaciones en estudiantes de grado noveno” dirigida por el docente Fredy Zuluaga Ramírez, estudiante de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesor de la Institución Educativa Rural Santa María. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de hacerlo en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo solicitar además que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o destruida.

Propósito de la investigación: El objetivo de este estudio es analizar la comprensión del concepto de función, por los estudiantes, cuando usan representaciones verbales, numéricas, tabulares, gráficas y algebraicas.

Beneficios: Participar en esta investigación apoya la investigación en Educación Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio seré observado en clase, algunas veces video grabado y fotografiado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en esta investigación.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, serán usados seudónimos para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: El investigador responderá cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través del correo electrónico: fredyxr@gmail.com

Consentimiento del participante: Con la firma de esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización acepto en que mi hijo o hija participe de esta investigación.

_____ Nombre del investigador	_____ firma	_____ fecha
_____ Nombre del participante	_____ firma	_____ fecha
_____ Nombre padre de familia	_____ firma	_____ fecha

1.2. Anexo B: Encuentro motivación e ideas previas



COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE
REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO

Encuentro # 1
Fredy Zuluaga

Motivación e Ideas Previas

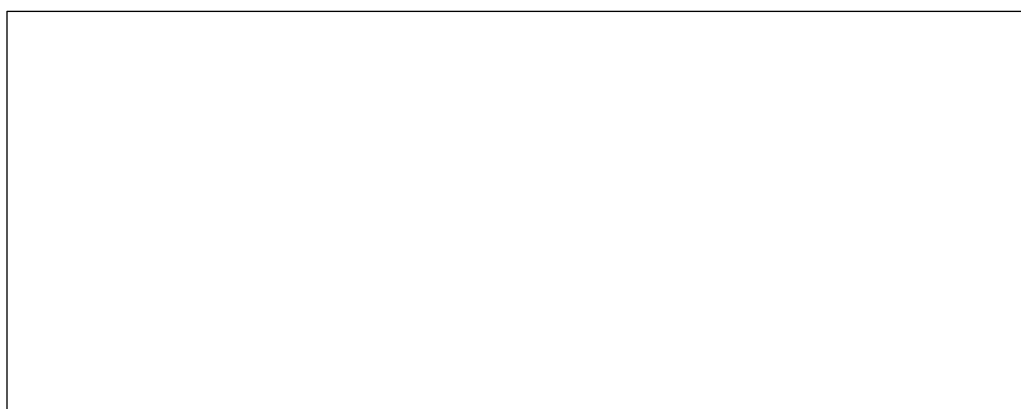
Momento uno reflexión

Alguna vez has pensado, ¿qué son las matemáticas?,Cuál sería la respuesta ante esta pregunta si cuestionáramos a nuestros amigos, padres y familiares. El propósito de la siguiente actividad es repensar este interrogante, asimilar ideas nuevas y llegar a una construcción colectiva por medio de acuerdos y conclusiones grupales.



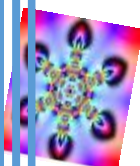
Actividad

Construye en grupos de tres estudiantes un escrito sobre la pregunta, ¿qué es la matemática? En este se deben plasmar ideas, concepciones y respuestas sobre el interrogante, el escrito será socializado con todo el grupo y deberá contener un mínimo de 200 palabras en su extensión.



Momento dos lectura

Con el objetivo de asimilar ideas y re-conceptualizar la pregunta ¿qué es la matemática? Hacemos revisión de la siguiente lectura y la confrontamos con los escritos de los estudiantes.





¿Qué es la matemática? no solo son números¹

¿Qué es la matemática? Si cuestionamos personas al azar, es probable que ellas respondan “la matemática es el estudio de los números”, e insistiendo un poco acerca de qué clase de estudio es, las personas pueden describirla como “la ciencia de los números”. Sin embargo, eso es lo máximo posible de obtener. Así llegamos a una descripción de la matemática que dejó de ser precisa ¡hace dos mil quinientos años! Dada tal idea equivocada de gran magnitud, hay escasamente duda alguna de que es improbable que estas personas se den cuenta de que la investigación en matemáticas es una actividad floreciente a nivel mundial, o acepten que la matemática permea a menudo una extensión considerable de la mayoría de los ámbitos de vida y la sociedad de hoy.



