



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**MOVILIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES DEL
MAESTRO DE BÁSICA PRIMARIA PARA EL
DESARROLLO DEL PENSAMIENTO
ALGEBRAICO TEMPRANO**

July Marcela Londoño Ospina

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación, Departamento de Educación



Mobilización de las concepciones del maestro de básica primaria para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano

July Marcela Londoño Ospina

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Educación

Asesores:

Doctora Sandra Milena Zapata

Doctor Carlos Mario Jaramillo López

Línea de Investigación:

Educación matemática

Grupo de Investigación:

Educación Matemática e Historia – Edumath (UdeA – Eafit)

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada

Medellín, Colombia

2020

*A Papito Dios y a la Santísima Virgen María por amarme, sostenerme, protegerme,
bendecir e iluminar con fortaleza y sabiduría este camino de formación.*

*A mis padres, mi mamita hermosa Cleotilde y mi papito lindo Misael, mis dos ángeles
divinos, y a mi familia por estar conmigo en cada segundo y minuto de este proceso, por su
amor incondicional, su fortaleza y apoyo sin límites, por sus oraciones colmadas de fe y
amor infinito.*

*A mi ángel hermoso Jairo Jiménez Isaza, quien en su vida terrenal apoyo con amor y
comprensión mi formación y aún desde el cielo continuó fortaleciendo mi camino, con su
sabiduría y humildad.*

*A mis profes, asesores de investigación, Sandra Milena y Carlos Mario, por sostenerme a
nivel pedagógico, pero ante todo desde lo humano, por entregarme lo mejor de su ser como
personas, para guiarme y formarme, a partir de su conocimiento, idoneidad, experiencia y
profesionalismo.*

Agradecimientos

“Haz lo que puedas y pide a Dios lo que no puedas, que Él te dará fuerzas para que puedas” (San Agustín)

Al culminar este proceso de formación que ha transformado mi vida, mi ser, mi saber y hacer, mi práctica pedagógica, agradezco con toda mi Fe y el amor de mi corazón:

A Papito Dios y Mamita la Virgencita, por acompañar y orientar cada pensamiento, idea, reflexión, palabra, cada acción en el transcurso de mi formación durante los seminarios y en el desarrollo del trabajo de investigación. Por sostener mi corazón cuando por la angustia se aceleraba más fuerte, por desaparecer o sostener el cansancio cuando sentía que no tenía fuerzas para continuar, por avivar la esperanza y el creer en lo que podía lograr, cuando las lágrimas invadían mi rostro, por abrazarme muy fuerte cuando en medio de todas las dificultades familiares y emocionales sentí que me derrumbaba, por iluminarme y protegerme con su Espíritu Santo, cuando en medio de la angustia les supliqué que no me dejarán sola, por sentarse a mi lado junto a mi mesa y mi computador y susurrarme siempre al oído y al corazón, ten fe y fortaleza, sigue adelante, sigue luchando, nosotros estamos aquí y te daremos la fuerza, y así permitirme alcanzar esta meta de vida.

A mi madre hermosa y mi papito lindo, gracias por su entereza, por su oración abnegada y colmada de amor infinito, por cada sonrisa, abrazo, palabra de aliento, consejo, apoyo incondicional, por tener paciencia en mis ausencias. Por creer siempre en su niña linda, en su hija amada, por ser mi motor y mi fuerza, mi inspiración y mi bastón; mis progenitores, me enorgullezco de ellos porque lucharon día a día para que lograra una calidad humana integral. Por cada velita encendida que se sostuvo siempre entre una y otra llama con esperanza, amor y la convicción de que Dios y la Virgencita me protegerían hasta llegar a mi meta.

A mis hermosos hermanos y hermanas, Milena, Lorena, John Fredy y Jesús, a mis cuñados, Paula y Juan Pablo, gracias por amarme con todo su corazón y sostenerme en cada momento, con su cariño, cuidados, plegarias, fe y confianza en Dios y la Virgencita para que me fortalecieran en este camino, por su apoyo incondicional. Gracias por abrirme las puertas de su hogar para ir a estudiar cada fin de semana, por sus comidas deliciosas para llevar a la Universidad y sus abrazos que acompañaron cada uno de mis fríos, mis silencios y angustias. A mi hermanita Milena por sus cuidados de segunda madre que siempre han sostenido mi vida y mis sueños. A mi hermanito Jesús por cuidar de mis padres en mis ausencias.

A mis princesas Luisa Fernanda y Sofía y a mi príncipe Samuel, por ser el amor bonito de mi corazón, por sus mensajes colmados de amor y alegría, por sus sonrisas, sus miradas, abrazos y ternura infinita, por ser el motor de mi vida y la fuente de mi inspiración.

A mis amigos del alma, aquellos regalos que Dios te da en bendición para la vida y te permiten con su amor y apoyo incondicional alcanzar tus metas. A Jorge por su amistad leal y maravillosa, por su compañía, su fortaleza e inmenso cariño, a Gloria por su ternura, por sus consejos, por sostenerme en cada momento, por sus deliciosas comidas, a Betty mi Manita, por abrazarme y sostenerme en los momentos más difíciles de mi vida, por brindarme su amor y alentarme a cumplir mis sueños, a Marisel por su preocupación y apoyo constante, a mi Angie por su valiosa amistad y acompañamiento, a Didier por su alegría y apoyo y a todos mis compañeros de trabajo por fortalecerme con sus palabras y cariño.

A mis compañeras maestras, participantes de la investigación, Aleja, Moni y Mari, por ser las protagonistas más hermosas y valiosas de este trabajo de investigación, por compartir conmigo su valioso tiempo, sus enseñanzas, sus experiencias, sentimientos, emociones, pensamientos, ideas y concepciones, por develar su ser, saber y hacer en el proceso de formación y construir juntas una posibilidad de repensarnos sobre la práctica, sobre sí mismo, sobre aquello que nos constituye como

maestras para aportar lo mejor en los procesos de enseñanza y de aprendizaje hacia nuestros estudiantes.

A mis asesores de investigación, la Doctora Sandra Milena, por su paciencia, su cariño incondicional, su ternura, entrega abnegada y decisiva por mi formación, por nunca dejar de creer en mí y sostenerme con sus consejos sabios, con sus palabras de apoyo y acompañamiento “yo voy a estar junto a ti” “vamos a salir adelante, tú puedes”, que siempre me hicieron creer en que podía y me levantaron con toda la fuerza para seguir luchando por mis ideales, por ser mi inspiración, ejemplo y admiración humana y pedagógica. Al Doctor Carlos Mario, por su paciencia, su cariño y apoyo incondicional, pues a pesar de las circunstancias que se presentaron, continuó creyendo en mí y apostándole todo a mi formación y cualificación, totalmente convencido de una de sus valiosas tesis de vida “educar a un maestro, es educar y aportar a toda una comunidad”, por aportar con su idoneidad, experiencia, consejos, orientaciones de manera decisiva para alcanzar mi meta, por ser mi ejemplo y admiración.

Al profesor René Alejandro Londoño Cano, por su sabiduría, disposición, entrega, acompañamiento y apoyo incondicional en mi proceso de formación.

A mis profesores de formación en los seminarios, René Alejandro Londoño Cano, Diana Victoria Jaramillo Quiceno, Walter Fernando Castro Gordillo, Luz Adriana Cadavid, Liliana Quintero, Carlos Aristizábal, Carolina Higueta Ramírez, quienes aportaron lo mejor de sus conocimientos, sabiduría, experiencia e idoneidad para transformar mi vida y mi hacer como maestra en el paso por mi formación.

A mis compañeros de la línea en educación matemática y demás con los que compartí los semanarios de formación por sus conocimientos, interacción y experiencias que aportaron a mis reflexiones, conocimientos y cualificación.

A la I.E.R Zoila Duque Baena, a mi ángel hermoso, Jairo Jiménez quien siendo su rector durante mis años de formación me brindó los tiempos, espacios, acompañamiento y apoyo incondicional para formarme, a los estudiantes y padres de familia que hicieron parte de mi proceso por tenerme paciencia en los viernes de ausencia debido a las clases, por su comprensión y por creer siempre en que su Profe se estaba formando para entregarles mejores aprendizajes y acompañamiento en sus proyectos de vida.

A la Universidad de Antioquia, mi alma mater y al grupo de investigación EDUMATH (UdeA – Eafit) (Educación, Matemática e Historia), por hacer realidad mi sueño de ser Magíster, de cualificarme en la mejor Universidad, por abrirme sus puertas para recibir de ustedes los mejores conocimientos, orientaciones, apoyo y aprendizajes significativos en mi formación, en y para la transformación de mi ser como persona y como maestra.

A la Gobernación de Antioquia, por subsidiar económicamente, a través del programa Becas de Maestría el 80% de mi formación y apostarle cada día a tener más y mejores maestros cualificados en las regiones de nuestro departamento para transformar y aportar de manera integral a la educación y proyectos de vida de nuestros niños, niñas y comunidades.

CONTENIDO

Lista de figuras.....	11
Introducción.....	1
1. Planteamiento del problema.....	5
1.1. Antecedentes.....	5
1.1.2. Escuela Nueva, referentes de calidad y referentes de actualización curricular en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.....	12
1.1.3. Microcentros rurales.....	16
1.2. Problema de investigación.....	18
1.3. Pregunta de investigación.....	27
1.4. Objetivo.....	27
1.4.1. Objetivo General.....	27
2. Horizonte Teórico.....	28
2.1 Concepciones de los maestros en su práctica pedagógica para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.....	28
2.2 Posturas sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.....	33

2.3 Tareas de formación en la movilización de las concepciones de los maestros para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.....	38
3. Diseño Metodológico.....	44
3.1. Naturaleza del estudio y método	45
3.2. Contexto del trabajo de campo.....	47
3.3. Fases de la investigación e instrumentos utilizados para la recolección de los datos	55
4. Análisis y resultados de la investigación	64
4.1 Proceso de análisis de la información	65
4.2. Descripción y análisis de los episodios en los encuentros de formación	67
4.2.1. Encuentro 1. Grupo de enfoque con preguntas tipo entrevista.....	67
4.2.2. Encuentro 2. Problema de los sobres y mural de situaciones.....	85
4.2.3. Encuentro 3. Tarea: dobleces de papel y proceso de generalización	96
4.2.4. Encuentro 4. Tarea: secuencias figurales apoyadas por representación tabular y mural de situaciones.....	110
4.3 Narrativa sobre la movilización de las concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.....	130
5. Consideraciones finales	139

5.1. Respuesta a la pregunta y objetivo de investigación.....	139
5.2. Líneas abiertas de investigación.....	152
5.3. Dificultades y oportunidades en la investigación.....	153
Referencias.....	157
Anexos	167

Lista de figuras

Figura 1. Producción de la maestra Estrella, sobre actividades de seriación

Figura 2. Ideas clave para las unidades de análisis

Figura 3. Concepciones iniciales de las maestras para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Figura 4. Representación icónica del problema de los sobres

Figura 5. Producción de la maestra Luna sobre el problema de los sobres

Figura 6. Producción de la maestra Estrella sobre el problema de los sobres

Figura 7. Producción de la maestra Sol sobre el problema de los sobres

Figura 8. Mural de situaciones para la reflexión

Figura 9. Concepciones iniciales de las maestras para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, problema de los sobres.

Figura 10. Trabajo de las maestras sobre la tarea de dobleces de papel

Figura 11. Producción de la maestra Sol indicando la relación entre los dobleces y las partes

Figura 12. Producción de la maestra Estrella intentando despejar x para hallar el número de dobleces en cualquier acción.

Figura 13. Categorías emergentes, encuentro de formación dobles de papel y procesos de generalización.

Figura 14. Tarea sobre secuencias figurales con representación tabular y situaciones de variación.

Figura 15. Producción de la maestra Luna, demostrando una inferencia sobre la identificación de patrones comunes a través de una representación gráfica

Figura 16. Tarea sobre secuencia figural apoyada por representación tabular

Figura 17. Categorías emergentes, encuentro de formación 4, sobre secuencias figurales apoyadas por representación tabular.

Glosario

Analiticidad: característica del pensamiento algebraico temprano, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos (Radford, 2010a, 2010b).

Álgebra temprana: propuesta de cambio curricular, que concibe la importancia de iniciar el trabajo algebraico desde los primeros grados de escolaridad, a través de maneras de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas hacia una educación matemática con significado (Kaput, 1998).

Concepciones: se refiere al conocimiento, las creencias y las actitudes hacia la propia práctica de enseñanza por parte del maestro (Agudelo, 2005).

Designación simbólica: característica del pensamiento algebraico, referida a la expresión semiótica, a la manera de nombrar o referir los objetos (Radford, 2010a, 2010b).

Medios semióticos: todos los signos que son utilizados por los individuos, que se encuentren en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones, para así adquirir las metas de éstas (Radford, 2010a, 2010b).

Pensamiento algebraico contextual: estrato de pensamiento en el cual la indeterminancia se hace explícita, convirtiéndose en objeto del discurso, trasciende los casos particulares hasta formas generales, los medios semióticos que emergen son frases claves (Radford, 2010a, 2010b).

Pensamiento algebraico factual: su naturaleza es aparentemente concreta y opera a nivel de un número particular, en este no se hace explícita la indeterminancia, son objetivados medios semióticos como la percepción, gestos y palabras (Radford, 2010a, 2010b).

Pensamiento algebraico simbólico: estrato de pensamiento donde las frases clave son sustituidas por símbolos alfanuméricos del álgebra, los cuales cobran relevancia (Radford, 2010a, 2010b).

Pensamiento algebraico temprano: caracterizado por tratar cantidades indeterminadas de una manera analítica, a través de tres elementos o vectores: sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica (Radford, 2010a, 2010b, 2011).

Sentido de la indeterminancia: característica del pensamiento algebraico como aquello que es opuesto a la determinancia numérica, objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros (Radford, 2010a, 2010b).

Resumen

Este trabajo de investigación titulado movilización de las concepciones del maestro de básica primaria para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, se enmarca desde una justificación teórica, metodológica y práctica con la pretensión de dar respuesta a la pregunta: ¿cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano? El escenario que posibilitó el desarrollo de la investigación estuvo enmarcado en encuentros de formación realizados con tres maestras de la educación básica primaria, quienes exhibieron reflexiones sobre sus propias concepciones y la movilización de las mismas; para ello, el objetivo de la investigación fue analizar como el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Este estudio asume la línea del pensamiento algebraico temprano como horizonte que delimita un amplio número de acepciones que puede tener el álgebra temprana, a la luz de los posicionamientos teóricos de Radford (2010b, 2011, 2012 2013); así mismo, se fundamenta en los enunciados teóricos de las concepciones del maestro citadas por Agudelo (2005) y en la formación del maestro para iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad según Ponte (2006, 2008, 2009). Adicionalmente, la investigación realizada fue de orden cualitativo, en correspondencia con los postulados de Denzin y Lincoln (1994), que estiman en esta una posibilidad de analizar concepciones de los sujetos respecto a un fenómeno de estudio, lo cual se realizó a través del método fenomenológico hermenéutico, sustentado en Hernández, Fernández y Baptista (2014).

La implementación de diferentes actividades e instrumentos, tales como, la conformación de grupos de enfoque mediados por preguntas tipo entrevista, las tareas de formación y el mural de situaciones, aplicados en los diferentes encuentros de formación permitieron la recolección de los datos y su posterior análisis a través de unidades de análisis y categorías emergentes, suscitadas sobre las experiencia de las maestras, sus pensamientos e ideas, mostrando como resultado que es posible, a partir de la interacción consigo mismo y en relación con el par académico, reflexionar sobre la propia práctica del pensamiento matemático y poder así enfrentarse a tareas que posibilitan la objetivación de medios semióticos, así como formas de pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico, que pueden movilizar concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Palabras claves: movilización, concepciones, maestro, pensamiento algebraico temprano, formación.

Abstract

This research called mobilization of conceptions of the basic primary teacher for the development of early algebraic thinking, was carried out taking into account a theoretical, methodological and practical justification pretending of finding out an answer to the question: how does the basic primary teacher mobilize his or her conceptions for the development of early algebraic thinking? The scenario which was possible to develop this research was through training meetings held with three elementary school teachers, who exhibited reflections on their own conceptions and their mobilization; for this reason, the objective of the research was to analyze how the primary school teacher mobilizes his or her conceptions for the development of early algebraic thinking.

This study assumes the line of early algebraic thinking as a horizon that delimits a wide number of meanings that early algebra can have, in the frame of Radford's theoretical positions (2010b, 2011, 2012 2013); likewise, it is based on the theoretical statements of the teacher's conceptions cited by Agudelo (2005) and on the teacher's training to initiate the development of algebraic thinking in the first years of schooling according to Ponte (2006, 2008, 2009). Additionally, the research carried out was of qualitative order, in correspondence with Denzin and Lincoln's (1994) postulates, which estimate in this a possibility of analyzing the subjects' conceptions regarding a study phenomenon, which was carried out through the phenomenological hermeneutic method, supported by Hernández, Fernández and Baptista (2014).

The implementation of different activities and instruments, such as, the conformation of focus groups mediated by interview-type questions, the formation tasks and the mural of situations, applied in the different formation meetings allowed the collection of data and its later analysis through analysis units and emergent categories, raised on the experience of the teachers, their thoughts and ideas, showing as a result that it is possible, from the interaction with oneself and in relation to the academic pair, to reflect on one's own practice of mathematical thinking and thus be able to face tasks that make possible the objectification of semiotic means, as well as forms of factual, contextual and symbolic algebraic thinking, which can mobilize conceptions for the development of early algebraic thinking.

Keywords: mobilization, conceptions, teacher, early algebraic thinking, training.

Introducción

La inclusión del pensamiento algebraico en la educación básica primaria es motivo de reflexión e investigación en el campo de la educación matemática (Zapata 2020, Vergel, 2018, Castro, 2011, Molina, 2006) donde se ha intentado develar la importancia de su inclusión en el currículo y posterior impacto en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, convirtiéndose en un foco de interés y fuente de inspiración para realizar estudios que han demostrado, cómo estudiantes de básica primaria pueden desarrollar pensamiento algebraico temprano y cómo los maestros pueden transformar sus prácticas educativas desde el conocimiento profesional y así lograr promover el pensamiento algebraico en sus estudiantes desde los grados iniciales (Zapata, 2020, Vergel, 2016, Radford, 2010b, Kaput, 1998).

Así entonces, considerar el pensamiento algebraico temprano como parte del currículo, en la educación básica primaria (Kaput, 2000, Molina, 2009, Castro, 2011) y lograr su promoción implica pensar en el maestro como base fundamental para este propósito, en tanto, es a partir de las concepciones que lo constituyen, enseñante del pensamiento matemático y generador de ambientes de aprendizaje para los estudiantes, como pueden movilizarse actitudes de relación y acercamiento a la iniciación del trabajo algebraico (Agudelo, 2005) el cual puede ser promovido en sus estudiantes a partir tanto de la reflexión sobre la propia práctica como la manera cómo el maestro conciba el desarrollo del

pensamiento algebraico. Es así como el presente estudio, realizado con maestras de educación básica primaria, pertenecientes al modelo educativo flexible de escuela nueva, en el contexto rural se realizó con el objetivo de analizar cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

En este sentido, la investigación está estructurada en cinco capítulos. El primer capítulo expone los antecedentes del problema de investigación, así como el planteamiento del problema, a partir de una justificación teórica, práctica y metodológica, donde a través de la revisión de la literatura a nivel internacional y nacional, así como desde la práctica y la experiencia vivida como maestra investigadora, se suscita la pregunta de investigación ¿cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano? Así, entonces, para dar respuesta a esta pregunta de investigación, se dilucidó un horizonte teórico que comprende el segundo capítulo, el cual se enmarca en los posicionamientos teóricos de Radford (2010) para entender las pensamiento algebraico temprano, sus elementos característicos y los medios semióticos que posibilitan su desarrollo, así mismo, se sustenta en los planteamientos sobre las concepciones del maestro para la iniciación del trabajo algebraico Agudelo (2005) y la formación del maestro a partir de Ponte (2006, 2008).

En esta línea, el tercer capítulo configura el diseño metodológico, como un camino teórico y práctico que se establece para desarrollar la investigación cualitativa, sustentada

en los planteamientos de Denzin y Lincoln (1994), bajo el diseño fenomenológico de Hernández, Fernández y Baptista (2014), como una posibilidad de indagar sobre situaciones naturales y experiencias de los participantes, frente al fenómeno de estudio: el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Lo anterior permitió explorar e interpretar las experiencias a la luz del método fenomenológico hermenéutico, enmarcado en cuatro fases para el desarrollo de la investigación y el alcance de los resultados, a través de la aplicación de instrumentos como grupos de enfoque con preguntas tipo entrevista, tareas de formación y mural de situaciones. Posteriormente en el cuarto capítulo, se genera el reconocimiento de unidades de análisis y categorías emergentes, enfocados en las voces e interacción de las maestras participantes de la investigación, suscitadas en la reflexión, el compartir y la objetivación de medios semióticos como escenarios que permitieron realizar un análisis y una narrativa a la luz del horizonte teórico, la pregunta y el objetivo de investigación, intentando develar cómo el maestro moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Finalmente, esta narrativa se refleja en el capítulo cinco, en el cual se proponen algunas consideraciones finales, en torno a los resultados encontrados al responder a la pregunta y objetivo de investigación, y en este se resalta cómo a través de la movilización de concepciones en el maestro, cuando se enfrenta a tareas que propenden por desarrollar formas de pensamiento algebraico temprano, a través de la objetivación de medios semióticos, el maestro se hace consciente de sus concepciones, las moviliza y las propone como parte de su práctica pedagógica, para promover la iniciación de un trabajo

enmarcado en el pensamiento algebraico temprano en los primeros grados de escolaridad.

Así mismo, se exponen algunas líneas de investigación que podrían considerarse en próximos estudios sobre el pensamiento algebraico temprano y se presentan las dificultades y oportunidades suscitadas del trabajo de investigación.

1. Planteamiento del problema

Este capítulo aborda los antecedentes del problema de investigación, presentando una revisión de la literatura tanto a nivel internacional como nacional sobre el surgimiento y las concepciones de lo que es el álgebra temprana, su relación con la aritmética y el pensamiento algebraico temprano; además, el modelo de escuela nueva y la estrategia del microcentro rural como espacio de formación e investigación. Así mismo, se presenta una justificación teórica, metodológica y práctica que desde la literatura y la experiencia en la práctica pedagógica pretenden mostrar la pertinencia de movilizar las concepciones de los maestros para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, finalizando con la delimitación de la pregunta de investigación y el objetivo general.

1.1. Antecedentes.

La integración del álgebra en el currículo de la educación básica primaria ha suscitado en el campo de la educación matemática internacional diferentes investigaciones (Cai y Knuth, 2011; Carraher, Schliemann y Brizuela 2001, 2007; Becker y Rivera 2006a, 2006b; Moss y Beatty, 2006; Rivera, 2006; Warren 2006; Blanton y Kaput, 2005; Freiman y Lee, 2004; Dougherty 2003; Ainley, 2001; Arzarello y Robutti, 2001; Kaput, 1998, 2000,

Molina, 2009) que promueven la importancia de realizar un trabajo algebraico desde los primeros grados de escolaridad; entre ellas, surge la propuesta curricular conocida con el nombre de Early-Algebra (álgebra temprana), como posibilidad de observar, reflexionar y proponer líneas de investigación para introducir modos de pensamiento algebraico desde los grados iniciales (Kaput, 1998).

Cabe mencionar que en el presente estudio el álgebra temprana fue un referente teórico, bajo el cual se reconoce un amplio número de investigaciones que la han tomado como objeto de investigación; sin embargo, para el caso específico del presente trabajo, se asume la línea del pensamiento algebraico temprano como horizonte que delimita el amplio número de acepciones que puede tener el álgebra temprana.

En este sentido, la propuesta de Early-Algebra se ha convertido en un escenario posible de discusión sobre la importancia de trabajar el pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad, encontrando actividades de enseñanza que posibiliten su desarrollo; esta propuesta se ha originado por concepciones donde se ha planteado que “los niños necesitan de un periodo prolongado de tiempo para desarrollar los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica, así como significados nuevos o más amplios para los símbolos presentes en la aritmética y el álgebra escolar” (Molina, 2006, p. 138). Se puede apreciar que, estas concepciones avalan la posibilidad de desarrollar

pensamiento algebraico temprano, aun cuando se piense que es elevado o difícil de comprender para la edad de los estudiantes jóvenes.

Así entonces, dentro de esta investigación se plantea la posibilidad de reflexionar sobre el currículo de la educación básica primaria, en la visión de los contenidos que deben enseñarse y las prácticas de enseñanza para desarrollar el pensamiento algebraico temprano, en tanto, “una exposición temprana al álgebra, elimina el elemento curricular más pernicioso de las matemáticas de la escuela de hoy, cursos de álgebra de secundaria tardíos, repentinos, aislados y superficiales” (Kaput, 1998, p. 24); lo anterior, puede significar un reto para el maestro pero también una posibilidad de pasar de las listas de contenidos fragmentados a una integralidad formativa que potencie el desarrollo de pensamientos en el saber matemático y le permita al estudiante adquirir aprendizajes en y para la vida.

En este escenario, la forma como el maestro concibe el pensamiento algebraico y su apertura al desarrollo del mismo, influye de manera crucial en el aprendizaje de los estudiantes, en tanto, es desde la planeación del aula donde se piensan y construyen las actividades que conllevan al estudiante a inferir, reflexionar y proponer estados de pensamiento para la consecución de un aprendizaje; en este sentido, podría pensarse que “las dificultades de los alumnos con el álgebra pueden ser debidas al tipo de enseñanza recibida” (Molina, 2006, p. 139) y que la manera de enseñanza de un maestro puede facilitar o complejizar las maneras de pensar algebraicamente.

De esta manera, se observa como la indagación sobre la promoción del pensamiento algebraico temprano, se convierte en tema de interés para la comunidad de investigación en educación matemática, como se puede apreciar en los Estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), que exponen la importancia de considerar el pensamiento algebraico desde los primeros grados, en tanto, su trabajo articulado posibilitaría un mejor desarrollo en los grados de básica secundaria y media; el acercamiento e interacción con actividades algebraicas por parte de los estudiantes jóvenes, propiciadas por sus maestros podrían ser de gran ayuda, si se quiere hacer un proceso continuo y de aprendizajes significativos en el campo del álgebra. En este contexto, si lo que se desea es introducir el álgebra escolar en la escuela primaria, se hace necesario pensar en estrategias de formación para los docentes que imparten su enseñanza (Castro, 2011), como posibilidad de encontrar sus concepciones, analizarlas y desarrollar tareas que propicien su movilización.

Así mismo, pensar en abordar con los maestros el desarrollo del pensamiento algebraico, incluirlo en el currículo y ponerlo en práctica desde la actividad de enseñanza es un ejercicio donde se requiere disponibilidad, motivación, actitud de formación y la posibilidad de asumir el cambio; sin embargo, según Agudelo (2000) los “trabajos con profesores de matemáticas en Colombia han mostrado que muchos de ellos no están interesados en cambiar sus esquemas de enseñanza del álgebra escolar, esto es, de las

matemáticas escolares” (p. 2), es por ello que, indagar sobre cuáles son sus concepciones para el inicio del trabajo algebraico escolar, presentar tareas donde ellos mismos puedan movilizar sus concepciones, proponer actividades algebraicas para implementar en clase, son algunos de los factores que podrían aportar a un desarrollo oportuno del pensamiento algebraico temprano desde los primeros grados de escolaridad.

Es decir, que es posible pensar en ideas de pensamiento algebraico dentro de la aritmética, sin pensar que es lo mismo referirse a ambas, o que el pensamiento algebraico solo se refiere a letras, denotadas quizá por las tradiciones curriculares, como elementos complejos en el tratamiento del pensamiento algebraico y por ende en los procesos de enseñanza y de aprendizaje para la comprensión de los estudiantes en la educación básica primaria; al respecto, Radford (2012) señala como a través de la historia se ha podido dilucidar el papel que juega el uso de las letras en el pensamiento algebraico y como se pueden hallar otras formas posibles de pensar algebraicamente:

el simbolismo algebraico alfanumérico que conocemos hoy en día es de hecho una invención reciente, por lo que podemos afirmar que el nacimiento del álgebra no es el nacimiento de su simbolismo moderno, argumenta que los matemáticos chinos antiguos movilizaron ideas algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones sin utilizar notaciones y relata que escribas babilonios utilizaron diagramas geométricos para pensar algebraicamente. Es decir, no es ni necesaria ni una condición suficiente el uso de letras en el álgebra para pensar algebraicamente. (p. 677).

Partir de estas concepciones, conlleva a darle una visión al pensamiento algebraico temprano desde el currículo, en los planes de estudio, las mallas curriculares, los planes de área y específicamente las planeaciones de matemáticas de los maestros, mediante estrategias y actividades que le permitan al estudiante desarrollar un pensamiento algebraico temprano, sin temor a las letras, a los simbolismos y a la cultura tradicional que de generación en generación ha manifestado que el álgebra es un proceso complejo para trabajar con los estudiantes. En esta línea, investigadores señalan posibilidades de pensar algebraicamente, exaltando como “nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo” (Radford, 2012a, p. 677).

Es fundamental el papel del maestro que enseña matemáticas desde una concepción del álgebra escolar mucho más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales, como lo afirma Radford (2003) al plantear que “los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual” (p. 65), en este sentido, se pueden apreciar diversas posibilidades para generar, motivar y observar el desarrollo del pensamiento algebraico, partiendo de estrategias que involucren acciones y medios para trabajar con elementos diferentes a los sistemas alfanuméricos.

En este contexto, investigaciones de doctorado a nivel nacional han evidenciado la necesidad de promover pensamiento algebraico en la educación básica primaria (Vergel, 2016) indagando sobre las formas de emergencia del pensamiento algebraico, donde hay símbolos alfanuméricos, pero también en la actividad semiótica que se propone para generarlo, para que el estudiante tome conciencia y dé sentido a lo que se hace y se observa, específicamente en tareas de generalización.

En la línea de la idea anteriormente expuesta, Zapata (2020) indaga sobre la transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano, evidenciando en sus resultados la importancia del papel del maestro en la posibilidad de promover pensamiento algebraico desde los primeros grados de enseñanza, especialmente en lo que tiene que ver con su conocimiento profesional, el cual puede transformarse cuando toma conciencia de las tareas que puede desarrollar en el aula, además, cuando reconoce la necesidad de promover el pensamiento algebraico de sus estudiantes, reflexiona y actúa en consecuencia. Este proceso de transformación está inmerso en una configuración de interacciones consigo mismo, con el conocimiento, el currículo, los estudiantes y la práctica, componentes que, a su vez, reflejaron cambios en las concepciones de los maestros acerca de la necesidad y posibilidad de enseñar conceptos de carácter algebraico en la educación básica primaria.

