



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

**Razonamiento sobre los conceptos de área y perímetro, a partir  
de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele en  
estudiantes de grado tercero**

Diana Luz Arcia

**Razonamiento de los conceptos de área y perímetro, a partir de las fases de aprendizaje**

Universidad de Antioquia  
Facultad de Educación  
Apartadó, Colombia  
2020



**Razonamiento sobre los conceptos de área y perímetro, a partir de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele en estudiantes de grado tercero**

Diana Luz Arcia

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:

**Magister en Educación**

Asesores:

**Dr. Pedro Vicente Esteban Duarte**

**Mg. David Fernando Méndez Vargas**

Línea de Investigación: Educación Matemática

Grupo de Investigación: Educación Matemática e Historia (UDEA – EAFIT)

Universidad de Antioquia

Facultad de educación

Apartadó, Colombia

2020

## **Dedicatoria**

A mi madre y hermanos y, en especial, a mi esposo Francisco, a mis hijos Ángel, Andrea y el pequeño Alessandro.

## **Agradecimientos**

A lo largo de esta aventura han sido muchas las personas que han manifestado su apoyo y conocimiento para que este sueño se hiciera realidad, el cual contribuye a mi formación académica y profesional, por lo tanto, quiero expresarles mis agradecimientos.

A Dios por ser mi fortaleza en los momentos cuando sentí desfallecer.

A mi familia por soportar mis ausencias durante este tiempo, y quienes con su apoyo y amor ayudaron a alcanzar esta meta.

A mis asesores, Doctor Pedro Vicente Esteban Duarte y Magíster David Fernando Méndez Vargas, quienes con su paciencia, compromiso y conocimiento estuvieron dispuestos para orientar el desarrollo de este trabajo.

A la Universidad de Antioquia, Gobernación de Antioquia por su apoyo a la educación, a los profesores que hicieron parte del grupo de formación académica, por sus aportes y orientaciones, desde el inicio de este proceso investigativo.

A mis compañeros de Maestría, en especial a Carmen Velásquez, Yury Peña y Evelio Plaza, que mostraron su interés por el trabajo y expresaron sus aportes para su desarrollo.

A los estudiantes participantes del grado tercero (D) de la Institución Educativa San Pedro de Urabá y a los padres de familia, por su apoyo y aporte en el proceso investigativo.

A aquellas personas, cuyos nombres no aparecen pero que de una u otra forma me apoyaron y estuvieron pendiente de este proceso, a ellos y a todos, muchas gracias.

## Tabla de contenido

Dedicatoria.....	iii
Agradecimientos .....	iv
Tabla de contenido.....	v
Índice de Tablas .....	ix
Lista de Ilustraciones .....	xi
Resumen.....	xvii
Abstract.....	xvii
Introducción.....	1
Capítulo I: Antecedentes.....	5
1.1 Contexto de la Investigación.....	5
1.2 Justificación.....	6
1.3 Revisión de literatura .....	8
1.3.1 Área y perímetro desde la legislación colombiana.....	9
1.3.2 Importancia de la Geometría a través de la Historia .....	11
1.3.3 Unidades de medidas cualitativas y cuantitativas.....	15
1.4 Investigaciones realizadas en relación con la enseñanza del área y perímetro .....	20
1.5 Descripción del Problema .....	25
1.6 Pregunta de investigación.....	28
1.7 Objetivos .....	29
1.7.1 Objetivo General.....	29
1.7.2 Objetivos Específicos .....	29
Capítulo II. Referentes teóricos .....	31
2.1 La Enseñanza para la Comprensión (EpC) .....	31
2.2 Modelo de Pirie y Kieren .....	34
2.3 Modelo de van Hiele .....	36
2.3.1 Niveles de razonamiento de van Hiele .....	38
2.3.2 Fases de aprendizaje .....	41
2.3.3 Propiedades del Modelo .....	45
2.3.4 Importancia del Lenguaje .....	46
2.3.5 Redes de relaciones .....	47

2.3.6 Pertinencia del Modelo de van Hiele.....	48
Capítulo III: Diseño Metodológico.....	55
3.1 Enfoque investigativo.....	55
3.2 Método de investigación .....	56
3.2.1 El estudio intrínseco .....	57
3.2.2 El estudio colectivo .....	57
3.2.3 El estudio instrumental.....	58
3.3 Instrumentos para recolectar la información.....	59
3.3.1 La observación.....	59
3.3.2 Entrevista.....	60
3.3.3 Documentos escritos.....	61
3. 4 Participantes .....	62
3.5 Conceptos abordados: área y perímetro de figuras planas .....	63
3.6 Categorías de análisis .....	64
3.6.1 Categoría 1: Cubrir, sobreponer, plasmar.....	65
3.6.2 Categoría 2: Superficie .....	65
3.6.3 Categoría 3: Área y medida de superficie .....	66
3.6.4 Categoría 4: Lenguaje de área .....	67
3.6.5 Categoría 5: Alrededor de, contorno, borde, orilla.....	68
3.6.7 Categoría 7: Lenguaje de perímetro .....	69
3.7 Fases y descriptores de fases.....	70
3.7.1 Fase 1: Información .....	71
3.7.2 Fase 2: Orientación dirigida .....	73
3.7.3 Fase 3: Explicitación .....	74
3.7.4 Fase 4: Orientación libre.....	76
3.7.5 Fase 5: Integración.....	77
3.8 Diseño de actividades.....	85
3.8.1 Actividad diagnóstica .....	85
3.8.2 Actividades de la fase 1: Información .....	86
3.8.3 Actividades de la fase 2: Orientación dirigida.....	88
3.8.4 Actividades de la Fase 3: Explicitación.....	90
3.8.5 Actividades de la Fase 4: Orientación libre.....	92

3.8.6 Actividades de la Fase 5: Integración.....	94
3.9 Procesamiento y análisis de la información .....	95
3.10 Cronograma.....	96
3.11 Resultados esperados.....	97
Capítulo IV: Resultados y análisis.....	99
4.1 Actividad diagnóstica.....	100
4.1.1 Análisis del lenguaje.....	112
4.1.2 Red de relaciones.....	112
4.2 Análisis de la información.....	112
4.2.1 Fase 1: Información .....	112
4.2.2 Fase 2: Orientación dirigida. ....	135
4.2.3 Fase 3: Explicitación .....	170
4.2.4 Fase 4: Orientación libre.....	190
4. 3 Progreso de los participantes con relación a los conceptos de área y perímetro.....	236
Capítulo V: Resultados y Conclusiones.....	241
5.1 Resultados de la investigación .....	243
5.2 Alcance de los objetivos específicos .....	244
5.2.1 Objetivo relacionado con la implementación de estrategias .....	244
5.2.2 Objetivo relacionado con el concepto de área .....	245
5.2.3 Objetivo relacionado con el concepto de perímetro .....	247
5.3 Análisis por Fases.....	251
5.4 Análisis por categorías .....	257
5.5 Alcance de la pregunta y el objetivo general .....	266
5.6 Análisis del nivel alcanzado por los participantes .....	270
5.7 Aprendizajes adquiridos por la docente investigadora en el proceso investigativo .....	271
5.8 Limitantes durante el proceso investigativo.....	272
5.9 Futuras líneas de investigación .....	272
5. 10 Participación en eventos académicos .....	273
5.10.1 Modalidad de participación. Comunicación.....	274
5.10.2 Modalidad de participación. Poster .....	274
Apéndice .....	275
Apéndice A. Actividad diagnóstica.....	275

Apéndice B. Instrumentos para la recolección de la información.....	277
B.1 Fase 1. (Información) .....	277
B.1.1 Plasmamos nuestras manos.....	277
B.1.2 Midiendo por el borde.....	278
B.1.3 Reconociendo nuestro entorno.....	279
B.2 Fase 2 (Orientación dirigida).....	281
B.2.1 Comparando superficies.....	281
B.2.2 De paseo por algunos lugares .....	282
B.2.3 Escojo mi unidad de medida .....	283
B.2.4 Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y bordeando contornos con diferentes unidades de longitud .....	284
B.3 Fase 3 (Explicitación).....	288
B.3.1 Explico lo aprendido .....	288
B.3.1 Cuestionario .....	289
B.4 Fase 4 (Orientación libre).....	291
B.4.1 Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno.....	291
B.4.2 Cubriendo superficies grandes.....	292
B.4.3 Aprendo de mi entorno .....	293
B.5 Fase 5 (Integración).....	295
B.5.1 Aplicando lo aprendido.....	295
B.5.2 Soluciono problemas.....	296
B.5.3 Encontrando el área y el perímetro .....	296
Apéndice C. Actividad de cierre .....	298
Apéndice D. Consentimiento de los padres .....	301
Referencias bibliográficas.....	304



## Índice de Tablas

<b>Contenido</b>	<b>pág.</b>
<b>Tabla 1.</b> Fundamentos Teóricos de la Comprensión. ....	32
<b>Tabla 2.</b> Niveles de comprensión características. ....	35
<b>Tabla 3.</b> Descriptores de la Fase 1. Información. ....	71
<b>Tabla 4.</b> Descriptores de la Fase 2. Orientación dirigida. ....	73
<b>Tabla 5.</b> Descriptores de la fase 3. Explicitación. ....	75
<b>Tabla 6.</b> Descriptores de la fase 4. Orientación libre. ....	76
<b>Tabla 7.</b> Descriptores de la fase 5. Integración. ....	77
<b>Tabla 8.</b> Matriz de categorías y descriptores de fase. ....	80
<b>Tabla 9.</b> Cronograma de actividades. ....	96
<b>Tabla 10.</b> Exploración del concepto de área. ....	101
<b>Tabla 11.</b> Exploración del concepto de perímetro. ....	106
<b>Tabla 12.</b> Lenguaje utilizado por los participantes en la actividad diagnóstica. ....	111
<b>Tabla 13.</b> Avances de los participantes. Fase 1 (Información) ....	129
<b>Tabla 14.</b> Lenguaje utilizado por los participantes en la Fase uno (Información). ....	133
<b>Tabla 15.</b> Avances de los participantes. Fase 2 (Orientación dirigida). ....	164
<b>Tabla 16.</b> Lenguaje utilizado por los participantes en la Fase dos (Orientación dirigida). ...	168
<b>Tabla 17.</b> Avances de los participantes. Fase 3 (Explicitación). ....	184
<b>Tabla 18.</b> Lenguaje utilizado por los participantes en la Fase tres (Explicitación). ....	187
<b>Tabla 19.</b> Avances de los participantes. Fase 4 (Orientación libre). ....	211
<b>Tabla 20.</b> Lenguaje utilizado en la Fase 4 (Orientación libre). ....	213
<b>Tabla 21.</b> Avances de los participantes. Fase 5 (Integración). ....	231
<b>Tabla 22.</b> Lenguaje utilizado por los participantes en la Fase 5 (Integración). ....	233
<b>Tabla 23.</b> Actividad de cierre con relación al concepto de área y perímetro ....	237
<b>Tabla 24.</b> Actividad de cierre con relación al concepto de área y perímetro ....	238
<b>Tabla 25.</b> Avances en las Fases 1 y 2. ....	257
<b>Tabla 26.</b> Avances en las Fases 3 y 4. ....	260
<b>Tabla 27.</b> Avances en la Fase 5. ....	261

<b>Tabla 28.</b> Matriz de descriptores de las Fases .....	263
--	-----

## Lista de Ilustraciones

<b>Contenido</b>	<b>pág.</b>
Ilustración 1. Localización espacial municipio de San Pedro de Urabá. Tomado de plan de desarrollo del municipio de San Pedro de Urabá. 2016-2019.....	6
Ilustración 2. Dificultades para determinar el área y el perímetro de figuras planas. ....	26
Ilustración 3. Mano cubriendo superficie.....	65
Ilustración 4. Muestra de superficies (objeto, figura, lugar). ....	66
<i>Ilustración 5.</i> Midiendo superficies planas con diferentes unidades de medida. ....	67
Ilustración 6. <i>Representación borde, contorno, orilla.</i> ....	68
Ilustración 7. Midiendo el perímetro.....	69
Ilustración 8. Cubriendo el trozo de cartulina dada con objetos pequeños. ....	103
Ilustración 9. Marcando objetos grandes sobre el trozo de cartulina proporcionada. ....	104
Ilustración 10. Marcando elementos para medir el contorno. ....	109
Ilustración 11. Estudiantes plasmando la mano y el dedo sobre una superficie. ....	113
Ilustración 12. Respuesta de David. ....	114
Ilustración 13. Respuesta de Rosa.....	114
Ilustración 14. Respuesta de David. ....	115
Ilustración 15. Respuesta de Rosa.....	115
Ilustración 16. Respuesta de David. ....	116
Ilustración 17. Respuesta de Rosa.....	116
Ilustración 18. Respuesta de David. ....	116
Ilustración 19. Respuesta de Rosa.....	117
Ilustración 20. Nataly plasma el dedo sobre la cartulina. ....	118
Ilustración 21. Respuesta de David. ....	118
Ilustración 22. Respuesta de Nataly. ....	118
Ilustración 23. Respuesta de David. ....	119
Ilustración 24. Respuesta de Rosa.....	119
Ilustración 25. Nataly recorriendo el contorno de la cartulina. ....	121
Ilustración 26. Recorriendo el contorno de un lugar. ....	122
Ilustración 27. Respuesta de David. ....	123

Ilustración 28. Respuesta de Rosa.....	123
Ilustración 29. Respuesta de Nataly.....	123
Ilustración 30. Respuesta de David.....	124
Ilustración 31. Respuesta de David.....	124
Ilustración 32. Respuesta de Rosa.....	125
Ilustración 33. Respuesta de Rosa.....	126
Ilustración 34. Respuesta de David.....	126
Ilustración 35. Respuesta de Nataly.....	126
Ilustración 36. Jardinera representada por Rosa.....	128
Ilustración 37. Respuesta de Rosa.....	136
Ilustración 38. Respuesta de Nataly.....	136
Ilustración 39. Superficie Cubierta por David, Fase uno y Fase dos.....	137
Ilustración 40. Respuesta de Rosa.....	138
Ilustración 41. Respuesta de Nataly.....	139
Ilustración 42. Respuesta de David.....	139
Ilustración 43. Proceso de construcción de unidad de medida.....	140
Ilustración 44. Respuesta de David.....	142
Ilustración 45. Respuesta de Rosa.....	142
Ilustración 46. Respuesta de Nataly.....	142
Ilustración 47. Respuesta de David.....	142
Ilustración 48. Respuesta de Nataly.....	142
Ilustración 49. Respuesta de David.....	143
Ilustración 50. Respuesta de Rosa.....	143
Ilustración 51. Respuesta de Nataly.....	143
Ilustración 52. Respuesta de David.....	144
Ilustración 53. Respuesta de Rosa.....	144
Ilustración 54. Respuesta de Nataly.....	144
Ilustración 55. Unidades de medida.....	145
Ilustración 56. Superficie cubierta con diferentes unidades de medida.....	146
Ilustración 57. Respuesta de David.....	147
Ilustración 58. Respuesta de Rosa.....	147

Ilustración 59. Respuesta de Nataly.....	147
Ilustración 60. Respuesta de David.....	148
Ilustración 61. Respuesta de Rosa.....	148
Ilustración 62. Respuesta de Nataly.....	148
Ilustración 63. Respuesta de David.....	149
Ilustración 64. Respuesta de Rosa.....	149
Ilustración 65. Respuesta de Nataly.....	149
Ilustración 66. Respuesta de Rosa.....	150
Ilustración 67. Respuesta de Nataly.....	150
Ilustración 68. Respuesta de David.....	151
Ilustración 69. Respuesta de Nataly.....	152
Ilustración 70. Respuesta de David.....	152
Ilustración 71. Respuesta de Rosa.....	153
Ilustración 72. Respuestas de Rosa.....	153
Ilustración 73. Respuesta de David.....	154
Ilustración 74. Respuesta de Rosa.....	154
Ilustración 75. Respuesta de Nataly.....	154
Ilustración 76. Respuesta de David.....	155
Ilustración 77. Respuesta de Rosa.....	155
Ilustración 78. Respuesta de Nataly.....	155
Ilustración 79. Respuesta de David.....	156
Ilustración 80. Respuesta de Rosa.....	156
Ilustración 81. Respuesta de David.....	157
Ilustración 82. Respuesta de Rosa.....	157
Ilustración 83. Midiendo el Largo y Ancho.....	158
Ilustración 84. Respuesta de David.....	158
Ilustración 85. Respuesta de Nataly.....	159
Ilustración 86. Respuesta de Rosa.....	159
Ilustración 87. Respuesta de David.....	160
Ilustración 88. Respuesta de Rosa.....	160
<i>Ilustración 89. Respuesta de Nataly.....</i>	<i>160</i>

Ilustración 90. Respuesta de David.....	161
Ilustración 91. Respuesta de Rosa.....	161
Ilustración 92. Respuesta de David.....	162
Ilustración 93. Respuesta de Rosa.....	162
Ilustración 94. Respuesta de Nataly.....	162
Ilustración 95. Respuesta de David.....	163
Ilustración 96. Respuesta de Rosa.....	163
Ilustración 97. Respuesta de Nataly.....	163
Ilustración 98. Marcando la unidad de medida, en la superficie.....	172
Ilustración 99. Rosa y Nataly marcando la unidad de medida.....	172
Ilustración 100. Respuesta de David.....	173
Ilustración 101. Respuesta de Rosa y Nataly.....	173
Ilustración 102. Respuesta de David.....	173
Ilustración 103. Respuesta de Rosa.....	173
Ilustración 104. Respuesta de Rosa.....	174
Ilustración 105. Respuesta de Natalia.....	175
Ilustración 106. Respuesta de David.....	176
Ilustración 107. Respuesta de Rosa.....	176
Ilustración 108. Respuesta de Nataly.....	176
Ilustración 109. Respuesta de Rosa.....	178
Ilustración 110. Respuesta de Rosa.....	178
Ilustración 111. Respuesta de Rosa.....	179
Ilustración 112. Respuesta de Rosa.....	179
Ilustración 113. Respuesta de David.....	180
Ilustración 114. Respuesta de David.....	180
Ilustración 115. Respuesta de Rosa.....	180
Ilustración 116. Respuesta de Nataly.....	181
Ilustración 117. Respuesta de David.....	182
Ilustración 118. Respuesta de Rosa.....	182
Ilustración 119. Respuesta de Nataly.....	182
Ilustración 120. Respuesta de Rosa.....	184

Ilustración 121. Respuesta de Natalia. ....	184
Ilustración 122. <i>Nataly cubriendo la superficie con las multifichas.</i> .....	191
Ilustración 123. Rosa cubriendo la superficie con las multifichas. ....	192
Ilustración 124. David y Rosa cubriendo la superficie del salón. ....	193
Ilustración 125. Respuesta David.....	194
Ilustración 126. Respuesta Rosa. ....	194
Ilustración 127. Respuesta Nataly.....	194
Ilustración 128. Respuesta de David.....	195
Ilustración 129. Respuesta de Rosa.....	195
Ilustración 130. Respuesta de Nataly. ....	196
Ilustración 131. Respuesta de David.....	196
Ilustración 132. Respuesta de Rosa.....	196
Ilustración 133. Respuesta de Nataly. ....	197
Ilustración 134. Respuesta de David.....	197
Ilustración 135. Respuesta de Nataly. ....	198
Ilustración 136. Respuesta de David.....	198
Ilustración 137. Respuesta de Rosa.....	198
Ilustración 138. Respuesta de Nataly .....	198
Ilustración 139. Muestra del Plano de una casa. ....	199
Ilustración 140. Respuesta de David.....	200
Ilustración 141. Respuesta de Nataly. ....	202
Ilustración 142. Respuesta de Nataly. ....	202
Ilustración 143. Respuesta Rosa. ....	203
Ilustración 144. Respuesta Nataly.....	204
Ilustración 145. Respuesta Rosa. ....	204
Ilustración 146. Respuesta Nataly.....	205
Ilustración 147. Respuesta David.....	207
Ilustración 148. Respuesta Rosa. ....	207
Ilustración 149. <i>Proceso de medición del perímetro de un lugar.</i> .....	217
Ilustración 150. Proceso de los participantes para hallar el área y perímetro. ....	217
Ilustración 151. Representación realizada por David. ....	218

Ilustración 152. Representación realizada por Rosa y Nataly.....	219
Ilustración 153. Respuesta de David.....	219
Ilustración 154. Respuesta de Rosa.....	220
Ilustración 155. Respuesta de Nataly.....	220
Ilustración 156. Respuesta de David.....	220
Ilustración 157. Respuesta de Rosa.....	220
Ilustración 158. Respuesta de Nataly.....	221
Ilustración 159. Respuesta de David.....	221
Ilustración 160. <i>Respuesta de Rosa</i> .....	221
Ilustración 161. Respuesta de Nataly.....	221
Ilustración 162. Muestra del plano de una casa.....	222
Ilustración 163. Respuesta de David.....	223
Ilustración 164. Respuesta de David.....	223
Ilustración 165. Respuesta de Nataly.....	223
Ilustración 166. Representación de la habitación con las baldosas.....	224
Ilustración 167. <i>Proceso realizado por David y Rosa para hallar el perímetro</i> .....	225
Ilustración 168. Proceso para hallar la medida del perímetro.....	226
Ilustración 169. Proceso realizado por Nataly para hallar el área.....	226
Ilustración 170. <i>Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida</i> .....	245
Ilustración 171 Recorriendo el contorno con diferentes unidades de medida.....	248
Ilustración 172. Progreso en las Fases de aprendizaje.....	269
Ilustración 173. Certificado, comunicación breve.....	274
Ilustración 174. I Seminario Internacional de Innovación en Educación y Didáctica de las Ciencias.....	274



## Resumen

En la presente investigación se analiza cómo razonan los estudiantes de grado tercero de Educación Básica Primaria acerca de los conceptos de área y perímetro a partir de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, el cual es un método de enseñanza que permite mejorar el razonamiento de conceptos geométricos. Para el alcance de este propósito se diseñaron actividades que se organizaron teniendo en cuenta categorías y descriptores que se fueron refinando durante el proceso, por tanto, la ruta metodológica se enmarca en un enfoque cualitativo y los planteamientos referidos al estudio de caso están mediados por instrumentos como: la observación, entrevista y documentos escritos para la recolección y análisis de información. Finalmente se exponen y analizan los insumos de los participantes en cada una de las Fases, sus argumentos y apreciaciones como la mayor fortaleza que da cuenta del proceso investigativo, fue así como se encontró que los estudiantes que participaron avanzaron en el razonamiento de los conceptos de área y perímetro de forma significativa, ya que lograron demostrar su capacidad para aplicar dichos conceptos a diferentes situaciones planteadas y adquirir un lenguaje más estructurado, donde además dieron cuenta de una comprensión más específica de los conceptos estudiados, demostrando así la eficacia de la aplicación del Modelo de van Hiele en estudiantes de básica primaria.

**Palabras claves:** área, perímetro, Fases de aprendizaje, van Hiele, razonamiento.

## Abstract

This research analyzes how third grade students of Primary Basic Education think about the concepts of area and perimeter from the learning phases of the van Hiele Model, which is a teaching method that allows to improve thinking of geometric concepts. In order to achieve this purpose, activities were designed and organized taking into account categories and descriptors that were structured during the process, therefore, the methodological route is framed in a qualitative approach and the statements referred to the case study are mediated by instruments such as: observation, interview and written documents for the collection and analysis of

information. Finally, the evidences and productions given for the participants in each of the Phases are exposed and analyzed, then their arguments and appreciations were the greatest strength that proved the investigative process, so it was found the participants students advanced significantly in the thinking of the concepts of area and perimeter, since they were able to apply these concepts to different situations and acquire a more structured language, where they also showed a more specific understanding of the concepts studied, as a result, the effectiveness of the van Hiele Model was demonstrated for elementary school students.

**Key words:** Area, perimeter, concepts, Phases of learning, van Hiele Model, thinking.

## Introducción

La presente investigación se realiza en el marco del programa de Maestría en Educación, Línea de Formación: Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. El proyecto se desarrolló en el municipio de San Pedro de Urabá, el cual se encuentra ubicado en el noroccidente del departamento de Antioquia, específicamente al norte de la región de Urabá, este municipio cuenta con 64 veredas y cinco corregimientos, de los cuales el 0,58% lo conforma el casco urbano y los restantes 99,42% el área rural (Plan de desarrollo municipal 2016 – 2019), por lo que se puede decir que es un municipio con un alto territorio rural, donde gran parte de las familias se dedican a las actividades agrícolas.

La institución Educativa San Pedro de Urabá, localizada en la zona urbana del municipio, en la cual se realizó la investigación, cuenta con educandos que en su mayoría son provenientes de familias rurales, dedicadas a la siembra de diversos cultivos y que requieren en muchos casos de la medición de terrenos para su distribución y para saber qué parte de la parcela se dispone para la siembra de determinados productos, o de la cantidad de metros cuadrados que tiene si desea vender o comprar un terreno.

Desde la experiencia como docente, en zona rural y en la zona urbana, se ha observado la dificultad que presentan los estudiantes de Básica Primaria al enfrentarse a situaciones que requieren la aplicación de los conceptos de área y perímetro, para este caso se ha enfocado en el grado tercero de la Institución Educativa San Pedro de Urabá. El problema que se aborda en esta investigación se evidencia en el razonamiento impreciso que hacen gran parte de los educandos sobre los conceptos de área y perímetro, los cuales confunden con facilidad, ya que no establecen diferencias claras ni mucho menos procesos matemáticos asociados a estos conceptos.

Además, les cuesta comprender el área como la medida de la superficie limitada por el borde y el perímetro como la medida del contorno de la figura y tampoco establecen relaciones como que a cada área le corresponde un perímetro y que todo perímetro encierra un área, cabe resaltar que cuando se enfrentan a situaciones donde deben hallar el área de una superficie, responden equivocadamente con la medida del perímetro y también se presenta el caso contrario. Todo esto

cobra relevancia a la hora de comenzar a realizar operaciones multiplicativas y aditivas con las medidas que se obtienen a partir de una figura plana.

Por tanto, se considera oportuno abordar este tipo de estudio dado que en el medio en que los estudiantes viven se requieren de ciertos conocimientos matemáticos y geométricos como los relacionados anteriormente, con el fin de interactuar de una manera más apropiada con su entorno, es así que fortalecer el razonamiento de estos conceptos desde los primeros años de la educación primaria es una tarea educativa importante, puesto que son conceptos transversales a lo largo de todo el ciclo escolar, además, pueden ser aplicados para dar solución a situaciones que se encuentran en la vida diaria. Por lo cual, el (MEN 2016), expone un conjunto de aprendizajes organizados que deben aprender los estudiantes en cada uno de los grados, donde se encuentran inmersos los conceptos objeto de estudio del presente trabajo.

Esta investigación tiene como propósito analizar cómo razonan los estudiantes de grado tercero acerca de los conceptos de área y perímetro de figuras planas a partir de las Fases de Aprendizaje del Modelo de van Hiele. Pensando en ello se diseñaron actividades para cada una de las Fases de Aprendizaje, que a su vez sirvieron como medio para poner en evidencia el razonamiento de los conceptos geométricos, así mismo al final de cada actividad se generó una serie de preguntas orientadas para describir el razonamiento de los participantes en las Fases de Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre e Integración.

En el Capítulo I se abordan aspectos relacionados con el problema de investigación, en el cual se presenta el contexto donde se desarrolló el proyecto, se indica la localización en el cual se llevó a cabo y se dan a conocer las características de los participantes, también se presenta la descripción de dicho problema en el cual se exponen las dificultades en cuanto al razonamiento de los conceptos de área y perímetro. Adicionalmente, se da a conocer la justificación del proyecto, resaltando la importancia del razonamiento de los estudiantes desde los primeros años de escolaridad, y así adquirir habilidades matemáticas en busca de la solución de situaciones en el contexto, luego se presenta la importancia de la geometría a través de la historia donde se exponen los antecedentes y se hace una revisión de la literatura asociada al problema planteado con relación a los conceptos geométricos. Por último, se plantea la pregunta de investigación y los objetivos propuestos.

En el Capítulo II se presentan marcos teóricos relacionados con la comprensión tales como: la Enseñanza para la Comprensión, el Modelo de Pirie y Kieren y el Modelo de van Hiele, este último se escogió como sustento teórico para esta investigación, puesto que se fundamenta en procesos de razonamiento relacionados principalmente con el componente geométrico. El presente estudio se centra en las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, en el cual se diseñaron actividades para analizar cómo razonan los estudiantes de grado tercero acerca de los conceptos de área y perímetro. Además, se expone la pertinencia del Modelo de van Hiele en el proceso investigativo.

En el Capítulo III se expone el diseño metodológico, se describen los enfoques investigativos y se toma postura frente a uno de ellos, el lector también podrá identificar el tipo de estudio de acuerdo al enfoque establecido, seguidamente, se describen los instrumentos utilizados para abordar el proceso investigativo, luego se hace una descripción amplia de los participantes, seguidamente, se describen los conceptos abordados (área y perímetro de figuras planas), definiéndose las categorías para el análisis de la información. Además, se exponen los descriptores a priori en cada una de las Fases de aprendizaje y las actividades planteadas que guardan relación con dichos descriptores. Por último, se presenta una matriz de categorías y descriptores a priori y el diseño de las actividades en cada una de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele.

En el Capítulo IV, se presentan los resultados de las diferentes actividades que se desarrollaron en el trabajo de campo y el análisis de la información obtenida en cada una de ellas, esto se dio a partir de las interacciones con los estudiantes involucrados en el proceso investigativo. Inicialmente se presenta la actividad diagnóstica, donde se identifican los conocimientos previos que tienen los estudiantes acerca de los conceptos de área y perímetro, aquí se encuentra el análisis de la primera información recolectada, de donde se parte de las categorías y descriptores diseñados para cada una de las Fases teniendo en cuenta las características dadas para cada una de ellas acorde con el Modelo de van Hiele.

Al final de cada Fase se presenta una matriz donde se muestra el avance de los participantes y las actividades específicas que evidencian el razonamiento acerca de los conceptos de área y perímetro, además, se presenta una Tabla que evidencia el lenguaje utilizado por los

participantes con relación a los conceptos ya mencionados, así como el análisis del lenguaje y la red de relaciones que fueron construyendo los participantes a lo largo del proceso.

Finalmente, en el Capítulo V se presenta la forma en la que se dio respuesta a la pregunta de investigación a partir del razonamiento de los participantes, luego se exponen el alcance que tuvieron los objetivos, tanto el general como los específicos. Se presenta la matriz de descriptores refinada, para posteriormente hacer referencia a las dificultades que se presentaron en el transcurso del estudio, y en último lugar se plantea el aporte realizado a la Educación Matemática y después se proponen futuros temas de investigación relacionados con este trabajo.

## **Capítulo I: Antecedentes**

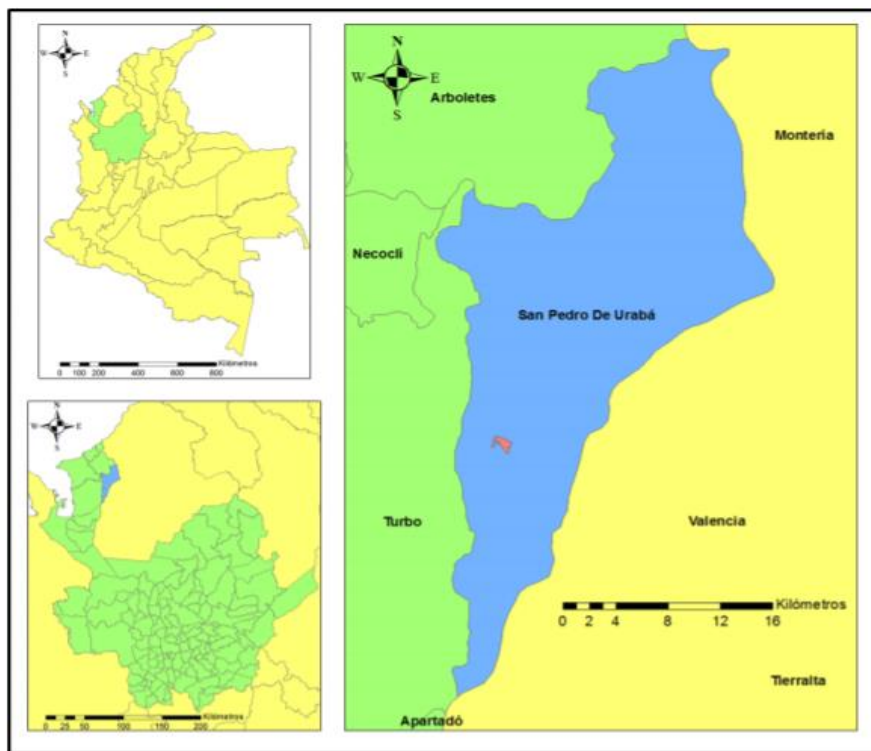
En el presente apartado se describe el contexto en el cual se realiza la investigación, se aborda la problemática que se espera investigar y su justificación. También se presenta una breve historia de los conceptos de área y perímetro, al igual que un rastreo bibliográfico de los mismos en la legislación colombiana y algunos antecedentes de investigaciones previas al tema en cuestión. Al final del apartado se encuentra la pregunta de investigación y los objetivos que ayudarán a dar respuesta a la misma.

### **1.1 Contexto de la Investigación**

La Institución Educativa San Pedro de Urabá se encuentra ubicada en la zona urbana del municipio de San Pedro de Urabá, cuenta con 1997 estudiantes, distribuidos en varias sedes, ofrece servicios educativos de transición, básica primaria, secundaria y media. Esta Institución es de carácter público y es la más grande del municipio, cuenta con 20 grupos de primaria y 28 de secundaria, repartidos en tres sedes, dos urbana y dos rural, con un total de 65 docentes, tres coordinadores, uno de ellos específicamente de primaria, una secretaría y un rector.

El grado tercero, seleccionado para realizar la presente investigación, está conformado por 35 estudiantes, 16 niñas y 19 niños, los cuales se encuentran entre edades de 8 y 12 años. Son estudiantes participativos, sociables, cariñosos, respetuosos, colaboradores, con ganas de salir adelante, comprometidos con sus actividades académicas, provenientes de familias monoparentales, en su mayoría víctimas del conflicto que ha vivido la zona en las últimas décadas. La economía de estas familias se basa en la agricultura, dedicándose específicamente a la siembra de productos en el campo, ya que algunos cuentan con terrenos (parcelas), donde realizan sus cultivos.

A continuación, se muestra un mapa de localización del municipio de San Pedro de Urabá, su ubicación en Colombia y en el departamento de Antioquia.



*Ilustración 1.* Localización espacial municipio de San Pedro de Urabá. Tomado de plan de desarrollo del municipio de San Pedro de Urabá. 2016-2019

## 1.2 Justificación

Los conceptos de área y de perímetro están ligados a nuestro diario vivir, en diversas ocasiones nos encontramos con situaciones como: ¿Cuál es el ancho de la sala?, ¿Cuánto mide esta mesa?, que parque tan grande, que piscina más pequeña. Para comprender mejor este tipo de cuestionamientos se requieren conocimientos relacionados con los conceptos de área y perímetro y, por ello, es importante involucrar estrategias de enseñanza y de aprendizaje adecuadas desde los primeros años de escolaridad.

Es importante anotar que hay escenarios en los que cobran mayor importancia estos conceptos, como lo puede ser el contexto del campo, donde a diario los estudiantes se ven enfrentados a situaciones como las siguientes: ¿Cuánto mide cada uno de los límites de la finca de mi tío?, ¿Cuántas hectáreas se van a utilizar en el cultivo de maíz este año?, ¿Cuántos instrumentos de madera alargado se necesitan para cercar el terreno?, ¿Cuál es el terreno que se



va a rodear para sembrar los vegetales? Escenarios como estos son en los que viven la mayor parte de los estudiantes con los que se desarrolla el presente proyecto.

Por consiguiente, se pone en evidencia la necesidad que desde los primeros años de escolaridad los estudiantes empiecen a razonar adecuadamente sobre los conceptos de área y perímetro. Por otra parte, varias de las pruebas externas que realiza el Estado a los estudiantes y las que se proponen a nivel institucional tienen un componente geométrico relacionado con los conceptos de área y perímetro de figuras planas. De igual forma, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), a través de los Estándares Básicos de Competencia (2006), propone que el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes se dé en contextos del mundo real y cotidiano, escolar y extraescolar, lo que pone de manifiesto, que para el razonamiento de los conceptos de área y perímetro se requiere un acercamiento con el entorno, permitiendo a los estudiantes relacionar figuras, objetos, formas y mediciones con situaciones de su diario vivir, reconociendo oportunidades de desarrollo eficaz de habilidades matemáticas para resolver problemas en el contexto.

En busca de lograr ese acercamiento con la realidad y así garantizar que esto sea tenido en cuenta, el (MEN) propone los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), como un conjunto de habilidades cognitivas que los estudiantes deben aprender en cada uno de los grados de la educación escolar desde transición hasta el grado once. A continuación, se exponen los (DBA) que guardan relación con los conceptos de área y perímetro en grado tercero de Educación Básica Primaria, que es el nivel de escolaridad en el cual se desarrolla esta investigación:

- Describe y argumenta posibles relaciones entre los valores de área y perímetro de figuras planas (especialmente cuadriláteros).
- Realiza medición de longitudes, capacidades, peso, masa, entre otros, para ello utiliza instrumentos y unidades no estandarizadas y estandarizadas.
- Compara y explica características que se pueden medir, en el proceso de resolución de problemas relativos a longitud, superficie, velocidad, peso o duración de los eventos, entre otros.
- Elige instrumentos y unidades estandarizadas y no estandarizadas para estimar y medir longitud, área y volumen.

- Explica las relaciones entre el perímetro y el área de diferentes figuras (variaciones en el perímetro no implican variaciones en el área y viceversa) a partir de mediciones, superposición de figuras, cálculo, entre otras (MEN, 2016, p. 24).

La relación que se establece desde los referentes curriculares (EBC) y (DBA) con el objeto de estudio muestra la importancia que tienen los conceptos de área y perímetro a lo largo de la vida escolar de los estudiantes, los cuales son iguales para todo el territorio nacional. En este caso particular relacionado con el componente geométrico, para lo cual es necesario que los estudiantes desarrollen actividades que conlleven a un razonamiento que les permita solucionar problemas que involucren los conceptos geométricos (área y perímetro). Por tanto, se realizó una revisión de literatura con relación a la enseñanza y el aprendizaje de área y perímetro. En adelante se presentan los planteamientos de algunos autores que se relacionan con la geometría y los conceptos ya mencionados.

### **1.3 Revisión de literatura**

La revisión de literatura fue dirigida a partir de la reflexión acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje del área y el perímetro, los cuales son conceptos que hacen parte del componente geométrico. Para hacer esta revisión se tuvieron en cuenta los siguientes interrogantes: ¿Qué se entiende por geometría? ¿Cuál es la importancia de la geometría en la vida cotidiana del ser humano? ¿Cómo se aprende y se enseña los conceptos de área y perímetro? Estas preguntas llevan a pensar y razonar con los estudiantes acerca de lo que se puede observar en su entorno debido a que se pueden establecer múltiples relaciones geométricas.

En aras de dar respuesta a los anteriores interrogantes, se realizó una revisión de literatura, inicialmente, en la legislación colombiana, seguidamente, se mencionan aspectos históricos de la geometría y posteriormente en bases de datos, tales como Scielo, Dialnet, Redalyc, entre otras, en buscadores como Google Académico; repositorios de universidades como la Universidad Nacional, Universidad de Antioquia, Universidad de los Andes, entre otras. En dichas fuentes de información, se hallaron ponencias, artículos, talleres, investigaciones y otros documentos que permitieron orientar el proceso investigativo. En adelante se presentan planteamientos de algunos autores que se refieren a los cuestionamientos relacionados en los párrafos anteriores.

### 1.3.1 Área y perímetro desde la legislación colombiana

El Ministerio de Educación Nacional, en aras de fortalecer los procesos académicos al interior de las instituciones ha propuesto a lo largo del tiempo lineamientos curriculares que permiten unificar criterios referentes al aprendizaje que los estudiantes deben lograr en los diferentes niveles de educación, transición, básica primaria, secundaria y media. Es así como en el año 2006 el MEN propone los Estándares Básicos de Competencia (EBC), para que tanto docentes como estudiantes tengan una mejor comprensión de los conceptos que se deben desarrollar en el aula y los puedan poner en práctica, de acuerdo con las exigencias de los diferentes grados y contextos. El MEN (1998) plantea que:

La renovación curricular propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos, desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones (p. 6).

Para fortalecer la comprensión de los conceptos geométricos de los estudiantes en su paso por la escuela, los Estándares Básicos de Competencias (2006), proponen:

El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras (p. 62).

Según lo anterior, se puede afirmar que el uso de materiales concretos en el proceso de enseñanza y aprendizaje resulta de gran ayuda en el acercamiento de lo que son las medidas de volumen, área y perímetro, así como sus sistemas de medida, debido a que los estudiantes perciben elementos físicos y los relacionan con los simbólicos, además, se puede observar claramente la existencia real de estas medidas.

A continuación, se encuentran los EBC de Básica Primaria en el área de matemáticas, que guardan relación con los conceptos de área y perímetro y que se pueden encontrar en MEN (2006) como:

- Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales.
- Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración.
- Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas (p. 80).

En 2016 el MEN, publica los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), los cuales presentan coherencia con los EBC, como una herramienta que brinda orientaciones claras que ayudan a direccionar los aprendizajes en cada uno de los grados en que se encuentren los estudiantes.

A continuación, se presentan los DBA relacionados con el objeto de estudio en el grado tercero de la Básica Primaria y que en MEN (2016) se encuentran como:

- Describe y argumenta posibles relaciones entre los valores del área y el perímetro de figuras planas (especialmente cuadriláteros).
- Explica las relaciones entre el perímetro y el área de diferentes figuras (variaciones en el perímetro no implica variaciones en el área y viceversa) a partir de mediciones, superposición de figuras, cálculo, entre otras (p. 24).

Como se puede evidenciar, tanto los EBC como los DBA plantean que los estudiantes identifiquen, reconozcan, expliquen y describan características de figuras a partir de mediciones, por lo tanto, es pertinente que los participantes comprendan cómo usar algunos elementos de la geometría como son los conceptos de área y perímetro en situaciones de la vida diaria.

Al respecto, los Lineamientos Curriculares de matemática en Colombia plantean que:

la geometría como una herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación (MEN, 1998, p. 17).

De lo expresado por el MEN se puede analizar que este trabajo de investigación podría ser de gran ayuda para que los estudiantes puedan entender de forma más clara el entorno en el que se desenvuelven, lo que les daría la capacidad de razonar de forma coherente sobre su realidad y así desarrollar un análisis espacial de los elementos que tienen a su alrededor, cabe resaltar que todo esto posibilita la adquisición de nuevas habilidades cognitivas.

### **1.3.2 Importancia de la Geometría a través de la Historia**

En este apartado se habla sobre la geometría, su definición, su importancia a través de la historia y su utilidad en la época actual. Para iniciar es pertinente definir la palabra geometría, que según Hemmerling (2005) “La geometría es el estudio de las propiedades y medidas de las figuras compuestas de puntos y líneas, se deriva de las palabras griegas geo que significa tierra, y metrón que significa medir” (p. 1). Lo que da a entender que este concepto se relaciona en gran medida con las diversas formas que se encuentran en la tierra, haciendo posible realizar mediciones de estas y así analizarlas más detalladamente, esto conlleva a que su enseñanza sea crucial en los contextos educativos.

