



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**Modelación matemática. Una alternativa que
posibilita la reflexión de objetos matemáticos**

Duban Alexi Arboleda Monsalve

Jose Alejandro Pino Higueta

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2020



Modelación matemática. Una alternativa que posibilita la reflexión de objetos matemáticos

Duban Alexi Arboleda Monsalve

Jose Alejandro Pino Higueta

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas y Física

Asesora

Dra. Paula Andrea Rendón-Mesa

Línea de investigación:

Educación Matemática

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación.

Medellín, Colombia

2020

Dedicatoria.

A nuestras familias, por su apoyo incondicional durante todo este proceso formativo. Agradecemos a Dios por todas sus bondades. A su vez, agradecemos de manera especial, a nuestra asesora Paula Andrea, por tanta paciencia, esfuerzo y dedicación para con nosotros y la investigación. Y por último, agradecemos a todas las personas que de una u otra forma hicieron posible la realización de este trabajo.

Contenido

Lista de Figuras.....	5
Lista de Tablas	5
Resumen.....	6
Abstract.....	7
1. Planteamiento del problema.....	8
1.1 Antecedentes, una experiencia de aula.....	8
1.2 Revisión de la literatura	15
1.2.1 Practicidad de los objetos matemáticos	15
1.2.2 El Lenguaje, Un instrumento para la comunicación en matemáticas.	16
1.3 Delimitación de la problemática	19
1.4 Objetivo General.....	20
2. Marco Teórico.....	20
2.1 La modelación matemática	21
2.1.1 La modelación matemática como estrategia de enseñanza.....	22
2.2 Fases de las actividades modelación matemática	24
2.3 Objetos Matemáticos	26
2.4 Pensamiento reflexivo.....	27
3. Metodología de la investigación	30
3.1 Metodología cualitativa	31
3.2 La Hermenéutica.....	32
3.3 Diseño Metodológico.....	33
3.3.1 Primer momento. Reconocimiento de la situación	34
3.3.2 Segundo Momento. Interpreta y conceptualiza	35
3.3.3 Tercer Momento. Investigación, recolección de datos e interpretación	36
3.3.4 Cuarto Momento. Comunicación.....	36
4. Valoración de las actividades de Modelación.....	37
4.1 La Rúbrica como elemento de valoración	38
4.2 Criterios.....	38
4.3 Rubrica	41

5. Conclusiones.....	46
Referencias.....	48
Anexo.....	56

Lista de Figuras

Ilustración 1. Relación entre lenguaje, practicidad y pensamiento reflexivo	29
Ilustración 2. Comentarios para la rubrica	41
Ilustración 3. Índice de Calidad del Aire.	60
Ilustración 4. Gráfica Lineal	62
Ilustración 5. Calidad del Aire.	¡Error! Marcador no definido.

Lista de Tablas

Tabla 1. <i>Fragmentos de practicidad de objetos matemáticos</i>	10
Tabla 2. <i>Fragmentos del Diario Pedagógico referidos al lenguaje.</i>	13
Tabla 3. <i>Sesiones por momento en la guía metodológica</i>	34
Tabla 4. <i>Relaciones entre momentos de modelación matemática, lenguaje y practicidad</i>	34
Tabla 5. <i>Criterios de evaluación</i>	39
Tabla 6. <i>Descripción Niveles de Logro</i>	40

Resumen

Este trabajo de investigación se enmarca en un contexto de educación pública y se realizó en la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín. En esta institución, a partir de clases magistrales en el aula con estudiantes de Educación Media, en particular de grado once, se identifican limitantes para referir objetos matemáticos y a su vez la practicidad de los mismos. Con ello, también se reconocen algunas falencias en cuanto al uso del lenguaje como un instrumento para la comunicación en matemáticas que se evidencia en la falta de articulación entre comprensión, argumentación y explicación. Las anteriores falencias llevaron a identificar falta de pensamiento reflexivo por parte de los estudiantes en el quehacer matemático. Estas limitaciones expuestas configuran el problema que se desarrolla a lo largo de la investigación. Con base en lo anterior, se proponen las actividades de modelación matemática como una estrategia de enseñanza y aprendizaje, que posibilite la reflexión de los objetos matemáticos a partir de la comprensión de los mismos, de su practicidad y su interpretación por medio del lenguaje como instrumento de comunicación. Adicionalmente, la rúbrica y los criterios permitieron la valoración de las actividades de modelación para cumplir el objetivo propuesto.

Palabras Clave: Pensamiento reflexivo, lenguaje, practicidad, objetos matemáticos, modelación matemática.

Abstract

This research work is framed in a context of public education carried out at the Institution Educativa Escuela Normal Superior de Medellín. In this institution, starting from master classes in the classroom with students of Secondary Education, particularly of grade eleven, limits are identified for referring mathematical objects and in turn the practicality of them. This also acknowledges some shortcomings in the use of language as a communication tool in mathematics. This is evident in the articulation between understanding, argumentation and explanation. When these aspects mentioned above converge, a lack of reflective thought is generated on the part of students in mathematical work. This configures the problem that develops throughout this research. Based on the above, mathematical modeling is proposed as a teaching and learning strategy that allows the reflection of mathematical objects from the understanding of them making use of their practicality and their interpretation through language as an instrument of communication. Additionally, the rubric and criteria allowed the assessment of the modeling activities to meet the proposed objective.

Keywords: Reflexive thinking, language, practicality, mathematical objects, mathematical modeling.

1. Planteamiento del problema

En el momento que nos referimos al planteamiento del problema, queremos hacer alusión a las ideas que configuran el proceder investigativo. Es decir, en este capítulo se definen los fundamentos a partir de la experiencia y de una corta revisión de la literatura que determinan las acciones como investigadores. Para esta investigación, la práctica en el aula permitió reconocer limitantes en el lenguaje de los estudiantes para referir objetos matemáticos y al mismo tiempo, su uso práctico. En cuanto a la revisión de la literatura se reportan aspectos que se relacionan con el pensamiento reflexivo (Kurt, 2018; León, 2014; Villarini, 2003) y cómo éste se configura a la luz de la practicidad de los objetos matemáticos y del uso del lenguaje. Para finalizar, se delimitará la problemática de investigación, la pregunta y objetivo que guiarán la investigación.

1.1 Antecedentes, una experiencia de aula

La Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia presenta la práctica pedagógica como la fase inicial de los maestros en formación a la escuela. Es el escenario en el cual el docente dispone del saber disciplinar, pedagógico y didáctico en el aula en busca de reflexionar acerca de ellos en un contexto académico real. “En coherencia con ello, los espacios de práctica pedagógica deben aportar a que el futuro profesor desarrolle visiones y acciones propias de la indagación en las aulas que apunten a un mejoramiento continuo acerca de su quehacer profesional” (Facultad de Educación, 2019).

Con el ánimo de ampliar las visiones disciplinares, pedagógicas y didácticas, además de las investigativas, los autores de este documento realizaron la práctica pedagógica en la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín de carácter público, la cual tiene como misión formar futuros maestros con competencias académicas, pedagógicas e investigativas.

Dicha práctica pedagógica se realiza con estudiantes de Educación Media pertenecientes a estratos socioeconómicos 1, 2 y 3 con edades entre los 16 a 18 años. Las acciones que se realizaron en este proceso se relacionan con el desarrollo de metodologías y de contenidos que aportan a la consecución de los objetivos que se plantean en cada clase presencial y con la evaluación y el seguimiento del curso. Además, dentro de las acciones investigativas, hacen parte también la indagación en el ambiente de aprendizaje, las reflexiones en diarios pedagógicos y la revisión de la literatura para dar sustento a las dinámicas investigativas. A partir de tales acciones y en convergencia con Dewey (1989) se logra evidenciar algunas dificultades para los estudiantes en relación con aspectos que configuran el pensamiento reflexivo, los cuales son el lenguaje y la practicidad de los objetos matemáticos.

Para efectos de la investigación, la practicidad se comprende como la relación de los objetos matemáticos con su sentido de aplicación y utilidad. Ella involucra la experiencia y el contexto del estudiante (Sánchez, Santos & Ariza, 2005). En el aula se evidencia que la carencia de ese sentido práctico en los estudiantes les genera dificultades de manera particular en el momento de una toma de decisiones efectiva, es decir, aquellas que son útiles y conscientes para buscar soluciones a situaciones problemáticas. Para dar cuenta de ello, se presentan en la **Tabla 1** apartados del diario pedagógico que permitieron dilucidar asuntos expuestos con anterioridad.

Tabla 1. *Fragmentos de practicidad de objetos matemáticos*

Fragmento	Practicidad
<p>Se les dificulta realizar un despeje de variables. Se confunden y no saben cómo proseguir al momento de despejar una incógnita como lo es la ‘Y’ en este caso, refiriéndonos a una ecuación general de la recta.</p> <p>Tomado de D. Arboleda (Comunicación personal, septiembre, 2018)</p>	<p>Los estudiantes, al no comprender el uso que se le puede dar en su cotidianidad a asuntos relacionados con rectas y sus valores, tienen gran dificultad para responder preguntas e inquietudes relacionadas con problemas que involucren dicho tema.</p>
<p>El grupo tenía dudas respecto a las ecuaciones utilizadas para hacer las gráficas en los ejemplos planteados, por lo cual también se les muestra que se puede graficar una línea recta al encontrar el intercepto de la misma con el eje ‘x’ e ‘y’. Sin embargo, al momento de realizar el despeje de las variables para encontrar los valores en donde la recta se intercepta con los ejes anteriormente mencionados se les dificulta hacer dichas operaciones. Después de “superado” este obstáculo, nos encontramos con que los estudiantes no son capaces de realizar la gráfica a partir de la información obtenida con antelación.</p> <p>Tomado de J. Pino (Comunicación personal, septiembre, 2018)</p>	<p>De nuevo, se hallan inconvenientes relacionados con el encontrar valores en ecuaciones y en particular, con la representación de los mismos en el plano coordenado. Lo cual da muestra de una limitante relacionada con la practicidad del pensamiento espacial puesto que se evidencia una falta de asimilación de lo conceptual en relación con la praxis al momento de pasar de una ecuación a la representación de la misma.</p>
<p>Posible evidenciar que se presentan problemas con los signos al momento de realizar operaciones. Además, se les dificulta realizar la suma de fracciones que no son homogéneas.</p> <p>Tomado de J. Pino (Comunicación personal, febrero, 2019)</p>	<p>Es común que, en los estudiantes, se presenten dudas relacionadas con operaciones en su cotidianidad como son la suma y la resta, máxime en el momento que los valores a sumar o restar son fracciones. Lo cual es debido a que son operaciones que ellos, no suelen utilizar en la interacción con el otro.</p>
<p>Cabe resaltar, que en el momento en que los estudiantes realizaban el taller de cónicas, se notaban algo desmotivados y preguntaban que las parábolas para que les iba a servir en un futuro, que no le ven la utilidad a ese tipo de temas en su vida y que, para ellos, se hace innecesario su aprendizaje.</p> <p>Tomado de D. Arboleda y J. Pino. (Comunicación personal, octubre, 2018)</p>	<p>En esta situación, se evidencia fuertes limitantes en los estudiantes en relación con la utilidad de las parábolas en su cotidianidad. Las cuales están relacionadas de forma directa con fenómenos físicos, aplicabilidad en los deportes entre otras.</p>

Fragmento	Practicidad
<p>Estudiantes en grado 11, se les dificultad aplicar las propiedades de potencias al momento de realizar actividades o talleres en los que sea menester utilizar los conceptos correspondientes. Tomado de D. Arboleda (Comunicación personal, junio, 2019)</p>	<p>Los estudiantes tienen dificultades para comprender que una potencia es una multiplicación abreviada cuyo objetivo es reducir operaciones y escritura en situaciones del contexto como en la economía, las ciencias entre otras.</p>
<p>Aun así, y con las herramientas ya proporcionadas con anterioridad para la solución de los ejercicios, el estudiante solo se limita a observar tanto los enunciados como las propiedades, pero no procede a dar solución a lo requerido. Indica que no tiene la capacidad para resolver los planteamientos puesto, que no sabe cómo aplicar el conocimiento ya adquirido. Tomado de D. Arboleda (Comunicación personal, marzo, 2019)</p>	<p>El estudiante se le dificulta tomar un rol activo en la solución del ejercicio. Se presenta una barrera de aprendizaje, pues no interpreta dicho ejercicio a la luz de las herramientas que posibilitan los objetos matemáticos. De ello, se infiere que el estudiante no les encuentra el sentido los conocimientos asociados y por tanto se dificulta su aplicación.</p>

En la **Tabla 1**, se puede evidenciar inconvenientes con asuntos conceptuales referentes al despeje de variables, ecuación de la recta, gráfica de funciones, aspectos en relación con la suma y resta de fracciones y elementos propios de las parábolas; los cuales hacen parte de la configuración de los objetos matemáticos. Se puede indicar que los estudiantes tienen problemas para comprender el objeto matemático al que alude y por tanto, el proceso correspondiente. Además, poca relación le encuentran con su quehacer cotidiano a cada uno de los objetos descritos con antelación.