En efecto, la respuesta a la pregunta “¿qué es la matemática?” Ha cambiado varias veces durante el curso de la historia. Hasta alrededor del año 500 A.C., la matemática era en verdad el estudio de los números. Este era el período de la matemática en Egipto y Babilonia. En esas civilizaciones, la matemática consistió casi solamente de aritmética. Era en gran medida utilitaria, y similar a un libro de cocina. El período desde cerca de 500 A.C. hasta 300 D.C. fue la era de la matemática Griega. Los matemáticos de la antigua Grecia estaban preocupados principalmente por la geometría. En verdad, ellos consideraron los números en una manera geométrica, como medidas de longitud, y cuando ellos descubrieron que habían longitudes para las cuales sus números no correspondían (longitudes irracionales), su estudio del número se detuvo de forma considerable.

¹ Nota. Adaptado de: Cano, J. M. (2012). *La definición del concepto de función bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión en estudiantes de Grado 11 de una institución educativa oficial de Medellín*



Para los griegos, con su énfasis en la geometría, la matemática era el estudio del número y la forma. En efecto, fue sólo con los griegos que la matemática llegó a ser un área de estudio, y dejó de ser una colección de técnicas para medir, contar y contabilizar. El interés de los griegos en la matemática era no solo utilitario; ellos consideraron la matemática como una búsqueda intelectual que tiene elementos estéticos y religiosos. Tales de Mileto introdujo la idea de que afirmaciones declaradas en forma precisa, de la matemática podían ser lógicamente probadas mediante un argumento formal. Esta innovación marcó el nacimiento del teorema, ahora la piedra angular de la matemática. Para los griegos, esta aproximación culminó en la publicación de los Elementos de Euclides, según se dice el libro de más amplia circulación de todos los tiempos después de la Biblia.

Matemáticas en movimiento

No hubo cambios importantes en la naturaleza en conjunto de la matemática, y difícilmente hubo avances significativos dentro de ella, hasta mediados del siglo XVII, cuando Newton (en Inglaterra) y Leibniz (en Alemania) inventaron en forma independiente el cálculo. En esencia, el cálculo es el estudio del movimiento y el cambio. La matemática previa había estado restringida, en gran medida, a los problemas estáticos de contar, medir y describir la forma. Con la introducción de técnicas para manejar el movimiento y el cambio, los matemáticos fueron capaces de estudiar el movimiento de los planetas y de cuerpos que caen en la tierra, el funcionamiento de maquinaria, el flujo de líquidos, la expansión de gases, fuerzas físicas como el magnetismo y la electricidad, los vuelos, el crecimiento de plantas, el esparcimiento de epidemias, la fluctuación de los beneficios, etc. Después de Newton y Leibniz, la matemática llegó a ser el estudio del número, la forma, el movimiento, el cambio y el espacio.

**Momento tres profundización**

A continuación observamos el video Geometría de Fractales

<https://www.youtube.com/watch?v=A4aEr9m--Pk>

Momento cuatro socialización

a. ¿El dialogo, la lectura y el video movilizan nuestras percepciones o ideas sobre la matemática, escribe cómo?

b. En el texto anterior y video se plantea: la matemática ha llegado a ser el estudio de la forma, el movimiento, el cambio y el espacio, es decir, la ciencia que describe y comprende fenómenos, eventos o situaciones a partir de regularidades y patrones de comportamiento. Escribe algunos patrones o regularidades identificados en la matemática, nuestra cotidianidad, entorno, sociedad y en general en nuestras vidas.

c. Identifica algunos términos claves en los patrones o regularidades.

d. Establece algún tipo de relación entre los términos propuestos.

1.3. Anexo C: Encuentro patrones y regularidades



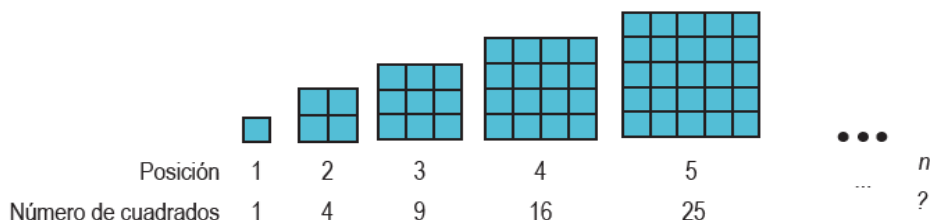
COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO

Encuentro # 2
Fredy Zuluaga

Patrones y regularidades

Situación 1: Cuadrados perfectos²

Eliza juega con cuadrados y elaboró el siguiente esquema.