Al respecto, Ramírez (1964) expone su inquietud por conocer por qué se estudia la geometría, y para encontrar respuestas cita a Welchons y Krickenberg (1940), quien responde aludiendo a lo beneficioso que resulta la geometría para ir desarrollando el razonamiento a nivel general de los estudiantes, porque ayuda a tener un pensamiento más lógico que se puede emplear en las relaciones cotidianas, además permite leer con mayor comprensión, lo que sin dudas crea fortalezas a la hora de enfrentarse a nuevos aprendizajes. Hay que resaltar que Welchons y Kirckenberg (1940), también relacionan el aprendizaje de la geometría como una oportunidad para hacer una mejor apreciación de las obras creadas por los seres humanos como el arte y la

arquitectura, así como aquellas que pertenecen a la naturaleza, como en los bosques, las hojas, las frutas, las celdas de las colmenas de abejas, entre otros.

Ahora bien, se hace necesario ahondar más en el componente histórico de la geometría, que tuvo sus orígenes con los egipcios, a partir de la necesidad que tenían para medir sus terrenos y delimitar sus cultivos debido a las inundaciones causadas por el río Nilo, en este sentido Hemmerling (2005), manifiesta que “la geometría fue utilizada por los egipcios y babilonios aproximadamente en los años (4000 - 3000 A. C)” (p. 1), al respecto Ortiz (2005), plantea que: “... las civilizaciones que lograron significativos progresos matemáticos, como fue el caso de Babilonia y de Egipto, dos legendarias culturas que llegaron a poseer una geometría, una aritmética y un álgebra suficientemente avanzada para lograr significativas aplicaciones” (p. 4).

Por tanto, estos avances fueron de gran importancia, puesto que les permitió resolver problemas prácticos relacionados con su entorno, estas civilizaciones aplicaron la geometría en la repartición de tierras y actividades diarias en el campo agrícola, que conllevaron a un mejor aprovechamiento y distribución de sus cultivos, y a la vez se encuentran relacionadas con importantes aplicaciones en el contexto rural para la solución de problemas, al comparar, medir, crear, estimar.

Más adelante, el conocimiento geométrico pasó a Grecia donde Hemmerling (2005), plantea “... que los griegos nos legaron algunos de los más grandes descubrimientos para el avance de las matemáticas. Los filósofos griegos estudiaron geometría no solo por sus beneficios prácticos, sino también por sus valores estéticos y culturales que ofrece” (p. 1). Estos filósofos eran personas adineradas que dedicaban tiempo al estudio de culturas y se enriquecían con los conceptos y teorías que traían al regresar de sus largos viajes por otros países, todo esto lo aprovechaban para realizar sus debates y profundizar en el estudio de la geometría, el cual les ayudó a tener un razonamiento lógico. Entre los griegos más importantes que hicieron grandes aportes a las matemáticas estaban: Tales de Mileto, Pitágoras, Platón, Arquímedes y Euclides.

Estas civilizaciones hicieron grandes aportes al desarrollo de la geometría, en la actualidad se le debe dar aplicaciones didácticas para una comprensión de conceptos matemáticos. Cortés

(2012), plantea que “el aprendizaje de la geometría debe arrancar con un problema que sea sentido como tal por quien aprende y, en consecuencia, la enseñanza de la geometría debe comenzar proponiendo a los estudiantes un problema con sentido para ellos” (p. 43). Lo expuesto por este autor pone de manifiesto la importancia de involucrar en el aula situaciones que llamen la atención de los estudiantes, que tengan sentido para ellos y puedan ponerla en práctica en su diario vivir, donde se vinculen los intereses y necesidades de los estudiantes con los conceptos de área y perímetro, y así favorecer el proceso de enseñanza y de aprendizaje en estos conceptos geométricos.

Profundizando más en el componente histórico, se hace necesario mencionar una vez más a los egipcios, quienes no solamente desarrollaron avances en la aritmética, dejando evidencias de operaciones entre diferentes conjuntos de números, además de sucesiones aritméticas y geométricas, es de anotar que, dentro de sus amplios conocimientos se encuentran el contar con reglas exactas para hallar el área de diversas figuras geométricas (Pastor y Babini, 1985). De igual forma, los babilónicos dejaron textos históricos confirmando lo avanzado que estaba esta sociedad en cuanto a las aplicaciones geométricas tales como la proporcionalidad entre figuras y sus áreas. En Pastor y Babini (1985) se puede encontrar que también los pitagóricos, en medio del uso continuo de polígonos regulares, se preocuparon en gran medida por llenar un área con este tipo de figuras, a pesar de las pocas posibilidades que encontraban para hacerlo, dejando de manifiesto una vinculación matemática con los babilonios, ya que el problema de la aplicación de áreas resulta ser la contraparte algebraica estudiada en gran medida por los últimos.

De igual forma Pastor y Babini (1985), afirman que en la alta edad media ya se presentaban escritos referentes a la geometría plana, donde se desarrollaban algunas relaciones notables entre las áreas y perímetros de los polígonos regulares que se encuentran inscritos o circunscritos dentro de una circunferencia. Justamente Arquímedes se encargó de realizar numerosos estudios relacionados con los perímetros de los polígonos, aproximándolos a circunferencias mediante el desarrollo de raíces cuadradas.

En cuanto a la aplicabilidad de los perímetros y su relación en el contexto cotidiano, ya desde la antigüedad en la colección de Pappus, más específicamente en su quinto libro, donde se hace un énfasis en los isoperímetros, relacionándolos en la manera como la abejas construyen las

celdas de sus paneles de forma hexagonal, y donde además se expresa que al comparar los hexágonos con cuadrados y triángulos, son los hexágonos los que tienen la misma área que las otras figuras pueden tener mayor perímetro. (Pastor y Babini, 1985).

De forma general Bourbaki (1979), afirma que incluso ya en los documentos de mayor antigüedad sobre las matemáticas, los egipcios y babilonios dan cuenta de un sistema de cálculo organizado, pensado siempre para valores mayores que cero, sin embargo también se resalta que las nociones de longitud, área y volumen están también directamente ligados a los griegos, esto queda demostrado por medio de Euclides, quien es uno de sus principales exponentes y que en su libro 1 *Noción Común*, obtiene las principales fórmulas para las figuras clásicas.

Además, Bourbaki (1979), indica que inicialmente la geometría paralizó de cierta forma el desarrollo de la notación algebraica, esto debido a todo el manejo de las magnitudes y que los cálculos de alguna forma debían tener una representación geométrica, en este sentido, partiendo de que el producto de dos longitudes conforma un área, lo cual ocasiona limitaciones en el planteamiento de expresiones algebraicas por encima de segundo grado. Dentro de los elementos históricos mencionados por el mismo autor, también se debe resaltar que diversos cálculos de áreas y volúmenes fueron trabajados inicialmente por Eudoxio y también por Arquímedes en la época antes de Cristo, con el método de sumatorias sucesivas, de hecho, dentro de los métodos de Arquímedes se encontraba el cálculo de un área plana mediante la división en infinitas franjas paralelas, donde a modo de aproximación, cada franja era un rectángulo.

De igual forma, Saenz (1994), manifiesta la importancia que tuvo el manejo de perímetros a la hora del cálculo del número  $\pi$ , así mismo, Johann Kepler llegaba a considerar la circunferencia como un polígono regular de infinitos lados. Por otro lado, con respecto a las nociones sobre medición de superficies, Saenz (1994), hace mención nuevamente a Kepler, quien trabajó en la problemática de llenar el plano con polígonos regulares, que no necesariamente eran del mismo tipo.

Como se puede evidenciar la geometría está inmersa en diversas situaciones del diario vivir, esto queda de manifiesto al observar que las antiguas culturas que habitaron miles de años antes de la época contemporánea, se valieron de herramientas con las que disponían en su medio, que mezclados con análisis profundos, dieron lugar a grandes avances en materia de geometría, sobre



todo en lo relacionado con el área y el perímetro, dando a entender la importancia que estos conceptos han tenido durante el desarrollo de las matemáticas ya que las empleaban en situaciones relacionadas con sus costumbres y en las actividades del campo. Caso que se encuentra estrechamente relacionado con el sector agrícola, contexto donde se implementan los saberes de gran parte de las familias de los participantes de este estudio, así pues, se puede precisar que la geometría tiene gran relevancia en el análisis de muchos procesos y situaciones con las que estamos en contacto diariamente, por tanto, es importante reforzar sobre la enseñanza de la importancia de la geometría en los estudiantes, ya que esto les genera motivación y por consiguiente mejora el razonamiento de conceptos geométricos, que para esta investigación son los de área y perímetro.

### **1.3.3 Unidades de medidas cualitativas y cuantitativas**

Previamente ya se ha hablado de la necesidad que hay de relacionar las matemáticas con la realidad, tanto así que en algunos casos ha llegado a ser un reto, y lo relacionado con las mediciones tiene mucho que ver con todo esto. Es interesante que en Godino, Batanero y Roa (2002), se habla de que en un sentido amplio la acción de “medir” en realidad se refiere a la asignación de un código o rasgo de identificación a las características de objetos, fenómenos o procesos que ocurren en la vida diaria, y que no se limita sólo a lo cuantitativo sino también a los aspectos cualitativos, y es justamente esta forma de medir cualitativamente uno de los mecanismo indirectos por medio de los cuales realizamos mediciones constantemente. Se puede decir que en el presente estudio este lenguaje cualitativo cobra relevancia, sobre todo en el momento en que los estudiantes comienzan a relacionarse por primera vez con algunos procesos de medición de área y perímetro.

Godino et al. (2002), también hacen alusión a que a pesar de que la medición puede tener una connotación más general, cuando se habla de magnitud ya se habla de valores cuantitativos y es justo aquí donde se hace necesario establecer unos patrones o referencias que darán cuenta de dichas magnitudes, a estas referencias son las que se denominan unidades de medida. Sin embargo, Godino et al. (2002), se refiere a que en la Básica Primaria y en general en la vida cotidiana, lo más frecuente es relacionarse con magnitudes asociadas a valores cuantitativos, puesto que los estudiantes a menudo reciben información proveniente de procesos que

involucran unidades de medida identificando códigos característicos atribuidos a algunos fenómenos u objetos.

También es importante tener en cuenta que existen rasgos y fenómenos que se pueden describir mediante valores cualitativos, siempre y cuando estén bien organizados y codificados, esto se reafirma en Godino et al. (2002), cuando exponen lo que son los sistemas irregulares y regulares de medida, llama la atención un ejemplo donde se habla sobre medir el largo de una mesa utilizando “folios”, resaltando que si se quiere más precisión, se puede terminar de medir con “alfileres”, pero al respecto, menciona que las mediciones irregulares de este tipo pueden llegar a ser engorrosas al momento de hacer comparaciones, por eso se crea la necesidad de tener sistemas regulares donde se trabaje sólo con una unidad y que además incluya múltiplos y submúltiplos.

Carabalí (2012), define la acción de medir como aquella donde se cuantifica la representación de un todo que es homogéneo a través de una unidad que puede variar, es justamente donde el estudio de Carabalí cobra importancia, debido a que busca resaltar todas esas unidades de medida tradicionales de una comunidad y así rescatar también otras formas de medición que pueden ser muy útiles en los procesos de enseñanza de las superficies y que además rescata los conocimientos empíricos de los pueblos siendo utilizados indirectamente en sus quehaceres diarios. Carabalí (2012), menciona también la necesidad de incluir las unidades no convencionales de medida como la vara, la cuarta, el jeme, entre otras que son herencia patrimonial de nuestra cultura, y por tanto se debe favorecer su uso y perdurabilidad en la mente de los niños y niñas, además, este autor indica que no es fácil escoger una medida no convencional, pero, que son una buena alternativa a la falta de las herramientas de medida convencionales ya que corresponden a partes del cuerpo que se visualizan constantemente.

Dentro de todas las medidas no convencionales que menciona Carabalí (2012), es importante resaltar la mano, la cuarta, el jeme, o los pasos, es así como según dicho estudio, unidades como la cuarta, se definen como una mano extendida que abarca un espacio desde el pulgar hasta el meñique, y que es muy utilizado para medir el ancho en trozos de madera, así como en los juegos infantiles, de igual forma se hace alusión al jeme como aquella medida que está entre la

punta del dedo índice y la punta del dedo pulgar, muy utilizado también en los juegos tradicionales de niños.

De la misma manera, es interesante analizar las unidades de medida como los cuatro dedos, que como su nombre lo indica se trata de tomar los cuatros dedos de las manos de forma unida exceptuando el dedo pulgar, y curiosamente menciona el paso como otra unidad de medida de uso común en el lenguaje coloquial y que se asocia a distancias mayores. (Carabalí, 2012), sin embargo, como ya se mencionó anteriormente, para efectos de comparaciones y un manejo más globalizado, se hace necesario una estandarización en patrones que faciliten dichas comparaciones.

A pesar de esto, también hoy en día existe la tendencia a forzar el aprendizaje de unidades de medida que lejos están de la realidad de los estudiantes, ya que Gallo et al. (2006), hace alusión a que en el contexto escolar los estudiantes son sometidos a realizar mediciones con instrumentos de medida que pueden llegar a ser complejos, todo esto sin antes hacer un acercamiento con lo que representan las magnitudes y la necesidad lógica de utilizar unidades de medida, partiendo también de las mediciones que ya los estudiantes realizan indirectamente en su quehacer cotidiano, incluso Gallo et al. (2006), expresan que: “no se establecen nexos entre el tratamiento físico de las magnitudes y el tratamiento matemático” (p. 9). Por este motivo se debe tener en cuenta procesos didácticos que permitan el análisis y razonamiento de los estudiantes al momento de realizar procesos matemáticos relacionados con las magnitudes, para a partir de esto introducir las operaciones algorítmicas, que son los que típicamente se enseñan desde las escuelas.

Al respecto Carabalí (2012), afirma que ya desde tiempos remotos los seres humanos se encontraban en la búsqueda de patrones de medida y que de hecho fue así como se llegó a la creación de diferentes unidades de medida relacionadas con partes del cuerpo y objetos del medio, dando a entender que no se debe dejar de lado las partes del cuerpo como forma de llevar a cabo diferentes mediciones.

Las unidades de medida son de gran importancia a veces sin darnos cuenta en gran parte de muchos momentos en la vida, se presentan en la literatura en diferentes referentes, uno de ellos expresado por Martínez (2012), donde se le da importancia a la manera de manejar las unidades

en el proceso de enseñanza de la trigonometría y sobre la manera más adecuada de medir los ángulos, y que en ciertas ocasiones los profesores se encuentran enfrentados ante la necesidad de escoger una unidad de medida angular pertinente.

Iparraguirre (2009), afirma que, sin lugar a dudas, la medición se convierte en el pilar fundamental de áreas del conocimiento como la Física, ya que al fin y al cabo se dice que todo aquello que se puede medir se denomina como propiedad física y, para obtener esas mediciones se deben tomar datos de forma directa o bien pueden ser mediante cálculos a partir de mediciones tomadas previamente, cabe resaltar que en este proceso de medición se hace necesario desarrollar comparaciones con algún patrón de referencia que en este caso se menciona como unidades de magnitud, es aquí donde justamente se hace la inclusión de un símbolo que acompaña al valor numérico, esto para identificar la unidad que se usó.

Adicional a los planteamientos del párrafo anterior Iparraguirre (2009), dice que se debe tener presente el tipo de medición que se desarrolla, en Física Mecánica, esta clasificación según el tipo de medida recibe el nombre de dimensión, para el caso del presente estudio que tiene en cuenta las mediciones área y perímetro, la dimensión que se trabaja es sin lugar a duda la longitud. Pues bien, de esta forma Iparraguirre (2009), hace alusión a que por cada dimensión llegaron a existir diversas unidades de medida y que esto hacía engorroso las transferencias de información entre la comunidad científica internacional, además, de generar confusión en diversas situaciones cotidianas, y no fue hasta que se definió el Sistema Internacional de Unidades que fue adoptado por la mayoría de los países desde 1960, donde fue que se definió el metro como la unidad de medida usada por excelencia para la longitud, además, del uso de los múltiplos y submúltiplos de dichas unidades.

Es así como las unidades de medida son utilizadas en una gran variedad de investigaciones, estudios y procesos de producción, por ejemplo, en Domínguez y Ferrer (2011), se hace referencia a las actividades de reparación de vehículos, ya que los técnicos deben realizar mediciones y comparar magnitudes, esto para la correcta manipulación de piezas de diferente tipo utilizadas en la industria automovilística, de hecho se dice que para realizar una reparación con eficiencia se deben realizar diferentes mediciones. De igual forma en Domínguez y Ferrer (2011), se afirma que el milímetro es en realidad la unidad más utilizada en las automociones y,

recordemos que justamente el milímetro corresponde a un submúltiplo del metro, que como ya se mencionó en el párrafo anterior, es la unidad estipulada por el Sistema Internacional de Unidades para medir las longitudes.

En consecuencia, surge la necesidad de investigar acerca de la definición de los conceptos de área y perímetro. En esta investigación se aborda el concepto de área teniendo en cuenta las ideas propuestas por Garrido (2005), dado que guardan un acercamiento con el contexto en el que se desenvuelve la investigación y con los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional en los lineamientos curriculares (1998). Garrido (2005), manifiesta que:

El área de un polígono es la superficie delimitada por las rectas entre sí, y se calcula en unidades cuadradas, en otras palabras, se define como el tamaño de una superficie en unidades cuadradas; en el sistema internacional la unidad de medida de longitud es el metro (m). (p.51)

De lo anterior se entiende que, el reconocimiento de las superficies juega un papel importante a la hora de abordar el concepto de área, así como el análisis de longitudes necesario para realizar mediciones de diferentes tipos.

De una forma más compacta, Baldor (1967), da a entender que la superficie hace alusión a la forma y que a partir de eso se puede decir que hay superficies con forma cuadrada, rectangular, circulares, entre otros, por tanto el área se refiere al tamaño ya que mide una superficie que a su vez se refiere principalmente a la forma de una figura, además en Baldor (1967), se menciona que para realizar las mediciones de áreas es necesario tomar como unidad un cuadrado, que tenga por lado la unidad de longitud.

Así mismo, Dickson (1989), relaciona el área con la cantidad de superficie que está contenida en un lugar específico, lo que reafirma todas lo expuesto anteriormente ya que nuevamente se involucra la superficie, aunque esta vez conectándolo como la cantidad que de igual manera está asociado con las mediciones o unidades de medida.

Por otro lado, el perímetro es entendido como “La suma de las medidas de todos los segmentos que forman el área de un polígono” (Garrido, 2015, p. 51), de esto se entiende que es importante acercar a los estudiantes a la suma y al reconocimiento de lados en los diferentes polígonos con los que se pueden encontrar en su entorno, aunque Dickson (1989), no habla de suma, sino de la distancia alrededor de una región cualquiera, de lo que se puede resaltar que no es necesario tener una figura geométrica con lados bien definidos que forman un polígono para calcular un perímetro ya que basta con recorrer el borde o contorno de una región de interés, e ir midiendo dicho recorrido. Aunque las anteriores definiciones parecen sencillas, en el contexto escolar la realidad es otra, al respecto Machaba (2016), pone de manifiesto que estudiantes de niveles superiores tienen dificultades serias a la hora de definir el perímetro de una figura o lugar, para lo cual se plantea como explicación que este concepto es muy poco usado en la realidad de los estudiantes en la escuela, aunque indirectamente sí lo es, sobre todo en el campo y en actividades agrícolas.

Las definiciones de los conceptos antes mencionados dan cuenta del objeto de estudio que se indaga en la presente investigación para el razonamiento de estudiantes de grado tercero.

#### **1.4 Investigaciones realizadas en relación con la enseñanza del área y perímetro**

Después de realizar una búsqueda relacionada con el objeto de interés matemático que se estudia en esta investigación, en las diferentes bases de datos, se encontraron investigaciones y artículos que dan indicios de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de área y perímetro. A continuación, se presentan algunas consideraciones relacionadas con los objetos matemáticos abordados en esta investigación.

González (2014), realizó una investigación fundamentada en la comprensión de los conceptos de área y perímetro y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café utilizando como marco conceptual la Enseñanza para la Comprensión (EpC). El objetivo general fue analizar el proceso de comprensión de los estudiantes del grado 5° de la Institución Educativa Santa Rita, municipio de Andes, departamento de Antioquia, sobre los conceptos de área y perímetro, así como la independencia de sus medidas, donde los resultados mostraron que los estudiantes comprendieron los conceptos ya mencionados, a través de diversas asociaciones que

hicieron con el contenido de cierto terreno cultivable y el perímetro con el cercado, las barreras de sembrado o simplemente una cuerda que bordea una zona. Por tanto, se entiende que el desarrollo de estrategias prácticas en contextos rurales funciona como estrategia de importancia que permite hacer una relación entre conceptos geométricos y la realidad de muchas comunidades facilitando la comprensión del área y perímetro.

De igual forma, D'Amore y Fandiño (2007), en su artículo de investigación "Relaciones de área y perímetro: convicciones entre maestros y estudiantes", presenta su criterio frente a la relación de los conceptos de área y perímetro, en el estudio realizado por parte de los maestros y estudiantes se concluyó que para mejorar la construcción del conocimiento sobre los conceptos ya mencionados, es necesario tener en cuenta la didáctica utilizada, donde se presentan inconvenientes a la hora de hallar el área y perímetro en figuras que van más allá de aquellas estandarizadas, lo que dificulta las relaciones con la realidad a la que los estudiantes interactúan diariamente.

Además de lo expuesto en el párrafo anterior, D'Amore y Fandiño (2007), hacen énfasis en las convicciones que presentan algunos docentes, debido a que en algunos casos se aferran a cumplir con los contenidos de los libros de texto y se limitan a seguir una especie de libreto preestablecido, sin relacionar el "saber" con el "saber de enseñar". En este sentido se considera que es importante desarrollar experiencias de aprendizaje en el aula de clase que conlleven al razonamiento adecuado de los conceptos abordados, y así los estudiantes puedan utilizar aquellos elementos de su entorno que posibiliten la puesta en práctica en su diario vivir, para lograr esto se hace necesario seguir unos pasos organizados y secuenciales que sirvan como herramienta didáctica.

Manotas y Rojas (2008), publicaron un artículo basado en la conceptualización acerca del perímetro, área y volumen, en tres estudiantes universitarios, el objetivo principal fue describir las concepciones que tienen tres alumnos universitarios acerca del perímetro, el área y el volumen, donde una de las conclusiones que se evidenció fue la confusión entre área y perímetro, un problema muy frecuente en la escuela. Estos autores argumentan que el tratamiento no debe ser aritmetizado, sino, que debe tomarse como referente las situaciones de la vida cotidiana para que el estudiante asimile de forma directa los conceptos pertinentes.

En un artículo publicado por Olaya, Parra, Cruz, Villamil y Sánchez (2013), el cual está basado en una propuesta de enseñanza del área y el perímetro para estudiantes del grado cuarto en la Institución Educativa El Destino, ubicada en la periferia de la localidad de Usme – Bogotá Colombia en un contexto rural, dicha investigación consistió en el diseño de una serie de actividades enfocadas a la enseñanza del área y perímetro, a partir de la adecuación de un determinado espacio para la construcción de una huerta, y la forma de como instalar correctamente cada parte para luego ser destinados en la siembra de cada uno de los productos agrícolas, con el fin de que los estudiantes hagan uso de las matemáticas en contextos reales, por medio de la resolución de problemas como metodologías de enseñanza.

Teniendo en cuenta el estudio realizado por Olaya et al. (2013), se puede observar que presenta muchas relaciones y elementos comunes con la investigación que se desarrolla en este trabajo, puesto que involucra la importancia de la aplicación del área y perímetro en contextos agrícolas con los cuales los estudiantes del municipio de San Pedro de Urabá se encuentran muy familiarizados, esto se debe a que la mayoría de los estudiantes pertenecen a familias que poseen parcelas o porciones de tierra donde tienen huertas y cultivos con frecuencia ya sea como medio de sustento o para consumo propio.

En la investigación realizada por Olaya et al. (2013), se identifica que la metodología usada en el aula escolar propicia una visión distinta de la matemática al interactuar con el contexto, la naturaleza y la vida real evidenciando la relación entre las matemáticas y la realidad, logran seguir procesos de conservación del área ya que los estudiantes se daban cuenta que no se modificaba el área cuando se transformaba o se dividía.

Selmer, Valentine, Luna, Rummel y Rye (2016), en su publicación: ¿Cómo podemos utilizar mejor el espacio de nuestro jardín escolar? Explorando los conceptos de área y el perímetro en un contexto de aprendizaje auténtico. Este artículo tiene como propósito mostrar cómo una unidad de ciencias matemáticas y el uso del aprendizaje basado en el jardín, se pueden utilizar para enseñar los conceptos matemáticos de medición de área; el trabajo se realizó dividiendo el jardín en diferentes regiones teniendo en cuenta el tamaño de las plantas elegidas para cada espacio. Al analizar los criterios de la rúbrica y puntuaciones de los estudiantes se evidenció un aumento en el porcentaje de los estudiantes que pueden utilizar con precisión una fórmula para el



área, pueden determinar el perímetro, pueden utilizar una estrategia para encontrar el área correcta, además, se comunican de forma integral y con claridad. Aspectos, que facilitan el razonamiento de los estudiantes respecto al área y el perímetro.

En este sentido Machaba (2016), centra su atención en la comprensión y descripción de los conceptos de área y perímetro, además, investiga cómo los estudiantes resuelven problemas que involucran los tópicos de interés ya mencionados, y la forma en que se relacionan entre sí. Machaba (2016), hace una reflexión profunda sobre los conceptos erróneos que tienen los estudiantes desde sus conocimientos previos, haciendo énfasis en que no basta solamente con decirles que lo que hacen está malo o que están equivocados, sino que se necesita de experiencias que permitan una reorganización en su manera de pensar, lo anterior pone de manifiesto que, para lograr un razonamiento adecuado, es imprescindible implementar actividades bien estructuradas que sean acordes a las realidades y al contexto en el que se desenvuelven los estudiantes.

Por otro lado, Machaba (2016), expone en sus resultados una falta de conexión entre figuras con longitudes explícitas en sus lados y con aquellas que tienen las unidades cuadradas dentro de sí, dando a entender que los estudiantes carecen de una comprensión conceptual acertada sobre el área.

La siguiente investigación realizada por Aravena y Camaño (2013), se analizó el nivel de razonamiento geométrico que presentan los estudiantes en una región de Chile, tomando como base el Modelo de razonamiento de van Hiele y los atributos que se distinguen en los procesos de razonamiento. A partir de las actividades implementadas y los resultados se dejó en evidencia que la mayoría de los estudiantes se encuentran en un nivel básico de razonamiento geométrico, puesto que los estudiantes no reconocen que las figuras geométricas están dotadas de propiedades.

En este sentido Samper, Leguizamón y Camargo (2002), reconocen la importancia de la teoría del Modelo de van Hiele a la luz del desarrollo del razonamiento en geometría, considerando una alternativa de tratamiento curricular para la geometría conformada por actividades de diferente índole que contribuyen a la formación de criterios más amplios. Esto se constituye en un aporte o referente esencial que favorece el razonamiento de los conceptos

geométricos de área y perímetro de figuras planas, en estudiantes del grado tercero de Educación Básica Primaria, mediante diferentes experiencias de aprendizaje que involucren situaciones del contexto.

Berciano, Jiménez-Gestal, y Salgado, M. (2017), presentaron un estudio de caso con un niño de cuatro años, acerca de la visualización de objetos tridimensionales y sus propiedades, con el propósito de analizar cuáles son las estrategias de razonamiento y argumentación dada por el infante cuando se le pide explicar que es un cilindro. Para este análisis se tuvo en cuenta el Modelo de van Hiele, de este estudio se pudo concluir que la intervención guiada y de forma gradual, por parte de la maestra, promueve el incremento en el razonamiento y la argumentación por parte del niño, haciendo evidente el razonamiento matemático de forma gradual al pasar por cada una de las fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele. Lo expuesto por estos autores muestra la importancia de implementar actividades bien estructuradas al interior del aula de clase a partir de las interacciones de los estudiantes con situaciones de la vida cotidiana, las cuales incentivan a los estudiantes a justificar y a razonar sus manifestaciones.

En esta dirección, Muñoz (2018), en su trabajo de investigación Enseñanza y aplicación de conceptos geométricos (Distancia, altura, área y perímetro) a través de actividades agrícolas con el cultivo de frijol (*Phaseolus vulgaris*) en la Institución Educativa Rural Obispo, Supia- Caldas Colombia, con el objetivo de contribuir al uso comprensivo de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado noveno mediante la siembra de frijol.

Su metodología se enmarca en un diseño investigativo mixto. Se realiza una prueba diagnóstica llamada pretest para evidenciar las mayores dificultades que presentan los estudiantes, las cuales son reforzadas a través de una serie de actividades escritas, prácticas dentro y fuera del aula de clase. Además, se implementa el desarrollo de una guía de interaprendizaje para reforzar los temas mediante ejemplos y ejercicios del contexto de la región agrícola, finalmente realizan una prueba valorativa llamada postest, con el fin de establecer si las estrategias utilizadas contribuyen en los participantes en la comprensión de los conceptos geométricos de área y perímetro. Los resultados obtenidos muestran que se puede mejorar los procesos de aprendizaje mediante el uso de estrategias innovadoras y la interacción de los estudiantes con el medio.

De los anteriores planteamientos se reconoce que la implementación de diferentes actividades, las interacciones con el contexto, la solución de situaciones de la cotidianidad, de cierta manera aportan elementos que contribuyen al razonamiento matemático en los estudiantes en relación a los conceptos objeto de estudio, desde grados iniciales, algo similar se pretende con este estudio, que los estudiantes razonen en relación a los conceptos de área y perímetro de figuras planas a partir de las que se encuentran en su entorno: aula de clase, colegio, lugar de vivienda, entre otros.

### **1.5 Descripción del Problema**

Durante mis años de experiencia como docente de básica primaria, el grado tercero ha sido el que más me asignan en la Institución, por lo que me ha llamado la atención la dificultad que presentan los estudiantes, especialmente los de grado tercero, cuando se enfrentan a situaciones en las que intervienen los conceptos de área y perímetro. Cada vez que se plantean actividades en las que hay que hallar algunas de estas medidas, los estudiantes se confunden con facilidad, por ejemplo, cuando hay que hallar el área o el perímetro de una figura plana, calculan la medida que no corresponde. Otro razonamiento repetitivo sucede cuando aun estando la figura sobre una cuadrícula, los participantes no logran encontrar el área correcta de la figura, a pesar de las repetidas orientaciones que se hacen al abordar el tema. En este sentido se le realizó una actividad que involucra los conceptos en mención a 35 estudiantes del grado tercero de básica primaria y el 30% de los estudiantes obtuvo un resultado satisfactorio, mientras que el 70% mostraron confusión al momento de indicar el área y el perímetro.

A continuación, se muestran algunas actividades desarrolladas con los estudiantes que evidencian lo dicho hasta el momento.

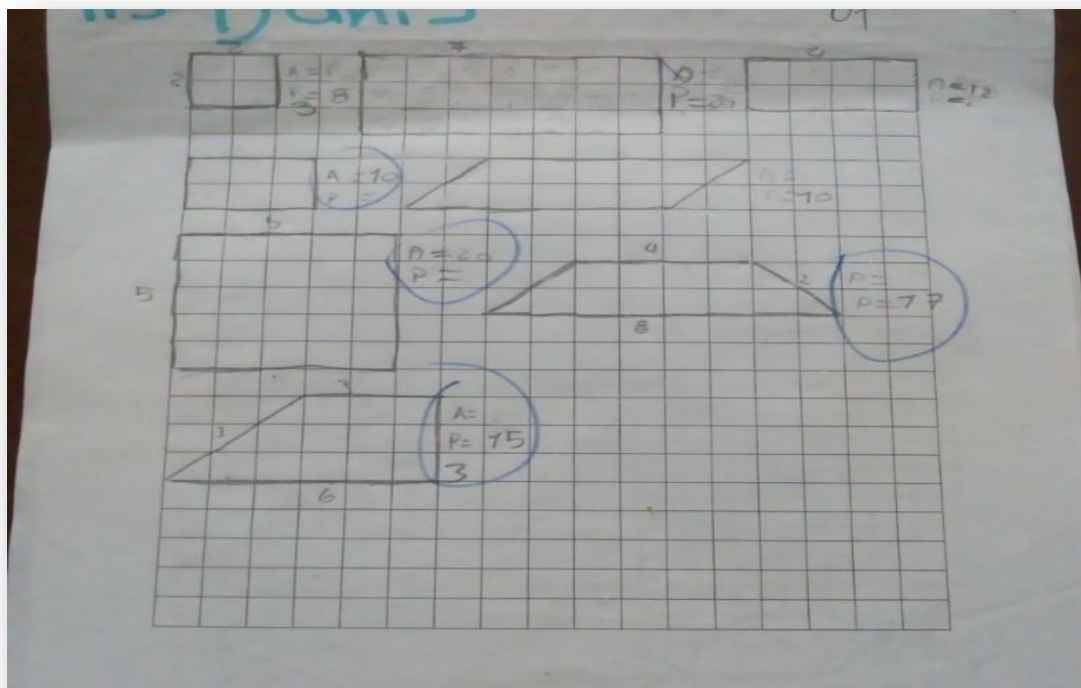


Ilustración 2. Dificultades para determinar el área y el perímetro de figuras planas.

Como se puede observar en la Ilustración 2, para el rectángulo y el cuadrado cuyas áreas son  $6u^2$  y  $25u^2$ , respectivamente, se evidencia que el estudiante coloca los números 10 y 20. Claramente se puede deducir, en ambos casos, que el estudiante coloca el valor correspondiente al perímetro más no del área, que es por lo que se le está preguntando. Si profundizamos un poco en el análisis notamos que, en ninguno de los ejercicios de la actividad, el estudiante coloca la unidad cuadrada correspondiente a esta medida. Estas dificultades llaman la atención y me motivan a plantear esto como un problema de investigación, en el que se analice el razonamiento de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero.

Es importante mencionar que el contexto en el que interactúan los estudiantes con sus familias es rural, por lo que en algunas ocasiones es necesario realizar medidas de terreno para la siembra de algunos cultivos, al respecto el (MEN 2006), manifiesta que en el grado tercero los estudiantes deben llegar a: “realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo con el contexto” (p. 81).

Por lo anterior es pertinente acercar a los estudiantes a la medición del área y perímetro, ya que en su mayoría tienen relación directa con la acción de medir, pues en sus hogares cuentan con parcelas (porciones de tierra) donde siembran variedad de cultivos, estas actividades las viven a diario, y son situaciones que involucran los conceptos de área y perímetro, precisamente en los que presentan dificultad, ya que la repartición de los cultivos lo hacen por intuición o cálculos aproximados.

Por otro lado, los resultados expuestos por el Icfes en las pruebas saber realizadas en la Institución Educativa en el año 2017, el grado tercero en el área de matemáticas el 41% de los estudiantes obtuvo un nivel insuficiente, siendo débil el componente geométrico métrico-métrico, aspecto que impulsa a implementar acciones que contribuyan a el mejoramiento de estos aprendizajes.

Los investigadores en Educación Matemática se han preocupado por analizar procesos de comprensión o razonamiento de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, teniendo en cuenta la identificación de dificultades presentadas a partir de las experiencias de aprendizaje y el planteamiento de estrategias que permitan superarlas en relación con los marcos teóricos implementados.

En este sentido, la presente investigación centra su atención en primera instancia en la forma como razonan los estudiantes de grado tercero de Educación Básica Primaria acerca de los conceptos de área y perímetro al enfrentarse a situaciones de la vida diaria, en los que requiere la aplicación de estos conceptos y darles solución, para lo cual se diseña una estrategia que permita analizar el razonamiento de los conceptos antes mencionados a través del Modelo de razonamiento de van Hiele.

Al respecto, algunos autores exponen la presencia de las dificultades de los estudiantes en relación con estos conceptos. Fandiño y D'Amore (2009), manifiestan que las dificultades conceptuales en relación a los conceptos de área y perímetro se encuentran presentes desde la escuela primaria y continúan en estudiantes avanzados, en algunos casos en la universidad, de igual manera en Corberán (1996), se expone que un error muy común que comenten los estudiantes al momento de calcular el área y el perímetro es que inconscientemente los asocian

confundiendo ambos conceptos, sin embargo, son conceptos muy distintos, esto es algo que no permite que analicen el área como una propiedad ligada a la superficie y que es independiente del perímetro. Por lo anterior se puede decir que es importante que los docentes tomen más protagonismo en cada una de las clases que imparten, propiciando experiencias de aprendizaje contextualizadas y significativas para los niños, teniendo en cuenta los conocimientos previos y el proceso cognitivo de los estudiantes.

Otro tema de gran interés se aborda en algunas investigaciones relacionadas con los conceptos de área y perímetro, en todo lo relacionado con la medida de la superficie, por ejemplo, Fandiño y D'Amore (2009), evidenciaron que gran número de estudiantes en todas las edades y en diferentes grados de escolaridad están convencidos que los dos conceptos se encuentran relacionados al hacer mediciones sobre el plano.

Lo anterior deja al descubierto que existen dificultades en lo relacionado con los conceptos de área y perímetro, se encuentran evidencias en investigaciones que dan señal de la dificultad que se expone en esta investigación, como la de Corberán (1996), en relación a los estudiantes de primaria, el concepto de área se reduce a la identificación de la medida por medio de una fórmula, lo cual conlleva a una definición limitada de lo que es el concepto, puesto que lo perciben como un resultado, que es un número obtenido al aplicar una fórmula. Esto último dificulta que los estudiantes de Básica Primaria comprendan el área como un número de unidades con los que se puede cubrir una superficie.

En relación con las dificultades que presentan los estudiantes al no saber que es área o el perímetro y la confusión en los conceptos explicados en los párrafos anteriores y los hallazgos encontrados en la revisión de la literatura se plantea la pregunta de investigación.

### **1.6 Pregunta de investigación**

Esta propuesta se direcciona en el razonamiento que deben tener los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa San Pedro de Urabá en el componente geométrico, como es

concepto del área y perímetro de figuras planas, para lo cual se diseñó la siguiente pregunta de investigación:

*¿Cómo pueden razonar los estudiantes de tercer grado de básica primaria sobre los conceptos de área y perímetro a partir de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele?*

La anterior pregunta se sustenta desde la propia experiencia como profesora del área y desde referentes de la literatura científica, “El análisis obtenido desde la experiencia evidencia que la confusión entre el área y perímetro se muestra persistente” (Corberán, 1996, p. 22). Estas apreciaciones planteadas por la autora se encuentran persistentes en la actualidad, por tanto, es necesario implementar estrategias que favorezcan el razonamiento de los conceptos de área y perímetro.

## **1.7 Objetivos**

A partir de la pregunta de investigación, planteada anteriormente y teniendo en cuenta el razonamiento de conceptos geométricos en las experiencias de aprendizaje, las cuales se hacen necesarias para resolver situaciones de la vida diaria se plantean los siguientes objetivos de investigación.

### **1.7.1 Objetivo General**

Analizar cómo razonan los estudiantes de grado tercero acerca de los conceptos de área y perímetro a partir de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele.

Para dar cuenta, del objetivo general de investigación se diseñaron algunos objetivos específicos, como sigue.

### **1.7.2 Objetivos Específicos**

- Implementar estrategias que conlleven al razonamiento de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero.

- Identificar el área como la superficie que cubre una figura plana.
- Identificar el perímetro como el contorno, borde, orilla de diversas figuras planas del entorno.
- Identificar que a toda figura plana le corresponde un perímetro y un área.

A partir de las experiencias en el aula y la revisión de la literatura en relación con los conceptos de área y perímetro, en donde se reconocen potencialidades del Modelo de van Hiele que favorece el razonamiento de conceptos geométricos, se consideró pertinente la articulación del trabajo investigativo con el Modelo de van Hiele, puesto que permite vincular actividades que conllevan al razonamiento de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero.

En el siguiente Capítulo se presentan los referentes teóricos y conceptuales del Modelo de van Hiele, los cuales orientaron y dieron sustento al proceso investigativo.



## Capítulo II: Referentes teóricos

En este Capítulo se presentan los referentes teóricos que guían la presente investigación, primero se exponen algunos marcos teóricos relacionados con la comprensión y después el Modelo Educativo de van Hiele, con sus particularidades y profundizando en las Fases de aprendizaje.

El proceso de enseñanza y de aprendizaje de la geometría en Educación Básica Primaria, especialmente, en aspectos como el área y el perímetro, atiende a la necesidad de que los estudiantes comprendan estos conceptos y puedan ser críticos respecto a situaciones que involucren a los mismos en diversas situaciones de su contexto. A partir de este propósito didáctico y formativo, se percibe la necesidad de estudiar posibles marcos teóricos que tengan relación con la enseñanza, la comprensión y el razonamiento matemático y geométrico.

En este sentido, se presentan tres marcos relacionados con la comprensión, que han servido como base de procesos para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos, estos son: la Enseñanza para la Comprensión, el Modelo de Pirie y Kieren y el Modelo de van Hiele, se hace una revisión reflexiva de este último, por sus características y argumentos geométricos. Se escogió como sustento teórico para esta investigación, puesto que se centra en procesos de razonamiento relacionados principalmente con el pensamiento geométrico. En adelante se exponen los postulados de algunos autores respecto a cada uno de los marcos teóricos antes mencionados.

### 2.1 La Enseñanza para la Comprensión (EpC)

Este marco teórico parte de los intereses y la reflexión que profesores y estudiantes realizan acerca de la relación entre los temas de estudio y su vida. También, permite a docentes como a estudiantes, enlazar sus ideas con la práctica y favorece la articulación entre lo que ya pasó y lo

que pasa actualmente, entre lo actual y lo futuro (Blythe, T., 1999). Por consiguiente, se entiende que este marco teórico posibilita a los docentes reflexionar acerca de sus prácticas pedagógicas, aspecto que favorece la transformación de las mismas al interior del aula, en búsqueda de fortalecer la comprensión de los estudiantes.

La comprensión según Stone (1999), involucra la capacidad de hacer un estudio respecto a un tema, y de realizar diversas acciones que suscitan el pensamiento, tales como: explicar, dar ejemplos, demostrar, entre otras. Además, afirma que está íntimamente relacionada con la forma de pensar, actuar o desempeñarse con flexibilidad a partir de lo que se sabe, por tanto, se reconoce que el aprendizaje está ligado a la comprensión, y es aquí en donde, como profesores, se debe de ser cuidadosos cuando se enseñan diversos tópicos de la Matemática, ya que siempre se tiene la tendencia de inducir a la memorización de ciertos conceptos y procedimientos como por ejemplo, las tablas de multiplicar y fórmulas operativas. En este sentido, el marco de la Enseñanza para la Comprensión presenta orientaciones para el diseño y aplicación de la actividad pedagógica en las que intervienen Elementos, Dimensiones y Niveles, que median en la comprensión de los estudiantes. En la Tabla 1 se exponen de manera sucinta los aspectos antes mencionados por Stone (1999).

**Tabla 1.** *Fundamentos Teóricos de la Comprensión.*

<b>Elementos</b>	<b>Dimensiones</b>	<b>Niveles</b>
<b>Tópicos generativos</b> Son temas, ideas, conceptos, cuestiones, entre otros.	<b>Contenido</b> Desarrollo de la comprensión de conceptos y definiciones.	<b>Ingenuo</b> Desempeños intuitivos.
<b>Metas de comprensión</b> Enuncian lo que se espera que los estudiantes comprendan.	<b>Método</b> Procedimientos, procesos algorítmicos.	<b>Novato</b> Construcciones conceptuales y procedimentales de forma mecánica.
<b>Desempeños de comprensión</b> Son las acciones o actividades que el docente planifica con la finalidad de cumplir con las metas de comprensión.	<b>Propósito</b> Orienta la construcción del conocimiento y la capacidad para ponerlo en práctica.	<b>Aprendiz</b> Conocimiento basado en los conceptos y métodos de la disciplina.