Así entonces, se hace pertinente dar una mirada amplia sobre la formación del maestro, sus concepciones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico y cómo estas influyen en la enseñanza promovida en los primeros grados de escolaridad, pues si queremos que se suscité en el aprendizaje de los niños el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, el profesor debe ser el principal agente del cambio, desde las concepciones hasta el conocimiento, pues como lo afirma Radford (2011) el pensamiento algebraico no es necesariamente algo natural, o que aparece y se desarrolla una vez que los estudiantes hayan madurado su pensamiento matemático.

1.1.2. Escuela Nueva, referentes de calidad y referentes de actualización curricular en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

La escuela se convierte en escenario donde se hace posible el proceso de enseñanza y de aprendizaje para entretelar saberes, experiencias, modos de ser, de pensar y de actuar en la construcción de ideales, formas de vida y formación del ser humano, no solo del estudiante sino del maestro. Es por ello, que cada contexto tiene una particularidad para su enseñanza y aprendizaje según las necesidades, intereses, geografía y condiciones en que se desenvuelve. Es así, como en el caso de Colombia, hace aproximadamente 35 años se ha pensado para las zonas rurales el modelo educativo flexible de Escuela Nueva, considerando que estas zonas cuentan con una población pequeña de estudiantes, alejados de instituciones donde se ofrece la escuela graduada o con difícil acceso, pero con el

derecho a educarse, demostrar sus potencialidades, habilidades y destrezas para la vida, aprender, formarse y cumplir sus sueños.

El modelo educativo flexible de escuela nueva se orienta bajo la estrategia multigrado, donde un solo docente o dos atienden todos los grados desde preescolar a quinto, la enseñanza esta mediada por cartillas de aprendizaje diseñadas a través de unidades, guías de trabajo, actividades básicas, actividades de práctica, actividades de aplicación y un trabajo con la familia, que posibilita al maestro, por lo menos dentro de las once áreas que orienta para todos los grados y de manera simultánea, un apoyo para el trabajo con los estudiantes; el anterior es el caso particular de las maestras que participaron de esta investigación y las cuales desarrollan un proceso de adaptación curricular para generar procesos didácticos, dinámicos y de atención a los ritmos y niveles de aprendizaje de sus estudiantes.

En el contexto descrito en el párrafo anterior, los maestros desarrollan adaptaciones curriculares y cualifican sus prácticas de enseñanza participando en procesos de capacitación y conformando comunidades académicas a través de la estrategia Microcentro Rural, la cual a nivel institucional posibilita el compartir de experiencias y conocimientos entre pares académicos, ya que los maestros nombrados para escuela nueva son licenciados en diferentes áreas y esto antes de ser un obstáculo lo convierten en posibilidad de mejora a

partir de la interacción, el compartir, reflexionar y construir con el otro que tiene un saber y mirada sobre el conocimiento.

Así entonces, este modelo flexible pensado en el estudiante, el contexto y la comunidad donde interactúa cada día, pretende ser pertinente, dar cobertura a toda la población de la vereda y ofrecer una educación flexible acorde a los ritmos y necesidades, sin que ello implique dejar a un lado la calidad en lo que se enseña y se aprende. Es por ello, que en espacios de reflexión con los maestros sobre lo que se enseña a los estudiantes en los primeros grados de escolaridad, específicamente desde el área de matemáticas, se dilucida en el maestro la respuesta por un currículo que debe impartirse en la enseñanza a los estudiantes, articulado a las políticas educativa nacionales y que permite de alguna manera acortar la brecha entre lo urbano y lo rural.

En este sentido, con el objetivo de indagar sobre las concepciones de los maestros para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, encontramos que los maestros refieren la existencia de un alto predominio en sus clases del pensamiento numérico, en algunos momentos el geométrico porque son las bases en el desarrollo del saber matemático para el estudiante, esta concepción, implica hacer un rastreo por los referentes de calidad (lineamientos y estándares) y referentes de actualización curricular (derechos básicos de aprendizaje (DBA) mallas y matrices de referencia, mallas de aprendizaje), para analizar la

inclusión del pensamiento algebraico e indagar sobre la posibilidad de promoverlo en los primeros grados de escolaridad.

En este rastreo de referentes nacionales se evidencia desde los lineamientos curriculares (1998) y los estándares básicos de competencias en matemáticas (2006) la promoción del álgebra como parte del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Al respecto, los lineamientos consideran en un primer momento que “el álgebra generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio” (Lineamientos curriculares, 1998, p. 17)

Por su parte, referentes de actualización curricular como los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2016) manifiestan a partir de las evidencias, ejemplos y aprendizajes, propuestos para el trabajo con los estudiantes de básica primaria, intentos por desarrollar el pensamiento algebraico temprano, en tanto, desde el grado primero y de manera paulatina en los siguientes grados, se encuentran actividades con incógnitas, situaciones de variación y cambio, secuencias numéricas, cálculo y estimación, identificación de patrones para establecer generalizaciones aritméticas o algebraicas, elementos que le permitirían al maestro promover el pensamiento algebraico en los primeros grados, a través de su proceso de enseñanza.

Estos y otros referentes de actualización curricular como las matrices de referencia (2016) y las mallas de aprendizaje (2017) intentan, a partir del pensamiento variacional, acercarse a las posibilidades de promover el desarrollo de pensamiento algebraico temprano en los primeros grados de escolaridad; así, estos elementos, como documentos que orientan el currículo de la institución y la planeación del maestro para su enseñanza, pueden propiciar procesos consientes y reflexivos, entendida la reflexión en esta investigación como lo plantea Radford (2006), “un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta y la modifica según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios” (p. 108). Los anteriores escenarios son propositivos para el maestro de escuela nueva, quien, mediante estrategias, instrumentos concretos y diferentes actividades promueve el aprendizaje activo, participativo y colaborativo de sus estudiantes de primaria desde la concientización de su propio pensamiento.

1.1.3. Microcentros rurales

Los Microcentros rurales enmarcan una estrategia de comunidad académica, (Colbert, 1999) conformada con el fin de aportar a los procesos educativos con calidad y pertinencia dentro de las instituciones educativas, para ello se hace pertinente la reflexión sobre la

práctica educativa del maestro y los procesos de aprendizaje que con ella suscita a los estudiantes o viceversa, pues estos le permiten generar y repensar estrategias de aula que pueden ser acordes a sus contextos, necesidades e intereses de la educación rural.

En un espacio de formación, intercambio de experiencias y saberes, los maestros, a través de sus acciones, pretenden garantizar contenidos curriculares acordes a las políticas educativas nacionales, pero contextualizadas a las realidades que se vivencian desde el modelo educativo flexible de escuela nueva, las condiciones sociales, geográficas y económicas para proveer un proceso de enseñanza y de aprendizaje oportuno y pertinente, para ello se entretajan estrategias que posibiliten la formación, la cualificación de saberes, mejorar ambientes de aprendizaje, gestión de aula, gestión para la investigación, reflexión y construcción de propuestas colectivas, entorno a las dinámicas que implican los modelos educativos flexibles, para nuestro caso la escuela nueva, donde se pretende generar procesos movilizadores de concepciones en los maestros, para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, a partir de los primeros grados de escolaridad.

Se generan procesos exitosos y diversos en el aula cuando el maestro ve y reconoce su saber, pero también la posibilidad de construir y aprender en la voz del otro, cuando reflexiona y critica de manera propositiva y con autoformación su propia práctica, generando con ello articulación de pensamientos, movilización de concepciones frente a lo que culturalmente se ha pensado que debe enseñarse y como debe hacerse (Agudelo, 2005).

Al contrario, si como maestro no se reconocen los aspectos a mejorar no se piensa y reflexiona sobre la práctica entonces posiblemente los currículos seguirán estando estáticos porque así subyacen las concepciones de los maestros, sin posibilidad a otros desarrollos y espacios de experimentación hacia el aprendizaje.

Esta reflexión suscitó, para esta investigación, escenarios de diálogo y acción en los microcentros rurales y en el grupo de investigación para la construcción social del conocimiento, en la importancia de articular lo que hacemos a lo que el estudiante tiene y necesita para sus niveles y posteriores aprendizajes, en este caso particular, el desarrollo del pensamiento algebraico temprano para un mejor aprendizaje del saber matemático, como lo plantea Vergel (2016b) “el aprendizaje temprano del álgebra desarrolla no sólo nuevas herramientas para entender relaciones matemáticas, sino también nuevos hábitos mentales, nuevas formas de pensar matemáticamente” (p. 17).

1.2. Planteamiento del problema de investigación

En la educación del contexto rural, donde el maestro multigrado es quien se encarga de los cinco grados que corresponden al ciclo de educación básica primaria y al nivel de preescolar, con estudiantes en diferentes situaciones de aprendizaje, contextos familiares y sociales, se requiere pensar en la escuela como un escenario propicio de educación integral,

en el cual, necesariamente, el maestro reflexione sobre su práctica pedagógica, currículo, didáctica, saber, ambientes educativos, metodologías y demás aspectos que en ella le permiten educar en y para el contexto. Según Moretti (2007) “El profesor se constituye profesor al objetivar su necesidad de enseñar y por lo tanto de organizar la enseñanza para favorecer con la praxis pedagógica, la transformación de la realidad escolar” (p. 213).

Para este propósito se piensa, desde las Instituciones Educativas, abordar las comunidades académicas, como escenarios que entretengan el compartir, diálogo y reflexión sobre el devenir del maestro en su práctica pedagógica; en la particularidad de esta investigación asumimos la estrategia microcentro rural (Colbert, 1999), como espacio en el que se promueve la formación de maestros, se posibilita el compartir y la socialización de experiencias pedagógicas significativas, buscando soluciones a las dificultades que se presentan en el aula, a la vez que propende por el mejoramiento continuo de la calidad educativa.

El microcentro rural se ha convertido para la I.E.R Zoila Duque Baena de la vereda Chagualal, Municipio de Abejorral, desde hace cuatro años, en un espacio de formación continuo y de reflexión sobre experiencias que se suscitan en el día a día de la práctica pedagógica del maestro, además, ha sido pertinente por los resultados obtenidos en el aprendizaje de los estudiantes, y por los retos que ofrecen a los maestros frente a lo que no se logra alcanzar en la formación del estudiante; de este modo, este espacio propende por

la reflexión mediada por el deseo de aprender, formarse, transformar sus convicciones, creencias y práctica de aula a través de la movilización de sus pensamientos, conocimientos y hacer educativo.

Así entonces, desde el microcentros rural, constituido por 24 maestros rurales, formados en diferentes áreas específicas y con atención a los modelos de escuela nueva, posprimaria y escuela graduada, los maestros son convocados por el rector y la docente investigadora quien coordina la estrategia pedagógica, con el fin de propiciar reflexiones sobre la práctica en el contexto de la educación matemática, conversatorios y espacios de discusión sobre el currículo y los pensamientos matemáticos que en él emergen, como posible espacio de consolidación para una propuesta de unificación de criterios en la enseñanza que se imparte en las diferentes sedes educativas que hacen parte de la institución; estos encuentros permiten dilucidar las concepciones sobre lo que se enseña en la básica primaria, encontrando como un factor relevante el predominio del pensamiento numérico sobre otros que poco, o por lo menos no de manera consciente, emerge en el aula como lo es el pensamiento algebraico temprano.

El pensamiento numérico, prima en las en las concepciones de los maestros de primaria (Zapata, 2020; Vergel, 2015), como parte fundamental e introductoria del currículo (mallas curriculares, planes de área, planeaciones de los maestros, entre otros) como la base principal donde el estudiante aprende lo que debe saber al finalizar su primaria y

enfrentarse a la secundaria, por ello, probablemente otros pensamientos propuestos por los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias en matemáticas como el espacial, el métrico, aleatorio, variacional y sistemas algebraicos ocupan un espacio secundario.

Algunas razones que enmarcan estas prácticas se asocian posiblemente a las concepciones que tienen los maestros acerca de la importancia del pensamiento numérico en la básica primaria (Agudelo, 2007) así como a motivos enmarcados en la durabilidad de los periodos académicos, el cual, mediado por diferentes actividades extracurriculares se hace corto y obstaculiza el poder ampliar la enseñanza hacia pensamientos como el espacial, que se trata con alguna frecuencia, en comparación con las reducidas ocasiones en que se incorpora el pensamiento variacional o sistemas algebraicos a la enseñanza de las matemáticas; como resultado de lo anterior, una mirada sobre el álgebra, desde los primeros grados de escolaridad, no se tiene en cuenta en el currículo y en la actividad de enseñanza como necesidad e interés de aprendizaje y con ello, según los maestros de matemáticas de la básica secundaria de la institución, se hacen más evidentes las dificultades de los estudiantes en la posterior formación de este nivel.

Así entonces, este campo de la investigación puede convertirse en un escenario para la discusión, el análisis y la puesta en común en las actividades con los profesores del microcentro rural, quienes al movilizar sus concepciones sobre el álgebra pueden conocer

otras maneras de enseñarla en la escuela, más allá de letras complejas, a través de la emergencia de pensamiento algebraico desde la mirada de otros mundos posibles alrededor de las matemáticas; investigaciones como las de Wagner (1989), Kieran, (1989), Bednarz, Kieran, Lee (1996), Kieran (2007), Filloy, Rojano, Puig (2008), evidencian la existencia de múltiples dificultades presentadas en los estudiantes de básica primaria al pasar de un pensamiento netamente aritmético al pensamiento algebraico en la escuela secundaria.

Las reflexiones en el grupo de maestros del microcentro rural sobre sus concepciones para la inclusión del pensamiento algebraico en el currículo de la básica primaria, abren una posibilidad para indagarnos sobre la manera como se está concibiendo el álgebra en los primeros grados y la necesidad latente de fortalecer el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos, manifiesta en las conversaciones de los maestros, y refrendado con lo que reporta el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2000) donde se sugiere vincular el álgebra a partir de los primeros niveles de escolaridad:

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se propone el Álgebra como uno de los cinco bloques de contenido junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de Datos y Probabilidad, con la particularidad de que el bloque de álgebra se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde los primeros años de escolarización (p. 4).

A la luz de la realidad de las prácticas rurales, encontramos que este es un campo pedagógico, que probablemente no ha recibido atención desde la organización de la enseñanza del maestro y que paulatinamente tendría que revisarse su inclusión en el currículo (Zapata, 2020). Lo anterior, quizá por la manera como el maestro concibe el álgebra en una perspectiva asociada con letras y expresiones confusas; investigaciones como las de Agudelo (2005) evidencian que “los maestros conciben el álgebra como un bloque de matemáticas que empieza a enseñarse en octavo y que por lo tanto el pensamiento algebraico no puede empezarse a promover hasta que se haya cubierto totalmente el programa de aritmética” (p.13).

En otros escenarios, una posible causa radica en la formación disciplinar del maestro licenciado en otras áreas específicas como, ciencias naturales, lenguaje, educación física, ciencias sociales, entre otras, quien debe atender a la enseñanza de las matemáticas pero que no posee el saber disciplinar para llevarlo al acto de enseñanza, Guacaneme et al. (2013) es así como, los maestros en las reflexiones generadas en el microcentro rural manifestaron la necesidad de tener un conocimiento disciplinar sobre el álgebra y la manera como enseñarla de forma armónica con el pensamiento aritmético en el aula, considerando que este ha sido la base fundante de lo que los estudiantes aprenden en matemáticas en los niveles de la educación básica primaria.

En este panorama de relación entre la aritmética y el álgebra, diversas investigaciones sobre el álgebra temprana han centrado su mirada en la aritmética como acceso clave al álgebra (Warren, 2003), como consecuencia de la destacada presencia de la primera en el currículo de matemáticas de educación primaria y de la intensa relación existente entre ambas; para el caso particular de las clases de matemáticas que imparten los maestros de la I.E.R Zoila Duque Baena, esta reflexión puede permitir la incursión al pensamiento algebraico temprano, como un proceso que antes de ser equidistante es continuo y puede trabajarse en conjunto, de modo que se propicie una enseñanza del álgebra en la educación básica primaria, que se vislumbre como un proceso y no como una asignatura más. En ese sentido, Godino y Font (2003) afirman que “ciertamente no se trata de impartir un curso de álgebra a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato” (p. 4).

En este sentido, la incorporación del pensamiento algebraico al aula requiere de una nueva visión del maestro como agente de cambio e impulsor de modificaciones curriculares, como lo afirma Radford (2000) “necesitamos profundizar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización” (p. 38), para brindar al estudiante las posibilidades de educación que le serán posiblemente pertinentes en su proceso formativo y que al maestro le permitan ampliar su conocimiento y concepción sobre el pensamiento algébrico, en tanto “la forma de saber de un profesor lleva consigo unas actitudes hacia la iniciación del trabajo

algebraico, hacia sus estudiantes y hacia la introducción del cambio en su enseñanza, y una percepción específica de su eficacia personal” (Agudelo, 2005, p. 402).

En coherencia con estos planteamientos, iniciar un proceso de desarrollo del pensamiento algebraico temprano debería implicar pensar en estrategias de aula que le permitan al estudiante involucrarse en procesos matemáticos donde el pensamiento algebraico pueda surgir y ser comprendido; indiscutiblemente es aquí, donde el maestro, a partir de la movilización de sus propias concepciones, puede permear posibles transformaciones en su manera de ver, planear y suscitar estrategias para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Zapata, 2020). Al respecto, Radford (2003) propone en sus investigaciones que los estudiantes de primaria pueden desarrollar pensamiento algebraico utilizando o comprendiendo no solo los símbolos sino haciendo uso y articulando otros medios de expresión como el lenguaje, pero para que esto suceda es necesario que el maestro “provea formas apropiadas de apoyo profesional que le permita producir cambios en las prácticas curriculares” (Blanton y Kaput, 2005).

Es pertinente entonces, comprender cómo el maestro puede llevar el álgebra a la práctica de la básica primaria desde su conocimiento matemático y la movilización de sus concepciones, para ello se debe dar una mirada amplia sobre su formación, la manera cómo concibe el pensamiento algebraico temprano y sus formas de llevarlo al aula, en tanto, “los

profesores no ven sus concepciones de las matemáticas escolares como el factor determinante crucial de su práctica de enseñanza” (Agudelo, 2005, p. 403).

Así, desde la formación continuada a los maestros, se enruta un nuevo horizonte para desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles, pues si queremos desarrollarlo en las aulas de primaria y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, el profesor debe ser el principal agente del cambio. En este sentido, Radford (2011) afirma que “el pensamiento algebraico es de ninguna manera natural” algo que aparecerá y se desarrollará una vez que los estudiantes y maestros hayan madurado su pensamiento matemático (Citado por Godino et al. 2014, p. 18).

Con el panorama de ideas expuesto, en el cual se consideran las reflexiones que se suscitan en la práctica de los maestros de la I.E.R Zoila Duque Baena y las distintas investigaciones que vislumbran en la incursión del pensamiento algebraico temprano una necesidad manifiesta para el campo de la educación matemática, se proponen la pregunta y objetivo de investigación presentados a continuación.

1.3. Pregunta de investigación

¿Cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano?

1.4. Objetivo

1.4.1. Objetivo General

Analizar como el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

2. Horizonte Teórico

Indagar sobre los principales elementos teóricos que sustentaron la investigación implicó rastrear teorías que permitieran un acercamiento a las concepciones de los maestros sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano y cómo la participación en diferentes espacios de formación, reflexión y compartir de concepciones le permitirían movilizarlas, para encontrar medios posibles de promoción de este pensamiento en el aula, a través de medios de expresión que permitan al estudiante entender y aprender conceptos de carácter algebraico para iniciar un proceso necesario hacia la básica secundaria.

2.1 Concepciones de los maestros en su práctica pedagógica para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Cada maestro en su proceso de formación y práctica pedagógica lleva consigo unas concepciones sobre la manera como enseña y desarrolla procesos en el aula o fuera de ella con los estudiantes para su aprendizaje; estas concepciones dotan de sentido su ser y hacer como maestro, se convierten en la dirección para sus planeaciones y la organización de las actividades propuestas. Por lo anterior, podría pensarse que “debido a sus concepciones, es decir, a la historia personal de cada profesor, su experiencia, su forma de pensar, su posición frente a su práctica docente, se posibilita o dificulta el acceso al conocimiento”

(Ponte, 1994, p. 195), ello implicaría pensar en que las concepciones requieren ser reconocidas por cada maestro, analizadas y reflexionadas para el ejercicio de su práctica, en tanto estas entran a formar o moldear las de sus estudiantes y la manera como ellos aprenden.

Así entonces, se dilucidan las concepciones como un escenario importante en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, y enmarcan dentro de esta investigación un papel fundamental en cada maestro, en tanto, se encuentran arraigadas de manera significativa a su hacer, a su formación y a las condiciones de los modelos educativos flexibles en los que desarrolla su práctica pedagógica; en este contexto, las concepciones son difíciles de cambiar porque ya hacen parte de su experiencia y de lo que los constituye como maestros. Si bien, se siguen unos referentes de calidad nacional e institucional para la planeación de las clases, las concepciones individuales y sociales sobre lo que debe saber un estudiante en la básica primaria, dan la pauta sobre el qué, cómo y en qué niveles enseñar los contenidos matemáticos.

Para el interés de esta investigación, se indagó sobre las concepciones de tres maestros de básica primaria, sobre el pensamiento algebraico temprano, como posibilidad de encuentro, análisis y reflexión en sus particularidades y, como proceso que al permitir el paso de las concepciones de un estado a otro posibilitará que estas se movilizarán y se constituyeran en fuente de desarrollo para el pensamiento algebraico en la básica primaria.

Las concepciones se convierten en aspecto relevante dentro de este campo de la investigación en tanto, “los maestros no ven sus concepciones como el factor determinante de su práctica de enseñanza, los factores que ven como cruciales en la determinación de lo que sucede en sus aulas de clase pertenecen al contexto social e institucional”(Agudelo, 2005, p.22) por lo tanto, la interacción con el par académico y el desarrollo de tareas propuestas puede suscitarle una auto reflexión para una movilización de las concepciones que subyacen en y para su proceso de enseñanza.

Las concepciones son tomadas en esta investigación como un factor determinante para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, en tanto “las actitudes, como componentes de la dimensión afectiva de las concepciones de los profesores, necesitan ser reconocidas y entendidas para poder ganar una mejor comprensión del fenómeno de su resistencia al cambio” (Agudelo, 2005, p.7) determinando sus posibilidades de enseñanza y creando escenarios posibles para que el conocimiento se introduzca en el aula, se aprenda y se transforme en un saber significativo para el estudiante, y por supuesto como base para adquirir otros aprendizajes que se suscitarán en posteriores niveles de formación. Referirnos en este contexto al pensamiento algebraico temprano implica pensar, que probablemente, la forma en como el maestro adopte sus concepciones frente a lo que significa introducirlo en el aula desde la básica primaria permite que los estudiantes lo aprendan y se convierta en un saber práctico en su hacer escolar.

Las concepciones de los maestros de básica primaria, sobre la educación matemática, permiten considerar que más allá de los currículos diseñados por un sistema educativo nacional y planteados en las Instituciones Educativas, como guía y fundamento para orientar lo que se debe trabajar en el aula y alcanzar referentes de calidad, estipulados en pruebas e impactos medibles de conocimiento; existe un sujeto, un maestro impregnado por una formación profesional, por conocimientos y experiencias de aula que le han constituido unas concepciones frente a lo que dilucida las bases del saber matemático. Es así, como fue preciso indagar sobre cómo estas concepciones se consideran o no parte fundamental para el desarrollo de los diferentes pensamientos en la básica primaria, cómo inciden en los diferentes conocimientos objeto de reflexión en el aula, y cómo posibilitan o no que se rompan paradigmas sobre una lista de pensamientos que en muchas ocasiones y en orden jerárquico deberían ser enseñados en el aula.

Los maestros de básica primaria participantes en la investigación, tienen la concepción de que es necesario formar en el estudiante bases sólidas en la aritmética, para que, desde la noción de número, conteo, operaciones básicas, resolución de problemas, el estudiante pueda pasar al conocimiento de otros pensamientos como el algebraico. En este panorama, Carraher, Schliemann y Brizuela (2000) refieren como la enseñanza del álgebra se ha retrasado por las concepciones erróneas sobre la naturaleza de la aritmética y la importancia de que exista una capacidad cognitiva de los estudiantes jóvenes para aprenderla; dejando entrever como de manera crucial se ha comprendido el pensamiento algebraico desde las letras confusas, las ecuaciones complejas, un proceso difícil para la edad y etapa de

conocimiento de los niños, por lo tanto debe ser tratado en niveles de formación superiores y cuando se halla adquirido una madurez cognitiva para su desarrollo.

Podría pensarse que detrás de cualquier modelo de enseñanza en la matemática y en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, hay una filosofía, unas concepciones que permiten concebir lo que se enseña, así como dar una visión en la manera que los maestros entienden y llevan a cabo su trabajo sobre el pensamiento algebraico, desde aspectos curriculares y en relación con otros, como sus actitudes, conocimientos, y práctica, elementos que determinan la inclusión del pensamiento algebraico temprano. Estos planteamientos refieren como “la forma de saber el álgebra escolar de un profesor representa la base de los propósitos pedagógicos que sustentan su práctica de enseñanza preferida” (Agudelo, 2005, p.22), para lo cual pensar en la formación del maestro es una posibilidad tangible del hacer, reconociendo que lo que se plantee y se trabaje en ella, es una pauta para que las concepciones se movilicen y lleguen a ser epicentro de un cambio curricular, de una puesta por desarrollar el pensamiento algebraico en la escuela primaria.

La influencia que tienen las concepciones en el actuar de los docentes permiten que estas sean tenidas en cuenta para analizar los procesos de enseñanza aprendizaje que se dan en el aula, la manera como pueden transformarse y potenciarse desde diferentes aspectos y miradas del conocimiento; comprendiendo así que los currículos pueden estar muy bien estructurados en su contenido y forma, pero sí el proceso de enseñanza y de aprendizaje no

evoluciona hacia las necesidades, hacia el contexto, si los docentes no reflexionan y movilizan sus concepciones sobre lo que saben, sobre lo que enseñan y promueven en la mente y el hacer de cada estudiante, es difícil que se desarrollen otro tipo de pensamientos a los que ya subyacen en su práctica pedagógica. Para Ponte (2006) iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años, exige una profundización de la comprensión del álgebra, de lo que esta envuelve y de donde está presente y, también, de sus relaciones con otros temas matemáticos, para fomentar el desarrollo y el establecimiento de conexiones del álgebra con toda la matemática, fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos.

2.2 Posturas sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano

En el marco de la educación matemática a partir de diferentes escenarios de investigación se ha abordado el álgebra escolar como centro de interés para el desarrollo de competencias, pensamiento y saber matemático en los estudiantes, partiendo de la concepción cultural de que para aprender el álgebra es importante tener bases en la aritmética, Vergel, (2016b) manifiesta como “una tradición curricular nos ha llevado a pensar que la enseñanza del álgebra es un asunto de la escuela secundaria. La idea detrás de esta tradición es que, para entender álgebra, es necesario tener una base aritmética relativamente sólida” (p.15) algunas reflexiones realizadas por maestros de básica primaria sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en sus currículos, permiten vislumbrar

como continua latente la concepción de que debe primar la aritmética en los grados iniciales de escolaridad, no obstante esta podría ser una de las razones por las cuales no se introduce de manera consciente el pensamiento algebraico en la escuela primaria y se espera que sea desarrollado en el ciclo de la educación básica secundaria.

En coherencia con la idea anteriormente expuesta, dentro de esta investigación se hizo pertinente hacer un rastreo sobre algunas posturas que se han gestado en el campo del desarrollo del pensamiento algebraico temprano, tratando así de vislumbrar una teoría que permitiese movilizar dichas concepciones hacia un proceso de enseñanza en el aula, desde la escuela primaria, donde es posible integrar al currículo el pensamiento algebraico (Zapata, 2020; Vergel, 2015, Radford, 2013). Uno de los referentes en este campo es la propuesta de cambio curricular denominada Early Álgebra (álgebra temprana), sugerida por Kaput (1998) y a través de la cual manifiesta la necesidad de vincular el álgebra en la educación primaria, condición que fortalecería el trabajo algebraico en grados superiores; en coherencia con lo anterior, para Wilhelmi (2017) “el paso de la aritmética al álgebra es complejo, entonces, de cara a diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje mejor adaptados a las restricciones en la instrucción y cognitivas, es preciso “adelantar” ciertos aspectos algebraicos en las etapas tempranas” (p.18) estos planteamientos suscitan la búsqueda de estrategias que permitan dar un espacio no solo a la aritmética sino también al desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad.

La propuesta del Early Álgebra a través de sus fundamentaciones teóricas y aportes de datos experimentales, (citada por Wilhelmi, 2017) ha sustentado “la importancia de superar la oposición aritmético-algebraico y la necesidad de estructurar el currículo como un continuo epistemológico, antes que un paso de una actividad meramente aritmética en Educación Primaria a otra donde el álgebra se presenta como un producto acabado en Educación Secundaria”(p.1) permitiendo así que estudiantes desde grados iniciales puedan tener formas posibles de conocer y entender el álgebra hasta llegar a niveles más avanzados. La reflexión y formación con maestros de básica primaria, a través de tareas, donde se pueda suscitar el desarrollo de pensamiento algebraico posibilitaría la consolidación de escenarios posibles para la promoción del pensamiento en la educación primaria.

En esta misma línea, diversas investigaciones (ver, por ejemplo, Ainley, 2001; Arzarello y Robutti, 2001; Cai y Knuth, 2011; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001; Dougherty, 2003; Moss y Beatty, 2006; Rivera, 2006; Becker y Rivera, 2006a, 2006b; Warren, 2006) han sido llevadas a cabo para tratar de mostrar que alumnos de escuela primaria pueden, efectivamente, empezar a ser expuestos a los primeros acercamientos del álgebra. Sin embargo, el cómo está preparado el maestro para enseñar el álgebra, cómo influye su proceso de formación, su experiencia de práctica pedagógica, sus concepciones frente al trabajo algebraico en la escuela primaria son temas que ameritan una discusión y reflexión en el campo de la investigación en educación matemática, en tanto son el epicentro de lo que subyace o no en el aula y para lo cual esta investigación ha tratado de tomar posición a

través de las concepciones que posee el maestro para el pensamiento algebraico temprano y como estas pueden ser movilizadas para su desarrollo en el aula.

Así entonces, la postura que asumiré en esta investigación se sustenta en la línea del pensamiento algebraico temprano, como acepción del álgebra temprana, a partir de Radford (2010a 2010b), en tanto, sus posicionamientos teóricos permiten dilucidar como a través de los contextos en que el maestro desarrolla su práctica pedagógica, subyacen unas concepciones que, transversalizadas por medios semióticos de objetivación, pueden ser movilizadas para desarrollar pensamiento algebraico.