Como se puede notar en la posición uno, se tiene 1 cuadrado, en la posición dos, se observan 4 cuadrados, en la posición tres, se requieren 9 cuadros, en la posición cuatro, 16 cuadrados, en la posición cinco, 25 cuadrados y así sucesivamente.

a. Deduce, ¿cómo está aumentando el número de cuadrados en la situación propuesta?

b. ¿Cuántos cuadrados son necesarios utilizar en la posición 7 para conservar la misma dinámica de construcción? Explica cómo se pueden calcular.

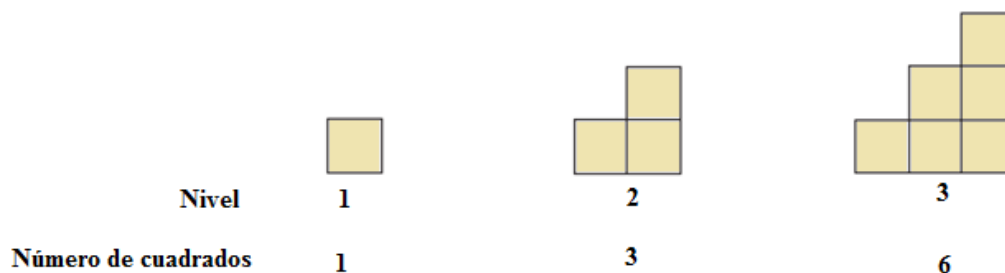
c. ¿Cómo se puede hallar el número de cuadrados para cualquier posición (ejemplo la noventa), sin necesidad de hacer un dibujo?

² Nota. Adaptado de: Velásquez, S. M. (2013). *4² Aventuras Matemáticas*



Situación 2: Esquema de escalera

Felipe construye el esquema de una escalera usando cuadrados, observa aquí los pasos seguidos:



Como se puede ver utiliza un cuadrado para el nivel 1, tres cuadrados para el nivel 2 y seis para el nivel 3 y así sucesivamente.

a. ¿Cuántos cuadrados en total deberá usar para construir el quinto nivel?, Describe la forma utilizada para calcular el número de cuadrados.

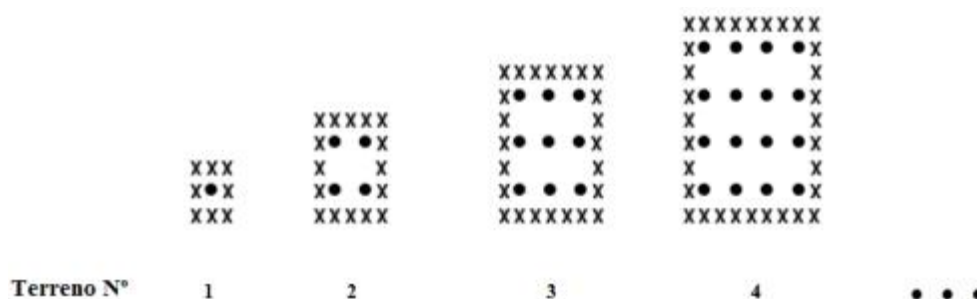
b. Describe con palabras las regularidades o patrones identificados en la situación, es decir, ¿cómo aumenta el número de cuadrados según el nivel?

c. ¿Cómo se puede hallar el número de cuadrados para cualquier posición (ejemplo la noventa), sin recurrir a un esquema pictórico?



Situación 3: Manzanos³

Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado; con el propósito de proteger los manzanos del viento siembra coníferas (pinos) alrededor de la totalidad del huerto. El siguiente es un esquema de la situación donde se puede apreciar la ubicación de los manzanos y de las coníferas para cualquier número (n) del terreno.



$m = \bullet = \text{manzano}$

$x = \text{conifera (pino)}$

a. Establece relaciones entre pinos y manzanos según el número del terreno.

Terreno N°	Cantidad de manzanos	Cantidad de coníferas (pinos)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
:		
n		

³ Nota. Adaptado de: Pruebas PISA



b. ¿Cuál es la relación que existe entre la posición del terreno, el número de manzanos y la cantidad de coníferas (pinos)?

c. ¿Existe algún valor para el cual, el número de manzanos es igual al número de coníferas? Justifica la respuesta.

d. ¿Cómo podemos determinar el número de manzanos y coníferas para cualquier número del terreno, por ejemplo, el terreno N° 125? Explica la forma para hallarlos.

e. Establece conclusiones respecto de la situación.