---

<b>Valoración continua</b>	<b>Formas de comunicación</b>	<b>Experto</b>
<p>Posibilita el avance de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, puesto que es el seguimiento diario que permite la realimentación de saberes, en los que se detectan debilidades o fortalezas.</p> <p>Aspecto que suscita la necesidad de implementación de nuevas estrategias.</p>	<p>Se relaciona con el desarrollo de la comprensión en el uso de los símbolos verbales, visuales, entre otros.</p>	<p>Los desempeños son interdisciplinarios, sustentan el conocimiento de manera crítica y creativa haciendo uso de las cuatro dimensiones de la comprensión.</p>

---

De la Tabla 1, se entiende que los elementos intervinientes en la comprensión se pueden asumir como el conjunto de razonamientos que guían la adecuada obtención de conocimientos de forma sistémica, en donde se pueden encontrar los tópicos generativos, que hace alusión al manejo curricular y a la manera de relacionarlo con la realidad, en la que interactúan los estudiantes, también incluye las metas de comprensión, que como su nombre lo indica trata de fijar explícitamente lo que se pretende sea comprendido por los estudiantes a las preguntas planteadas inicialmente.

Otro elemento son los desempeños de comprensión, los cuales corresponden a la planeación de actividades y estrategias novedosas que permitan el alcance de las metas de comprensión, y por último se encuentra la valoración continua, que consiste en dar una retroalimentación sobre qué tanto se ha alcanzado la comprensión de acuerdo a lo planeado inicialmente (Méndez y Vargas, 2013).

Por otro lado, dentro de la Enseñanza para la Comprensión, juegan un papel muy importante las Dimensiones, que se refieren a las prácticas que el estudiante realiza para el desarrollo de la comprensión de un tópico, es decir, las formas de proceder, las interacciones con sus compañeros y con el docente, las maneras como se comunica con los demás y como se desenvuelve en diferentes contextos.

De igual manera, bajo este marco se encuentran los Niveles, como aquellas características que permiten ubicar a los estudiantes según el nivel de comprensión, esta vez clasificándolos de la siguiente forma: ingenuo como aquellos que adquieren conocimientos de forma intuitiva, luego se continúa con el nivel de novato, que hacen relación con el hecho a considerar como verdades infalibles los conocimientos y explicaciones impartidos por el docente, posteriormente se pasa al nivel de aprendiz, donde muestra un mayor dominio del conocimiento disciplinar aplicándolo en diferentes situaciones de su entorno y cuestionando la información, para así llegar al nivel de experto donde los estudiantes conjugan diversos conocimientos adquiridos previamente para sustentar o refutar argumentos llegando a ser más críticos de la información que reciben (Méndez y Vargas, 2013).

Todos estos aspectos mencionados anteriormente, permiten caracterizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje, posibilitando al docente optimizar el trabajo de aula en pro de la comprensión de los estudiantes.

## **2.2 Modelo de Pirie y Kieren**

Este modelo asume la evolución de la comprensión como la organización y modificación del conocimiento del individuo, para lo cual establece ocho niveles de comprensión: Conocimiento primitivo, Creación de la imagen, Comprensión de la imagen, Observación de la propiedad, Formalización, Observación, Estructuración, Invención.

Los anteriores niveles de comprensión, también son llamados estratos de conocimientos que se pueden dar en forma progresiva y ordenada, sin embargo, permite la posibilidad de volver al estrato anterior o a estratos anteriores, mediante el proceso de redoblado, favoreciendo la organización y modificación del conocimiento a partir de la articulación de las relaciones entre los estratos, aspecto que permite la reorganización del conocimiento (Meel, 2003).

En este sentido, se entiende la comprensión como un proceso continuo y progresivo de construcción de conocimiento del cual los individuos se apropian para dar cuenta del objeto que

se está estudiando. A continuación, se presentan en la Tabla 2 de forma sucinta los estratos o niveles de comprensión establecidos en el modelo de Pirie y Kieren.

**Tabla 2.** *Niveles de comprensión características.*

<b>Niveles de comprensión o estratos de conocimientos</b>	<b>Características</b>
Conocimiento primitivo	Conocimiento inicial que tiene el individuo, teniendo en cuenta aspectos relacionados con la información que el estudiante involucra en una situación de aprendizaje.
Creación de la imagen	Acciones que realizan los estudiantes de forma verbal o física en busca de interpretar un nuevo concepto a través de imágenes que no necesariamente sean pictóricas, sino que transmiten el significado de ideas mentales, las cuales están asociadas a lo que el estudiante realice de forma mental o física para obtener su apreciación sobre un concepto.
Comprensión de la imagen	Imágenes orientadas por un proceso mental que permite que los estudiantes den cuenta del conocimiento a través de acciones físicas personales. Aquí el individuo crea una imagen mental que le permite comprender, para posteriormente relacionar la imagen creada con situaciones que se le presenten.
Observación de la propiedad	Identificación de propiedades y/o atributos de imágenes que permiten establecer relaciones y diferencias entre ellas, posibilitando constituir relaciones entre las imágenes y describir cómo se dan dichas relaciones. Además, se puede observar diferencias o relaciones entre diferentes imágenes mentales.
Formalización	Se establece un concepto formal con lenguaje matemático adecuado. Permite que el estudiante reconozca los atributos comunes de las imágenes facilitando la construcción de objetos mentales similares, mediante el uso de las propiedades observadas.
Observación	Utiliza como referencia el pensamiento formal de la persona. Permite que el estudiante observe, organice, y estructure los procesos de pensamiento de manera individual, reconociendo diferentes procesos

Niveles de comprensión o estratos de conocimientos	Características
Estructuración	<p>para producir expresiones asociadas al concepto establecido.</p> <p>La comprensión es mayor, los estudiantes inician a observar la diferencia entre sujetos y comienzan a hacer preguntas subyacentes, puesto que percibe la interconexión de diversos elementos y teorías.</p>
Invención	<p>El estudiante inventa nuevas preguntas que le permiten desarrollar conceptos nuevos. La comprensión se caracteriza por ser infinita e imaginativa, dando cuenta de un conocimiento estructurado.</p>

A manera de síntesis del modelo de Pirie y Kieren establece que el estudiante va avanzando a su ritmo de aprendizaje, ya que según los autores que sustentan este modelo, la comprensión no evoluciona necesariamente de forma secuencial ni temporal, sino que existe la posibilidad de que el estudiante vuelva al estadio anterior o a otros estadios con la finalidad de estructurar y reorganizar el conocimiento que no ha logrado comprender.

A continuación, se presenta el Modelo de van Hiele, con sus componentes: insight, niveles de razonamiento, Fases de aprendizaje, características, además, se resalta la pertinencia del Modelo para el razonamiento en relación con los conceptos de área y perímetro.

### 2.3 Modelo de van Hiele

El Modelo de razonamiento y aprendizaje de las matemáticas, fue propuesto por los esposos holandeses Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele – Geldof , profesores de matemáticas de educación media, quienes estaban preocupados por las dificultades que presentaban sus estudiantes de los cursos de geometría ya que no conseguían que estos comprendieran algún concepto nuevo, van Hiele (citado por Jaime y Gutiérrez, 1990), el Modelo de van Hiele también plantea que los estudiantes parecían conocer la forma de resolver los problemas concretos que el profesor les proponía, pero no eran capaces de resolverlos en otros contextos, es decir no sabían aplicar los conceptos o propiedades que habían estudiado con el profesor debido

a que ellos solo implementaban ejemplos idénticos a los resueltos con la ayuda del docente, dando a entender que los conceptos eran aplicados de forma memorística.

Este Modelo tiene su origen en 1957, fue postulado por los profesores antes mencionados y fue incluido en sus trabajos doctorales de la Universidad de Utrecht (Holanda), estos trabajos dieron a conocer un modelo de enseñanza de la geometría que se relaciona con estudios realizados por Piaget (Venegas, 2015), quien planteó la teoría del desarrollo cognitivo, desde la infancia hasta la madurez, y es aquí donde se establece que el aprendizaje se da en diferentes pasos secuenciales que están clasificados en distintos rangos de edad, guardando similitud con van Hiele en el interés por el desarrollo de conceptos espaciales y geométricos a partir de planteamientos inductivos que conllevan a razonamientos deductivos, cabe resaltar que el trabajo hecho por los esposos van Hiele tiene más relevancia a la hora de enseñar geometría (Braga, 1991).

Ahora analizando cómo está estructurado el Modelo, es conveniente exponer que según los planteamientos de Jaime y Gutiérrez (1990) y de Guillen, Gutiérrez, Jaime y Cáceres (1992), el modelo de van Hiele se compone de dos partes: la primera se enfoca en el razonamiento de los estudiantes y es totalmente descriptiva, tomando relevancia lo que se conoce como niveles de razonamiento y la otra parte corresponde a las Fases de aprendizaje, las cuales dan orientaciones y directrices a los docentes para alcanzar con mayor facilidad un nivel superior de razonamiento.

Sin embargo, en otros estudios se trabaja el Modelo de van Hiele conformado por tres componentes, tal es el caso de Jaramillo y Esteban (2006), Bedoya (2013) e Ibarra (2014), en donde se especifican tres partes: la percepción o insight, los niveles de razonamiento y las Fases de aprendizaje, las cuales se definen a continuación siguiendo la información proporcionada por Jaramillo y Esteban (2006).

Para el caso de la Percepción – insight, la definen como la comprensión de las estructuras, se relaciona con el momento en que el estudiante conoce a cabalidad las reglas necesarias de formación. Por su parte, los niveles de van Hiele, es una forma de clasificar el razonamiento humano mediante el uso de diferentes niveles organizados jerárquicamente. Por último, el

componente de las Fases de aprendizaje, que proporcionan una guía de instrucciones y orientaciones para el docente y que permitirán a los estudiantes avanzar de un nivel inferior a un nivel más avanzado de razonamiento.

Todos estos estudios y apreciaciones que se han realizado, fundamentan, que sin importar el tiempo que ha pasado desde que los profesores van Hiele realizaron su investigación, se puede afirmar que en la actualidad se repiten con frecuencia las mismas dificultades que motivaron a los esposos van Hiele en sus primeros estudios, lo que demuestra lo importante que es conocer más sobre las diferentes aplicaciones que puede tener este Modelo, así como las diferentes maneras que puede ser puesto en práctica, con el fin de contribuir al razonamiento de conceptos geométricos en estudiantes de Básica Primaria.

Para seguir ahondando en las particularidades del Modelo, a continuación, se presentan los niveles de razonamiento del Modelo de van Hiele.

### **2.3.1 Niveles de razonamiento de van Hiele**

El modelo de van Hiele considera diversos niveles de razonamiento matemático que incluyen desde las formas más básicas de los estudiantes, desde preescolar, Básica Primaria, hasta los más avanzados en educación secundaria o matemáticos profesionales, ya que estos niveles presentan características que pueden ser observables en los estudiantes al analizar el progreso en un concepto matemático desarrollado en el aula de clases mediante pasos sistemáticos.

En este sentido, se pueden hallar descripciones claras de los niveles en diversas publicaciones como: Burger y Shaughnessy (1986) Jaime y Gutiérrez (1990), Guillen, Gutiérrez, Jaime y Cáceres (1992), Jaime (1993), Corberán et al. (1994), Jaramillo y Esteban 2006). Sin embargo, para las siguientes definiciones y descripciones, se presentan los niveles del razonamiento del Modelo de van Hiele según lo plantea (Gutiérrez y Jaime, 1995) quien afirma que existen cinco maneras distintas de comprender los conceptos, estas maneras serían lo que se conoce como los niveles de razonamiento, los cuales permiten ubicar o caracterizar el progreso en el aprendizaje, siempre desde el pensamiento más básico hasta el más avanzado.



### ***2.3.1.1 Nivel uno: Reconocimiento***

En este nivel se da un reconocimiento global por parte de los estudiantes donde pueden hacer descripciones generalizando algunas características, las cuales se relacionan con objetos que son similares, perciben las figuras como objetos individuales sin relacionarlas con otras de su misma clase, en este nivel, los estudiantes se limitan a describir aspectos físicos de las figuras sin identificar aspectos implícitos que se encuentran dentro de ellas, como propiedades o elementos propios del concepto que se desea abordar.

Por consiguiente, se puede decir que aquí los estudiantes reconocen aspectos explícitos en las partes que conforman las figuras, siendo este un razonamiento básico que es más visual, característico de la edad preescolar (entre 5 y 6 años) y los primeros años de educación escolar, donde las orientaciones dadas por el profesor juegan un papel importante, sin embargo, se hace pertinente aclarar que este nivel no es exclusivo de los grados antes mencionados, en realidad cada vez que se presente a los estudiantes algún concepto geométrico nuevo, estos deben pasar por el nivel uno, si bien, es posible que algunas veces este se pueda desarrollar de forma muy rápida.

### ***2.3.1.2 Nivel dos: Análisis***

En este nivel los estudiantes son capaces de realizar una descripción de las partes que integran una figura, identificando características y propiedades básicas que la conforman, por tal motivo la observación juega un papel importante para la identificación de dichos atributos, aunque se debe aclarar que todavía no establecen relaciones entre dichas propiedades lo que les dificulta clasificar las figuras. En este nivel se da un razonamiento matemático en los estudiantes, puesto que pueden descifrar distinciones que no conocían y así reconocer elementos geométricos a través de la observación de figuras teniendo en cuenta el reconocimiento de particularidades generales a partir de su experiencia.

A diferencia del nivel uno, los estudiantes han avanzado en el análisis de las figuras geométricas y se puede decir que las aprecian desde otra perspectiva, aspecto que da cuenta de su cambio en la forma de observar e identificar ciertas características que no tenía en cuenta en el primer nivel, tal es el caso de propiedades como: rectas paralelas, perpendiculares, número de lados, entre otros, evidenciando que en este nivel se va más allá de un simple reconocimiento de la forma de una figura.

#### ***2.3.1.3 Nivel tres: Clasificación***

En este nivel los estudiantes identifican figuras teniendo en cuenta sus propiedades, pero esta vez identificando cómo unas tienen relación con otras, siendo esta la característica fundamental de este nivel, a partir de estas relaciones se puede determinar la pertenencia a ciertas familias de figuras. Lo anterior se da debido a que los estudiantes describen una figura y a partir de ellas dan definiciones coherentes, desarrollando la capacidad de un razonamiento lógico, es decir son capaces de reconocer que unas propiedades se derivan de otras y de descubrir esas implicaciones, lo que les posibilita clasificar de forma lógica las diferentes familias de figuras desde sus características o relaciones ya conocidas. Es aquí donde los estudiantes pueden describir una figura de forma precisa, interpretando las definiciones y condiciones de una definición correcta, además entienden las demostraciones realizadas por el profesor o desarrolladas paso a paso en un libro, pero no son capaces de hacerlas por sí mismo.

#### ***2.3.1.4 Nivel cuatro: Deducción Formal***

En este nivel los estudiantes tienen una comprensión más avanzada donde pueden realizar razonamientos lógicos formales, reconociendo la importancia de las demostraciones para comprobar la verdad relacionada con una situación matemática, de hecho, se puede decir que este es el propósito de todo profesor de secundaria. Es aquí donde los educandos comienzan a utilizar el engranaje que existe en el mundo de las matemáticas, ya que buscan comprender su organización axiomática y diferentes medios para llegar a un mismo resultado y así encontrar definiciones a un mismo concepto. En este nivel el conocimiento sobre un tema es globalizado, además, los estudiantes están en la capacidad de relacionar el tema de estudio con otros temas ya

vistos, identificando elementos comunes, es decir, se completa el aprendizaje en relación al razonamiento matemático lógico-formal.

### **2.3.1.5 Nivel cinco: Rigor**

En este nivel los estudiantes son capaces de prescindir de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad, maneja la geometría desde diferentes ámbitos procedentes de sistemas axiomáticos distintos, los cuales analizan y comparan de forma eficiente. Es importante mencionar que este nivel no se alcanza en el transcurso de los años escolares, salvo en algún caso aislado, sino, que es propio de estudiantes universitarios que demuestren una alta capacidad y preparación en el campo geométrico.

Los niveles de razonamiento permiten ver la evolución del aprendizaje de los estudiantes en cada uno de ellos, resaltando que no se necesita tener una edad específica para alcanzar cierto nivel propuesto ya que se puede dar el caso donde algunos no superan el segundo nivel, mientras que otros alcanzan el cuarto a los 14 o 15 años, pero de lo que sí hay seguridad es que estos se desarrollan a partir de las experiencias de aprendizaje implementadas en el aula de clase, por lo tanto, es importante planear actividades que permitan la evolución del razonamiento.

Seguidamente, se abordan las Fases de aprendizaje que es donde la presente investigación centra su atención, teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, los niveles de razonamientos se van alcanzando en un largo plazo y para que ese avance se obtenga a cabalidad, se requiere de ciertas actividades planeadas y que estén bien estructuradas, para lo cual las Fases de aprendizaje de este Modelo proporcionan herramientas que contribuyen a progresar en el adecuado razonamiento de los educandos.

### **2.3.2 Fases de aprendizaje**

Ya que se conoce la forma cómo va evolucionando el razonamiento, se hace importante para los docentes tener estrategias que permitan una correcta orientación de las clases, para que los estudiantes mejoren en su proceso de aprendizaje. Al respecto va Hiele propone una mirada

constructivista a una serie de pasos donde los estudiantes son los partícipes activos en la construcción de su conocimiento (Gutiérrez y Jaime, 1995).

Las Fases de aprendizaje se convierten en estrategias que pueden implementar los docentes en el aula de clase, a partir de actividades estructuradas y secuenciales, para que los estudiantes avancen a través de los niveles de razonamiento.

En este sentido, se puede decir que mediante el desarrollo de las actividades en las Fases de aprendizaje, es posible el progreso en los niveles de razonamiento, ya que estas actividades permiten la construcción de la red de relaciones construida en relación al concepto abordado, sin embargo Gutiérrez y Jaime (1995), hacen énfasis en que este proceso requiere mucho tiempo, incluso puede llegar a tomar años, en especial en aquellos estudiantes que no han tenido la suficiente experiencia de aprendizaje en relación a ciertos conceptos geométricos. Por tanto, en esta investigación, la cual está enfocada en el desarrollo de las Fases de aprendizaje, no se puede asegurar que los estudiantes adquieran el nivel correspondiente de razonamiento en el tiempo de ejecución, ya que este fue limitado, y los estudiantes requieran más tiempo para asimilar los conceptos, sin embargo, se diseñaron actividades para cada una de las Fases del nivel uno, pretendiendo transitar en este nivel.

En los siguientes apartados, se describen las características de cada una de las Fases de aprendizaje de van Hiele según lo planteado por Jaime y Gutiérrez (1990).

### ***2.3.2.1 Fase 1. Información***

Es una introducción donde se empieza el primer acercamiento con los estudiantes. El docente informa a los estudiantes la temática que se va a trabajar, dando a conocer los problemas que se plantearán, es importante mencionar que en esta Fase los educandos tendrán la oportunidad de conocer los materiales que se van a utilizar en todo el proceso de aprendizaje, lo que les permitirá tener un contacto directo y una correcta manipulación de los mismos, y de esta forma generar la motivación de los estudiantes.

También se debe mencionar que en esta Fase se genera información para los docentes, puesto que se da la exploración de los conocimientos previos que los participantes tienen sobre el tema que se va a desarrollar, valorando incluso los aprendizajes adquiridos en contextos de su diario, esto a su vez puede generar una motivación en ellos y así comenzar con el trabajo matemático propiamente dicho.

### ***2.3.2.2 Fase 2. Orientación dirigida***

En esta Fase las actividades y problemas son orientadas por el profesor con el propósito de que los estudiantes descubran y comprendan cuales son los conceptos y propiedades que deben estudiar, es importante mencionar que los educandos realizan una investigación dirigida por el docente empleando los materiales que fueron expuestos en la Fase anterior. Los problemas y actividades propuestos por el profesor deben orientar a los estudiantes a comprender y aprender sobre los conceptos que se están abordando ya que es aquí donde se construyen las bases que conforman la red de relaciones, que luego les permitirá alcanzar un nuevo nivel, por lo tanto, las actividades deben ser bien estructuradas de manera que permitan el razonamiento de los conceptos que se desean estudiar. En efecto, este proceso debe ser orientado por el docente atendiendo a ciertas características o estrategias que se deben tener presentes al momento de implementar las actividades, de tal forma que los aprendizajes sean adquiridos de forma progresiva.

### ***2.3.2.3 Fase 3. Explicitación***

Los estudiantes presentan sus explicaciones aclarando lo sucedido en las experiencias de aprendizaje implementadas en las Fases anteriores, compartiendo sus vivencias con los compañeros a partir de la regularidad que han observado y cuentan aspectos relacionados con las actividades realizadas. Es importante que surjan diversas apreciaciones, puesto que cada justificación requiere un análisis que permite la organización de las ideas para expresarlas con claridad, ya que deben compartir sus puntos de vista que pueden llegar a ser diferentes, y dar a conocer sus argumentos. En esta Fase el lenguaje es fundamental, ya que permite el intercambio de ideas y pone en evidencia el trabajo realizado con los conceptos aprendidos y lo que han

descubierto durante el proceso de orientación, además, es aquí donde se termina de introducir el nuevo vocabulario que evidencia el nuevo razonamiento y es justamente a partir de todos estos análisis que hacen los participantes sobre sus comentarios, lo que permite construir parcialmente la nueva red de relaciones.

#### ***2.3.2.4 Fase 4. Orientación libre***

En esta Fase el docente propone a los estudiantes problemas abiertos que son solucionados de diferentes formas para que ellos tengan la necesidad de razonar y poner en práctica los aprendizajes adquiridos en las Fases anteriores y dar solución a situaciones planteadas, puesto que el campo de estudio ya es en gran parte conocido por los estudiantes, cabe aclarar que sí se les deberán colocar indicios que den pistas sobre la correcta solución de estos nuevos problemas, los cuales nada tienen que ver con situaciones de aplicación que aparecen en los libros de texto de enseñanza tradicional, sino que hacen alusión a nuevos planteamientos que se pueden resolver con lo que ya han aprendido, ya que son estas actividades las que contribuyen a completar la red de relaciones que se empezó a formar en las Fases anteriores.

#### ***2.3.2.5 Fase 5. Integración***

En esta Fase los estudiantes deben adquirir una visión general de lo aprendido en el transcurso de las Fases anteriores, el docente puede realizar trabajos con los estudiantes que ayuden a la comprensión global de aspectos o conceptos que ellos ya conocen o tienen a su disposición, relacionando aprendizajes que han adquirido al desarrollar las actividades anteriores y también se deben integrar con otros conocimientos que los estudiantes ya sabían previamente, por lo que se debe tener cuidado de que en estas actividades de integración no se traiga a colación propiedades o conceptos nuevos, ya que solo se deben enfocar en una combinación y comparación de cosas que son conocidas por los estudiantes.

Al terminar esta Fase los estudiantes estarán en capacidad de realizar análisis mentales que les permitirán avanzar a un nuevo nivel de razonamiento, puesto que tienen una red de relaciones más amplia construida en torno al concepto estudiado.

### **2.3.3 Propiedades del Modelo**

El Modelo de van Hiele, además de los elementos que lo conforman, presenta algunas particularidades que lo identifican y que ayudarán a comprenderlo mejor, según Gutiérrez y Jaime (1998) las características son:

#### ***2.3.3.1 Secuencialidad***

Se refiere a la manera en cómo se da la adquisición de los niveles de razonamiento en los estudiantes, debido a que no es posible cambiar el orden estipulado para ello, es decir para que un estudiante adquiera el nivel tres de razonamiento, necesariamente ha tenido que haber superado los niveles uno y dos.

#### ***2.3.3.2 Especificidad del lenguaje***

Cada nivel de razonamiento tiene un lenguaje que lo caracteriza, lo cual tiene un sentido más amplio que las palabras utilizadas para nombrar elementos y sus propiedades, ya que incluye el análisis de ciertas expresiones que son las que se deben emplear en un determinado nivel para evitar la mala comunicación entre las partes. Justamente la utilización del lenguaje en distintos niveles entre dos personas conlleva a una mala comprensión, porque cada persona da una interpretación diferente y no se relaciona con la del otro, es decir, dos personas que no estén en el mismo nivel no se pueden comprender, de allí, la importancia de que el docente utilice un lenguaje apropiado de acuerdo al nivel que esté desarrollando en los estudiantes.

#### ***2.3.3.3 Paso de un nivel al siguiente***

Para que se dé el paso de un nivel al siguiente, este debe ser de forma progresiva, no se da de manera rápida y es necesario el transcurso de un período de tiempo considerable para que aparezca el razonamiento de dos niveles consecutivos puesto que ya se ha demostrado que este

paso no se da de forma brusca como se planteó inicialmente, no se pasa de un nivel a otro hasta tanto no se haya completado los saberes del nivel en que se encuentra el estudiante.

#### ***2.3.3.4 Globalidad o localidad***

Cuando se habla de globalidad, se pensaría que se está intuyendo que una persona tiene el mismo nivel de razonamiento en todos los aspectos relacionados con la geometría, sin embargo, ya se ha demostrado que esto no sucede así, pues, los niveles se dan en realidad de forma local, lo que indica que se puede tener un razonamiento distinto dependiendo el concepto abordado.

#### ***2.3.3.5 Instrucción***

Es importante resaltar que la adquisición de nuevos niveles de razonamiento, no tiene que ver con el ámbito biológico, sino que se encuentra relacionada con la experiencia personal, donde interviene la instrucción recibida, además, hay que incluir las vivencias que se dan fuera del ambiente escolar que involucran en variedad de ocasiones los conceptos a estudiar.

Estas propiedades del Modelo son evidenciadas por medio del progreso en los niveles de razonamiento, donde es posible distinguir características como el lenguaje y su pertinencia, de tal forma que este se va refinando a medida que el estudiante progresa y ordena sus ideas en relación a la temática abordada. De hecho, para identificar cómo se va dando este proceso en los estudiantes, se ha querido incluir en la presente investigación la entrevista y los documentos escritos, que dan cuenta de los avances en cada una de las Fases de aprendizaje, facilitando el diálogo y la construcción de la nueva red de relaciones lo que se demuestra a través del lenguaje.

#### **2.3.4 Importancia del Lenguaje**

En este Modelo se resalta la importancia del lenguaje el cual se refleja en la forma de resolver situaciones propuestas al expresarse y en los significados que se dan al definir ciertos conceptos que son objeto de estudio, esto da a entender que el vocabulario va evolucionando en su significado a medida que se implementan las experiencias de aprendizaje, ya que una



determinada palabra o proceso tiene un significado diferente dependiendo del nivel de razonamiento en el que se encuentra un estudiante, a su vez, esto provoca que a cada nivel de razonamiento le corresponde un lenguaje característico, volviéndose crucial para la actividad diaria de los profesores dado que para hacerse comprender por sus estudiantes deben identificar el nivel de lenguaje y así amoldarse al razonamiento de los mismos, para que con base a esto se pueda dar una correcta orientación que permita llegar a un nivel más avanzado mediante una adecuada preparación y desarrollo de las clases siguiendo el modelo de van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990).

En resumen, se debe tener una idea lo más clara posible sobre el lenguaje apropiado que se debe usar y así mismo plantear actividades que conlleven a un razonamiento superior, al respecto Bedoya (2013), analiza que es pertinente desarrollar actividades secuenciales y organizadas guiadas por las Fases de aprendizaje, que abren paso a la construcción y refinamiento del lenguaje alrededor de los conceptos abordados.

### **2.3.5 Redes de relaciones**

El razonamiento de los conceptos de área y perímetro implican su aplicabilidad en diferentes situaciones de la vida diaria, por lo tanto, es importante que los estudiantes se enfrenten a situaciones que le permitan avanzar en la red de relaciones en torno a los conceptos antes mencionados, de hecho, para avanzar a un nivel de razonamiento superior se deben introducir nuevos conceptos y relaciones que permitan construir pensamientos más amplios y que a su vez conformarán lo que se conoce como la red de relaciones, y que es lo que al fin y al cabo permite avanzar de nivel.

Para van Hiele la manera de poner en evidencia la estructura mental de un estudiante se presenta a partir del fortalecimiento de la red de relaciones, según Jaime y Gutiérrez (1990), en el transcurso de las Fases, el profesor inicia la construcción de una red de relaciones, iniciando por la comprensión de los conceptos básicos y apropiación del vocabulario, en este sentido es importante mencionar lo que manifiesta Bedoya (2013) “la ampliación de la red de relaciones permite la refinación de los conocimientos y el enriquecimiento de las estructuras mentales, esto

se ve reflejado en el lenguaje y razonamiento ante nuevas situaciones” (p. 18). En este sentido las Fases de aprendizaje se constituyen en una herramienta de gran importancia, puesto que las experiencias de aprendizaje aportan los elementos para que se forme la red de relaciones.

### **2.3.6 Pertinencia del Modelo de van Hiele**

Aunque el Modelo de van Hiele en los primeros años de su publicación, no fue muy difundido y más bien tuvo poco acogimiento, ya en 1976 se comenzaron a generar voces de alerta inicialmente en Estados Unidos, sobre la importancia que el estudio hecho por los holandeses tenía en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje, este interés se ha ido incrementando hasta tal punto que este Modelo es tenido en cuenta en diversas investigaciones sobre todo en geometría, destacando su inclusión en los diseños curriculares.

Colombia no ha sido la excepción y, por eso en los últimos años, este ha sido resaltado por los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional por ser el más indicado para explicar el razonamiento de los estudiantes en relación con los conceptos que hacen parte del componente geométrico, afirmando que la construcción de este tipo de pensamiento se da mediante una evolución lenta desde las formas básicas iniciales hasta las formas más avanzadas en los grados superiores (MEN, 1998). En este sentido se puede encontrar de forma explícita que: “El Modelo de van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar” (Lineamientos curriculares, 1998, p. 38).

Además, los lineamientos curriculares brindan a las Instituciones Educativas orientaciones para el desarrollo de los planes de estudio y es desde allí donde se propone a van Hiele, como el modelo de razonamiento con mayor pertinencia en la enseñanza de algunos conceptos geométricos a los educandos que se encuentran en edades escolares.

Ahora bien, para el razonamiento de los conceptos de área y perímetro utilizando figuras planas del contexto es pertinente recordar que la presente investigación se fundamenta en el Modelo educativo de van Hiele, el cual presenta unas características de gran relevancia para ser

aplicadas en el proceso investigativo, por ello, es preciso hacer énfasis en las estructuras y características propias que se presentan en las Fases de Aprendizaje y que se relacionan en gran medida con los principios didácticos generales pertenecientes al aprendizaje por descubrimientos en sus formulaciones más recientes (Corberán, et al. 1994).

Es así como cada Fase proporciona herramientas que ayudan a mejorar los aprendizajes en el aula de clase permitiendo contribuir al razonamiento de los conceptos que se estudian en la presente investigación, además, hay que tener presente que según Corberán et al. (1994), el foco de atención del Modelo de van Hiele no se refiere al aprendizaje de acciones o destrezas, sino, que se centra más en lograr la comprensión de conceptos y en el avance del razonamiento en los estudiantes, adicional a esto, se le da una nueva interpretación a la acción de “enseñar” ya que no se entiende como el simple hecho de dar a conocer definiciones o propiedades de cierta temática, más bien corresponde al fortalecimiento de nuevas formas de pensamiento, para lo cual se hace necesario involucrar el carácter prescriptivo durante todo el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En este sentido, esta investigación se centra en el análisis de la implementación de experiencias de aprendizaje diseñadas previamente mediante el desarrollo de cada una de las Fases, puesto que según Gutiérrez y Jaime (1995), el Modelo da las orientaciones necesarias que se deben seguir para una adecuada enseñanza con el fin de que los estudiantes avancen en la forma como razonan, todo esto conlleva a observar detalladamente la evolución que van adquiriendo los educandos en el proceso investigativos alrededor de los conceptos de área y perímetro.

### ***2.3.6.1 Razonamiento de conceptos matemáticos***

El razonamiento de los conceptos matemáticos es de gran importancia en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, estos son puestos en práctica al momento de enfrentarse a situaciones de la vida cotidiana que requieran el uso de ciertos conocimientos para resolver situaciones de forma adecuada. En este sentido las estrategias implementadas en las prácticas de aula en relación con los conceptos de área y perímetro deben estar orientados al razonamiento de los mismos. Al respecto el MEN (1998), plantea que:

En las prácticas de clase en la escuela, es importante que los profesores escuchen lo que los estudiantes saben, lo que ellos piensan sobre las matemáticas y sobre su aprendizaje, escuchar las preguntas que hacen y las que no hacen, para conocer cómo van sus procesos de razonamiento, de resolución de problemas, entre otros y aplicarlos en situaciones de la vida diaria para orientar el uso del lenguaje matemático y ayudarlos a desarrollar su habilidad para comunicar matemáticas (p. 75).

Es oportuno resaltar la importancia de que los docentes aborden experiencias de aprendizajes en el aula que promuevan el razonamiento de los conceptos estudiados, además la aplicación adecuada de las estrategias contribuye a la solución de diversos problemas de interés para los estudiantes. Al respecto, el Modelo de van Hiele brinda orientaciones que aportan al fomento de la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad cognitiva de los estudiantes (Jaime y Gutiérrez, 1990). Lo anterior da a entender que las herramientas que ofrece dicho Modelo contribuyen al mejoramiento de los procesos de razonamiento en los estudiantes, por tanto, la puesta en práctica de aspectos relacionados con experiencias de aprendizaje que involucren unidades de medida utilizando partes del cuerpo, objetos y unidades de medida estandarizadas conllevan al razonamiento de los conceptos de área y perímetro.

Es importante aclarar que durante el proceso investigativo la atención se centra en el razonamiento de los participantes, el cual es analizado a partir de los instrumentos implementados al desarrollar las actividades en las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, por lo cual, es pertinente definir en qué consiste. Al respecto el MEN (1998), plantea que “el razonamiento es la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión” (p. 54), esto se refiere a la forma en que los estudiantes deben asimilar y ordenar sus aprendizajes para que puedan aplicarlos en diversas situaciones, y así puedan explicar sus apreciaciones.

También del (MEN 1998), es posible analizar la necesidad de tener presente la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo, dado que es necesario partir de los niveles formales del razonamiento en los grados inferiores (primero, segundo, tercero) de Educación Básica Primaria, hasta llegar a niveles más elaborados en los grados superiores. Se debe tener en cuenta que el

razonamiento está inmerso en todo el trabajo matemático en articulación con las actividades desarrolladas en torno a los conceptos objeto de estudio. En este sentido el MEN (1998), expone unos ítems que permiten evidenciar el razonamiento en los estudiantes, los cuales se presentan a continuación:

- Dar cuenta del cómo y porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar (p. 54).

Estos ítems se convierten en una herramienta que fortalece el proceso investigativo al momento de analizar el razonamiento de los participantes en cada una de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele.

De acuerdo con lo planteado, es necesario resaltar la pertinencia de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele para analizar la forma como razonan los estudiantes en torno a los conceptos de área y perímetro y de esta forma alcanzar los objetivos propuestos en la presente investigación.

Por otro lado, Jurado y Londoño (2005), se refieren a que el Modelo de van Hiele, se basa en los resultados que de alguna manera se relaciona con un estudio realizado por Piaget, donde se indica que el lenguaje es fundamental a la hora de presentar un problema a los estudiantes. En esta instancia es pertinente mencionar la teoría desarrollada por Piaget, que hace referencia al

desarrollo cognitivo, Piaget establece una serie de etapas o estadios que describen el proceso de maduración que van teniendo los niños y las niñas, el desarrollo cognitivo Según Case (1989), puede comprenderse como la adquisición sucesiva de estructuras lógicas cada vez más complejas que subyace a las distintas áreas y situaciones que el sujeto es capaz de ir resolviendo a medida que crece. En relación a estos planteamientos ese desarrollo es progresivo y avanza en la medida que cada individuo es capaz de resolver los inconvenientes que se presentan en su proceso de crecimiento.

Los procesos de desarrollo según los planteamientos que hace Piaget, se establecen en edades definidas, los estadios de desarrollo intelectual que dispuso Piaget los describe Saldarriaga, Bravo y Looor (2016), son los siguientes:

- Sensorio- motriz (0-2 años): este estadio comienza con el nacimiento del niño, se caracteriza por el desarrollo de los reflejos, que poco a poco se van transformando en una complicada estructura de esquemas a partir del intercambio del sujeto con los elementos de la realidad, proporcionándole la posibilidad de identificar la diferencia entre el “yo” y el mundo de los objetos. En esta etapa la construcción del conocimiento comienza con el ejercicio de los reflejos innatos, que luego permiten el desarrollo de los esquemas por el ejercicio y la coordinación hasta llegar al descubrimiento de procesamientos mentales que dan paso al desarrollo de una conducta intencional y a la exploración de nuevos medios que los llevan a formarse una representación mental de la realidad.

Un logro muy importante de esta etapa es la capacidad que adquiere el niño para representar a su mundo como un lugar donde los objetos a pesar de desaparecer momentáneamente, permanecen. Hay un progreso en el plano afectivo. (Piaget, 1968 b).

- Operaciones concretas (2- 11 años). En este estadio se desarrolla la inteligencia representativa, que Piaget concibe en dos fases. La primera de ellas (2 a 7 años), es identificada por el autor como preoperatoria, se presenta con el surgimiento de la función simbólica en la cual el niño, comienza a hacer uso de pensamientos sobre

hechos u objetos no perceptibles en ese momento. La inteligencia o razonamiento es de tipo intuitivo ya que no poseen en este momento capacidad lógica.

Los niños son capaces de utilizar diversos esquemas representativos como el lenguaje, el juego simbólico, la imaginación y el dibujo. Aquí el lenguaje tendrá un desarrollo impresionante llegando no solo a construir una adquisición muy importante si no que también será un instrumento que posibilitará logros cognitivos posteriores. Se caracteriza por la presencia de varias tendencias en el contenido del pensamiento: animismo, realismo y artificialismo, ya que suelen atribuir vida y características subjetivas a objetos inanimados, pues comprenden la realidad a parte de los esquemas mentales que poseen.

La segunda de estas fases (7- 12 años) es reconocida por el autor como el período de las operaciones concretas en el cual los niños desarrollan sus esquemas operatorios, los cuales por naturaleza son reversibles, razonan sobre las transformaciones y no se dejan guiar por las apariencias perceptivas. Su pensamiento es reversible pero concreto, son capaces de clasificar, seriar y entienden la noción del número, son capaces de establecer relaciones cooperativas y de tomar en cuenta el punto de vista de los demás. Se comienza a construir una moral autónoma. Esta se considera una etapa de transición entre la acción directa y las estructuras lógicas más generales que aparecen en el estadio siguiente. (Piaget, 1968 b).

- Operaciones formales (12 años en adelante): en esta etapa se desarrolla la inteligencia formal, donde todas las operaciones y las capacidades anteriores siguen presentes. El pensamiento formal es reversible, interno y organizado. Las operaciones comprenden el conocimiento científico. Se caracteriza por la elaboración de hipótesis y el razonamiento sobre las proposiciones sin tener presentes los objetos. Esta estructura del pensamiento se construye en la preadolescencia y es cuando empieza a combinar objetos sistemáticamente. (Piaget, 1968, p. 131).

En consecuencia, con estos estadios propuestos por Piaget, es posible asumir que la inteligencia es un proceso que avanza paulatinamente y está relacionado directamente con el

desarrollo biológico y la maduración del cerebro, estos procesos permiten la adaptación del individuo al ambiente en el que permanece y hace posible su desenvolvimiento en él.

La importancia de los aportes de Piaget en los procesos de razonamiento de los estudiantes es de gran importancia, puesto que orienta las etapas en que se desarrollan ciertas capacidades cognitivas, también influyen en otras teorías y modelos como es el caso del razonamiento de los estudiantes en el Modelo de van Hiele.

A continuación, se describe la metodología y las herramientas utilizadas en el proceso de investigación, las cuales permitieron dar respuesta a la pregunta y alcanzar el objetivo investigativo.



### **Capítulo III: Diseño Metodológico**

En este capítulo se presentan aspectos que estructuran el diseño metodológico, los cuales orientaron el proceso de la investigación, tales como: enfoque, método, instrumentos para la recolección de la información, categorías a priori, participantes y los fundamentos teóricos del Modelo de van Hiele en relación con las fases de aprendizaje, con el propósito de recolectar la información para ser analizada, en relación al razonamiento acerca de los conceptos de área y perímetro, de los participantes seleccionados, en el proceso investigativo.

#### **3.1 Enfoque investigativo**

Unos de los aspectos importantes a la hora de emprender un proceso investigativo es definir la naturaleza del estudio y con ello el enfoque de éste. En el campo de la educación se utilizan, generalmente, tres tipos de enfoque: cuantitativo, cualitativo y mixto, según (Binda & Balbastre – Benavent, 2013). El modelo cuantitativo se utiliza cuando se pretende explicar fenómenos de causa y efecto. Este modelo requiere el empleo de un lenguaje unificado y la posibilidad de cuantificación de los fenómenos en estudio, los resultados se presentan en forma estadística y en algunos casos, se apoya de gráficos que resultan fácil de entender para el público en general. (Hueso González, Sampieri & Josep, 2012).

El enfoque cualitativo puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo “visible”, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. “Es naturalista porque estudia a los objetos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y cotidianidad e interpretativo pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 10).

En un enfoque mixto se recolectan y analizan los datos, ya sea en forma cuantitativa y cualitativa. Se hacen análisis tanto estadísticos, como cualitativos de los datos recolectados. Se utiliza cuando la muestra de participantes es grande y se requiere resaltar la forma como los participantes narran o recolectan datos de su experiencia durante la investigación.

De acuerdo a la naturaleza del estudio y teniendo en cuenta que en esta investigación se pretende analizar el razonamientos de los estudiantes en relación a los conceptos de área y perímetro, se considera que el enfoque cualitativo es pertinente para el desarrollo del presente trabajo investigativo, dado que brinda herramientas puntuales para la recolección, procesamiento de los datos y el análisis de la información, de igual forma permite integrar las fases de aprendizaje del Modelo Educativo de van Hiele.

### **3.2 Método de investigación**

Una vez definido el enfoque investigativo, el próximo paso es seleccionar el método que acompañará al tipo de investigación, para el caso de la investigación cualitativa existen una variedad de ellos, entre los cuales se tienen: acción participación, fenomenología, etnografía, estudio de casos, entre otros, que permiten guiar un proceso investigativo. Este debe ser cuidadosamente seleccionado, atendiendo al tipo de investigación y a la naturaleza de los datos a recolectar.

En el presente estudio se seleccionó un método que permite analizar el razonamiento de un individuo o de un grupo de personas a profundidad, donde la observación juega un papel importante y la información recopilada se analiza a medida que se desarrolla el proceso investigativo. Por ello, la investigación se desarrolló a partir del estudio de casos, que Salkind (1999) lo define “como la forma de capturar información de una persona o grupo para recopilar datos detallados, fomentando el uso de varias técnicas para obtener la información necesaria, las cuales van desde las observaciones personales hasta las entrevistas” (p. 212), de acuerdo con este autor, el estudio de casos permite diversidad de instrumentos para recolectar información.

El propósito en esta investigación es analizar el razonamiento de los participantes durante el desarrollo de las actividades en las fases de aprendizaje, a partir de sus experiencias, vivencias, lenguaje, entre otras. Es decir, se observa a partir de sus desempeños en relación con los conceptos investigados, también desde sus interacciones con los compañeros, siendo esta una oportunidad para identificar hallazgos auténticos, en relación con el propósito del trabajo. Son analizados en forma individual y colectiva, presentando evidencia del razonamiento en cada uno de los participantes, utilizando diferentes herramientas a medida que se avanza por cada una de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele. Según Stake (1999) “el estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 8). Se puede decir que está profundamente relacionado con la individualidad de las personas, donde las comprensiones de los acontecimientos aportan al desarrollo del proceso investigativo. En la propuesta de Stake (1999), se identifican tres tipos de casos: Intrínseco, Colectivo e Instrumental.