La falta de relación con lo cotidiano, se vincula con el hecho de que los estudiantes en su formación matemática trabajan en todo momento a partir de la recepción del conocimiento y la transcripción de información. Dicha situación limita el tener un componente práctico donde los estudiantes puedan visualizar la relación existente entre la teoría del objeto matemático y la cotidianidad que lo permea. Por ello, se generan problemas al momento de visualizar la

elaboración del trazo de una recta por medio de dos puntos, por ejemplo, como se menciona en uno de los fragmentos que se presentaron en la **Tabla 1**.

La observación en el contexto escolar en la cual se realiza la investigación, permitió identificar que los estudiantes suelen estar acostumbrado a un ambiente en el cual las matemáticas son un asunto de uso común. Es decir, se utilizan para realizar operaciones básicas que requieran en una determinada situación. Debido a ello, en el momento en que en la escuela se enfrenta a conceptos diferentes a lo cotidiano, no le encuentra un sentido práctico, asunto que imposibilita su gusto por las mismas.

El segundo aspecto que se menciona en la investigación es el lenguaje, el cual hace referencia a la capacidad del ser humano de expresar y representar conocimiento por medio de la oralidad, escritura, gestos, etc. Dewey (1989) considera que el lenguaje en el contexto escolar debe trascender factores sociales y comunicativos ordinarios; a la vez debe velar por un uso intelectual de este. Así, es posible pensarlo, como un instrumento al servicio de la comunicación y por tanto del pensamiento reflexivo. Es decir, que, a partir del acto comunicativo, se logren argumentaciones y explicaciones de los objetos matemáticos en cuestión.

Con base en lo anterior, se observa en el aula que la carencia del lenguaje como instrumento para la comunicación, muestra la dificultad que presentan los estudiantes para expresar sus ideas, interpretaciones y argumentos de la actividad matemática. Además, como menciona el Ministerio de Educación Nacional en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) la formulación de preguntas, las observaciones, las conjeturas, la reunión y la evaluación de información acerca de los objetos matemáticos. Con ello, se pone en evidencia problemas en la comprensión de los mismos que se presentan mediante lenguaje oral, grafico, etc.

Con relación al sentido práctico de los objetos matemáticos, en el aula se observa que los estudiantes se les dificultan encontrar relaciones que involucren el lenguaje y la comunicación de dichos objetos con factores externos, como lo son su experiencia y el contexto en la actividad matemática. Para dar cuenta de ello, se presentan en la **Tabla 2**, ciertos apartados del diario pedagógico que han permitido evidenciar el asunto en cuestión.

Tabla 2. *Fragmentos del Diario Pedagógico referidos al lenguaje.*

Fragmentos	Carencia del lenguaje
<p>Se menciona la distancia focal (f) en un ejemplo, los estudiantes plantearon que si la parábola abre hacia el eje x o $-x$; la respuesta (se pregunta por la distancia focal) va a ser p o $-p$. Sin embargo, interpretan y expresan de manera incorrecta el concepto de foco en la clase de matemáticas, puesto que halla su relación en otro contexto. Tomado de J. Pino (Comunicación personal, agosto, 2018)</p>	<p>Los estudiantes presentan conjeturas acerca del objeto matemático que carecen de contexto. En la discusión y puesta en común sus expresiones y argumentos son persuasivo, pues son emocionales y sin fundamentos teóricos.</p>
<p>En clase de líneas rectas paralelas, perpendiculares y secantes, se muestra un ejemplo de dos rectas paralelas en un mismo plano. Se plantea lo siguiente: una de las rectas se inclinará un poco con el fin de que dejen ser paralelas. Con ello se propone la pregunta ¿se cortarán en algún punto? Los estudiantes presentan observaciones sin relación con la temática e indican que no se cortan, sus argumentos se basan en la parte graficada de las rectas. Además, al describirla grafica de las líneas rectas en un primer momento las presentan como finitas. Tomado de D. Arboleda (Comunicación personal, septiembre, 2018)</p>	<p>Los estudiantes mencionan que las líneas rectas deben ser finitas, pues no hallan una relación entre la representación gráfica de la línea recta y los conceptos. Adicional a ello, el lenguaje evidencia que no se presenta articulación entre la argumentación y comprensión del objeto matemático.</p>
<p>Se menciona que la ecuación general de las parábolas necesita un momento de pensar en las condiciones que conocemos, para no cometer errores y malinterpretaciones en la solución de las actividades propuestas. Por ello, se resalta en el discurso la importancia de una buena lectura del problema, variables, etc. Se observa que a los estudiantes se les dificulta relacionar la representación algebraica y la</p>	<p>El lenguaje como instrumento para la comunicación en matemáticas, posibilita en los estudiantes la comprensión de objetos matemáticos en sus diferentes representaciones. Además, permite la comprensión del sentido y significado de dicho objeto.</p>

gráfica de los objetos matemáticos. En caso de que venga precedida por enunciados verbales o escritos el problema se agudiza.

Tomado de D. Arboleda (Comunicación personal, octubre, 2018)

El examen de línea recta muestra un problema de proceder en los estudiantes. A pesar de que la pendiente de un ejercicio era negativa; lo cual significa que la línea recta decrecía, muchos la graficaron creciente y de manera sencilla. Acomodan los puntos (P) y (Q) de modo que la recta quede positiva en la gráfica. Con ello se evidencia que los estudiantes logran hallar conclusiones en lenguaje algebraicos, pero tienden a confundirse en el momento de explicar sus hallazgos, tanto manera verbal, como ocurrió en algunas situaciones de clase, como en otras formas de expresar, ejemplo de ello las gráficas.

Tomado de J. Pino (Comunicación personal, septiembre, 2018)

Lograr explicaciones argumentadas acerca de las actividades matemáticas que se realizan en clase, indican apropiación del objeto matemático, lo cual se evidencia en el lenguaje. Adicional a ello, este permite al estudiante la discusión y confrontación con sus pares.

En la práctica pedagógica se observa que ciertos estudiantes se toman las nociones y significados de acuerdo con sus ideas y sus conocimientos previos. Un ejemplo, es en el momento que se relaciona el foco de una sección cónica con una fuente de luz, como se enuncia en uno de los fragmentos en la **Tabla 2**. Es decir, la puesta en común de dichos objetos matemáticos se realiza sin reflexión alguna, asunto que se reconoce en el aula por expresiones descontextualizadas. Por ende, se suelen presentar argumentos a sus planteamientos que carecen de relación en su representación matemática, a partir del lenguaje oral, escrito, grafico, etc.

A los estudiantes se les dificulta desarrollar y apropiarse de habilidades y destrezas asociadas con el lenguaje, como son la lectura, la exposición de determinado tema, el ordenamiento de ideas, la formulación y la reformulación de hipótesis, etc. Las cuales permiten fomentar su pensamiento reflexivo acerca de los objetos matemáticos.

Adicionalmente, en la práctica de aula también se evidencia que las respuestas generadas por parte de los estudiantes en las actividades matemáticas suelen ser, aparentemente, de forma inconsciente y sin planificación. Por tal motivo, presentan dificultades para exponer sus procedimientos y sus hallazgos; por ejemplo, de una situación que requiere una respuesta de manera literal, a la cual llegan a partir de un modelo matemático como se pone de manifiesto en el segundo apartado de la **Tabla 2**. Por ello, es necesario generar los medios que posibiliten en estudiantes de Educación Media el desarrollo del pensamiento reflexivo, a partir de la practicidad de los objetos matemáticos y del lenguaje como instrumento de comunicación de los mismos.

1.2 Revisión de la literatura

1.2.1 Practicidad de los objetos matemáticos

Es común observar en la práctica pedagógica como las clases de matemáticas se orientan de forma magistral. Para su realización, se hace uso de métodos tradicionales entre otras formas que se han naturalizado en la enseñanza. El docente expone y el estudiante recibe el saber que se le proporciona. Al respecto Pochulu y Font (2011) plantean que:

Básicamente, se enseña matemáticas con exposición, seguida de ejercicios sobre los contenidos vistos. Este modelo de enseñanza deja a los alumnos la responsabilidad de dar sentido a los objetos matemáticos que se introducen a través de los ejemplos y ejercicios que se muestran en el aula (p. 373).

Al respecto conviene decir que no es claro si el estudiante asume la tarea de darle sentido a los objetos matemáticos o se comporta como un espectador que adquiere información. Al tiempo que él trata de reflexionar acerca del objeto matemático y darle sentido al mismo, tiende a confundirse porque se le dificulta relacionar asuntos que observa en clase con su cotidianidad.

Así, se evidencia entonces que carece de argumentos para retomar los temas aprendidos con anterioridad y que en teoría no le son ajenos.

Por lo anterior, el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes al igual que los procesos que se asumen en ella, no es del todo significativos y por tanto, carecen de un valor de importancia para los estudiantes, asunto que dificulta el alcance de su saber. Ante esto, encuentran los objetos matemáticos como algo falto de un sentido práctico en su cotidianidad, puesto que, se les imposibilita ver su utilidad en el entorno y genera falta de reflexión.

El sentir de los estudiantes referente a que las matemáticas no son útiles en su quehacer cotidiano, genera que solo estén interesados en una buena nota (Yoshimura, 2015) en la aprobación del curso y en pasar al siguiente grado, sin mostrar interés o preocupación alguna por conocer su aplicabilidad. Ahora bien, “sólo en la medida que un conocimiento [matemático] nos sea útil y aplicable, éste se concretará y aprenderá de manera significativa, por tanto, adquirirá sentido y realidad” (Villalobos, 2008, p. 42). Es necesario entonces, que en el aula de clase se genere la forma de guiar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, de tal modo que se pueda relacionar el concepto con su sentido práctico y propiciar de esta manera, una reflexión de los estudiantes acerca de los objetos matemáticos (Kurt, 2018).

1.2.2 El Lenguaje, Un instrumento para la comunicación en matemáticas.

En el aula, la puesta en común de los objetos matemáticos por parte del docente hacia sus estudiantes es un proceso que, de manera general, se logra a través de sistemas de representación verbal, gráfica, algebraica, etc. Al respecto, Powell y Nelson (2017) indican que la enseñanza de las matemáticas requiere un componente de vocabulario basado en el lenguaje, con referencias

específicas del área y de la cotidianidad para su aprendizaje. Como menciona Jiménez (2010) esté es eje articulador entre la comprensión y la argumentación de dichos objetos en el aula.