1.4. Anexo D: Encuentro cambio y relaciones



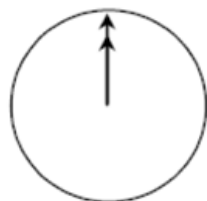
COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO

Encuentro # 3
Fredy Zuluaga

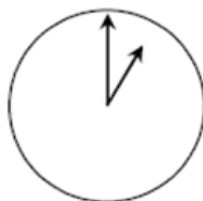
Cambio y relaciones

Situación 4: Chatear⁴

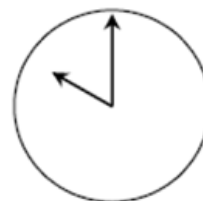
Hans (de Berlín, Alemania) y Mark (de Sydney, Australia) se comunican a menudo utilizando el “chat” de internet. Ambos tienen que conectarse en línea simultáneamente para poder "chatear". Deseando encontrar una hora apropiada para hacerlo, Mark buscó un mapa horario mundial y halló lo siguiente:



Greenwich 12:00 de la noche



Berlín 1:00 de la mañana



Sydney 10:00 de la mañana

a. Describe la situación según la hora en Berlín y Sydney.

b. Cuando son las 7:00 de la noche en Sydney, ¿qué hora es en Berlín?, justifica la respuesta.

c. Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana de sus respectivas horas locales porque estarán durmiendo. ¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans?, encuentra mínimo dos respuestas diferentes, justifica.

⁴ Nota. Adaptado de: Pruebas PISA



Situación 5: Caminar⁵

La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso p es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas.



Para los hombres, la ecuación $\frac{n}{p} = 140$ representa una relación entre n y p donde:

n = número de pasos por minuto y p = longitud del paso en metros.

a. Si se aplica la ecuación a la manera de caminar de Mariana y ella da 70 pasos por minuto, ¿Cuál es la longitud del paso de Mariana en metros y centímetros?

b. Miguel sabe que sus pasos son de 0,80 metros; el caminar de Miguel se ajusta al modelo planteado (a la ecuación). Calcula la velocidad a la que anda Miguel en metros por minuto y en kilómetros por hora, recuerda que $v = \frac{d}{t}$; d es distancia y t tiempo.

c. ¿Cómo podemos hallar la distancia recorrida por Miguel en 1 minuto, 1.5 minutos, 2 minutos, 2.5 min, 3 min y en general para cualquier número de minutos?, halla una ecuación para la situación.

⁵ Nota. Adaptado de: Pruebas PISA.

1.5. Anexo E: Encuentro relaciones proporcionales y gráficas



COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE
REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO

Encuentro # 4
Fredy Zuluaga

Relaciones proporcionales y gráficas

Situación 6: Concentración de un medicamento

Luisa es ingresada en un hospital y es necesario aplicarle una inyección de penicilina. Su cuerpo descompone gradualmente la penicilina, de modo que una hora después de la inyección, solo el 60% de la penicilina permanece activa. Es decir, al final de cada hora contiene activo el 60% de la penicilina presente del final de la hora anterior.

Considera que a Luisa se le ha administrado una dosis de 300 miligramos de penicilina a las 8:00 de la mañana.

a. Representa el comportamiento de la penicilina que permanecerá activa en la sangre de Luisa desde las 08:00 a.m. hasta las 11:00 a.m.

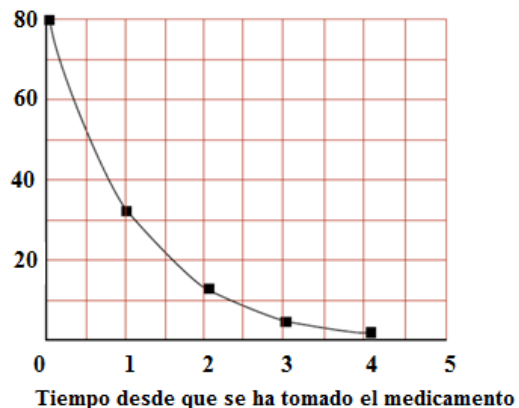
b. Describe la relación existente entre el tiempo y la concentración de penicilina en el cuerpo de Luisa.



Situación 7: Análisis de una gráfica

a. A partir de la gráfica de la derecha elabore un enunciado en el cual se relacione cantidad de medicamento activo (mg) y tiempo.

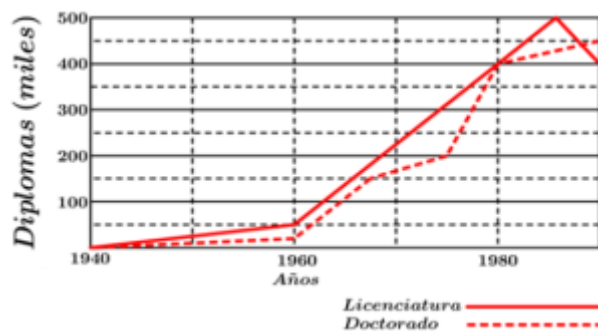
Cantidad de farmaco activo (mg)



b. ¿Cómo es la relación entre las variables presente en la situación?