Según algunas concepciones de los maestros de básica primaria, el desarrollo del pensamiento aritmético es necesario para que puedan generarse otros como el algebraico, incluso a partir de varias tareas aritméticas podríamos desarrollarlo y no ser conscientes de ello. No obstante, en la perspectiva de Radford (2011, p. 318), se pone de manifiesto que lo que distingue el pensamiento aritmético del algebraico es el hecho de que en este último se tratan cantidades indeterminadas de una manera analítica. En otras palabras, se consideran cantidades indeterminadas (e.g., incógnitas o variables) como si fueran conocidas y realizamos cálculos con ellas como lo hacemos con números conocidos.

La mayor parte de las planeaciones de área en la básica primaria, durante los grados iniciales, se sustentan en la enseñanza de la noción de número y conteo, operaciones básicas y resolución de problemas, que luego van avanzando en su complejidad a niveles estadísticos y geométricos porque el desarrollo de pensamiento algebraico, conformado por letras no se alcanza a tener en cuenta dentro del proceso de enseñanza y de aprendizaje. En este panorama, la formación y reflexión con maestros posibilita comprender cómo pueden plantearse tareas que conlleven al pensamiento algebraico sin encajarlo en una concepción de dificultad, es decir, sin que sea necesaria ni una condición suficiente el uso de letras en el álgebra para pensar algebraicamente. Como lo sostiene Radford (2012a, p. 677), “nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo”.

Cuando se proponen tareas de pensamiento algebraico en los maestros, se denota predominio del pensamiento aritmético en la solución, quizá porque esta ha sido la enseñanza que ha prevalecido en su formación; sin embargo, cuando se logra entretener la socialización de las tareas en comunidad académica, descubren como desarrollar procesos de pensamiento algebraico y que al pensar en su práctica pedagógica podrían consolidarse sin tener que recurrir a las letras, es decir, “los estudiantes pueden comenzar a pensar algebraicamente, aunque no recurran aún (o al menos no en gran medida) a signos alfanuméricos, esta zona, que podemos llamar la zona de emergencia del pensamiento algebraico, ha permanecido largamente ignorada, como resultado de nuestra obsesión con reconocer el álgebra solo en lo simbólico” (Radford, 2010, p. 3).

2.3 Tareas de formación en la movilización de las concepciones de los maestros para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Para el diseño de tareas que promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico se hizo necesario rastrear cuales son algunos de los elementos que lo caracterizan y como pueden a través de sus formas permearse por medios semióticos que confluyan en aprendizaje dentro del saber matemático. Así entonces, de acuerdo con Radford (2010b), el pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos (o vectores) estrechamente relacionados:

- El sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) aquello como opuesto a la determinancia numérica.
- La analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos.

Pensar en tareas de formación, concebidas por Ponte et al. (2009) como tareas de aprendizaje profesional para los maestros, implica propender por medios posibles para que las concepciones del maestro sobre el álgebra puedan darse en otros escenarios y a partir de otros medios para su enseñanza; al respecto, Radford (2010) reconoce tres formas de

pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos, lenguaje natural. Estas formas de pensamiento algebraico para Radford (2010a) son las siguientes:

Pensamiento algebraico Factual: los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números; por lo que podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice “aquí”, señala y dice “más 2”. (Vergel, 2016, p.74)

Pensamiento algebraico Contextual: los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación, tales como frases “clave”. En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” o “dos por la figura más uno”, o “# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total”. Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de

expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos. (Vergel, 2016, p.74)

Pensamiento algebraico Simbólico: las frases “clave” son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n - 1)$ o $2n - 1$. Según Radford (2010a), en este estrato de pensamiento “hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso” (p. 8), a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica. (Vergel, 2016, p.74)

Desde las anteriores consideraciones, se pretende que las tareas de formación desarrolladas con los maestros permitan exhibir el uso de medios semióticos de objetivación, en correspondencia directa con las formas de pensamiento algebraico propuestos por Radford (2010); así, se hace necesario tener en cuenta que una experiencia de formación al maestro proporciona el desarrollo del conocimiento matemático de los alumnos y su conocimiento didáctico (Ponte y Chapman,2008), por lo cual es importante permitir un escenario para movilizar sus concepciones, desde la reflexión de su ser y que hacer profesional, su práctica y la posibilidad de desarrollar el pensamiento algebraico temprano.

En estrecha relación con la caracterización realizada por Radford (2010) para el pensamiento algebraico temprano se proponen unos estratos de pensamiento. Radford (2010) sugiere la existencia de tres estratos, descritos a continuación:

Pensamiento algebraico factual. Cuya naturaleza es aparentemente concreta, y opera a nivel de un número particular. En este no se hace explícita la indeterminancia; se evidencia, por ejemplo, a través del trabajo sobre números, aquí los medios semióticos pueden ser percepción, gestos palabras.

Pensamiento algebraico contextual. Esta estratificación trasciende los casos particulares, hasta formas generales. Aquí la indeterminación se hace explícita y se convierte en objeto de discurso; los medios semióticos del pensamiento factual, son sustituidos aquí, por frases clave.

Pensamiento algebraico simbólico. En este estrato de pensamiento, los símbolos alfanuméricos cobran relevancia, y empiezan a sustituir las frases clave del estrato anterior.

Comprender y aceptar el pensamiento algebraico desde una perspectiva como la propuesta por Radford (2010) puede suscitar un cambio evolutivo en las concepciones de

los maestros; así, en este cambio pueden confluír tareas que evidencien la movilización de concepciones para la transformación de una práctica pedagógica que favorece el cambio curricular con una nueva visión del álgebra, “entendiendo el pensamiento algebraico como forma particular de reflexionar matemáticamente, a través de medios semióticos de objetivación propuestos por Radford como la percepción, los gestos y el lenguaje natural” (Vergel, 2014).

Asuntos como los descritos anteriormente requieren de la formación continuada del maestro en la educación matemática, independiente de no tener su formación de pregrado en esta área; dicha formación se convierte en factor fundamental para desarrollar buenas prácticas educativas, saber y saber hacer, pues ser maestro multigrado en el modelo de escuela le exige enseñar todas las áreas y formar de manera íntegra en sus respectivos ámbitos, saberes y dimensiones, así lo requiere su formación académica, personal y social. Al respecto, investigaciones como las de Ponte y Chapman (2008) evidencian como en los últimos años se ha desarrollado una mejor comprensión de los procesos por los cuales se aprende a enseñar Matemáticas y se desarrolla la identidad profesional del profesor durante su formación.

El Microcentro Rural como estrategia de formación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano requirió promover la capacidad de integrar el conocimiento matemático y didáctico, a los medios semióticos de objetivación del álgebra, que desde la

especificidad de las acciones pedagógicas y las orientaciones de formación, posibiliten experiencias de aprendizaje que promuevan una nueva concepción de la misma y el desarrollo del conocimiento para enseñar, el cual surge "integrando contenidos y pedagogía y enseñando a los profesores del mismo modo que se espera que ellos enseñen el conocimiento matemático" (Ponte y Chapman, 2008, p. 256).

Es en este sentido, la movilización del maestro sobre sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano pudo hacerse posible mediante una formación continuada en el microcentro rural, donde se diseñaron tareas de formación con medios semióticos que permitieran comprender, reflexionar, analizar y objetivar el pensamiento algebraico a partir de nuevas concepciones, una nueva visión del álgebra como nivel de aprendizaje en las matemáticas de la básica primaria.

3. Diseño Metodológico

Este capítulo aborda el diseño de la investigación en cuestión, considerando su naturaleza en el campo de la investigación cualitativa y en el marco de los fundamentos de Denzin y Lincoln (1994), quienes desde sus perspectivas asumen la posibilidad de analizar concepciones de los sujetos con respecto a un fenómeno de estudio, el pensamiento algebraico temprano para el caso de la presente investigación y la posibilidad de interpretar lo que ocurre en este proceso a través del método fenomenológico hermenéutico. Este último, está sustentado desde Hernández, Fernández y Baptista (2014) asumiendo la descripción y comprensión de las concepciones de las maestras frente a dicho fenómeno de estudio; así mismo, se relatará el contexto del trabajo de campo realizado con las maestras participantes en la investigación bajo del modelo de escuela nueva; adicionalmente, se pretende dar cuenta de las fases de la investigación y las técnicas utilizadas para la recolección de los datos, como referentes de análisis respecto a cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

3.1. Naturaleza del estudio y método

Pensar en un enfoque que posibilite dar respuesta a la pregunta planteada y poder así alcanzar el objetivo de investigación del presente estudio, permitió tomar como referente, en el diseño metodológico, la investigación cualitativa, entendida como una posibilidad de analizar los sujetos en estrecha relación con su sentir, sus palabras, sus pensamientos y sus experiencias (Denzin y Lincoln, 1994); los anteriores aspectos, se analizan a la luz de los fundamentos teóricos de Denzin y Lincoln (1994), a través de la indagación acerca de situaciones naturales, para intentar dar sentido o interpretar fenómenos en términos del significado que las personas otorgan a estos; para la presente investigación, resulta relevante indagar sobre las concepciones de los maestros de básica primaria, interpretar lo que pasa con estas después de vivenciar y experimentar tareas enmarcadas en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, como un fenómeno en el que los maestros otorgan un significado a través de sus reflexiones individuales y colectivas.

En coherencia con la anterior idea, se propende, en el contexto de la presente investigación, generar espacios para la interacción del colectivo de maestras, como una posibilidad de encontrar a través de sus narrativas las concepciones que en su formación, experiencia y práctica pedagógica subyacen con relación a la promoción de pensamiento matemático, y de manera particular, el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Para lograrlo, se requirió recoger datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no

verbal, describirlos y analizarlos desde las vivencias de los participantes, tal como fueron sentidas y experimentadas (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Así entonces, la interacción en grupo, la reflexión y la construcción en comunidad académica posibilitó la interpretación de la experiencia humana (Denzin y Lincoln, 1994), para describir y entender los fenómenos particulares de cada participante y perspectivas construidas colectivamente en relación con concepciones asociadas a la promoción del pensamiento algebraico en la educación básica primaria; en este sentido, el análisis de discursos, así como la búsqueda de sus posibles significados (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p.494) permitieron descubrir concepciones que tenían inicialmente las maestras participantes entorno a la promoción del pensamiento algebraico desde la práctica pedagógica de escuela nueva. Adicionalmente, interpretar estas concepciones en el marco de la experiencia vivida como docentes de matemáticas, y, por lo tanto, tratar de movilizarlas tanto al enfrentar preguntas de discusión en los grupos focales como cuando realizaron tareas que intentaban dilucidar formas de desarrollo del pensamiento algebraico temprano, lo cual requirió una toma de conciencia frente a las concepciones.

En este sentido, el método fenomenológico hermenéutico propició un escenario donde se motivó a las maestras hacia la reflexión del currículo, planeaciones de aula, actividades de enseñanza y de aprendizaje, transversalizadas por sus concepciones, aquellas que identificadas y reconocidas por el maestro, pueden hacerse consientes y movilizarse para

lograr la promoción del pensamiento algebraico temprano, De acuerdo a lo afirmado por Ayala (2008) la fenomenología hermenéutica lleva a los maestros a una reflexión con respecto a su experiencia personal y labor profesional y de esta manera, a analizar los aspectos esenciales de esta experiencia, otorgándole sentido e importancia debida a estos fenómenos.

3.2. Contexto del trabajo de campo

El microcentro rural como escenario de formación continuada para maestros en el contexto rural, bajo el modelo de escuela nueva, fue un contexto inicial para la investigación; este espacio se caracteriza por el trabajo colaborativo, la reflexión sobre la práctica pedagógica, la producción e intercambio de experiencias y pensamientos, todos estos aspectos posibilitan la construcción de los saberes del maestro, para transformar y cualificar sus procesos de enseñanza y de aprendizaje (Zapata, 2020).

Desde la comunidad académica constituida en el microcentro rural, se reflexiona sobre el hacer del maestro en las diferentes áreas y surge el interés de esta investigación, centrando su foco de atención en las reflexiones sobre la educación matemática y los pensamientos que en ella se promueven, encontrando, además, que la promoción del pensamiento algebraico temprano en el marco de las concepciones de los maestros de

básica primaria, es un asunto complejo de asumir, en tanto, algunos de ellos exhiben escaso conocimiento de las matemáticas (Castro, 2014) y por lo tanto, ellos manifiestan que el conocimiento algebraico contempla temas difíciles de aprender para el nivel de los niños, quienes apenas inician su pensamiento numérico.

En este sentido, partiendo del objetivo de investigación, analizar cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, tres maestras de estos niveles de escolaridad decidieron participar de manera voluntaria en este estudio, motivadas por continuar cualificándose en procesos de formación y experimentar posibilidades de desarrollar otros pensamientos matemáticos en sus estudiantes. Estas tres maestras, protagonistas de la investigación, pertenecen a la Institución Educativa Rural Zoila Duque Baena y trabajan bajo la estrategia del modelo educativo flexible de escuela nueva, la maestra Estrella es licenciada en pedagogía infantil, para la atención del nivel de preescolar, la maestra Luna es licenciada en educación básica, énfasis en matemáticas, con atención a los niveles de primero y segundo y la maestra Sol es licenciada en pedagogía reeducativa, con atención a los niveles de cuarto y quinto de básica primaria.

Para conocer un poco más acerca de las maestras que participaron en esta investigación, se realizó con ellas un ejercicio de autobiografía, en el que compartieron de manera voluntaria acerca de su perfil, formación, niveles educativos y años de servicio, la manera

como se constituyeron maestras, su experiencia como docentes, su percepción respecto al trabajo en el modelo educativo flexible de escuela nueva, la interacción de sus estudiantes con las matemáticas, entre otros aspectos de su historia de vida que posibilitarán reconocer sus voces, sentires, pensamientos, aquello que las constituye como personas y maestras, protagonistas de la investigación. A continuación, se comparte un poco acerca de las maestras protagonistas de la investigación:

Autobiografía maestra Estrella. Docente de preescolar en la Institución Educativa Rural Zoila Duque Baena, sede María Restrepo de Restrepo, licenciada en pedagogía infantil de la Universidad de Antioquia, actualmente estudiante de especialización en pedagogía y didáctica de la Universidad Católica de Oriente. Llegué a la práctica educativa pocos meses después de haber obtenido mi título como licenciada, en esta experiencia duré 2 años, la cual consistió en el trabajo con un grupo de 29 niños entre los 2 y 3 años de edad en el proyecto de Buen Comienzo Antioquia, de allí pasé a vincularme en el sector público desde el 2015, sumando así 7 años de experiencia entre uno y otro. Pero, antes de esto debo contar que desde muy pequeña quise ser profe de preescolar y este deseo no nació de un gusto por los niños y las niñas, fue más bien por la posibilidad que me dio la vida de ver a mi mamá (quien es maestra jubilada) en el aula de clases en una escuela rural, al crecer viendo como la educación, a través de ella, era decisoria en la vida de los niños y niñas empezó a crecer en mí, el deseo de ser maestra y más aún en los primeros años, los cuales son determinantes para el ser humano.

En mi experiencia con los niños y las niñas de preescolar, puedo decir que ellos se relacionan con las matemáticas desde lo cotidiano, es decir, desde el uso en el contexto, ellos aprenden a clasificar sin saber desde lo teórico el concepto y su significado, hacen ejercicios de aritmética al sumar los animales que pueden tener en sus casas o el número de familiares con los que vive. Mi idea ha sido cambiar la concepción de las matemáticas como la materia aburrida, al potenciar esta dimensión humana se desarrolla el pensamiento lógico, porque para mí las matemáticas van más allá del aprendizaje de fórmulas o teoremas, es el desarrollo del pensamiento crítico, es enseñar a razonar, de manera que puedan usar estas habilidades en contexto.

Autobiografía maestra Luna. Docente de básica primaria en los grados de primero y segundo en la Institución Educativa Rural Zoila Duque Baena, Sede Educativa María Restrepo de Restrepo, lugar en el que trabajo feliz por el amor de mis niños. Soy Normalista Superior, Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas, Especialista en lúdica educativa y Magíster en educación. Desde muy niña siempre me incliné hacia la profesión docente y ello se reflejaba en mis juegos, pues siempre me gustaba ser la profesora cuando jugábamos a la escuelita. Mi primera experiencia en la docencia fue en la Fundación Educadora Infantil Carla Cristina, donde trabajé la estrategia de atención a la primera infancia del programa Buen Comienzo en los niveles de jardín y transición en la ciudad de Medellín. Luego, pase a laborar en la IER Zoila Duque Baena donde trabajo con los estudiantes de primero y segundo bajo el modelo de escuela nueva hace 12 años.

La interacción con las matemáticas en los grados donde enseño es muy didáctica en tanto, trato de que las actividades sean llamativas para los estudiantes y para mí. Acudo mucho al juego y a los diversos materiales del medio que permiten su aplicación. Aunque para los estudiantes en grados iniciales las matemáticas son como un monstruo gigante y complejo, yo trato de hacer que estas sean llamativas y de fácil comprensión.

Autobiografía maestra Sol. Docente de Básica Primaria, en los grados de cuarto y quinto de la I.E.R Zoila Duque Baena. Soy Licenciada en educación básica primaria y promoción a la comunidad y Especialista en pedagogía de la recreación ecológica, trabajo con el modelo educativo de escuela nueva. Desde muy pequeña jugaba a ser profesora, por lo que soñaba que en algún momento con mi esfuerzo y con el apoyo de mi familia lo iba a lograr. El gusto por la docencia estaba desde mi primaria y se afianzó más cuando pase a la secundaria, veía cada vez más cercano cumplir con este sueño. Recuerdo de forma muy particular a mis profes y comparaba la forma de enseñar de ellos, en ese entonces eran muy fuertes con nosotros y me indignaba que me trataran mal a mí y a mis compañeros(as), esto hizo que mi deseo de hacerme docente fuese más fuerte, para mostrar que había otras formas de enseñar y tratar mejor a los estudiantes. También mi deseo de ser docente parte del gusto por la integración permanente con los niños y por el amor al trabajo, experiencia de vida y profesión en la que llevo 27 años.

Mi interacción con las matemáticas es muy buena, aunque no es mi área de formación me gusta mucho, disfruto aprendiendo de los conocimientos matemáticos para enseñarlos a

mis niños, y que así ellos también puedan tener una buena interacción, desde la preparación de los temas, trato de ilustrarme de la mejor manera para llegar con mayor seguridad a ellos, quienes responden de forma satisfactoria, incluso he recibido comentarios de algunos padres de familia diciendo que mi formación pareciese fuera en el área de matemáticas, eso me hace sentir muy bien. He buscado métodos para que mi enseñanza sea didáctica y mis estudiantes disfruten de dicha materia, propiciando así que ellos no le cojan fobia.

La participación en la investigación de estas tres maestras, quienes atienden los diferentes niveles de la educación básica primaria, permitió obtener experiencias individuales que se compartieron de manera colectiva y que posibilitaron contrastar lo que en sus diálogos y reflexiones explicitaban como una preocupación que se daba entorno a la cualificación del maestro y sus posibilidades para ir más allá del pensamiento numérico y vincular conceptos de carácter algebraico en sus planes de área y practica pedagógica.

Otro de los asuntos objeto de atención y que convocó la reflexión de las maestras, tuvo que ver con la ausencia del conocimiento disciplinar del área o de los medios posibles para ir más allá de las letras o de los números y movilizar sus concepciones hacia el pensamiento algebraico. En este panorama de investigación Van Manen (2003) expresa que:

Las experiencias, recopiladas por la fenomenología hermenéutica y luego plasmadas en descripciones, serán eficaces para analizar los aspectos pedagógicos en la cual el educador debe interesarse a profundidad por los acontecimientos que ocurren en el aula y optimizar la práctica

pedagógica. En tal sentido, la fenomenología nace de la realidad educativa; desde la observación se describe lo esencial de la experiencia, tanto externa e internamente (análisis de la conciencia).
(p.5)

El trabajo de campo estuvo liderado por la investigadora de este estudio, que, de manera conjunta con las tres maestras participantes, desarrollaron cuatro encuentros, los cuales se denominaron encuentros de formación. Las sesiones se realizaron en el tiempo dispuesto por las maestras, motivadas por el conocimiento que podían descubrir, aprender y compartir en estos espacios. Adicionalmente, en el desarrollo de los encuentros, ellas expresaban temor al no lograr realizar de manera asertiva las tareas que se proponían en relación al pensamiento algebraico.

Así entonces, los encuentros de formación se sustentaron en la perspectiva de (Ponte, 2006) cuando plantea la importancia de que el maestro tenga una noción profunda sobre las concepciones del pensamiento algebraico para poder promoverlo en los primeros años de escolaridad, de allí que la formación de los maestros se torna en un aspecto importante si lo que se quiere es permitir la incursión del pensamiento algebraico al currículo, al aula, a la planeación y a los procesos de enseñanza; sin embargo, para ello es necesario que el maestro esté convencido desde sus concepciones de que este fenómeno puede promoverse en el aprendizaje de sus estudiantes; es así como las tareas desarrolladas con las maestras participantes en el estudio, se fundamentaron en el marco de la postura de Radford (2010)

quien propone que es posible reconocer formas de pensamiento algebraico cuando las tareas exhiben la presencia de medios semióticos de objetivación, los cuales pueden ser movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, desde la percepción, los movimientos, gestos y lenguaje natural.

Cada espacio de formación tuvo como escenario central el desarrollo de tareas de formación (Ponte, et al. 2009) que además se constituyeron en insumos para obtener datos objeto de análisis. Cada uno de los encuentros tuvo una duración de dos horas en las que se utilizaron diferentes instrumentos para la producción de los datos y la ejecución de las tareas; estas últimas posibilitaron identificar las concepciones de las maestras frente al desarrollo del pensamiento algebraico temprano, como un fenómeno que en cada sesión fue reflexionado y discutido a partir de situaciones generadas, para así compartir concepciones individuales asociadas con las experiencias a priori e identificar posibles cambios generados con en el desarrollo de las tareas de acuerdo a las experiencias compartidas.

En cada sesión se retomaron las conclusiones y reflexiones suscitadas en el encuentro anterior y luego se propusieron tareas individuales y colectivas; posteriormente, estas se compartieron, partiendo de la premisa planteada por Van Manen (2003) quien propone que:

[...] la fenomenología en educación, no es simplemente un “enfoque” del estudio de la pedagogía, no se limita a ofrecer simples descripciones o explicaciones” alternativas” de los fenómenos educacionales, sino que las ciencias humanas apuestan a recuperar de forma reflexiva

las bases que, en un sentido profundo, proporcionan la posibilidad de nuestras preocupaciones pedagógicas (p. 189).

3.3. Fases de la investigación e instrumentos utilizados para la recolección de los datos

La recolección de los datos para su posterior análisis, se realizó sobre las experiencias de los participantes, sus descripciones, narrativas y manifestaciones entorno a sus concepciones respecto al pensamiento algebraico y la manera como este puede ser objetivado para luego promoverse en el desarrollo de pensamiento y aprendizaje de los estudiantes.

Uno de los aspectos a tener en cuenta en el proceso de recolección de datos del estudio, puso el foco de atención en las voces de las maestras protagonistas de la investigación; según Bajtín (2009), sus enunciados, sentires, expectativas y utopías, permitieron analizar cambios en sus concepciones, los cuales estuvieron asociados con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, y permitieron comprender las realidades del contexto rural en el modelo de escuela nueva, los sentidos y significados otorgados a este; es así como, el transcurso de los encuentros de formación y el desarrollo de acciones y reflexiones permitieron explorar, describir, interpretar y comprender las concepciones para

movilizarlas de acuerdo a lo que experimentaban en torno al desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Fases de la investigación

Tomando como referente el método fenomenológico hermenéutico, la investigación tuvo en cuenta cuatro fases que permiten describir y entender el fenómeno objeto de estudio, desde el punto de vista de cada participante y sus perspectivas construidas colectivamente (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p.495); las cuatro fases se describen a continuación:

Fase 1: Definir el fenómeno de interés, el contexto y los participantes. Como se señaló en párrafos anteriores, el fenómeno de interés para esta investigación se consolida en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano a partir de la movilización de las concepciones de los maestros de básica primaria y el objeto de estudio sobre individuos que hayan compartido experiencias del fenómeno, por lo tanto, se enmarca en tres maestras de básica primaria que trabajan en el modelo de escuela nueva bajo la estrategia de aula multigrado y quienes decidieron participar de manera voluntaria en la investigación.

Fase 2: Recolectar los datos sobre las experiencias con el fenómeno de estudio. La recolección de los datos se realizó mediante el diseño y la aplicación de instrumentos en los diferentes encuentros con las maestras participantes en la investigación, estos instrumentos fueron los grupos de enfoque con preguntas tipo entrevista, las tareas y las reflexiones que se consolidaban en el mural de situaciones. Los anteriores posibilitaron evidenciar las diferentes concepciones de las maestras frente al desarrollo del pensamiento algebraico temprano, su promoción desde los primeros grados de escolaridad y su pertinencia acorde al contexto rural de la escuela nueva y las aulas multigrado.

Fase 3: Transcribir las narrativas de las experiencias compartidas en el fenómeno de estudio, revisar todas las descripciones e información para identificar las unidades de análisis y categorías. Los datos obtenidos mediante las técnicas implementadas y las grabaciones en el trabajo de campo, posibilitaron identificar tanto las categorías y las unidades de análisis, donde el maestro, a partir de sus concepciones, discusiones, reflexiones y tareas de formación, valida o refuta medios de objetivación para movilizar sus concepciones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano y la importancia de promoverlo desde los primeros grados de escolaridad.

Fase 4: Desarrollar una narrativa general que incluya las categorías, temas comunes y diferentes en el fenómeno de estudio. Después de transcribir los datos y hacer una lectura y análisis de estos, se pasó a reseñar la información relevante que mostraba los eventos en

los que se podían dilucidar las concepciones de las maestras y aquellos donde se evidenciaban posibles formas de pensamiento algebraico e indicios de movilización en dichas concepciones; este aspecto tuvo en cuenta la pregunta y el objetivo de investigación planteados, así como los referentes teóricos que guiaron el estudio para determinar las categorías, desde las descripciones y narrativas de las maestras en sus experiencias individuales y comunes respecto al fenómeno de estudio. Así entonces, se realizó una narrativa que permitiese dar cuenta del análisis respecto a cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones a través de medios semióticos objetivados (Radford, 2010) para el desarrollo del pensamiento algebraico y su promoción en los primeros grados de escolaridad.

Instrumentos utilizados para la recolección de los datos

Como se mencionó anteriormente, en el marco del método fenomenológico hermenéutico se proponen algunos instrumentos para la recolección de datos, estos se configuran en herramientas que permiten evidenciar una posible movilización en las concepciones de las maestras con relación a la posibilidad de promover pensamiento algebraico temprano. A continuación, se describen los instrumentos utilizados en esta investigación.

Los grupos de enfoque: los grupos de enfoque son considerados como una especie de entrevistas grupales, las cuales consisten en reuniones de grupos pequeños o medianos (tres a 10 personas), donde los participantes conversan a profundidad en torno a uno o varios temas (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p.408). Bajo esta premisa se conformó el grupo de enfoque para esta investigación con tres maestras que comparten la experiencia educativa de la básica primaria en la escuela rural y los grupos de enfoque en los diferentes encuentros se orientaron a través de preguntas tipo entrevista, con el fin de generar la expresión de pensamientos, ideas, conceptos, experiencias, emociones, y otros elementos evidenciados en las concepciones de las maestras. Así, el grupo de enfoque representa una técnica transversal para la recolección de los datos. En el estudio fueron objeto de análisis, en tanto permitió reconocer en el dialogo y sus interacciones, las concepciones que subyacen desde el ser del maestro para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Adicionalmente, los grupos de enfoque se llevaron a cabo generando un clima agradable, de respeto y valoración por el sentir compartido de las maestras y sus voces, posibilitando con ello un ambiente de confianza, para expresar sus concepciones frente a las preguntas, la discusión de situaciones y el desarrollo de tareas que tenían que ver con el pensamiento algebraico temprano, buscando con ello que a través del encuentro en el grupo focal, estas concepciones arraigadas a priori en su ser se pudiesen movilizar a través de la interacción con el otro; así entonces, desde la narrativa colectiva (Hernández, Fernández y Baptista, 2014) explorar, describir e interpretar abren la posibilidad de promover pensamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad. Para efectos del

desarrollo de la presente investigación, dada la naturaleza y características del grupo de maestras y en estrecha relación con la metodología asumida, el grupo focal se considera un grupo de formación.

En esta técnica de recolección de datos, la unidad de análisis es el grupo (lo que expresa, manifiesta, lo que construye, las ideas que manifiesta, los episodios que viven y que evidencian elementos asociados con las concepciones). Para efectos del presente estudio, estas unidades de análisis fueron elementos constitutivos de las categorías que se presentan y definen en el siguiente capítulo. Cabe mencionar, además, que el grupo de enfoque tiene su origen en las dinámicas grupales, pues su objetivo es generar y analizar la interacción entre ellos y cómo se construyen grupalmente significados (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 409). Por lo anterior, se considera a la investigadora como la moderadora de los grupos focales, quien, para efectos del desarrollo de la presente investigación, propició discusiones fluidas a partir de preguntas tipo entrevista, situaciones de reflexión y las tareas que se planearon conjuntamente con las maestras para el desarrollo del encuentro.

Tareas de formación: otra técnica utilizada en la recolección de los datos fueron las tareas, concebidas por Ponte et al. (2009) como tareas de aprendizaje profesional para los maestros, donde la observación sobre las acciones de las maestras, su compartir e interacción de concepciones, el desarrollo de pensamiento para realizarlas, posibilitó reconocer formas de pensamiento algebraico. Estas tareas fueron diseñadas antes de los

encuentros, enmarcadas en la perspectiva de Radford (2010) y su propuesta para la caracterización del pensamiento algebraico a través de los medios semióticos (percepción, movimientos, gestos, lenguaje natural) movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva.

Así entonces, las tareas fueron propuestas mediante actividades relacionadas con representaciones icónicas, dobleces de papel y procesos de generalización, secuencias con situaciones de variación y búsqueda de patrones, secuencias figurales con apoyo tabular, tareas que permitieron explorar el tipo de pensamiento matemático predominante en las maestras participantes, pero también las concepciones que se movilizaban en el desarrollo de las tareas de manera individual y colectiva, para poder descubrir a través de sus narrativas, explicaciones e interacciones, el sentido que daban a lo que hacían, objetivando sus concepciones, para pensar algebraicamente (Radford, 2010) aún en ausencia de signos alfanuméricos, es decir en la posibilidad de desarrollar pensamiento algebraico.