### **3.2.1 El estudio intrínseco**

En relación con el estudio intrínseco el caso está dado, es decir se encuentra inmerso en el entorno del investigador, el cual es investigado para aprender de ese caso específico que se encuentra en el interior del campo abordado. “En el estudio intrínseco de casos, el investigador secuencia la acción, categoriza las propiedades y hace recuentos para sumarlos de forma intuitiva, también permite descubrir relaciones, indagar en los temas y sumar datos categóricos” (Stake, 1999, p. 66 y 68). En este sentido al relacionarlo con el campo educativo se entiende como un caso que se encuentra inmerso en el aula, por ejemplo, cuando se estudia el desarrollo de las habilidades investigativas o deportivas de un estudiante.

### **3.2.2 El estudio colectivo**

Se da cuando el investigador puede estudiar un número considerable de personas o instituciones de forma individualizada para comprender los acontecimientos al incluir nuevos elementos en la vida de los participantes relacionados, es decir, el interés de la investigación se

centra en un fenómeno o población seleccionada para estudiarla de forma intensiva, conocer una temática y analizar diferentes situaciones.

### **3.2.3 El estudio instrumental**

En el estudio de caso instrumental, desde las perspectivas de Stake, se entiende a partir de la necesidad de comprender un tema de un caso particular que se introduce en la vida de los participantes para ser investigado. El caso no viene dado, sino que a través de este método de estudio se comprende la vida y acciones de los participantes cuando se involucran aspectos nuevos, es decir, se lleva al aula el estudio para conocer otro caso. Por ejemplo, investigar como un grupo de estudiantes de grado tercero de Básica Primaria razona acerca de los conceptos de área y perímetro de figuras planas. En este ejemplo, el caso no viene dado, es un elemento externo que se lleva al aula de clase de los participantes desde las competencias del pensamiento geométrico, para ser analizado.

Por la naturaleza de la presente investigación y las características del estudio de caso instrumental, propuestos por Stake, el cual plantea que “el estudio de caso es un instrumento para conseguir algo diferente” (Stake, 1999, p. 17), y del análisis de las características de los tres tipos de casos, se consideró pertinente el estudio de caso instrumental en esta investigación, para analizar cómo los participantes razonan en relación con los conceptos de área y perímetro de figuras planas, a partir de la observación y otros instrumentos como el registro de datos, entrevistas semiestructuradas, encuestas, entre otras, para cada una de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele.

De este modo el caso fue llevado al aula de clase, teniendo en cuenta aspectos analizados con relación a las pruebas externas e internas que se han venido realizando en la Institución en los últimos años, en donde se han reflejado dificultades en la comprensión del componente geométrico en los conceptos de área y perímetro, estos conceptos se encuentran contemplados en los Lineamiento Curriculares del área de matemáticas (1998), los EBC (2006) y los DBA (2016), los cuales se encuentran inmersos en el Currículo Institucional y son conceptos que deben ser abordados por los estudiantes en la Educación Básica Primaria.

Teniendo en cuenta lo expuesto en los diferentes tipos de estudio de casos planteados por Stake, y de acuerdo con la naturaleza del estudio se consideró oportuno implementar el estudio de caso instrumental, dado a que el caso es llevado al aula por la docente investigadora, a todo el grupo de estudiantes y analizar en profundidad tres participantes seleccionados de acuerdo con su desempeño en el trabajo, en el aula de clase.

### **3.3 Instrumentos para recolectar la información**

En todo proceso de investigación se hace necesario la recolección de información, la cual se puede hacer por diferentes medios, como pueden ser; observación, entrevistas, entrevista semiestructurada, documentos escritos, audios, videos, entre otros. Estos instrumentos, al triangularlos, permiten un mejor análisis de la información, a medida que se desarrollan las actividades en cada una de las fases de aprendizaje del Modelo Educativo de van Hiele y le dan validez al estudio. Para el caso puntual, a continuación, se describen las utilizadas en la investigación.

#### **3.3.1 La observación**

La observación como método para la recolección de información permitió identificar importantes desempeños de los participantes, teniendo en cuenta las indicaciones dadas al momento de desarrollar cada una de las actividades en las fases de aprendizaje. Además, a través de la observación se identificó la postura de los participantes que presentaron dificultad al momento de realizar los mismos procesos.

Es importante resaltar que los participantes requieren de las competencias lectoras y escritoras para comprender y desarrollar el trabajo. En este sentido, para el Modelo de van Hiele, el lenguaje que utilizan los participantes a medida que desarrollan las diferentes actividades: es un aspecto importante para analizar, por lo tanto, hay que observar su evolución a medida que se avanza por cada una de ellas. En esta investigación fue importante el rol de investigadora, ya que permitió especificar las observaciones, descifrarlas e identificarlas, para analizar cómo se dio el razonamiento en un proceso inicial de los conceptos de área y perímetro en los participantes.

Esto permitió ser cuidadosos en las observaciones que se realizaron; con relación a los conceptos estudiados y a su interpretación. Además, permitió una organización confiable de datos y de las situaciones observadas en cada uno de los casos que fueron de estudio, porque de acuerdo con Stake (1999). “Las observaciones conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso” (p. 57). En relación con la investigación cualitativa, la cual se enfoca en “comprender y profundizar los fenómenos explorándolos desde la perspectiva de los participantes, en un ambiente natural y en relación con el entorno” (Hernández, Fernández Baptista, 2010, p. 364) se puede decir que la investigación se orientó a la recolección de la información, a través de la observación realizada a los participantes del proceso investigativo y, de esta manera analizar cómo razonaron los estudiantes de grado tercero, acerca de los conceptos de área y perímetro a partir de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele.

### **3.3.2 Entrevista**

En el desarrollo de las actividades se utilizó como una de las herramientas para la recolección de información, la entrevista semiestructurada, la cual fue implementada al final de las actividades en las fases cuatro y cinco (Orientación libre e Integración), esta permitió evidenciar el lenguaje de los participantes en relación a los aprendizajes adquiridos en torno a los conceptos de área y perímetro, convirtiéndose en un elemento para identificar el progreso después de desarrollar las primeras actividades, en las fases de aprendizaje uno, dos y tres (Información, Orientación dirigida y Explicitación), del Modelo Educativo de van Hiele. Es importante mencionar que la entrevista se realizó de forma individual utilizando un lenguaje sencillo, donde no hubo necesidad de aclarar términos que fueran desconocidos para los participantes, se mantuvo el propósito de realizar preguntas relacionadas con la actividad desarrollada y que surgieron durante el diálogo en la entrevista.

Este instrumento de recolección de información posibilitó obtener información acerca de cómo los estudiantes razonan al implementar las fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, de acuerdo con Stake (1999), “Es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples, el entrevistador necesita tener un plan previo bien detallado” (p. 60). A través de las preguntas realizadas se logró evidenciar como los participantes fueron refinando el lenguaje respecto a los

conceptos trabajados los cuales permitieron observar el progreso en su razonamiento para ser analizados.

### ***3.3.2.1 Entrevista semiestructurada***

Hace parte de una de las herramientas de la investigación cualitativa que permite obtener información a partir de un diálogo entre el entrevistado y el entrevistador, esto permitió comprender con mayor profundidad el objeto de estudio, dando la oportunidad de aclarar las dudas logrando evidenciar el razonamiento de los entrevistados y así comprender sus ideas. “La entrevista semiestructurada se basa en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la oportunidad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener más información sobre el tema deseado” (Hernández, Fernández & Baptista, 1991, p. 418).

Es importante mencionar que en este tipo de entrevista las preguntas no siempre están predeterminadas, por lo que permite plantear preguntas de diferentes formas, teniendo en cuenta que la entrevista va dirigida a estudiantes en edades escolares, es posible que algunos no las entiendan. En este sentido las preguntas realizadas tenían la intención de que los participantes compartieran sus experiencias, las cuales son de gran importancia para identificar los aprendizajes adquiridos, brindando la oportunidad de ampliar las ideas, permitiendo respuestas más amplias y respuestas no esperadas, dando libertad a los participantes.

En este sentido, la entrevista en esta investigación fue realizada de forma individual a los participantes, al finalizar las actividades desarrolladas en las fases cuatro y cinco del Modelo de van Hiele, (Capítulo IV). De tal forma que permitió evidenciar los avances en torno a los conceptos estudiados.

### **3.3.3 Documentos escritos**

Son las producciones de los participantes que se convierten en una fuente de gran importancia para la recolección de información, que sirven de apoyo para comprender y analizar el razonamiento de los estudiantes involucrados en el proceso investigativo en relación con el

objeto de estudio. Además, se considera una herramienta que contribuye a la comprensión del fenómeno, que puede ser utilizado como instrumento para corroborar datos recolectados a partir de la observación y durante la entrevista, haciendo una triangulación entre estas herramientas. En este sentido Stake, (1999), plantea que los documentos escritos “sirven como sustitutos de registros de actividades que el investigador no puede observar directamente” (p. 63). Este instrumento se convirtió para el investigador en registros que le permitieron emitir otras apreciaciones que no se obtienen de la observación.

En esta investigación los documentos escritos se obtuvieron a partir de las actividades desarrolladas por los participantes en las Fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele, (Apéndice B.1, B.2, B.3, B.4, B.5). Estos documentos posibilitaron el análisis del razonamiento de los participantes de los conceptos que hacen parte del objeto de la investigación.

### **3. 4 Participantes**

Esta investigación se desarrolló en la Institución Educativa San Pedro de Urabá del Municipio que lleva su nombre, en el departamento de Antioquia, país Colombia, esta Institución es de carácter público, cuenta con 20 grupos de primaria y 28 de secundaria, repartidos en tres sedes, dos urbana y una rural, con un total de 65 docentes, tres coordinadores, uno de ellos específicamente de primaria, una Secretaría y un Rector. El proceso investigativo se desarrolló en el grado tercero (D) de la sede urbana, el grupo estuvo conformado por 35 estudiantes, de los cuales se tienen 16 niñas y 19 niños, con edades entre 8 y 12 años, que estudian en la jornada de la mañana, en su mayoría pertenecen a hogares monoparentales, lo que hace que algunos tengan que ayudar con los quehaceres del hogar, incluido el sostenimiento del mismo, desarrollando actividades vinculadas a la ganadería y la agricultura que son la fuente económica del Municipio.

Teniendo en cuenta las particularidades del estudio de caso instrumental planteado por Stake, fue necesario seleccionar tres (3), estudiante del grado 3ºD para analizar su razonamiento a partir de sus producciones, en cada una de en las Fases de aprendizaje en el modelo de van Hile (Capítulo II). Para este fin se tuvo en cuenta los siguientes criterios para la selección:

1. Compromisos con las actividades académicas, disponibilidad y voluntad para participar.



2. Asistencia a clases.
3. Acompañamiento de los padres.

Una vez seleccionados los estudiantes se les informó a los padres para que dieran su consentimiento informado (Apéndice E), para que los estudiantes pudieran participar de la presente investigación, el cual hicieron por escrito. Después de terminado el proceso, se les asignaron seudónimos con el propósito de proteger su identidad durante la investigación. Estableciéndolos como: David, Rosa y Nataly.

### **3.5 Conceptos abordados: área y perímetro de figuras planas**

A lo largo del proceso investigativo se abordan los conceptos de área y perímetro, los cuales son estudiados desde la implementación de las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele, estos conceptos son definidos por el MEN (2012, 2015) como: “el área es la medida de una superficie, para determinarla se pueden utilizar diferentes unidades de medida, el perímetro es la longitud de su borde o contorno” (p. 126, 130), estos conceptos se encuentran incluidos en el currículo institucional y están dados por las orientaciones establecidas en los Derechos Básicos de Aprendizaje, para el grado tercero de educación Básica Primaria. También estos conceptos se pueden definir como:

El área de un polígono es la superficie delimitada por las rectas entre sí, y se calcula en unidades cuadradas, en otras palabras, se define como el tamaño de una superficie en unidades cuadradas; en el sistema internacional la unidad de medida de longitud es el metro (m), y el perímetro es la suma de las medidas de todos los segmentos que forman el área de un polígono (Garrido, 2015, p. 51).

Estos aportes clarifican aspectos para tener en cuenta al orientar el proceso de la investigación.

### 3.6 Categorías de análisis

Para el análisis de la información se establecieron categorías y descriptores a priori, para los conceptos de área y perímetro abordados y la literatura consultada, siendo consciente que estas podrían ser refinadas en el transcurso del trabajo de campo.

Una categoría se considera como una o varias palabras claves que amerita ser estudiadas a profundidad. Además, permiten la organización del concepto estudiado, que se desarrolla a través de las actividades. Brunel et al. (1986) define que una categoría es simplemente un rango de diferentes eventos que se pueden discriminar entre sí y que de cierta forma se tratan como si fuesen equivalentes. Por otra parte, las categorías permiten identificar situaciones dispersas que tienen cierta relación y que se pueden agrupar para dar sentido a la información recolectada. En este sentido Kelle (2010), plantea que se identifican similitudes entre varias características de eventos y objetos, esto se usa como base en la formulación de categorías y en su asignación de fenómenos, se asume que las categorías se identifican por medio de la correspondencia de las características claves en el fenómeno motivo de la observación.

Por otro lado, Kelle (2010) afirma que las categorías se usan como códigos de nivel superior, las cuales han crecido en complejidad y abstracción, incluyendo otros códigos. Además, la categoría implica la generación de una teoría formal. Se puede decir, que las categorías permiten organizar la información a partir de los datos y la información recolectada, las cuales conservan ciertas características con el objeto de investigación.

La determinación de categorías y su implementación en el proceso investigativo, facilita el análisis de las experiencias de aprendizajes que se encuentran enmarcadas en las fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele en relación con el razonamiento en torno a los conceptos de área y perímetro en los participantes. A continuación, se presentan las categorías que se establecieron para analizar el razonamiento de los participantes en relación con los conceptos abordados.

### 3.6.1 Categoría 1: Cubrir, sobreponer, plasmar

En esta categoría se incluyeron acciones donde los estudiantes empiezan a visualizar como se cubre la superficie de una cartulina utilizando partes del cuerpo (mano, dedo de la mano) y elementos cercanos a ellos como unidad de medida que les permitió realizar un conteo y la apropiación de estas para determinar la medida. A continuación, se presenta un ejemplo de las acciones realizadas por los participantes que hace visible esta categoría.



*Ilustración 3. Mano cubriendo superficie.*

En esta categoría se entiende por “cubrir” a la acción de poner sobre, plasmar en, tapar con. En este sentido los participantes cubrieron superficies utilizando diferentes partes de su cuerpo permitiendo su reconocimiento. La palabra “sobreponer” esta asociada a poner una cosa sobre otra, en este caso los participantes sobrepusieron distintos objetos de su uso diario o unidades de medida en diferentes superficies y establecieron las veces que la sobrepusieron. La palabra “plasmar” está relacionada a la acción de colocar la mano o el dedo sobre una superficie para marcarla. En esta categoría se evidenció el reconocimiento de la superficie por parte de los participantes, clasificando elementos que permitieron el análisis de la información recolectada. En estas acciones los participantes compararon superficies y explicaron quien cubrió más al plasmar la mano o el dedo y dieron razones que justificaban sus respuestas (Capítulo IV).

### 3.6.2 Categoría 2: Superficie

La geometría activa, que integra experiencias de aprendizaje en contexto, es una alternativa para establecer el estudio de los sistemas geométricos, como herramienta de exploración y

representación. “Al pasar las manos por las caras o superficies de objetos, muebles y paredes se aprecia más que con cualquier definición la diferencia entre cuerpos y superficies, y entre superficies planas y curvas” (MEN, 1998, p. 38).

Esta categoría se relaciona con el reconocimiento de superficies planas donde los estudiantes identificaron la parte externa de un objeto, figura o lugar, como mesa, paredes pisos, entre otros, al cubrirlas con objetos, plasmar la mano o caminar sobre ellas se fortaleció el reconocimiento de superficie. A continuación, se muestran algunas de las superficies donde los participantes realizaron procesos de medición.



*Ilustración 4.* Muestra de superficies (objeto, figura, lugar).

Estas superficies hacen parte de los elementos usados en el proceso investigativo para el fortalecimiento de las prácticas realizadas por los participantes, la utilización de objetos cercanos a ellos, facilitó el análisis de la información, además, permitieron el reconocimiento de superficies al plasmar o marcar elementos sobre ellas, estas interacciones facilitaron el aprendizaje permitiendo evidenciar el razonamiento, al desarrollar las actividades en las fases de aprendizaje.

### **3.6.3 Categoría 3: Área y medida de superficie**

En esta categoría se tienen en cuenta aspectos que hacen evidente la forma como los estudiantes determinan la medida de una superficie, al utilizar como unidad de medida las partes del cuerpo, unidades de medida cuadradas, rectangulares, objetos cercanos a ellos y unidades de

---

1

medida estandarizadas como la regla y el metro. “Es importante que midan correctamente longitudes, áreas, volúmenes, entre otros; es decir que ejecuten tareas matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas” (MEN, 1998, p. 81).

A partir de la información recolectada en los documentos escritos se tomaron elementos en que los participantes realizaron procesos de medición de superficies planas utilizando diferentes unidades de medida para ser analizadas a partir de sus características. A continuación, se muestran algunas ilustraciones que representan la medida de una superficie plana.



*Ilustración 5.* Midiendo superficies planas con diferentes unidades de medida.

Los participantes realizaron procesos de medición que les permitieron mostrar su progreso en el razonamiento a partir de la utilización de los materiales para hallar la medida del área de una superficie.

#### **3.6.4 Categoría 4: Lenguaje de área**

Para el modelo de van Hiele, el lenguaje es fundamental, expone de forma verbal el razonamiento que los estudiantes realizan en las diferentes actividades en relación con el concepto que se está estudiando. En esta categoría se tienen en cuenta aspectos que guardan relación con las expresiones verbales de los participantes, a partir de las palabras nuevas implementadas, que son la base que conforma la red de relaciones de los conceptos de área y perímetro. A esta categoría se relacionaron palabras como: superficie, medida, cubrir sobreponer, plasmar, unidad de medida, unidad de área, entre otras.

### 3.6.5 Categoría 5: Alrededor de, contorno, borde, orilla

En esta categoría se tienen en cuenta aspectos que evidencian como los participantes identifican que las superficies están delimitadas por un contorno, y que éste se puede medir utilizando partes del cuerpo como una unidad de medida y otros elementos cercanos a ellos, por lo tanto, es importante que los estudiantes “construyan, comparen y bordeen con cintas e hilos, para que diferencien las magnitudes: perímetro como el contorno de una figura, y el área, como la medida de la superficie delimitada por el contorno” (MEN, 2016, p. 19).

Esta categoría se evidenció cuando los participantes delinearon una superficie, midieron con el dedo y la cuarta el contorno de una figura cuadrada o rectangular. Estos procedimientos realizados por los participantes permitieron relacionar el concepto de perímetro con el contorno, borde u orilla de una figura o lugar, en este sentido la información recolectada por medio de la entrevista, observación, los documentos escritos se pudo sintetizar para mostrar el reconocimiento del concepto de perímetro. A continuación, se muestra una ilustración que guarda relación con esta categoría.



Ilustración 6. *Representación borde, contorno, orilla.*

En esta categoría la palabra “alrededor” se entiende por las acciones realizadas por los participantes. La palabra “contorno” se encuentra relacionada directamente con el perímetro de una figura o lugar, las palabras “borde”, “orilla” están asociadas al reconocimiento del contorno, en este caso fueron utilizadas porque hacen parte del lenguaje cotidiano de los participantes.

### 3.6.6 Categoría 6: Perímetro y medida de perímetro

Esta categoría está relacionada con el sistema métrico o de medida y en esta investigación se refiere a situaciones, donde los participantes midieron con objetos cercanos a ellos (lápiz, borrador cuaderno, lápiz de color) y partes del cuerpo (pulgada, cuarta, pasos), y con unidades de medidas estandarizadas como el metro y la regla. A continuación, se muestran ilustraciones que evidencian el proceso realizado.



*Ilustración 7. Midiendo el perímetro.*

En este sentido se consideraron aspectos que explicitan el aprendizaje de los participantes planteados por el MEN (2016), específicamente en el DBA número cuatro del área de matemáticas, en el grado tercero de Educación Básica Primaria, el cual dice que el estudiante: “describe y argumenta posibles relaciones entre los valores del área y el perímetro de figuras planas (especialmente cuadriláteros) (p, 24), el cual fue evidenciado por los participantes al momento de medir y calcular el perímetro de una figura cuadrada o rectangular, expresando el resultado según la situación presentada.

### 3.6.7 Categoría 7: Lenguaje de perímetro

Para van Hiele es importante el lenguaje, en la medida que se desarrollan las experiencias de aprendizaje, por lo tanto, en esta categoría se relacionan expresiones de los participantes que están asociadas al concepto de perímetro, como: borde, contorno u orilla, en la medida que fueron implementadas las fases de aprendizaje se captaron elementos que permitieron el análisis del razonamiento de los participantes evidenciado a través del lenguaje. En este sentido, es importante que los profesores escuchen lo que comprenden los estudiantes, al respecto el MEN (1998), plantea, “...escuchar las preguntas que hacen y las que no hacen, para conocer cómo van

sus procesos de razonamiento, de resolución de problemas, para orientar el uso del lenguaje matemático” (p. 75). Por lo tanto, en esta categoría se tiene en cuenta aspectos expuestos por los estudiantes a través del lenguaje que permiten evidenciar su progreso.

### 3.7 Fases y descriptores de fases

Para el razonamiento de los conceptos de área y perímetro esta investigación se centra en las fases del Modelo de van Hiele, puesto que brinda herramientas que permiten fortalecer estos conceptos en estudiantes en edades escolares, (tercer grado de Educación Básica Primaria), las cuales “constituyen unas directrices para fomentar la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes y su paso de un nivel de razonamiento al siguiente, mediante unos tipos de actividades y de problemas particulares para cada fase” (Jaime, 1993, p. 5). Al respecto, este proceso investigativo se centra en las fases de aprendizaje, puesto que “el razonamiento en los estudiantes de grados inferiores de Educación Básica Primaria debe partir de niveles formales” (MEN, 1998, p. 54). En este sentido las fases de aprendizaje son de gran importancia ya que permiten implementar actividades que, al ser desarrolladas por los estudiantes, conllevan al razonamiento de los conceptos abordados. De allí la importancia que el presente trabajo esté enmarcado en las fases del Modelo de van Hiele.

Los descriptores en la presente investigación se constituyen en un conjunto de particularidades que evidencian aspectos fundamentales al momento de abordar el análisis del razonamiento de los conceptos de área y perímetro de figuras planas en estudiantes de grado tercero, tienen como propósito identificar aspectos importantes con relación a los conceptos trabajados en las fases de aprendizaje al desarrollar cada una de las actividades.

Algunos trabajos de investigación que han adoptado el modelo de razonamiento de van Hiele en aspectos diferentes a la geometría han determinado descriptores de fases basados en los conceptos matemáticos desarrollados en su investigación. Entre estas investigaciones se encuentran las siguientes: Bedoya, D. (2013). *La comprensión de las estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele*. Tesis de maestría publicada, Universidad de Antioquía, Colombia. Vasco, E & Bedoya, J. (2005). *Diseño de módulos de instrucción para el*



*concepto de aproximación local en el marco de las fases del modelo de van Hiele.* Tesis de maestría publicada, Universidad de Antioquia, Colombia.

### 3.7.1 Fase 1: Información

Se trata de informar a los estudiantes sobre los conceptos en los cuales se va a trabajar, el tipo de situaciones que van a desarrollar, que materiales se van a utilizar. Además, los participantes entran en contacto con el material a utilizar y con objetos del entorno que se puedan medir fácilmente, para que adquieran los conocimientos básicos que propicien el inicio del trabajo matemático. Todo esto con el fin de acercar a los estudiantes a los conceptos que se abordan en el desarrollo del proyecto.

Los descriptores planteados para esta fase de aprendizaje permiten el reconocimiento de saberes previos en relación con los conceptos de área y perímetro, así como el diseño de las actividades a desarrollar en cada una de las experiencias de aprendizaje en las que participan los estudiantes. A continuación, se presentan los descriptores de la fase 1, con su respectiva actividad y el Apéndice en donde se encuentra.

**Tabla 3.** *Descriptores de la Fase 1. Información.*

Descriptor	Actividad/descripción	Ver apéndice
Reconoce que una superficie se puede cubrir con diferentes objetos, o partes del cuerpo de mayor o menor tamaño.	Este descriptor permite identificar el reconocimiento que tiene los participantes en relación con el concepto de superficie, para ello se presenta una situación en donde los participantes deben cubrir una superficie al plasmar partes del cuerpo o algún objeto sobre ella, como se evidencia en las actividades: Plasmamos nuestras manos, De paseo por algunos lugares, Midiendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno.	B.1.1 B.2.2 B.2.4

Sobrepone una superficie sobre otra, cuenta el número de veces que lo realizó.	En este descriptor los estudiantes utilizan diferentes unidades de medida para cubrir una superficie como se hace evidente en las actividades: Plasmamos nuestras manos, Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno.	B.1.1	B.2.4
Establece la medida de una superficie utilizando como unidad de medida las partes del cuerpo.	Este descriptor permite que los participantes identifiquen que se puede medir una superficie utilizando partes del cuerpo. Se evidencia en las actividades: Plasmamos nuestras manos, De paseo por algunos lugares.	B.1.1	B.2.2
Reconoce que en una figura o lugar se puede recorrer el borde o contorno utilizando diferentes partes del cuerpo (dedo, cuarta, pasos, entre otros).	En este descriptor los participantes realizan el reconocimiento del contorno al medir con las partes del cuerpo. Se evidencia en las actividades: Midiendo por el borde, Reconociendo nuestro entorno.	B.1.2	B.1.3
Mide con un objeto o con diferentes partes del cuerpo, el borde o contorno de una figura o lugar, cuenta el número de veces que lo realizó.	Se observa el proceso de medición realizado con objetos y partes del cuerpo. Los instrumentos donde se observa este descriptor son: Midiendo por el borde, Reconociendo nuestro entorno y De paseo por algunos lugares.	B.1.2	B.1.3
		B.2.2	

Los descriptores en esta investigación se diseñaron a priori, con el propósito de evidenciar el desempeño de los participantes al desarrollar cada una de las actividades en las fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele. Estos descriptores fueron refinados en la medida en que se implementaron las fases, hasta convertirse en características que dan cuenta de aspectos importantes al abordar los conceptos de área y perímetro.

Los descriptores planteados en esta fase están orientados a identificar los conocimientos previos en torno a los conceptos en mención, así como el reconocimiento de materiales y actividades a efectuar durante el desarrollo de esta fase.

### 3.7.2 Fase 2: Orientación dirigida

El docente inicia el proceso de orientación en el cual va dando pautas para un direccionamiento del trabajo, en esta fase los estudiantes empiezan a visionar qué conceptos se van a estudiar, en este caso el de área y perímetro, en el cual se utilizan estrategias de la fase uno. En cada una de las actividades a desarrollar el estudiante es un participante activo, que guiado por el docente va descubriendo progresivamente los conceptos a través de la realización de las diferentes actividades de aprendizaje.

Los descriptores en esta fase permitieron guiar el proceso de enseñanza y de aprendizaje en relación con los conceptos de área y perímetro. A continuación, se presentan los descriptores de la fase dos, con sus respectivas actividades y el apéndice en donde se encuentran.

**Tabla 4.** *Descriptores de la Fase 2. Orientación dirigida.*

Descriptor	Actividad/descripción	Ver apéndice
<i>Reconoce que la medida de una superficie se puede expresar en diferentes unidades de medida.</i>	El cumplimiento de este descriptor se muestra al realizar las actividades: escojo mi unidad de medida y cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno.	B.2.3 B.2.4
Reconoce que al sobreponer sobre una superficie diferentes objetos algunos de ellos permiten cubrirla en su totalidad.	Este descriptor permite identificar los elementos con los que se puede cubrir una superficie en su totalidad. Se evidencia en las actividades midiendo superficies pequeñas y midiendo su contorno y midiendo superficies grandes.	B.4.1 B.4.2
Identifica que entre más cerca se coloque un mismo objeto sobre	Este descriptor se evidencia al comparar porqué en una superficie se sobrepones más	B.2.1

---

una superficie, más veces se debe sobreponer para cubrirla.	veces o menos veces la misma unidad de medida. Actividad: comparando superficies.	
Identifica el objeto que le permite medir con mayor precisión el contorno de una figura.	Este descriptor se evidencia en la actividad de paseo por algunos lugares, al indicar los elementos que usaría para medir el contorno de un lugar.	B.2.2
Crea estrategias que le permiten establecer una medida más aproximada para medir el borde o contorno de una figura.	Este descriptor se observa en la actividad reconociendo nuestro entorno, al establecer la medida del contorno de un lugar, teniendo en cuenta la medida de uno, o dos de sus lados.	B.1.3
Utiliza partes del cuerpo para medir el contorno o borde de una figura o lugar y establece comparaciones entre ellas.	Este descriptor es evidenciado al desarrollar las actividades reconociendo nuestro entorno y de paseo por algunos lugares.	B.1.3 B.2.2

---

Los descriptores de esta fase son instrumentos de gran utilidad para orientar los procesos relacionados con los conceptos de área y perímetro. Esta fase de orientación dirigida permitió a la docente investigadora crear pautas para identificar en los participantes el progreso de los aprendizajes de los conceptos de área y perímetro.

### 3.7.3 Fase 3: Explicitación

En esta fase los estudiantes comparten con los compañeros las experiencias que han tenido al realizar las actividades en las fases uno y dos, poniendo en evidencia los aprendizajes adquiridos con relación a los conceptos de área y perímetro. En el desarrollo de las actividades y en el análisis de la información se observó el progreso del lenguaje a través de las expresiones verbales manifestadas al compartir con los compañeros las experiencias, haciendo evidente el razonamiento en torno a los conceptos. A continuación, se presentan los descriptores de la fase tres, con sus respectivas actividades y el Apéndice en donde se encuentran.

**Tabla 5.** *Descriptoros de la Fase 3. Explicitación.*

Descriptor	Actividad/descripción	Ver apéndice
Dados varios elementos identifica el más adecuado que se debe sobreponer para cubrir una superficie en su totalidad.	Este descriptor permite observar el elemento seleccionado por los participantes para cubrir una superficie, se evidencia en las actividades Escojo mi unidad de medida y explico lo aprendido.	B.2.3 B.3.1
Explica a sus compañeros los procedimientos realizados para cubrir superficies, y la forma como determina las veces que sobrepuso la medida.	En la actividad Explico lo aprendido, los participantes dan cuenta de los procesos realizados al cubrir una superficie.	B.3.1
Explica a sus compañeros los procedimientos realizados para medir el borde o contorno de una figura o lugar.	Este descriptor se evidencia al realiza procesos de medición en la actividad Explico lo aprendido y Cubriendo superficies grandes.	B.3.1 B.4.2
Explica con claridad el procedimiento realizado al efectuar una actividad relacionada con la medición del contorno.	El descriptor se evidencia al dar respuesta a las preguntas realizadas en las siguientes actividades Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno, Cubriendo superficies grandes y Aprendo de mi entorno.	B.4.1 B.4.2 B.4.3
Dados varios elementos identifica el más adecuado que le permite medir el contorno de una figura.	Este descriptor es observado al medir el contorno de una superficie en la actividad Explico lo aprendido.	B.3.1

En esta fase se hacen explícitos los conocimientos construidos en torno a los conceptos objeto de estudio, por lo tanto, para identificar el desempeño de los participantes se establecieron descriptores, con el propósito de evidenciar los argumentos construidos al momento de explicar situaciones relacionadas con el desarrollo del trabajo realizado en las fases uno y dos.

### 3.7.4 Fase 4: Orientación libre

En esta fase la docente propone a los estudiantes problemas abiertos, que sean solucionados de diferentes formas, para que ellos tengan la necesidad de razonar y poner en práctica los aprendizajes adquiridos en las fases anteriores y dar solución a distintas situaciones planteadas, en relación con los conceptos estudiados. Las actividades planteadas en esta fase permitieron fortalecer la red de relaciones que se empezó a formar en las fases anteriores.

En esta Fase los estudiantes pusieron en práctica los conocimientos aprendidos en la Fase anterior, al realizar actividades y solucionar problemas que involucren los conceptos de área y perímetro; aquí los participantes conociendo la medida de los lados de una figura o de un lugar, pueden determinar estrategias para hallar el área o el perímetro de figuras planas, mostrando iniciativa para abordar diferentes situaciones planteadas o diseñar sus propios problemas. A continuación, se presentan los descriptores de la fase cuatro, con sus respectivas actividades y el Apéndice en donde se encuentran.

**Tabla 6.** *Descriptores de la Fase 4. Orientación libre.*

Descriptor	Actividad/descripción	Ver apéndice
Dada una unidad de área, el estudiante determina cuántas veces es necesario sobreponerla para cubrir una superficie.	Este descriptor permite observar el proceso realizado para establecer las unidades de medida necesarias al cubrir una superficie en las actividades: Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno, Cubriendo superficies grandes.	B.2.4 B.4.1 B.4.2
Dada una superficie el estudiante utiliza objetos (unidades de medida) que cubren en su totalidad la superficie dada.	El descriptor se evidencia en la actividad: Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno, al realizar procesos que permiten cubrir una superficie con unidades de medida.	B.4.1
Dada una unidad de área, el estudiante determina cuántas	Al sobreponer las unidades de área en una superficie en las actividades: Cubriendo	B.4-1

Descriptor	Actividad/descripción	Ver apéndice
veces es necesario sobreponer un objeto por el borde para hallar el perímetro.	superficies pequeñas y midiendo su contorno y Cubriendo superficies grandes, realiza procedimientos que le permite hallar la medida del perímetro.	B.4.2
Realiza actividades de la vida diaria donde se aplica el concepto de perímetro.	Este descriptor se evidencia en la actividad: Aprendo de mi entorno, al solucionar problemas que involucran este concepto.	B.4.3
Reconoce que el perímetro corresponde a la orilla o borde que rodea una superficie.	La apropiación de procedimientos adecuados, permiten hallar la medida del perímetro, se evidencia en la actividad: Aplico lo aprendido.	B.5.1

Los descriptores implementados en esta fase evidenciaron los aprendizajes adquiridos, mostrando los procedimientos realizados al momento de abordar diferentes situaciones que requieren la puesta en práctica de los conceptos de área y perímetro.

### 3.7.5 Fase 5: Integración

En esta fase el participante tiene una visión general de los conceptos de estudio (área y perímetro). Busca que se ponga en práctica lo aprendido en las fases anteriores, de tal forma que puedan solucionar situaciones y problemas de su entorno evidenciando la integración de los conocimientos y así tener una mayor comprensión del tema estudiado para fortalecerlos mediante las comparaciones del área y perímetro de diferentes superficies. Al desarrollar esta fase, se espera que los participantes puedan mejorar su razonamiento a partir de la red de relaciones que han construido al pasar por las diferentes fases. A continuación, se presentan los descriptores de la fase cinco, con sus respectivas actividades y el apéndice donde se encuentran.

**Tabla 7.** *Descriptores de la Fase 5. Integración.*

Descriptor	Actividad/descripción	Ver apéndice
Determina y calcula el área de	Las actividades: Aplico lo aprendido y	

diferentes superficies rectangulares como el salón de clase, la mesa del profesor, de su habitación entre otras.	Soluciono problemas, permiten el análisis al responder interrogantes relacionados con la medida del área.	B.5.1 B.5.2
Utiliza diferentes procedimientos para asociar un número cuando se cubre una superficie con otra.	Este descriptor se encuentra relacionado con la actividad: Encontrando el área y el perímetro, permite analizar representaciones de medidas en el plano.	B.5.3
Reconoce que el perímetro corresponde a la orilla o borde que rodea una superficie y se mide usando la regla o metro.	A través de este descriptor se observa el reconocimiento del concepto de perímetro, al solucionar la actividad: Aplico lo aprendido.	B.5.1
Narra de forma ordenada los aspectos a tener en cuenta para hallar el área y el perímetro de una figura o lugar planos.	Este descriptor se evidencia al dar respuesta a las preguntas en las actividades: Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno, Cubriendo superficies grandes, Aplico lo aprendido.	B.4.1 B.4.2 B.5.1
Realiza operaciones básicas (adición, multiplicación) para hallar el área y el perímetro de una figura plana.	La aplicación de las operaciones básicas (adición, multiplicación, para hallar el área y el perímetro, se evidencia al desarrollar las siguientes actividades: Cubriendo superficies grandes, Aprendo de mi entorno, Aplicando lo aprendido, Soluciono problemas.	B.4.2 B.4.3 B.5.1 B.5.2

Los descriptores diseñados para esta fase permiten observar características que dan cuenta del razonamiento de los participantes en relación con los conceptos de área y perímetro, al utilizar procedimientos que dejan al descubierto la construcción de la red de relaciones, al momento de solucionar las actividades planteadas.



Los descriptores de las fases fueron elaborados a priori con el propósito de orientar el proceso de asimilación de los conceptos de área y perímetro, puesto que permitieron visualizar aspectos que dan cuenta del progreso del razonamiento en las fases de aprendizaje.

A continuación, se presenta la matriz de categorías y descriptores de fase planteada para este estudio. Tiene como propósito organizar las producciones de los participantes a partir de la información recolectada para presentar un análisis detallado del razonamiento de los conceptos de área y perímetro en cada una de las fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele.

**Tabla 8.** *Matriz de categorías y descriptores de Fase*

<b>Categorías</b>	<b>Códigos</b>	<b>Información</b>	<b>Orientación dirigida</b>	<b>Explicitación</b>	<b>Orientación libre</b>	<b>Integración</b>
Cubrir, sobreponer, plasmar	Palabras o acciones que el estudiante utiliza al realizar la acción de cubrir o sobreponer con objetos una superficie: tapar, colocar sobre, pintar, señalar, plasmar, que son la base para la construcción del concepto de área de una superficie.	Sobrepone una superficie sobre otra, cuenta el número de veces que lo realizó.	Reconoce que al sobreponer sobre una superficie diferentes objetos algunos de ellos permiten cubrirla en su totalidad.	Explica a sus compañeros los procedimientos realizados para cubrir superficies con otras más pequeñas, y la forma como determina las veces que sobrepuso la medida para cubrir la superficie.	Dada una unidad de área, el estudiante determina cuántas veces es necesario sobreponerla para cubrir una superficie.	Utiliza diferentes procedimientos para asociar un número cuando se cubre una superficie con otra.
Superficie	En esta categoría se consideran códigos relacionados con el proceso de reconocimiento de una superficie de regiones planas y nombra algunas de	Reconoce que una superficie se puede cubrir con diferentes objetos, o partes del cuerpo de mayor o menor tamaño.	Identifica que entre más cerca se coloque un mismo objeto pequeño sobre una superficie más veces se debe sobreponer para	Dados varios elementos identifica el más adecuado que se debe sobreponer para cubrir una superficie en su totalidad.	Dada una superficie el estudiante utiliza objetos (unidades de medida) para cubrir la superficie dada.	Determina y calcula áreas de diferentes superficies rectangulares como el salón de clase, la mesa del profesor, de su habitación

Categorías	Códigos	Información	Orientación dirigida	Explicitación	Orientación libre	Integración
	ellas: mesa, paredes, hojas del cuaderno, piso del aula, entre otras y acciones de los participantes que permitan realizar procesos de medición en una superficie.		cubrirla.			entre otras, teniendo diferentes unidades de medida.
Área y medida de superficie	En esta categoría se encuentran códigos que hacen visible la forma como los participantes realizan los procesos de medición para hallar el área de una superficie, tales como: cuenta las veces que es necesario sobreponer una superficie sobre otra para cubrirla. Conteo, adición, multiplicación que a	Establece la medida de una superficie utilizando como unidad de medida las partes del cuerpo.	<i>Reconoce que la medida de una superficie se puede expresar en diferentes unidades de medida.</i>	Determina el número de unidades necesarias para cubrir una superficie	Dada una superficie el estudiante utiliza objetos (unidades de medida) que cubren en su totalidad la superficie dada.	Determina y calcula el área de diferentes superficies rectangulares como el salón de clase, la mesa del profesor, de su habitación entre otras, teniendo diferentes unidades de medida.

<b>Categorías</b>	<b>Códigos</b>	<b>Información</b>	<b>Orientación dirigida</b>	<b>Explicitación</b>	<b>Orientación libre</b>	<b>Integración</b>
						través de sus justificaciones se evidencia la construcción de la red de relaciones.
Lenguaje de área	Palabras o acciones que el estudiante realiza, tales como: medición, superficie, conteo, adición, multiplicación.			Explica con claridad el procedimiento realizado al efectuar una actividad al cubrir una superficie.	Relaciona actividades de la vida diaria donde se aplica el concepto de área.	Narra de forma ordenada los aspectos a tener en cuenta para hallar el área de una figura o lugar
Alrededor de, contorno, borde, orilla	Esta categoría incluye códigos relacionados con expresiones como: recorrer el borde de una figura o lugar, medición, longitud, delinear, adición, multiplicación con los cuales se inicia la construcción de la red mental y son la	Reconoce que en una figura o lugar se puede recorrer el borde o contorno utilizando diferentes partes del cuerpo, (dedo, cuarta, pasos entre otros).	Crea estrategias que le permiten establecer una medida más aproximada para medir el borde o contorno de una figura. Utiliza partes del cuerpo para medir el contorno o borde de una	Explica a sus compañeros los procedimientos realizados para medir el borde o contorno de una figura o lugar.	Reconoce que el perímetro corresponde a la orilla o borde que rodea una superficie.	Reconoce que el perímetro corresponde a la orilla o borde que rodea una superficie y la mide usando la regla o metro.

<b>Categorías</b>	<b>Códigos</b>	<b>Información</b>	<b>Orientación dirigida</b>	<b>Explicitación</b>	<b>Orientación libre</b>	<b>Integración</b>
	base para la construcción del concepto de perímetro.		figura o lugar y establece comparaciones entre ellas.			
Perímetro y medida de perímetro	Palabras o acciones que el estudiante utiliza al realizar la acción de medición, tales como: cuenta las veces que es necesario superponer un objeto por el borde de una superficie. Conteo, adición o multiplicación. Estos elementos permiten evidenciar cómo se fortalece la red de relaciones en torno al concepto estudiado.	Mide con un objeto y con partes del cuerpo, el borde o contorno de una figura o lugar, cuenta el número de veces que lo realizó.	Crea estrategias que le permiten establecer una medida más aproximada para medir el borde o contorno de una figura.	Dados varios elementos identifica el más adecuado que le permite medir el contorno de una figura.	Mide el contorno de un lugar utilizando diferentes unidades de medida.	Determina y calcula el perímetro de diferentes superficies rectangulares como el salón de clase, la mesa del profesor, de su habitación entre otras, teniendo diferentes unidades de medida.  Realiza operaciones básicas (adición, multiplicación) para hallar el

Categorías	Códigos	Información	Orientación dirigida	Explicitación	Orientación libre	Integración
Lenguaje de perímetro	En esta categoría se presentan códigos relacionados con las expresiones verbales relacionadas con el concepto de perímetro, tales como: medición, conteo, adición, multiplicación, medida, longitud, contorno, borde, orilla.			Explica con claridad el procedimiento realizado al efectuar una actividad relacionada con la medición del contorno.	Realiza actividades de la vida diaria donde se aplica el concepto de perímetro.	perímetro.  Narra de forma ordenada los aspectos a tener en cuenta para hallar el perímetro de una figura o lugar.