A través del lenguaje se da muestra de las primeras relaciones entre los objetos matemáticos y su representación en un contexto determinado, por ello, se estiman las matemáticas como una forma de discurso, puesto que son inseparables. (Tabach y Nachlieli, 2015; Calderón, 2012). Así, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, el lenguaje como instrumento para la comunicación cumple un papel fundamental en la construcción de conocimiento, pues posibilita el desarrollo del lenguaje natural, transversal y transdisciplinar.

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los sistemas de representación permean en la configuración, planeación y el transcurso de una clase, puesto que dichos sistemas configuran el lenguaje con el cual se interviene en el aula. Ahora bien, su uso en la escuela debe señalar a la practicidad y la comunicación de los objetos matemáticos y por ende a la reflexión de los mismos por parte de los estudiantes. Uno de los cinco procesos a desarrollar en la escuela es la comunicación, lo cual permite, según el MEN (1998):

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.
- Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.
- Producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes. (p. 74)

Así, es posible afirmar que es a través del lenguaje, como instrumento para la comunicación, que los estudiantes pueden dar cuenta de sus interpretaciones, argumentaciones y explicaciones. Para lograr esta finalidad, el MEN (1998) en los lineamientos curriculares de matemáticas sugiere buscar respuestas a la actividad y tarea matemática por medio de la oralidad, escritura, etc. Esta propuesta está en total concordancia con los planteamientos de Tabach y Nachlieli (2015) y Powell y Nelson (2017) acerca de la tesis que plantea la matemática y el lenguaje como inseparables.

Es preciso indicar que no basta con llevar la matemática a un lenguaje coloquial para que los estudiantes logren comprensiones de ésta, puesto que se hace necesario que el pensamiento surja como un proceso de construcción en la formación del estudiante (Jiménez, Suárez y Galindo, 2010). El proceso de construcción de pensamiento al cual se refiere la presente investigación es el reflexivo, en la cual el lenguaje adquiere la labor de ser el instrumento que permite el dialogo, la discusión, la confrontación, etc. Por su parte, la practicidad dota de significado el conocimiento.

Para el docente, es necesario ser muy cuidadoso con el lenguaje en la enseñanza de un objeto matemático. La ambigüedad que se crea a partir de la relación de éste con las referencias en contexto hace que surjan dificultades en la reflexión de dichos objetos. Puesto que el lenguaje propio de las matemáticas se malinterpreta por el contexto y las experiencias previas, y genera así, ideas alternativas que pueden ser erróneas y confusas.

Refiriéndonos a las ideas alternativas, es decir, ideas que pueden ser erróneas; Powell y Nelson (2017) mencionan que un estudiante puede reconocer un término perteneciente a las matemáticas. Por ejemplo, volumen y comprender que está en relación con el sonido de un parlante, pero no reconocer el significado matemático del término como tal. Así mismo, hay

algunas situaciones similares, que evidencian una carencia de reflexión acerca de los objetos matemáticos muestra de ello, es el hecho ya mencionado en la **Tabla 2** de relacionar el foco de una elipse con una fuente de luz.

Ahora bien, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, surge el pensamiento reflexivo en el instante de interiorizar el conocimiento acerca de los objetos matemáticos. Este pensamiento general, se da a partir de relacionar dichos objetos con la practicidad de los mismos, la solución de una situación problemática y el lenguaje como instrumento para comunicar sus hallazgos. Es decir, una clase de matemáticas debe fomentar la reflexión de los objetos matemáticos, hacer uso de situaciones contextualizadas, vivencias experienciales, entre otras (Rosa y Orey, 2015).

1.3 Delimitación de la problemática

El pensamiento reflexivo surge como producto de lograr interiorizar los objetos matemáticos propuestos, a la luz de las facultades mentales, es decir, a través de la capacidad que tiene el hombre para aprender. Villarini (2003) afirma:

El pensamiento reflexivo consiste en el empleo deliberado y sistemático de nuestros recursos mentales a la luz del propósito o meta de entender, explicar, manejar, decidir o crear algo. Es el pensamiento orientado a la solución de problemas y la toma de decisiones eficaces y efectivas, es el pensamiento instrumental por excelencia (p. 597).

Se identifica entonces el problema de investigación, el cual hace referencia a la falta de pensamiento reflexivo acerca de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes. Esta problemática, se configura y se hace evidente en el momento que en el aula convergen aspectos referentes al lenguaje y la practicidad de los objetos matemáticos.

Por esta razón, a través de la investigación se indagará una alternativa para propiciar en los estudiantes el pensamiento reflexivo. A partir de allí, se quiere buscar una solución a situaciones con ayuda de estrategias como las actividades de modelación matemática. Molina-Mora (2017) y Peña-Páez y Morales-García (2016) y resaltan que este tipo de modelación en el aula va a permitir la reflexión acerca de los objetos matemáticos, encontrándose un sentido práctico a las mismas al hacer uso del lenguaje. Esta se pierde en el momento que la matemática pasa a ser un área enfocada en la algoritmia, la mecanización de procedimientos y el aprendizaje memorístico.

En consonancia con lo anterior, planteamos la pregunta de investigación: ¿A qué criterios deben responder las actividades de modelación matemática para que posibiliten en estudiantes de Educación Media un pensamiento reflexivo alrededor de objetos matemáticos?

1.4 Objetivo General.

Proponer actividades de modelación matemática que posibiliten, en estudiantes de Educación Media, el pensamiento reflexivo alrededor de objetos matemáticos.

2. Marco Teórico.

Como se indicó en el capítulo anterior, esta investigación se ocupará de un problema que se relaciona con la falta de pensamiento reflexivo por parte de estudiantes de Educación Media en la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín. Dicho problema se configura a partir de la convergencia de asuntos que se vinculan con el sentido práctico de los objetos matemáticos y el uso del lenguaje como herramienta para comunicar su conocimiento en matemáticas. Por lo anterior, se plantea la modelación matemática como una alternativa de

enseñanza y aprendizaje que posibilita el desarrollo de este pensamiento en los estudiantes. Asimismo, se indica la relación existente entre el lenguaje y la practicidad de los objetos matemáticos con el pensamiento reflexivo.

2.1 La modelación matemática

En el contexto escolar, la modelación es una actividad orientada a la búsqueda de representaciones matemáticas de un fenómeno u objeto de estudio. Una posibilidad que ofrece es abordar de forma matemática situaciones, que no estén incluidas en el campo del saber matemático (Almeida y Brito, 2005). Es decir, dichas situaciones pueden tener un trasfondo social, cultural, económico, entre otros. A su vez, dicha actividad se constituye como un espacio de interrogantes que posibilitan la aplicación y la conceptualización de los objetos matemáticos.

Como lo menciona Almeida y Silva (2012) un aspecto importante en una actividad de modelación matemática es la necesidad de que los estudiantes, a partir, de una situación que se problematiza, asocien los objetos y alcancen soluciones acerca de la problemática que se plantea. Este objetivo se logra a partir de la formulación, análisis, interpretación y comprensión de la situación, que se alcanza a partir de la modelación. Además, esta estrategia metodológica busca explicitar esa relación existente entre el mundo matemático a partir de los objetos que involucra y lo cotidiano, es decir, el contexto en el que están inmersos los estudiantes; dicha estrategia propicia espacios donde ellos sean partícipes de esa relación y a partir de ella, reflexionen acerca del objeto involucrado.

El contexto del estudiante, la experiencia y la utilidad del objeto matemático, son aspectos fundamentales a desarrollar en el pensamiento del estudiante, pues permite establecer el sentido práctico de dichos objetos y por tanto, relacionarlos con su cotidianidad. En la escuela, un punto

de convergencia para describir o lograr esta interrelación entre las situaciones del mundo real y las matemáticas es la modelación (MEN, 1998). Pues entre las posibilidades que ofrece, está representar a través de modelos matemáticos situaciones para su posterior solución.

La modelación matemática está ligada al estudio de situaciones en contexto y por ello se consolida como una alternativa para llevar los objetos matemáticos a la escuela. Villa-Ochoa (2016) menciona:

La literatura internacional reporta que a través de ella [la modelación], los estudiantes recrean prácticas matemáticas, constituyen una imagen de las matemáticas articuladas a sus usos y sus aplicaciones en diferentes contextos, incursionan en el estudio de fenómenos que ocurren en su cotidianidad a través de la matemática, desarrollan habilidades y capacidades, entre otros (p, 11).

Además, las habilidades y capacidades que el estudiante desarrolla al hacer uso de la modelación, mediadas por el lenguaje presente en su contexto, posibilitan la comprensión del objeto matemático y así fomentan en ellos la configuración del pensamiento reflexivo.

2.1.1 La modelación matemática como estrategia de enseñanza

La modelación matemática, como estrategia de enseñanza y aprendizaje tiene claros sus objetivos pedagógicos en el área. Al respecto, Trigueros (2009) afirma:

Se pueden distinguir dos tipos de corrientes, una didáctica en la que los modelos se utilizan para estructurar y promover el proceso de aprendizaje de los alumnos, y otra que se puede considerar de carácter conceptual en la que el papel de la modelación es clave para introducir nuevos conceptos y para desarrollarlos. (p, 78)

En este sentido, la matemática debe llevarse en un ambiente que promueva procesos de cuestionamiento y de reflexión en torno a los objetos en la cual, recursos como las actividades de modelación posibilitan la construcción de modelos que evidencian relación entre variables (Trigueros, 2009). Adicional a ello, el uso de esta estrategia busca poner en evidencia diferentes condiciones contextuales y experienciales de la practicidad de los saberes y conocimientos matemáticos (Molina-Mora, 2017).

Así mismo, la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje puede ser una alternativa no sólo en la solución de situaciones problemas, sino también al momento de su análisis e interpretación (Bravo-Bohórquez, Castañeda-Rodríguez, Hernández-Yomayusa y Hernández-Hernández, 2016). Puesto que se busca que el estudiante de manera consciente e intencionada, planeé, actúe y verifique su quehacer en las actividades matemáticas, para lograr interiorizar los objetos involucrados en ellas.

Respecto a la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje, Biembengut y Hein (2004) indican que ésta “parte de un tema y acerca de él desarrolla cuestiones o preguntas que quiere comprender, resolver o inferir. Esas preguntas deberán ser respondidas mediante el uso del conjunto de herramientas matemáticas y de la investigación acerca del tema” (p. 107). Se establece entonces una relación entre los objetos matemáticos y la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje, puesto que los modelos que se desarrollan surgen como representaciones de los objetos involucrados.

Ahora bien, en las actividades de modelación matemática, se posibilita el establecer relaciones entre el lenguaje y la practicidad de los objetos matemáticos. Esta se constituye como una alternativa en la enseñanza y el aprendizaje de dichos objetos. Para lograrlo, los conceptos

de situación inicial y final de los planteamientos de Almeida y Silva (2012) toman especial relevancia en la metodología a desarrollar en las actividades de modelación.

Por situación inicial y final, se entiende que la primera hace referencia a la situación problema, en ella, se identifica el contexto, las limitaciones, utilidades y posibilidades en las que esta se enmarca. Mientras que la segunda, alude al modelo matemático, con él se busca la solución al problema a través de conceptos, procedimientos y la argumentación (Almeida y Silva, 2012). Adicional a ello, se puede inferir acerca de dichos autores y en relación con el pensamiento reflexivo, que las fases de modelación matemática propuestas en su investigación hacen de la situación inicial y final una fuente de reflexión alrededor de objetos matemáticos, puesto que los actos comunicativos y el sentido práctico están en correspondencia. Para efectos de la investigación, se asumirá la situación problema como una situación inicial con base en los planteamientos de Almeida y Silva (2012).