Las producciones y reflexiones de las maestras, logradas en el desarrollo de las tareas de formación se registraron a través de audios y en hojas que eran obtenidas al finalizar los encuentros, con el fin de analizar el tipo de pensamiento y medios semióticos presentes que podrían evidenciar la movilización que se iba suscitando en el desarrollo de las tareas, frente a las respectivas concepciones del desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Mural de situaciones: dentro del camino metodológico para la recolección de los datos, se requirió de una técnica que permitiese consolidar lo que sucedía en los encuentros con las maestras, interpretar sus conclusiones y mostrar las reflexiones suscitadas en el grupo de enfoque; en el mural de situaciones, no eran las respuestas que se daban a las tareas o a las discusiones respecto a las preguntas tipo entrevista lo que interesaba, era el proceso y las reflexiones que se experimentaban de manera individual y colectiva, en estrecha relación con las concepciones que surgían dentro de este, los medios semióticos que se objetivaban para producir la toma de conciencia y la movilización de las concepciones con las que se llegaba al encuentro. Por lo anterior, el mural de situaciones, como técnica de la investigación cualitativa, permitió identificar y describir situaciones, develar concepciones, objetos y símbolos para poner en evidencia procesos en los que las maestras expresaban y reconocían la importancia de promover pensamiento algebraico temprano.

Para desarrollar la técnica del mural de situaciones, de acuerdo a mi experiencia como maestra e investigadora, se diseñaron con antelación a los encuentros, algunas preguntas que pudiesen abarcar el sentir, los pensamientos y las concepciones de las maestras, para lograrlo, se colocaba un pedazo de papel grande en la pared antes de iniciar la interacción con el grupo, en el cual, las maestras plasmaban sus concepciones y tareas realizadas, para compartirlas en plenaria y así, desde lo colectivo, continuar objetivando y reflexionando

situaciones vividas para movilizar las concepciones frente al fenómeno en cuestión; de esta manera, la técnica del mural de situaciones se implementó con el fin de obtener significados de los participantes desde su lenguaje, gestos y expresiones donde se describe e interpreta la movilización de concepciones.

Las técnicas de recolección utilizadas en la investigación propendieron por la construcción de las narrativas que exhibían el compartir y las reflexiones de las maestras, suscitadas en el desarrollo de las tareas y preguntas tipo entrevista que se fueron planteando en el grupo de enfoque y las conclusiones en el mural de situaciones. Todos estos espacios fueron grabados con el fin de hacer una transcripción detallada de las concepciones, y con ello poder realizar un análisis comparativo entre las similitudes y diferencias de estas; el análisis en mención, se presenta en el siguiente capítulo.

4. Análisis y resultados de la investigación

Este capítulo aborda el proceso de análisis realizado a la luz de la naturaleza de la investigación cualitativa, el método fenomenológico hermenéutico, la pregunta y el objetivo de investigación que se enunciaron en el planteamiento del problema. El foco de análisis se enmarca en los episodios que dan cuenta del fenómeno de estudio, el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, desde las interacciones, producciones y concepciones de las maestras, evidenciadas en las unidades de análisis y categorías emergentes que se lograron dilucidar en las transcripciones de los audios, hojas de trabajo recolectadas y demás instrumentos.

Adicionalmente, se presentan los resultados en una narrativa donde se tejen las relaciones existentes entre las categorías emergentes; estas últimas, permitieron dilucidar una caracterización del pensamiento algebraico temprano propuesto por Radford (2010), la presencia de diferentes medios semióticos y las formas de pensamiento algebraico, dando cuenta de cómo el maestro moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

4.1 Proceso de análisis de la información

A partir de los datos obtenidos en los encuentros de formación, mediante las técnicas empleadas para recoger las experiencias suscitadas en el desarrollo del trabajo de campo y que fueron enmarcadas en las fases propuestas en el método fenomenológico (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p.495) se procedió con el desarrollo de la fase 3, en la cual se realiza la transcripción de las experiencias vividas por las participantes, dicha transcripción se hizo de los audios tomados en cada encuentro de formación con las maestras, de tal manera que se pudiesen recoger sus voces para analizar e interpretar, a través de ellas, su sentir, experiencias, pensamientos y concepciones respecto al pensamiento algebraico, indicios de su desarrollo y formas de promoción del mismo.

Las transcripciones se realizaron sobre los audios, las hojas de trabajo obtenidas en los cuatro encuentros de formación con las maestras, el mural de situaciones y demás diálogos que dieron cuenta de las reflexiones y concepciones expresadas en las preguntas tipo entrevista del grupo focal, así como en el desarrollo de las tareas de formación. De esta manera, al revisar todas las transcripciones e información obtenida, se procedió a realizar la reducción de los datos teniendo presente la pregunta y objetivo de investigación, así como el marco teórico que, desde la caracterización del pensamiento algebraico temprano, a través de los medios semióticos de objetivación (Radford,2010) y las concepciones del

maestro (Agudelo, 2005) permiten darle sentido a los datos para delimitar lo que se convertiría en unidad de análisis y categorías de la investigación.

En coherencia con lo anterior, se procedió a señalar de color amarillo las ideas expuestas en los diálogos de las maestras, aquellas que desde sus expresiones, reflexiones y sentires permitían identificar las unidades de análisis sobre sus concepciones y la posible movilización de estas en el desarrollo de cada encuentro. Así mismo, con diferentes colores se marcaron las nociones, expresiones o ideas que representaban las posibles formas de pensamiento algebraico dilucidadas en el desarrollo de las tareas realizadas por las maestras; para tal fin, de color rojo se marcaron aquellas donde se evidenciaban indicios de pensamiento algebraico factual, con color azul las evidencias de pensamiento algebraico contextual y de color verde aquello que podría considerarse como pensamiento algebraico simbólico; también fueron tenidas en cuenta las formas de pensamiento con sus respectivos vectores (sentido de la indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica) que pudieran suscitar posibles movilizaciones de las concepciones de las maestras.

Así mismo, en las transcripciones de los diálogos se utilizaron algunos elementos distintivos cuando las expresiones de las maestras fueron acompañadas, no solo por expresiones verbales sino por gestos, silencios o pausas; para tal efecto, los puntos entre corchetes [...] indicarán las pausas o silencios en sus interacciones y los puntos entre paréntesis si su expresión estuvo acompañada de algún gesto, esto con el fin de analizar los

posibles medios semióticos que pueden ser objetivados por las maestras durante el desarrollo de las tareas o reflexiones.

4.2. Descripción y análisis de los episodios en los encuentros de formación

En este apartado se describe el desarrollo de los encuentros de formación realizados con las maestras participantes, el análisis que se realiza de las interacciones, expresiones, gestos e ideas de las cuales se extraen las unidades de análisis y categorías que indican una posible movilización de las concepciones, para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, a la luz del referente teórico y en concordancia con Vergel (2016) cuando refiere que el análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes tipos de texto (escrito, hablado, gestual) que se producen durante el desarrollo de una tarea.

4.2.1. Encuentro 1. Grupo de enfoque con preguntas tipo entrevista

Este instrumento de recolección de datos, presentado en el capítulo del diseño metodológico como la posibilidad de poner a conversar un grupo pequeño, a través de preguntas tipo entrevista, para obtener las concepciones, experiencias, gestos e ideas sobre un fenómeno de estudio, permitió reunir a las maestras participantes para contextualizarlas sobre la investigación de la que harían parte, esto desde el problema de investigación y la

pregunta que se pretendía responder desde la consecución del objetivo, el cual se enmarcaba en analizar cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Cabe resaltar, que fue un reto para la maestra investigadora iniciar este conversatorio puesto que las maestras participantes, manifestaron muchas expectativas, pero a la vez emociones de temor y ansiedad para iniciar los encuentros de formación; es así como, en sus interacciones enunciaban que cuando se les hizo la invitación desde el microcentro sintieron temor, pues nunca reflexionaron sobre la posibilidad de desarrollar pensamiento algebraico en la educación básica primaria, ello evidenciado en el siguiente diálogo:

Maestra Luna: en nuestras reflexiones desde el microcentro rural hemos hablado de la necesidad de profundizar más sobre la geometría, la estadística, pero llegar a pensar en álgebra, (...) es algo complejo.

Maestra Estrella: más que complejo, (...) es un desafío porque creo que no estamos preparados.

Maestra Sol: sí en ocasiones, nos cuesta que los estudiantes aprendan los números, más aún, que aprendan a operar con letras.

Estas expresiones de las maestras, referían entonces una primera concepción sobre el pensamiento algebraico temprano como algo complejo y difícil de trabajar con los

estudiantes, quizá uno de aquellos temores que, en coherencia con Agudelo (2005), se instauran en los maestros y pueden convertirse en obstáculo para que ellos puedan promover el pensamiento algebraico desde su enseñanza; sin embargo, al mismo tiempo parecía que ese temor se había convertido en una posibilidad para continuar formándose, experimentando y aprendiendo, en tanto desde sus expresiones, las maestras Luna, Estrella y Sol, coincidían en que poder descubrir, cómo era posible o no desarrollar pensamiento algebraico en sus estudiantes, era lo que las motivaba para hacer parte de la investigación, de hecho ya habían comenzado a pensarse como podría hacerse posible en el aula el pensamiento algebraico y así cualificar tanto su práctica pedagógica como sus procesos de enseñanza y de aprendizaje.

En este sentido, para el objetivo de este estudio interesaba convocar a las maestras a una situación de reflexión que permitiera dilucidar a través de sus gestos, ideas, expresiones, experiencias y reflexiones, cuáles eran sus concepciones en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano y para ello se presentó la siguiente situación: *El rector de su Institución Educativa propone implementar en el currículo de matemáticas el desarrollo del pensamiento algebraico, a partir de los procesos de enseñanza desde la educación básica primaria, en su rol de maestro de básica primaria ¿qué le respondería al rector?*.

Alrededor de esta situación se suscitó un diálogo e interacción entre las maestras con el apoyo de seis preguntas tipo entrevista: ¿cree usted que debe incluir el desarrollo del

pensamiento algebraico en la educación básica primaria? ¿por qué?, ¿En su actividad de enseñanza, cuál es el pensamiento matemático que prima en sus clases? ¿por qué?, ¿qué tareas cree usted, pueden promover el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación básica primaria?, ¿a partir de que edades o grados, cree usted que se debe incluir el pensamiento algebraico? ¿por qué?, ¿cree usted qué es necesario el conocimiento disciplinar y didáctico del maestro en el pensamiento matemático para poder desarrollar el pensamiento algebraico en sus procesos de enseñanza? ¿por qué?, ¿cree usted qué existe alguna relación entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico? ¿por qué?, estas preguntas permitieron dentro del análisis dilucidar episodios que resaltan las unidades de análisis entre las interacciones generadas por las maestras dando evidencias de sus concepciones.

Así entonces, cuando se les pregunta sobre lo que le responderían al rector que plantea esta situación para su institución y si creen que se debe incluir el pensamiento algebraico en la educación básica primaria, las maestras se toman un tiempo de manera individual para pensar y reflexionar y luego en su compartir de pensamientos se denotan los siguientes episodios, que entretejidos por un diálogo respetuoso con el otro y en construcción con el par académico permite a las maestras repensarse y reflexionar; lo anterior permitió que se evidenciaran sus concepciones y la relación que hacen desde su experiencia en la práctica respecto a la situación que se plantea:

Maestra Luna: creo que sería algo viable, por ejemplo, si le colocamos a los estudiantes de primero y segundo, ejercicios sencillos de suma y en ellas un espacio en blanco, por decir $5 + \square = 8$, ahí ya estamos colocando una incógnita para resolver y esa ecuación podría ser pensamiento algebraico.

Maestra Sol: podría ser posible enseñar pensamiento algebraico desde las propiedades de las operaciones básicas.

Maestra Luna: cuando nos dicen álgebra uno se remite a cosas muy complejas y hay cosas abstractas que iniciaron desde algo simple que considero se podría abordar desde la parte inicial del aprendizaje.

Maestra Estrella: (...) creo que nosotros como maestros decimos que son procesos simples porque nosotros quizá ya los conocemos, pero para los niños implica una complejidad.

Maestra Sol: creo que desarrollar pensamiento algebraico, sería algo muy complejo, si a los niños les cuesta realizar operaciones básicas aprenderse las tablas, bases necesarias para su aprendizaje en primaria, más difícil será aun que puedan trabajar con letras e incógnitas.

Este diálogo permite acercarnos a las primeras concepciones de las maestras y denotar como relacionan el pensamiento algebraico con incógnitas, propiedades de las operaciones y letras, así mismo, las tres maestras coinciden en que es un proceso complejo para iniciar en la básica primaria, sin embargo, la maestra Luna da indicios en sus argumentos de que aunque es un proceso complejo, debe tener unas bases simples que pueden ser enseñadas en la educación básica primaria, pero, la maestra Estrella le hace una interlocución con un

gesto quizá de desacuerdo, manifestando que sería simple, si el maestro lo conoce pero aún para los estudiantes sigue siendo complejo, esta expresión dilucida en la maestra Estrella una concepción de complejidad hacia el desarrollo del pensamiento algebraico temprano; estas concepciones permiten considerar que pensar algebraicamente, en el contexto del análisis de situaciones de la vida real (Agudelo, 2005) requiere que centremos la atención en los aspectos relacionales y las estructuras matemáticas presentes en dichas situaciones contextuales y que los maestros, por ende, tengan una actitud de apertura en sus prácticas de enseñanza desde sus concepciones y actividades escolares.

En esta misma línea, la maestra Sol desde sus interacciones, intenta, inicialmente, proponer escenarios donde podría verse reflejado el pensamiento algebraico temprano, pero finalmente manifiesta que es importante desarrollar las bases numéricas en los estudiantes para llegar a procesos tan complejos como el álgebra; considerando lo anterior, podría pensarse que esta concepción hace parte de su cultura y de la experiencia que la constituye desde hace más de veinte años en la enseñanza del saber matemático, ello en coherencia con planteamientos como los de Vergel (2016b) cuando manifiesta que “una tradición curricular nos ha llevado a pensar que la enseñanza del álgebra es un asunto de la escuela secundaria. La idea detrás de esta tradición es que, para entender álgebra, es necesario tener una base aritmética relativamente sólida” (p.15)

Desde este panorama de interacciones, la maestra investigadora quiere ir más allá de las respuestas dadas por las maestras y profundizar sobre sus experiencias, e indaga si desde su

proceso de enseñanza del saber matemático, sería probable incorporar a su práctica actividades que tenga que ver con el pensamiento algebraico, aun siendo complejo, lo cual produce un momento de silencio y posteriormente la interacción de las maestras, quienes aducen las posturas presentadas a continuación:

Maestra Luna: uno hace cosas, pero no las vincula a nada, enseña pensamiento numérico, pero no lo asocia con otro tipo de pensamiento.

Maestra Estrella: creo que el pensamiento algebraico puede estar inmerso en lo que hacemos, pero no lo hacemos evidente, porque ni siquiera nosotros somos conscientes de que lo estamos haciendo.

Maestra Luna: también creo que nos encerramos en contenidos y temas, primero este y luego el otro, todo fragmentado.

Maestra Estrella: Sería muy importante mirar la articulación entre niveles para que se den procesos.

Maestra Luna: hay que hacer conciencia de los conocimientos y procesos que se desarrollan y ahí se podría incluir el álgebra en la básica primaria.

Maestra Sol: creo que el pensamiento algebraico es un tema complejo [...] hasta para nosotros como maestros que no tenemos la formación en el área.

En las expresiones de las maestras Luna y Estrella se empieza a observar que existe la posibilidad de promover pensamiento algebraico, pero para ello es importante la

articulación con el pensamiento numérico; así mismo, refieren la importancia de la toma de conciencia sobre lo que se enseña y el no trabajar con temas fragmentados para generar procesos entre la básica primaria y secundaria, sin embargo, la maestra Sol les hace una interlocución planteando que el pensamiento algebraico sigue siendo un tema complejo aún para los maestros que no tienen formación en el área; cabe llamar la atención sobre esta concepción, en tanto puede estar reflejando cómo la promoción del pensamiento algebraico temprano puede estar limitada desde las concepciones del maestro por el dominio conceptual que se crea tener para enseñarlo, en este sentido (Agudelo, 2005) señala que “la forma de saber de un profesor lleva consigo unas actitudes hacia la iniciación del trabajo algebraico, hacia sus estudiantes y hacia la introducción de cambio en su enseñanza, y una percepción específica de su eficacia personal” (p. 402).

Maestra Luna: creo que el pensamiento algebraico temprano podría ser una base para que cuando los estudiantes estén en grados más avanzados desarrollen ejercicios de mayor complejidad y de mayor abstracción, pero trabajamos aislados.

Maestra Estrella: creo que la tarea de promover pensamiento algebraico sería compleja, pero si podría hacerse y permitiría que se dé un proceso de manera natural de la primaria a la secundaria.

Maestra Luna: por eso creo que le diría al rector que es importante construir el camino o la ruta para enseñar pensamiento algebraico desde la básica primaria, y que no se dé un proceso aislado con la básica secundaria.

Maestra Sol: (...) levemente podría iniciarse un desarrollo del pensamiento algebraico en la primaria para que cuando estén en bachillerato temas tan importantes, pero tan complejos como el álgebra, no sean procesos tan difíciles para ellos, sin desconocer que los niños deben tener buenas bases en el pensamiento numérico para que no queden con vacíos.

En este episodio, las maestras empiezan a dilucidar concepciones comunes sobre el desarrollo del pensamiento algebraico, cuando consideran que el inicio de este pensamiento desde la básica primaria, permitiría un paso natural a secundaria y como consecuencia, que los estudiantes no sientan temor por el álgebra, en coherencia con sus concepciones Wilhelmi (2017) refiere que “el paso de la aritmética al álgebra es complejo, entonces, de cara a diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje mejor adaptados a las restricciones en la instrucción y cognitivas, es preciso “adelantar” ciertos aspectos algebraicos en las etapas tempranas” (p.18).

En este sentido, desde las concepciones analizadas sobre lo que expresan las maestras se continua evidenciando la importancia de generar bases en el pensamiento numérico para que los estudiantes puedan desarrollar otro tipo de pensamientos, estas concepciones quizá están asociadas a sus prácticas y a lo que han considerado importante desde la enseñanza y aprendizaje en sus estudiantes, por ello para profundizar sobre esta concepción se continua el grupo de enfoque indagando sobre el tipo de pensamiento matemático que prima en las clases de las maestras, para lo cual, sus expresiones e ideas coinciden en afirmar que es el

pensamiento numérico quien prima en sus clases, debido no solo a que lo consideran como base de los demás aprendizajes, sino también a que el modelo educativo flexible de escuela nueva lo propone así en el contenido de sus cartillas, y es lo que desde la dinámica del aula multigrado alcanzan a desarrollar por la duración de los periodos académicos y los ritmos de aprendizaje de sus estudiantes, dejando entrever que “los maestros no ven sus concepciones como el factor determinante de su práctica de enseñanza, los factores que ven como cruciales en la determinación de lo que sucede en sus aulas de clase pertenecen al contexto social e institucional” (Agudelo, 2005, p.22).

Maestra Estrella: el tiempo de los periodos académicos es muy corto, da solo para trabajar el numérico, máxime cuando el desarrollo no es lineal, ellos avanzan y retroceden.

Maestra Luna: (...) considero que el sistema educativo nos ha llevado a establecer contenidos, hay un afán del maestro por desarrollar el currículo en los periodos indicados, pero se contrapone con lo que en realidad pasa en el aula y el nivel de aprendizaje de los estudiantes.

Maestra Luna: además el modelo de Escuela Nueva, plantea que debemos respetar el ritmo de aprendizaje de los estudiantes, el estudiante tiene una guía con unos contenidos y nosotros como maestros los orientamos y en ellas nos exigen unas competencias básicas en el pensamiento numérico que el estudiante debe saber y muchas veces ni alcanzamos a desarrollarlo.

Maestra Estrella: Creo que, si desde la casa nos ayudarán a promover más el pensamiento numérico, se podría trabajar más en el aula otro tipo de pensamiento como el algebraico.

El grupo de enfoque permitía entonces develar concepciones arraigadas a la manera como las maestras entendían o se referían al pensamiento algebraico temprano al pensarse sobre su inclusión en el aula y los factores que podían determinar que esto sucediera; por lo tanto, se sigue profundizando sobre sus concepciones y al querer convocar la reflexión de las maestras hacia un proceso de pensamiento y articulación de su quehacer, se pregunta si desde la relación manifiesta entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico, podría pensarse en tareas que promovieran este último en los estudiantes y allí se coloca el foco de atención sobre el siguiente episodio:

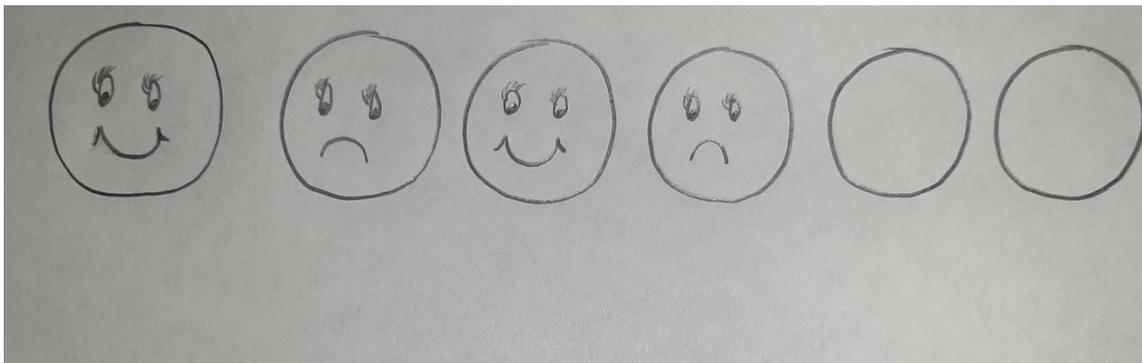
Maestra Luna: creo que ejercicios de incógnitas permiten que los estudiantes desarrollen pensamiento algebraico.

Por ejemplo: cada figura tiene una equivalencia, cuadrado, triángulo, rectángulo, círculo entonces el triángulo va a valer 5, el cuadrado va a valer 3, el círculo va a valer 2 y el rectángulo 1, si yo coloco eso en una operación con símbolos, las voy variando y pregunto a los estudiantes por el resultado, entonces allí ya hay un proceso de abstracción, de pensamiento algebraico.

Maestra Estrella: actividades de seriación creo que también podrían promover pensamiento algebraico, porque allí damos un patrón y los estudiantes lo siguen.

Figura 1

Producción de la maestra Estrella, sobre actividades de seriación



Fuente: registros tomados en el grupo de enfoque (2019)

Maestra Sol: también creo que se podría desarrollar pensamiento algebraico como lo mencioné anteriormente desde las propiedades.

Por ejemplo, cuando en las propiedades reflexiva, simétrica, transitiva, se dice que un número es igual a otro entonces podemos decir que $a = a$ o en la propiedad simétrica si $a = b$ entonces $b = a$.

El pensamiento algebraico está constituido por letras, entonces hay que tratar de incorporarlas, pero no le decimos a los estudiantes que esto es álgebra.

Observamos en este episodio como las maestras manifiestan sus concepciones acerca de cómo podría promoverse el pensamiento algebraico en la educación básica primaria, cada una pensando desde su experiencia y las tareas que podrían promoverlo según el nivel de sus estudiantes. Es por ello que en cada una se nota una concepción particular y nos remite a pensar que “debido a sus concepciones, es decir, a la historia personal de cada profesor,

su experiencia, su forma de pensar, su posición frente a su práctica docente, se posibilita o dificulta el acceso al conocimiento” (Ponte, 1994, p. 195).

Se quiere entonces, para el interés del estudio, denotar los aspectos que se pueden analizar desde este episodio y para cada maestra, es así como en la tarea propuesta por la maestra Luna se puede dilucidar que existe un interés particular por continuar relacionando el pensamiento numérico con el algebraico desde aspectos como los signos, la abstracción y las cantidades que no conocemos y debemos hallar.

Así mismo cuando en su lenguaje verbal refiere el trabajo con incógnitas y luego lo plasma como posibilidad de promover pensamiento algebraico podría considerarse como un indicio del sentido de la indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro (Radford, 2010)) aparecen en su discurso como parte de sus concepciones y una posible movilización que se está generando en ella para desarrollar pensamiento algebraico temprano.

Por otra parte, la maestra Estrella refiere las tareas de secuencias como una posibilidad de promover pensamiento algebraico en los niños, identificando en esta concepción un posible pensamiento contextual (Radford, 2010) donde a través de frases clave, la maestra enuncia que en esta tarea el estudiante deberá “seguir patrones” y con ello desarrollar

pensamiento algebraico desde el nivel de preescolar; es interesante cuando la maestra, después de plantear esta tarea en el colectivo, expresa que los maestros muchas veces no somos conscientes de lo que enseñamos o de la intencionalidad con la que colocamos una tarea, y por lo tanto, hacerlo sería una reflexión para el maestro que le permitiría desarrollar otro tipo de pensamiento en el estudiante además del numérico.

Finalmente nos encontramos con el enunciado propuesto por la maestra Sol al referir que el pensamiento algebraico está determinado por letras y en esta medida al sustituir los números por estas, podríamos empezar a desarrollar pensamiento algebraico sin que los estudiantes se den cuenta de ello, y con esta idea, persistente en el análisis de sus interacciones, pareciese prevalecer la concepción de que cuando se opera con letras ya puede existir un pensamiento algebraico; es así como esta concepción se observó en el desarrollo de los encuentros de formación con la maestra, teniendo en cuenta los planteamientos de Radford (2010b) cuando insiste en que estos signos pueden ser letras, pero no necesariamente, es hacer álgebra, en esta línea, también se analizó si con las tareas propuestas esta concepción permanecía o se movilizaba en la docente.

Para concluir este grupo de enfoque y retomando enunciados de las maestras donde expresaban que la formación en el maestro es importante para promover el pensamiento algebraico, se indagó en ellas, sobre la pregunta cinco de la entrevista, respecto a si creían que el conocimiento disciplinar y didáctico del maestro era necesario para desarrollar pensamiento algebraico temprano, a lo cual las maestras se toman un momento para pensar

y luego interactúan desde sus pensamientos y reflexiones a través de episodios como el siguiente:

Maestra Luna: Creo que sí, debe haber un proceso de apropiación, de indagación y exploración de cómo voy a llevar ese conocimiento, porque no es fácil, pero somos los maestros quienes podemos promoverlo.

Maestra Sol: Si nosotros no tenemos el conocimiento disciplinar para enseñar pensamiento algebraico, será muy difícil que los estudiantes aprendan de manera adecuada (...) es más creo que ni podrían hacerlo porque ellos aprenden lo que sus maestros le enseñan.

Maestra Luna: muchas veces los maestros tenemos dificultades y eso es lo que les transmitimos.

Maestra Estrella: Creo que realizamos actividades de tipo algebraico, pero no somos conscientes de ello, por eso debemos formarnos, para saber que desarrollar en los niños y sobre todo como mencioné hace un rato saber que intencionalidad darles a las actividades que planteemos para que tenga un propósito.

Maestra Sol: Es diferente cuando uno orienta el área para la cual fue formado, pero en el modelo de escuela nueva nos tocan todas y hay que formarnos si queremos hacer algo bueno por los estudiantes.

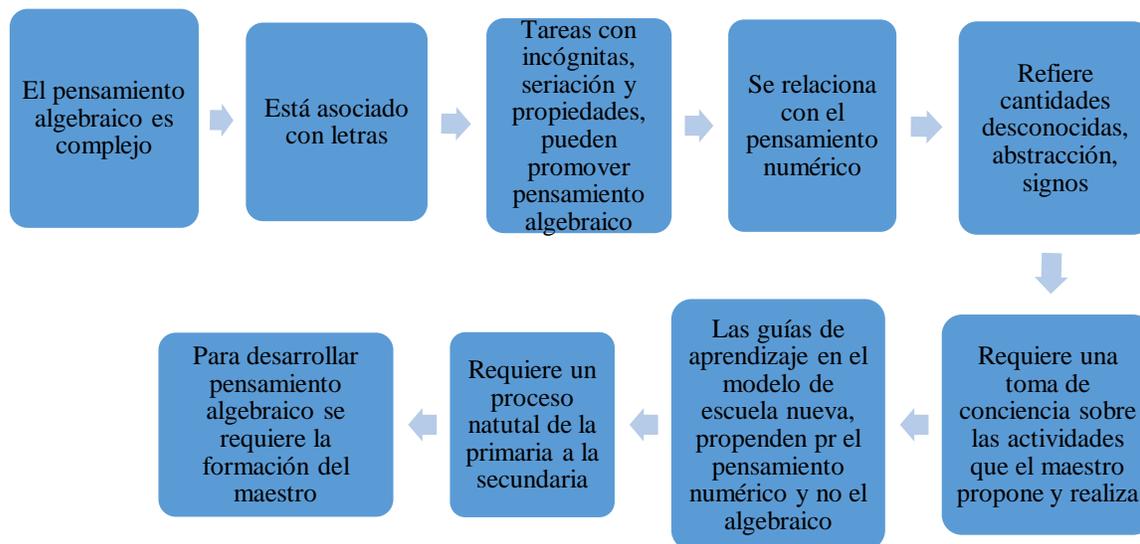
Al analizar estas concepciones expresadas por las maestras se puede inferir, como coinciden en afirmar la importancia que reviste el conocimiento disciplinar en el maestro, para promover el pensamiento algebraico temprano, pero más allá de este la necesidad de

formación, sobre todo para quienes no son licenciados en el área de matemáticas, puesto que desde el modelo de escuela nueva y la estrategia del aula multigrado, se deben atender varios grados con todas las áreas y se requiere en ello, formación para dar lo mejor a los estudiantes, en este caso particular para promover pensamiento algebraico temprano, pues de lo contrario serán sus errores los que se transmitirán a sus estudiantes; es por ello que coincidimos desde estas concepciones con Ponte (2006) cuando plantea que iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años, exige una profundización de la comprensión del álgebra, de lo que esta envuelve y de donde está presente y, también, de sus relaciones con otros temas matemáticos, para fomentar el desarrollo y el establecimiento de conexiones del álgebra con toda la matemática.

Para finalizar el análisis de este encuentro sobre las unidades de análisis expuestas en los episodios, se enuncian las categorías que emergen de éstas, las cuales desde las interacciones de las maestras a través de ideas, pensamientos y reflexiones evidencian elementos asociados a las concepciones y su posible movilización para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Las ideas que se constituyeron en objeto de reflexión en las unidades de análisis y que posteriormente posibilitaron la proposición de categorías, se presentan mediante el siguiente esquema.