La matriz expuesta anteriormente está construida teniendo en cuenta categorías y descriptores a priori, los cuales se fueron refinando durante el proceso investigativo. Estos elementos, junto con las evidencias recolectadas en el desarrollo de las actividades se convirtieron en los insumos que orientaron el análisis de la información, en cada una de las fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele.

### **3.8 Diseño de actividades**

En este apartado se presentan las actividades diseñadas para cada una de las fases, las cuales buscan que los estudiantes alcancen aprendizajes y razonen en relación con los conceptos de área y perímetro a medida que avanzan a través las fases del Modelo de van Hiele, que son: Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre e Integración.

Inicialmente se presenta la actividad diagnóstica, donde se identifican los conocimientos previos que tienen los estudiantes acerca de los conceptos de área y perímetro, lo cual permite establecer un punto de partida y definir las actividades siguientes en cada una de las fases de acuerdo con el modelo educativo de van Hiele.

A continuación, se presenta una breve descripción de cada una de las actividades implementadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

#### **3.8.1 Actividad diagnóstica**

Para dar inicio con el proceso de recolección de la información se diseñó una actividad diagnóstica con el propósito de identificar la forma como los estudiantes de grado tercero cubren la superficie de diversos objetos, y la manera como, con esos mismos objetos, bordean la cartulina.

La actividad está conformada por tres partes, en la primera por preguntas abiertas relacionadas con los conceptos de área y perímetro, las cuales debían completar de acuerdo

a sus conocimientos, tales como: una superficie es, una superficie se puede medir con. En la segunda parte se les entregó materiales (cartulina con dimensiones de 30 cm de cada lado) para que realizaran una actividad donde debían utilizar sus útiles escolares (borrador, tajalápiz, lápiz, lápiz de colores, cuaderno, regla, entre otros), para sobreponer y marcarlos en la superficie de la cartulina y bordear el contorno. En la tercera parte, respondieron preguntas relacionadas con el trabajo realizado, en el cual se indagó por el elemento que les permitió cubrir la mayor parte de la cartulina, cuáles fueron los objetos más adecuados para recorrer el contorno de la cartulina. (Apéndice A).

### **3.8.2 Actividades de la fase 1: Información**

En esta fase el docente establece un diálogo con los estudiantes, este permitió realizar un diagnóstico de los conocimientos previos. Además, el docente informa los conceptos que se van a trabajar, los materiales y la metodología a implementar para el desarrollo de las actividades.

Según el Modelo de razonamiento de van Hiele, en esta fase los estudiantes adquieren los conocimientos básicos para empezar el trabajo matemático, el cual está basado en las experiencias de aprendizaje que han tenido los estudiantes en relación con el tema que se pretende abordar, en este caso el de área y perímetro. A continuación, se describen cada una de las actividades a desarrollar en esta fase.

#### ***3.8.2.1. Actividad uno. Plasmamos nuestras manos***

Se presenta esta actividad para visualizar cómo los estudiantes cubren la superficie de un trozo de cartulina, utilizando la mano y un dedo de la mano, como unidad de medida al plasmarla en la superficie, y así acercarlos al concepto de superficie. Esta actividad consistió en entregar dos láminas de cartulina de 30 centímetros de largo por 30 centímetros de ancho a cada estudiante para que plasmaran la mano con pintura, tantas veces como fuera necesario, hasta cubrir, en lo posible toda la superficie de la cartulina. Además, en la otra cartulina plasmaron el dedo de la mano (el mismo) con pintura hasta cubrir la mayor



parte de la superficie. Después responden preguntas como: ¿Cuántas veces se plasmó la mano sobre la cartulina?, ¿Crees que si se plasma la mano de una persona adulta estaría las mismas veces que la tuya? ¿Por qué? Para finalizar la actividad se les pide que comparen el trabajo realizado con otros compañeros para identificar la cantidad de veces que cada uno plasmó la mano sobre la cartulina y de esta manera observar cómo quedó cubierta la superficie de la cartulina. (Apéndice B.1.1).

### **3.8.2.2 Actividad dos. Midiendo por el borde**

En esta actividad, se pretende que los estudiantes exploren la orilla, el borde, contorno, como un acercamiento al concepto de perímetro, permitiendo identificar que las superficies están delimitadas por un contorno, y que éste se puede medir utilizando diferentes unidades de medida.

En esta actividad se retoma la actividad 1, donde se les entregó el material en el cual plasmaron las manos en la actividad anterior, para que los niños bordeen la cartulina utilizando como instrumento de medida la pulgada (dedo pulgar), además pueden utilizar otras unidades de medida no convencionales como la cuarta u otras que ellos estimen conveniente. Finalmente respondieron preguntas relacionadas con el trabajo realizado. Ejemplo: ¿Cuántas pulgadas tiene el borde de la cartulina? (Apéndice B.1.2).

### **3.8.2.3 Actividad tres. Recorriendo nuestro entorno**

Esta actividad permitió que los niños identificaran la orilla, borde o contorno de diferentes lugares del entorno escolar utilizando unidades de medida no convencionales (pasos) como una aproximación al concepto de perímetro. En esta actividad, los estudiantes fueron al patio del colegio para realizar un recorrido por el contorno de diferentes lugares del entorno escolar. A diferencia de la actividad anterior, en donde los estudiantes midieron el contorno de una lámina de cartulina, en esta actividad se realiza en un entorno institucional, haciendo un reconocimiento de los diferentes lugares con el fin de que los niños observaran que también se puede realizar mediciones en diferentes lugares, de

diferentes formas y de mayor longitud. Finalmente realizan comparaciones con los compañeros y responden las preguntas. Ejemplo: ¿Cuántos pasos contaste al ir por el borde de la jardinera?, ¿En cuál lugar se dio menos pasos? (Apéndice B.1.3).

### **3.8.3 Actividades de la fase 2: Orientación dirigida**

En esta fase el estudiante es un participante activo, que guiado por la docente va descubriendo progresivamente los conceptos en la realización de cada una de las actividades. En esta fase los estudiantes empiezan a visionar qué conceptos se van a estudiar, en este caso el de área y perímetro, en el cual se utilizan estrategias de la fase uno, las cuales permitieron evidenciar el progreso en el aprendizaje.

A continuación, se presentan las cuatro experiencias de aprendizaje que brindaron a los estudiantes de grado tercero actividades que le permitieron razonar en relación con los conceptos de área y perímetro. Las actividades desarrolladas en esta fase se describen a continuación.

#### **3.8.3.1 Actividad uno. Comparando superficies**

Para establecer comparaciones se retoma la actividad uno “Plasmamos nuestras manos” de la fase anterior (Información). En esta actividad se les pide que plasmen la mano en la cartulina de tal forma que cubran la mayor superficie posible, esto para que los estudiantes identificaran que la posición de la mano influye en la cantidad de veces que se plasma sobre la cartulina, ya que se puede cubrir más superficie, además pueden comparar en cuál actividad se cubre más superficie, en la anterior o en la que acaban de realizar, y así acercarlos al concepto de área como la comparación entre dos superficies: la mano y la cartulina. Posteriormente responden preguntas como las siguientes: ¿Cuántas veces se plasma la mano sobre la cartulina? Si comparas esta actividad con la anterior donde también plasmaste las manos, ¿en cuál se cubre mayor superficie? ¿Por qué? (Apéndice B.2.1).

### **3.8.3.2 Actividad dos. De paseo por algunos lugares**

Se presenta esta actividad que permite identificar diferentes instrumentos de medidas para cubrir superficies o medir el contorno. Además, brinda la oportunidad al estudiante de pensar en instrumentos de medición que le sean apropiados para realizar una medida más exacta y a la vez aproximarlos al concepto de área y perímetro utilizando como instrumento de medida diferentes partes del cuerpo.

Para esta actividad la docente realizó una salida al parque con los participantes, para que observaran las partes en las que se encuentra dividido el parque, las cuales son utilizados para que realicen procesos de medición de la superficie y el contorno, utilizando unidades de medida construida por ellos, para cubrir la superficie y medir el contorno de la figura seleccionada. Después respondieron preguntas relacionadas con el trabajo realizado. Ejemplo: ¿Qué parte del cuerpo utilizaste para construir la unidad de medida para cubrir la superficie? ¿Cuántas unidades necesitas para cubrir la superficie? (Apéndice B.2.2).

### **3.8.3.3 Actividad tres. Escojo mi unidad de medida**

Esta actividad tiene como propósito identificar que la superficie de una figura plana es la región encerrada por el borde o contorno, y que se puede cubrir utilizando diferentes unidades de medida. Para esta actividad se les entregó a las participantes unidades de medida de diferentes formas y tamaños (circunferencia, cuadrados, triángulos, rectángulos, paletas, cartas, entre otros) para que ellos escogieran la unidad de medida que estimaran conveniente, y que les permitiera cubrir en su totalidad toda la superficie de la cartulina delimitada por el contorno. Seguidamente completaron preguntas como: ¿La unidad de medida que escogiste para cubrir la superficie fue? ¿Las unidades de medida que necesitaste para cubrir la superficie fueron?, entre otras (Apéndice B.2.3).

#### ***3.8.3.4 Actividad cuatro. Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo el contorno***

Al desarrollar esta actividad se espera que los estudiantes, al cubrir la superficie con cada unidad de medida, escriban: “la cartulina se cubre con tantas unidades de medida que tiene tantos centímetros de largo por tantos de ancho”. Y para el perímetro o contorno expresen la unidad de medida “A” tiene tantos cm de largo por tantos cm de ancho, y por el contorno mide tantos centímetros.

En esta actividad se entrega a los participantes una cartulina que mida 30 cm de largo por 20 cm de ancho, figuras cuadradas y rectangulares con las siguientes medidas:

Unidad de medida A: 6 cm de largo por 5 cm de ancho.

Unidad de medida B: 4 cm de largo por 3 cm de ancho.

Unidad de medida C: 1 cm de largo por 1cm de ancho.

Seguidamente toman cada unidad de medida (A, B, C) y cubren con ella toda la superficie de la cartulina, marcándola las veces que sea necesario. Después de desarrollar la actividad respondieron preguntas relacionadas con el trabajo realizado, tales como: ¿Cuánto mide por el largo la unidad de medida A?, ¿Cuánto mide por el ancho?, ¿Cuánto mide por el contorno la unidad de medida A? (Apéndice B.2.4).

A través de estas actividades se pretendía que los estudiantes reconocieran que la superficie corresponde al área de una figura o lugar y la medida del contorno corresponde al perímetro y que establecieran diferencias entre ellos.

#### **3.8.4 Actividades de la Fase 3: Explicitación**

En esta fase los participantes comparten sus ideas y experiencias con los compañeros explicando cómo han resuelto las actividades, evidenciando un vocabulario relacionado con el objeto de estudio el cual conlleva a construir de forma progresiva la red de relaciones.

En esta Fase se presentaron dos experiencias de aprendizajes, donde los estudiantes socializaron e intercambiaron ideas con otros compañeros, ellos explicaron los aprendizajes adquiridos en relación con los conceptos de superficie y el contorno de una superficie de una figura o lugar, resuelven una actividad práctica en una situación real, además respondieron interrogantes que son socializados con los demás compañeros. Las actividades desarrolladas en esta fase se describen a continuación.

#### ***3.8.4.1 Actividad uno. Explico lo aprendido***

Se presenta una actividad de la vida diaria relacionada con el contexto de los participantes. El objetivo que se tiene es que puedan explicar a sus compañeros el procedimiento que utilizan para hallar las unidades de medida necesaria para cubrir una superficie y las unidades de longitud para recorrer el borde o perímetro, al medir con una regla el largo y el ancho de la superficie y expresar la medida del contorno en centímetros.

En esta actividad se les entrega a los participantes diferentes unidades de medida de diferentes tamaños para que escogieran una, que le permita cubrir la superficie de la mesa de la profesora y establecieran las unidades de medida necesaria para cubrirla en su totalidad, además miden el largo y el ancho de la mesa para expresar la medida del contorno en centímetros. Después respondieron preguntas relacionadas con la actividad realizada. Ejemplo: ¿Cuántas unidades de medidas se necesitan para cubrir la superficie de la mesa?, Explica lo que hiciste para saber cuántas unidades de medida se necesitaron para cubrir la superficie de la mesa (Apéndice B.3.1).

#### ***3.8.4.2 Actividad dos. Cuestionario***

El desarrollo del cuestionario permitió evidenciar los aprendizajes adquiridos en la fase uno y dos, es el momento donde los estudiantes exponen verbalmente sus experiencias, explican cómo desarrollaron las actividades, utilizando un lenguaje adecuado, el cual posibilita sacar conclusiones. El cuestionario contiene preguntas relacionadas con el desarrollo de las actividades en las fases uno y dos (Información y Orientación dirigida).

Ejemplo: Cuéntame ¿qué hiciste en la primera actividad cuando plasmaste con pintura la mano sobre la cartulina?, ¿Qué materiales o elementos utilizaste en la realización de las actividades?, ¿Aprendiste algunas palabras nuevas?, ¿Cuáles? (Apéndice B.3.2).

A través de esta actividad y el cuestionario, se pretendía que los participantes explicaran a los compañeros el procedimiento que utilizaron para hallar la medida de la superficie y la longitud del contorno, y al responder cada pregunta del cuestionario evidenciaran los aprendizajes adquiridos en la fase uno y dos (Información y Orientación dirigida).

### **3.8.5 Actividades de la Fase 4: Orientación libre**

En esta fase los estudiantes ponen en práctica los conocimientos aprendidos en la fase anterior, al realizar actividades y solucionar problemas que involucraron los conceptos de área y perímetro; aquí se espera que los niños conociendo la medida de los lados de una figura o de un lugar, sean capaces de establecer estrategias para hallar el área y perímetro de figuras planas. A continuación, se presentan las actividades que conforman esta Fase.

#### ***3.8.5.1 Actividad uno. Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno***

Al desarrollar esta actividad los estudiantes identificaron como es el proceso para cubrir una superficie. En las actividades anteriores, al plasmar las manos sobre una superficie se observó que siempre quedan lugares sin cubrir, en esta actividad se utilizan las multifichas que son un instrumento que permite tapar una superficie en su totalidad, y que el número de multifichas utilizadas es el área de la superficie dada a los estudiantes.

En esta actividad se les entregó a los participantes una cartulina con las mismas dimensiones que fueron utilizadas en la actividad uno de la fase uno, se les pide que cubran la superficie de la cartulina con las multifichas, también que midan cada uno de los lados de la cartulina utilizando una regla o metro. Después respondieron preguntas relacionadas con

la actividad realizada. Ejemplo: ¿Cuántas multifichas utilizaste para cubrir la cartulina? ¿Qué hiciste para saber cuántas multifichas tiene la superficie? (Apéndice B.4.1).

A través de esta actividad, los estudiantes identificaron como ha sido el proceso para cubrir la superficie de la cartulina, en las actividades anteriores al plasmar las manos se observó que siempre quedan lugares en la cartulina sin cubrir, las multifichas son un instrumento que permiten tapar en su totalidad la cartulina, y se puede establecer una medida más precisa. Además, al medir el contorno de la cartulina con el metro o regla se puede evidenciar que a todos les da el mismo resultado.

### ***3.8.5.2 Actividad dos. Cubriendo superficies grandes***

Para esta actividad los participantes necesitaron una cinta métrica, una regla de cien centímetros y pliegos de papel periódico o cartulinas, cada uno debe medir un metro por cada lado. La cinta métrica o la regla la utilizan para medir el salón de clase por cada uno de sus lados (perímetro). Con el papel periódico o cartulina cubren la superficie del salón de clases (área). Con esta actividad los participantes pusieron en práctica los conceptos trabajados al realizar procedimientos que le permitieron hallar el área y el perímetro de un lugar muy cercano a ellos como lo es el aula de clase. Posteriormente respondieron preguntas orientadoras como: ¿Cuántos metros mide cada lado del salón? ¿Cuántos metros mide todo el borde del salón de clases? En esta actividad los participantes utilizan unidades de medida estandarizadas para realizar el proceso de medición al salón de clase, después de desarrollar la actividad respondieron las preguntas relacionadas con el trabajo realizado (Apéndice B.4.2).

### ***3.8.5.3 Actividad tres. Aprendo de mi entorno***

Con esta actividad se esperaba que los estudiantes fortalecieran los aprendizajes y el vocabulario que habían adquirido al desarrollar cada una de las actividades de las fases anteriores, es uno de los puntos que permitió consolidar la red de relaciones al solucionar diferentes problemas que involucren los conceptos de área y perímetro.

Esta actividad consiste en presentar a los estudiantes el plano de una casa, donde la superficie se encuentra cubierta por cuadrados y cada cuadrado representa 1 metro cuadrado ( $m^2$ ). Además, cada color representa una sección de la vivienda en el plano. Seguidamente se encuentran las preguntas que indagan por el área y el perímetro de diferentes lugares que representa el plano de la casa. Ejemplo: ¿Cuál es el área del piso del baño? ¿Cuánto mide el borde del pasillo? (Apéndice B.4.3).

### **3.8.6 Actividades de la Fase 5: Integración**

En esta Fase el estudiante tiene una visión general del objeto de estudio y de todas sus particularidades, el docente al realizar las actividades con ellos les brinda la oportunidad de potenciar los conceptos que ya conocen y así tener un mayor razonamiento del tema estudiado, para fortalecerlos mediante las comparaciones de elementos que ya conocen. Para evidenciar el reconocimiento por parte de los estudiantes en relación con los conceptos de área y perímetro, se implementaron las siguientes actividades.

#### ***3.8.6.1 Actividad uno. Aplicando lo aprendido***

Esta actividad tuvo como finalidad evidenciar la comprensión de los conceptos que los estudiantes han desarrollado al realizar las actividades de cada fase, al hallar el área y el perímetro de un lugar determinado permitiéndoles solucionar problemas de la vida diaria, además de representarlos mediante un dibujo.

En esta actividad se llevó a los estudiantes a un salón diferente al que midieron en la fase anterior, para que le hallaran el área y el perímetro, utilizando como unidad de medida el metro. Posteriormente, se les pidió que realizaran un dibujo que represente el salón que midieron, después realizaron un dibujo que representó el área del salón utilizando cuadrículas, donde cada cuadrícula representa un metro cuadrado ( $1 m^2$ ). Después responden preguntas como: ¿Cuántos metros mide cada lado del salón? Se encuentran en el apéndice (B.5.1).



### **3.8.5.3 Actividad dos. Soluciono problemas**

Esta actividad consta de un problema donde se representa una situación de la vida diaria, que requieran la aplicabilidad de los conceptos de área y perímetro. El problema consiste en embaldosar una habitación que mide tres metros (300 cm) de largo y tres metros de ancho, se necesita saber cuántas baldosas de 30 centímetros de lado se necesitan para cubrir la superficie de la habitación. Además, se necesita saber su perímetro para decorar a su alrededor con una cenefa. (Apéndice B.5.2).

### **3.8.6.3 Actividad tres. Encuentro el área y el perímetro**

Esta actividad permite fortalecer los aprendizajes, el lenguaje y la red de relaciones que los estudiantes han adquirido al desarrollar cada una de las actividades de las fases anteriores, que potencian la solución de diferentes problemas que involucren los conceptos de área y perímetro.

En esta actividad se presenta a los estudiantes el plano de una casa, donde la mayor parte de la superficie se encuentra cubierta por cuadrados y cada cuadrado representa un metro cuadrado ( $1 \text{ m}^2$ ), algunos cuadrados están interceptados por una línea diagonal (sólo tienen la mitad). A partir de la actividad presentada, los participantes deben responder las preguntas que indagan por el área y el perímetro de las partes de la casa como la terraza, el baño, la cocina, la habitación y la sala (Apéndice B.5.3).

## **3.9 Procesamiento y análisis de la información**

Una vez seleccionado los estudiantes comenzó el trabajo de campo y se dio inicio al proceso de análisis de la información, pues desde este momento se tienen los primeros resultados de la observación participante. De acuerdo con Stake (1999) “No existe un momento determinado en que se inicie el análisis de datos, que analizar consiste en dar sentido a las primeras impresiones, así como a los resúmenes finales” (p. 67). De esta forma, para el análisis se tuvieron en cuenta cada uno de los diferentes momentos que se

dieron durante el proceso investigativo, desde la prueba diagnóstica, hasta la última actividad de la fase cinco.

Teniendo en cuenta que en este capítulo se diseñó una matriz a priori, la cual contempla categorías, códigos y descriptores, en relación con los conceptos de área y perímetro, para cada una de las fases del Modelo de van Hiele, esta se tomó como herramienta para triangular la observación realizada por la docente investigadora, con las producciones de los participantes recogidas mediante instrumentos como; entrevistas, filmaciones, encuestas y demás documentos escritos, donde se recoge y analiza los procesos de razonamiento, de cada uno de los participantes con respecto a los conceptos abordados. Todo esto se conjuga con la literatura consultada, dando como resultado un análisis a profundidad a partir de las categorías en cada una de las Fases del Modelo de van Hiele.

Al finalizar el análisis de la fase cinco se presenta una matriz donde se muestra el avance de las categorías en cada una de las fases de los participantes, la cual permitió dar respuesta a la pregunta de investigación y a los objetivos planteados.

### 3.10 Cronograma

Este proceso tuvo su inicio en marzo de 2018. En la siguiente tabla se muestran las actividades que se llevaron a cabo a lo largo de la investigación.

**Tabla 9.** *Cronograma de actividades.*

N.º	DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD	SEMESTRE			
		1	2	3	4
1	Revisión de la literatura relacionada con la temática.	X	X	X	X
2	Diseño de instrumentos de recolección de la información.		X		
3	Diseño metodológico.	X	X		
4	Aplicación de los instrumentos de recolección de la información.		X	X	

5	Sistematización de la información.	X	X	X	X
6	Análisis y triangulación de la información.			X	X
7	Elaboración de informes y conclusiones.				X
8	Redacción del trabajo de investigación.		X	X	X

Con la realización de las actividades planeadas en el cronograma, se da cumplimiento a los objetivos propuestos, los cuales contribuyeron a dar respuesta a la pregunta de investigación.

### 3.11 Resultados esperados

En el momento de iniciar un proceso investigativo no se tiene certeza a donde se va a llegar y que resultados se van a generar a partir de las fases desarrolladas durante el proyecto, sin embargo, como investigador si se tienen algunas expectativas de lo que se puede lograr, es por ello que se habla de posibles resultados esperados, partiendo de esta premisa de expectativa, es que se espera, que la presente investigación contribuya al razonamiento de los conceptos de área y de perímetro de figuras planas, en estudiantes de grados tercero de la Educación Básica Primaria. A continuación, se presenta los principales logros que se espera que los estudiantes pueden alcanzar en el presente estudio:

- Razonen en la aplicación de los conceptos de área y perímetro de figuras planas que se encuentran en su entorno: aula de clase, colegio, lugar de vivienda, entre otros.
- Fortalezcan los aprendizajes relacionados con el componente geométrico, y puedan relacionarlo con las prácticas cotidianas y académicas.
- Utilicen el lenguaje del componente geométrico, como: medida, figuras, plana, perímetro, área, superficie, entre otras.
- Resuelvan problemas de la vida diaria relacionados con los conceptos de área y perímetro, tales como: “En la casa de Andrés se necesita embaldosar la habitación

de él, ésta mide tres metros de largo y tres de anchos. Andrés necesita la ayuda de los compañeros para saber cuántas baldosas de 30 centímetros de lado se necesitan para cubrir la superficie de la habitación. Además, se requiere saber su perímetro, porque su madre desea decorar a su alrededor con una cenefa”.

En consecuencia, las actividades del proceso investigativo están desarrolladas con la finalidad que se puedan lograr al menos las expectativas anteriores, sin embargo, se es consciente que durante el proceso de estudio se puedan presentar algunas situaciones que fortalezcan los posibles resultados esperados y quizás no se hayan dilucidado desde un comienzo, los cuales pueden ser considerados como hallazgos, son precisamente estos aspectos que enriquecen la investigación, también puede suceder lo contrario y encontrarse son situaciones que de alguna manera dificulten el normal desarrollo de las actividades o los participantes no respondan de acuerdo a lo esperado, todo esto hace parte del proceso investigativo, es por ello que el investigador debe estar presto a encontrarse con situaciones no esperadas.

## Capítulo IV: Resultados y análisis

En este Capítulo, se presentan los resultados de las diferentes actividades que se desarrollaron en el trabajo de campo y el análisis de la información obtenida en cada una de ellas, a partir de las interacciones con los estudiantes involucrados en el proceso investigativo. Inicialmente se presenta la actividad diagnóstica, donde se identifican los conocimientos previos que tienen los estudiantes acerca de los conceptos de área y perímetro, lo que permitió establecer el lenguaje inicial que tienen los estudiantes para expresar sus conocimientos previos en relación con los conceptos de área y perímetro de una figura plana. La actividad diagnóstica fue el punto de partida, para el diseño, implementación, reformulación de los instrumentos de recolección de la información que se presentan en el Apéndice (A) y son la base para analizar el progreso de los estudiantes, en relación con las Fases de Aprendizaje del modelo de van Hiele, en relación con su desempeño en la elaboración y comprensión de los conceptos de área y perímetro de una región plana.

En el apartado metodológico se diseñó una matriz a priori, la cual contempla categorías, códigos y descriptores, para cada una de las Fases del Modelo de van Hiele. Esta es una de las herramientas que se tienen en cuenta para el análisis de los diferentes instrumentos de recolección de la información, como fueron: test, entrevistas semiestructuradas, vídeos, exposiciones, entre otros, de las actividades de los estudiantes participantes en el grupo de investigación. La matriz de categorías fue construida a priori, pero a lo largo de la investigación y a medida que se desarrollaba el trabajo de campo, fueron emergiendo otras categorías o, en nuestro caso, algunas de ellas se integraron, como resultado del proceso de aprendizaje de los estudiantes durante el avance en cada una de las Fases de aprendizaje del modelo.

Para analizar la información, se parte de la matriz de descriptores, diseñada para cada una de las Fases. Esta contempla categorías, cada una tiene asociado un código y un descriptor. En este sentido las categorías se refieren a “los diferentes valores, alternativas, es la forma de clasificar conceptuar o codificar un término o expresión de forma clara que no se preste para confusiones” (Chávez, 2005, p. 1).

Las actividades fueron diseñadas para cada una de las Fases, teniendo en cuenta las características dadas para cada una de ellas, acorde con el modelo de van Hiele. De esta forma se analizan las actividades desarrolladas por los estudiantes, a la luz de los descriptores propuestos en la matriz, triangulando así, la observación, los documentos escritos, los vídeos y la teoría consultada. Esto se hace con cada uno de los participantes en cada una de las Fases y, de esta forma, documentando los avances o dificultades de los participantes en el proceso investigativo. Al final de cada Fase se presenta una matriz donde se muestra el avance de los participantes y las actividades específicas que evidencian el razonamiento acerca de los conceptos de área y perímetro.

Por último, se muestra la matriz refinada con las categorías y descriptores por Fase, teniendo en cuenta el trabajo realizado por los participantes.

#### **4.1 Actividad diagnóstica**

A continuación, se presenta la información obtenida a partir de la actividad diagnóstica, la cual se diseñó con el propósito de identificar los conocimientos previos que tenían los participantes en relación con los conceptos de área y perímetro (Apéndice A). La actividad se realizó a través de preguntas consecutivas donde el participante podía conocer la siguiente pregunta cuando daba solución a la anterior, proporcionándole suficiente tiempo para cada respuesta.

A continuación, en la Tabla 10, se presenta las respuestas de los participantes en relación con los conocimientos previos del concepto de área.

**Tabla 10.** *Exploración del concepto de área.*

N°	Exploración del concepto de superficie	Participantes	Respuestas
1	Una superficie es:	David	<i>Es aquello que se puede tocar y es plano</i>
		Rosa	<i>Algo como un agujero que no tiene fin o fondo</i>
		Nataly	<i>Algo que no tiene fin</i>
2	Una superficie se puede medir con:	David	<i>Se puede medir con un lápiz, sacapuntas entre otro</i>
		Rosa	<i>Un cuaderno, un lápiz, un lapicero, un borrador, un libro</i>
		Nataly	<i>La mano, el lápiz, una tapa, regla, sacapunta y un cuaderno</i>
3	Las veces que sobrepuse el objeto en la cartulina fueron:	David	<i>154 veces sobrepuse el borrador sobre la cartulina</i>
		Rosa	<i>46 veces</i>
		Nataly	<i>276 veces el sacapunta</i>
4	De los elementos que traes en tu bolso, el que te permite cubrir la mayor parte de la cartulina es:	David	<i>Es el mismo que escogí para sobreponerlo en la cartulina, fue un borrador muy pequeño</i>
		Rosa	<i>El cuaderno</i>
		Nataly	<i>El cuaderno, la cartuchera y muchos lapiceros</i>
5	Para cubrir totalmente la cartulina los objetos más adecuados que tengo son: Por qué:	David	<i>El borrador pequeño, el borrador grande y un sacapunta, porque son unos de los objetos que escogí y medí</i>
		Rosa	<i>Un cuaderno, una Biblia, un papelito y una cartuchera, porque son útiles que me cubrieron toda la cartulina</i>
		Nataly	<i>Un libro y un cuaderno, porque son grandes y pueden cubrir más espacio</i>
		David	<i>No respondió este literal</i>

6	Una manera de comparar dos figuras planas es:	Rosa	<i>No respondió este literal</i>
		Nataly	<i>Midiéndolas</i>
7	Otra forma de cubrir la cartulina es:	David	<i>Usando un objeto cuya forma sea igual a la de la cartulina y mida lo mismo</i>
		Rosa	<i>Con libros</i>
		Nataly	<i>Marcando con el marcador varias veces</i>

La Tabla 10 muestra las apreciaciones de los participantes, en torno a la exploración del concepto de superficie. En el literal 1, los participantes expusieron lo que para ellos significa el concepto de superficie, se puede notar que David, al responder: *Es aquello que se puede tocar y es plano*, da a entender que posee conocimientos previos en relación a la definición del concepto de superficie, al asociarlo a algo físico que se puede tocar y es plano, este argumento se encuentra relacionado al reconocimiento de regiones planas. En cambio, Rosa respondió: *Algo como un agujero que no tiene fin o fondo* y Nataly respondió: *Algo que no tiene fin*, lo expuesto por las participantes en sus definiciones da a entender que el concepto de superficie es infinito, al manifestar que es algo que no tiene fin.

En el segundo literal se indagó por los elementos con los cuales se puede medir una superficie, y los tres participantes expusieron objetos cercanos a ellos, los cuales hacen parte de los útiles escolares que usan a diario. Por otro lado, es importante resaltar que todos relacionaron objetos con partes planas como “borrador”, “cuaderno”, “libro” y solo Nataly escribió partes del cuerpo como *la mano*. Partes de estos elementos, efectivamente, pueden servir para cubrir una superficie y, realizar un proceso de medición con unidades de medida no estandarizadas.

En el literal 3, de la Tabla 10, los participantes utilizaron una cartulina, que se les suministró con anterioridad. Sobre ella debían sobreponer el objeto más pequeño que tuvieran en su mochila, hasta cubrirla en su totalidad. Al sobreponer el objeto en la superficie de la cartulina se establece un contacto directo con el material, el cual le permitió realizar un conteo de forma verbal y detallado de cuantas veces este objeto se sobrepuso en la cartulina, se puede observar cómo escogieron elementos pequeños para sobreponerlos,



tales como: borrador y sacapunta (tajalápiz). Durante el procedimiento se observó que algunos participantes fueron muy cuidadosos al marcar el elemento seleccionado en la superficie de la cartulina, de tal manera que quedara el mínimo espacio entre ellos, es decir, tratar de cubrir la superficie al máximo, como fue el caso de Nataly, quien además se dio a la tarea de enumerar cada una de las veces que marcó el objeto en toda la superficie, algo que no se le pidió, sin embargo, se puede decir que por intuición se asume que al ser una medida se debe contar las veces que superpuso el objeto en la cartulina, a diferencia de los otros compañeros que colocaron el objeto un poco más separado dejando un espacio considerable entre una y otra marca.



*Ilustración 8.* Cubriendo el trozo de cartulina dada con objetos pequeños.

En este sentido se puede deducir que la medida aproximada de la superficie del trozo de la cartulina dada corresponde a la cantidad de veces que cada participante sobrepuso el objeto en la superficie, el cual es diferente en cada caso, puesto que depende del tamaño del objeto y la distancia al sobreponerlo en la superficie de la cartulina. Al respecto el MEN (2012), plantea “La medida de una superficie se llama área. Corresponde a la cantidad de unidades que se necesitan para cubrirla totalmente” (p.128). En este sentido la cantidad de veces que sobrepone el objeto seleccionado para cubrir la superficie se convierte en la medida aproximada (hay espacios entre las marcas), teniendo en cuenta que es una medida no estandarizada.

En relación con el literal 4, David escogió un borrador pequeño, que no es precisamente un objeto de gran tamaño, con el que se puede cubrir gran parte de la superficie, y para que

justificara su respuesta se le preguntó: ¿Por qué escogiste un borrador pequeño? Él respondió: *porque con el borrador pude cubrir todo*. Lo manifestado por el participante da a entender que no se necesitan objetos grandes, sino uno que al marcarlo pueda ir cubriendo toda la superficie sin que sobre nada. Por otro lado, Rosa y Nataly mencionan varios elementos tales como: el cuaderno, cartuchera, los cuales pueden ser objetos que pueden cubrir mayor parte de la superficie de la cartulina. La Ilustración 9 muestra el trabajo realizado por los participantes.



*Ilustración 9. Marcando objetos grandes sobre el trozo de cartulina proporcionada.*

En la Ilustración 9, se observa que los participantes usaron elementos de mayor tamaño. En forma ordenada fueron marcando, comenzando por una de las esquinas de la superficie del trozo de la cartulina, lo que genera la idea de que al medir una superficie se debe iniciar por una de las esquinas, por lo que se convierte en una forma de razonar al medir una superficie.

En el literal 5, se indagó por los objetos más adecuados que tiene para cubrir totalmente un trozo de cartulina. Durante el proceso se observó incomodidad por parte de los participantes al justificar por qué son los elementos más adecuados. David, respondió: *El borrador pequeño, el borrador grande y un sacapuntas, porque son unos de los objetos que escogí y medí*. Rosa por su parte expone: *Un cuaderno, una Biblia, un papelito y una cartuchera, porque son útiles que me cubrieron toda la cartulina*, justificando que le permiten cubrir toda la superficie y Nataly respondió: *Un libro y un cuaderno, porque son grandes y pueden cubrir más espacio*. De lo expuesto por los participantes se puede analizar que expusieron sus respuestas basados en la actividad que desarrollaron al

sobreponer diferentes objetos, de su uso diario, en la superficie de la cartulina, este procedimiento les permitió que identificaran objetos adecuados para cubrir totalmente una superficie de diferentes maneras.

En el literal 6, se indagó por la manera de comparar dos figuras planas, pero sólo Nataly respondió: *midiéndolas*, para indagar un poco más, la docente preguntó: ¿midiéndolas cómo? Nataly respondió: *por alguna parte* (registro en audio 12 – 08 - 2019), argumento que generó poca claridad por parte de la participante, en lo referente a la forma de comparar dos figuras. Los demás participantes dejaron el espacio en blanco, por lo que se puede pensar inseguridad al momento de exponer sus ideas.

Con el propósito de seguir explorando el reconocimiento de la superficie, en el siguiente literal se indaga por otra forma de cubrir la cartulina. Respecto a las respuestas de los participantes se puede notar que identifican objetos planos, que son adecuados para cubrir una superficie sin tener en cuenta la forma. David, por su parte hizo una relación en la que el objeto debe tener unas características en cuanto a la forma, la cual debe ser igual a la cartulina o que tenga las mismas medidas.

Por lo anterior, es importante mencionar que en la medida en que avanzaba el desarrollo de la actividad se pudo observar que los conocimientos previos van cobrando relevancia, ya que los estudiantes establecieron relaciones para dar solución a unos interrogantes que buscaban aproximarlos al concepto que se desea trabajar. En este sentido van Hiele, manifiesta que los conocimientos previos son de gran importancia para iniciar un trabajo matemático (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 36). En este sentido, estos conocimientos se convirtieron en insumos que se tuvieron en cuenta como fuente de motivación para el estudio del tema.

A continuación, se presenta la Tabla 11 con las preguntas y respuestas de los participantes, en relación con el concepto de perímetro.

**Tabla 11.** *Exploración del concepto de perímetro.*

N°	Exploración del concepto de perímetro	Participantes	Respuestas
1	El perímetro es:	David	<i>Es aquello como la orilla de un objeto</i>
		Rosa	<i>Yo creo que es una figura moldeada</i>
		Nataly	<i>Algo con lo que podemos medir algunos objetos</i>
2	El perímetro de una figura se puede medir con:	David	<i>Lápiz, sacapunta, borrador, un palito, palo de paleta, entre otros.</i>
		Rosa	<i>Una Biblia, un borrador y con otros instrumentos</i>
		Nataly	<i>Unas figuras, la regla, el pie, la mano y los colores</i>
3	Las veces que marcaste el objeto en el contorno de la cartulina fueron:	David	<i>77 veces sobrepuse el objeto por el borde de la cartulina</i>
		Rosa	<i>36 veces con el borrador</i>
		Nataly	<i>40 veces con el sacapunta</i>
4	De los elementos que traes en tu bolso, el que te permite recorrer el borde de la cartulina sin que sobre nada es:	David	<i>Un lápiz de color</i>
		Rosa	<i>Con el borrador y con la Biblia</i>
		Nataly	<i>La regla</i>
5	Para recorrer el contorno de la cartulina los objetos más adecuados que tengo son: Por qué:	David	<i>Un color naranja y un borrador pequeño, porque ya yo los medí y son los más adecuados</i>
		Rosa	<i>La cartuchera y la Biblia, porque me cubrieron toda la cartulina</i>
		Nataly	<i>Unos lápices y un cuaderno, porque son objetos que se pueden medir en el borde de la cartulina</i>

Nº	Exploración del concepto de perímetro	Participantes	Respuestas
6	Una manera de comparar el contorno de dos objetos es:	David	<i>Cuando medimos algo para saber cual está más grande</i>
		Rosa	<i>Midiéndolos</i>
		Nataly	<i>Midiéndolos</i>
7	Otra forma de recorrer el borde de la cartulina es:	David	<i>Usando una regla, marcador, lápiz, lapicero, marcadores entre otros</i>
		Rosa	<i>Con una regla</i>
		Nataly	<i>Con los colores, el borrador y los marcadores</i>

En la Tabla 11 se presentan las preguntas de la actividad diagnóstica relacionadas con el concepto de perímetro, y las respuestas dadas por los participantes del proceso investigativo. En el literal 1, donde se indaga por el perímetro, se puede observar que David respondió: *Es aquello como la orilla de un objeto*, Rosa respondió: *Yo creo que es una figura moldeada*, Nataly por su parte respondió: *Algo con lo que podemos medir algunos objetos*. Estos argumentos dan a entender que los participantes en el transcurso de su proceso de formación han tenido pocas experiencias de aprendizajes relacionadas con el concepto de perímetro, además se evidenció en los participantes inseguridad al momento de completar el literal que hace referencia al perímetro, David por su parte fue el primero en responder, mientras que Rosa y Nataly tardaron más tiempo.

En el literal 2, se indaga por los elementos con los que se puede medir el perímetro de una figura. David por su parte respondió: *Lápiz, sacapunta, borrador, un palito, palo de paleta entre otros*, Rosa: *Una Biblia, un borrador y con otros instrumentos* y Nataly: *Unas figuras, la regla, el pie, la mano y los colores*. Por lo anterior se evidencia que los participantes mencionan diferentes objetos de su uso diario con los cuales es posible medir el perímetro de una figura, pero no mencionan una medida estandarizada con la que puedan medir de forma más exacta el perímetro, sin embargo, al mencionar lápiz y colores dan idea

de que esta medida es diferente a la del área, donde mencionaron objetos con partes planas como cuaderno y borradores.

En consecuencia, es evidente la necesidad de llevar a cabo estrategias que permitan que los estudiantes identifiquen unidades de medida estandarizadas y no estandarizadas, con las que se pueda realizar el proceso de medición al aplicarlos en situaciones del entorno.

En el literal 3, en la exploración del concepto de perímetro, se indicó a los participantes lo siguiente: observa la cartulina suministrada por la profesora, ahora busca en tu mochila el objeto más pequeño que tengas. Recorre el contorno de la cartulina con el objeto, marcándolo hasta bordearla totalmente, seguidamente completaron: las veces que marcaste el objeto en el contorno de la cartulina fueron: David respondió: *77 veces sobrepuse el objeto por el borde la cartulina*, este participante escogió un lápiz pequeño, que por ser un objeto alargado lo relacionó con la longitud en relación al contorno de la cartulina, Rosa por su parte respondió: *36 veces con el borrador*, este objeto posee características que guarda mayor relación con la superficie. A este literal Nataly respondió: *40 veces con el sacapunta*. Lo expuesto por los participantes se encuentra en relación con las instrucciones dadas al momento de realizar la actividad, aspecto que dejó ver tranquilidad en los participantes al momento de responder los demás literales puesto que cada literal los iban desarrollando de forma progresiva mientras que realizaban la actividad.

En el siguiente literal se indaga por los elementos que traen en el bolso, el que le permitió recorrer el borde de la cartulina sin que sobre nada. A este literal, David respondió: *Un lápiz de color*, Rosa: *Con el borrador y con la Biblia* y Nataly: *La regla*. Cada participante respondió de acuerdo con el elemento utilizado para realizar el procedimiento, atendiendo a las instrucciones dadas. Durante el proceso se observó organización al momento de marcar el objeto seleccionado por el contorno de la cartulina.

En el literal 5, se indagó por el elemento más adecuado que tienen para recorrer el contorno de la cartulina, y deben justificar por qué. David por su parte respondió: *Un color naranja y un borrador pequeño, porque ya yo los medí y son los más adecuados*, este

participante después de sobreponer diferentes objetos de los que llevaban en su bolso, por el contorno de la cartulina, escoge los que consideró como los más adecuados para recorrer el contorno, y lo justifica basado en el proceso de medición realizado al sobreponer los objetos por el contorno. Rosa por su parte respondió: *La cartuchera y la Biblia, porque me cubrieron toda la cartulina*, la respuesta de la participante está orientada al cubrimiento de la superficie, olvidando que se había indagado en relación con el contorno de la cartulina. Nataly respondió: *Unos lápices y un cuaderno, porque son objetos que se pueden medir en el borde de la cartulina*, explica que son objetos con los que se puede medir el contorno de la cartulina. A continuación, en la Ilustración 10 se muestran los procesos realizados por los participantes.



*Ilustración 10.* Marcando elementos para medir el contorno.

Los elementos utilizados por los participantes fueron tomados de los que llevaban en su bolso, los cuales son cercanos a ellos y de su uso diario, por su parte, Rosa y Nataly, utilizaron cuadernos, poniéndolos de forma plana para medir el contorno, esta forma de colocarlos generó confusión, por lo que se encuentra en relación con el proceso realizado al sobreponer el cuaderno en la superficie. Por lo anterior, se puede decir que David y Nataly respondieron de forma coherente, ya que la pregunta hacía referencia a “los objetos más adecuados que tengo” y ellos escogieron elementos de los que tenían a su lado en ese momento.

En el siguiente literal se indagó por la manera de comparar el contorno de dos objetos, al responder este ítem se observó que los participantes dialogaron en relación a la palabra “comparar”, David, expresó: *cuando medimos algo para saber cuál está más grande*, dando a entender que, para comparar dos o más objetos, se debe realizar un proceso de

medición para establecer diferencias entre ellos. En este sentido, los demás participantes Rosa y Nataly guiados por la expresión de David, respondieron: *Midiéndolos*.