Comparaciones y relaciones

c. Analiza en la siguiente gráfica las posibles relaciones entre las variables y establece conclusiones al respecto.



1.6. Anexo F: Encuentro variación



COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE
REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO

Encuentro # 5
Fredy Zuluaga

Variación

Situación 8: El peso de los sacos de papa⁶

Mariana trabaja en la placita de mercado y sabe que dos sacos de papa tienen un peso de 160 kg, ayúdala a deducir: ¿cuál es el peso de 1, 1.5, 2.5, 3, y cuatro sacos de papa respectivamente?, ¿cuál es el peso de 7 sacos de papa?, ¿y de 13 sacos de papa?

a. Procedimientos, cálculos, representaciones.

b. Elabora una representación gráfica, tabla y/o esquema para describir la situación.

⁶ Nota. Adaptado de: Ibarra, T. y Moreno, V. (2010). *Una aproximación al concepto de función lineal desde la proporcionalidad directa simple en situaciones de variación de la vida cotidiana*



c. ¿Cómo es posible determinar el número de sacos contenidos en 1400 kg de papa?, plantea un procedimiento, cálculo y/o representación para la solución.

d. Y si Ana compra 1600 kg de papa, ¿cuántos sacos de papa compró Ana?

e. La matemática permite describir las situaciones por medio de **patrones o regularidades**, a continuación completa las siguientes filas según el número de sacos y los kilogramos correspondientes.

Cantidad de kilogramos de papa en 8 sacos	=		=	640
<i>Kg</i> (9)	=	9×80	=	
<i>Kg</i> (12)	=		=	
<i>Kg</i> (25)	=		=	
<i>Kg</i> (s)	=		=	

Escribe 2 conclusiones al respecto.

1.7. Anexo G: Encuentro función lineal



COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO

Encuentro # 6
Fredy Zuluaga

Función lineal

Situación 9: Periódico The New York Times⁷

Valerie trabaja como vendedora del periódico “The New York Times” y por razones de cambio de administración la empresa está ofreciendo dos nuevas alternativas de contrato.

Alternativa uno: Un salario básico de USD 50 diarios y una comisión de USD 7 por cada periódico vendido.

a. ¿Cuánto dinero ganaría en un día, si Valerie realizará, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 ventas respectivamente?

b. Expresa la relación que existe entre el salario total devengado a diario y el número de periódicos vendidos, a partir de los “cálculos y/o procedimientos anteriores”

⁷ Nota. Adaptado de: Posada, F. A. y Villa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*



c. Representa a través de una gráfica, tabla o esquema la relación entre el número de periódicos “The New York Times” y los ingresos correspondientes.

d. ¿Describe cómo están relacionadas las variables, por ejemplo existe alguna dependencia entre ellas?, justifica la respuesta.

e. Elabora alguna expresión (ecuación, modelo matemático) con el cual se pueda hallar el salario de Valerie para cualquier número de periódicos vendidos.



Alternativa dos: Con el cambio de administración la empresa propone además la siguiente forma de pago. Un salario básico diario de USD 40 y por cada venta una comisión de USD 9. Valerie está interesada en conocer, ¿cuál de las dos opciones de contrato es la más conveniente?

a. Representa por medio de un esquema la situación y en ella relaciona el número de periódicos “The New York Times” vendidos y los ingresos correspondientes para diferentes números de ventas.

b. De acuerdo a la situación y el esquema, plantea cómo se puede calcular el salario devengado para cualquier número de periódicos vendidos.

c. Analiza las dos alternativas salariales y justifica cuál de ellas es la mejor opción para el contrato laboral de Valerie, representa los razonamientos.