Figura 2

Ideas clave para las unidades de análisis

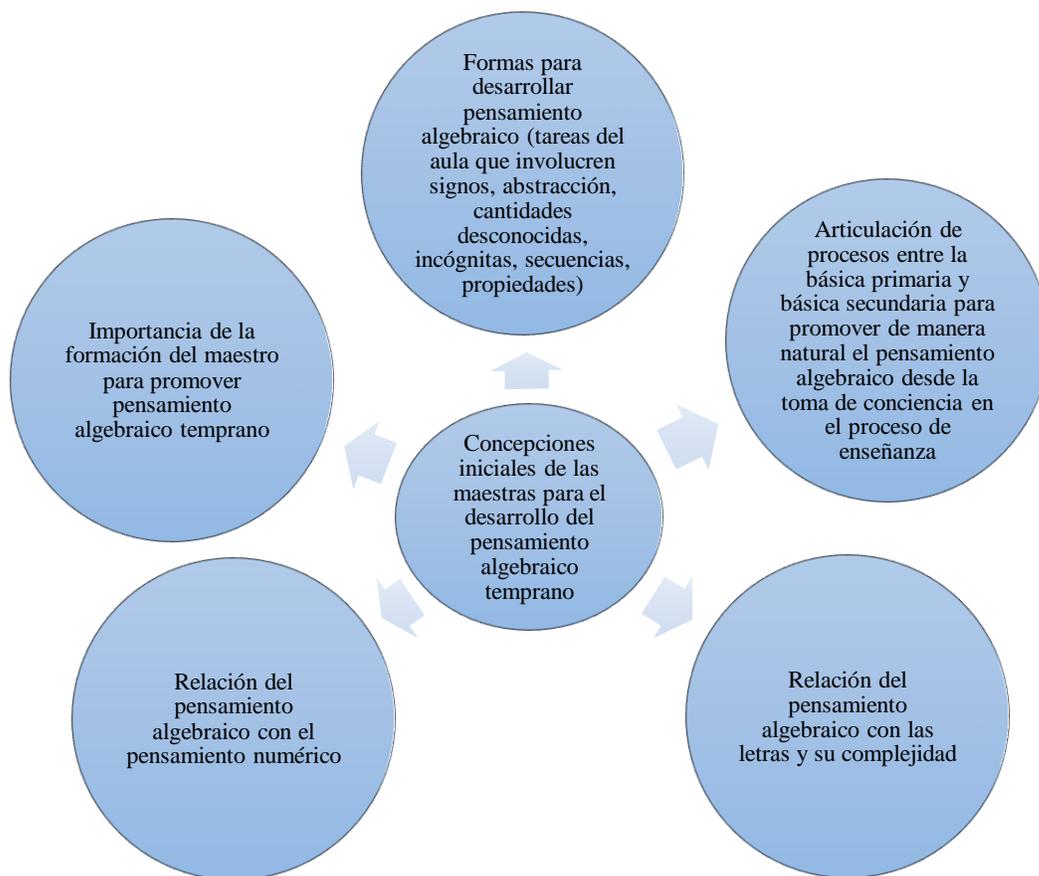


Fuente: elaboración propia, encuentro de formación (2019)

Poniendo en consideración los asuntos hasta ahora expuestos y gracias al proceso de identificación de unidades de análisis, entendidas como episodios, palabras clave, ideas expresadas por las maestras, entre otras evidencias que pudieran manifestar una movilización en relación al pensamiento algebraico temprano, se agruparon unidades que tuvieran características comunes y esta agrupación produjo las categorías presentadas a continuación:

Figura 3.

Concepciones iniciales para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.



Fuente: elaboración propia, categorías emergentes, encuentro de formación (2019)

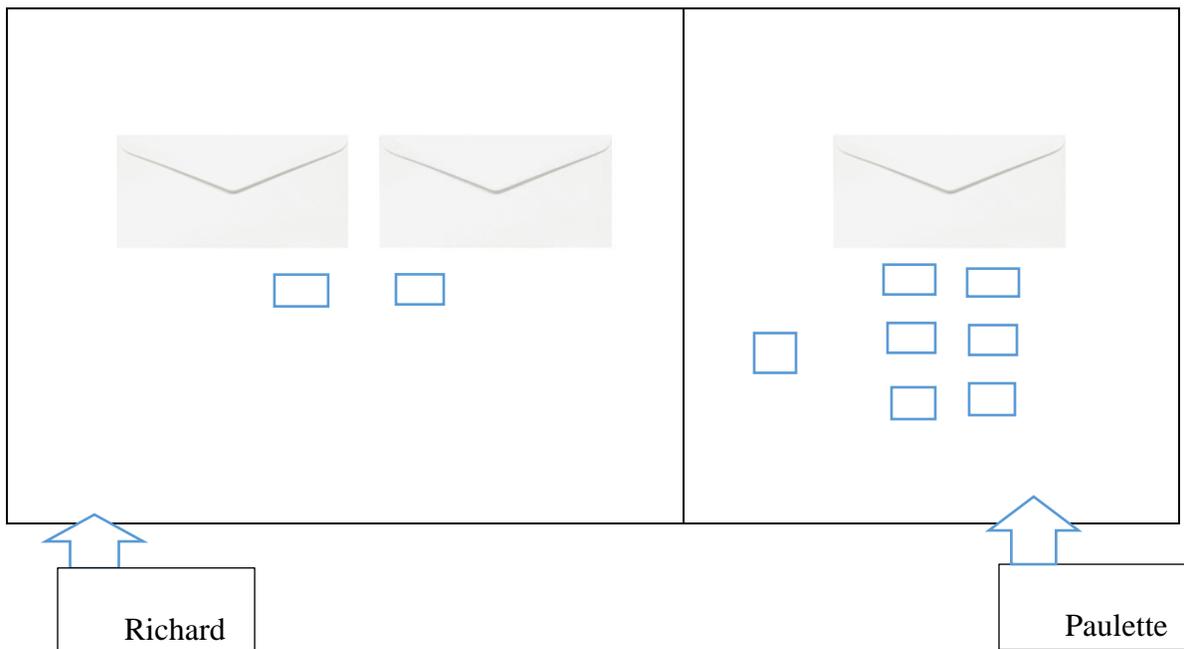
4.2.2. Encuentro 2. Problema de los sobres y mural de situaciones

Después de haber tenido un conversatorio fluido de diálogo, expresión de ideas, pensamientos y concepciones, las maestras se motivaron a continuar en este proceso de compartir desde el colectivo para juntas construir nuevas posibilidades de interacción consigo mismas, con el otro que comparte sus sentires y con el saber matemático que para este caso intenta develar la promoción del pensamiento algebraico en la educación básica primaria.

De esta manera, para continuar, no solo en la búsqueda de explorar, describir e interpretar las concepciones de las maestras, sino también de conservar su motivación en la participación de los encuentros y movilizar estas concepciones desde la objetivación de medios semióticos para desarrollar formas de pensamiento algebraico, se propuso para este encuentro la tarea del *problema de los sobres* propuesto inicialmente por Radford (2002) y retomado por Rojas y Vergel (2018) con el propósito de indicar que es posible pensar algebraicamente aún en ausencia de los signos alfanuméricos del álgebra. En este sentido, se propuso la tarea a las maestras entregándoles una hojita a cada una para que pudiesen, de manera individual, intentar dar respuesta al planteamiento del problema sobre la resolución icónica del problema de los sobres.

Figura 4

Representación icónica del problema de los sobres



Fuente: adaptado de *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula* (p. 88), por Vergel y Rojas, 2018.

Richard y Paulette participan en la rifa de boletas para ingresar a las funciones de un festival de cine. Las boletas están guardadas en sobres, cada uno de los cuales contiene el mismo número de boletas. Paulette quien ya tenía 7 boletas, ganó 1 sobre y Richard, quien ya tenía 2 boletas, ganó 2 sobres. Si ahora los dos quedan con el mismo número de boletas ¿cuántas boletas contiene cada sobre? (Vergel y Rojas, 2018).

Una vez presentado el problema, las maestras se tomaron el tiempo para reflexionar, pensar, operar, deducir, reemplazar, en fin, para realizar todos los procesos matemáticos que les permitiese encontrar el número de tarjetas en cada sobre, teniendo en cuenta las características dadas en el enunciado. Posteriormente se volvió al colectivo para socializar y compartir las respuestas y procedimientos encontradas por cada una, para lo cual se analizaron los episodios presentados, con el fin de explorar las concepciones de cada maestra y sus posibles formas de pensamiento algebraico:

Figura 5

Producción de la maestra Luna sobre el problema de los sobres

SITUACIÓN 2: PROBLEMA DE LOS SOBRES

Representación icónica del problema de los sobres

Richard

Paulette

“Determine el número de tarjetas que hay en cada sobre, sabiendo que ambos jóvenes tienen la misma cantidad de tarjetas, y que en cada sobre el número de tarjetas es el mismo”. (Vergel y Rojas, 2018)

En cada sobre hay 3 tarjetas ya que cada uno tiene la misma cantidad y se hace la distribución de la cantidad de tarjetas dividido la cantidad de sobres. Entre los dos jóvenes tienen 3 sobres cada uno con 3

Fuente: Hoja de trabajo tomada en el encuentro de formación (2019)

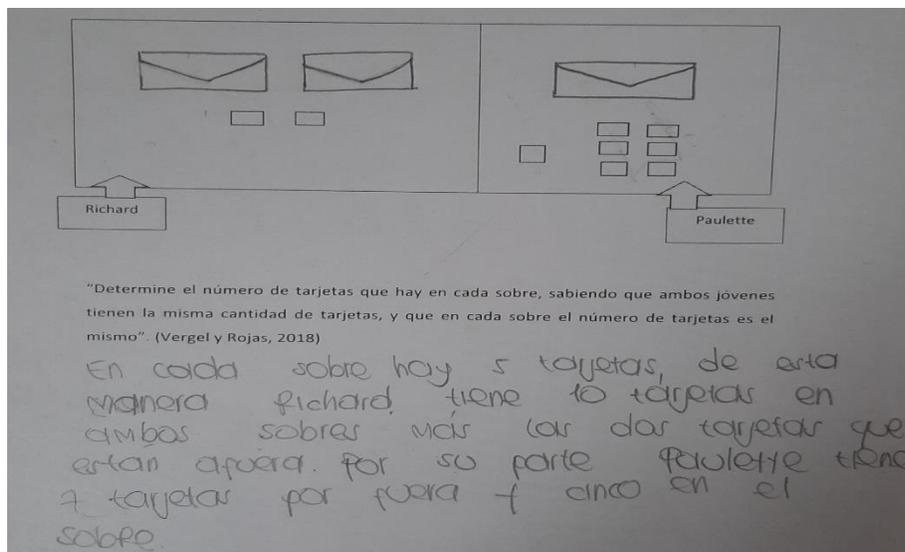
La respuesta de la maestra Luna, causa una interpelación en la maestra Estrella quien le pregunta ¿Luna, y cómo lo hiciste? porque si tú dices que son 3 tarjetas en cada sobre, Richard tendría 6, Paulette 3 y la característica común para ambos jóvenes es que tienen las mismas tarjetas, no se cumpliría entonces la condición. La maestra Luna [...] se devuelve sobre su hoja de trabajo y analizando lo que plantea la maestra Estrella, expresa:

Maestra Luna: (...) hay sí, no se cumpliría el enunciado, solo conté las tarjetas y las repartí en la totalidad de los sobres, pero no tuve en cuenta la condición común para los dos jóvenes, ni que tenían diferencias en los sobres.

En esta expresión de la maestra podemos evidenciar un pensamiento matemático desde el conteo y la asociación, sin embargo, no se denotan formas de pensamiento algebraico.

Figura 6

Producción de la maestra Estrella sobre el problema de los sobres



Fuente: Hoja de trabajo tomada en el encuentro de formación (2019)

La producción de la maestra Estrella deja entrever quizá algún proceso de pensamiento algebraico cuando a través de su lenguaje verbal expresa:

Maestra Estrella: ambos tienen la misma cantidad de tarjetas entonces yo pensé en esa parte “la cantidad de tarjetas que tienen que tener cada uno” que es lo que no conocemos.

La expresión de la maestra refleja el sentido de la indeterminancia, al pensar sobre incógnitas y parámetros, que como característica común dan la pauta para desarrollar el problema, así mismo, la maestra Estrella refiere indicios de pensamiento algebraico contextual cuando usa frases claves en el proceso de abstracción y equivalencias para denotar el procedimiento realizado. Adicionalmente, expresa:

Maestra Estrella: me basé en las tarjetas que había por fuera, Paulette tiene 7 por fuera y Richard tiene 2, entonces ¿Cuánto le hace falta a Richard para tener las 7 de Paulette? Le faltan 5. Si le coloco a Richard 5 tarjetas en un sobre y 5 en el otro más 2 que tiene por fuera son 12, luego a Paulette le coloco la misma cantidad de tarjetas: 5 en el sobre más las 7 que tiene por fuera son 12; así ambos tendrían 12 tarjetas, la misma cantidad solo que Richard con 2 sobres y Paulette con uno.

Posteriormente, se colocó la atención sobre dos hechos que ocurrieron después de la explicación de la maestra Estrella, uno tiene que ver con una interacción entre la Maestra Luna, quien con un gesto quizá de asombro expresó: “¡hay no! a mí me faltó mucha lógica, no era algo tan difícil”, mientras la maestra Estrella le respondió, “simplemente trate como de pensar más allá de lo numérico, desde las ecuaciones para intentar dar una solución”; lo

anterior pudo estar evidenciando un indicio de movilización en sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico.

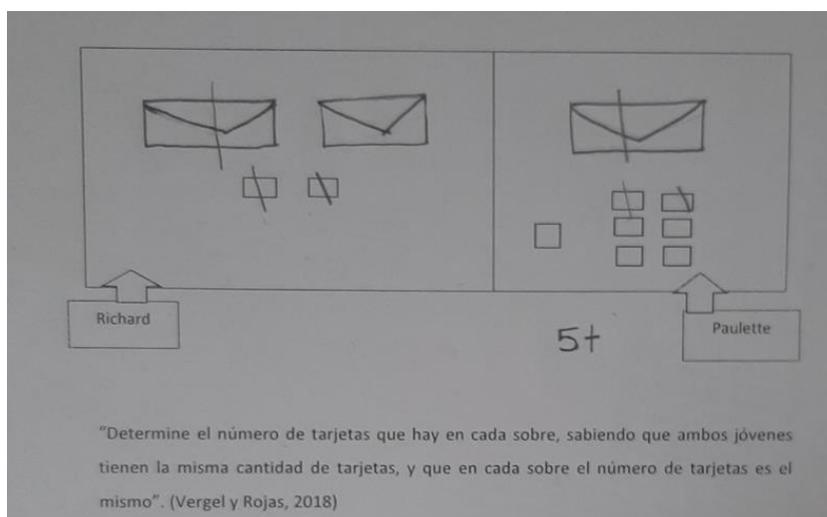
Por otra parte, cuando se le pide a la maestra Sol, contarnos sobre su experiencia, con un gesto que manifestó quizá temor, expreso:

Maestra Sol: no, aún no he encontrado una respuesta, voy a seguir pensando.

Sin embargo, en su hoja de trabajo se observaba que había un procedimiento y se quiso profundizar sobre él, por lo cual se motivó a la maestra Sol, para contarnos lo que llevaba, a lo cual refirió “no es que yo no escribí nada, también me dio 5 como a la maestra Estrella, pero desde algo muy simple, pero bueno, voy a contarles”

Figura 7

Producción de la maestra Sol sobre el problema de los sobres



Fuente: Hoja de trabajo tomada en el encuentro de formación (2019)

Como podemos observar, la producción de la maestra Sol, no era algo simple y esto se le expresó a la maestra, por el contrario, había logrado encontrar una respuesta asertiva, de manera diferente, pero, acercándose a formas de pensamiento algebraico quizá desde una movilización en sus concepciones, desde el pensamiento algebraico factual y contextual, como puede evidenciarse en las palabras y frases con las que refiere su procedimiento:

Maestra Sol: Lo que hice fue un poco de lo que planteaba la maestra Estrella, utilizar equivalencias, cancelé en ambos lados sobres con tarjetas, en la misma cantidad, y de esta manera me quedó un sobre con 5 tarjetas, como cuando queremos despejar el valor de X, en este caso $X = 5$; y si decimos que cada sobre tiene 5 tarjetas, Richard tendría 10 en los sobres más las 2 que están por fuera 12, y Paulette tendría 5 en el sobre más las 7 que están por fuera también 12, se cumpliría la condición de que tengan la misma cantidad.

De esta manera, se propuso a las maestras que tomarán un espacio para reflexionar sobre lo que había sucedido en el la interacción individual y colectiva con el problema de los sobres y al mismo tiempo se les entregó papel de colores, marcadores, lápiz para que a través de palabras o dibujos intentarán plasmar dichas reflexiones, al mismo tiempo que retomando las reflexiones del primer encuentro, pudiesen pensar nuevamente sobre preguntas como: ¿Pueden los maestros promover pensamiento algebraico en primaria? ¿Pueden los estudiantes de básica primaria desarrollar pensamiento algebraico? ¿Qué cree usted que es pensamiento aritmético? ¿Qué cree usted que es pensamiento algebraico?

Figura 8

Mural de situaciones para la reflexión



Fuente: personal, encuentro de formación (2019)

En el mural de situaciones se pudieron reflejar las concepciones de las maestras suscitadas durante el primer y segundo encuentro, producto de las interacciones individuales y colectivas a través de sus ideas, experiencias, pensamientos y concepciones, entre ellas se prestó especial atención sobre el siguiente episodio, originado cuando se hacia el compartir del mural de situaciones:

Maestra Estrella: el problema de los sobres que realizamos hoy, me llamó mucho la atención, quisiera llevarlo al aula con material concreto y mirar cómo mis niños lo solucionan y qué tipo de pensamiento puede surgir en ellos.

Maestra Luna: también creo que sería una buena tarea para llevar a cabo con nuestros estudiantes, hoy nos dimos cuenta que los maestros podemos enfrentarnos con actividades que promueven pensamiento algebraico, sin pensar que este es algo complejo, entonces también podemos incluirlo en nuestra práctica de enseñanza con los estudiantes y según nuestro conocimiento y la manera como lo llevemos al aula, los estudiantes podrán desarrollarlo.

Maestra Estrella: creo que para llegar a un nivel de desarrollo algebraico en el grado octavo tiene que haber una preparación previa y esta se puede hacer en primaria, todo depende de los objetivos claros y conscientes que tenga el maestro sobre la actividad para promoverla, y para ello necesitamos formación.

Maestra Sol: creo que todo depende de las actividades que cómo maestros llevemos al aula y por eso son importantes estos procesos de formación, nos hacemos conscientes de lo que vamos a llevar al aula.

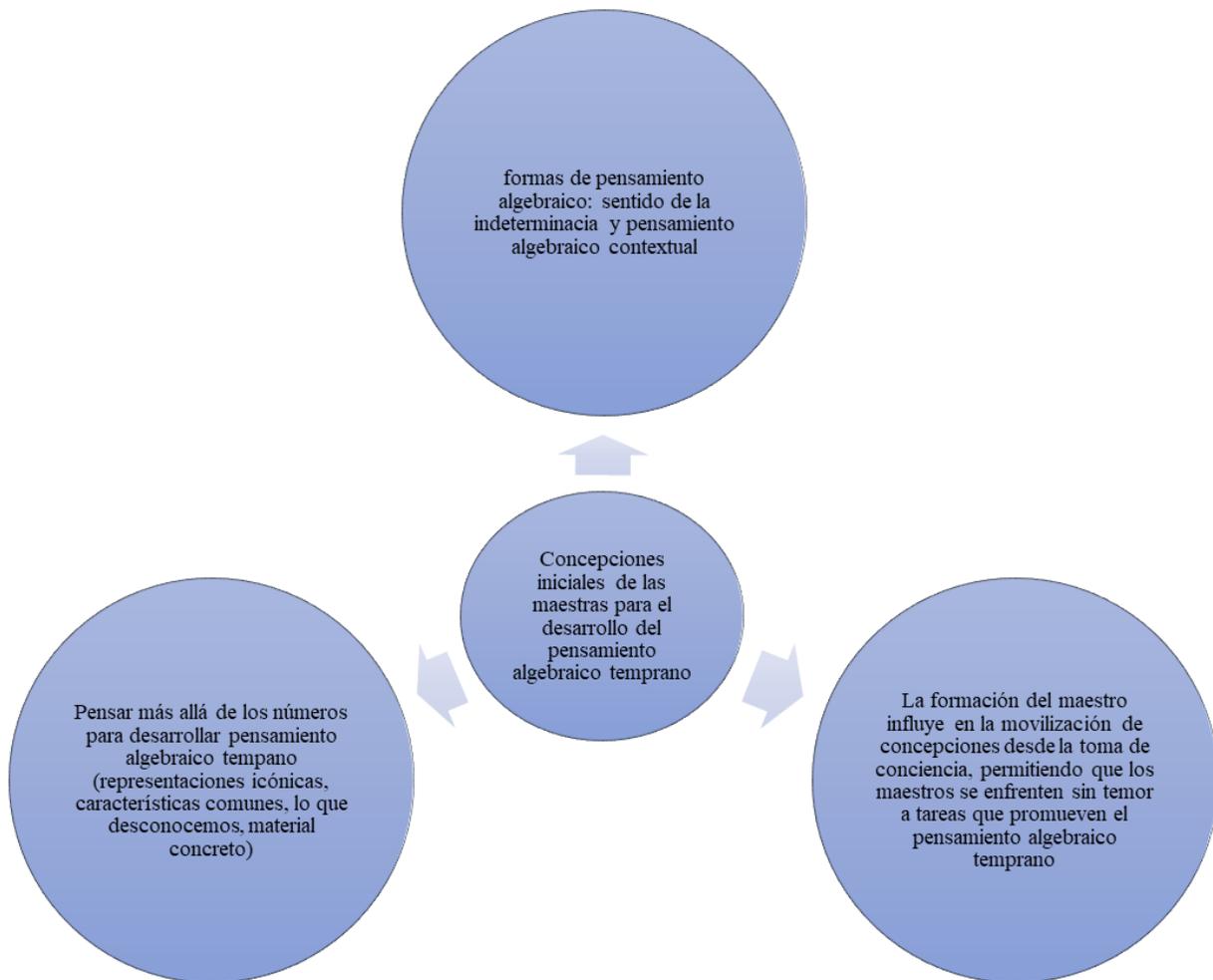
De este episodio podemos resaltar cómo las maestras evidencian transformaciones en sus concepciones, cuando en un primer mural de situaciones planteaban que el desarrollo del pensamiento algebraico podría ser algo complejo; sin embargo, con la interacción y compartir de experiencias sus concepciones estaban denotando movilización, aquella que las llevaban a pensar en el interés por promover actividades en el aula para el desarrollo del

pensamiento algebraico temprano, desde la toma de conciencia por lo que se hace y los objetivos claros que se plantean al realizar una actividad. Así mismo, se colocó el foco de atención sobre la concepción común, en la necesidad de formación para poder promover el pensamiento algebraico, se infiere con ello que quizá las maestras están movilizándolo su concepción sobre las múltiples razones, que desde el contexto de la escuela, no permitirían llevar este tipo de pensamiento al aula y pensar (Agudelo, 2005) que un factor determinante puede estar ser sus concepciones, la manera de entender el álgebra y la introducción de un cambio en su enseñanza.

Para finalizar la descripción de este encuentro a partir de las unidades de análisis que se suscitaron, se plantean a continuación las categorías emergentes, que, desde las reflexiones y concepciones obtenidas en el problema de los sobres y el mural de situaciones, permiten continuar en la búsqueda de una respuesta para la pregunta de investigación y el alcance del objetivo planteado.

Figura 9.

Concepciones iniciales de las maestras para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, problema de los sobres.



Fuente: elaboración propia, categorías emergentes, encuentro de formación (2019)

4.2.3. Encuentro 3. Tarea: dobleces de papel y proceso de generalización

La tarea sobre dobleces de papel fue retomada de Vergel y Rojas (2018) quienes a través de una investigación con estudiantes proponen este tipo de actividades para orientar un trabajo que propenda por la búsqueda de patrones y por observar procesos de generalización y formas de pensamiento algebraico. Es así como, dentro de esta investigación la tarea fue pensada como la posibilidad de poner a las maestras en un escenario mediado por material concreto, para que a través de su desarrollo se propenda por el análisis de la tarea que pudiese desarrollar formas de pensamiento algebraico y la movilización de concepciones que se ha venido suscitando en los encuentros anteriores; esta tarea en particular les permitiría encontrar las primeras respuestas desde la manipulación de una tira de papel, para luego generar un proceso de abstracción que posteriormente conlleve a una generalización de patrones.

En este sentido, se presentó a las maestras la tarea junto con una hoja de trabajo donde podían encontrar el enunciado y un cuadro donde se registraría el desarrollo del proceso y las respuestas dadas, con tres columnas que contenían los datos sobre los cuales interesaba que las maestras encontraran las relaciones (acciones, dobleces y partes): tomemos una tira de papel y realicemos la acción de unir los respectivos extremos (doblar por la mitad), realizando el doblez respectivo (una marca sobre la tira de papel); reiterando esta acción, siempre en el mismo sentido; por ejemplo, al realizar dos veces la acción de doblar por la

mitad se obtienen 3 dobleces y a la tercera 5 dobleces. ¿Cuántos dobleces se obtienen al realizar 5 veces la misma acción? ¿7 veces? ¿15 veces? ¿100 veces? ¿Existe una forma de expresar el número de dobleces obtenidos al realizar un número cualquiera de acciones?

Figura 10.

Trabajo de las maestras sobre la tarea de dobleces de papel



Fuente: personal, encuentro de formación (2019)

Al presentar la tarea, se observó motivación en las maestras, quienes ya en el segundo encuentro habían manifestado la importancia de trabajar con material concreto y la posibilidad de promover pensamiento algebraico en sus aulas a través de este; el desarrollo de la tarea inició de forma individual, siguiendo las instrucciones dadas con la tira de papel y registrando en la tabla los datos obtenidos hasta la tercera posición, sin embargo, cuando se enfrentaron a la pregunta ¿Cuántos dobleces se obtienen al realizar 5 veces la misma acción? ¿7 veces? ¿15 veces? ¿100 veces? el trabajo parecía, por sus gestos, ser un poco más complejo, así que decidieron seguir utilizando la tira de papel para encontrar los dobleces de la cuarta acción y poder determinar los de la quinta, sin embargo, cuando se preguntó por la séptima acción, manifestaron que se hacía difícil utilizar el material concreto y entretejieron un diálogo interactivo para encontrar una posible solución, analizando en este compartir de pensamientos, gestos e ideas algunos episodios:

Maestra Estrella: encontramos características comunes, las partes siempre son pares y los
dobleces impares.

Maestra Sol: podríamos decir que a representa los dobleces (impar) y b representa las partes (par). [...]Entonces con a y b podríamos pensar en una expresión algebraica que nos ayude a encontrar los dobleces o partes para cualquier acción.

Maestra Luna: los dobleces son un número anterior a las partes

Maestra Estrella: si, los dobleces con relación a las partes son uno menos y viceversa, las partes con relación a lo dobleces son uno más.

Maestra Sol: ahí es donde juegan las relaciones de partes y dobleces, por ejemplo, de las partes a los dobleces menos 1, pero de los dobleces a las partes más 1.

La diferencia siempre va a ser 1

También podríamos mirar que en relación a los dobleces con la parte anterior hay una relación.

Por ejemplo, (...la maestra señala con el lápiz) aquí tenemos $15 - 8 = 7$, $7 - 4 = 3$, $3 - 2 = 1$

En este episodio se pudo notar como las maestras analizan los datos obtenidos e identifican patrones en el comportamiento de los resultados, estableciendo relaciones y características comunes como indicios de una posible manifestación del pensamiento algebraico. Así mismo, se centra la atención sobre la maestra Sol, quien a la luz de Radford (2010a) moviliza medios semióticos como los gestos, la actividad perceptual y las palabras para desarrollar pensamiento algebraico factual, señalando con el lápiz las relaciones encontradas entre los dobleces y las partes “aquí tenemos $15 - 8 = 7$, $7 - 4 = 3$, $3 - 2 = 1$ ”. De manera similar, se objetivan medios semióticos como las “frases clave” cuando hace deducciones para establecer los dobleces en determinada acción, por ejemplo, cuando expresa “la diferencia siempre va a ser 1”.

Figura 11.

Producción de la maestra Sol indicando la relación entre los dobleces y las partes

DOBLES DE PAPEL		
ACCIONES	DOBLES	PARTES
1	1	2
2	3	4
3	7	8
4	15	16

Fuente: personal, encuentro de formación (2019)

Las maestras continuaban en el proceso de análisis, reflexión, abstracción, deducción, para tratar de encontrar el número de dobleces en cualquier acción, y aunque reconocen en el material concreto una importante herramienta de aprendizaje, lo dejan de lado, porque se hace difícil manipularlo, por ejemplo, para realizar 30 acciones sobre él, así que desde el diálogo y la interacción de ideas manifiestan que deben ir más allá de las relaciones encontradas para hallar una posible solución; desde allí entonces se rescatan episodios que

centran la atención sobre la manera como las maestras pueden desarrollar formas de pensamiento algebraico.

Maestra Luna: pero y ¿las acciones? como las relacionamos si eso es lo que desconocemos, el número de dobleces para cualquier acción. No podríamos decir que son múltiplos, porque entonces el 5 y el 32 no cumplirían, ni el 3 con el 8.

Maestra Estrella: el número de partes también se va duplicando (...señala con el lápiz) $2 + 2 = 4$, $4 + 4 = 8$, $8 + 8 = 16$

Maestra Luna: (...) ¡ah! ya sé [...] podemos encontrar potencias entre las partes y las acciones: 2^2 , 2^3 , 2^4 porque: $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$.

Maestra investigadora: podríamos decir que son las potencias ¿de qué?

Maestra Estrella: serían las potencias de 2, en la relación de partes y acciones

Maestra investigadora: según esa característica común de relación que acaban de encontrar entre las partes y las acciones, ¿qué relación hay con los dobleces?, ¿cómo encontrar con una acción cualquiera, el número de dobleces?

(...) las maestras se miran entre sí y manifiesta un gesto de risa, quizá en expresión de tensión al encontrar una relación importante con las acciones, pero no una respuesta para la pregunta sobre los dobleces.

Maestra Luna: podríamos utilizar una ecuación lineal

Maestra Estrella: despejemos X

Figura 12.

Producción de la maestra Estrella intentando despejar x para hallar el número de dobleces en cualquier acción.

Balanza²
DOBLECES DE PAPEL
d?

ACCIONES	DOBLECES	PARTES
1	1	2
2	3	4
3	7	8
4	15	16
5	31	32
6	63	
7	127	
16	65 535	65 536

$$\begin{array}{r} 4 \times 15 \\ 90 \times x \end{array}$$

$$x = \frac{90 \times 15}{4} = 337$$

$$7(2) + 1 = 15$$

$$15(2) + 1 = 31$$

$$31(2) + 1 = 63$$

$$63(2) + 1 = 127$$

$$x = \frac{5 \times 15}{4}$$

$$32767(2) + 1$$

Fuente: Hoja de trabajo, encuentro de formación (2019)

Maestra Luna: hagámoslo con la acción 5 y 6 a ver si nos da, comprobemos.

Maestra Estrella: [...] no, no sirve, da 337 (...)