Siguiendo la secuencia de las preguntas, se indagó por otra forma de recorrer el borde de la cartulina, a este literal David respondió: *Usando una regla, marcador, lápiz, lapicero, marcadores, entre otros*. Rosa respondió: *Con una regla* y Nataly: *Con los colores, el borrador y los marcadores*. Lo expuesto por los participantes da a entender que identifican diversos objetos que son cercanos a ellos para demarcar y recorrer el contorno de una cartulina, siguiendo las indicaciones dadas en el documento guía, pero, se limitan a los objetos que encuentran en su bolso sin pensar que hay otros objetos que pueden permitir otras formas de recorrer el borde de la cartulina.

Lo expuesto por los participantes en la actividad diagnóstica indica que de cierta forma poseen conocimientos previos acerca de los conceptos de área y perímetro, el cual se evidencia al definirlo en la actividad diagnóstica (Tabla 8, Literal 1 y Tabla 9, Literal 1). En los demás literales los participantes respondieron conforme al procedimiento realizado por cada uno de ellos, siguiendo las indicaciones dadas en el documento guía.

Es importante mencionar que para la aplicación de la actividad diagnóstica y las actividades en las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele se realizaron diversas pruebas al estudiante, las mismas que permitieron ir refinando cada literal en la medida que los estudiantes las desarrollaban.

Por otro lado, en lo relacionado con la red de relaciones y el lenguaje, se pudo reconocer que los participantes no han construido una red de relaciones a cerca de los conceptos de área y perímetro que les permita integrarlos y reconocerlos como diferentes de acuerdo con su forma de medirlos, puesto que hicieron mención de los objetos con los que se puede cubrir una cartulina y recorrer su contorno, siguiendo las indicaciones dadas en la situación expuesta, limitándose a mencionar los objetos que cargaban en su bolso que utilizaron durante la actividad, aspectos que evidenciaron un lenguaje limitado en torno a los conceptos.



Por lo anterior, se deja en evidencia la necesidad de implementar estrategias que conlleven a que los estudiantes razonen acerca de los conceptos de área y perímetro, y para esta investigación se establecieron experiencias de aprendizaje diferenciados para los procesos de enseñanza a partir de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele. A continuación, se presenta la Tabla 12 que muestra aspectos relacionados con el lenguaje utilizado por los participantes en la actividad diagnóstica, y después se presenta el análisis de las actividades en cada una de las Fases del Modelo de van Hiele.

**Tabla 12.** Lenguaje utilizado por los participantes en la actividad diagnóstica

Participante	Lenguaje con relación al concepto de superficie y su medida el área	Lenguaje con relación al concepto de contorno y su medida el perímetro
David	Al referirse a la superficie, la definió como: <i>algo que se puede tocar y es plano</i> . Para cubrir una superficie relacionó objetos como: lápiz, sacapuntas (tajalápiz).	Relacionó el perímetro como: <i>la orilla de un objeto</i> . Para recorrer el contorno de la superficie expuso elementos como: lápiz, sacapuntas, palito, palo de paleta, borrador.
Rosa	Al referirse a la superficie, la definió como: <i>un agujero y que no tiene fin o fondo</i> . Para cubrir una superficie relacionó elementos como: cuaderno, lápiz, lapicero, borrador, libro.	Definió el perímetro como: <i>una figura moldeada</i> . Para recorrer el contorno mencionó elementos como: una biblia, borrador y con otros instrumentos.
Nataly	Al referirse a la superficie, manifestó que, <i>es algo que no tiene fin</i> . Para cubrir una superficie relacionó elementos como: cuaderno, cartuchera, lapicero.	En relación con el perímetro expresó, <i>es algo con lo que podemos medir algunos objetos</i> . Para recorrer el contorno mencionó elementos como: lápices y cuadernos.

### **4.1.1 Análisis del lenguaje**

En la Tabla 12 se presenta el lenguaje utilizado por los participantes que se relaciona con los conceptos de superficie y contorno y sus respectivas medidas como son el área y el perímetro, manifestaciones que fueron expuestas de forma escrita. A partir de la exploración de los conceptos en mención, durante el proceso se observó que los participantes se limitaron a responder las preguntas con monosílabos y no hicieron ninguna relación entre los conceptos de superficie y contorno con sus respectivas medidas.

### **4.1.2 Red de relaciones**

Son pocos los elementos que se pueden observar en cuanto a la red de relaciones, puesto que, en sus respuestas, algunos argumentos se encuentran aislados o guardan poca relación con los conceptos de área y perímetro. En la actividad diagnóstica se identificó que falta construir la red de relaciones en torno a los conceptos en mención. Es decir, los estudiantes deben relacionar la superficie con su medida el área, el borde u orilla de una superficie con el perímetro. Además, deben comprender que cada región o superficie se puede medir con diferentes unidades de medida, lo mismo que el borde u orilla.

## **4.2 Análisis de la información**

### **4.2.1 Fase 1: Información**

En esta Fase se presenta a los estudiantes los materiales que se van a utilizar, tales como; pinturas, cartulina, papel bond, además, se utilizan partes del cuerpo como instrumento de medida, las manos, dedos y la cuarta, que es una medida donde se utilizan los extremos de los dedos de la mano (el meñique y el pulgar), los cuales permiten la exploración de los saberes previos; como el reconocimiento de números, distancias, superficie, lugares y objetos del entorno que se pueden medir. Esto con el fin de acercar los estudiantes a los conceptos que se abordan en el desarrollo del proyecto.

#### 4.2.1.1 Categoría 1: Cubrir, sobreponer, plasmar

Esta categoría incluye aportes donde los estudiantes empiezan a visualizar como se cubre la superficie de una cartulina utilizando partes del cuerpo (mano, dedo de la mano) como unidad de medida.

##### 4.2.1.1.1 Descriptor

- *Reconoce que una superficie se puede cubrir con diferentes objetos o partes del cuerpo de mayor o menor tamaño.*

Al implementar la actividad “Plasmamos nuestras manos” los participantes realizaron un reconocimiento del material, donde cada uno plasmó la mano y después el dedo, en la superficie de la cartulina, como se puede observar en la Ilustración 11.



*Ilustración 11.* Estudiantes plasmando la mano y el dedo sobre una superficie.

Los tres participantes plasmaron la mano de forma secuencial en la superficie, dejando los dedos y la mano separada una de la otra, al plasmar el dedo lo realizaron empezando por la parte superior y después en la parte inferior de la cartulina y de esa forma cubrieron toda la superficie. De acuerdo al trabajo realizado los participantes establecieron un contacto directo con el material al plasmar la mano en la superficie de la cartulina utilizando partes del cuerpo, iniciando un proceso de reconocimiento de la superficie y el material, lo que permite formar los conocimientos básicos en torno al concepto de superficie, en este sentido el procedimiento realizado está en relación con las características de la Fase uno del Modelo de van Hiele.

Después de realizar la actividad, los participantes respondieron preguntas relacionadas con el trabajo realizado, donde se confirmó el descriptor relacionado con esta categoría. El siguiente enunciado indaga sobre qué elemento se puede utilizar para cubrir totalmente la cartulina, los estudiantes respondieron de forma acertada debido a que escogieron elementos relacionados con la forma de la cartulina como se puede observar en las imágenes.

f. Otro elemento que utilizarías para cubrir totalmente la cartulina es: algo igual  
de grande que la cartulina

*Ilustración 12.* Respuesta de David.

f. Otro elemento que utilizarías para cubrir totalmente la cartulina es: el  
cuaderno

*Ilustración 13.* Respuesta de Rosa.

Se puede inferir que los participantes asocian la superficie de la cartulina con elementos planos que son cercanos a ellos, como el cuaderno o una cartulina, que le permiten cubrir la mayor parte de la superficie.

La anterior inferencia es comprobada a partir de la observación durante el proceso, cuando los participantes expusieron elementos que podrían utilizar para cubrir la superficie de la cartulina, debido a que estos elementos por ser planos poseen características similares a la superficie. En este sentido, esta actividad permitió que los participantes reconocieran una superficie al plasmar en ella partes del cuerpo y al relacionar objetos con los que se puede cubrir.

Por lo tanto, según los planteamientos de van Hiele en relación con la Fase uno (Información), se reconoce que los conocimientos básicos son de gran importancia para el inicio del trabajo matemático y geométrico con respecto al área y al perímetro, permitiendo dar cuenta del inicio de la red de relaciones al asociar elementos planos relacionados con la

superficie. También se entiende que los participantes han logrado el reconocimiento de una superficie, mediante acciones como: cubrir, plasmar, sobreponer, las cuales se encuentran en relación con esta categoría.

#### **4.2.1.2 Categoría 2: Superficie**

Esta categoría se relaciona con el reconocimiento de superficies planas donde los estudiantes identificaron la parte externa de un objeto, figura o lugar, como mesa, paredes pisos, entre otros, al cubrirlas con objetos, plasmar la mano o caminar sobre ellas, lo que permitió el reconocimiento de la superficie con la que se estaba trabajando.

##### *4.2.1.2.1 Descriptor*

- *Sobrepone una superficie con un objeto plano, cuenta el número de veces que lo realiza.*
- *Estima las veces que se puede sobreponer un objeto en una superficie de acuerdo con su tamaño.*

En la actividad uno “Plasmemos nuestras manos” (Apéndice B.1.1), los participantes al sobreponer la mano en una superficie de la cartulina realizaron un reconocimiento y conteo de las veces que sobrepusieron un objeto plano, el cual los aproxima al concepto de área. Seguidamente, se observan las acciones de los participantes al responder las preguntas que guardan relación con la categoría de “superficie” y el descriptor.

- a. Las veces que plasmé la mano sobre la cartulina fueron: 4 veces

*Ilustración 14. Respuesta de David.*

- a. Las veces que plasmé la mano sobre la cartulina fueron: 6 veces

*Ilustración 15. Respuesta de Rosa.*

En este literal los participantes de forma sencilla establecieron las veces que plasmaron la mano en la superficie de la cartulina, unos la plasmaron más veces que otros, debido a que la colocaron más separadas, esto también se relaciona con la medida de la superficie y con el tamaño de la mano de cada participante.

De igual forma en el literal (b) se les preguntó que si se plasmaba la mano de una persona adulta cuántas veces estaría y por qué, los participantes respondieron de forma coherente, dando a entender que se plasmaría menos veces, porque la mano de un adulto es más grande, como se observa en las Ilustraciones 16 y 17.

b. Si se plasma la mano de una persona adulta estaría: 3 veces  
Porqué la mano adulta es mas grande

*Ilustración 16.* Respuesta de David.

b. Si se plasma la mano de una persona adulta estaría: no creo que 4 veces  
Porqué la mano de un adulto es más grande

*Ilustración 17.* Respuesta de Rosa.

En este sentido los participantes estimaron las veces que una persona adulta podría plasmar las manos en la superficie de la cartulina y lo justifican con argumentos válidos. En el siguiente literal se ilustra el reconocimiento de la superficie mediante el conteo realizado por los participantes y la estimación que realizan si plasmaran la mano en la superficie de otra forma. A continuación, se presenta lo que respondieron los participantes.

c. Las veces que se podría plasmar la mano sobre la cartulina si se coloca de otra forma sería: 7 veces porqué la pongo mas cerrada y cabe mas veces

*Ilustración 18.* Respuesta de David.

c. Las veces que se podría plasmar la mano sobre la cartulina si se coloca de otra forma sería: 7 veces porque la plasmamos de otra forma.

*Ilustración 19. Respuesta de Rosa.*

Los estudiantes respondieron de forma coherente, al escribir que “estaría más veces porque la ponen más cerrada (o cercana) o la plasman de otra forma”, se puede evidenciar que observaron cuidadosamente la forma como plasmaron la mano en la cartulina y que la superficie no fue cubierta en su totalidad, lo que les permitió visualizar que por plasmar la mano y los dedos separados quedan partes sin cubrir, y al plasmar la mano de otras maneras y más unidas es posible marcarla más veces.

Las respuestas a las preguntas realizadas en esta Fase (Información), se observa que los participantes hacen relaciones al referirse a la cantidad de veces que plasman la mano en la superficie, lo que permite reconocer aspectos de la categoría de medida de una superficie.

#### ***4.2.1.3 Categoría 3: Área y medida de superficie***

En esta categoría se tienen en cuenta aspectos que hacen evidente la forma como los estudiantes determinan la medida de una superficie, al utilizar como unidad de medida las partes del cuerpo (palma de la mano, dedo) y unidades estandarizadas (metro, regla). “Es importante que midan correctamente longitudes, áreas, volúmenes, entre otros; es decir que ejecuten tareas matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas” (MEN, 1998, p. 81).

##### *4.2.1.3.1 Descriptor*

- *Establece la medida de una superficie utilizando como unidad de medida las partes del cuerpo.*

Al desarrollar la actividad “Plasmemos nuestras manos” (Apéndice B.1.1), la cual consistió en que los participantes plasmaran la mano y el dedo con pintura en la superficie de un trozo de cartulina. Cada participante plasmó la mano y el dedo de la mano a su manera en la superficie de la cartulina, a partir de allí realizaron un conteo de las veces que plasmaron la mano y el dedo de la mano en la superficie y a cada uno le dio un resultado diferente, puesto que unos plasmaron la mano más cerca o con los dedos separados.

En la Ilustración 20 se puede observar el procedimiento realizado por un participante.



*Ilustración 20.* Nataly plasma el dedo sobre la cartulina.

En esta actividad práctica se pudo observar que los participantes plasmaron la mano y el dedo en la superficie de la cartulina, sin tener en cuenta que quedaron muchas partes sin cubrir. En las Ilustraciones 21 y 22 se observa lo que respondieron los participantes en relación a las veces que plasmaron el dedo en la superficie.

d. Las veces que plasmé el dedo sobre la cartulina fueron: 53 veces

*Ilustración 21.* Respuesta de David.

d. Las veces que plasmé el dedo sobre la cartulina fueron: 55 veces

*Ilustración 22.* Respuesta de Nataly.



Se observó que los resultados de cada participante son diferentes porque algunos plasmaron el dedo más cerca, otros dejaron más espacio (partes sin plasmar el dedo). Es importante mencionar que los participantes plasmaron el mismo dedo (pulgar) en la superficie, el cual tenía el mismo tamaño. En el siguiente literal se indagó sobre las veces que se plasmaría el dedo de una persona adulta, y los estudiantes respondieron de acuerdo con su experiencia, en el sentido que se plasmaría menos veces, debido a que el dedo de una persona adulta es más grande.

e. Si se plasma el dedo de una persona adulta estaría: 32 veces  
 Porqué el dedo adulto es mas grande

*Ilustración 23. Respuesta de David.*

e. Si se plasma el dedo de una persona adulta estaría: yo creo que seria 10 veces  
 Porqué el dedo de una persona adulta es más grande

*Ilustración 24. Respuesta de Rosa.*

Se puede decir que los estudiantes establecieron relaciones en cuanto al tamaño del dedo y la superficie de la cartulina, también realizaron estimaciones sobre las veces que una persona adulta podría plasmar el dedo, teniendo en cuenta que es más grande. Lo expuesto por los participantes deja ver que establecieron relaciones entre el tamaño de la unidad de medida y la superficie, es decir, si el dedo es pequeño se plasma más veces y si es más grande menos veces. Al enfrentarse a las situaciones ilustradas, cada participante expuso la medida de la superficie de acuerdo con la unidad de medida utilizada. En este sentido, para van Hiele las experiencias de aprendizaje a partir de situaciones concretas posibilitan el razonamiento de los estudiantes y el crecimiento de la red de relaciones.

#### 4.2.1.4 Categoría 4: Lenguaje de área

Para el Modelo de van Hiele, el lenguaje es fundamental y juega un papel importante ya que determina el razonamiento del concepto que se está estudiando. En esta categoría se tienen en cuenta aspectos que guardan relación con las expresiones de los participantes, ya que en esta Fase se empiezan a construir las bases que conforman la red de relaciones de los conceptos de área y perímetro.

##### 4.2.1.4.1 Descriptor

- *Dada una situación relacionada con una superficie usa expresiones verbales como cubrir, tapar, plasmar sobre, entre otras.*

En esta Fase son pocas las expresiones verbales que se pueden evidenciar en los participantes relacionados con el objeto de estudio, pero en la actividad “Plasmamos nuestras manos” (Apéndice B.1.1), en el literal c, al indagar sobre las veces que se podría plasmar la mano sobre la cartulina si se coloca de otra forma, al justificar las veces que se podría plasmar, David respondió: *la pongo más cerrada*, Rosa: *la plasmamos de otra forma*, Nataly: *la plasmé en la cartulina*, y en el literal h, al comparar con un compañero, cuál de las cartulinas quedó con mayor superficie cubierta. David expuso: *el de mi compañera tiene toda la cartulina tapada*, Rosa: *la mía, porque cubrí más partes*, y Nataly *la de mi compañera, ella cubrió más la cartulina*.

A partir de la utilización del lenguaje, los participantes ilustraron sus construcciones en relación con el concepto de área. Adicionalmente describieron acciones usando palabras como: *la mano del adulto es más grande*, *la pongo más cerrada* y *cabe más veces*, en los literales b) y c) de la misma actividad. Las respuestas de los participantes evidencian saberes relacionados con la categoría y el descriptor, al responder situaciones que involucran un lenguaje asociado al concepto de área, además se observó inferencias en cada participante al explicar las veces que se podría plasmar la mano de una persona teniendo en cuenta su tamaño.

#### 4.2.1.5 Categoría 5: *Alrededor de, contorno, borde, orilla*

En esta categoría se tiene en cuenta aspectos que evidencian cómo los participantes identifican que las superficies están delimitadas por un contorno, y que este se puede medir utilizando partes del cuerpo u otra unidad de medida.

##### 4.21.5.1 Descriptor

- *Reconoce que una figura plana o en un lugar, se puede recorrer el borde o contorno utilizando diferentes partes del cuerpo, como el dedo, la cuarta, pasos, entre otros.*

En la actividad “Midiendo por el borde” se retoma la actividad uno, “Plasmemos nuestras manos”, en donde los participantes, se les entregó el material en el que plasmaron la mano en la actividad anterior, para que bordearan la cartulina utilizando como instrumento de medida la pulgada (dedo pulgar), la cuarta (es la abertura que se obtiene extendiendo el dedo pulgar y el meñique de una mano).



*Ilustración 25. Nataly recorriendo el contorno de la cartulina.*

Los participantes recorrieron el contorno de la cartulina sobreponiendo la cuarta y el dedo pulgar, acciones que permitieron el reconocimiento del contorno de la cartulina. Además, manipularon el material y al medir con la cuarta y el dedo pulgar hicieron marcaciones por el contorno, lo que permitió aproximar al concepto de medida del perímetro de una figura plana.

En la actividad “Reconociendo nuestro entorno” (Apéndice B.1.3), los estudiantes salieron al patio del colegio para realizar un recorrido por diferentes lugares del entorno escolar, como la placa polideportiva, el aula múltiple y la jardinera. Cada lugar fue recorrido por el borde, con los tres participantes, y a la vez que realizaron un conteo de los pasos que dieron en cada uno de sus lados, los iban registrando en su cuaderno de notas. Después de terminar el recorrido, cada participante determinó los pasos que dio por el contorno. En la Ilustración 26 se observa el proceso realizado.



*Ilustración 26. Recorriendo el contorno de un lugar.*

Al establecer los pasos dados, se observó que los participantes establecieron comparaciones en relación con la cantidad que dieron por el contorno de los diferentes lugares. Hicieron comparaciones entre ellos, dando como resultado datos diferentes, la docente intervino y les preguntó: ¿todos dieron la misma cantidad de pasos? Ellos respondieron: *no*, la docente preguntó: ¿Por qué? Nataly Respondió: *porque unos dimos los pasos más grandes y otros más pequeños* (registro en audio, 27 – 05 – 2019).

Estos argumentos dan cuenta del reconocimiento del contorno de un lugar, el cual se encuentra en relación con el concepto de medida del perímetro. Estas comparaciones realizadas por los participantes son las bases para orientar el razonamiento en los participantes y se encuentra en relación con las características de la Fase uno del Modelo de van Hiele.

#### 4.2.1.6 Categoría 6: *Perímetro y medida de perímetro*

Esta categoría está relacionada con situaciones, donde los participantes recorren con un objeto, con partes del cuerpo (pulgada, cuarta, pasos) o con el metro el borde o contorno de una figura plana o lugar, cuenta el número de veces que pone el objeto por el contorno de la figura.

##### 4.2.1.6.1 Descriptor

- *Cuenta las veces que pone un objeto o partes del cuerpo, por el borde o contorno de una figura plana o lugar.*

En la actividad “Midiendo por el borde” (Apéndice B.1.2), se indagó sobre las veces que los participantes marcaron la pulgada por el borde de la cartulina. En las Ilustraciones 27, 28 y 29, se muestra lo que respondieron los participantes.

a) Las veces que marcaste la pulgada por el borde de la cartulina fueron: 45 Veces

*Ilustración 27. Respuesta de David.*

a) Las veces que marcaste la pulgada por el borde de la cartulina fueron: 29 Veces  
en la cartulina

*Ilustración 28. Respuesta de Rosa.*

a) Las veces que marcaste la pulgada por el borde de la cartulina fueron: 30 Veces

*Ilustración 29. Respuesta de Nataly.*

Al realizar el reconocimiento del contorno de la cartulina, los participantes manipularon el material, miden con la cuarta y el dedo pulgar y a la vez hicieron marcaciones por el contorno, lo que permitió aproximarlos al concepto de perímetro de una figura plana. Al utilizar diferentes instrumentos para marcar por el borde de la cartulina (pulgada, cuarta,

objeto). Se puede observar que cada participante registró datos distintos en relación con las veces que marcó la pulgada por el contorno, esto se debe a que unos las marcaron más unidas y otros más separadas.

Se infiere que el participante identifica que la medida depende del instrumento que se utilice para recorrer el contorno, el cual se obtiene realizando el conteo de las veces que sobrepuso el instrumento de medida.

En la Ilustración 30 se muestra las veces que midieron con la cuarta el contorno de la cartulina.

b) Las veces que mediste con la cuarta por el borde de la cartulina fue: 8 veces

*Ilustración 30. Respuesta de David.*

Durante la actividad se observó que los participantes realizaron de forma cuidadosa el proceso de medición al realizar el recorrido por el borde de la cartulina colocando la cuarta de la mano, empezando por una esquina, hasta recorrer todo el contorno. El trabajo realizado permitió el reconocimiento del contorno, usando las partes del cuerpo (cuarta y pulgada). Este reconocimiento orientó a los participantes en relación al concepto objeto de estudio y a la vez está en concordancia con los requerimientos de la Fase uno (Información) del Modelo de van Hiele.

En el siguiente literal los estudiantes pensaron en objetos que les permitieron recorrer el borde de la cartulina.

c) Otra unidad de medida que utilizaste para medir el contorno de la cartulina fue: una

Regla partida y las veces que la pusiste por el  
borde de la cartulina fueron: 12 veces

*Ilustración 31. Respuesta de David.*

✓ c) Otra unidad de medida que utilizaste para medir el contorno de la cartulina fue: el  
Lápiz y las veces que la pusiste por el  
 borde de la cartulina fueron: 9 veces en la cartulina

Ilustración 32. Respuesta de Rosa.

Cada participante, de acuerdo con los elementos que tiene más cerca, seleccionó el que según su criterio es el más indicado para recorrer el contorno, cada uno de forma organizada sobrepuso el elemento alrededor de la cartulina, posteriormente realizaron el conteo de las veces que marcaron el objeto por el contorno. En lo expuesto por los estudiantes se puede decir que de forma progresiva han adquirido los conocimientos básicos para iniciar el proceso de razonamiento matemático, el cual se encuentra en vínculo con la Fase uno del Modelo de van Hiele y con la categoría (perímetro y medida de perímetro).

A partir del trabajo en las actividades se les preguntó a los participantes, ¿que otro elemento diferente a las partes del cuerpo utilizarían para medir o recorrer el borde de la cartulina y por qué?, a este interrogante David respondió: *el lápiz, porque queda perfecto*, Rosa: *yo utilizaría el borrador, porque con él se puede medir*, Nataly respondió: *el lapicero, porque es diferente a las partes del cuerpo* (registro en audio, 27 – 05 – 2019). Los participantes al igual que en el apartado anterior mencionaron objetos cercanos a ellos, de los que cargan en su bolso, justificando que, con estos elementos, es posible recorrer el contorno de la cartulina o porque es un elemento diferente a las partes del cuerpo. En este sentido se puede decir que los elementos mencionados por los participantes pueden ser utilizados para recorrer el borde o para medir la longitud del contorno de una figura plana.

En el siguiente enunciado los estudiantes comparan el trabajo realizado con los compañeros, en relación con las veces que cada uno superpuso la cuarta por el borde de la cartulina y a la vez explicaron por qué sobreponen la cuarta las mismas veces que el compañero al medir el contorno.

- e) Comparo mi trabajo con el de mi compañero y las veces que él midió la cuarta por el borde de la cartulina fueron: 8 veces porque la

mano de ella es igual a la mía de grande

*Ilustración 33. Respuesta de Rosa.*

En este literal se observa que los estudiantes dedican mayor tiempo para completar los enunciados, debido a que contaron con detenimiento las veces que los compañeros marcaron la medida de la cuarta por el borde de la cartulina, además se observó que también midieron las manos de ellos, donde habían marcado los compañeros, como para mirar quien tiene la medida de la cuarta más grande o pequeña. Al comparar el trabajo realizado en el desarrollo de la actividad descubrieron que estaba las mismas veces porque tienen la mano del mismo tamaño. De lo anterior es importante resaltar que en la medida que los participantes avanzan en las actividades refinan el uso de los instrumentos, es decir son más cuidadosos al momento de sobreponerlos o al momento de hacer comparaciones y el lenguaje es más preciso.

De igual forma en la actividad “Reconociendo nuestro entorno” en el literal *a*), se indagó por los pasos que dieron al recorrer el contorno de la jardinera. los participantes empezaron a contar los pasos iniciando por una de las esquinas de cada lugar (jardinera, aula múltiple y cancha deportiva), durante la actividad tomaron nota de los pasos que dieron en cada lugar. En relación con esta categoría se observan las siguientes respuestas dadas por los participantes.

- a) Los pasos que contaste al ir por el borde de la jardinera fueron: 16 pasos

*Ilustración 34. Respuesta de David.*

- a) Los pasos que contaste al ir por el borde de la jardinera fueron: 20 pasos

*Ilustración 35. Respuesta de Nataly.*



La unidad de medida utilizada para medir el contorno de cada lugar son los pasos, por lo que se observa que los resultados de los participantes son distintos, debido a que unos dan los pasos más largos que otros. Al realizar cada recorrido identifican el contorno u orilla de diferentes lugares del entorno escolar utilizando como unidad de medida los pasos.

Lo expuesto anteriormente por los participantes, permitió observar el acercamiento al concepto de medida del perímetro al determinar por medio de un conteo la cantidad de pasaos dados por el contorno de un lugar determinado.

Retomando la actividad “Recorriendo nuestro entorno” (Apéndice B.1.3), después que los participantes realizaron el recorrido por los diferentes lugares del entorno escolar, se establecieron comparaciones en relaciones con los pasos que daría un niño de tres años al recorrer el borde de la cancha. En este sentido la docente investigadora les preguntó: Si un niño de tres años recorre la cancha por el borde, ¿cuántos pasos crees que daría? A este interrogante David respondió: *creo que unos 400 pasos*, pregunta la docente ¿por qué? David: *porque tiene los pies más pequeños*, al mismo interrogante Rosa respondió: *yo creo que unos 196 porque sus pasos son más pequeños*.

Al respecto, Nataly respondió: *240 pasos, porque él tiene los pasos más pequeños* (registro en video, 02 – 05 – 2019). En lo expresado por los participantes se evidenció que las respuestas estuvieron asociadas al tamaño de los pasos que daría un niño de tres años, lo que quiere decir que daría más pasos por ser más corta la distancia en los pasos. Se pudo observar que David confundió los pasos con el tamaño de los pies, pero en los tres participantes se observó que las estimaciones estuvieron coherentes con relación a los pasos que daría un niño de tres años.

Todo lo anterior permitió el acercamiento de los participantes al concepto objeto de estudio, generando motivación, puesto que según van Hiele, en la Fase uno (Información) los estudiantes deben aprender a manejar el material para adquirir conocimientos básicos.

Por otro lado, en relación con el descriptor establecido para la categoría “perímetro y medida de perímetro”, se puede decir que los participantes bordean una superficie plana usando como instrumento de medida partes del cuerpo (dedo pulgar, cuarta, entre otras) y también recorren diferentes lugares por el contorno como una aproximación al reconocimiento del perímetro en una superficie.

#### 4.2.1.7 Categoría 7: Lenguaje de perímetro

Para van Hiele el lenguaje es importante en la medida que se desarrollan las experiencias de aprendizaje, por lo tanto, con esta categoría se relacionan expresiones de los participantes que están asociadas al concepto de perímetro, tales como: borde, contorno u orilla, entre otros.

##### 4.2.1.7.1 Descriptor

- *Dada una situación relacionada con el perímetro de una figura plana, los participantes utilizan expresiones verbales asociadas a medición, conteo, adición, multiplicación.*

En la actividad “Recorriendo nuestro entorno”, (Apéndice B.1.3), cada participante realizó una representación de cada lugar recorrido por el borde, en el entorno escolar. A continuación, se puede observar algunos dibujos realizados por los participantes que representan los lugares recorridos.

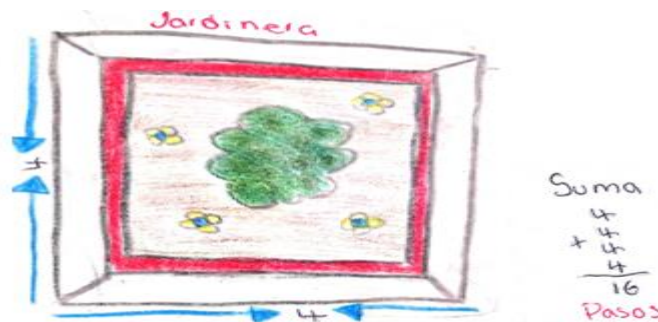


Ilustración 36. Jardínera representada por Rosa.

Se evidencia que la participante tuvo en cuenta cada detalle al realizar el dibujo que representa la jardinera, al delinear el contorno con un color diferente, después en dos de los lados le escribió el número que representa la cantidad de pasos que dio en dos de los lados, seguidamente realizó una adición con cuatro sumandos y obtuvo el resultado, el cual corresponde a la cantidad de pasos dados por el contorno. De igual forma los demás participantes realizaron sus representaciones de los lugares recorridos por el contorno.

En las representaciones realizadas por los participantes, se observó que relacionaron la cantidad de pasos dados en los lados de cada lugar con las representaciones (dibujos) que ellos realizaron, colocándole en cada lado los pasos dados en ese lugar. De lo anterior, se puede inferir, que en la medida que avanzan en el desarrollo de las actividades, se refinan algunos instrumentos que de forma progresiva acrecientan la red de relaciones y se puede evidenciar a través del lenguaje que utilizaron para dar respuesta a las actividades planteadas.

A continuación, se presentan expresiones de los participantes que dan cuenta de la red de relaciones que comenzaron a formar y son exteriorizadas a través del lenguaje, tales como: *... medí por el borde de la cartulina, para medir el contorno, puse por el borde..., medí con la curta...por el borde de..., los bordes donde recorrí...,* (registro en audios, 09 – 09 – 19).

Los anteriores argumentos permitieron evidenciar el lenguaje de los participantes en relación con el concepto de perímetro, los cuales se constituyeron en insumos que fortalecen el lenguaje y la red de relaciones.

A continuación, se presenta la Tabla 13 que resume los avances de cada participante en relación con las categorías en la Fase uno (Información).

**Tabla 13.** *Avances de los participantes. Fase 1 (Información)*

Categorías	Participantes	Avances
------------	---------------	---------

Categorías	Participantes	Avances
Cubrir, sobreponer, plasmar	David	En la actividad uno “Plasmemos nuestras manos” al responder los literales b, c, f, se observó el reconocimiento al cubrir una superficie, al comparar donde se cubrió más o menos, al identificar elementos para cubrir la superficie de cartulina.
	Rosa	La participante respondió de forma coherente cada literal de la actividad uno “Plasmemos nuestras manos”, al realizar el reconocimiento de la superficie al plasmar la mano o cubrir con diferentes objetos.
	Nataly	En la actividad uno “Plasmemos nuestras manos” Cubrió la superficie de la cartulina al sobreponer la mano y el dedo sobre ella, además cubrió la superficie con diferentes objetos.
Superficie	David	En la actividad uno, relacionó objetos planos que le permitieron visualizar como se cubrió la superficie de una cartulina, al utilizar la palma de la mano y el dedo como unidad de medida.
	Rosa	Al realizar la actividad uno, en la cual plasmó la mano, seleccionó objetos con los cuáles se puede cubrir una superficie.
	Nataly	Realizó las actividades haciendo el reconocimiento de la superficie el cual se evidenció en el literal h.
Área y medida de superficie	David	Realizó un conteo y estableció las veces que plasmó la mano para cubrir la superficie de la cartulina, lo que permitió relacionarla con la medida de la superficie. Se evidenció en la actividad uno “Plasmemos nuestras manos”, literales a, b, c, d, e.
	Rosa	Plasmó la mano y el dedo en la superficie de la cartulina y realizó un conteo de las veces que la sobrepuso.
	Nataly	Dio respuesta a los literales a, b, c, d, e, de la actividad uno, e identificó las veces que plasmó la mano.
Lenguaje de	David	Comparó el trabajo realizado con los compañeros, en los literales e, f

Categorías	Participantes	Avances
área		y h de la actividad uno de la Fase uno, usó expresiones relacionadas con esta categoría.
	Rosa	Se observó un lenguaje limitado, pero sus expresiones estaban relacionadas con el concepto de área, se evidenció en la actividad uno, literales f y h.
	Nataly	Realizó las actividades de la Fase uno, se observó su evolución en el lenguaje al utilizar expresiones como: <i>plasmé la Mano, cubrí más veces la superficie, ...plasmó mi compañera.</i>
Alrededor de, contorno, borde, orilla	David	Se evidenció un lenguaje acorde con esta categoría, a partir de la información recolectada en la actividad dos “Midiendo por el borde” literales a, b, c, d y la actividad tres “Reconociendo nuestro entorno” literales a, c, e.
	Rosa	Respondió de forma adecuada los literales a, b, c, d, de la actividad dos de la Fase uno “Midiendo por el borde” y la actividad tres “Recorriendo nuestro entorno”, literales a, c, e. lo que permitió el reconocimiento del contorno de una figura o lugar.
	Nataly	Completó cada literal y realizó el reconocimiento del contorno de una figura plana y lugar, utilizando las partes del cuerpo (pulgada, cuarta, pasos), se evidenció en la actividad dos “Midiendo por el borde” literales a, b, c, d y la actividad tres “Reconociendo nuestro entorno” literales a, c, e.
Perímetro y medida de perímetro	David	Se evidenció el reconocimiento del contorno en la actividad dos “Midiendo por el borde”, literales a, b, d, e y en la actividad tres “Recorriendo nuestro entorno” literales a, b, c, d, e, f.
	Rosa	Recorrió el contorno de la cartulina utilizando la medida de la cuarta y la pulgada en la actividad dos “Midiendo por el borde”, literales a, b, d, e y en la actividad tres “Recorriendo nuestro entorno”, en los literales a, b, c, d, e, f.

Categorías	Participantes	Avances
	Nataly	Dio respuestas coherentes a cada una de las preguntas de la actividad “Midiendo por el borde” y “Reconociendo nuestro entorno”. Además, explicó de forma verbal cómo halló la cantidad de pasos que debió dar por el contorno de cada lugar sin necesidad de hacer todo el recorrido.
Lenguaje de perímetro	David	Expuso el procedimiento empleado para determinar la cantidad de pasos dados por el contorno de los lugares recorridos, actividad dos “Recorriendo nuestro entorno”, literales d, c. En la actividad “Midiendo por el borde” relacionó los elementos que utilizó para recorrer el contorno.
	Rosa	Resolvió situaciones en la actividad dos “Midiendo por el borde” que dieron cuenta de los elementos usados para recorrer el contorno. En la actividad tres “Recorriendo nuestro entorno” literales a, c, determinó los pasos dados por el contorno y explicó donde dio más pasos y porqué.
	Nataly	En la actividad dos “Midiendo por el borde” en el literal c, estableció las veces que marcó la pulgada en el contorno de la cartulina y en la actividad tres “Recorriendo nuestro entorno” explicó por qué en algunos lugares dio más pasos que en otros al recorrer el contorno.

En esta Fase los participantes mostraron sus desempeños en las experiencias presentadas, cada uno a su manera mostró su acercamiento a los conceptos de área y perímetro. Con respecto a los conceptos objeto de estudio, al inicio se observó cómo realizaron el reconocimiento de la superficie al plasmar la mano y el dedo con pintura, recorriendo superficies planas con objetos, partes del cuerpo y recorriendo diferentes lugares del entorno escolar, además realizaron conteo y comparaciones, resolvieron situaciones donde recurrieron a la adición para determinar los pasos dados por el contorno de un lugar.

En cuanto al lenguaje se observaron algunas expresiones acordes con las acciones realizadas al momento de desarrollar las actividades, las cuales se encuentran en relación

con los conceptos de área y perímetro. En la medida que avanzaron en el desarrollo de las actividades fueron refinando el uso de instrumentos y el lenguaje fue más preciso, evidenciando algunos aspectos que muestran el inicio de la red de relaciones, de acuerdo con las categorías implementadas en relación con los conceptos de área y perímetro. En este sentido se desarrollaron las actividades atendiendo a las características propias de la Fase uno (Información), del Modelo de van Hiele. A continuación, se presenta la Tabla 14 que muestra aspectos relacionados con el lenguaje utilizado por los participantes en la Fase uno (Información).

**Tabla 14.** *Lenguaje utilizado por los participantes en la Fase uno (Información).*

Participante	Lenguaje con relación al concepto de superficie y su medida el área	Lenguaje con relación al concepto de contorno y su medida el perímetro
David	En las respuestas dadas en los instrumentos de recolección de la información, el participante relacionó el concepto de superficie con su medida el área, describiendo las veces que plasmó la mano y el dedo en un trozo de cartulina de 30 cm x 30 cm (mano 4 veces, dedo índice 53 veces) y estimó las veces en que un adulto podría plasmar la mano o el dedo en la misma superficie (mano 3 veces, dedo índice 22 veces).	En relación con el perímetro representó gráficamente los pasos que dio por el contorno de la placa polideportiva de la institución y encontró el total de pasos, mediante la suma de sus lados. Así: $(45+37+45+37= 164)$ y estimó los pasos que un niño tres años podría dar en el mismo recorrido (200 pasos).
Rosa	En las respuestas dadas en los instrumentos de recolección de información, la participante relacionó el concepto de superficie con su medida el área, describiendo las veces que plasmó la mano y el dedo en un trozo de cartulina de 30 cm x 30 cm (mano 6 veces, dedo índice 56 veces) y estimó las veces en que un adulto podría plasmar la mano o el dedo en la misma superficie. (mano 5 veces, dedo índice 40 veces).	En relación con el perímetro representó gráficamente los pasos que dio por el contorno de la placa polideportiva de la institución y encontró el total de pasos, mediante la suma de sus lados. Así: $(50+50+35+35= 170)$ y estimó los pasos que un niño de tres años podría dar en el mismo recorrido (196 pasos).

---

Nataly	En las respuestas dadas en los instrumentos de recolección de información, la participante relacionó el concepto de superficie con su medida el área, describiendo el conteo de las veces que plasmó la mano y el dedo en un trozo de cartulina de 30 cm x 30 cm (mano 6 veces, dedo índice 111 veces) y estimó las veces en que un adulto podría plasmar la mano o el dedo en la misma superficie. (mano 5 veces, dedo índice 100 veces)	En relación con el perímetro representó gráficamente los pasos que dio por el contorno de la placa polideportiva de la institución y encontró el total de pasos, mediante la suma de sus lados. Así: $(39+48+39+48 = 164)$ y estimó los pasos que un niño de tres años podría dar en el mismo recorrido (240 pasos).
--------	---	--

---

#### 4.2.1.7.2 Análisis del lenguaje

En la Tabla 14, se muestra el lenguaje utilizado por los participantes en relación con los conceptos de área y perímetro. Al comparar las expresiones de la actividad diagnóstica y las de la Fase uno (Información), para referirse al área se encontró palabras como, *es algo que no tiene fin, un agujero que no tiene fin ni fondo*, mientras que en la Fase uno, hicieron estimaciones de las veces que un adulto podría plasmar las mano en un trozo de cartulina (30 cm x 30 cm). Para el concepto de perímetro en la actividad diagnóstica utilizaron expresiones como, *una figura moldeada, es algo con lo que podemos medir algunos objetos*, en tanto, que en la Fase uno los participantes determinaron la cantidad de pasos que dieron por el contorno de un lugar (placa polideportiva), además realizaron la representación gráfica y la suma de los pasos que dieron por el borde.

#### 4.2.1.7.3 Red de relaciones

Se pudo observar que en esta Fase que los participantes realizaron conteos, estimaciones, adiciones, que les permitieron familiarizarse con los conceptos de medida de una superficie con distintas unidades de medida, como la palma de la mano y el dedo, colocándolas cada vez más juntas y realizando el conteo respectivo.



De manera similar, se puede observar el trabajo que hicieron los estudiantes para medir el contorno de una región, con distintas unidades de medida y haciendo los respectivos conteos y comparaciones entre ellas.

El lenguaje utilizado por los estudiantes se acerca a los conceptos de área de una superficie y al de perímetro de un contorno. Esto se hizo evidente cuando realizaron los conteos para saber cuántas veces estaba su unidad de medida para determinar el área (palma de la mano, entre otros) y el perímetro (pulgares, entre otros). En esta Fase se comienza la construcción de la red de relaciones determinada por: definiciones más precisas de superficie, área, contorno y sus respectivas medidas, como son el área y el perímetro.

#### **4.2.2 Fase 2: Orientación dirigida.**

En esta Fase se desarrollaron experiencias que permitieron a los participantes descubrir y aprender los conceptos geométricos que se estudiaron durante el proceso investigativo, cada participante se acercó a elementos relacionados con los conceptos de área y perímetro, a partir de situaciones que involucraron estos conceptos y se utilizaron estrategias de la Fase uno, las cuales permitieron el progreso en el aprendizaje.

##### ***4.2.2.1 Categoría 1: Cubrir, sobreponer, plasmar***

###### *4.2.2.1.1 Descriptores*

- *Identifica que entre más cerca se coloque un mismo objeto sobre una superficie, más veces se debe sobreponer para cubrirla.*
- *Reconoce que al sobreponer en una superficie diferentes objetos, algunos de ellos permiten cubrirla en su totalidad.*

En la actividad uno de esta Fase “Comparando superficies” (Apéndice B.2.1), se retoma la actividad uno de la Fase anterior (información), donde se les entregó a los participantes

láminas de cartulina con las mismas dimensiones; (30 centímetros de largo y 30 centímetros de ancho), se les pide que plasmen la mano en la cartulina de tal forma que cubran la mayor superficie posible, además se les entrega el trabajo realizado en la actividad uno “Plasmemos muestras manos” (Apéndice B.1.1), para que comparen en cual actividad se cubrió más superficie de la cartulina, en la anterior o en la que acaba de realizar. Después de realizar la actividad, cada participante dio respuestas a las situaciones planteadas en la actividad que se relacionan con esta categoría.