2.2 Fases de las actividades modelación matemática

En las actividades de modelación matemática, se pueden indicar varias fases las cuales orientarán el proceder de esta investigación. Primero está la situación inicial o problema, en esta primera parte la modelación, tiene como objetivo identificar características y limitaciones para desarrollar y darle respuesta a la problemática que se plantee, comprender dicha situación, agrupar las ideas y fijar lo que se quiere lograr en la búsqueda de la solución del problema (Almeida y Silva, 2012), en donde la interpretación basado en la experiencia del estudiante dan inicio a la configuración del pensamiento reflexivo lo cual conduce a una reflexión del objeto matemático que se trabaje.

En la segunda fase, se tiene la investigación. En este aspecto, Almeida y Silva (2012) indican que este proceso se refiere al investigar, al establecer una representación mental de la situación, interpretación de los hechos, lo que de manera cognitiva se podría llamar como una comprensión de la situación inicial, al igual que es pertinente estructurar o simplificar la información acerca de ésta. En la actividad de modelación, el momento investigativo es una invitación a que el estudiante de manera consciente e intencionada establezca las relaciones que guiará su actuar.

La tercera fase es el modelo matemático. Como la situación inicial viene dada en un lenguaje natural, resulta necesario hacer una transformación a un lenguaje matemático lo que posibilita evidenciar el problema a ser resuelto. Lo anterior es mediado por las relaciones existentes entre las características de la situación planteada, los conceptos, técnicas y procedimientos necesarios para representar en matemáticas el problema planteado (Almeida y Silva, 2012). El MEN (1998) indica que este modelo permite generalizar, demostrar, probar, combinar y hallar relaciones con fórmulas matemáticas; lo cual posibilita su análisis, por parte de los estudiantes.

La cuarta fase, son los análisis de resultados. En ella, se realiza un proceso de evaluación por parte de los estudiantes a la actividad de modelación, enfrentándose a la idea de comparación, distinción de ideas y generalización de hechos, lo cual se articula con las diferentes áreas del conocimiento. (Almeida y Silva, 2012). De esta forma, se puede dar cuenta de la utilidad que tiene el objeto matemático trabajado, al igual que reflexionar acerca de éste a partir de conclusiones construidas y la experiencia adquirida que posibilitó de la modelación matemática.

Para finalizar, se presenta la quinta fase, divulgación y argumentación de resultados. Consiste en argumentar y tratar de convencer a los modeladores de la consistencia y pertinencia

de los resultados que se hallaron, tanto desde el punto de vista de las matemáticas como del punto de los artefactos asociados a esta representación de la situación de estudio.

En este sentido, la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje plantea formas y métodos de llevarla al aula, su introducción depende de los objetivos que se planea alcanzar y el público a quien se le presentará dicha propuesta, en este caso particular, a estudiantes de Educación Media. La modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje, reconoce en el contexto y en situaciones extra-matemáticas, un valor agregado a las actividades y la reflexión que hacen los estudiantes. Esta reflexión, posibilita que el estudiante establezca conexiones entre la vida cotidiana y los objetos matemáticos (Muñoz-Mesa, Londoño-Orrego, Jaramillo López y Villa-Ochoa, 2014; Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen, Doorman, y Robitzsch, 2014).

2.3 Objetos Matemáticos

Gómez (2013) y Tabach y Nachlieli (2015) mencionan que los objetos matemáticos surgen de una caracterización (organización o interpretación) del contexto, que se relaciona con la significación del lenguaje que se utiliza en matemáticas la cual permite su descubrimiento. Tabach y Nachlieli (2015) toman estudios, acerca del desarrollo del lenguaje matemático en las aulas, como punto de partida para indicar que los objetos adquieren sentido a partir de la utilidad que se le otorga y la totalidad de las acciones que se realizan a luz de ellos.

Los objetos matemáticos son cualidades que se abstraen del mundo físico y, por tanto, son objetos con existencia real que no necesariamente debe ser una existencia material, puesto que son producto de la razón y del análisis humano. Su utilidad se adquiere a partir del momento en que el objeto es puesto en evidencia con una reinterpretación de las ideas (Gómez, 2013;

Tabach y Nachlieli 2015). Un ejemplo de ello podría ser la geometría, que tiene su génesis en las prácticas agrimensuras.

Por su parte, Godino, Batanero y Font (2012) manifiestan que los objetos matemáticos no se reducen a simples definiciones, símbolos o relaciones con otras nociones, pues los consideran insuficiente para describirlos en la actividad matemática. Por su parte, plantean asuntos complementarios, como estrategias de enseñanza, representación, etc. De esta forma, se configura y se hace explícito al objeto en un ambiente de aprendizaje puesto que, a través del lenguaje que se utiliza en el aula, los ejemplos que se llevan a la misma y el concepto que se trabaja delimita los objetos matemáticos.

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la delimitación de dichos objetos matemáticos permite plantear una relación con el lenguaje. Esta relación se configura a través de actos de comunicación. En ella, se determinan asuntos acerca de los fenómenos, problemas, entre otros. Para lograr dicha delimitación se tiene como base los contenidos y los conocimientos propios de la matemática.

2.4 Pensamiento reflexivo

Phan, (2008) y Avilés, (2014) en sus trabajos referentes al pensamiento reflexivo, indican que éste tiene su génesis en los planteamientos del filósofo y pedagogo Norteamericano John Dewey, en su libro *How We Think*. En dicho libro Dewey (1989) menciona que: “Lo que constituye el pensamiento reflexivo es el examen activo, persistente y cuidadoso de toda creencia o supuesta forma de conocimiento a la luz de los fundamentos que la sostienen y las conclusiones a las que tiende” (p. 10). Referente a tal argumento, la reflexión que el estudiante realiza es producto de la observación y la valoración que hace de forma consciente e intencionada acerca

de los objetos matemáticos así, posibilita el establecer su apreciación acerca de la enseñanza recibida. De esta manera, asume las consideraciones necesarias para proceder en las actividades matemáticas y evaluar las conclusiones alcanzadas referentes a la reflexión realizada acerca del objeto matemático.

En consonancia con los planteamientos expuestos, González-Moreno (2012) y Mera y Yachimba (2016) consideran que el pensamiento reflexivo se asume como la capacidad propia del ser humano de pensar de forma activa y se manifiesta a través de actos conscientes e intencionados, como la planeación, la acción, la regulación y la verificación en las actividades matemáticas. En virtud de la adquisición, la interpretación y la aplicación de los conocimientos, la reflexión debe estar orientada al análisis y la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas alrededor de los objetos matemáticos.

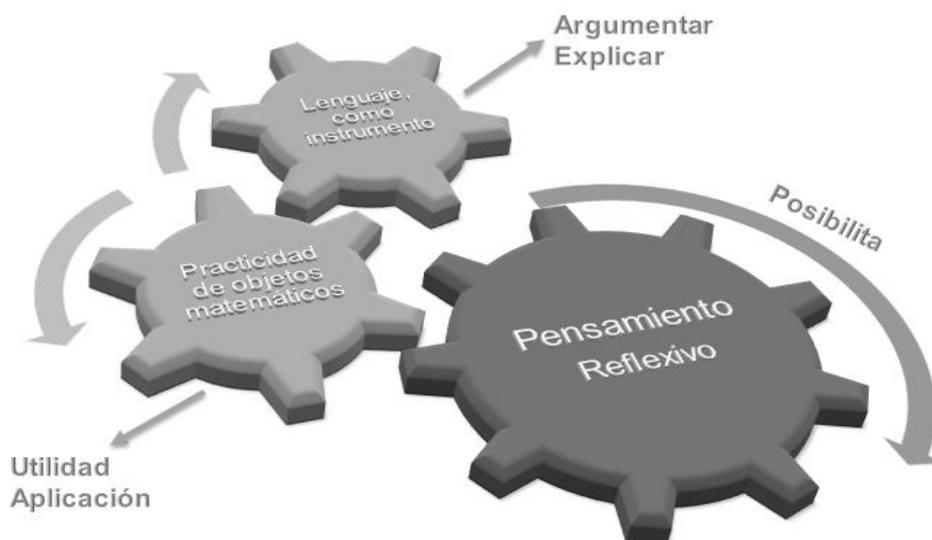
Varios autores (Ekawati y Asih, 2019; Fernández-Fernández, Arias-Blanco, Burguera-Condon y Fernández-Raigoso, 2016; Peñas y Flores, 2005) indican que el pensamiento reflexivo es un proceso mental de unificación de ideas a partir del contexto para lograr un objetivo, generar conocimientos y facilitar la toma de decisiones. De esta manera, dicho proceso supone una manifestación y toma de conciencia en los estudiantes acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Dewey (1989) además indica que el lenguaje es el instrumento para dar cuenta de la capacidad del pensamiento reflexivo. En el estudio que realiza, se enfoca en mostrar la conexión existente entre la formación del pensamiento y el lenguaje. Por ello resalta su alcance pedagógico pues para este autor, su uso debe movilizar conocimientos, puesto que permite ampliar el vocabulario y la formación de hábitos de discurso lógico; que en la escuela se puede ver reflejado a través de actos comunicativos como los que se enuncian con anterioridad.

Es por ello que, González-Moreno (2012) dice que mediante el lenguaje se tiene la capacidad de reformular el propio pensamiento entendiéndose éste como un pensamiento reflexivo. En la escuela, este pensamiento es esencial para la solución y la interpretación de situaciones problemas, pues los estudiantes no solo responden a preguntas, sino que expresan por medio del lenguaje, los procesos que ocurren en su mente para hallar dicha solución y así poder dar muestra de su razonar (Salido y Dasari, 2019). Por esta misma línea, Kurt (2018) señala que este pensamiento se canaliza hacia problemas prácticos que generan dudas, antes de encontrarles posibles soluciones.

Sánchez, Santos y Ariza (2015) consideran que la reflexión permite “evaluar la realidad, observándola, relacionándola, criticándola, para hacer juicios calificados, al utilizar niveles hasta lograr el último, y así dar soluciones creativas y efectivas a su práctica” (p, 145). Así, como se muestra en la **Figura 1**, la relación entre el pensamiento reflexivo, la practicidad de objetos matemáticos y el lenguaje se hace más evidente, pues se puede abordar dichos objetos en su aplicabilidad y utilidad; a partir de situaciones que sean cercanas a los estudiantes. Adicional a ello, la comunicación que logra el estudiante es una importante evidencia de su pensamiento reflexivo, puesto que puede argumentar, explicar y exponer sus hallazgos (Salido y Dasari, 2019).

Figura 1. Relación entre lenguaje, practicidad y pensamiento reflexivo



Fuente: Autores de la investigación

3. Metodología de la investigación

En este capítulo, se declaran los criterios que se adoptan en la elección del soporte conceptual que guiará la metodología de la investigación. Este trabajo se delimita en la metodología cualitativa, pues se reconoce que el pensamiento reflexivo implica visibilizar asuntos que posibilitan dar sentido a los objetos matemáticos a través de la practicidad y del lenguaje. Por esta razón se aborda la hermenéutica como concepción teórica, puesto que su estudio permite al investigador describir, interpretar y dar un significado a las actividades de modelación enmarcadas en el pensamiento reflexivo. De este modo, se define los momentos que se desarrollarán en la guía metodológica, con las actividades de modelación propuestas.

Así mismo y en congruencia con los planteamientos de Almeida y Silva (2012), se propone la modelación matemática como estrategia clave para la elaboración de la guía metodológica y la posterior construcción de la rúbrica para su valoración. En la rúbrica se exhiben los criterios a los que deben responder las actividades de modelación matemática para que, de

esta manera, posibiliten en estudiantes de Educación Media la reflexión alrededor de los objetos matemáticos y así dar respuesta a la pregunta de investigación planteada al inicio de este trabajo.