Maestra Sol: miremos entonces sobre las relaciones que hemos encontrado, yo encontré otra, (... señala con el lápiz) si observamos toda va doble y tiene una relación como lo decíamos ahora de 1, no solo las partes sino también los dobleces que van creciendo la mitad de sí mismo, más uno,

por ejemplo: 3 dobles $+3 = 6$, $6 + 1 = 7$ luego, $7 + 7 = 14$, $14 + 1 = 15$ y así se va cumpliendo la condición para cada doblez.

Maestra Luna: entonces podríamos pensar en algo que represente el doble, puede ser 2.

Maestra Sol: y podríamos hacer algo con lo que Estrella planteaba ahora de la X, puede ser (2

X) – 1

ser (2 X) – 1

2 representaría las partes que siempre son el doble.

X la acción que puede ser cualquiera.

– 1 para obtener el número de dobles.

Maestra Luna: miremos [...] no daría, si la aplicamos con la acción 4 daría 7, y ese no es el número de dobles.

[...] y que tal si utilizamos la relación que expresaba ahorita de las partes con las acciones en potencia, 2 indicaría el doble y la potencia, la acción como es el valor que no conocemos podemos representarlo con la x que dice Estrella, menos 1 para que nos den los dobles. Quedaría $2^x - 1$.

Maestra Sol: Sol: miremos si nos da con la acción 7

$2^7 = 128 - 1 = 127$ entonces 128 las partes y 127 los dobles, si da (...)

Maestra Luna: nos cumple la propiedad que hemos estado enunciando, ya uno le da entonces la condición y así podríamos encontrar en cualquier acción no solo el número de dobles sino de partes por las potencias.

La interacción en el colectivo de maestras nos permite evidenciar como a través de compartir ideas, pensamientos, expresiones, comprensiones, se pueden movilizar concepciones que conllevan al desarrollo de un fenómeno; para el caso de este episodio se puede apreciar como el compartir de deducciones, análisis, observación, lógica, procesos de ensayo – error, posibilitan encontrar una solución para un planteamiento dado y en su proceso evidenciar posibles formas de pensamiento algebraico en las maestras. Es así, como al retomar la actividad perceptual, los movimientos, los gestos en la maestra Estrella, para señalar con su lápiz, en la hoja de trabajo “el número de partes también se va duplicando, $2 + 2 = 4$, $4 + 4 = 8$, $8 + 8 = 16$, se puede inferir, según Radford (2010), como diferentes medios semióticos son objetivados para desarrollar un pensamiento algebraico factual.

Así mismo, al dar una mirada sobre la maestra Luna, observamos que a partir de la deducción expresada por la maestra Estrella, logra conjeturar a través de un gesto armónico, una característica común que genera relación entre las partes y las acciones, lo cual podría ser importante para encontrar el número de dobleces en cualquier acción, “podemos encontrar potencias entre las partes y las acciones: $2^2, 2^3, 2^4$ ”, expresa la Maestra Luna y con ello una toma de conciencia que podría considerarse como una forma de pensamiento contextual, en tanto, está trascendiendo de lo concreto hacia inferencias que la acercan a una generalización algebraica.

Por otra parte, formas de pensamiento algebraico factual siguen denotándose en las maestras a través de medios semióticos como sus gestos, movimientos y lenguaje natural para expresar las relaciones encontradas, es el caso de la maestra Sol, quien expresa una nueva característica y la señala con su lápiz a las compañeras “si observamos toda va doble y tiene una relación como lo decíamos ahora de 1, no solo las partes sino también los dobleces que van creciendo la mitad de sí mismo, más uno, por ejemplo: 3 dobleces $+3 = 6$, $6 + 1 = 7$ luego, $7 + 7 = 14$, $14 + 1 = 15$, y así se va cumpliendo la condición para cada doblez”, emergiendo entonces no solo un pensamiento algebraico factual, sino también contextual en tanto la maestra Sol, logra expresar frases clave donde la analiticidad se hace presente al reconocer el carácter operatorio de los objetos.

La tarea de los dobleces de papel y procesos de generalización fue un acercamiento de tiempo, sensaciones en las maestras, quienes en ocasiones expresaban gestos quizá de confusión, desesperación, silencios al tratar de observar, analizar y encontrar una respuesta asertiva, sin embargo también se dilucidó como la interacción, sus voces, la idea que se fortalecía con el pensamiento de la otra compañera, la operatividad que se hacía consciente, los medios semióticos que se movilizaban no solo para entretener resultados sino para suscitar formas de pensamiento algebraico. Muestra de ello, es el tratamiento final de la tarea en las maestras Luna y Sol, quienes, a través de la interacción colectiva llegaron a las siguientes propuestas de solución: “podríamos tomar el 2 y hacer algo con lo que Estrella

planteaba ahora de la X, puede ser $(2 \cdot X) - 1$, así 2 representaría las partes que siempre son el doble, X la acción que puede ser cualquiera y $- 1$ para obtener el número de dobleces” las frases clave en este caso, según los planteamientos de Radford (2010), eran representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra, lo que evidenciaba un pensamiento algebraico simbólico en la maestra.

A partir de esta caracterización, se pone la mirada sobre el caso de la maestra Luna, quien después de aducir que aún no había una respuesta acertada, evidenciado en el ensayo – error que practica con la acción 4, propone la siguiente solución “quedaría $2^x - 1$ ”, explicándolo desde su lenguaje natural, gestos y actividad perceptual, lo que había planteado: “y que tal si utilizamos la relación que expresaba ahorita de las partes con las acciones en potencia, 2 indicaría el doble y la potencia, la acción como es el valor que no conocemos, podemos representarlo con la x que dice Estrella, menos 1 para que nos den los dobleces”; la maestra Luna, a través de sus ideas, observaciones, análisis personal y aquel que se entretejió a través del diálogo conjunto y procedimientos realizados con sus compañeras, ha puesto de manifiesto el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica (Radford, 2010) para llegar a un pensamiento algebraico simbólico que posiblemente ha movilizado concepciones sobre la posibilidad de promover pensamiento algebraico temprano.

Finalmente, después de la tarea y todas las reflexiones que en su desarrollo suscitaron formas de pensamiento algebraico temprano, las maestras participaron con sus reflexiones en el mural de situaciones, como la posibilidad de continuar interactuando en torno al encuentro, es así como, sus ideas, pensamientos y experiencias compartidas seguían dotándose de sentido, para dilucidar que la tarea sobre dobleces de papel y procesos de generalización había logrado movilizar concepciones en las maestras a través de medios semióticos para el desarrollo del pensamiento algebraico y su promoción en la aulas de clase. El siguiente episodio muestra algunas de sus reflexiones:

Maestra Estrella: esta tarea la podríamos aplicar con los niños, y podríamos con ello, desde el material concreto, generar un acercamiento al pensamiento algebraico, como maestros nos complicamos y eso es lo que hace que el álgebra también sea compleja.

Maestra Luna: podríamos desarrollar pensamiento algebraico aún desde lo numérico, desde la potenciación, porque trabajamos sobre algo que no conocíamos y determinamos una fórmula para hallar los dobleces y partes de cualquier acción, entonces no es que primero tenga que ser lo numérico y luego lo algebraico.

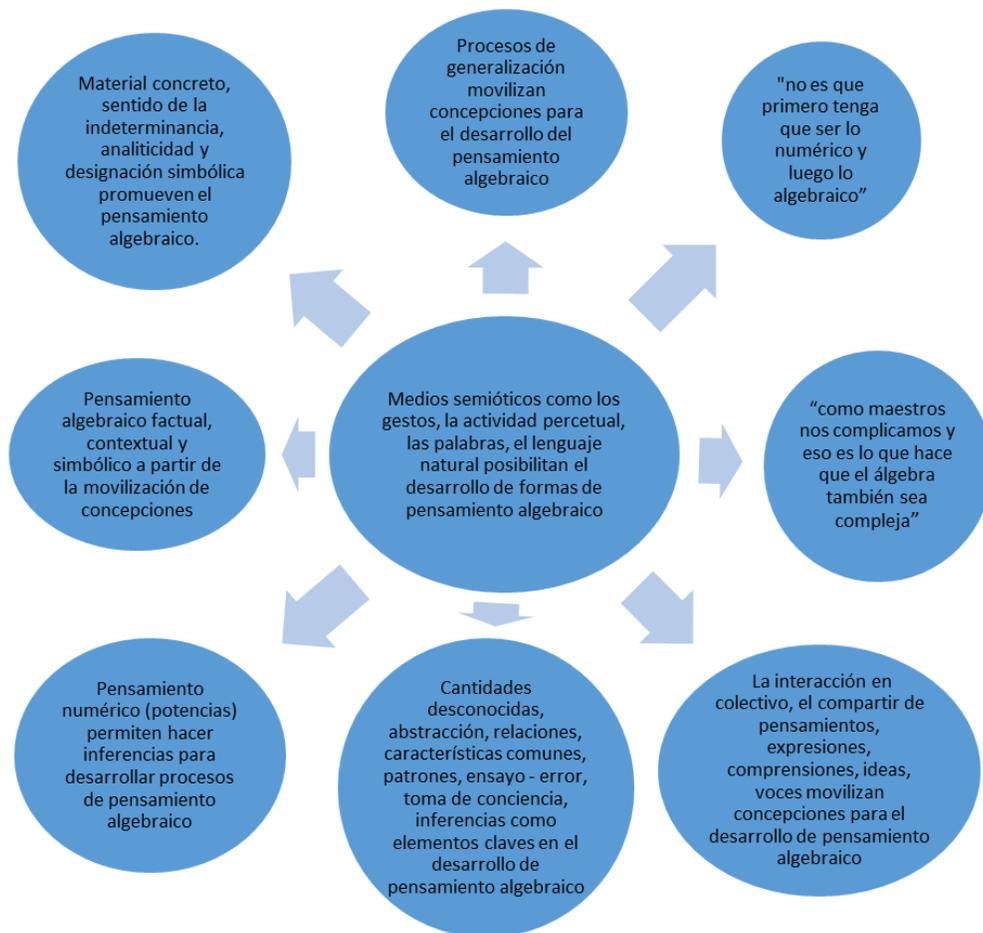
Maestra Sol: esto le ayudaría a los niños a tener mejores resultados en su aprendizaje, hasta en pruebas saber porque, este tipo de ejercicios surgen y nosotros en ocasiones no pasamos de lo numérico, operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división y resolución de problemas, en grados más avanzados como cuarto y quinto empezamos a mirar fraccionarios, potencias, pero aislados tratando de seguir fortaleciendo las operaciones, no de generar otro tipo de pensamiento en los estudiantes.

Estas reflexiones permiten dar cuenta de un proceso de movilización en las concepciones de las maestras, quienes al darle sentido a la tarea que realizaron y los procesos que en ella vivenciaron, durante el compartir en colectivo, logran proponerla como una posibilidad de actividad en el aula y tomar conciencia de que se puede generar pensamiento algebraico en los niños desde el material concreto y el pensamiento numérico. Así mismo, expresiones como: “no es que primero tenga que ser lo numérico y luego lo algebraico”, “como maestros nos complicamos y eso es lo que hace que el álgebra también sea compleja” permiten trascender las concepciones iniciales sobre el álgebra (Vergel 2016b) donde se ha considerado que primero debe tenerse bases sólidas en la aritmética para luego entender el álgebra y se transforma la concepción sobre la mirada de sí mismo en el maestro; en este sentido, para Agudelo, 2005, cuando se pone de manifiesto cómo son las concepciones y la manera de actuar del maestro, se puede evidenciar lo que hace complejo o propicio el desarrollo del pensamiento algebraico.

De esta manera, este encuentro de formación denotó unidades de análisis, mediante los episodios, palabras clave, ideas expresadas por las maestras, entre otras evidencias que manifestaron una movilización del pensamiento algebraico temprano, las cuales se agruparon mediante características comunes para suscitar las categorías presentadas a continuación:

Figura 13.

Categorías emergentes, encuentro de formación dobles de papel y procesos de generalización.



Fuente: elaboración propia, categorías emergentes, encuentro de formación (2019)

4.2.4. Encuentro 4. Tarea: secuencias figurales apoyadas por representación tabular y mural de situaciones

En este encuentro de formación se desarrollaron 2 tareas con las maestras sobre secuencias figurales, una de ellas retomada de Vergel y Rojas (2018) y otra de los Derechos Básicos de Aprendizaje en matemáticas, versión 2 (2016) estas tareas fueron seleccionadas en el marco de esta investigación con el propósito de colocar a las maestras en un escenario de identificación de patrones, relaciones, características comunes que les permitiese seguir movilizando concepciones a partir de medios semióticos para el desarrollo de formas de pensamiento algebraico, en este caso a través de secuencias.

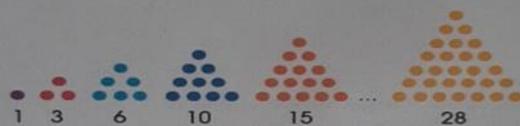
Cada maestra recibió una hoja con la primera tarea: Secuencias figurales con situaciones de variación, en ella se describían las características de la secuencia, según el número de puntos en cada posición, los cuales debían registrar en una tabla, como herramienta que posteriormente les permitiría junto a la observación del gráfico hallar relaciones, deducciones, y hacer inferencias para dar respuestas a los planteamientos propuestos y al mismo tiempo dilucidar en el proceso de solución formas de pensamiento algebraico.

Figura 14.

Tarea sobre secuencias figurales con representación tabular y situaciones de variación.

4. Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación.

El gráfico muestra arreglos triangulares de puntos. En la primera posición se tiene 1 punto, en la segunda 3 puntos, en la tercera 6 puntos, en la cuarta 10 puntos. Registra (en su orden) el número de puntos en cada posición: 2, 3, 4, 5, 6, 7



Posición	Número de puntos	Descripción del proceso para obtener el siguiente arreglo puntual
Primera	1	Se dibuja un punto
Segunda	3	Al punto anterior se le agregan dos puntos.
Tercera	6	
Cuarta		
Quinta		
Octava		
Novena		

Explica cómo encontrar el número de puntos en una posición cualquiera. Justifica si existe un arreglo triangular que tenga 35 puntos o 38 puntos. 10, 15, 28

Fuente: adaptado de Derechos Básico de Aprendizaje, (p.27), por la Universidad de Antioquia y el Ministerio de Educación Nacional V.2 (2016)

Las maestras inician de manera individual el desarrollo de la tarea, analizando las características que indicaba el arreglo triangular de puntos según la posición; registrar en la tabla las posiciones cuarta y quinta se convirtió en un proceso de observación que dedujeron de los gráficos y el apoyo numérico que en él se encontraba, sin embargo, al

pasar de manera abrupta a la octava posición, parece ser que se convirtió en un proceso que requería continuar pensando en la solución asertiva, ello reflejado en expresiones de las maestras como “aquí llegamos al problema”, sin embargo de manera individual continuaron realizando procesos de conteo, observación, deducción y análisis, reflejado en el siguiente episodio que permeó una interacción y reflexión desde el colectivo:

Maestra Estrella: ya encontré la octava posición, me da 36

Maestra Luna: ¿cómo la encontraste?

Maestra Estrella: (...) voy a explicarles: la descripción del proceso va ascendente, pero de 1 en 1, entonces se dice que se tiene 1 punto en la primera posición, en la segunda 3 puntos, eso quiere decir que se le agregaron 2 a la posición anterior, y en la tercera 6 puntos eso quiere decir que se le agregaron 3 puntos, en la cuarta entonces sería 10, porque tenemos 6 y se le agrega 1 más de la anterior que eran 3, ósea 4, después sería 5 más y 6 más....

¿sí me hago entender? [...] Se va aumentando de uno en uno.

Partimos en la primera posición de un puntico a ese luego se le agregan 2, al siguiente 3, al siguiente se le agregan 4 y luego 5....

Maestra Luna: a mí me dio 36 en la octava, pero es que (...sonríe) yo dibuje.

Maestra Sol: pero (...) ¿cómo saber que dibujar?

Maestra Luna: (... sonríe) esta fue la relación que yo encontré para dibujar (...señala con el lápiz) si observamos y contamos cada posición tiene el mismo número de círculos en la base, que lo que está indicando la posición, aquí, por ejemplo, la posición 2 tiene 2 puntos de base, la posición 3, tiene también 3 de base, la posición 4 y así sucesivamente. Luego, podemos observar que van descendiendo el número de círculos, ejemplo la posición 4 tiene base 4, luego hacia arriba tiene 3, 2, 1. Así mismo, la posición 5 tiene 5 de base, y luego hacia arriba va descendiendo, 4, 3, 2, 1.

Teniendo en cuenta estas relaciones comunes para todas las posiciones, si quiero encontrar la posición octava. Deberá entonces tener 8 de base y hacia arriba descender, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. (...) teniendo en cuenta también que los círculos de los lados, los que conforman el triángulo deben también permanecer con el mismo número de la base, en este caso 8. [...] si lo observamos la posición 3 tiene no solo 3 de base, sino que tomando esta hacia arriba por sus lados también da 3 y así con las demás.

Figura 15.

Producción de la maestra Luna, demostrando una inferencia sobre la identificación de patrones comunes a través de una representación gráfica

4. Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación.

El gráfico muestra arreglos triangulares de puntos. En la primera posición se tiene 1 punto, en la segunda 3 puntos, en la tercera 6 puntos, en la cuarta 10 puntos. Registra (en su orden) el número de puntos en cada posición:

Posición	Número de puntos	Descripción del proceso para obtener el siguiente arreglo puntual
Primera	1	Se dibuja un punto
Segunda	3	Al punto anterior se le agregan dos puntos.
Tercera	6	Al punto anterior se agregan tres puntos
Cuarta	10	Al punto anterior se agregan 4 puntos
Quinta	15	Al punto anterior se agregan 5 puntos
Octava	36	Se agregan 8 puntos
Novena	45	Se agregan 9 puntos.

Décima 55
 11 66
 12 78

Explica cómo encontrar el número de puntos en una posición cualquiera. Justifica si existe un arreglo triangular que tenga 35 puntos o 38 puntos.

Fuente: personal, hoja de trabajo, encuentro de formación (2019)

Maestra Estrella: (...) súper bien y con la respuesta de la séptima posición que sería 28 y la octava que sería 36 podemos decir que no hay arreglos triangulares ni de 35 ni de 38, por lo menos no con estas características comunes para las posiciones.

Este episodio nos permite inferir la presencia de un lenguaje natural en las maestras, donde pareciese que, en correspondencia a las experiencias suscitadas en los encuentros de formación anterior, la posibilidad de dar respuestas a un planteamiento, una posible solución, una inferencia y explicarlas con expresiones gestuales, analíticas y coherentes desde el discurso les ha permitido tomar conciencia de lo que hacen, para hallar en este caso, cómo se forma una secuencia no solo desde lo numérico sino también desde lo espacial.

Así mismo, se dilucida en las maestras la movilización de medios semióticos como la actividad perceptual y las palabras, es el caso de la Maestra Estrella quién logra identificar un patrón general para todas las posiciones “¿sí me hago entender?, se va aumentando de uno en uno, partimos en la primera posición de un puntico a ese luego se le agregan 2, al siguiente 3, al siguiente se le agregan 4 y luego 5...” en esta expresión se hace presente el pensamiento algebraico contextual, pues aquello que era desconocido se logra inferir a través de la frase clave “ se va aumentando de uno en uno” para demostrar un camino explicativo al cómo se conforma la secuencia.

Por otra parte, la Maestra Luna, con un gesto de sonrisa, quizá manifestando alegría por las relaciones encontradas, señala con el lápiz sobre los arreglos triangulares la explicación de sus deducciones, encontrando similitudes en las relaciones establecidas “cada posición tiene el mismo número de círculos en la base, que lo que está indicando la posición, aquí por ejemplo, la posición 2 tiene 2 puntos de base, la posición 3, tiene también 3 de base, la posición 4 y así sucesivamente”, “luego podemos observar que va descendiendo el número de círculos, ejemplo la posición 4 tiene base 4, luego hacia arriba tiene 3, 2, 1”, se puede apreciar en este episodio, elementos constitutivos Radford (2010) de un pensamiento algebraico factual donde aparecen movilizados medios semióticos como los gestos, las palabras, señales con el lápiz, y expresiones que indican una generalidad.

En este mismo episodio se analizó sobre la maestra Luna, indicios de pensamiento algebraico contextual, en tanto a partir de la generalidad encontrada, manifiesta frases clave que permiten hallar el número de puntos para la octava posición. “sí quiero encontrar la posición octava, deberá entonces tener 8 de base y hacia arriba descender, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, teniendo en cuenta también que los círculos de los lados, los que conforman el triángulo deben también permanecer con el mismo número de la base, en este caso 8”.

En el desarrollo de la tarea se habían encontrado por parte de las maestras, relaciones, características comunes, inferencias que conllevaban a una generalidad, por lo tanto, se pide a las maestras que a través de este proceso realizado de manera individual y

posteriormente colectivo a partir de la interacción, se explicara cómo encontrar el número de puntos en una posición cualquiera, para lo cual después de generar un lapso de silencio para el pensamiento individual se entretendió luego en el compartir de ideas, el siguiente episodio:

Maestra Estrella: por medio de una ecuación

Maestra Luna: [...] miremos como lo haríamos

Maestra Sol: dijimos que va aumentando de acuerdo a la posición, entonces a los puntos anteriores le sumamos la posición.

Maestra Investigadora: ¿pero si no sabemos cuál es el número de puntos de la anterior posición, ¿cómo representarlo?

Maestra Estrella: (... sonrío) entonces sería n puntos

Maestra investigadora: ¿por qué n puntos? Explícanos

Maestra Luna: habría una incógnita porque no sabemos el número de puntos, pienso que lo que Estrella dice es que n serían los puntos porque no sabemos cuántos son.

Maestra Estrella: (...) lo dije como algo esporádico [...] pero si podría tener alguna lógica, sería más bien n posición, cualquier posición y habría que dar un dato, entonces sería la suma de sus antecesores como lo explicaba Luna ahora con la gráfica.

Maestra Investigadora: si tuviésemos que escribirlo para que alguien encuentre el número de puntos en una posición cualquiera, ¿cómo lo haríamos?

Maestra Estrella: podría ser [...] $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \dots + n$ posición.

Maestra Investigadora: bueno tratemos de descubrir la posición 13 para ver cuánto no da.

Maestra Luna: en la 13 daría 91. n posición sería 13, entonces $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$
 $+ 10 + 11 + 12 + 13$ que sería la posición 91.

Se realizaron algunas preguntas emergentes según el diálogo que se iba tejiendo entre las maestras, con el fin de motivarlas a continuar movilizand o medios semióticos que les permitiese, además de haber identificado el patrón que constituía la secuencia, encontrar una expresión para el número de puntos en cualquier posición, para lo cual las maestras, refieren la importancia de ecuaciones, incógnitas, como aquello desconocido que se debe representar para hallar una solución, es por ello que, cuando la Maestra Estrella refiere con una sonrisa, quizá en expresión de un temor a estar equivocada “entonces sería n puntos”, está acercándose a la posibilidad de proponer una posible solución.

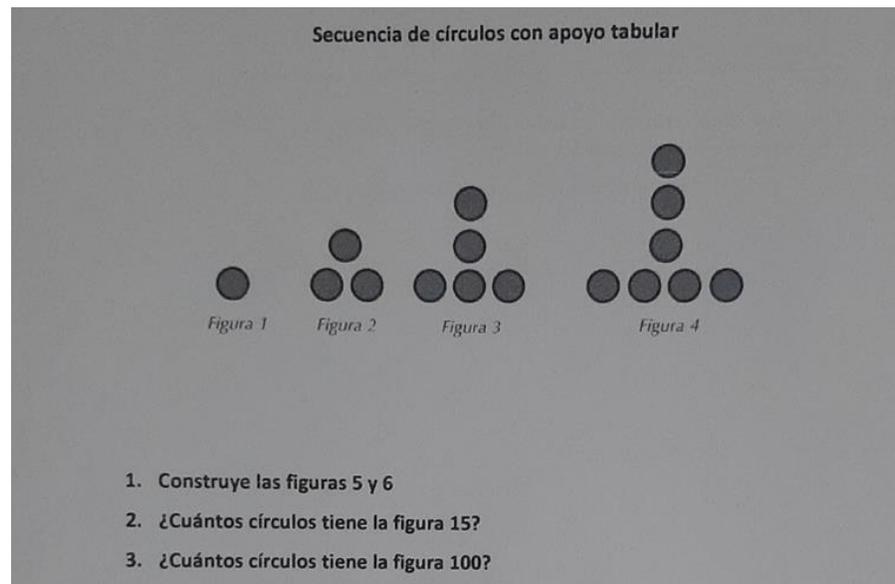
Es importante observar como la maestra Estrella reflexiona sobre su expresión y se da cuenta, como aquello que parecía una situación esporádica estaba asociado a un camino de solución “pero si podría tener alguna lógica, sería más bien n posición, cualquier posición y habría que dar un dato, entonces sería la suma de sus antecesores como lo explicaba Luna ahora con la gráfica”, queriendo ir más allá de su lenguaje natural, de sus palabras, se le motiva a pensar una forma de expresión para lo que se está verbalizando y expresa “podría

ser, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \dots + n$ posición” allí se denota la indeterminancia para representar generalidades, la analiticidad para reconocer el carácter operativo de los objetos y la designación simbólica para nombrar y referir dichos objetos “ n posición más los antecesores”.

Posteriormente se planteó en el encuentro de formación con las maestras, la tarea sobre una secuencia de círculos con apoyo tabular, retomada de Vergel y Rojas (2018) quienes con sus investigaciones enmarcadas en el pensamiento algebraico temprano han validado y propuesto tareas que los profesores pueden utilizar en el aula para promover el desarrollo del mismo; para el caso de esta investigación, se pretendió continuar brindando elementos de análisis, reflexión, interacción entre las maestras, para suscitar medios semióticos, que al ser objetivados posibilitan la emergencia de formas que instancian un desarrollo de pensamiento algebraico.

Figura 16.

Tarea sobre secuencia figural apoyada por representación tabular



Fuente: adaptado de *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula* (p. 86), por Vergel y Rojas, 2018.

Las maestras obtuvieron de manera individual sus hojas de trabajo con la tarea y 3 ítem de preguntas para responder, de acuerdo a la secuencia de círculos, cada una se motivó en la búsqueda de respuestas desde la observación, análisis y deducciones de sus conjeturas; posteriormente, después de haber dibujado las figuras 5 y 6, como lo pedía el ítem 1, procedieron a socializar sus respuestas, generando con ello una interacción de aprendizaje con el otro, en este se analizó el siguiente episodio:

Maestra Luna: en esta secuencia podemos determinar una característica común, tiene como base el número de la figura menos el número anterior que sería la altura, y para saber cuántos círculos tiene la figura se suman sus círculos (...señala con el lápiz) si observamos aplica para todas

$$2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5, 4 + 3 = 7$$

Maestra Estrella: yo también lo hice así, (...) entonces la figura 15 tendría 15 de base menos 1, daría 14 para su altura, y si sumamos $14 + 15 = 29$. Lo cual indicaría que 29 es el número de círculos.

Maestra Sol: también lo deduje así y dibujé la figura 15 para comprobar, efectivamente, me dio 29 círculos.

Maestra Estrella: y la 100 tendría, 100 de base, menos 1 para 99 de altura, luego, $100 + 99 = 199$ que sería el número de círculos.

Maestra Luna: sería constante el menos 1.

Maestra Investigadora: ¿cómo podríamos expresar la relación que han encontrado para cualquier figura?

Maestra Estrella: [...] si utilizamos lo que hemos analizado y propuesto en encuentros anteriores, podríamos decir que cada secuencia de círculos tiene 2 líneas, una que es la base y otra que es la altura, luego queremos determinar el número de círculos para cualquier figura que podría ser n figura y ya dijimos que la relación siempre va a ser menos 1. [...] entonces puede ser algo así como: $2(n) - 1$.

Maestra Sol: habría que tener en cuenta que los círculos de la base siempre serán los que indique el número de la figura.

Cuando se analiza el compartir de ideas, pensamientos y experiencias con la tarea individual y posteriormente compartida, se logra evidenciar en las maestras gestos quizá de motivación y alegría reflejado en sus rostros, parecía como si hubiesen tomado un poco de cada análisis y reflexión propuesta para las soluciones de las anteriores tareas, ello reflejado en sus expresiones “si utilizamos lo que hemos analizado y propuesto en encuentros anteriores”, al mismo tiempo que sus ideas permitían identificar una actividad perceptual donde reconocían características comunes y relaciones, identificaban un patrón e instanciaban procesos de generalización, a través de medios semióticos, el lenguaje, los movimientos, los gestos, la actividad perceptual, como es el caso de la maestra Luna, quien después de objetivar estos medios semióticos, señala y expresa a través del pensamiento algebraico factual “si observamos aplica para todas $2 + 1 = 3$, $3 + 2 = 5$, $4 + 3 = 7$ ”.

La mirada sobre la maestra Estrella, permite inferir que no solo ha movilizado medios semióticos como el lenguaje, los gestos, los movimientos sino que a través de la actividad perceptual estos han sido sustituidos por frases clave que desde el pensamiento algebraico contextual Radford (2010), lo cual le permite representar la relación encontrada, “podríamos decir que cada secuencia de círculos tiene 2 líneas, una que es la base y otra que es la altura” “queremos determinar el número de círculos para cualquier figura que podría ser n figura y ya dijimos que la relación siempre va a ser menos 1” “algo así como: $2(n) - 1$ ” las frases clave, finalmente fueron representadas con símbolos alfanuméricos del

álgebra, induciendo con ello un pensamiento algebraico simbólico que le permite representar los análisis y relaciones que se construyeron desde lo personal y lo colectivo.

Para finalizar el encuentro de formación se realizó con las maestras el mural de situaciones como espacio para concluir con sus apreciaciones, ideas, sentimientos, pensamientos, experiencia vivida, dicha interacción a partir de 3 preguntas dirigidas, que tenían como objetivo suscitar la reflexión de las maestras frente a sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, y así para el interés de la investigación poder analizar en ellas posibles indicios de movilización al concluir los encuentros de formación.

Las siguientes fueron las preguntas de reflexión para las maestras ¿Pueden los maestros desarrollar pensamiento algebraico temprano? ¿Pueden los niños desarrollar pensamiento algebraico temprano? ¿Cómo el maestro moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano? Estos interrogantes, como se mencionó anteriormente, tenían su foco de atención sobre las concepciones y por ello, se retomaron los episodios de las interacciones realizadas por las maestras, en tanto, eran objeto de análisis de gran relevancia.

Maestra Luna: Considero que todo pensamiento es posible para su desarrollo, en cualquier etapa de la vida humana, es decir, tanto para los maestros como para los niños, pero para promover

el desarrollo del pensamiento algebraico temprano es importante que el maestro, como orientador de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, tenga la formación y las herramientas didácticas para hacerlo.