1.8. Anexo H: Guión de entrevista semiestructurada



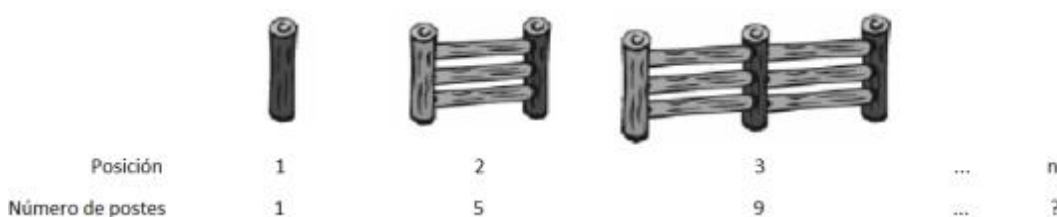
COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE REPRESENTACIONES EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO

Guión entrevista
Fredy Zuluaga

Guión de entrevista semiestructurada, comprensión del concepto de función

Gracias por participar en este proyecto de investigación. Para las siguientes cuestiones responder con naturalidad y extender la justificación si es necesario.

1. Reconociendo patrones:⁸ observa la siguiente figura y analiza cómo está cambiando.



a. Indica una tabla para representar el cambio en el patrón, expresa algunos elementos iniciales.

b. Describe la regularidad que tiene el patrón.

c. Expresa de forma concreta y abreviada ¿cómo hallar la figura de la posición 4, 7 y 10?

d. Plantea una forma general, para determinar la figura correspondiente en cualquiera de las posiciones del patrón.

2. La siguiente gráfica representa la relación entre el tiempo y el volumen de agua en dos tanques, ambos con un orificio en el fondo, por el cual derraman su líquido.

⁸ Nota. Adaptado de: Posada, F. A. y Villa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*



a. Describe con palabras, cómo está cambiando el volumen de agua en los tanques.

b. Expresa como completar una tabla para representar la relación entre tiempo y volumen para el tanque 2.

c. ¿Existe algún tiempo, para el cual el volumen de agua es el mismo en los dos tanques?

d. ¿Cuál es la razón de vaciado por unidad de tiempo en cada tanque? ¿cuál tanque pierde su nivel de agua en menor tiempo?

e. Representa por medio de una expresión algebraica, la relación entre el tiempo y el volumen de cada uno de los tanques.

1.9. Anexo I: Estudio a priori de los diferentes encuentros

A continuación, son precisados los intereses pedagógicos planteados en los diferentes encuentros a partir de las situaciones realizadas. Estas no obedecen a un orden definido según los niveles propuestos en la teoría de comprensión de PK. En las situaciones se proponen de manera intencionada algunos registros de representación; según Duval (2016) los procesos de conversión deben estar presentes en la comprensión de conceptos matemáticos, por esta razón es relevante tenerlos presentes en el desarrollo de las situaciones.

Es pertinente mencionar algunos términos relacionados en las situaciones entre ellos: regularidad, cambio, relaciones proporcionales, variación, dependencia e independencia de variables, entre otros; estos favorecen la comprensión del concepto de función y hacen parte de la estructura del concepto, en el análisis histórico y epistemológico expuesto en el capítulo 1, son sugeridos como ejes principales para el aprendizaje del concepto de función.

1.1.1. Caracterización previa encuentro # 1. Motivación e ideas previas

El interés principal del encuentro número 1 es diagnosticar, conocer las ideas y preconcepciones de los estudiantes en torno a las matemáticas. La lectura ¿qué es la matemática? (Tomada del prólogo del libro “El lenguaje de las matemáticas” de Keith Devlin) y la observación del video geometría de fractales de la dirección <https://www.youtube.com/watch?v=A4aEr9m--Pk>, cuestionan las creencias y formas de razonar de los estudiantes sobre esta disciplina, además plantean visiones diferentes a las comunes, en particular se procura en los estudiantes estimular la comprensión de la matemática como una disciplina que involucra patrones, relaciones entre variables, modos de representación y modelos utilizados para la descripción de fenómenos, eventos y situaciones de nuestro mundo, estas pueden ser hipotéticas o reales.

1.1.2. Caracterización previa encuentro # 2. Patrones y regularidades

El objetivo del encuentro número 2 es reconocer algunos patrones geométricos y regularidades, asimismo indicar relaciones implícitas entre variables e inducir procesos de generalización presentes en las situaciones. Este encuentro está conformado por las situaciones uno, dos y tres.

1.1.2.1. Situación 1: Cuadrados perfectos. En la situación 1, los estudiantes pueden identificar un sentido numérico de la posición relacionada con el orden (uno, dos, tres, cuatro, cinco...), implícitamente la posición hace alusión al dominio de una función y el número de cuadrados asignados a cada posición indica una relación de correspondencia uno a uno, por lo tanto, sugiere la idea de rango de una función.

Además, la situación presenta un esquema compuesto por cuadrados, en la cual los estudiantes deben identificar la cantidad para varias posiciones y en especial la 7, e inferir como están aumentando, relativamente es una tarea simple de resolver por los estudiantes.