A los participantes se les indagó sobre las veces que plasmaron la mano en la superficie de la cartulina, los cuales respondieron teniendo en cuenta el conteo realizado como se muestra en las Ilustraciones 37 y 38.

a) En la actividad que acabas de realizar, las veces que plasmaste la mano sobre la cartulina fueron: 8 veces

*Ilustración 37.* Respuesta de Rosa.

a) En la actividad que acabas de realizar, las veces que plasmaste la mano sobre la cartulina fueron: plasmé 7 veces las manos

*Ilustración 38.* Respuesta de Nataly.

En lo expuesto por los participantes se evidencia que cada uno obtuvo un resultado diferente, debido a que plasmaron la mano en posiciones diversas y con los dedos unidos. Con el propósito de cubrir mayor superficie de la cartulina, cada uno buscó una estrategia que le permitió plasmar más veces la mano y cubrir una mayor superficie.



*Ilustración 39.* Superficie Cubierta por David, Fase uno y Fase dos.

En la Ilustración 39 se pueden observar diferencias en la forma de plasmar la mano, la cantidad de veces que la sobrepuso en la superficie, el cual deja ver el propósito del participante, en la parte izquierda de la misma, corresponde a la Fase uno (Información) se puede observar que la mano fue plasmada de forma desorganizada, los dedos muy separados y dejando muchas partes de la cartulina sin cubrir, y solo plasmó la mano cuatro veces. En la parte derecha de la Ilustración mencionada, se observa que hubo una mejor organización y cuidado al plasmar la mano, una más cerca de la otra y los dedos más unidos con el propósito de cubrir la mayor parte de la superficie de la cartulina al plasmarla siete veces, logrando cubrir la mayor parte de la superficie, aspecto que le permite identificar que la posición de la mano influye en la cantidad de veces que se puede plasmar sobre una superficie.



*Ilustración 40.* Superficie cubierta por Rosa, Fase uno y Fase dos.

Al comparar las dos partes que conforman la Ilustración 40, se observa que, en la primera, que corresponde a la Fase uno (Información), Rosa plasmó la mano de forma organizada y en un mismo sentido sin tener en cuenta que los dedos quedaron separados, en cambio en la segunda que corresponde a la Fase dos (Orientación dirigida), en la actividad uno “Comparando superficies” se observa el cuidado al plasmar la mano y una mayor organización que permitió plasmarla más veces y cubrir mayor superficie de la cartulina. Al comparar las dos partes de la Ilustración 40, se evidencia que la forma de plasmar la mano incide en la cantidad de veces que se puede sobreponer en una superficie, en este sentido, se relaciona con esta categoría y el descriptor, ya que los participantes pensaron en la forma que debían plasmar la mano para cubrir una mayor superficie y de esta manera empezar a reconocer de forma progresiva que el área de una superficie se puede cubrir en su totalidad a partir de la organización del objeto que se sobreponga.

El trabajo realizado permitió que los participantes, establecieran comparaciones entre la actividad uno, de la Fase uno (Información) y la actividad uno de la Fase dos, (Orientación dirigida). A continuación, se muestran los argumentos expuestos por los participantes que guardan relación con las categorías cubrir, sobreponer, plasmar de la Fase dos.

b) Al comparar la primera actividad, donde plasmaste las manos, con la que acabas de realizar que también plasmaste las manos, en la que se cubrió mayor superficie fue en: en la que acabo de realizar Porque: en la que acabo de realizar. estan cerradas las manos y en la primera estaba abierta las manos

Ilustración 40. Respuesta de Rosa.

b) Al comparar la primera actividad, donde plasmaste las manos, con la que acabas de realizar que también plasmaste las manos, en la que se cubrió mayor superficie fue en: la que acabe de hacer Porqué: en la anterior plasme la manos abierta y ahora no

Ilustración 41. Respuesta de Nataly.

Cada participante expuso a su manera que en la actividad que realizaron por segunda vez, plasmaron las manos más veces, porque la colocaron más cerrada, mientras que en la actividad uno “Plasmemos nuestras manos” (Apéndice B.1.1), habían dejado las manos más separadas unas de otras, lo que les permitió establecer diferencias e identificar por qué en una cartulina plasmaron la mano más veces que en la otra. Después de cubrir la superficie con la palma de la mano y realizar las comparaciones, se indagó por otro objeto que pudieran utilizar para cubrir toda la superficie. A continuación, se muestra la respuesta de un participante.

c) Otro objeto que puedes utilizar para cubrir toda la superficie de la cartulina es: el cuaderno

Ilustración 42. Respuesta de David.

Se observa que los estudiantes relacionan objetos geométricos planos, de mayor tamaño que son familiares para ellos, los cuales les permiten cubrir mayor superficie, de esta observación se infiere que los participantes al responder “*un cuaderno*” asumen que la cartulina al ser una superficie plana la puede cubrir con objetos planos, siendo estos elementos los que le permiten aproximarlos al concepto de área. En este sentido se relaciona con el descriptor 2 de esta categoría. Es importante aclarar que los demás participantes en este literal respondieron: *partes planas cuaderno y libro*.

#### 4.2.2.2 Categoría: 2 Superficie

##### 4.2.2.2.1 Descriptor

- *Reconoce que la medida de una superficie se puede expresar en diferentes unidades de medida.*

En la actividad dos “De paseo por algunos lugares” (Apéndice B.2.2), los participantes se enfrentaron a una situación práctica del entorno, donde debían construir la unidad de medida utilizando diferentes partes del cuerpo, para cubrir la superficie de un lugar determinado. En compañía de la docente, los estudiantes se desplazaron al parque para observar las partes en las que se encuentra dividido, después de observar seleccionaron un lugar para realizar el proceso de medición de la superficie y el contorno del lugar seleccionado.

Al escoger la unidad de medida para cubrir la superficie se presentó un dialogo entre los participantes, donde algunos decían: *la mano*, otros *el pie o el brazo*, como la superficie es grande necesitaban una unidad de medida que cubriera una mayor superficie, aquí intervino la docente y les preguntó ¿Qué parte del cuerpo es más grande que les permita cubrir una mayor superficie?, Rosa respondió: *todo el cuerpo*, entonces escogieron como unidad de medida para la superficie “el cuerpo y los pies”, posteriormente dibujaron en la cartulina y construyeron las unidades de medida para cubrir la superficie, y para el contorno escogieron como medida de longitud los pies y la mano. A continuación, se observa el proceso realizado por los participantes.



Ilustración 43. Proceso de construcción de unidad de medida.

Para realizar el proceso de medición, los participantes seleccionaron una superficie pequeña de forma cuadrada, que después de construir las unidades de medidas dieron inicio al proceso de comparación. Primero compararon la porción de la superficie con la unidad de medida que diseñaron, la cual sobrepusieron en la superficie de la figura seleccionada, mientras que iban marcando qué porción de la superficie alcanzó a cubrir la unidad de medida, después se les dijo que debían medir el contorno o perímetro del lugar con otra unidad de medida que diseñaron.

En ese momento se observó en los participantes confusión, al suponer que la superficie y el contorno era lo mismo, por tanto, para aclarar la dificultad presentada, se hizo nuevamente un recorrido por el contorno de cada superficie, estas estaban marcadas por el contorno, lo que permitió identificar diferencias al recorrer las diferentes figuras, además, durante el recorrido se les explicó que el borde, contorno u orilla es el perímetro del lugar o figura y la parte interna que rodea el contorno corresponde a la superficie. Después retomaron la actividad y los participantes, en forma organizada, iniciaron el proceso sobreponiendo la unidad de medida en la superficie seleccionada, además, tomaron algunos elementos del medio (hojas de árboles) para marcar la superficie cubierta por la unidad de medida y poder determinar cuántas unidades de medida eran necesarias para cubrir la superficie.

Por lo anterior es posible deducir que los participantes no tenían suficiente claridad para diferenciar la superficie y el contorno, al enfrentarse a superficies de gran tamaño en el espacio público, posiblemente porque en los años anteriores en sus prácticas académicas no se habían enfrentado a una situación similar.

Es importante aclarar que para el desarrollo de esta actividad los participantes formaron dos grupos, pero al momento de responder las preguntas realizadas lo hicieron en forma individual. En el primer literal se indagó sobre la parte del cuerpo que utilizaron para construir la unidad de medida y cubrir la superficie, cada participante respondió atendiendo al trabajo realizado en la actividad, como se observa en las Ilustraciones 45, 46 y 47.



- a) La parte del cuerpo que utilizaste para construir la unidad de medida para cubrir la superficie fue: los pies de mi compañero

*Ilustración 44.* Respuesta de David.

- a) La parte del cuerpo que utilizaste para construir la unidad de medida para cubrir la superficie fue: El cuerpo mio

*Ilustración 45.* Respuesta de Rosa.

- d) Otro elemento que utilizarías para cubrir toda la superficie es: la pierna

*Ilustración 46.* Respuesta de Nataly.

Se pudo evidenciar que los participantes construyeron unidades de medida de mayor tamaño que les permitió cubrir más superficie, las cuales fueron apropiadas para realizar el proceso de comparación entre la superficie seleccionada y la unidad de medida diseñada por los participantes. Este proceso permitió el razonamiento en los participantes al establecer estrategias que conllevaron al desarrollo de la actividad.

Durante el proceso los participantes contaron las veces que sobrepusieron la unidad de medida en la superficie y el contorno, el cual se evidenció al indagar por las unidades de medida que necesitaron para cubrir la superficie.

- b) Las unidades de medida que necesitaste para cubrir la superficie fueron: 240  
unidades

*Ilustración 47.* Respuesta de David.

- b) Las unidades de medida que necesitaste para cubrir la superficie fueron: 70  
unidades

*Ilustración 48.* Respuesta de Nataly.

Se evidencia que cada participante realizó el conteo de acuerdo a la unidad de medida utilizada, David, por su parte construyó la unidad de medida, utilizando los pies, los cuales delineó sobre la cartulina y recortó un molde que después sobrepuso en el lugar



seleccionado y al realizar un conteo estableció las unidades de medida necesarias para cubrir la superficie, Nataly y Rosa elaboraron la unidad de medida usando el cuerpo, el cual delinearon en una cartulina, y después lo sobrepusieron en la superficie como se puede observar en la Ilustración 44. Por lo tanto, teniendo en cuenta la unidad de medida y el tamaño del lugar, cada participante obtuvo un dato distinto en cuanto a las unidades de medida necesarias para cubrir la superficie, quedando en evidencia que una superficie se puede expresar en diferentes unidades de medida, esto valida lo que pretende esta categoría y el descriptor.

Posteriormente se indagó si las unidades de medida utilizadas permitieron cubrir la superficie en su totalidad y esto fue lo que respondieron.

c) Las unidades de medida cubrieron la superficie en su totalidad: Si  
 Porqué: no quic de espacio

*Ilustración 49.* Respuesta de David.

c) Las unidades de medida cubrieron la superficie en su totalidad: no  
 Porqué: hay medidas de nuestro cuerpo que no son iguales

*Ilustración 50.* Respuesta de Rosa.

c) Las unidades de medida cubrieron la superficie en su totalidad: Si  
 Porqué: el cuerpo de mi compañero es pequeño

*Ilustración 51.* Respuesta de Nataly.

Al cubrir la superficie, Nataly, observó de forma general sin detenerse en los detalles, pensando que la unidad de medida que cubría la superficie de la figura en su totalidad, sin tener en cuenta que el cuerpo no presenta una figura uniforme, sino, que tiene curvaturas que dificulta cubrir una superficie totalmente. David, al realizar el proceso de medición presta poca atención a los detalles, sin tener en cuenta que la unidad de medida construida

con los pies presenta una figura poco uniforme, que no permite cubrir una superficie en su totalidad y siempre quedan partes sin cubrir. Rosa, por su parte, tiene en cuenta los detalles de la figura y responde que la superficie no se cubrió en su totalidad porque las medidas del cuerpo no son iguales. Cada participante reconoce la superficie del lugar, al cubrirla con la unidad de medida construida, a partir de las partes del cuerpo, dejando en evidencia las estrategias implementadas por cada uno de ellos.

Al indagar sobre otro elemento que utilizarían para cubrir toda la superficie, esto fue lo que respondieron.

d) Otro elemento que utilizarías para cubrir toda la superficie es: la pierna

*Ilustración 52.* Respuesta de David.

d) Otro elemento que utilizarías para cubrir toda la superficie es: una cartulina

*Ilustración 53.* Respuesta de Rosa.

d) Otro elemento que utilizarías para cubrir toda la superficie es: un bolso  
los pies de mi compañero

*Ilustración 54.* Respuesta de Nataly.

Cada participante pensó en elementos distintos los cuales usaría para cubrir toda la superficie, se observa que Rosa, relaciona el elemento más apropiado para cubrir la superficie al asociar la forma geométrica de la cartulina con la forma del lugar seleccionado para cubrirla, dando a entender que por la similitud que hay entre la unidad de medida y la superficie del lugar permite cubrirla en su totalidad. David y Nataly, al pensar en otro elemento para cubrirla se inclinaron por objetos de menor tamaño que no tienen una forma geométrica definida, y no permiten cubrirla en su totalidad, debido a la forma que posee el instrumento de medida.

A través del diseño de diferentes instrumentos de medida utilizando partes del cuerpo para cubrir la superficie de un lugar, los participantes orientados por la docente

investigadora exploraron el campo de estudio con el fin de aprender aspectos fundamentales en torno al concepto objeto de estudio, como es el reconocimiento de la superficie de un lugar, el cual se evidenció durante el desarrollo de la actividad “De paseo por algunos lugares” (Apéndice B.2.2), al responder los literales (a, b, c, d) que se encuentran relacionados con el concepto de superficie, estos argumentos confirman lo que pretende esta categoría y el descriptor, los cuales se encuentran en relación con aspectos que caracterizan la Fase dos (Orientación dirigida) del Modelo de van Hiele.

#### ***4.2.2.3 Categoría 3: Área y medida de superficie***

##### *4.2.2.3.1 Descriptor*

- *Reconoce que las veces que sobrepone la unidad de medida en una superficie corresponde a la medida del área.*

Cada participante al realizar procesos de mediciones de superficies en la actividad tres “Escojo mi unidad de medida” (Apéndice B.2.3), en ella los participantes delinearon con un marcador el contorno o borde de la superficie de un trozo de cartulina, después se les entregó diferentes unidades de medida de diversas formas y tamaños (círculos, cuadrados, triángulos, rectángulos) como se puede observar en la Ilustración 56.



*Ilustración 55. Unidades de medida.*

Para que ellos escogieran la unidad de medida que estimaran conveniente, y que les permitiera cubrir en su totalidad toda la superficie de la cartulina. Seguidamente, tomaron las unidades de medidas sobreponiéndolas en la superficie para escoger la que les permitiera cubrirla, después de seleccionarla, tomaron las unidades de medida escogidas y las pegaron en la superficie de la cartulina hasta cubrirla en su totalidad como se muestra en la Ilustración 57.



*Ilustración 56.* Superficie cubierta con diferentes unidades de medida.

Durante el proceso se observó que los participantes tomaron las unidades de medida y las iban sobreponiendo en la superficie de la cartulina, con el propósito de escoger las más adecuadas, algunos seleccionaron las unidades cuadradas, otros las rectangulares, después empezaron a pegar la unidad de medida en la superficie iniciando por una de las esquinas y en forma ordenada hasta cubrirla en su totalidad. De acuerdo con lo observado se infiere que al empezar de esta forma se puede tener una mayor organización de las unidades de medida sobre la cartulina, cubrir toda la superficie y determinar con mayor facilidad la cantidad de unidades de medida utilizadas al cubrir la superficie.

El procedimiento realizado permitió que los participantes identificaran la superficie de una figura plana, como la región delimitada por el contorno, y que se puede cubrir utilizando diferentes unidades de medida. Estos procesos dan cuenta del fortalecimiento de la categoría “Área y medida de superficie” y “Alrededor de, contorno, borde, orilla”.

Las preguntas relacionadas con la actividad desarrollada por cada uno de los participantes dan cuenta de la categoría y el descriptor, los cuales se muestran en las

Ilustraciones 58, 59 y 60. En el primer literal se indagó por la unidad de medida que seleccionaron para cubrir la superficie de la cartulina.

a.) La unidad de medida que escogiste para cubrir la superficie de la cartulina fue: los  
cuadros grandes Porqué: me ayudo a cubrir toda

*Ilustración 57. Respuesta de David.*

a.) La unidad de medida que escogiste para cubrir la superficie de la cartulina fue: un  
cuadrado Porqué: Casi me tapo toda la  
cartulina

*Ilustración 58. Respuesta de Rosa.*

a.) La unidad de medida que escogiste para cubrir la superficie de la cartulina fue: el  
rectángulo Porqué: pude cubrir la superf  
ficie

*Ilustración 59. Respuesta de Nataly.*

Se observa que las unidades de medida seleccionadas por los participantes poseen características similares a las de la cartulina que debían cubrir, la cual es de forma cuadrada, cada participante escogió figuras cuadradas o rectangulares, porque al observarlas establecieron relación con la superficie, teniendo en cuenta que también se les había entregado figuras circulares en diferentes tamaños, dejando en evidencia que tienen claridad al escoger elementos adecuados para cubrir una superficie plana.

Seguidamente los estudiantes realizaron el conteo de las unidades de medida necesarias para cubrir la cartulina y cada uno obtuvo resultados diferentes debido a que las unidades de medida presentaban distintos tamaños. Posteriormente los participantes compararon el trabajo realizado con los compañeros, algunos dijeron *tú tienes menos que yo*, la docente intervino y les preguntó: *¿Por qué Nataly utilizó más unidades o figuras que David?*, Nataly, respondió: *porque los cuadrados son más grandes que las figura que yo utilice*

(registro en audio 04 – 10 – 2019), lo expuesto deja en evidencia, que los participantes tienen claridad respecto a la utilización y la cantidad de unidades de medida necesarias para cubrir una superficie, es decir, que, entre más grande es la unidad de medida se necesita menor cantidad para cubrir una superficie.

Al indagar sí la unidad de medida fue la más apropiada para cubrir la superficie, los participantes respondieron justificando su respuesta.

c.) La unidad de medida que utilizaste, fue la más apropiada para cubrir la superficie: Si  
 porqué: cubrí casi toda la superficie de la cartulina

*Ilustración 60. Respuesta de David.*

c.) La unidad de medida que utilizaste, fue la más apropiada para cubrir la superficie: no  
 porqué: algunos espaciositos quedaron sin cubrir

*Ilustración 61. Respuesta de Rosa.*

c.) La unidad de medida que utilizaste, fue la más apropiada para cubrir la superficie: Si  
 porqué: el rectángulo cubrió la superficie

*Ilustración 62. Respuesta de Nataly.*

En lo expuesto por los participantes, se observa que respondieron de acuerdo con el trabajo realizado, teniendo en cuenta que debía cubrir la superficie en su totalidad, Rosa por su parte observó detalladamente y manifestó que *no, porque le quedaron algunas partes sin cubrir*, David, respondió: *si, cubrí casi toda la superficie de la cartulina* y Nataly *si porque el rectángulo me cubrió la superficie* al observar detalladamente descubrieron que quedaban algunos espacios sin cubrir. Por lo anterior, se puede deducir que las unidades de medida usadas por los participantes permitieron establecer una medida más aproximada,



puesto que al cubrir la superficie de la cartulina con las unidades de medida quedaron algunas partes sin cubrir, es decir no cubrieron la superficie en su totalidad.

Al comparar el trabajo realizado con un compañero cada participante justificó de forma coherente, quien utilizó más unidades de medida para cubrir la superficie de la cartulina.

d.) Comparo mi trabajo con el de mi compañero, y quien utilizo más unidades de medida para cubrir la superficie de la cartulina fue: el de mi compañero porque tiene cuadros pequeños

*Ilustración 63.* Respuesta de David.

d.) Comparo mi trabajo con el de mi compañero, y quien utilizo más unidades de medida para cubrir la superficie de la cartulina fue: mi trabajo porque utilice más unidades de medida

*Ilustración 64.* Respuesta de Rosa.

d.) Comparo mi trabajo con el de mi compañero, y quien utilizo más unidades de medida para cubrir la superficie de la cartulina fue: yo porque yo utilice figura mas pequeñas

*Ilustración 65.* Respuesta de Nataly.

En la comparación realizada se observa que cada participante, identifica quien utilizó más unidades de medida y las relacionan con el tamaño, ya que al ser las figuras más pequeñas se necesitan más unidades de medida y si son grandes se necesitan menos unidades, además, que una superficie se puede medir con diferentes unidades de medida. En este sentido, se evidencia la relación con la categoría “Área y medida de superficie” y se logra el descriptor. En el siguiente literal se observa que los participantes determinaron cuántas unidades fueron necesarias para cubrir una superficie.

e.) La forma que utilizaste para saber cuántas unidades fueron necesarias para cubrir la superficie de la cartulina fue: contando los cuadros

*Ilustración 66. Respuesta de Rosa.*

f.) La forma que utilizaste para saber cuántas unidades fueron necesarias para cubrir la superficie de la cartulina fue: contado las unidades

*Ilustración 67. Respuesta de Nataly.*

Cada estudiante expuso de forma escrita la cantidad de unidades necesarias para cubrir la superficie y la forma que utilizaron para determinar la cantidad de unidades utilizadas, fue por medio del conteo, para establecer la medida de la superficie. De lo anterior se puede concluir que los estudiantes, identificaron que la superficie de una figura plana es la región encerrada por el borde o contorno, y que se puede cubrir utilizando diferentes unidades de medida.

Los anteriores argumentos permitieron evidenciar la construcción de la red de relaciones y el lenguaje, puesto que, los argumentos expuestos, tanto escritos como verbales, hacen parte de los aprendizajes adquiridos y se encuentran en relación con la categoría y valida el descriptor.

En la actividad cuatro, “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” (ver apéndice B.2.4), los participantes tomaron la unidad de medida y la marcaron en toda la superficie de la cartulina, hasta cubrirla totalmente, empezando por la unidad de medida “A” después la “B” y la “C”. En la Ilustración 69, se observa el proceso realizado por un participante.





*Ilustración 69.* Marcando la unidad de medida “A”.

Durante el proceso se evidenció lo cuidadoso que fue el participante al sobreponer la ficha (unidad de medida A), para marcarla en la cartulina, intuitivamente comienza por una esquina, lo que de alguna manera da a entender que el participante asume que empezar de esa forma le permite una mejor distribución de la ficha en la cartulina, (sería interesante preguntarse por qué no empezó por el centro), esta organización le permitió llevar una secuencia de la medida, claramente se ve que hace coincidir el borde de la de ficha con la línea de la cartulina, esto es para que los cuadros (unidades) queden distribuidos uniformemente, también se podría pensar que lo hace de esta forma porque es más fácil para contarlos. Es importante mencionar que todos los participantes marcaron de forma organizada la unidad de medida en la superficie, lo cual permitió establecer las unidades necesarias para cubrir la superficie.

Después de marcar la unidad de medida en la superficie, los participantes respondieron las preguntas relacionadas con el trabajo realizado. Al indagar sobre las veces que sobrepusieron la unidad de medida “A” por el largo de la cartulina, todos los participantes respondieron de forma coherente teniendo en cuenta el trabajo realizado.

a.) ¿Cuántas veces sobrepones la unidad de medida “A” por el largo de la cartulina?

5 veces

*Ilustración 68.* Respuesta de David.

b.) ¿Cuántas veces sobrepones la unidad de medida “A” por el ancho de la cartulina?

4 veces sobrepuse la unidad de medida

*Ilustración 69. Respuesta de Nataly.*

Todos los participantes realizaron el trabajo atendiendo a las indicaciones dadas, cada uno marcó la unidad de medida por el largo de la superficie y realizó el conteo para establecer las veces que la sobrepuso por el largo de la cartulina, en este mismo sentido contaron las veces que sobrepusieron la unidad de medida por el ancho, la organización de cada uno al sobreponer la unidad de medida permitió establecer, de manera sencilla, las veces que marcó la unidad por el largo y el ancho de la superficie, aspectos determinantes para hallar la cantidad de multifichas que cubren la superficie. En el siguiente literal se indagó por las veces que colocaron la unidad de medida “A” en toda la superficie de la cartulina.

c.) ¿Cuántas veces colocaste la unidad de medida “A” en toda la superficie de la cartulina?

20 veces coloque la unidad de medida

*Ilustración 72. Respuesta de Nataly.*

d.) ¿Cómo haces para saber cuántas veces sobrepones la unidad de medida “A” en toda la superficie de la cartulina? contando los largos y ancho

x multiplico 5 por 4 = 20

*Ilustración 70. Respuesta de David.*

Todos los participantes respondieron correctamente, pero, se observó que cada uno realizó un proceso diferente para hallar el dato final. Rosa, empezó a contar cada una de las unidades de forma consecutiva hasta terminarlas todas, David, expresó: profe  $5 \times 4$  me da 20 y Nataly, las empezó a contar de cinco en cinco en forma horizontal hasta completarlas todas. Lo anterior pone en evidencia que cada participante utilizó estrategias distintas para

hallar las veces que colocó la unidad de medida en la superficie de la cartulina. Por otro lado, la realización de esta actividad les permitió el fortalecimiento de las redes de relaciones en torno al concepto de área.

A continuación, se observa lo que respondieron los participantes en relación con el procedimiento realizado para saber las veces que superpusieron la unidad de medida en toda la superficie.

d.) ¿Cómo haces para saber cuántas veces sobrepones la unidad de medida “A” en toda la superficie de la cartulina? contandolas

*Ilustración 71. Respuesta de Rosa.*

d.) ¿Cómo haces para saber cuántas veces sobrepones la unidad de medida “A” en toda la superficie de la cartulina? contando y multiplicando  
las unidades de medida 4x5

*Ilustración 72. Respuestas de Rosa.*

Lo expuesto por los participantes da cuenta del razonamiento, cada uno halló un camino distinto para establecer la cantidad de veces que se debe sobreponer la unidad de medida en la superficie, por lo tanto, estos argumentos se encuentran en relación con los postulados de van Hiele donde propone que los problemas en las Fases deben ser abiertos con varias opciones de solución. Este acercamiento progresivo, fue fundamental para evidenciar el razonamiento de los participantes, haciendo referencia a la categoría y al descriptor en esta Fase (Orientación dirigida), ya que les permitió ir creando la red de relaciones en cuanto al concepto de área, las cuales se van fortaleciendo al pasar por cada una de las Fases del Modelo de van Hiele.

#### 4.2.2.4 Categoría 4: Lenguaje de área

##### 4.2.2.4.1 Descriptor

- Menciona palabras que guardan relación con el concepto de área.

Los participantes respondieron preguntas relacionadas con las actividades desarrolladas en esta Fase, que les permitieron involucrarse con el lenguaje relacionado al concepto de área, las cuales se exponen a continuación.

a.) La unidad de medida que escogiste para cubrir la superficie de la cartulina fue: los  
cuadros grandes Porqué: me ayudo a cubrir toda

Ilustración 73. Respuesta de David.

a.) La unidad de medida que escogiste para cubrir la superficie de la cartulina fue: un  
cuadrado Porqué: Casi me tapo toda la  
cartulina

Ilustración 74. Respuesta de Rosa.

a.) La unidad de medida que escogiste para cubrir la superficie de la cartulina fue: el  
rectángulo Porqué: pude cubrir la superf  
ficie

Ilustración 75. Respuesta de Nataly.

En la actividad tres “Escojo mi unidad de medida” (Apéndice B.2.3), al justificar en relación a la unidad de medida seleccionada para cubrir la superficie, los participantes expusieron de forma escrita, como se observa en las Ilustraciones 73, 74 y 75, frases como: *me ayudó a cubrir todo, casi me tapó toda la cartulina, pude cubrir la superficie*, en estas frases se evidencia de forma explícita expresiones como *cubrir, tapó, toda la superficie*.

Estos aportes permitieron observar la apropiación del lenguaje propio de esta categoría, donde no sólo se dio respuesta a la pregunta, sino que pudieron justificar de manera más refinada el porqué de la situación, aspecto que dio cuenta de la construcción de la red de relaciones con respecto al concepto objeto de estudio.

En este sentido, los participantes expusieron palabras que se relacionan con esta categoría. Al justificar la respuesta a la pregunta en el siguiente literal, se observó que los participantes expusieron en sus respuestas palabras que guardan relación con la categoría del lenguaje de área.

c.) La unidad de medida que utilizaste, fue la más apropiada para cubrir la superficie: Si  
 porqué: cubrí casi toda la superficie de la cartulina

*Ilustración 76. Respuesta de David.*

c.) La unidad de medida que utilizaste, fue la más apropiada para cubrir la superficie: no  
 porqué: algunos espaciositos quedaron sin cubrir

*Ilustración 77. Respuesta de Rosa.*

c.) La unidad de medida que utilizaste, fue la más apropiada para cubrir la superficie: Si  
 porqué: el rectángulo cubrió la superficie

*Ilustración 78. Respuesta de Nataly.*

Los participantes hicieron explícitos sus argumentos al responder los literales (a, c, d) en la actividad “Escojo mi unidad de medida” (Apéndice B.2.3), en lo expuesto se evidencian frases como: *cubrí casi toda la superficie*, ...*Quedaron sin cubrir*, ...*cubrió la superficie*, los cuales fueron empleados para justificar por qué la medida fue apropiada, estos aportes

se constituyeron en argumentos válidos que dan cuenta del lenguaje en torno al concepto de área, y se encuentra en relación con esta categoría y el descriptor.

#### 4.2.2.5 Categoría 5: *Alrededor de, contorno, borde, orilla*

##### 4.2.2.5.1 Descriptor

- *Utiliza partes del cuerpo para medir el contorno o borde de una figura o lugar y establece comparaciones entre ellas.*
- *Crea estrategias que le permiten establecer una medida más aproximada para medir el borde o contorno de una figura.*

A partir de la información obtenida al desarrollar las actividades en la Fase dos, los participantes solucionaron situaciones que involucraron aspectos relacionados con esta categoría. En la actividad dos “De paseo por algunos lugares” Al indagar por la parte del cuerpo que utilizaron para medir el contorno de la figura ellos respondieron.

e) La parte del cuerpo que utilizaste para medir el contorno de la figura fue: los

pies.

*Ilustración 79. Respuesta de David.*

e) La parte del cuerpo que utilizaste para medir el contorno de la figura fue: el

brazo

*Ilustración 80. Respuesta de Rosa.*

David utilizó la misma unidad de medida de la superficie para medir el contorno, “los pies” sin pensar en otras posibilidades o partes del cuerpo de mayor longitud o más delgadas para medir el contorno del lugar seleccionado, ya que, al caminar por el borde de la figura, esta parte del cuerpo le facilitó el proceso de medición, en cambio Rosa y Nataly, utilizaron una unidad de medida de mayor longitud, “el brazo” el cual le permitió medir el

contorno con mayor facilidad. Durante el proceso de medición se observó que los participantes marcaron el brazo en la superficie de la cartulina, después recortaron el molde convirtiéndolo en la unidad de medida que usaron para medir el contorno, el cual fueron sobreponiendo por el borde de la figura hasta recorrerla en su totalidad. De acuerdo con lo expuesto por los participantes se puede decir que relacionan la longitud del contorno con unidades de medida de forma alargada en este caso “el brazo” que fue la parte del cuerpo utilizada por dos de los participantes.

En este sentido se les preguntó si la medida que usaron para medir el contorno fue apropiada, y todos respondieron que *sí*, ¿Por qué?, respondió Nataly: *porque cuando la pusimos por la orilla se pudo recorrer todo* (registro de audio 1 – 10 -2019), pues, al recorrer el borde con el instrumento de medida y al contar las veces que lo sobrepusieron en el borde del lugar, les permitió concluir que la unidad de medida que construyeron fue apropiada para realizar el proceso de medición. Por lo anterior se puede decir que los estudiantes reconocen que las partes del cuerpo se pueden utilizar para medir el contorno de un lugar, el cual se encuentra en relación con la categoría “Alrededor de, contorno, borde, orilla” y el descriptor.

En el siguiente literal se indaga por otro elemento que podían usar para medir el contorno de la figura y ellos respondieron.

g) Otro elemento que usarías para medir el contorno de la figura es una regla  
metro palos Varilla larga

Ilustración 81. Respuesta de David.

g) Otro elemento que usarías para medir el contorno de la figura es una vara

Ilustración 82. Respuesta de Rosa.

Como se puede observar, los participantes David y Rosa se inclinaron por elementos de mayor longitud que son adecuados para realizar el proceso de medición, en el caso de



David mencionó instrumentos de medida estandarizadas como es *el metro, y la regla*, el cual le permite medir con precisión el contorno de cualquier lugar, Rosa escribió *una vara* (instrumento de madera largo y delgado), que también se puede utilizar como instrumento de medida para el contorno en lugares de mayor longitud, Nataly escribió *un cuaderno* el cual es el elemento con menor longitud, pero también puede ser utilizado para medir el contorno, si se utiliza uno de sus bordes como unidad de medida. Por lo anterior se puede evidenciar que los participantes construyeron diferentes instrumentos de medida utilizando las partes del cuerpo, las cuales le permitieron cubrir una superficie y medir el contorno de una figura en lugares del entorno, como es el parque, además, relacionaron otros elementos que utilizarían para cubrir una superficie y medir el contorno, estableciendo relación con el descriptor y la categoría.

En la actividad cuatro “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” los participantes realizaron mediciones del contorno con unidades de medida estandarizadas como la regla, (ver apéndice B.2.4). Al desarrollar la actividad los participantes tomaron la regla y realizaron el proceso de medición según las indicaciones dadas y posteriormente respondieron las preguntas. A continuación, se observa cómo los participantes midieron cada lado de la unidad de medida “A”.



Ilustración 83. Midiendo el Largo y Ancho.

e.) ¿Cuánto mide por el largo? mide 6 cm de largo

Ilustración 84. Respuesta de David.



f.) ¿Cuánto mide por el ancho? 5 centímetros

*Ilustración 85. Respuesta de Nataly.*

Es importante resaltar que al medir el largo, los estudiantes ubicaron de forma adecuada la regla para medir el borde de la unidad de medida “A”, en el sentido de colocarla desde el cero, lo que refleja el razonamiento, es decir, que de cero a uno equivale a una unidad, en la mayoría de los casos los estudiantes comienzan a medir desde uno, lo cual es un error, pues al creer, medir dos, tres, cuatro... unidades resulta que es una menos y esto se debe a la forma como ubicaron la regla para empezar a contar. Esta es una de las dificultades que se tiene cuando los estudiantes hallan el perímetro de una figura. En este caso los participantes realizaron un adecuado proceso de medición por cada lado de la unidad de medida lo que facilitó hallar el perímetro. Siguiendo la secuencia de las preguntas se indagó por la medida del contorno de la unidad “A”.

g.) ¿Cuánto mide el contorno de la unidad de medida “A”? 22 centímetros

*Ilustración 86. Respuesta de Rosa.*

Para determinar la medida del contorno de la unidad de medida “A” los participantes, realizaron un proceso: primero midieron cada lado de la unidad de medida, como se puede observar en la Ilustración 86, estos datos fueron registrados en sus cuadernos de notas, después, al indagar por la medida del contorno de la unidad de medida “A” se observó que David y Nataly expresaron 22, la docente les preguntó: ¿22 qué? Ellos respondieron: “22 centímetros”, preguntó la docente: ¿Cómo lo saben? Respondió David: sumé en la mente cinco más cinco y me dio 10 y seis más seis, y todo medió 22 (registro en video 23 – 10 – 2019). Rosa por su parte, realizó en su cuaderno de notas una adición de forma vertical y obtuvo el resultado: “22 cm”, lo anterior deja en evidencia que los participantes realizaron un proceso aditivo mental para hallar la medida total del contorno, esto quiere decir que todos los estudiantes han avanzado en su razonamiento en torno al concepto de perímetro, aspecto que deja en evidencia los avances en la construcción de la red de relaciones. En

este sentido también se indagó sobre el procedimiento realizado para obtener la medida del contorno.

h.) ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? midiendo  
los largos y ancho

*Ilustración 87. Respuesta de David.*

h.) ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? midiendo  
el contorno

*Ilustración 88. Respuesta de Rosa.*

h.) ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? midiendo  
el contorno y sumando

*Ilustración 89. Respuesta de Nataly.*

Cada participante explicó el proceso realizado para obtener la medida del contorno, dejando ver de manera escrita la forma cómo han razonado para hallar la medida. Finalmente se puede decir que los tres estudiantes reconocen conceptos asociados al perímetro, que le permiten hallar la medida del contorno en una figura dada, de acuerdo con el proceso de medición realizado con una regla. Los anteriores argumentos hacen referencia a la categoría 5 de esta Fase y al descriptor.

#### **4.2.2.6 Categoría 6: Perímetro y medida de perímetro**

##### *4.2.2.6.1 Descriptores*

- *Identifica el objeto que le permite medir con mayor precisión el contorno o perímetro de una figura.*

- *Reconoce que el contorno de una figura o lugar se puede expresar en centímetros.*

Al responder los literales de la actividad cuatro de la Fase dos “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” (Apéndice B.2.4). Se continuó con el proceso de medición con la unidad de medida “B”, utilizando la regla para medir los centímetros que esta tiene por cada lado y la medida total del contorno, cada participante tomó la regla y realizó el proceso de medición según las indicaciones dadas. Durante la actividad se observó que los participantes empezaron a medir cada lado utilizando la regla, empezando desde el cero, lo que deja ver el avance en el proceso de medición para hallar con mayor exactitud la medida del contorno de la unidad de medida “B”.

Al indagar por los centímetros que tiene la unidad de medida por el largo y el ancho ellos respondieron.

e.) ¿Cuánto mide por el largo? Mide 4 cm de largo

*Ilustración 90. Respuesta de David.*

f.) ¿Cuánto mide por el ancho? 3 C.m

*Ilustración 94. Respuesta de Nataly.*

Cada participante atendiendo al proceso de medición realizado con la regla estableció en centímetros la medida del largo y el ancho de la unidad de medida “B”, lo que les permitió determinar la medida del contorno con mayor facilidad, debido a que habían realizado el mismo procedimiento con la unidad de medida “A”. A continuación, se muestra una de las respuestas de los participantes en relación con la medida del contorno de la unidad de medida “B”.

g.) ¿Cuánto mide el contorno de la unidad de medida “B”? 14 C.m

*Ilustración 91. Respuesta de Rosa.*

Teniendo en cuenta la medida de cada lado, los participantes establecieron la medida del contorno de la unidad de medida “B” y a la vez explicaron el procedimiento que realizaron para obtener la medida total del contorno como se puede observar en las Ilustraciones 96, 97 y 98.

h.) ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? midiendo el largo y ancho y sumando cada lado

Ilustración 92. Respuesta de David.

h.) ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? sume 4 más 4 y 3 más 3 y sume 8 más 6 y me dio 14

Ilustración 93. Respuesta de Rosa.

h.) ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? sumando el ancho y el largo  $3+3=6$  y  $4+4=8$  y 8 más 6 me dio 14

Ilustración 94. Respuesta de Nataly.

Se puede observar que cada uno de los participantes realizó un procedimiento distinto, que lo llevo a obtener la medida del contorno (perímetro), David realizó un proceso mental, más directo para hallar la medida del contorno, por otro lado, Rosa y Nataly, fueron más explícitas al especificar cada detalle del proceso realizado, al sumar los datos de la medida de cada lado. Paso a paso, los participantes dan cuenta de los avances en cuanto al proceso de razonamiento que les permitió hallar de forma sencilla la medida total del contorno que es el perímetro de la unidad de medida. De esta manera se observó que los participantes midieron el contorno utilizando instrumentos de medida que permiten una mayor precisión para hallar el perímetro en una figura expresada en centímetros. En este sentido también los participantes dieron cuenta de la categoría 6 y el descriptor al dar respuesta a los literales de la actividad 4 de la Fase dos, “Unidad de medida C”.

#### 4.2.2.7 Categoría 7: Lenguaje de perímetro

##### 4.2.2.7.1 Descriptor

- Menciona palabras que guardan relación con el concepto de perímetro

A continuación, se presentan algunas Ilustraciones 99, 100 y 101, donde se evidencia el lenguaje que se relaciona con esta categoría.

En la actividad cuatro de la Fase dos, “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” (Apéndice B.2.4), en el literal h, al indagar por el procedimiento realizado para obtener la medida del contorno, los participantes respondieron.

h.) ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? midiendo  
los largos y ancho

Ilustración 95. Respuesta de David.

h.) ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? midiendo  
el contorno

Ilustración 96. Respuesta de Rosa.

h.) ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? midiendo  
el contorno y sumando

Ilustración 97. Respuesta de Nataly.

Cada participante explicó el medio realizado para obtener la medida del contorno, dejando ver de manera escrita la forma como han razonado para hallar esta medida.

Finalmente se puede decir que los participantes reconocen palabras asociados al perímetro, al exponer los siguientes argumentos en sus respuestas...los largos y los anchos, midiendo el contorno, midiendo el contorno y sumando.

Para van Hiele uno de los objetivos de esta Fase es que los estudiantes descubran y comprendan los conceptos que se están estudiando, por tanto, al responder preguntas donde se evidencia un lenguaje adecuado relacionado con las categorías, lenguaje de área y lenguaje de perímetro, se evidencia el reconocimiento de los conceptos estudiados. Además, los argumentos plasmados, permitieron observar la construcción de la red de relaciones de los conceptos en mención.

A continuación, se presenta la Tabla 15, que muestra un resumen de los avances de los participantes en la Fase dos (Orientación dirigida).

**Tabla 15.** *Avances de los participantes. Fase 2 (Orientación dirigida)*

Categorías	Participantes	Avances
Cubrir, sobreponer, plasmar	David	En la actividad uno “Comparando superficies” realizó comparaciones, conteos e identificó por qué plasmó la mano más veces en una superficie que en la otra literal b. En la actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo el contorno” cubrió la superficie utilizando las diferentes unidades de medida.
	Rosa	Actividad “Escojo mi unidad de medida” seleccionó la unidad que le permitió cubrir la superficie de la cartulina, literales a y c. En la actividad “Comparando superficies” estableció comparaciones al plasmar la mano de diferentes formas en la superficie de la cartulina.
	Nataly	En la actividad “Comparando superficies” estableció estrategias para cubrir mayor superficie en una figura, en la actividad cuatro de esta Fase cubrió superficies con unidades de medida grandes y pequeñas.
Superficie	David	Actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida” cubrió la superficie con las diferentes unidades de medida y

Categorías	Participantes	Avances
		estableció las veces que la sobrepuso en la superficie de la cartulina, literales b, c, y d.
	Rosa	Actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo el contorno” literales a, b, y c, cubrió una superficie utilizando diferentes unidades de medida y expuso la cantidad necesaria para cubrirla.
	Nataly	Actividad “Escojo mi unidad de medida” cubrió la superficie con la unidad de medida que seleccionó, en la actividad “Cubriendo superficies y midiendo su contorno” sobrepuso las unidades de medida en la superficie de la cartulina y estableció las veces que lo realizó.
Área y medida de superficie	David	Estableció estrategias que le permitieron determinar las veces que sobrepuso la unidad de medida en una superficie, Actividad “Escojo mi unidad de medida” literales a, c, d y e, actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo el contorno” determinó las veces que sobrepuso las unidades de medida en la superficie.
	Rosa	Expuso la medida de la superficie al responder los literales d, e. En la actividad “Escojo mi unidad de medida” realizó un conteo de las unidades de medida que utilizó para cubrir la superficie, en la actividad “De paseo por algunos lugares” construyó unidades de medida y cubrió la superficie del lugar seleccionado.
	Nataly	Determinó las veces que sobrepuso la unidad de medida “A, B, C” en la superficie, en la actividad “Escojo mi unidad de medida” comparó el trabajo realizado con la compañera para determinar quién realizó más unidades de medida.
Lenguaje de área	David	Utilizó argumentos en la actividad “Escojo mi unidad de medida” en los literales a y c, al utilizar expresiones “... <i>cubrir todo, cubrí casi toda la superficie...</i> ”, que se encuentran en relación con esta categoría.