3.1 Metodología cualitativa

La metodología cualitativa, como afirma Cauas (2015): “Es aquella que utiliza preferente o exclusivamente información de tipo cualitativo y cuyo análisis se dirige a lograr descripciones detalladas de los fenómenos estudiados” (p. 2). Por otro lado, Hernández, Fernández y Baptista (2010) indican que:

El enfoque cualitativo se selecciona en el momento que se busca comprender la perspectiva de los participantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investigará) acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados, es decir, la forma en que los participantes perciben subjetivamente su realidad. (p. 364)

Con base en lo anterior, en esta investigación, la metodología cualitativa va a permitir comprender el significado de las acciones presentes en la actividad de modelación, al momento de abordar los objetos matemáticos en situaciones que emergen del contexto. Este hecho también va a posibilitar que, a partir de dichas actividades de modelación, se propicie el uso del lenguaje matemático. De esta manera, al conectar el lenguaje con el objeto matemático y su practicidad en la situación del contexto, se da cuenta de la existencia del pensamiento reflexivo.

La metodología cualitativa, se caracteriza por ser holística, concretrizadora, inductiva, flexible y manejar un lenguaje conceptual y metafórico (Olabuénaga, 2012). Esto implica que la evaluación de la actividad de modelación se oriente a la descripción detallada y ordenada de las acciones que se haya en el proceso de investigación.

3.2 La Hermenéutica

La Hermenéutica es una metodología cualitativa, orientada a la descripción e interpretación de textos, experiencias o representaciones (como pueden ser: comportamientos, observaciones, sistemas conceptuales, etc.), de las cuales se pretende construir o extraer una significación. Surge como alternativa de análisis en problemáticas que se cuestionan por el entendimiento de fenómenos en un contexto determinado, por ello busca responder preguntas del tipo ¿Qué?, ¿Cómo?, ¿Por qué?, etc. Que posibilitan la comprensión del fenómeno o problema que se evidencia.

Arráez, Calles y de Tovar (2006) entienden la Hermenéutica: “Como una actividad de reflexión (...), es decir, una actividad interpretativa que permite la captación plena del sentido de los textos en los diferentes contextos por los que ha atravesado la humanidad” (p. 174). Dicha interpretación debe estar mediada por argumentos que se fundamentan en la indagación teórica y la incorporación de conocimientos, ideas y opiniones del investigador al igual que por el contexto en el que se sumerge puesto que este es un factor importante con relación a la interpretación que el investigador asume de la literatura.

Así pues, en el momento que en la presente investigación se recurre a la hermenéutica, se hace referencia a los objetos de estudio que requieren de una interpretación por parte del investigador para poder comprender en su totalidad lo que en el texto se indica. Medina-Moya (2014) menciona que, en la hermenéutica, el investigador asume el papel de lector intérprete. Lo cual, se hace a la luz de la literatura y discursos que relacionan a los individuos y sus acciones presentes en las actividades de modelación matemática.

En este sentido, la rúbrica de evaluación analítica que se presenta en el **Capítulo 4**, al ser un objeto de estudio producto de la investigación, también es un texto que requiere un abordaje

hermenéutico para lograr su comprensión y vinculación con la guía metodológica. Por ello, en la medida que la rúbrica posibilita la evaluación de las actividades de modelación matemática, su interpretación permite evidenciar los elementos del pensamiento reflexivo inmersos en ella.

Así, con la hermenéutica como metodología de investigación, se construye, aclara y comprende el significado de las acciones del pensamiento reflexivo presentes en las actividades de modelación; es decir, en qué momentos y cómo se involucra la practicidad de los objetos matemáticos con el lenguaje

3.3 Diseño Metodológico

En correspondencia con lo propuesto en el marco teórico acerca de la modelación en el aula, la propuesta de intervención se enmarca como estrategia de enseñanza y aprendizaje, pues la misma acude a objetivos pedagógicos que permiten generar procesos de reflexión en los estudiantes. Asimismo, las actividades de modelación matemática bajo esta mirada permiten el estudio de objetos matemáticos.

Para definir los momentos de intervención se siguen los planteamientos de Almeida y Silva (2012): La situación inicial, investigación o indagación, la formulación del modelo matemático, análisis e interpretación del modelo y una argumentación o divulgación. Con base en lo anterior, se proponen los siguientes momentos en la guía metodológica que se recogen en el **Anexo**.

Cada momento de la guía metodológica está dividido en diferentes sesiones, las cuales se detallan en la **Tabla 3**. Es necesario tener en cuenta que cada una de ellas tiene una duración de 60 minutos. Se sugiere que, al momento de realizarse, se trabaje en parejas con el ánimo de generar discusiones que posibiliten las reflexiones a la luz de cada actividad

Tabla 3. *Sesiones por momento en la guía metodológica*

Momento propuesto	Sesiones por momento
Reconocimiento de la situación	2
Interpreta y conceptualiza	2
Investigación, recolección de datos e interpretación	4
Comunicación	4

En la **Tabla 4** se sugieren elementos del lenguaje y la practicidad que se relacionan con los diferentes momentos de las actividades de modelación y contribuyen con el desarrollo del pensamiento reflexivo.

Tabla 4. *Relaciones entre momentos de modelación matemática, lenguaje y practicidad*

Momentos de las actividades de Modelación	Lenguaje	Practicidad
Reconocimiento de la situación	Interpretación	Experiencia
Interpreta y conceptualiza	Comprensión	Contexto
Investigación, recolección de datos e interpretación	Sentido y significado	Funcional
Comunicación	Concluir, Argumentar	Aplicabilidad de los objetos matemáticos

3.3.1 Primer momento. Reconocimiento de la situación

Ekawati y Asih (2019) menciona que el pensamiento reflexivo es el proceso de unir información con experiencias reales. Por ello, en el primer momento se plantea una situación inicial que aqueja a los habitantes del Valle de Aburrá, la cual es la contaminación del aire. Parte de esta problemática se debe a que, por sus condiciones meteorológicas, la circulación excesiva de vehículos y otros factores suele verse perjudicada en determinados periodos de tiempo. Este fenómeno, deja a la ciudad como una de las más contaminadas del país.

Así, en este primer momento se propone una serie de preguntas abiertas a partir de la situación planteada, de modo que los estudiantes reconozcan dicha problemática como algo que los afecta basados en sus experiencias previas, es decir, a partir de la información adquirida por diferentes medios de comunicación como son las redes sociales, la prensa (digital o física), la televisión, la radio o conversaciones en las que estuvieron presentes ya sea como partícipes o como simples espectadores. Con ello, en correspondencia con el MEN (1998) se busca que planteen sus primeras conjeturas y preguntas acerca del objeto matemático presente en este primer momento.

Asimismo, se quiere que haya una primera reflexión de la situación, puesto que los estudiantes identifican las primeras características y limitaciones de la actividad de modelación. En este primer momento, el actuar del investigador será de observador participante.

3.3.2 Segundo Momento. Interpreta y conceptualiza

En este momento, los estudiantes plantean las primeras relaciones entre la situación inicial (contaminación ambiental) y el objeto matemático (funciones matemáticas). Powell y Nelson (2017) recomiendan hacer uso de sistemas de representación, como escritos, gráficos, algebraicos, etc. Para su consecución, se proponen una serie de preguntas con el objetivo de que ellos identifiquen (a la luz de ciertos planteamientos acerca del crecimiento anual de autos y la cantidad de material particulado) aspectos de las funciones como el tipo de relación, las variables utilizadas en dichos estudios, la dependencia de ellas, tablas de valores, tipos de crecimiento, etc.

Como menciona Aravena, Caamaño y Giménez (2008) en su propuesta de intervención, este momento puede ser utilizado para lograr la conceptualización del objeto matemático con base a procesos de significación gradual, a partir, de la situación inicial y no necesariamente de

las definiciones formales. Así, se introducen conocimientos y nociones asociadas a dicho objeto, lo cual permite su visualización por parte de los estudiantes y propicia un proceso de reflexión a partir de este.

3.3.3 Tercer Momento. Investigación, recolección de datos e interpretación

En este momento se propone una situación inicial, en la cual es necesario investigar y realizar un estudio en el que, a partir de los objetos matemáticos, se justifique el uso del pico y placa ambiental en el área metropolitana del valle de Aburrá. La situación es propuesta para que los estudiantes, a partir de sus conocimientos del contexto que se plantea en un inicio y los objetos matemáticos existentes en dicho planteamiento, puedan dar respuesta a este asunto.

Con base en lo anterior, se proponen dos etapas: la primera consiste en la obtención de datos acerca de la circulación de vehículos que utilizan combustibles fósiles. En la segunda, se propone la creación de un modelo gráfico a partir de los datos obtenidos con anterioridad y la cantidad de material particulado adecuado para la salud humana. Este gráfico permitirá la solución al planteamiento propuesto. Es por ello que se sugiere preguntas que involucren el objeto matemático y la interpretación del modelo con base a la situación.

3.3.4 Cuarto Momento. Comunicación

En esta oportunidad, se sugiere la evaluación de la guía metodológica en donde a través del dialogo, la confrontación, y la discusión, como mencionan Jiménez, Suárez, y Galindo (2010) se evidencien los asuntos que, por medio de las actividades de modelación, permiten generar reflexiones en torno a los objetos matemáticos a partir del lenguaje que los describen. Es decir, a

partir de cada uno de los momentos planteados en la guía metodológica, se busque evidenciar si se presenta un pensamiento reflexivo o no alrededor de los objetos matemáticos.

4. Valoración de las actividades de Modelación

Debido a la actual contingencia sanitaria producida por el SARS – CoV – 2 (Covid – 19), un hecho que no es ajeno a nuestro actuar como investigadores, se ha imposibilitado el normal desarrollo de la intervención en el aula de la guía metodológica propuesta en este trabajo. Por esta razón, se propone un espacio de valoración por parte de expertos en el tema al que esta investigación hace alusión. Para realizar la valoración, se presentan unos criterios a tener en cuenta que se relacionan de forma directa con la configuración del pensamiento reflexivo. Tales aspectos, se delimitan por dos elementos de los cuales se hace mención a lo largo de la investigación: el lenguaje y la practicidad de los objetos matemáticos. Adicional a ello, se propone evaluar cada uno de los momentos de modelación matemática indicados en el capítulo 3. Ellos se desarrollan en la guía metodológica según los planteamientos de Almeida y Silva (2012).

El instrumento elegido para la evaluación de este trabajo, es una rúbrica, puesto que ella permite, realizar una evaluación de la guía metodológica e indicar si responde a la pregunta de investigación ¿A qué criterios deben responder las actividades de modelación matemática para que posibiliten en estudiantes de Educación Media un pensamiento reflexivo alrededor de objetos matemáticos?

4.1 La Rúbrica como elemento de valoración

Con el propósito de valorar el diseño metodológico propuesto en el **Capítulo 3** y sintetizado en el **Anexo**, el cual se refiere a las actividades de modelación que posibiliten el pensamiento reflexivo, se propone la elaboración y el diseño de un instrumento de evaluación, que tiene como finalidad evidenciar al evaluador y demás lectores, asuntos referentes a dicho proceso de pensamiento en los estudiantes.

La rúbrica se diseña de tipo socio - informativa, la cual es un instrumento de evaluación que se caracteriza por integrar aspectos cualitativos y cuantitativos. Hernández-Mosqueda, Tobón-Tobón y Guerrero-Rosas (2016) señalan que esta rúbrica permite al evaluador, valorar el desempeño en la realización de procesos, criterios o evidencias de aprendizaje. Mediante este tipo de rúbrica, se busca abordar el pensamiento reflexivo y en él, los objetos matemáticos, su practicidad y el lenguaje utilizado para su comunicación a partir de la información existente en el trabajo de investigación.

La rúbrica de evaluación socio-informativa, se clasifica según Hernández, J. (2016) de dos formas: sintetizadora que realiza una evaluación general sin tener en cuenta los criterios que se propongan, y la analítica, que se caracteriza por valorar cada uno de los criterios o evidencias de aprendizaje por separado. En la presente investigación, se propone una rúbrica socio-informativa de tipo analítica puesto que, en esta, se establecen indicadores detallados de cada uno de los componentes a evaluar, con el fin de favorecer la retroalimentación posterior al proceso evaluativo.