Aritméticamente corresponde al cuadrado de la posición y formalmente el número de cuadrados de la posición está relacionado en función del cuadrado del nivel o posición, aquí son utilizadas ideas como posición, número de cuadrados, aumento y asignación implícita, todas ellas relacionadas con el concepto de función.

1.1.2.1.1. Clasificación de la situación según los niveles PK. Las preguntas **a** y **b** están dirigidas hacia la identificación de patrones y regularidades, en estos interrogantes es necesario que los estudiantes reconozcan cómo aumenta el número de cuadrados cada vez que se avanza en la posición, las cuestiones **a** y **b** son categorizadas en el nivel dos, creación de la imagen. Por su parte la pregunta **c** es un interrogante que busca llevar al estudiante a comprensiones más elaboradas, por esta razón es ubicada en el nivel tres, comprensión de la imagen.

1.1.2.2. Situación 2: Esquema de escalera. La pregunta **a** es clasificada en el nivel creación de la imagen, dado que en ella el estudiante requiere la visión particular de cada uno de los niveles de la escalera y así lograr una mayor elaboración de su aprehensión. La pregunta **b** por su parte, está interesada en cómo los estudiantes están comprendiendo la situación, este interrogante además desea sugerir el proceso de formalización en el pensamiento de los estudiantes. Y la cuestión **c** sugiere en el estudiante procesos generalización, a través de los cuales se pueda obtener un esquema de modelización para describir la situación satisfactoriamente en cualquiera de los niveles de la escalera, este ítem es clasificado en el nivel observación de la propiedad.

1.1.2.3. Situación 3: Manzanos. En esta situación se pretende acercar a los estudiantes a comprensiones que involucren variables relacionadas y desarrollar procesos de pensamiento para reconocer propiedades y plantear generalizaciones en la situación estudiada.

El ítem **a** de la situación manzanos está clasificado en el nivel comprensión de la imagen, en su solución es necesario registrar los datos solicitados en una tabla, para ello se debe pasar por el nivel creación de imagen por ejemplo cuando los estudiantes elaboran el esquema del terreno número 5. Es pertinente tener en cuenta que la cuestión **a** adicionalmente propone el inicio de la formalización elaborando una expresión generalizada para determinar el número de manzanos y de coníferas para cualquier terreno.

El inciso **b** indaga por la relación existente entre el terreno, el número de manzanos y la cantidad de pinos, esta pregunta esta categorizada en el nivel comprensión de la imagen, puesto que requiere establecer la correlación entre las variables de la situación y su dependencia.

El enunciado **c** está clasificado en el nivel conocimiento primitivo, ya que en este los estudiantes deben analizar la tabla y verificar si existe algún valor para el cual el número de manzanos es igual al número de pinos.

La pregunta **d** interroga explícitamente por la comprensión elaborada de los estudiantes, para responder a este ítem los educandos deben abstraer e imaginar el comportamiento de la situación para cualquier terreno, en este momento de la situación los estudiantes han comprendido la imagen, observado la propiedad y se encuentran en el inicio de procesos como formalizar y generalizar patrones presentes en la situación.

1.1.3. Caracterización previa encuentro # 3. Cambio y relaciones

El interés del encuentro número 3 es potenciar en los estudiantes el análisis de situaciones en las cuales el cambio está presente, para ello se propone una situación asociada con los husos horarios en diferentes lugares.

1.1.3.1. Situación 4: Chatear. La pregunta **a** de la situación chatear es clasificada en el nivel creación de la imagen, en esta el estudiante debe describir el cambio de hora de acuerdo al lugar y establecer una relación entre los dos tiempos.

La cuestión **b** esta categorizada en el nivel creación de la imagen, para responder este ítem es necesario que el estudiante comprenda la diferencia entre las horas y pueda idear una solución a la situación.

La cuestión **c** es clasificada en el nivel comprensión de la imagen, en este interrogante además de comprender la diferencia entre las horas en Berlín y Sydney, es necesario estimar diferentes horas para hallar los momentos precisos en los cuales las dos personas pueden chatear.

1.1.3.2. Situación 5: Caminar. La situación 5 del encuentro cambio y relaciones tiene por objetivo iniciar la introducción del concepto de función lineal a partir del modelo matemático, en el cual se relacionan las variables distancia, tiempo y rapidez.

La cuestión **a** indaga por los conocimientos primitivos del estudiante en relación con la solución de ecuaciones, sugiere reemplazar algún valor y calcular para una incógnita en la ecuación planteada.