De hecho, cuando ponemos a los estudiantes a razonar, a despejar incógnitas, a encontrar una característica común frente a una situación dada estamos estimulando la capacidad humana para buscar diversos caminos de solución que pueden empezar a generar pensamiento algebraico desde los primeros años.

El pensamiento algebraico temprano da la posibilidad de que el maestro introduzca al estudiante en un proceso de pensamiento, que le va a permitir razonar mejor y adquirir más y mejores competencias a lo largo de su vida escolar, sin tener que enfrentarse a letras complejas, reglas que quizá no entienda.

En este sentido reflexionando sobre los encuentros que hemos tenido, podría decir que los niños si pueden desarrollar pensamiento algebraico temprano, ya que cuando realizamos tareas que implican representación gráfica, generalización, patrones, regularidades podemos tener nociones de este tipo de pensamiento y esto podemos promoverlo en nuestras aulas.

Insisto en que cuando el estudiante tiene la capacidad de razonar y adquirir fortalezas matemáticas puede desarrollar el pensamiento algebraico y esto lo hace cuando potencia su lenguaje

y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar sus ideas y la interpretación que realiza de las diferentes situaciones.

El maestro moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano cuando se forma y deja a un lado el temor a encontrar patrones, generalidades, cuando se pasa de resolver operaciones a través de procedimientos estandarizados y se busca desarrollar la capacidad de analizar las situaciones y representarlas. El uso de incógnitas, secuencias, símbolos y la representación de estos, usando el lenguaje y formas de simbolismo puede aportar para que pensemos y reflexionemos a partir de nosotros y desde el aula sobre cómo desarrollar el pensamiento algebraico.

Maestra Estrella: Los maestros podemos y debemos desarrollar pensamiento algebraico temprano, es decir, iniciarlo desde los primeros años de educación, en tanto no lo limitemos a operaciones complejas con letras y ecuaciones que quizá aparecerán en la educación básica secundaria.

Se debe partir de ejercicios aptos, concretos como lo vivenciamos en las tareas que nosotros desarrollamos, que permitan la imaginación y el desarrollo de habilidades y así se potencien las bases para niveles superiores. Desde el segundo encuentro con el problema de los sobres me llamo mucho la atención el poder hacerlo con mis niños a través de material concreto, hasta cuando trabajo con secuencias puedo empezar a desarrollar pensamiento algebraico temprano.

Creo que los niños pueden desarrollar pensamiento algebraico temprano, es decir, cognitivamente están en capacidad de hacerlo y no se debe retrasar la enseñanza del mismo hasta otros niveles de educación más avanzados pues se estaría desperdiciando un enorme potencial. Eso sí, todo depende de nuestra actitud como maestros y la apertura que tengamos para incluirlo, pues en múltiples ocasiones el temor de los niños o el no aprendizaje de algo depende de nosotros, si nos colocamos a pensar muchas veces la materia que más nos gusta enseñar a nosotros, es la de preferencia de los niños, claro, porque lo hacemos seguramente con mejor actitud, planteamos más estrategias, les generamos amor a ella, motivación, lo mismo puede pasar con el pensamiento algebraico.

Por ejemplo, cuando nos enfrentamos al desarrollo de las tareas en los diferentes encuentros, sentimos mucho temor, angustia, impotencia, quizá pena personal y ajena porque no lográbamos encontrar la solución a los ejercicios. Sin embargo, cuando la maestra investigadora nos animaba y daba confianza, nos hacía preguntas que nos permitieran seguir en el camino, activábamos nuestro pensamiento en el deseo de encontrar soluciones, y compartimos nuestro pensamiento entre todas y juntas encontramos un camino y finalmente nos dábamos cuenta que quizá era fácil, que hubiésemos podido encontrar más pronto la respuesta, pero el deseo de buscar fórmulas o el creer que sería muy complejo bloqueaba nuestro pensamiento.

El maestro moviliza sus concepciones en tanto es consciente del propósito que quiere lograr con cada situación que propone para desarrollar el pensamiento algebraico temprano en los estudiantes.

Esto debido al paradigma estipulado por años en donde hemos pensado que el pensamiento algebraico se “guardaba” para niveles de educación secundaria (séptimo, octavo) por lo que los maestros de primaria no le apostamos a un desarrollo del pensamiento algebraico, es más, creo que ni lo pensamos porque consideramos que no hay una incapacidad intelectual de parte de nuestros estudiantes, incluso de nosotros mismos para desarrollarlo. Sin embargo, en estos encuentros hemos podido reflexionar desde cada tarea y reflexión que existen estrategias, que nosotros podemos desarrollarlo y por ende también podemos generarlo en el aula.

Creo que la movilización también se da partiendo de dos puntos cruciales: primero, la capacitación permanente del docente, la cual le permite estar abierto a nuevas concepciones, máxime en nuestro modelo de escuela nueva debemos atender todas las áreas y no tenemos la formación disciplinar en todas; y el segundo, la reflexión constante del maestro sobre su hacer, pero sobre todo sobre las pautas que le van mostrando sus estudiantes en el trabajo propio del aula, lo que son capaces de hacer sin nuestras limitaciones.

Maestra Sol: Creo que tanto los niños como nosotros podemos desarrollar pensamiento algebraico, esto lo podemos lograr, por ejemplo, pensándonos sobre nuestra práctica, en ocasiones hacemos que las matemáticas sean rutinarias, cuando solo las limitamos a números y operaciones, miremos como en estos encuentros pasábamos ratos agradables en los que ni sentíamos la jornada, porque habían tareas que llamaban la atención, el compartir entre todas nos permitía sentirnos seguras y aprender la una de la otra, con lo que una decía, encontrábamos una y otra manera de hallar una solución; así mismo, puede pasar con nuestros estudiantes, cuando les permitamos

trabajar en equipo, desarrollar tareas como estas que le llamen la atención, que lo lleven a pensar,
analizar, razonar.

Creo que no hay que limitar la imaginación de nuestros estudiantes y decidir por ellos, siempre seleccionamos los temas que les vamos a enseñar porque quizá nos sentimos más cómodos con ellos o porque pensamos que esos son los que pueden aprender, pero en estos encuentros nos dimos cuenta que hay muchas cosas por explorar en nuestros estudiantes que no conocemos ni imaginamos. Por eso, considero que el maestro moviliza sus concepciones cuando no le coloca límites de edad o de posibilidades al pensamiento algebraico, cuando reconoce que, así como nosotros aún podemos desarrollar nuestras habilidades para lograrlo, mucho más los niños que pueden interactuar con todo y más de lo que les proponemos en el aula.

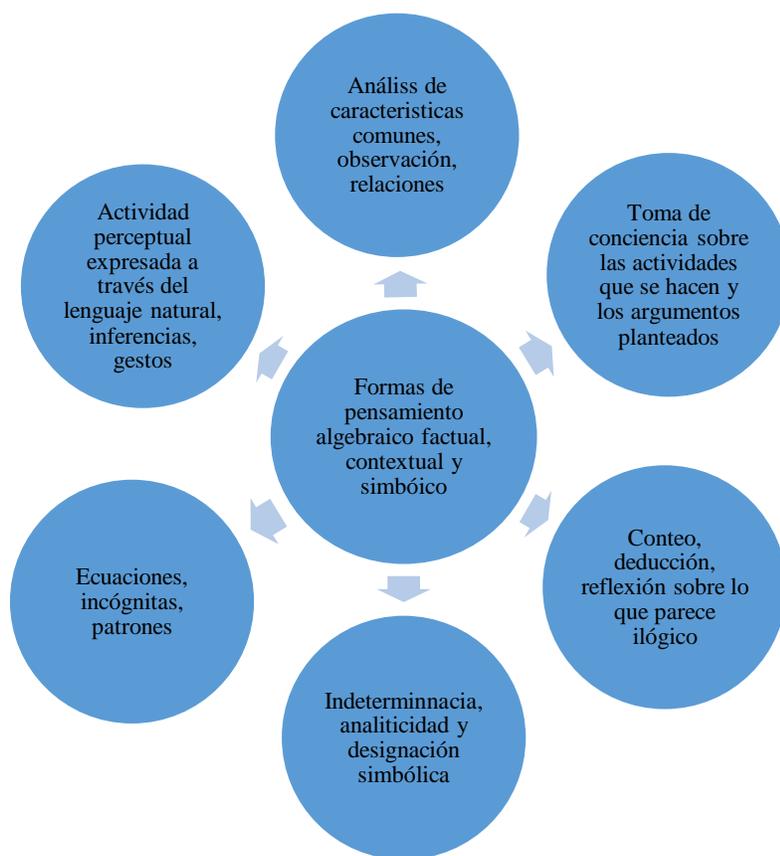
Aunque nuestra práctica también depende de la forma como nos enseñaron a nosotros y de la manera como hemos creído ha funcionado, estos encuentros nos han hecho ver que debemos formarnos, al principio sentimos temor y quizá como lo decía Estrella, al enfrentarnos a las tareas llegamos a sentir angustia o desesperación pero luego nos dimos cuenta que podíamos lograrlo y en cada encuentro proponíamos más, hablamos, dábamos ideas, construíamos juntas, nos acercamos al pensamiento algebraico y eso ha sido muy importante.

Es así como este encuentro de formación posibilitó la expresión de sentimientos, experiencias, ideas y pensamientos que habían sido transformados para movilizar

concepciones acerca de cómo el maestro puede desarrollar pensamiento algebraico y por ende promoverlo desde los grados iniciales de sus estudiantes, es así como se plantean las categorías emergentes en el encuentro:

Figura 17.

Categorías emergentes, encuentro de formación 4, sobre secuencias figurales apoyadas por representación tabular.



Fuente: elaboración propia, categorías emergentes, encuentro de formación (2019)

4.3 Narrativa sobre la movilización de las concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Las maestras participantes de esta investigación traen consigo, pensamientos, ideas, formas de ser, por lo tanto, maneras particulares para desarrollar su práctica pedagógica; lo anterior, suscitado quizá por aspectos culturales, tradiciones, formación recibida en sus años escolares y formación profesional, como también por la manera de interactuar con el pensamiento matemático, a partir del proceso de enseñanza y de aprendizaje. Es así, como estos elementos que las constituyen como maestras del aula multigrado del contexto rural, en el modelo de escuela nueva, les ha permitido tener como referentes algunas ideas iniciales cuando se les pregunta sobre la posibilidad de incluir el pensamiento algebraico en el currículo de la educación básica primaria, planteando que es un proceso complejo, asociado a letras, signos, cantidades desconocidas que son difíciles de operar para los estudiantes de la básica primaria.

No obstante, cuando se empiezan a generar con las maestras encuentros enmarcados en diálogos, interacciones, experiencias y saberes, las concepciones individuales, al ser compartidas en colectivo con el par académico, se van permeando de otras posibilidades que, a partir de una mirada sobre el ser, saber y hacer de las maestras, intentan llevar a un escenario de reflexión, la posibilidad de desarrollar pensamiento algebraico temprano y promoverlo en el aula de clase.

Así entonces, se van tejiendo concepciones enmarcadas en algunas líneas de análisis que, desde los temas comunes y diferentes, suscitados en las categorías emergentes sobre el fenómeno de estudio, se intentan describir en esta narrativa, a la luz de las vivencias de las maestras frente al objeto de reflexión, tal como fueron sentidas y experimentadas (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Es así como, una de las primeras líneas de análisis tiene que ver con la concepción de las maestras, respecto a la articulación de procesos entre la básica primaria y la básica secundaria, ello como posibilidad de promover de manera natural el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, en tanto, pareciese que dentro del currículo y práctica de enseñanza de las matemáticas en la básica primaria, se seleccionan, organizan y enseñan temáticas que solo se vinculan con el pensamiento numérico, por lo tanto, cuando el estudiante llega a niveles de formación en la básica secundaria y se encuentra con otros procesos como el desarrollo del pensamiento algebraico, al ser temáticas y procesos desconocidos les genera temor o frustración.

Las reflexiones realizadas por las maestras en el colectivo, las llevó a pensar que esto puede suceder por la concepción errónea, Vergel (2016) de que primero debe generarse bases sólidas en el pensamiento numérico, para que luego pueda darse el algebraico, concepción que ha suscitado prácticas centradas en el pensamiento numérico y ha dejado a un lado el pensamiento algebraico, en las prácticas de enseñanza, esto las movilizó a pensar

que posibilitar el desarrollo del pensamiento algebraico, Wilhelmi (2017) a partir de la básica primaria podría ayudar a los estudiantes a tener un mejor acercamiento y aprendizaje en niveles más avanzados de su formación.

En este sentido, los encuentros de formación, las tareas propuestas y desarrolladas por las maestras de manera individual y luego en el compartir e interacción con sus compañeras, permiten ampliar sus concepciones al expresar que el pensamiento numérico tiene relación con el pensamiento algebraico, por ejemplo, a partir del conteo y las potencias que permiten hacer inferencias para llegar a formas de pensamiento algebraico, dilucidando con ello, que para encontrar su relación hay que pensar más allá de los números y las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) que con estos se realizan, que hay que generar una toma de conciencia en el proceso de enseñanza, de lo que se lleva a la práctica en el aula, su objetivo, las formas de pensamiento algebraico que se pueden desarrollar y lo que los estudiantes pueden generar a partir de lo que conscientemente se les propone sin limitar su imaginación y pensamiento.

Estas concepciones conllevan a interpretar que las maestras están dando apertura al pensamiento algebraico, como posibilidad de ser promovido desde la educación básica primaria y no exclusivamente en la básica secundaria, Carraher, Schliemann y Brizuela (2000) han manifestado al respecto, como la enseñanza del álgebra no se ha dado en la básica primaria quizá por la concepción errónea sobre la naturaleza de la aritmética y la

importancia de que exista una capacidad cognitiva de los estudiantes jóvenes para aprenderla; se puede apreciar entonces, una movilización de concepciones en las maestras a partir de su interacción y reflexión frente al fenómeno del pensamiento algebraico, que les permite aducir que aunque existe una diferencia entre el pensamiento numérico y el algebraico, no se aprende primero uno y luego el otro, ambos pueden coexistir en el aprendizaje, porque los estudiantes de básica primaria pueden enfrentarse a ello, cuando los maestros no limitan las posibilidades del desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas.

Así entonces, otra línea de análisis en las concepciones, tiene que ver con las tareas que posibilitan el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, en este ámbito las maestras proponen actividades donde se trabaje con signos, abstracción, cantidades desconocidas, incógnitas, secuencias y propiedades, sin embargo, al enfrentarse durante los encuentros de formación, de manera personal a tareas que promueven formas de pensamiento algebraico, el compartir en grupo, la reflexión e interacción, las llevó a repensar estas concepciones y plantear que a través del uso de representaciones icónicas, el análisis sobre aquello que desconocemos para encontrar las características comunes y las relaciones suscitadas entre ellas, el uso de material concreto, la actividad de ensayo error, las inferencias y el desarrollo de habilidades como la observación, la deducción, la actividad perceptual, pueden ser bases o elementos importantes que posibilitan el desarrollo del pensamiento algebraico tanto en los maestros como en los estudiantes.

De esta manera, se dilucida como las maestras van movilizando sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano y a través de tareas con dobleces de papel, secuencias, búsqueda de patrones, regularidades y procesos de generalización; lo anterior, permite observar en sus diálogos y propuestas de solución, la emergencia de medios semióticos como lo gestos, la actividad perceptual, las palabras, el lenguaje natural, para desarrollar tres elementos estrechamente relacionados que caracterizan el pensamiento algebraico, el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica (Radford, 2010b); elementos que cuando fueron objetivados por las maestras, generaron en ellas el desarrollo de formas de pensamiento algebraico (Radford, 2010a) como el pensamiento algebraico factual, el pensamiento algebraico contextual y el pensamiento algebraico simbólico, al señalar con el lápiz, con la mirada, con sus gestos, decir “aquí” y expresar frases clave que en algunos episodios fueron representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra.

En este contexto, la movilización de concepciones en las maestras se evidencia cuando reconocen a partir de sus diálogos y expresiones, como es posible desarrollar pensamiento algebraico en cualquier etapa de la vida, es decir, tanto en ellas como en los estudiantes, lo que convoca a pensar que iniciar su promoción desde los primeros años de escolaridad puede darse sin hacer uso de letras, ecuaciones u operaciones complejas; Radford (2012a, p. 677) sostiene al respecto que “nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo”, las maestras proponen potenciar en el aula, el lenguaje y formas de

simbolismo que permita a los estudiantes, comunicar sus ideas, pasar de la solución de operaciones mecánicas al análisis de procedimientos, a partir de sus gestos, movimientos, palabras, de la toma de conciencia sobre lo que hacen y aquello que desean transmitir en sus soluciones.

Así mismo, aducen las maestras en sus reflexiones, la importancia de aprovechar el potencial que tienen los niños para desarrollar pensamiento algebraico mediante la actitud del maestro y la apertura para incluir tareas que lo promuevan, ello a través de la formación permanente que abre posibilidades a nuevas concepciones, reflexiones sobre el ser y el hacer del maestro en su práctica, teniendo en cuenta lo que los niños son capaces de hacer y lo que el maestro puede saber y promover; por ello, “la forma de saber de un profesor lleva consigo unas actitudes hacia la iniciación del trabajo algebraico, hacia sus estudiantes y hacia la introducción de cambio en su enseñanza, desde sus concepciones y actividades escolares” (Agudelo, 2005, p. 402).

En coherencia con lo que se ha expuesto, podría decirse que esta movilización de concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico en las maestras, se originó a partir de los encuentros, la interacción de pensamientos, ideas, sensaciones, gestos, palabras, el construir junto al otro, la objetivación de medios semióticos, el compartir de inferencias y deducciones que les permitía llegar a una respuesta; sin embargo, aunque estos elementos se han constituido como una base para la movilización de concepciones,

aún falta otra línea de análisis manifestada en las reflexiones de las maestras y no menos importante, la formación del maestro, aquella que se considera como el escenario posible de reflexión sobre su ser como maestro, su práctica, sus conocimientos y concepciones; al respecto, investigaciones de Ponte y Chapman (2008) han evidenciado como en los últimos años se ha desarrollado una mejor comprensión de los procesos por los cuales se aprende a enseñar matemáticas y se desarrolla la identidad profesional del maestro durante su formación.

Así entonces, la formación del maestro es considerada por las participantes en el fenómeno de estudio, como base fundamental para promover el pensamiento algebraico temprano, en tanto, aducen desde sus expresiones y reflexiones sobre los encuentros de formación, como al principio fue inevitable sentir angustia o temor al enfrentarse a las tareas propuestas, sin creer tener los conocimientos o la formación disciplinar en el área de matemáticas, sin embargo, cuando se les brindó la oportunidad de explorar sus pensamientos, ideas, percepciones, compartir con el otro y encontrar juntas una solución, se pudo generar una toma de conciencia sobre las tareas y en lo que en ellas se desarrollaba, los caminos y recorridos para llegar a una respuesta, las habilidades y destrezas matemáticas que en ellas se generaba, los argumentos que se proponían para la solución, denotando con ello que la formación posibilita al maestro enfrentarse sin temor a tareas y formas de pensamiento algebraico; en este sentido, también les permite no tener miedo de promover este pensamiento en el aula y con los estudiantes de básica primaria, lo anterior, se logra “integrando contenidos y pedagogía y enseñando a los profesores del mismo modo

que se espera que ellos enseñen el conocimiento matemático” (Ponte y Chapman, 2008, p.256)

La formación, así mismo, es fundamental para las maestras, en tanto consideran que si para el maestro es un reto el desarrollo de procedimientos y actividades para el pensamiento algebraico, posiblemente para los estudiantes también será complejo, y esto puede ocurrir “debido a sus concepciones, es decir, a la historia personal de cada profesor, su experiencia, su forma de pensar, su posición frente a su práctica docente, se posibilita o dificulta el acceso al conocimiento” (Ponte, 1994. p. 195), sin embargo, esto se transforma cuando la interacción en colectivo, las voces, ideas, pensamientos, expresiones y comprensiones movilizan concepciones que conllevan a pensar en formas diferentes de ver y entender el pensamiento algebraico temprano.

Es así como las maestras partieron de unas ideas iniciales sobre el pensamiento algebraico para llegar a encuentros de formación que les posibilitó una reflexión sobre su práctica pedagógica, como sujetos que interactúan con el pensamiento matemático, consigo mismo y con el otro, así, mediante el colectivo se colocó en el escenario de reflexión sus concepciones frente a un fenómeno de estudio, el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, permeadas estas concepciones por sus vivencias y experiencias, se movilizaron a partir de su actitud y apertura para desarrollar tareas y objetivar medios semióticos, que

posibilitaron desarrollar pensamiento algebraico, con una concepción transversal hacia la promoción temprana en la educación básica primaria.

5. Consideraciones finales

En este capítulo se abordan las ideas centrales que fundamentan la respuesta a la pregunta y objetivo del presente trabajo de investigación, resaltando los resultados del fenómeno objeto de estudio, al proponer encuentros de formación, vivenciados mediante la reflexión del maestro, en el escenario individual y colectivo, sobre sus concepciones, para la promoción de pensamiento algebraico temprano, y la implementación de tareas que suscitando la objetivación de medios semióticos propician formas de pensamiento algebraico; así mismo, a partir del desarrollo de este estudio se plantean posibles líneas de investigación, con la pretensión de realizar aportes al campo de la educación matemática, finalmente se describen las dificultades y oportunidades surgidas antes, durante y al finalizar este trabajo de investigación.

5.1. Respuesta a la pregunta y objetivo de investigación

Pensar en investigación sobre pensamiento algebraico temprano implica pensarnos en diferentes escenarios y pensar en los sujetos y objetos que posibilitan su desarrollo: los estudiantes, los maestros, el currículo, las dinámicas institucionales, los ambientes de aprendizaje. Sin embargo, para el caso de esta investigación, la apuesta teórica, metodológica y práctica, como se sustentó en cada uno de los capítulos, enfocó su atención

en las concepciones de las maestras referidas al pensamiento algebraico temprano, sin desconocer asuntos relacionados con las experiencias del maestro acerca de su conocimiento de las matemáticas, sus prácticas, sus concepciones de la enseñanza y aprendizaje, entre otros aspectos; en consecuencia, la siguiente pregunta de investigación dilucidó el norte del estudio ¿cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano? y para llegar a su respuesta, la búsqueda del camino se trazó mediante un objetivo, analizar cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Así entonces, el camino para dar respuesta a la pregunta de investigación se enmarcó desde un enfoque cualitativo como posibilidad de reconocer las experiencias y vivencias de los sujetos y el método fenomenológico hermenéutico permitió explorar, interpretar y analizar las vivencias de las maestras desde lo individual y la interacción en colectivo sobre el fenómeno de estudio: el pensamiento algebraico temprano; a la luz de este camino metodológico y el horizonte teórico sobre las formas de pensamiento algebraico (Radford, 2010), las concepciones de los maestros (Agudelo, 2005) y la formación del maestro (Ponte, 2006), se diseñaron y ejecutaron encuentros de formación con las maestras participantes de la investigación, quienes, en la dinámica misma del trabajo de campo, a partir de sus ideas, concepciones a priori que las constituyen como sujetos y como maestras, pudieron construir un escenario de interacción, diálogo y socialización de sus conocimientos y sentimientos. Además, producto de la interacción surgida cuando se enfrentaron a tareas de formación,

donde a partir de la toma de conciencia de estas, y a partir de diferentes espacios de reflexión, se pudo evidenciar la manera cómo estos aspectos permitieron una movilización en sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico y su promoción en su práctica docente, en los primeros años de escolaridad.

Es así como, técnicas de recolección de datos, entre ellas los grupos de enfoque con preguntas tipo entrevista, las tareas de formación y el mural de situaciones se convirtieron en estrategias para alcanzar el objetivo de investigación, analizar cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano; este análisis se realizó sobre las voces de las maestras, sus palabras, expresiones, lenguaje natural, gestos, movimientos y percepciones que posibilitaron explorar sus concepciones, interpretarlas y analizarlas.

Los resultados permitieron dar cuenta de cómo el diálogo y la interacción motivada en la dinámica de cada encuentro y el deseo de las maestras por construir de manera conjunta sus propuestas de enseñanza, en el contexto de las tareas de formación, propiciaba una movilización de concepciones para desarrollar diferentes formas de pensamiento algebraico; concepciones evidenciadas en las propuestas de solución a las distintas actividades y las respuestas dadas, sin pensar en fórmulas o soluciones complejas que en ocasiones dificultaban su pensamiento matemático. Estos espacios de formación fueron sin duda un reto, pero a la vez una oportunidad de aprendizaje que se construyó en la reflexión

individual y colectiva, haciendo que el pensamiento algebraico concebido inicialmente por el grupo de docentes como algo complejo, pudiese ser algo cercano y posible de desarrollar y comprender, en el marco de un proceso de tareas de formación que permitió la movilización de sus concepciones.

Así mismo, el transcurrir de cada encuentro emanó unas categorías emergentes que, desde cada tarea de formación y preguntas suscitadas para la reflexión, permitieron poner de manifiesto concepciones iniciales de las maestras sobre el pensamiento algebraico, donde se asociaba este pensamiento al uso de signos, cantidades desconocidas y letras complejas, difíciles de operar para los estudiantes. Se pudo observar que las maestras asumían una primacía del pensamiento numérico en sus prácticas educativas, como base de lo que el estudiante debe saber en el marco del modelo de escuela nueva, que propende también por un pensamiento numérico en el aula multigrado, así como también la atención a ritmos de aprendizaje de los estudiantes, lo cual permitía asociar el desarrollo del pensamiento algebraico a contextos institucionales y no a las concepciones del maestro.

Estas concepciones iniciales, tales como asumir que el pensamiento algebraico debe abordarse en la secundaria, se colocaron en el escenario de interacción a partir del colectivo conformado por las maestras participantes, quienes en su actitud y apertura para repensarse sobre su propia práctica docente, compartir ideas y en el firme deseo de encontrar posibilidades para desarrollar pensamiento algebraico en sus estudiantes, les permitieron

avanzar en su reflexión sobre sus concepciones, sobre su práctica pedagógica y procesos de enseñanza y de aprendizaje. Además, como posibilidad de desarrollar pensamiento algebraico, este escenario de interacción con el otro, con su par académico, les permitió plantear la posibilidad de incluir pensamiento algebraico en la escuela primaria a través de las tareas matemáticas que desarrollaban en el aula que contemplaban incógnitas, secuencias, propiedades y la capacidad de operar sobre conceptos aparentemente desconocidos. Las maestras entonces fueron evidenciando movilización en sus concepciones y propusieron articular procesos entre la básica primaria y la básica secundaria como posibilidad de generar un proceso natural del pensamiento algebraico.

Así mismo, las tareas de formación implementadas, tales como el problema de los sobres, permitió objetivar en las maestras el sentido de la indeterminancia, al posibilitar que se pensará sobre incógnitas, características comunes y cantidades desconocidas, estos elementos a su vez dilucidaron un camino para operar sobre una forma de pensamiento algebraico contextual, evidenciado en las frases clave, referidas por las maestras en el proceso de abstracción y equivalencias para expresar el procedimiento realizado; ir más allá de lo numérico, también permitió evidenciar un pensamiento factual y contextual y su posterior reflexión les llevó a movilizar sus concepciones cuando manifestaron que, es posible desarrollar pensamiento algebraico superando la concepción de complejidad de los aspectos matemáticos que se supone subyacen en este; además, plantearon esta actividad en el aula desde el material concreto, y manifestaron que hay una necesidad de formación para la toma de conciencia sobre las tareas que el maestro realiza.

En esta misma línea, las tareas sobre dobleces de papel y procesos de generalización, así como las secuencias figurales apoyadas por representación tabular, evidenciaron en las maestras desde los procedimientos individuales y contruidos en colectivo, un trascender de lo concreto a inferencias, que les permitió acercarse a procesos de generalización, regularidades e identificación de patrones; ellas tomaron conciencia sobre las tareas y en este proceso emergieron medios semióticos como los gestos, los movimientos, el lenguaje natural y las palabras; medios que les posibilitaron expresar relaciones encontradas, desarrollar desde la indeterminancia y la analiticidad, formas de pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico, a partir de frases claves que alcanzaron a ser sustituidas por signos alfanuméricos del álgebra.

En este mismo escenario, expresiones de las maestras como “no es que primero tenga que ser lo numérico y luego lo algebraico” “como maestros nos complicamos y esto es lo que hace que el pensamiento algebraico también sea complejo” son reflexiones suscitadas desde lo colectivo que permiten movilizar concepciones iniciales sobre la importancia de tener bases sólidas en el pensamiento numérico para poder desarrollar otros y la importancia de las concepciones que tiene el maestro sobre la posibilidad de hacer propicio o complejo el desarrollo del pensamiento algebraico en los grados iniciales. Estos procesos alcanzados a través de las tareas de formación y en la discusión colectiva permitieron movilizar concepciones en las maestras, reflejadas en sus expresiones cuando reflexionan

sobre lo que han alcanzado, sus procesos y la motivación que las lleva a plantear la posibilidad de promover estas tareas al aula y observar el desarrollo de pensamiento algebraico que evidenciarían sus estudiantes desde el material concreto y el pensamiento numérico.

Así entonces, la respuesta a la pregunta de investigación denota que el maestro moviliza sus concepciones desde la conformación de colectivos de maestros, los cuales permiten propiciar, mediante la interacción, un enriquecimiento de diálogos, la reflexión, la socialización de sus conocimientos y experiencias, para que las concepciones individuales que se tienen a priori puedan ser entrelazadas en la interacción con el otro, lo cual permite movilizar aquello que desde las tradiciones curriculares y los modelos de formación, se instauran en el pensar y hacer del maestro y que, en múltiples ocasiones, genera temor o angustia para desarrollar otros pensamientos, como en el caso del pensamiento algebraico; sin embargo, las reflexiones y procesos vivenciados por las maestras hacen evidente que cuando se movilizan las concepciones se puede desarrollar pensamiento algebraico temprano y que este puede ser promovido en el aula de clase sin límites de edad.

Por otra parte, el maestro moviliza sus concepciones cuando se expone a tareas que posibilitan objetivar medios semióticos como el lenguaje, los gestos, la actividad perceptual, los movimientos, las palabras y el ritmo, características que posibilitaron comunicar una intención y llevar a cabo una acción en los procedimientos utilizados por las

maestras para dar solución desde sus inferencias, relaciones, características comunes, procesos de abstracción y frases clave que fueron sustituidas por signos alfanuméricos del álgebra, para desarrollar formas de pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico. El desarrollo de estas tareas evidencia que, a partir de procesos de generalización y búsqueda de patrones, pueden ser movilizadas las concepciones de las maestras al desarrollar tres elementos o vectores que según Radford (2010b) caracterizan el pensamiento algebraico, el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica.