4.2 Criterios

En este apartado se delimitan los criterios a tener en cuenta para la construcción e interpretación de la rúbrica, los cuales van a estar orientados en la configuración del pensamiento

reflexivo; es decir, a partir de la convergencia entre el lenguaje y la practicidad de los objetos matemáticos; puesto que son las limitantes encontradas en el aula y que se desarrollan en toda la investigación. Con base en lo anterior, se presentan varios elementos teóricos expuestos a lo largo de la investigación, los cuales se recopilan en la **Tabla 4**. Ellos serán analizados por expertos en el tema, pues permiten evidenciar e identificar los aspectos a evaluar.

Tabla 5. *Criterios de evaluación*

Elementos del pensamiento reflexivos	Acciones de cada elemento	Autores
Lenguaje	Permite representaciones tales como: verbales, escritas, graficas, etc.	Powell, S. & Nelson, G. (2017)
	Expresar, interpretar, conjeturar y preguntar	MEN (1998), Peñas, M. Flores, P. (2005). León, F. R. (2014)
	Articular argumentación y comprensión	Jiménez, A. (2010)
	Desarrollar lenguaje natural, transversal y transdisciplinar	Calderón, D. I. (2012).
	Concluir, explicar y exponer	Dewey, J. (1989)
	Comprender sentido y significado	Powell, S. & Nelson, G. (2017)
	Dialogo, discusión y confrontación	Jiménez, A., Suárez, N., & Galindo, S. (2010).
	Aplicabilidad de los objetos matemáticos	Villalobos, X. (2008).
	Funcionalidad (que sea útil)	Gómez, C. (2013). Tabach, M., & Nachlieli, T. (2015).
	Practicidad	Recurre a la experiencia del estudiante
Promueve la reflexión en contexto		Ekawati, M., & Asih, E. (2019).), Fernández-Fernández-Fernández, S., Arias-Blanco, J. M., Fernández-Alonso, R., Burguera-Condon, J., & Fernández-Raigoso, M. (2016). Peñas, M. Flores, P. (2005).

Elementos del pensamiento reflexivos	Acciones de cada elemento	Autores
	Toma de decisiones	Villarini (2003)
	Muestra de la utilidad del objeto (abarca explicar, evaluar e indicar la solución encontrada)	Sánchez, S., Santos, M., & Ariza, M. (2005).
	Permitir el hacer del estudiante en el contexto	León, F. R. (2014)

La elaboración de la rúbrica se basa en cuatro apartados: los indicadores de evaluación, los niveles de logro, las observaciones del evaluador y las proyecciones. La primera, se compone por cada uno de los momentos de modelación descritos en la guía metodológica. En este apartado, se dan cuenta de los elementos que se espera encontrar y alcanzar durante ejecución de la guía y cuyo resultado final, es la respuesta a la pregunta de investigación. Por niveles de logro, se entiende el grado de completitud de cada uno de los ítems descritos en los indicadores de evaluación. Dichos niveles, están comprendidos por la siguiente ponderación: inicial-receptivo, básico, autónomo y estratégico.

A continuación, se detallan cada uno de los niveles en la **Tabla 6**. La cual, es una adaptación de la tabla propuesta por Tobón, Prieto y Fraile (2010)

Tabla 6. Descripción Niveles de Logro

Nivel de Logro	Descripción
1. Inicial-Receptivo	<ul style="list-style-type: none"> - Consiste en la recepción de información. - Es un desempeño muy básico y operativo en el que apenas tienen nociones acerca de las actividades de modelación.
2. Básico	<ul style="list-style-type: none"> - Se resuelven problemas sencillos del contexto. - Se presentan algunas acciones del pensamiento reflexivo. - Es un desempeño básico en el que se tienen nociones acerca de la actividad. - Se poseen varios conceptos básicos de la actividad de modelación

3. Autónomo	<ul style="list-style-type: none"> - Se gestionan proyectos y recursos. - Hay argumentación teórica. - Se evidencian acciones en las actividades de modelación matemática que posibiliten el pensamiento reflexivo
4. Estratégico	<ul style="list-style-type: none"> - Se plantean estrategias de cambio en la realidad. - Hay creatividad e innovación. - Se solucionan situaciones planteadas a partir de la información suministrada. - Se evidencia acciones del pensamiento reflexivo

Adaptada de Tobón, Prieto y Fraile (2010)

Por último, las observaciones del evaluador, las cuales consisten en la evaluación cualitativa que él sugiere donde incluye parámetros para ajustar la rúbrica, recomendaciones, opiniones acerca del nivel de logro de las acciones entre otras. Para finalizar, se propone un apartado denominado proyecciones, en este, se establecen unos criterios que dan cuenta de una permanencia y pertinencia tanto de la guía metodológica como de los resultados esperados.

4.3 Rubrica

La rúbrica socio-informativa analítica, ha sido revisada por los investigadores, la asesora y otros dos expertos en modelación matemática con el fin de validar la pertinencia de la misma. Al realizar esta valoración se encuentra que hay aspectos tales como la redacción de los indicadores de evaluación, su correspondencia con la guía metodológica y la investigación, entre otros; en los cuales era necesario ajustar y profundizar como se muestra en la **Figura 2**. Debido a ello, se hacen reestructuraciones en algunos apartados con el ánimo de enriquecer tanto el proceso investigativo como el proceso valorativo de la guía metodológica de modelación.

Figura 2. *Comentarios para la rubrica*

Indicadores de evaluación	Niveles de logro*				Observaciones del evaluador
	4	3	2	1	
Reconocimiento de la situación					
La guía metodológica está bien identificada: título, nivel educativo al que va dirigido, área o áreas curriculares implicadas.	x				
La guía metodológica se adapta al contexto del estudiante de manera que facilite tanto el acceso a la utilización del recurso y el aprendizaje desde niveles de competencia curricular distintos, como la participación de los estudiantes objeto de investigación.		x			No es claro las competencias curriculares diferentes a las que se hace mención. El asunto debe ir más en relación con las acciones descritas en los criterios de evaluación.
La guía metodológica posibilita la interacción de los estudiantes a través de entornos reales de aprendizaje, basado en experiencias del contexto.	x				Esto siempre y cuando se entienda por interacción de los estudiantes a través de entornos reales de aprendizaje, a la interacción de los estudiantes con la situación inicial, es decir, con lo que acaece en su contexto.

A continuación, se presenta la rúbrica para que los diferentes evaluadores hagan uso de ella y revisen los criterios y por ende el cumplimiento del objetivo que demarca esta investigación.

Indicadores de evaluación	Niveles de logro*				Observaciones del evaluador
	4	3	2	1	
Reconocimiento de la situación					
La guía metodológica está bien identificada: título, nivel educativo al que va dirigido, área o áreas curriculares implicadas.					
La guía metodológica se adapta al contexto de manera que facilite tanto el acceso a la utilización del recurso y el aprendizaje desde el lenguaje y la practicidad de los objetos matemáticos.					
La guía metodológica posibilita la interacción de los objetos matemáticos través de entornos reales de aprendizaje, basado en experiencias del contexto.					
Las actividades propuestas de modelación matemática permiten la articulación entre la comprensión del objeto matemático y la argumentación para su descripción.					
En este primer momento, la situación inicial genera una toma de decisiones, la cual propicia una reflexión acerca de la misma.					
Interpreta y conceptualiza					
La descripción de la actividad de modelación está bien documentada, proporciona una exposición teórica que fundamenta al recurso y su aplicación práctica.					
La guía, por su originalidad y por lo acorde de sus contenidos, facilita la comprensión de la información y dirige la atención, hacia los elementos relacionados con la actividad de modelación matemática					
Las actividades planteadas permiten proponer, explicar y exponer asuntos referentes a los objetos matemáticos por					

medio del lenguaje y la practicidad, esto propicia un pensamiento reflexivo.

Se recurre a la experiencia para dar respuesta a las preguntas sugeridas con base a los reportes teóricos que allí se presentan.

Las actividades propuestas, permiten mostrar la utilidad del objeto matemático y relacionarlo con el contexto.

Investigación, recolección de datos e interpretación

La guía metodológica fomenta la participación, dialogo y el aprendizaje a través de actividades de modelación que permitan la construcción del pensamiento reflexivo.

Incluye una propuesta metodológica para su aplicación. De igual forma incluye orientaciones para el desarrollo de las actividades que la componen.

La actividad de modelación presenta representaciones: verbales, escritas, graficas, etc.

Permite la funcionalidad y aplicabilidad de los objetos matemáticos.

Posibilita el hacer en el momento de realizar la actividad de modelación matemática.

Comunicación

La guía metodológica posibilita el dialogo, la confrontación, y la discusión a través de diferentes medios como el digital, textual, oral entre otros.

Se propicia un espacio para la puesta en común de las reflexiones a la luz de las actividades desarrolladas en la guía metodológica.

Se presentan acciones que evidencian el lenguaje y practicidad de los objetos matemáticos, y que posibilitan el pensamiento reflexivo.

Se posibilita el desarrollo y aplicación de lenguaje natural, transversal y transdisciplinar. Además, Permite dar muestra de la utilidad del objeto matemático (abarca explicar, evaluar e indicar la solución encontrada)

Proyecciones

Las actividades de modelación que en la guía se plantean, son claras y acordes con el objetivo y pregunta de la investigación. Así, contribuye a dar respuesta efectiva a las necesidades identificadas como punto de partida.

Las actividades planteadas en la guía metodológica están en correspondencia con la investigación.

La guía metodológica demuestra facilidad para ser replicable en el contexto de intervención para el que se ha creado. Puede servir como modelo para iniciativas y actuaciones en otros contextos con las modificaciones oportunas.

El recurso educativo desarrolla soluciones alternativas y puede generar efectos duraderos en la mejora de los aprendizajes en relación con los objetos matemáticos.

La investigación es pertinente, pues teóricamente con las temáticas desarrolladas, se puede evidenciar el pensamiento reflexivo a la luz del lenguaje y la practicidad de los objetos matemáticos.

(*) Niveles de logro: inicial-receptivo (1), básico (2), autónomo (3) y estratégico (4)

5. Conclusiones

Una vez ajustada la rúbrica socio-informativa analítica propuesta para la evaluación de los momentos de las actividades de modelación matemática, nos permiten elaborar algunas conclusiones que posibiliten dar respuesta a la pregunta de investigación. ¿A qué criterios deben responder las actividades de modelación matemática para que posibiliten en estudiantes de Educación Media un pensamiento reflexivo?

En la escuela, la Educación Matemática y el aprendizaje de los objetos en los estudiantes, requieren de la apropiación e implementación de nuevas estrategias, que posibiliten la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades en la solución de situaciones problemas. Lo anterior, permite reconocer la modelación matemática como una alternativa para la enseñanza, pues favorece la reflexión alrededor de los objetos matemáticos y la posterior comprensión de estos.

Asumir las actividades de modelación matemática, basadas en los planteamientos de Almeida y Silva (2012), permiten abordar objetos matemáticos para la investigación. En ella, la situación inicial está totalmente enmarcada en el contexto y experiencias del estudiante y la situación final posibilita evidenciar elementos del pensamiento reflexivo en cada uno de los momentos propuestos. Es decir, como el lenguaje y la practicidad median en el reconocimiento de la situación, en la interpretación y conceptualización, investigación, recolección de datos y en la comunicación.

En este sentido, la guía metodológica para ser orientada al desarrollo del pensamiento reflexivo alrededor de objetos matemáticos en estudiantes de Educación Media, deben responder a acciones que posibiliten la practicidad de dichos objetos y el lenguaje como instrumento para la comunicación de los mismos. Es decir, responder a cada uno de los criterios que emergen al

momento de utilizar el lenguaje matemático para referir sus objetos y al mismo tiempo, su practicidad. Cuando estos elementos convergen, la practicidad y el lenguaje, se posibilita el pensamiento reflexivo.