El ítem **b** es clasificado en el nivel comprensión de la imagen, en esta cuestión se pretende que el estudiante pueda ir comprendiendo las particularidades de la situación para realizar una comprensión elaborada.

Por su parte el enunciado **c** es categorizado en el nivel observación de la propiedad, dado que para ser resuelto el estudiante debe haber reunido todas las particularidades de la situación y poderlas plantear en comprensiones globales de la misma, como por ejemplo elaborar un modelo matemático representativo de la función lineal.

1.1.4. Caracterización previa encuentro # 4. Relaciones proporcionales

La intención del encuentro número 4 es inducir a los estudiantes al reconocimiento de relaciones proporcionales entre variables y relaciones de dependencia e independencia, para este fin se propone la elaboración y análisis de diversas situaciones a través de enunciados y gráficas.

1.1.4.1. Situación 6: Concentración de un medicamento. El enunciado **a** de la situación seis, concentración de un medicamento es clasificado en el nivel *comprensión de la imagen*, está dirigido a favorecer en los estudiantes procesos de pensamientos relacionados con la comprensión y solución de reglas de tres, explícitamente el medicamento está disminuyendo cada hora el 40%, así permanece activo el 60% del medicamento transcurrido cada lapso de

tiempo. La cuestión **b** interroga por la relación presente entre las variables tiempo y medicamento, este ítem de igual manera es categorizado en el nivel comprensión de la imagen.

1.1.4.2. Situación 7: Análisis de una gráfica. El literal **a** y **b** de esta situación son vinculados en el nivel comprensión de la imagen, el primero propone a los estudiantes elaborar un enunciado a partir del análisis de la gráfica y el segundo plantea establecer una relación entre las variables involucradas.

El ítem **c** también es propuesto en el estrato comprensión de la imagen, dado que el estudiante debe identificar las variables presentes en la situación y poder establecer relaciones y comparaciones entre las mismas.

1.1.5. Caracterización previa encuentro # 5, Variación

El interés de la situación 8 planteada en el encuentro número cinco, es promover en los estudiantes deducciones de relaciones proporcionales, determinar constantes de proporcionalidad y aplicar múltiples formas para representar la comprensión de la situación. Comprender relaciones proporcionales exige a los estudiantes realizar operaciones básicas de sumas, multiplicaciones y divisiones, además de proponer reglas de tres y resolver. Las representaciones podrían ser enunciados, tablas de valores, gráficas y/o modelos matemáticos, estas posibilitan hacer transformaciones de un registro a otro y relacionar las variables.

El ítem **a** es clasificado en el nivel creación de la imagen y tiene como finalidad que los estudiantes representen, realicen cálculos y procedimientos, a su vez el objetivo de la cuestión **b** es sugerir en los estudiantes la realización de una gráfica, tabla de valores y/o esquema para describir la comprensión de la situación.

Las preguntas **c** y **d** tienen como propósito identificar en los estudiantes cuales procedimientos usan con mayor frecuencia, estas se pueden resolver con operaciones básicas o el

planteamiento de reglas de tres y son clasificadas en el nivel comprensión de la imagen. Por su parte el punto e pretende promover la generalización de la situación e inducir la construcción de modelos matemáticos para la solución de la situación, es categorizado en el nivel observación de la propiedad.

1.1.6. Caracterización previa encuentro # 6. Función lineal

El objetivo de este encuentro será profundizar en aprendizajes relacionados con el concepto de función, en particular elementos de la variación como la relación entre las variables y permitir a los estudiantes establecer conjeturas y deducciones a través de su análisis

Para este propósito se retoman procesos realizados en encuentros anteriores entre ellos, identificar estructuras aditivas y multiplicativas a partir de relaciones entre variables, reconocer la propiedad de dependencia e independencia, describir relaciones entre variables involucradas en la situación, por medio de tablas, enunciados, reglas de tres y modelos matemáticos, identificar patrones o regularidades de comportamiento de las variables propuestas en la situación y por último generalizar a partir de una expresión algebraica el comportamiento de la situación para establecer conclusiones.

A partir de la situación 9 se plantean dos alternativas, las cuales los estudiantes deben comparar a través de tablas, enunciados y/o procedimientos, el interés de la actividad es que los estudiantes además de comprender algunos aspectos de la variación en la función lineal, puedan también concluir cuál alternativa es más favorable. En esta situación se comparan dos opciones de pago con distinto salario básico y diferente comisión por venta realizada.