Finalmente, el maestro moviliza sus concepciones cuando, por voluntad propia, asume su proceso de formación y deja a un lado el temor, para permitirse comprender la necesidad de ir más allá de operaciones numéricas, y así enfrentar sus posibilidades de ampliar sus perspectivas del pensamiento algebraico; por lo tanto, analiza situaciones, se piensa y se reflexiona desde sí mismo y desde el contexto de sus estudiantes, cuando comparte sus pensamientos, ideas y reflexiones con el par académico que también lo constituye en su ser, saber y hacer; además, cuando se permite encontrar estrategias para desarrollar pensamiento algebraico y en ellas se reconoce y reconoce que como maestro puede desarrollarlo y también puede promoverlo en el aula de clase y ello lo motiva a transformar su práctica pedagógica; adicionalmente, cuando reconoce que el dar apertura a nuevas concepciones no va en contra del modelo educativo flexible en el que labora o de sus concepciones de formación o experiencias de práctica, sino que al contrario, le permite enriquecer su formación docente y aportar mejores aprendizajes a sus estudiantes, desde

luego, considerando la no fragmentación de contenidos y el trabajo de dos pensamientos el numérico y el algebraico, los cuales están estrechamente ligados pero claramente diferenciados.

Así, este trabajo de investigación pretende hacer aportes a la educación matemática y a la línea de investigación sobre el pensamiento algebraico temprano, en cuanto al conocimiento teórico sobre cómo el maestro moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, desde la postura teórica de las formas de pensamiento algebraico propuestas por Radford (2010) a partir de la conformación de colectivos de maestros, mediante la exposición del maestro a tareas de formación que impliquen la objetivación de medios semióticos para desarrollar formas de pensamiento algebraico (factual, contextual y simbólico), a través de reflexiones suscitadas en los encuentros de formación donde se gesta la interacción, el diálogo, el intercambio de saberes y la promoción de pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad, y finalmente, desde el maestro como principal agente de cambio.

Así mismo, este estudio incide en el modelo educativo flexible de escuela nueva, en tanto aporta elementos de naturaleza investigativa, que puede cualificar la estrategia del microcentro rural, aquel que, a partir de la conformación de colectivos de maestros, propicia la formación, la interacción, el diálogo, el compartir de saberes y experiencias entre los maestros, para reflexionar sobre su práctica y con ello generar procesos

significativos de enseñanza y de aprendizaje de saberes matemáticos. Así entonces, las tareas de formación propuestas, las cuales evidenciaron como el maestro al enfrentarse a ellas puede desarrollar formas de pensamiento algebraico, pudieron continuar aportando en la movilización de concepciones de otros maestros, a partir de la objetivación de medios semióticos y la reflexión suscitada en el colectivo, para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Esta movilización podría incidir en la cualificación de la práctica pedagógica de los maestros en los contextos rurales, sus procesos de adaptaciones curriculares y el pensamiento matemático que se suscita en el aula.

Por otra parte, este estudio puede aportar a la línea de formación de maestros, así como a los estudios que reportan investigaciones sobre cómo cualificar profesores de primaria para desarrollar pensamiento algebraico temprano, en tanto, esta investigación ha permitido evidenciar que la formación le permite al maestro generar una reflexión sobre otros pensamientos diferentes al numérico, para el caso particular, el pensamiento algebraico temprano, ya que si el maestro no se enfrenta a estos procesos de formación, posiblemente desde la individualidad, no llegue a reflexionar, aprender, analizar y movilizar sus concepciones de la misma manera que si lo hiciera participando en la construcción y compartir que se hace en los colectivos de maestros, aquellos que posibilitan la toma de conciencia sobre las actividades que el maestro mismo puede desarrollar y proponer en el aula, enfrentándose a la promoción del encuentro con aquello que no había experimentado desde su ser, saber y hacer, y que al hacerlo le posibilita una transformación para la formación integral.

Finalmente, esta investigación pretende aportar al desarrollo del Plan Educativo Municipal de Abejorral 2019 – 2030, en la línea estratégica de transformación de la educación desde la investigación, la innovación y las Tic. Este plan educativo municipal, cuenta con una estructura orgánica conformada por un “Comité Directivo, encargado de la planeación y ejecución, un Comité Asesor, encargado de la ejecución de propuestas y un Comité Técnico, encargado de apoyar técnicamente la formulación, ejecución, seguimiento y evaluación del Plan Educativo” (p.86), así entonces, hago parte del Comité Técnico como maestra investigadora y docente, representante de mi institución, y esto se convierte en una oportunidad de interacción educativa con los demás maestros de los centros rurales, para proponer desde la investigación, el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, considerando posibilidades de formación y reflexión sobre la práctica pedagógica para continuar avanzando en educación matemática.

En este sentido, la línea 3 del Proyecto Educativo Municipal (2019) propone respecto a la investigación en educación:

una educación que desde la investigación posibilite visionar los contextos educativos desde sus realidades y particularidades, donde la práctica del maestro sea crítico-reflexiva y donde las ideas, inquietudes, necesidades e intereses de los estudiantes sean priorizadas como proyectos de desarrollo, calidad y pertinencia en la formación del maestro, para el fortalecimiento de su ser, saber y saber hacer en las comunidades, el Municipio y el Departamento. (p.76)

Estos planteamientos contemplados en el Plan Educativo Municipal permiten visionar el desarrollo de esta investigación, en encuentros con maestros, a partir de los semilleros de investigación como proyecto que, en la línea estratégica, se propone para capacitar a los maestros a partir de la investigación y las necesidades del contexto. Así entonces, aportar a la movilización de las concepciones de los maestros de básica primaria de diferentes instituciones educativas en el municipio para desarrollar el pensamiento algebraico temprano, me permitiría a nivel laboral aportar a la comunidad educativa del municipio, como maestra líder en los procesos educativos y de investigación, a través de la apuesta por resignificar las prácticas pedagógicas del maestro, mediante elementos que le aporten interacción, diálogo, reflexión, compartir de saberes, ideas y nuevos conocimientos a partir de lo que se construye a través de la formación.

Así mismo, en el ámbito académico, esta investigación podría convertirse en fuente de inspiración para líneas de formación de maestros, desde el plan educativo municipal, en la conformación de grupos que se formen en la línea del pensamiento algebraico temprano, y que a partir del desarrollo profesional docente puedan transformar sus prácticas educativas desde el saber matemático para el fortalecimiento de la educación en contextos rurales; poniendo en consideración que en el modelo educativo flexible de escuela nueva atiende todos los centros educativos rurales, donde como lo hemos referido, los maestros tienen a cargo 6 grados en un aula multigrado, es pertinente y pueden ser necesario tener espacios

de formación que le posibiliten cualificarse para desarrollar en los niños otro tipo de pensamiento diferente al numérico en las aulas de clase.

Esta propuesta surge a partir de mi deseo e interés como maestra investigadora por cualificarme y participar de escenarios de formación, que me posibiliten repensar y moldear mi propia práctica, así como la posibilidad de aportar a la formación de maestros, aquella que he podido liderar y promover desde la institución educativa donde laboro y durante mis años de profesión, en tanto considero que es a través de esta oportunidad, que se le brinda al maestro la posibilidad de vivenciar una reflexión pertinente y asertiva sobre su práctica pedagógica, sobre el ser, los contextos, las experiencias y tradiciones que lo han constituido maestro, y que le permiten repensarse cada día para encontrarse constantemente en evolución y transformación de sus creencias, de su saber y hacer.

De esta manera, cuando se propician espacios para compartir, aprender juntos, refractarse en el otro que siente, experimenta y vive formas y maneras de enseñar y aprender, iguales o diferentes a las propias, pero al mismo tiempo con una intención de formación integral, se brinda la posibilidad de aportar a la educación de mejores seres humanos, así como a la cualificación de prácticas educativas, para generar procesos de enseñanza contextualizados y acordes a las necesidades e intereses de los estudiantes, así como a las posibilidades de aprendizaje que el maestro pueda suscitar dentro y fuera de las aulas de clase.

5.2. Líneas abiertas de investigación

Esta investigación deja abiertas algunas líneas que desde su estudio contribuirían a la educación matemática y la línea de investigación sobre el pensamiento algebraico temprano:

Si bien el horizonte teórico de esta investigación no se enfocó en la teoría de la objetivación de Radford, sino en su posicionamiento para entender el pensamiento algebraico temprano, conceptos y resultados de esta investigación, como la manera en que las maestras objetivaron la actividad matemática y su relación corpórea con las formas de pensamiento algebraico, a través del discurso y los signos, podría convertirse en objeto de estudio para futuras investigaciones.

Por otra parte, la formación a maestros, desde la teoría de la objetivación, permitiría ampliar la manera cómo desde la básica primaria, maestros y estudiantes pueden desarrollar formas de pensamiento algebraico temprano y dilucidar con ello, dentro de una investigación, cómo la formación permanente y la conformación de comunidades académicas, posibilitaría al maestro del modelo de escuela nueva, resignificar su práctica educativa y favorecer procesos de enseñanza y de aprendizaje, que propicien otros escenarios en el saber matemático desde el pensamiento algebraico.

Así mismo, teniendo en cuenta los resultados de esta investigación, donde se evidencia que es posible desde la movilización de concepciones del maestro de básica primaria desarrollar pensamiento algebraico temprano; otras investigaciones podrían suscitarse entorno a, cómo el maestro después de movilizar sus concepciones puede diseñar tareas educativas para promover en el aula de clase pensamiento algebraico temprano, a partir de la objetivación de medios semióticos y formas de pensamiento algebraico.

Finalmente, podría dilucidarse una investigación donde se analicen los procesos de generalización algebraica y generalización aritmética como medios posibles para darle significado al pensamiento matemático, para que, en su desarrollo y maduración, a través de tareas del aula, los maestros de básica primaria, a partir de la movilización de sus concepciones, promuevan pensamiento algebraico temprano sin recurrir a signos alfanuméricos del álgebra.

5.3. Dificultades y oportunidades en la investigación

Si bien el objetivo de la investigación no era diseñar una ruta metodológica que pudiese ser tomada en cuenta, para iniciar procesos donde se propenda por la movilización de concepciones en los maestros de básica primaria para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, se quiere dejar enunciada una posible ruta, emanada de los resultados

de este estudio, la cual pueda ser tenida en cuenta en procesos de formación y a la vez ser ampliada en posibles investigaciones asociadas a este fenómeno de estudio, así como en la línea de transformación de la educación desde la investigación, la innovación y las Tic, la cual acompañaré como maestra investigadora en su gestión y desarrollo desde el plan educativo del municipio de Abejorral, como se describió en este capítulo.

Así entonces, se propone una ruta que inicie con la conformación de colectivos de maestros, aquellos que, en la construcción de comunidad académica, posibiliten la interacción, el diálogo, el compartir de ideas, palabras, gestos, sensaciones, pensamientos que permitan explorar, interpretar y analizar concepciones sobre el pensamiento algebraico temprano, su inclusión en el currículo y la promoción desde los primeros grados de escolaridad. Posteriormente, proponer tareas que posibiliten desarrollar pensamiento algebraico, y posibilitar reflexiones individuales y en colectivo que permitan la movilización de estas concepciones encontradas para su promoción temprana; finalmente, realizar formación permanente que propicie la maduración del pensamiento matemático para que emerjan formas de pensamiento algebraico desde la objetivación de medios semióticos, así como el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica, elementos característicos para la emergencia del pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico.

Dentro de la investigación se presentaron algunas dificultades asociadas en el tratamiento de la información, pues la cantidad de datos fue amplia y el procesamiento manual tomó mayor tiempo del previsto; por esta condición, pudo ser conveniente hacer uso de alguna herramienta que favoreciera la sistematización de la información como a través de los procesos de codificación y categorización. Pese a esta situación, la información fue categorizada de manera satisfactoria, aunque el proceso tardó más tiempo.

Otro asunto que pudo ofrecer un reto en la investigación estuvo asociado con el diseño de tareas de formación de carácter algebraico, pues las seleccionadas fueron inspiradas en otros autores; aunque en la investigación no fue contemplado que la investigadora diseñara actividades originales, si cabe reconocer que en el devenir del estudio fue reconocida la posibilidad de pensar y crear situaciones enmarcadas en el pensamiento algebraico de autoría personal y con apoyo de las maestras participantes, sin embargo el tiempo del desarrollo del estudio transcurrió sin lograr este propósito.

Otra dificultad del estudio estuvo asociada a la pandemia mundial del Covid – 19, la cual fue declarada por la OMS una emergencia de salud pública de preocupación internacional el 30 de enero de 2020 y que sin duda, con sus altos índices de contagios, muertes, afectaciones sociales, económicas, labores, generó en mi como maestra investigadora, temor, angustia, estrés y miedo; estas sensaciones suscitaron una fuerte carga

emocional para enfrentar el ámbito familiar y laboral, generando demora en la elaboración final del documento.

Referencias

- Agudelo, C. (2000). Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Agudelo, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos(as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza del álgebra escolar. *Revista EMA*, 10(2 y 3), 375-412.
- Agudelo, C. (2007). Promoción de una enseñanza para la comprensión en el Inicio del trabajo algebraico escolar. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Ayala, R. (2008). La metodología fenomenológica-hermenéutica de M. Van Manen en el campo de la investigación educativa. Posibilidades y primeras experiencias. *Revista de investigación*, 26 (2), 409-430. Recuperado de: <https://revistas.um.es/rie/article/view/94001>.
- Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México: Publimex.
- Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (1996) *Approaches to Algebra: perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Brizuela, B., Martinez, M., & Cayton-Hodges, G. (2013). The impact of early algebra: Results from a longitudinal intervention. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 209-241.
- Cai, J., & Knuth, E. (2011). Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Cai, J., & Knuth, E. (2011). Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. London New York: Springer Science & Business Media.
- Carraher, D., & Schlieman, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. L. Jr., *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, págs. 669-706). NCTM, NC. Recuperado el abril de 2017, de <https://goo.gl/cf1G4u>
- Castro, W. (2011). Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores. Recuperado el 13 de abril de 2017, de Teoría y metodología de investigación en educación matemática: http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf
- Castro, W. (2014). Razonamiento algebraico elemental: propuestas para el aula. *Revista científica*, 3(20), 138-147. Obtenido de <https://revistas.udistrita>

- Castro, W., & Godino, J. (2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: Un estudio exploratorio. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. Blanco, *Investigación en Educación Matemática. XII Simposio de la SEIEM* (págs. 273-282). Badajoz.
- Castro, W., Godino, J., & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un desafío para la formación de maestros. En G. García, *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 92-99). Armenia: Gaia.
- Colbert, V. (1999) Mejorando el acceso y la calidad de la educación para el sector rural pobre. El caso de la Escuela Nueva en Colombia. *Revista Iberoamericana de educación* (20), 107 – 135.
- Denzin, N., Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). *Competing paradigms in qualitative research. Handbook of qualitative research*. Park, CA: SAGE Publications.
- Filloy, E.; Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Berlin: Springer.
- Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 1(32), 199-219.
- Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 26(42B), 483-511.

- Guacaneme, E., Obando, G., Garzón, D., & Villa-Ochoa, J. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11-49.
- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, M. (2014). Metodología de la Investigación, diseños del proceso de investigación cualitativa y recolección de los datos. Sexta edición, 396-506.
- Kaput, J. (1998). Teaching and learning a new algebra with understanding. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner, & C. Kieran, Research agenda for mathematics education: Vol. 4. Research issues in the learning and teaching of algebra (págs. 33-56). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The Mathematics Educator, 18(1), 139-151.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez, & P. Botero, Handbook of research on the

psychology of mathematics (págs. 23-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. En F. L. Jr, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte NC: New Age Publishing; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2008). Making use of children's power to produce algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (págs. 57-94). New York: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Manual de implementación escuela nueva. Generalidades y Orientaciones Pedagógicas para Transición y Primer Grado*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Matrices de Referencia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Mallas de Aprendizaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Molina, M. (2007). *La integración del pensamiento algebraico en educación primaria*. En M. Camacho, P. Flores, & M. Bolea, *Investigación en educación matemática* (págs. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Molina, M. (2009). *Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria*. PNA, 135-156.

Moretti, V. D. (2007). *A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem*. En M. O. Moura, *A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural* (p.213). Brasília: Liber Livro.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

-NCTM-, N. C. (1998). Curriculum and evaluation standards for school mathematics.

Reston, United States: National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge (plenary conference). (P.

Ponte, & F. Matos, Edits.) Proceedings of the XVIII International Conference for

the Psychology of Mathematics Education (PME), I, 195-210.

Ponte, J., & Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge and Practice. En A.

Gutierrez, & P. Boero, Handbook of research on the psychology of mathematics

education: Past, present and future (págs. 461–494)). Róterdam The Netherlands:

Sense.

Ponte, J., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and

development. En L. English, Handbook of international research in mathematics

education (págs. 225- 236).

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., &

Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers'

Learning in. (R. Even, & D. Ball, Edits.) The Professional Education and

Development of Teachers of Mathematics, 185 - 209. doi:10.1007/978-0-387-

09601-8 17

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. Educación

Matemática, 12(1), 51-69.

- Radford, L. (2002). Algebra as tekhné: artefacts, symbols and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1 (1), 31-56
- Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A semiotic perspective. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2010b). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. C. Knuth, *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (págs. 303-322). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. En S. J. Cho, *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12)* (págs. 675-694). Seúl, Korea: National University of Education.

- Radford, L. (2013a). Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez, & M. Molina (Edits.). Granada, España: Comares.
- Radford, L. (2013b). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
- Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2007). Bringing out the algebraic character of arithmetic: from children's ideas to classroom practice. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.
- Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., & Lara-Roth, S. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox, *Proceedings of the 27th PME International Conference* (págs. 127–134).
- Van Manen, M. (2003). Investigación educativa y experiencia vivida. Ciencia humana para una pedagogía de la acción y de la sensibilidad. Barcelona: Idea books.
- Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Bogotá: Universidad Distrital.
- Vergel, R. (2015a). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.

- Vergel, R. (2015b). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 68, 9-17.
- Vergel, R. (2016a). Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Vergel, R., & Rojas, P. (2018). Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: UD.
- Wagner, S., & Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. In: *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston, VA: NCTM-LEA. p. 220 –237.
- Zapata, S. M. (2020). Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano. *Tesis Doctoral*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Anexos

Anexo 1. Consentimiento informado de las maestras participantes en la investigación



FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACION AVANZADA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

INVESTIGACIÓN EN CURSO: MOVILIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES DEL
MAESTRO DE BÁSICA PRIMARIA, PARA EL DESARROLLO DEL
PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

ESTUDIANTE DE MAESTRÍA: July Marcela Londoño Ospina

OBJETIVO GENERAL: analizar como el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en la comunidad de profesores; además, permite la revisión de todas las producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo de maestría.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del o la participante:

Cédula:

Lugar y fecha (día/mes/año): 12 JUNIO 2019. Abejorral-Ant.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACION AVANZADA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

**INVESTIGACIÓN EN CURSO: MOVILIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES DEL
MAESTRO DE BÁSICA PRIMARIA, PARA EL DESARROLLO DEL
PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO**

ESTUDIANTE DE MAESTRÍA: July Marcela Londoño Ospina

OBJETIVO GENERAL: analizar como el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en la comunidad de profesores; además, permite la revisión de todas las producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo de maestría.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del o la participante:

Cédula:

Lugar y fecha (día/mes/año): Absejoral, 42 de Junio de 2019



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACION AVANZADA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

**INVESTIGACIÓN EN CURSO: MOVILIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES DEL
MAESTRO DE BÁSICA PRIMARIA, PARA EL DESARROLLO DEL
PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO**

ESTUDIANTE DE MAESTRÍA: July Marcela Londoño Ospina

OBJETIVO GENERAL: analizar como el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Apreciado(a) maestro(a):

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con las interacciones y discusiones que se generen en la comunidad de profesores; además, permite la revisión de todas las producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado trabajo de maestría.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al estudio.
- Garantizar que solo la investigadora tendrá acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este estudio.

Nombre del o la participante:

Cédula:

Lugar y fecha (día/mes/año): Abesjarral Junio 12 2019

Anexo 2. Autobiografías de las maestras participantes en la investigación

Maestra Sol. Soy docente de Básica Primaria, en los grados de cuarto y quinto de la I.E.R Zoila Duque Baena. Licenciada en educación básica primaria y promoción a la comunidad y Especialista en pedagogía de la recreación ecológica, trabajo con el modelo educativo de escuela nueva, un modelo flexible que me parece muy importante para el trabajo con aulas multigrado, donde trabajamos con diferentes grados y con todas las áreas, es un modelo que permite interactuar más con los estudiantes y tener como orientador las guías para llevar los procesos educativos. En mi experiencia he tenido la oportunidad de trabajar con la escuela graduada y creo que allí uno se limitaba a la preparación de un material para dictar las clase y pare de contar, todos los estudiantes en el aula están en el mismo tema y uno se remitía como decían anteriormente a dictar o tiza y tablero, este modelo me ha permitido pensarme otras posibilidades, estrategias de llegar a mis estudiantes, porque implicó el reto de tener varios grados al mismo tiempo, esperando lo mejor de su maestra.

Desde muy pequeña jugaba a ser profesora, por lo que soñaba que en algún momento con mi esfuerzo y con el apoyo de mi familia lo iba a lograr. El gusto por la docencia estaba desde mi primaria y se afianzo más cuando pase a la secundaria, veía cada vez más cercano cumplir con este sueño. Recuerdo de forma muy particular a mis profes y comparaba la forma de enseñar de ellos, en ese entonces eran muy fuertes con nosotros y me indignaba que me trataran mal a mí y a mis compañeros(as), esto hizo que mi deseo fuese fuerte de hacerme docente, para mostrar que habían otras formas de enseñar y tratar mejor a los estudiantes. También mi deseo de ser docente parte del gusto por la integración permanente

con los niños y por el amor al trabajo, experiencia de vida y profesión en la que llevo 27 años.

Después de terminar mi bachillerato y con la claridad que lo que quería era dedicarme a los niños y a la comunidad desde mi labor como docente, se abrieron las puertas en el Magdalena Medio con la ayuda de un Jefe de Núcleo de ese entonces, me ofrecieron unos reemplazos los cuales se hacían mediante la modalidad de contratos fijos y fue algo complejo porque finalmente termine trabajando gratis, pero con la satisfacción que estaba haciendo lo que me gustaba. Me ofrecieron luego otro contrato en el Corregimiento de la Danta en Sonsón y lo tomé con mucho miedo pensando en que la parte económica se podía perder nuevamente, pero siempre con la convicción de seguir creciendo en mi labor.

Finalmente empecé a percibir ingresos y me enruté casi que inmediatamente a hacer la Licenciatura con la Universidad Santo Tomas, sabía que era un paso más, para afianzarme mejor en mi profesión. Mientras estudiaba en la universidad seguía laborando mediante la modalidad de contratos y al tiempo cuando se dio la posibilidad de vincularme ya había culminado mis estudios de pregrado. Después tuve la posibilidad de regresar al municipio y me afiancé como docente en la I.E.R Zoila Duque Baena, donde he podido enseñar a muchos niños y niñas con amor y dedicación para ayudar a transformar sus vidas.

Mi interacción con las matemáticas es muy buena, aunque no es mi área de formación me gusta mucho, disfruto aprendiendo de los conocimientos matemáticos para enseñarlos a mis niños, y que así ellos también puedan tener una buena interacción, desde la preparación de los temas, trato de ilustrarme de la mejor manera para llegar con mayor seguridad a

ellos, quienes responden de forma satisfactoria, incluso he recibido comentarios de algunos padres de familia diciendo que mi formación pareciese fuera en el área de matemáticas, eso me hace sentir muy bien. He buscado métodos para que mi enseñanza sea didáctica y mis estudiantes disfruten de dicha materia, propiciando así que ellos no le cojan fobia.

Maestra Luna. Soy docente de básica primaria en los grados de primero y segundo en la Institución Educativa Rural Zoila Duque Baena, Sede Educativa María Restrepo de Restrepo, lugar en el que trabajo feliz por el amor de mis niños. Normalista Superior, Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas, Especialista en lúdica educativa y Magíster en educación.

Desde muy niña siempre me incliné hacia la profesión docente y ello se reflejaba en mis juegos, pues siempre me gustaba ser la profesora cuando jugábamos a la escuelita. Cuando llegué a la adolescencia siempre tuve afinidad con los niños y las niñas y me llamaba la atención el trabajo con ellos. Cuando estuve en la media quise perfilarme hacia la profesión médica pero siempre predominó el gusto por la docencia y de hecho me iba muy bien cuando en la Escuela Normal Superior nos pusieron a pagar el servicio social en las guarderías comunitarias. Disfrute mucho este espacio y considero que fue uno de los momentos que me ayudo a definir mi vocación. Finalmente me gradué y tuve la oportunidad de cursar el ciclo complementario donde pude fortalecer mi amor por la profesión y tener un buen desempeño.

Mi primera experiencia en la docencia fue en la Fundación Educadora Infantil Carla Cristina donde trabaje la estrategia de atención a la primera infancia del programa Buen Comienzo en los niveles de jardín y transición en la ciudad de Medellín. Luego, pase a laborar en la IER Zoila Duque Baena donde trabajo con los estudiantes de primero y segundo bajo el modelo de escuela nueva hace 12 años.

En el año 2013 tuve la oportunidad de ser docente tutora del Programa Todos a Aprender del MEN en el corregimiento de Margento del municipio de Caucasia en el departamento de Antioquia, donde trabaje con docentes en estrategias de mejoramiento de la enseñanza de las áreas de lenguaje y matemáticas, fue una experiencia de vida a nivel personal y profesional que me dejó huellas significativas y me confirmó la importancia de la formación docente para reflexionar sobre la práctica y aportar mejores procesos a nuestros estudiantes.

A partir de mis años de experiencia en el modelo educativo flexible de Escuela Nueva, puedo decir que permite la flexibilización de la enseñanza en términos del contexto, importante para un país como Colombia que posee tanta población rural, en tanto el modelo permite que los estudiantes de zonas rurales puedan acceder de manera formal a la educación. En este sentido da respuesta a una necesidad de aula multigrado y se adapta a las condiciones culturales y a la heterogeneidad de la población.

Considero a su vez, que el modelo tiene fortalezas y debilidades, puesto que las guías permiten un aprendizaje autónomo y al ritmo del estudiante, pero a su vez el sistema escolar gubernamental no va en correspondencia a esta flexibilización, nos exigen períodos

académicos y promociones al finalizar el año. Así mismo considero que las guías de aprendizaje son un gran apoyo, pero se hace necesario acudir a otras estrategias de enseñanza y aprendizaje, por ejemplo, considero que las del grado primero no corresponden al nivel escolar de los niños de este grado, ya que los niños requieren de una metodología personalizada para iniciar sus primeras bases. Por otra parte, en el grado segundo, oriento los procesos de aprendizaje desde el trabajo con las guías de aprendizaje, pero también realizó algunas adaptaciones curriculares.

La interacción con las matemáticas en los grados donde enseño es muy didáctica en tanto trato de que las actividades sean llamativas para los estudiantes y para mí. Acudo mucho al juego y a los diversos materiales del medio que permiten su aplicación. Aunque para los estudiantes en grados iniciales las matemáticas son como un monstruo gigante y complejo, yo trato de hacer que estas sean llamativas y de fácil comprensión.

Maestra Estrella. Soy docente de preescolar en la Institución Educativa Rural Zoila Duque Baena, sede María Restrepo de Restrepo. Soy licenciada en pedagogía infantil de la Universidad de Antioquia, actualmente estudiante de especialización en pedagogía y didáctica de la Universidad Católica de Oriente. El modelo educativo de la sede es el de escuela nueva, el cual se caracteriza, entre otras cosas, porque cuenta con un maestro multigrado, es decir, aquel que atiende varios grados al tiempo. Este modelo se basa en las Pedagogías Activas, una metodología de interacción comunitaria, dando un especial protagonismo a las familias y una propuesta didáctica soportada por unidades y guías

basadas en los lineamientos y estándares propuestos por el MEN, las cuales presentan una secuencia didáctica para las áreas fundamentales y son el recurso base que utilizan los docentes.

Llegue a la práctica educativa pocos meses después de haber obtenido mi título como licenciada, en esta experiencia dure 2 años, la cual consistió en el trabajo con un grupo de 29 niños entre los 2 y 3 años de edad en el proyecto de Buen comienzo Antioquia, en esta oportunidad debíamos de pensarnos prácticas pedagógicas que permitieran el desarrollo de competencias en los niños y niñas de primera infancia, bajo el modelo del constructivismo y teorías como las de Ausubel, Bruner, Montessori; de allí pase a vincularme en el sector público desde el 2015, sumando así 7 años de experiencia entre uno y otro. Pero, antes de esto, debo contar que desde muy pequeña quise ser profe de preescolar y este deseo no nació de un gusto por los niños y las niñas, fue más bien por la posibilidad que me dio la vida de ver a mi mamá (quien es maestra jubilada) en el aula de clases en una escuela rural, al crecer viendo como la educación, a través de ella, era decisoria en la vida de los niños y niñas empezó a crecer en mí el deseo de ser maestra y más aún en los primeros años, los cuales son determinantes para el ser humano.

Poco sabía yo en esos años de lo que era pedagogía y que detrás de todo lo que ella hacía había intencionalidades definidas y pensadas bajo una serie de competencias que quería desarrollar en sus estudiantes, sin embargo, me sorprendía las habilidades que desarrollaban sus estudiantes entre una visita y otra, las cuales eran esporádicas. Así pues, una vez terminado mi bachillerato en la Escuela Normal Superior de Abejorral, se me dio la posibilidad de ingresar a la universidad y de mudarme a la ciudad a construir mi proyecto

de vida, con unas bases sólidas que me permitieron culminar los diez semestres de la licenciatura y me abrieron las posibilidades que tiene el estudio de la pedagogía no solo como campo aplicado sino también en aspectos investigativos.

Finalmente, en mi experiencia con los niños y las niñas de preescolar, puedo decir que ellos se relacionan con las matemáticas desde lo cotidiano, es decir, desde el uso en el contexto, ellos aprenden a clasificar sin saber desde lo teórico el concepto y su significado, hacen ejercicios de aritmética al sumar los animales que pueden tener en sus casas o el número de familiares con los que vive. Mi idea ha sido cambiar la concepción de las matemáticas como la materia aburrida, al potenciar esta dimensión humana se desarrolla el pensamiento lógico, porque para mí las matemáticas van más allá del aprendizaje de fórmulas o teoremas, es el desarrollo del pensamiento crítico, es enseñar a razonar, de manera que puedan usar estas habilidades en contexto.

Anexo 3. Participación en eventos y publicaciones

En el transcurso de la investigación tuve la oportunidad de participar en la XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM), XV Inter-American Conference on Mathematics Education, realizada en la ciudad de Medellín, Antioquia, Colombia, entre el 05 y el 10 de mayo de 2019.

En dicha Conferencia Interamericana presente la Comunicación Breve: Movilización de las Concepciones en la Actividad Matemática para la Enseñanza del Álgebra Temprana, la cual posteriormente fue publicada como artículo en el libro: Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019*. Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.