El proceso del pensamiento reflexivo, permite que el estudiante pueda analizar, comprender y argumentar las acciones emergentes a partir de los objetos matemáticos y la situación inicial. Con ello, se pone de manifiesto una toma de conciencia y decisiones, lo cual lleva al estudiante de Educación Media a plantear las consideraciones necesarias para proceder en la solución de actividades de modelación matemáticas, reflexionar sobre dicha solución y buscar nuevas estrategias que le posibiliten su aprendizaje.

Referencias

- Almeida, L. & Brito, D. (2005). Actividades de modelagem matemática: ¿qué sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação (Bauru)*, 11(3), 483-497. Recuperado de <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v11n3/10.pdf>
- Almeida, L. Silva, K. (2012). Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência & Educação (Bauru)*, 18(3), 623-642. Recuperado de <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v18n3/09.pdf>
- Arráez, M. Calles, J. & de Tovar, L. M. (2006). La Hermenéutica: una actividad interpretativa. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 7(2), 171-181. Recuperado de <https://www.ersilias.com/wp-content/uploads/2018/09/La-Hermeneutica-una-actividad-interpretativa.pdf>
- Aravena, M. Caamaño, C. Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(1), 49-92. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v11n1/v11n1a3.pdf>
- Avilés, A. (2014). El pensamiento reflexivo como marco para el aprendizaje de la geometría euclidiana en un sistema por competencias. Recuperado de <http://ri-ng.uaq.mx/handle/123456789/826>
- Biembengut, M. Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 2, agosto, 2004, pp. 105-125. Grupo Santillana México. Distrito Federal, México. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/405/40516206.pdf>
- Bravo-Bohórquez, A., Castañeda-Rodríguez, L. J., Hernández-Yomayusa, H. I., & Hernández-Hernández, L. A. (2016). Enseñanza de las matemáticas en ingeniería: Modelación

matemática y matemática contextual. *Revista Educación en Ingeniería*, 11(21), 27-31.

Recuperado de <https://educacioneningenieria.org/index.php/edi/article/view/601/283>

Calderón, D. (2012). El lenguaje en las matemáticas escolares. *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas*, 79-107. Recuperado de

https://www.researchgate.net/publication/291334202_Perspectivas_en_la_Didactica_de_las_Matematicas

Cauas, D. (2015). Definición de las variables, enfoque y tipo de investigación. *Bogotá:*

biblioteca electrónica de la universidad Nacional de Colombia, 2, 1-11. Recuperado

de <https://es.calameo.com/read/003146819cf01f68b123a>

Dewey, J. (1989). *How We Think*. (A. Caparros, Trad.) Barcelona: Editorial Paidós.

Recuperado de http://villaeducacion.mx/descargar.php?idtema=1341&data=5605aa_como_pensamos.pdf

Ekawati, M., & Asih, E. (2019). Mathematical reflective thinking process based on cognitive style. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1211, No. 1, p. 012069). IOP

Publishing. Recuperado de <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1211/1/012069/pdf>

Facultad de Educación. (2019). Convocatoria Prácticas Pedagógicas 2019-1. Recuperado de

<http://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/unidades-academicas/educacion/listado/convocatoria-practicas-pedagogicas-2019-1>

Fernández-Fernández, S., Arias-Blanco, J. M., Fernández-Alonso, R., Burguera-Condon, J., &

Fernández-Raigoso, M. (2016). Pensamiento reflexivo e investigador en educación.

Aspectos a tener en cuenta en la formación del profesorado. *RELIEVE*. Revista electrónica

de Investigación y Evaluación Educativa, 22(2), 1-16. Recuperado de

<https://www.redalyc.org/pdf/916/91649685003.pdf>

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas*, 47-78.

Recuperado de

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1029.6214&rep=rep1&type=pdf#page=48>

Gómez, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado.

Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 31(3), 121-134. Recuperado de

<https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/285795/373798>

González Moreno, C. (2012). Formación del pensamiento reflexivo en estudiantes

universitarios. *Magis, Revista Internacional De Investigación En Educación*, 4(9).

<https://revistas.javeriana.edu.co/index.php/MAGIS/article/view/3578>

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5a. ed.).

México D.F.: McGraw- Hill. Recuperado de

https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

Hernández, J. (2016). Rúbricas socioformativas: evaluar para mejorar. *Revista Multiversidad*

Management, 42-46. Recuperado de <https://goo.gl/tacvHn>

Hernández-Mosqueda, J. Tobón-Tobón, S., & Guerrero-Rosas, G. (2016). Hacia una evaluación integral del desempeño: las rúbricas socioformativas. *Ra Ximhai*, 12(6), 359-376.

Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/461/46148194025.pdf>

- Jiménez, A. (2010). La naturaleza de la matemática, sus concepciones y su influencia en el salón de clase. *Educación y Ciencia*, 13, 135-150. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/11743/>
- Jiménez, A., Suárez, N., & Galindo, S. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, 1(2), 173-202. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/4772/477248386010.pdf>
- Kurt, M. Quality in reflective thinking: elicitation and classification of reflective acts. *Qual Quant* 52, 247–259 (2018). <https://doi.org/10.1007/s11135-017-0609-1>
- León, F. R. (2014). Sobre el pensamiento reflexivo, también llamado pensamiento crítico. *Propósitos y representaciones*, 2(1), 161-214. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5475194>
- Medina-Moya, J. L. (2014). El proceso de comprensión en el análisis de datos cualitativos en educación. *Magis. Revista internacional de investigación en Educación*, 7(14), 39-54. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4934653>
- MEN (1998). Lineamientos curriculares, Matemáticas. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Mera, M. Yachimba, P. (2016). El desarrollo del pensamiento reflexivo y su incidencia en el aprendizaje en el área de matemática de los niños de 4to. Año de educación básica de la Escuela Fiscal “Julio Enrique Fernández” del cantón Ambato, provincia de Tungurahua (Bachelor's thesis, Universidad Técnica de Ambato. Facultad de Ciencias Humanas y de la educación. Carrera de Educación Básica). Recuperado de <https://repositorio.uta.edu.ec/jspui/handle/123456789/19769>

Molina-Mora, J. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia*, 31(2), 19-36. Recuperado de

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6067683>

Muñoz Mesa, L. M.; Londoño Orrego, S.; Jaramillo López; C. & Villa-Ochoa, J (2014).

Contextos Auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 42, 48-67. Recuperado de

<http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/download/494/1028>

Olabuénaga, J. (2012). *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao, España:

Universidad de Deusto. Recuperado

de <https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=WdaAt6ogAykC&oi=fnd&pg=PA9&dq=ruiz+olabu%C3%A9naga&ots=sGv89GAeIS&sig=HloruBLvYIFT1wrNYw86FgfHvzU#v=onepage&q=ruiz%20olabu%C3%A9naga&f=false>

Peñas, M. Flores, P. (2005). Procesos de reflexión en estudiantes para profesor de matemáticas.

Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 23(1), 5-16.

Recuperado de

http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Investigacion/Pe%Flas_Flores_2005.pdf

Peña-Páez, L. Morales-García, J. (2016). La modelación matemática como estrategia de

enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva. *Revista Educación en Ingeniería*, 11(21), 64-71. Recuperado de

<https://www.educacioneningenieria.org/index.php/edi/article/view/637/289>

Phan, H. P. (2008). Achievement goals, the classroom environment, and reflective thinking: A conceptual framework. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 6(3).

Recuperado de

http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/561/Art_16_269_eng.pdf?sequence=1

Pochulu, M. & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 14(3), 361-394. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362011000300005&script=sci_arttext&tlng=pt

Powell, S. & Nelson, G. (2017). An Investigation of the Mathematics-Vocabulary Knowledge of First-Grade Students. *Elementary School Journal*, 117(4), 664–686.
<https://aplicacionesbiblioteca.udea.edu.co:4231/10.1086/691604>

Rivera, S. (2014). Medida de área y volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia. Recuperado de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/6516/1/SantiagoRivera_2014_areavolumen.pdf

Rosa, M & Orey, D. (2015). Modelling the Wall: the mathematics of the curves on the wall of colegio Arquidiocesano in Ouro Preto. *International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling*, 593-605. Recuperado de https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-18272-8_50

Salido, A., & Dasari, D. (2019). The analysis of students' reflective thinking ability viewed by students' mathematical ability at senior high school. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1157, No. 2, p. 022121). IOP Publishing. Recuperado de <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1157/2/022121/pdf>

- Sánchez, S., Santos, M., & Ariza, M. (2005). Reflexionar para mejorar el acto educativo. *Educación y educadores*, vol. 8, 2005, pp. 145-159 Universidad de La Sabana Cundinamarca, Colombia. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/834/83400811.pdf>
- Tabach, M., & Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 163–187. <https://aplicacionesbiblioteca.udea.edu.co:4231/10.1007/s10649-015-9624-0>
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, vol. 9, núm. 46, enero-marzo, 2009, pp. 75-87 Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf>
- Tobón, S, Prieto, J, & Fraile, J. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. México: Pearson educación. Recuperado de <http://files.ctezona141.webnode.mx/200000004-8ed038fca3/secuencias-didacticastobon-120521222400-phpapp02.pdf>
- Villalobos, X. (2008). Resolución de problemas matemáticos: un cambio epistemológico con resultados metodológicos. *Revista Iberoamericana acerca de la Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 6(3), 36-58. Recuperado de <https://revistas.uam.es/index.php/reice/article/view/10174/10283>
- Villarini, Á. (2003). Teoría y pedagogía del pensamiento crítico. *Perspectivas psicológicas*, 3(4), 35-42. Recuperado de <http://pepsic.bvsalud.org/pdf/pp/v3-4/v3-4a04.pdf>
- Villa-Ochoa, J. (2016). Modelación en las matemáticas escolares. Posibilidades y desafíos. *Encuentro de investigación en educación matemática EIEM*, 11. Recuperado de

[https://www.uniatlantico.edu.co/uatlantico/sites/default/files/investigacion/pdf/MEMORIA S%20EIEM%202016%20-%20versio%CC%81n%20actualizada.pdf](https://www.uniatlantico.edu.co/uatlantico/sites/default/files/investigacion/pdf/MEMORIA%20EIEM%202016%20-%20versio%CC%81n%20actualizada.pdf)

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, 11(3), 555-584. Recuperado de

<https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1317&context=tme>

Yoshimura, N. (2015). Mathematical modelling of a social problem in Japan: the income and expenditure of an electric power company. *International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling*, 251-265. Recuperado de

https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-18272-8_50

Anexo. Guía Metodológica**Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín****Profesores: Duban Alexi Arboleda Monsalve Jose Alejandro Pino Higuita****Practicantes: Universidad de Antioquia****Grado: Once****Área: Matemáticas**

Nombre estudiantes:

Reconocimiento del contexto.

Santiago es un joven que vive en la ciudad de Medellín, últimamente ha estado muy interesado en saber todo lo relacionado con la contaminación del aire por la que atraviesa el área metropolitana del valle de Aburrá. Este hecho le preocupa en gran medida puesto que cada día la calidad del aire tiende a empeorar pese a las acciones que desde las administraciones locales se han intentado implementar para subsanar este problema.

- ¿Qué sabes o que has escuchado mencionar acerca de la contaminación del aire?

- ¿Qué ocasiona la contaminación del aire en el área metropolitana del valle de Aburrá?

- ¿Qué consecuencias trae consigo la contaminación del aire?

- ¿De cuáles acciones tienes conocimiento que hayan implementado las administraciones locales para disminuir la contaminación del aire en el área metropolitana del valle de Aburrá?

- ¿Cuáles acciones realizas en tu cotidianidad que contribuyen a mejorar la calidad del aire?

Santiago vive con sus padres y dos hermanas, él y sus hermanas estudian en el mismo colegio y su padre a diario los lleva a todos tres al colegio. Debido a la contingencia ambiental, Santiago decide utilizar el transporte público como forma de aportar a la disminución de la contaminación del aire, pero sus dos hermanas, se van con su padre en el auto familiar.

- En la situación propuesta, ¿Es efectiva la medida tomada por Santiago para mejorar la calidad del aire?

-
-
- En materia de movilidad, ¿Qué aspectos debe tener en cuenta la familia de Santiago, para que la contaminación del aire sea menor?

-
-
-
-
-
-
-
-
- ¿Cómo ayuda el uso del transporte público a la mejora de la calidad del aire? ¿Por qué es importante que los medios de transporte se usen de forma masiva en una época de contingencia ambiental?

-
-
-
-
-
-
-
-
- ¿Qué tipo de relación existe entre la cantidad de personas que usan el transporte público y la contaminación ambiental?

Interpreta y conceptualiza.

Lee la siguiente información y responde.

El material particulado PM 2.5 y PM 10, son partículas muy pequeñas, que permanecen en el aire durante mucho tiempo, las cuales inciden de forma negativa en las enfermedades respiratorias agudas de la población. Las partículas de PM2.5 son más desfavorables a la salud que las de PM10, ya que además de ser respirables, llegan con gran facilidad a los pulmones y pasan luego al torrente sanguíneo. El PM_{2.5} es 1.000 veces más pequeña que la cabeza de un alfiler.

Según estudios epidemiológicos de Estados Unidos existe un riesgo de aumento de mortalidad entre un 2% y un 6%, por cada aumento de 10 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ (partículas microgramo por metro cúbico) en las concentraciones diarias y anuales de PM2.5, respectivamente. El material particulado es considerado un factor adverso para la salud de la población a nivel mundial; causa el 3% de los problemas cardiopulmonares y el 5% de las muertes por cáncer de pulmón (Who, 2013). Según el DANE entre 1980 y 2012, en Medellín muere una persona cada tres horas por causas relacionadas con la contaminación del aire por enfermedades respiratorias crónicas, accidentes cerebrovasculares, cáncer de pulmón. Así mismo, en los tres últimos años el Valle de Aburrá enfrentó situaciones de emergencia por los niveles críticos alcanzados por concentraciones de PM2.5 atribuidos a la poca dispersión de las nubes en las partes altas de la atmósfera, además el crecimiento desmesurado del parque automotor, asentamientos industriales (Medellín Cómo Vamos, 2016), incrementan las concentraciones de gases lo cual impide su dispersión, condición crítica para la salud de la población más vulnerable.

La herramienta utilizada para indicar los niveles contaminantes en el ambiente, es el ICA (índice de calidad del aire) que permite indicar la calidad del aire en el Área metropolitana y así determinar los niveles de los siguientes contaminantes: Monóxido de Carbono (MO), partículas

menores a 10 micrómetros PM10 (material particulado con un diámetro aerodinámico menor o igual a 10 micrómetros nominales), PM2.5 (material particulado con un diámetro aerodinámico menor o igual a 2,5 micrómetros nominales entre otros (Resolución 610, 2010).

Para el Valle de Aburrá el ICA tiene una escala numérica de 0 a 300. En la tabla 1, se aprecia la correlación entre las concentraciones de contaminantes para PM10 y PM2.5 y las categorías de calidad del aire aprobada en resolución número 2254 por el ministerio de medio ambiente y desarrollo sostenible.

Figura 3. Índice de Calidad del Aire.

ICA	COLOR	CLASIFICACIÓN	PM10 (24 horas) µg/m ³	PM2.5 (24 horas) µg/m ³
0-50	Verde	Buena	0 54	0.0 15.4
51-100	Amarillo	Moderada	55 154	15.5 40.4
101-150	Naranja	Dañina a la salud para grupos sensibles	155 254	40.5 65.4
151-200	Roja	Dañina a la salud	255 354	65.5 150.4
201-300	Púrpura	Muy dañina a la salud	355 424	150.5 250.4
301-400	Marrón	Peligrosa	425 504	250.5 350.4
401-500	Marrón	Peligrosa	505 604	350.5 599.4

La categorización de los valores del Índice de Calidad del aire, se presentan en la tabla 2, los colores establecen los rangos de incidencia y se definen por color de acuerdo a los rangos encontrados para cada lectura.

Fuente: (US EPA, 2013).

Los problemas de salud pública y el incremento de los gases de invernadero, son generados de forma particular por el parque automotor, razón importante para que las agencias de control de contaminación evalúen dichas emisiones para formular los planes que vayan en pro de la calidad del aire (Kota, Zhang, Chen, Schade, & Ying, 2014).

El inventario de las fuentes móviles para el Valle de Aburrá entre 2005- 2015 se observa un incremento del 35.46% para el último año. En el 2005, 478.000 automotores fueron matriculados y en el 2015, se registraron 1.347.736. La moto es uno de los medios de transporte más utilizados en el Valle de Aburrá, aumentándose las ventas en este periodo (2005 - 2015) en un 19.57% (139.00 motos en 2005 - 710.186 motos en 2015), equivalente a 57.118 motos/año. El uso del automóvil ocupa el segundo lugar con un incremento del 49.56 %, para 2015 proporcional a 27.576 vendidos/año (Medellín como vamos. 2016). A enero de 2017, se observó el ascenso de 121.481 automotores (automóviles) en los dos últimos años subiendo de 1.347.736 a 1.469.217 en una trama vial estrecha y con pocas posibilidades de expansión (Junta Metropolitana del Valle de Aburrá, 2016).

Referencias

Gómez, C. (2017). Contaminación del aire en Medellín por pm10 y pm2.5 y sus efectos en la salud. Recuperado de

<https://repository.unimilitar.edu.co/bitstream/handle/10654/17019/G%F3mezCom;jsessionid=35E8B2A3E08A49041FFA759D7EDC66E0?sequence=1>

Moreno, H. (2019). Muertes por contaminación del aire le costaron a Medellín \$5 billones en solo un año. Recuperado de [https://stenibilidad.semana.com/medio-](https://stenibilidad.semana.com/medio-ambiente/articulo/muertes-por-contaminacion-del-aire-le-costaron-a-medellin-5-billones-de-pesos-en-solo-un-ano/43332://so)

[ambiente/articulo/muertes-por-contaminacion-del-aire-le-costaron-a-medellin-5-billones-de-pesos-en-solo-un-ano/43332://so](https://stenibilidad.semana.com/medio-ambiente/articulo/muertes-por-contaminacion-del-aire-le-costaron-a-medellin-5-billones-de-pesos-en-solo-un-ano/43332://so)

Según la información suministrada por el estudio epidemiológico de estados unidos, ¿crees que el incremento de la mortalidad (2% diario) está conectado al aumento de las concentraciones diarias de PM2.5? Sí, no, ¿por qué? y ¿cómo más se le podría llamar a esa conexión?

Según el DANE entre 1980 y 2012, en Medellín muere una persona cada tres horas por causas relacionadas con la contaminación del aire, por enfermedades respiratorias crónicas, accidentes cerebrovasculares, cáncer de pulmón. De esta información se obtiene la siguiente gráfica.

Ilustración 4. Gráfica Lineal



¿Cuál es la ecuación que representa dicha gráfica?

La información suministrada en la tabla 1, en particular la del índice ICA y la de PM10 se puede representar en una gráfica, ¿cómo lo harías? ¿Cómo llamarías o denominarías esta representación?



Representa en una gráfica, el aumento de motos, carros y autobuses según la información suministrada en el texto anterior para los años comprendidos entre 2005 y 2015 para las motos y del 2005 al 2019 para los automóviles.



Indica en tus propias palabras qué asuntos cualitativos se mencionan en la información obtenida y con qué dato cuantitativo se puede este relacionar.

Momento Investigativo, recolección de datos e interpretación.

Entre febrero y marzo del año 2019, las portadas de los periódicos y medios informativos de nuestro país se volcaban hacia una problemática que involucró a la capital antioqueña, Medellín y su área metropolitana fue noticia por la mala calidad del aire. Las condiciones meteorológicas del Valle de Aburrá, entre los meses de febrero y abril impiden la dispersión de contaminantes y obliga a las autoridades ambientales a tomar medidas preventivas.

Ilustración 5. Calidad del Aire.



El Área metropolitana del Valle de Aburrá y Corantioquia máximas autoridades ambientales a nivel local anunciaron restricciones muy precisas en materia de movilidad para tratar de mitigar los impactos de la contingencia ambiental. Bajo este panorama Santiago se propone realizar un estudio en el que debe justificar, a partir, de los contenidos matemáticos el uso del pico y placa ambiental.

Investiga

¿Qué cantidad porcentual de contaminación, representa la cantidad de vehículos que se mueven con combustibles fósiles en el área metropolitana y como interpretamos dicha cantidad?

¹ Recuperado de <https://sostenibilidad.semana.com/medio-ambiente/articulo/contaminacion-del-aire-en-medellin-es-un-problema-cronico/38650>

¿Qué cantidad de vehículos circulan con frecuencia en el área metropolitana y cuantos lo hicieron durante el periodo de tiempo de pico y placa ambiental?

Día	Autos (frecuentes)	Autos (Pico y placa ambiental)
Lunes		
Martes		
Miércoles		
Jueves		
Viernes		
Sábado		
Domingo		

Es posible representar en un gráfico esta información en un plano ordenado ¿Como lo haría?, explica a qué representación matemática se asemeja dicho esquema.



El comportamiento registrado en la gráfica anterior, representa la información de una semana en que se estudia la circulación de vehículos, Santiago requiere representar este comportamiento en más semanas ¿Cómo se puede ampliar esta representación a tres semanas?



¿Cómo se definiría los intervalos entre semanas para que dicho comportamiento represente una función? ¿Qué tipo de función representa?

¿Qué puedes concluir de este ejercicio investigativo?

Interpreta

El profesor de matemáticas afirma lo siguiente:

En una época de contingencia ambiental como la vivida en el área metropolitana entre los meses de febrero y marzo. **La cantidad de vehículos que circularían con mayor frecuencia en una**

semana, usuarios de combustibles fósiles, representan una amenaza. Puesto que, el material particulado dispersado marca un rango perjudicial para la salud de los habitantes.

En la época de contingencia ambiental, **la cantidad de vehículos que circulan en una semana de pico y placa ambiental** representa un rango de dispersión de material particulado que es adecuado o menos perjudicial para la salud humana

Haz un esquema de dicha información (la obtenida del profesor y que se menciona en el párrafo anterior) que involucre la información de la circulación de autos (realizada anteriormente).



¿Cómo interpretas las palabras del profesor de matemáticas basado en este esquema? ¿En matemáticas, a que se refiere el profesor con dicho planteamiento?

Propuesto este esquema final, ¿Qué conclusiones podemos obtener que nos permita justificar el uso del pico y placa ambiental?

¿Qué contenidos matemáticos aplicaste y en qué momentos?

¿Fue el uso de las matemáticas adecuada para mostrar la solución a esta problemática?

¿Es acertado el uso del pico y placa ambiental en periodos de tiempos en que las condiciones del valle de Aburrá impiden una dispersión de contaminantes?

Comunicación

Realiza un afiche o un plegable en donde puedas compartir con tus compañeras de clase, con tu profesor y con tu comunidad los hallazgos que has encontrado a lo largo de este trabajo y donde expliques los modelos matemáticos a los que has llegado. Además, debes de indicar como te ayudaron a entender la magnitud del problema que atraviesa la ciudad, la importancia del pico y placa ambiental y las relaciones que se tienen entre el número circulante de vehículos y el aumento o disminución de la contaminación ambiental para los momentos mencionados.