Categorías	Participantes	Avances
	Rosa	Se observó en las expresiones “ <i>me tapó toda la...</i> ”, “ <i>...quedaron sin cubrir</i> ”, expuestas en la actividad tres “Escojo mi unidad de medida” en los literales a y c, al justificar la unidad de medida aleccionada.
	Nataly	En los argumentos presentados, en la actividad “Escojo mi unidad de medida” en los literales a y c, al utilizar expresiones “ <i>... cubrir la superficie...</i> ”, “ <i>el rectángulo cubrió la superficie</i> ” que se encuentran en relación con esta categoría.
Alrededor de, contorno, borde, orilla	David	En la actividad “De paseo por algunos lugares” construyó unidades de medida para recorrer el contorno de un lugar, en la actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” midió el contorno de las unidades de medida “A, B, C” utilizando la regla.
	Rosa	Actividad “De paseo por algunos lugares” recorrió el contorno de algunos lugares, además construyó unidades de medida con los compañeros y recorrió el contorna de un lugar. En la actividad “Comparando superficies” delineó en contorno de un trozo de cartulina.
	Nataly	Actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” midió el contorno de las unidades de medida “A, B, C” utilizando la regla.
Perímetro y medida de perímetro	David	Utilizó objetos para medir el contorno de un lugar determinado, actividad dos, “Reconociendo nuestro entorno” de la Fase dos, literal g, además utiliza la regla como el instrumento que le permite medir el contorno de una figura cuadrada o rectangular con mayor precisión, actividad cuatro de la Fase dos, literales e, f, g, h.
	Rosa	Realizó procesos de medición del contorno con objetos, regla y lo expresó en centímetros, en la actividad “Comparando superficies” midió el contorno de la cartulina utilizando la cuarta y la pulgada.



Categorías	Participantes	Avances
	Nataly	Actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” expuso la medida del contorno de las unidades de medida en centímetros, literales e, f, g, h.
Lenguaje de perímetro	David	Actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” se evidenció el lenguaje relacionado con el concepto de perímetro al responder <i>midiendo largos y anchos, sumando cada lado</i> .
	Rosa	Actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” al responder el literal h, se evidencio el lenguaje relacionado con el concepto de perímetro al responder.
	Nataly	Actividad “Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y midiendo su contorno” al responder el literal h, se evidenció el lenguaje relacionado con el concepto de perímetro al responder <i>midiendo el contorno y sumando</i> .

En la Tabla 15 de la Fase dos (Orientación dirigida), del Modelo de van Hiele se presentaron experiencias de aprendizajes que favorecieron el razonamiento de los participantes, de tal forma que permitieron explorar el campo de estudio a partir del material implementado para el desarrollo de las actividades.

En la categoría “cubrir, sobreponer, plasmar” se relacionaron actividades en que los participantes enfrentaron situaciones donde compararon superficies, las cuales permitieron realizar conteos de las veces que sobrepusieron una unidad de medida en la superficie o en el contorno de una figura o lugar. Los participantes construyeron unidades de medida usando las partes del cuerpo, que después utilizaron para cubrir la superficie de un lugar y determinaron las veces que sobrepusieron la unidad de medida en la superficie y el contorno. En esta Fase utilizaron la regla como instrumento de medida, proceso que fue evidenciado al expresar la longitud del contorno de una unidad de medida en centímetros.

El lenguaje empleado en esta Fase se fue refinando en la medida que desarrollaron las actividades, el uso de los instrumentos fue más preciso, en relación con la organización y al momento de responder las preguntas, las explicaciones dadas tenían una intención al momento de explicar o justificar el procedimiento realizado al solucionar una situación.

Durante el trabajo realizado por los participantes se observó el progreso al momento de dar solución a las preguntas relacionadas con los conceptos de área y perímetro, dejando en evidencia el análisis al momento de solucionar una situación, estos elementos permitieron la construcción de elementos básicos para la construcción de la red de relaciones. A continuación, se presenta la Tabla 16, que muestra aspectos relacionados con el lenguaje utilizado por los participantes en la Fase dos.

**Tabla 16.** *Lenguaje utilizado por los participantes en la Fase dos (Orientación dirigida).*

Participante	Lenguaje con relación al concepto de superficie y su medida el área	Lenguaje con relación al concepto de contorno y su medida el perímetro
David	Al igual que en la Fase anterior, en esta Fase también plasmó la mano en la misma cartulina, pero esta vez la plasmó siete veces. Al compararlas, explicó en cual se cubrió mayor superficie de la siguiente manera: <i>en la que acabo de realizar están cerradas las manos y en la primera estaban abiertas las manos.</i> Al preguntarle por otro objeto para cubrir la cartulina respondió: <i>el cuaderno.</i>	El participante relacionó el contorno de figuras planas (parque del barrio) con unidades de medida utilizando partes del cuerpo como los pies. Al preguntarle por otro objeto para recorrer el contorno del parque del barrio. Respondió: <i>metro, palo, varilla larga.</i>
Rosa	Al igual que en la Fase anterior, en esta Fase también plasmó la mano en la misma cartulina, pero esta vez la plasmó ocho veces. Al compararlas, explicó en cual se cubrió mayor superficie de la siguiente forma: <i>en la que acabé de realizar, porque</i>	La participante relacionó el contorno de figuras planas (parque del barrio) con unidades de medida utilizando partes del cuerpo como el brazo. Al preguntarle por otro objeto para recorrer el contorno del parque del barrio.

---

	<i>ahí cerré más las manos.</i>	Respondió: <i>una vara</i> (rama de árbol sin hojas, larga y delgada).
	Al preguntarle por otro objeto para cubrir la cartulina respondió: <i>yo utilizaría un cuaderno.</i>	
Nataly	Al igual que en la Fase anterior, en esta Fase también plasmó la mano en la misma cartulina, pero esta vez la plasmó siete veces. Al compararlas, explicó en cual se cubrió mayor superficie de la siguiente manera: <i>en la que acabé de hacer, porque en la anterior plasmé la mano abierta y ahora no.</i>	La participante relacionó el contorno de figuras planas (parque del barrio) con unidades de medida utilizando partes del cuerpo como: <i>mi brazo.</i>
	Al preguntarle por otro objeto para cubrir la cartulina respondió: <i>un cuaderno.</i>	Al preguntarle por otro objeto para recorrer el contorno del parque del barrio. Respondió: <i>el cuaderno de mi compañera.</i>

---

#### 4.2.2.7.2 Análisis del lenguaje

En la Tabla 16, se muestra el lenguaje utilizado por los participantes en torno a los conceptos de área y perímetro. Como se puede observar emplearon explicaciones adecuadas al hacer comparaciones y exponer en cuál superficie se plasmó la mano más veces o menos veces y por qué.

Al comparar el lenguaje de la Fase uno (Información), con el de la Fase dos (Orientación dirigida), se observó el progreso en cada uno de los participantes, puesto que en la Fase uno, realizaron conteo y estimaciones, como las veces que un adulto podría plasmar la mano en un trozo de cartulina (30 cm x 30 cm), mientras que en la Fase dos razonaron que al cerrar las manos y colocarlas más juntas, estas podrían cubrir mayor superficie, como lo expresó David al decir que: *en la que acabo de realizar están cerradas las manos y en la primera estaban abiertas las manos.*

En relación al perímetro en la Fase uno, representaron gráficamente los pasos que dieron por el contorno de la placa polideportiva de la institución y encontraron el total de pasos,

mediante la suma de sus lados, mientras que en la Fase dos relacionaron elementos como: el metro, una vara, para recorrer el contorno de lugares como la placa polideportiva, entre otros.

#### *4.2.2.7.3 Red de relaciones*

Se puede analizar que en esta Fase los participantes realizaron comparaciones, conteos, dimensionamientos, relaciones con objetos del entorno, que les permitió expresar en diferentes formas algunos mecanismos para abarcar mayor superficie, tales como el cuaderno o libro que son los elementos de forma rectangulares y cuadrados, con los que interactúan frecuentemente.

De esta manera se pudo observar los procedimientos realizados por los participantes en cuanto al contorno de un lugar o figura plana, ya que visualizaron otras unidades alternativas de medidas como palos y varillas que podían ser utilizadas para realizar el recorrido del borde de los lugares o figuras.

Además, se mostró mayor seguridad en cuanto al lenguaje utilizado en relación a los conceptos de área de una superficie y al de perímetro de un contorno, debido a que los participantes pudieron relacionar elementos cercanos con unidades de medida comparables entre sí, para el área (palma de la mano abierta y cerrada, cuaderno o libro) y para el perímetro (metro, palo, brazo, varilla larga). En la Fase dos se clarificaron los conceptos de superficie y contorno y los tipos de figuras que fueron objeto de aprendizaje para ellos, con los cuales se fortalecen los elementos básicos de la red de relaciones en torno a los conceptos de área y perímetro.

### **4.2.3 Fase 3: Explicitación**

En esta Fase los participantes socializan con los compañeros, las experiencias que han tenido al realizar las actividades de las Fases uno y dos. Para ello, se les presenta una actividad y un cuestionario donde intercambian ideas en relación con los conceptos de área

y perímetro de la superficie de una figura o lugar, además, resuelven una actividad práctica donde responden interrogantes que son socializados con los demás compañeros.

#### **4.2.3.1 Categoría 1: Cubrir, sobreponer, plasmar**

##### *4.2.3.1.1 Descriptor*

- *Explica a sus compañeros los procedimientos realizados para cubrir superficies con diferentes unidades de medida, y la forma como determina las veces que sobrepone la medida para cubrir la superficie.*

Los participantes midieron superficies de figuras rectangulares, cuadradas, empleando diferentes unidades de medida para cada una de ellas. En la actividad “Explico lo aprendido” (Apéndice B.3.1), se les entregó diferentes unidades de medida, ellos eligieron la más conveniente, que les permitió cubrir la superficie del escritorio que se encuentra en el aula de clase y establecer las unidades de medida necesaria para cubrir la parte superior en su totalidad. David, realizó la lectura en voz alta para que los compañeros escucharan las indicaciones del trabajo a realizar, además, mostró la unidad de medida seleccionada y les dijo: *como ya tenemos la unidad, ahora hay que cubrir la superficie de la mesa y la voy a marcar* (registro en audio, 12 – 11 – 2019). Durante el proceso se observó que David de forma organizada marcó la unidad de medida, primero por el largo y después por el ancho de la mesa, como se puede ver en la Ilustración 102.



*Ilustración 98.* Marcando la unidad de medida, en la superficie.

Después de marcar la unidad de medida por el largo de la mesa, trazó líneas verticales de un extremo al otro, se le preguntó: *¿se necesita marcar la unidad de medida en toda la superficie de la mesa?* él respondió: *no, yo multiplico la cantidad del largo por el ancho* (registro en audio, 12 – 11 – 2019), esta respuesta evidencia el razonamiento del participante el cual le permitió hallar las unidades de medida necesarias para cubrir la superficie.

Por otro lado, Rosa y Nataly, para mostrar a los compañeros el proceso realizado marcaron la unidad de medida, empezando por una de las esquinas del largo de la mesa y después por el ancho, con la colaboración de algunos compañeros señalaron con puntos en el lado opuesto de la mesa y después trazaron líneas horizontales y verticales como se muestra en la Ilustración 103.



*Ilustración 99.* Rosa y Nataly marcando la unidad de medida.

Después de trazar todas las líneas horizontales y verticales, contaron las unidades de medida marcadas por el largo de la mesa y sumaron la cantidad de veces que marcaron la unidad de medida en forma consecutiva y horizontal, con el fin de hallar el número de unidades necesarias para cubrir la superficie, este trabajo lo compartieron con los compañeros del grado tercero de Educación Básica primaria donde muchos participaron al expresar la medida de la superficie. Seguidamente respondieron las preguntas relacionadas con el trabajo realizado, y socializaron las respuestas con los compañeros del grupo.

a.) Las unidades de medidas que necesitaste para cubrir la superficie de la mesa son:

234234 unidades de medida

*Ilustración 100.* Respuesta de David.

a.) Las unidades de medidas que necesitaste para cubrir la superficie de la mesa son:

66 unidades cuadradas

*Ilustración 101.* Respuesta de Rosa y Nataly.

c.) Describe lo que hiciste para saber cuántas unidades de medida se necesitan para cubrir de la superficie de la mesa

primero coloque 10 unidades de medida por el largo y el ancho y multiplique

*Ilustración 102.* Respuesta de David.

c.) Describe lo que hiciste para saber cuántas unidades de medida se necesitan para cubrir de la superficie de la mesa

yo repase la unidad de medida sobre la mesa y luego tenía que contar pero yo sume

*Ilustración 103.* Respuesta de Rosa.

Los participantes explicaron de forma apropiada la manera de hallar las unidades de medida necesarias para cubrir la superficie. David, al aplicar cálculos numéricos utilizó la multiplicación para determinar las unidades de medida necesarias. Rosa y Nataly, emplearon la adición, al sumar todas las unidades de medida de forma horizontal, mientras que explicaban a los compañeros el proceso realizado, también les contaron que entre más pequeña es la unidad de medida más veces hay que sobreponerla.

La docente investigadora intervino y les preguntó: ¿Por qué hay que sobreponer la unidad de medida más veces? Nataly respondió: *profe, como es más pequeña la figura ocupa menos espacio y nos toca marcarla más veces*. Preguntó la docente: ¿y qué pasa cuando la unidad de medida es grande? David respondió: *profe, como es más grande ocupa más espacio, entonces la pongo menos veces* (registro en audio 12 – 10 - 2019), lo cual conllevó a la diferencia en las respuestas de los participantes que se evidencia en la Ilustración 105 y 106 o en el literal a), de la actividad “Explico lo aprendido” (Apéndice B.3.1). Las expresiones dan cuenta de los procedimientos realizados para cubrir una superficie y del lenguaje, el cual se ha refinado de forma progresiva en torno al concepto de área. Estos aspectos han permitido la construcción de la red de relaciones y se encuentran en relación con la categoría “cubrir, sobreponer, plasmar” y el descriptor.

En el cuestionario (Apéndice B.3.2), implementado para esta Fase (Explicitación), al indagar por lo que realizaron en la primera actividad, los participantes respondieron:

a) ¿Cuéntame que hiciste en la primera actividad cuando plasmaste con pintura la mano sobre la cartulina?

*fue muy divertido yo pinte mi la mano  
y la colo que en la cartulina me gusto*

Ilustración 104. Respuesta de Rosa.



a) ¿Cuéntame que hiciste en la primera actividad cuando plasmaste con pintura la mano sobre la cartulina?

plasmé la mano en toda la cartulina y la puse de color naranja clarito

Ilustración 105. Respuesta de Natalia.

Los estudiantes recordaron con facilidad la primera actividad realizada en la Fase uno (Información), donde plasmaron la mano reconociendo la superficie de la cartulina, mencionaron algunas características generales identificadas a través de la visualización y manipulación de los materiales empleados en el desarrollo de la actividad, aspectos que guardan relación con esta categoría y el descriptor.

Dado el avance de los participantes en las Fases anteriores y la relación que guardan las categorías dos y tres se determina unificarlas, teniendo en cuenta que, los participantes razonan con relación a la superficie y medida de la superficie como concepto unificado. De aquí en adelante se entenderá la categoría dos como Medida de Superficies (Categoría refinada).

#### 4.2.3.2 Categoría 2: Medida de Superficies

##### 4.2.3.2.1 Descriptores

- *Dadas varias unidades de medidas planas identifica la más adecuada que se debe sobreponer para cubrir una superficie en su totalidad.*
- *Explica a los compañeros la forma del conteo para determinar la medida del área de una superficie.*

A continuación, se exponen algunos argumentos del cuestionario que se encuentran en relación con esta categoría y los descriptores.

e) Entre la primera actividad y la segunda actividad en la cual plasmaste las manos de diferentes formas, ¿en cuál se cubrió más superficie? en la segunda actividad  
 ¿Por qué? Porque en la primera coloque manos separadas y en la segunda coloque las manos pegadas

Ilustración 106. Respuesta de David.

e) Entre la primera actividad y la segunda actividad en la cual plasmaste las manos de diferentes formas, ¿en cuál se cubrió más superficie? en la segunda  
 ¿Por qué? en la primera plasmaron las manos abiertas y en la segunda cerrada

Ilustración 107. Respuesta de Rosa.

e) Entre la primera actividad y la segunda actividad en la cual plasmaste las manos de diferentes formas, ¿en cuál se cubrió más superficie? La segunda  
 ¿Por qué? plasmé la mano de diferentes formas

Ilustración 108. Respuesta de Nataly.

La pregunta realizada en el literal e), hace relación a la actividad uno, “Plasmemos nuestras manos” (Apéndice B.1.1), de la Fase uno (Información), y la actividad uno, “Comparando superficies” (Apéndice B.2.1), de la Fase dos (Orientación dirigida), la cual consistió en plasmar la palma de la mano con pintura en la superficie de una cartulina, los participantes al comparar las dos actividades, establecieron semejanzas y diferencias en cuanto al cubrimiento de las superficies y a las veces que plasmaron la mano.

En lo expuesto por los participantes en la Ilustración 110, 111 y 112, permitió evidenciar que todos coincidieron que, en la segunda actividad, es decir, en la Fase dos, se cubrió más superficie, pero cada uno lo justificó a su manera. David, por su parte argumentó que: *en la primera actividad, la mano la plasmó más separada una de la otra, y en la segunda*

*actividad la mano quedó más pegada, lo que da a entender que visualiza las proporciones de una superficie cubierta, ya que en la segunda actividad pudo abarcar más superficie al plasmar la mano.*

Al respecto, Rosa explicó: *en la primera plasmaron las manos abiertas y en la segunda cerrada, se infiere, que al plasmar la mano en la primera actividad los dedos quedaron separados, y en la segunda los dedos quedaron unidos, al establecer las diferencias. Para corroborar esta información se le preguntó: ¿Cómo crees que se debe plasmar la mano para cubrir mayor superficie? Rosa respondió: más cerquita y con los dedos juntos* (registro en audio 12 – 11 - 2019), lo anterior deja en evidencia que Rosa visualizó que la distancia entre un dedo y el otro fue lo que permitió que en la primera actividad se plasmara la mano menos veces.

Nataly por su parte, expuso: *plasmé la mano de diferentes formas* dando a entender que la posición de la mano influyó en la cantidad de veces que se pueda plasmar sobre una superficie, por lo anterior se le preguntó *¿Cómo crees que se debe plasmar la mano para cubrir mayor superficie? Nataly respondió: más juntas, y que los dedos no queden separados* (registro en audio 12 – 11 - 2019), lo expuesto dejó claro que, entre más cerca se plasme la mano con los dedos unidos, mayor superficie se puede cubrir, estas interacciones fueron compartidas con los compañeros del grupo. Es importante mencionar que las actividades comparadas por los participantes habían sido realizadas en semanas anteriores, y al responder las preguntas relacionadas con las experiencias de aprendizaje, lo hicieron con naturalidad, dando a entender que la interacción y manipulación con los materiales concretos generaron un aprendizaje que permitió a los participantes establecer diferencias y semejanzas al realizar las comparaciones.

Al realizar la actividad uno de esta Fase “Explico lo aprendido” (Apéndice B.3.1), cada participante seleccionó la unidad de medida adecuada para cubrir la superficie del escritorio del aula de clase. Rosa y Nataly, marcaron la unidad de medida seleccionada por el largo y el ancho de la superficie de la mesa y después trazaron líneas horizontales y verticales, posteriormente se les preguntó *¿Qué debes hacer para hallar la cantidad de unidades de*

medida marcadas en la superficie de la mesa? Rosa respondió *contando las unidades de medida marcadas por el largo de la mesa y sumando de 10 en 10* (registro en audio 12 – 11 – 2019), las expresiones de los participantes, al explicar cómo han realizado las actividades, el diálogo con los compañeros al momento de sobreponer la unidad de medida, y al justificar las comparaciones, permitieron evidenciar la red de relaciones y la forma como se ha ido refinando el lenguaje, aspectos que se encuentran en relación con la Fase tres del Modelo de van Hiele.

#### 4.2.3.3 Categoría 3: Medida de perímetro

##### 4.2.3.3.1 Descriptores

- *Explica a sus compañeros los procedimientos realizados para medir el borde o contorno de una figura o lugar.*
- *Explica con claridad el procedimiento realizado al efectuar una actividad relacionada con la medición del contorno.*

Al desarrollar la actividad “Explico lo aprendido” (Apéndice B.3.1), los participantes al medir el contorno de la mesa del aula de clase con el metro en presencia de los compañeros explicaron que debían iniciar por el cero para que la medida fuera correcta. A continuación, se observa las respuestas de los participantes en relación con la actividad desarrollada.

d.) El largo de la mesa es: un metro y 10 c.m

*Ilustración 109. Respuesta de Rosa.*

e.) El ancho de la mesa es: 59 c.m

*Ilustración 110. Respuesta de Rosa.*

Al trabajar esta situación práctica, cada participante escribió en metros y centímetros la medida del largo y el ancho de la mesa, lo cual permitió observar elementos necesarios para hallar la medida total del contorno. Seguidamente, en presencia de los compañeros realizaron las adiciones de la medida de cada lado, para que observaran cómo hallaron la medida del perímetro de la mesa, por lo cual se les preguntó: ¿para saber la medida total del contorno qué se debe hacer? David respondió: *sumo todos los lados* ¿para saber la medida del contorno de la mesa debes medir todos los lados? Nataly respondió: *no ¿por qué?* Preguntó la docente, Nataly respondió: *yo mido estos dos lados y ya sé los otros* (registro en audio, 12 – 11 – 2019), procedimiento que dejó ver la apropiación del proceso por parte de los participantes para hallar la medida total del contorno.

En las siguientes ilustraciones se observa la explicación de un participante en relación con el procedimiento realizado.

g.) ¿Cómo haces para saber la medida total del contorno de la mesa? Yo  
sumo la medida de cada lado de la mesa

Ilustración 111. Respuesta de Rosa.

f.) ¿Cuál es la medida total del contorno de la mesa? 3 metros y 38 c.m

Ilustración 112. Respuesta de Rosa.

Durante el proceso se observó el compromiso de los participantes y disposición por parte de los compañeros al escuchar los comentarios de cada uno, en su mayoría estuvieron atentos, mientras se desarrolló la actividad hubo algunos que participaron en el proceso de medición y realizaban conteos en centímetros al utilizar la regla. Los estudiantes midieron la superficie y el contorno utilizando diferentes unidades de medida, dialogaron con algunos compañeros explicando el procedimiento realizado para hallar las unidades de medida de la superficie y la medida del contorno. Por lo anterior se puede inferir que los participantes han creado las bases de las redes de relaciones que posibilita el razonamiento,

el cual permite avanzar en el desarrollo de las actividades en las Fases del modelo de van Hiele.

En los procesos socializados en esta Fase, los participantes presentaron explicaciones relacionadas con esta categoría, en la actividad “Explico lo aprendido” (Apéndice B.3.1) al realizar procesos de medición. A continuación, se observa las explicaciones de los participantes en relación con el procedimiento realizado.

f.) ¿Cuál es la medida total del contorno de la mesa? 3 metros y 38 cm

*Ilustración 113.* Respuesta de David.

g.) ¿Cómo haces para saber la medida total del contorno de la mesa? Midiendo  
el largo y el ancho y sumo el largo y el ancho

*Ilustración 114.* Respuesta de David.

David, socializó el procedimiento realizado para hallar la medida del contorno de la mesa, al explicar que midió el largo y el ancho y después sumó la medida de los lados para hallar la medida total. Su razonamiento acerca del concepto de perímetro fue coherente y se encuentra en relación con la categoría “medida de perímetro” y los descriptores. A continuación, se observa lo que respondió Rosa y Nataly.

f.) ¿Cuál es la medida total del contorno de la mesa? 3 metros y 38 c.m

*Ilustración 119.* Respuesta de Rosa.

g.) ¿Cómo haces para saber la medida total del contorno de la mesa? Yo  
sumo la medida de cada lado de la mesa

*Ilustración 115.* Respuesta de Rosa.

g.) ¿Cómo haces para saber la medida total del contorno de la mesa? Sumo todo  
lo que mide

*Ilustración 116. Respuesta de Nataly.*

Los argumentos expuestos por los participantes fueron socializados con los compañeros que, en forma de diálogo, utilizando un lenguaje sencillo explicaron el procedimiento realizado para hallar la medida del contorno, se puede evidenciar que Rosa utilizó la expresión tres metros y 38 centímetros para indicar la medida total del contorno de la mesa, lo que da a entender que hay un avance en las unidades de medidas, al indicar metros y centímetros.

Para corroborar los argumentos escritos, la docente les preguntó: si quiero hallar la medida del contorno de este cuaderno, ¿qué debo hacer? Rosa respondió: *mido cada lado*, preguntó la docente: ¿y para hallar la medida total del contorno? Rosa respondió: *sumo todo* (registro en video, 12 – 11 – 2019), procedimiento que da cuenta del razonamiento en relación con el concepto de perímetro.

Dado el avance de los participantes en las Fases anteriores y la relación que guardan las categorías cuatro y siete se determinó unificarlas, teniendo en cuenta que, los participantes razonan con relación al lenguaje como expresión transversal de área y perímetro.

Por tal razón de aquí en adelante se entenderá la categoría cuatro como Lenguaje de área y perímetro (Categoría refinada).

#### ***4.2.3.4 Categoría 4: Lenguaje de área y perímetro***

##### *4.2.3.4.1 Descriptor*

- *Explica a los compañeros los objetos utilizados para cubrir superficies y medir el borde, menciona cuáles son los más apropiados.*
- *Menciona palabras relacionadas con los conceptos de área y perímetro, aprendidas en las Fases anteriores.*

A continuación, se muestra en las Ilustraciones 122, 123 y 124, aspectos que evidencian cuales fueron las unidades de medida indicadas para realizar mediciones más precisas, lo cual está relacionado directamente con el lenguaje.

h) De las unidades de medidas implementadas en las actividades anteriores, ¿cuáles son las indicadas para realizar mediciones de forma más precisa?

la cuarta y la regla

¿Por qué?

*Ilustración 117. Respuesta de David.*

h) De las unidades de medidas implementadas en las actividades anteriores, ¿cuáles son las indicadas para realizar mediciones de forma más precisa?

Para mí fue la cuarta

¿Por qué? a mi me ayudo a medir bien

*Ilustración 118. Respuesta de Rosa.*

h) De las unidades de medidas implementadas en las actividades anteriores, las más indicadas para realizar mediciones de forma más precisa son: el metro

Porqué: tiene la medida perfecta y ideal para medir

*Ilustración 119. Respuesta de Nataly.*

Los participantes respondieron de forma escrita, teniendo en cuenta las unidades de medida utilizadas en las actividades desarrolladas en las Fases de Información y Orientación dirigida. Con el propósito de seguir explorando aspectos relacionados con las Fases anteriores, se les preguntó: ¿Cuáles instrumentos les ayudaron a medir de forma más precisa?, Nataly respondió: *yo creo que el metro, tiene una medida perfecta para medir*



Rosa respondió: *para mí fue la cuarta, porque me ayudó a medir bien* ¿Cuáles instrumentos creen que se debe utilizar para obtener una medida más precisa? Nataly respondió: *el metro, la cinta métrica y la regla* (registro en audio, 12 – 11 – 2019).

Estas unidades de medida permitieron que realizaran mediciones más aproximadas al desarrollar algunas actividades de las Fases anteriores, para Rosa, el instrumento de medida que le ayudó a realizar mediciones precisas fue: *la cuarta*, (es la distancia o media que hay entre los dedos meñique y pulgar con la mano extendida), explicó que esta unidad de medida le ayudó a medir bien, se puede inferir que, al realizar procesos de medición con las partes del cuerpo, esta le permitió realizar mediciones del contorno de una superficie y establecer las veces que marcó la unidad de medida.

Por otro lado, Nataly en las preguntas escritas respondió: *el metro, la regla* y lo justificó como la medida perfecta e ideal para medir, mostrando claridad al seleccionarlo como el más indicado para realizar procesos de medición de forma más precisa, se infiere que la participante al usar la regla en procesos de medición en las Fases anteriores, de forma natural lo relacionó con el metro, el cual es una medida estandarizada como la regla, y permite obtener medidas más precisa, también, las unidades de medida no estandarizadas pueden ser utilizadas para realizar mediciones, pero estas varían de acuerdo a la unidad de medida empleada.

Durante el proceso se pudo evidenciar que los participantes mencionaron palabras como: *regla, metro, longitud, medida, cinta métrica, centímetro, cuarta, pulgada*, como unidades de medida, lo expuesto por los participantes permitió evidenciar avances en cuanto al razonamiento, el cual es expresado por medio del lenguaje relacionados con los conceptos de área y perímetro.

En las actividades implementadas en esta Fase los estudiantes socializaron el trabajo realizado con los demás compañeros. En cuanto al desarrollo de la actividad “Explico lo aprendido” (Apéndice B.3.1) y el “cuestionario” (Apéndice B.3.2), se logró evidenciar de cierta manera la evolución del lenguaje en cada uno de los participantes, para confirmar el

nuevo vocabulario se les preguntó: ¿Que palabras nuevas has aprendido? David respondió: *perímetro, contorno, orilla*, Rosa respondió: *perímetro, contorno, superficie y muchas más*, Nataly respondió: *área, perímetro y superficie*, (registro en audio 15 – 11 – 2019) Las expresiones verbales dadas por cada uno dieron cuenta de los aprendizajes adquiridos en las Fases anteriores y están relacionadas con el vocabulario que los estudiantes deben expresar en relación con la Fase tres (Explicitación) del Modelo de van Hiele.

A continuación, se muestra en las Ilustraciones 125 y 126 argumentos que dan cuenta del lenguaje expresado por los participantes al responder las preguntas del cuestionario implementado en esta Fase.

d) ¿Aprendiste algunas palabras nuevas? Si ¿Cuales? Perímetro, contorno, superficie y muchas más

*Ilustración 120. Respuesta de Rosa.*

d) ¿Aprendiste algunas palabras nuevas? Si ¿Cuales? el área, el perímetro, superficie

*Ilustración 121. Respuesta de Natalia.*

El desarrollo de las actividades y las interacciones, han permitido que los estudiantes utilicen palabras nuevas, las cuales están asociadas al concepto de área y perímetro, en este sentido el nuevo vocabulario se refleja al responder las preguntas que se relacionan con los conceptos mencionados, este nuevo lenguaje enriqueció el vocabulario y permitió fortalecer la red de relaciones y mejorar la expresión de los participantes.

En la Tabla 17 se muestra un resumen de los avances en los participantes, teniendo en cuenta las categorías, en relación con los conceptos de área y perímetro.

**Tabla 17.** *Avances de los participantes. Fase 3 (Explicitación)*

Categorías	Participantes	Avances
Cubrir, sobreponer, plasmear	David	Actividad uno “Explico lo aprendido”, cubrió la superficie de la mesa del salón, explicó a los compañeros el proceso realizado, y respondió de forma coherente los literales a, c.
	Rosa	Actividad uno “Explico lo aprendido”, compartió con los compañeros el procedimiento realizado al cubrir la superficie de la mesa y marcar la unidad de medida en la superficie de la misma.
	Nataly	Actividad uno “Explico lo aprendido” sobrepone la unidad de medida seleccionada en la superficie y responde las preguntas relacionadas con la actividad, literales a y c.
Medida de superficie	David	En el Cuestionario, literal e, comparó superficies y estableció diferencias entre ellas. En la actividad uno, literales b, d y e, explicó a los compañeros el proceso realizado para hallar la medida del área de la superficie.
	Rosa	En el “Cuestionario” literales, b, d y e expresó la medida de la superficie. En la actividad “Explico lo aprendido” estableció estrategias para determinar la medida de la superficie con la unidad de medida.
	Nataly	Respondió las preguntas del Cuestionario en relación a esta categoría. En la actividad “Explico lo aprendido” estableció estrategias para determinar la medida de la superficie.
Medida de perímetro	David	Actividad uno “Explico lo aprendido” realizó procesos de medición para establecer la medida del perímetro, literales d, e f y g. En el “Cuestionario”, literales h, i, cuenta a los compañeros los objetos utilizados para medir el contorno de una superficie.
	Rosa	Actividad uno “Explico lo aprendido”, compartió con los compañeros el proceso de medida del contorno de la mesa. En el “Cuestionario”, literales c, h, d, cuenta a los compañeros los objetos utilizados para medir el contorno de una superficie.

Categorías	Participantes	Avances
	Nataly	Actividad uno “Explico lo aprendido” expuso la medida del contorno de la superficie, literales d, e y f, g d. En el cuestionario, contó procesos realizados en las actividades de las Fases anteriores.
Lenguaje de área y perímetro	David	En el “Cuestionario”, literales c, h y d explicó a los compañeros los materiales o elementos utilizados para medir la superficie en el desarrollo de las actividades de las Fases uno y dos, expuso palabras nuevas relacionadas con los conceptos de área y perímetro.
	Rosa	Compartió con los participantes las repuestas de los literales c, h, d, del “Cuestionario”, hizo mención de los elementos usados para medir el entorno de una superficie y escribió las palabras nuevas aprendidas.
	Nataly	En el “Cuestionario” hizo mención de palabras relacionadas con esta categoría en los literales c y d, al explicar el procedimiento para hallar la medida del contorno de la superficie de la mesa en la actividad “Explico lo aprendido”.

Los participantes en esta Fase mostraron su desempeño, al enfrentarse a procedimientos que debían realizar en presencia de los compañeros del grupo y al compartir las experiencias del trabajo realizado en las Fases anteriores. Con respecto al proceso de medición de la superficie de la mesa del salón de clase, los participantes realizaron los procedimientos adecuados en presencia de los compañeros, en algunos momentos se observó que se integraron al trabajo realizado por los participantes, resolvieron la situación y hallaron las unidades de medida necesarias para cubrir la superficie al realizar adiciones.

En cuanto a la medida del contorno, al igual que en la medida de la superficie de la mesa los participantes realizaron el procedimiento en presencia de los compañeros. Además, las preguntas que respondieron en torno al proceso de medición de la superficie y del contorno, las respuestas las compartieron con los compañeros al leerlas en voz alta. Por otro lado, también les contaron aspectos relacionados con las actividades realizadas en las Fases

anteriores, las cuales fueron evidenciadas a través del “cuestionario” (Apéndice B.3.2) implementado en esta Fase.

En el lenguaje se apreciaron aportes coherentes con las acciones realizadas al momento de dar soluciones a las actividades propuestas y al responder a interrogantes durante el proceso, también se avanzó en la construcción de la red de relaciones, al emplear un lenguaje más refinado de acuerdo a la categorías de lenguaje de área y perímetro, donde hicieron mención de las palabras nuevas aprendidas, al justificar el porqué de los procesos, al momento de referirse a las unidades de medida indicada para medir de forma más precisa y al explicar el procedimiento realizado para hallar la medida de la superficie y del contorno. A continuación, se muestra un esquema que evidencia la red de relaciones y el lenguaje en la Fase tres, en torno a los conceptos de área y perímetro.

A continuación, se presenta la Tabla 18 que muestra aspectos relacionados con el lenguaje utilizado por los participantes en la Fase tres (Explicitación).

**Tabla 18.** *Lenguaje utilizado por los participantes en la Fase tres (Explicitación).*

Participante	Lenguaje con relación al concepto de superficie y su medida el área	Lenguaje con relación al concepto de contorno y su medida el perímetro
David	El participante explicó a sus compañeros el procedimiento que utilizó para hallar la cantidad de unidades con las que cubrió la superficie del escritorio del aula de clase y expresó: <i>Primero coloqué la unidad de medida por el largo y por el ancho y multipliqué, y para hallar la cantidad de unidades de medida marcadas en la superficie de la mesa dije: yo multiplico la cantidad del largo por el ancho.</i>	Para hallar el contorno del escritorio expresó: <i>medí el largo y el ancho, el largo me dio un metro y 10 centímetros. y el ancho me dio 59 cm, luego tomé la medida de cada lado de la mesa. Además, para hallar la medida total expresó: sumé el lado uno con el lado dos, y como el otro lado tiene largo y ancho, sumo los dos.</i>
Rosa	La participante explicó a sus compañeros el procedimiento que utilizó para hallar la	Para hallar el contorno del escritorio expresó: yo sumé la medida de cada lado

Participante	Lenguaje con relación al concepto de superficie y su medida el área	Lenguaje con relación al concepto de contorno y su medida el perímetro
	cantidad de unidades con las que cubrió la superficie del escritorio del aula de clase y expresó: <i>yo repasé la unidad de medida sobre la mesa y luego tenía que contar, pero yo sumé.</i> y para hallar la cantidad de unidades de medida marcadas en la superficie de la mesa dijo: <i>contando las unidades de medida marcadas por el largo de la mesa y sumando de 10 en 10.</i>	de la mesa, el largo es de un metro y 10 cm. y el ancho es 59 cm. En relación a la medida del contorno explicó, <i>sumo los lados.</i>
Nataly	La participante explicó a sus compañeros el procedimiento que utilizó para hallar la cantidad de unidades con las que cubrió la superficie del escritorio del aula de clase y expresó: <i>marqué la superficie por el largo y el ancho y luego conté,</i> y para hallar la cantidad de unidades de medida marcadas en la superficie de la mesa dijo: <i>cuento todas las unidades de medida.</i>	Para hallar el contorno del escritorio expresó: <i>sumo todo lo que medí de la mesa, el largo es de un metro y 10 cm. y el ancho es 59 cm.</i> En relación al procedimiento para determinar la medida del perímetro explicó, <i>sumo todo lo que medí.</i>

#### 4.2.3.4.2 Análisis del lenguaje

En la Tabla 18, se muestra las descripciones de los participantes en relación con los procesos realizados para dar solución a las diferentes situaciones presentadas en la Fase tres (Explicitación), las cuales dieron cuenta de la evolución del lenguaje en torno a los conceptos de área y perímetro.

Al comparar el lenguaje de las Fases anteriores uno y dos (Información, Orientación dirigida) con el de la Fase tres (explicitación), se observó un lenguaje más refinado, mientras que en las Fases anteriores utilizaron expresiones como; *es algo que no tiene fondo*, para referirse a la superficie, en esta Fase, presentaron procesos algorítmicos para

hallar la medida de una superficie, como es el caso de Nataly, quien expresó: *marqué la superficie por el largo y el ancho y luego conté.*

En cuanto al perímetro, en las Fases anteriores manifestaron expresiones como: *es una figura moldeada*, en tanto que en la Fase tres expresaron procesos algorítmicos, como es el caso de David, quien manifestó, *sumé el lado uno con el lado dos, y como el otro lado tiene largo y ancho, sumo los dos.* Esto evidencia la evolución del lenguaje.

#### 4.2.3.4.3 Red de relaciones

En esta Fase, los participantes expresaron sus comentarios sobre los procedimientos llevados a cabo para determinar la medida de la superficie del escritorio del aula de clase, esta vez, utilizaron unidades de medida como cuadrados y rectángulos, e incluso manifestaron alternativas de conteo más eficaces como la multiplicación y la suma de patrones definidos para encontrar el total de unidades de medida (cuadrados y rectángulos) para cubrir la superficie.

De forma similar, los participantes contaron a sus compañeros el procedimiento realizado para determinar la medida del contorno de la superficie del escritorio del aula de clases mediante la utilización de la regla de madera (un metro), donde las mediciones obtenidas de cada lado fueron sumadas para hallar el perímetro, cabe resaltar que estas medidas ya corresponden a unidades estandarizadas pertenecientes al Sistema Internacional de Unidades.

En cuanto al lenguaje utilizado, se hace evidente el progreso, al explicar los procesos necesarios para medir la superficie y el perímetro de la mesa del aula de clases, esto se evidenció cuando dieron sus argumentos sobre las actividades y operaciones desarrolladas por los participantes (conteo, adición, multiplicación) utilizando las unidades de medidas (cuadrados y rectángulos), lo cual da entender la apropiación de los conceptos de área y perímetro. En esta Fase, la socialización juega un papel muy importante, puesto que

permite el crecimiento de la red de relaciones, donde también entra en juego el nuevo vocabulario que los participantes están refinando.

#### **4.2.4 Fase 4: Orientación libre**

En esta Fase los estudiantes ponen en práctica los conocimientos estudiados en las Fases anteriores, al realizar actividades y solucionar problemas que involucran los conceptos de área y perímetro. En este sentido, los estudiantes conociendo la medida de los lados de una figura o de un lugar, son capaces de establecer estrategias para hallar el área o el perímetro de figuras planas.

##### **4.2.4.1 Categoría 1: Cubrir, sobreponer, plasmar**

###### *4.2.4.1.1 Descriptor*

- *Dada una unidad de área, el estudiante determina cuántas veces es necesario sobreponerla para cubrir una superficie.*

Teniendo en cuenta las diversas estrategias empleadas para determinar la medida de una superficie, se abordan situaciones con el propósito de que los participantes pongan en práctica los conocimientos adquiridos en las Fases anteriores. En la actividad uno de la Fase cuatro “Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno” (Apéndice B.4.1), se utilizó como unidad de medida para la superficie “Las multifichas”<sup>2</sup>, En esta actividad, se les entregó a los estudiantes una cartulina con las mismas dimensiones que fueron utilizadas en la actividad uno (30 cm de cada lado) de la Fase uno (Información), y marcadas por su contorno: lado uno (L1), lado dos (L2), lado tres (L3) y lado cuatro (L4),

---

<sup>2</sup> Las multifichas son figuras geométricas encajables unas con otras, cada una tiene una medida de tres cm de lado y están distribuidas en cuatro colores: rojas, verdes, azules y amarillas. Palabra maestra. (2015).



en esta ocasión se les pidió que midieran cada lado de la cartulina utilizando una regla o metro, después se les propuso que cubrieran la superficie de la cartulina con las multifichas.

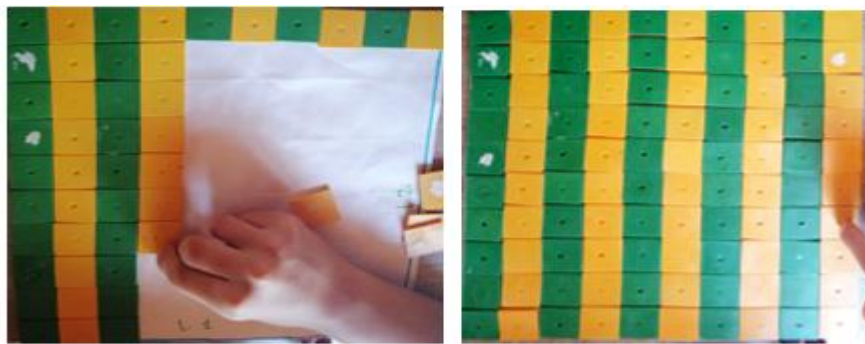
De forma organizada Nataly, empezó a colocar las multifichas en la superficie de la cartulina, empezando por la esquina superior y las fue organizando hacia la parte inferior como se observa en la Ilustración 127 que se encuentra a continuación.



Ilustración 122. Nataly cubriendo la superficie con las multifichas.

Con mucha motivación terminó, y se observó que rápidamente empezó a contar: *10, 20, 30, 40...* y dijo: *hay 100 unidades*, seguidamente inició a responder las preguntas. Durante el desarrollo de la actividad se pudo observar que la participante se sentía cómoda con el trabajo que realizaba, la organización que hizo le permitió establecer de forma rápida la cantidad de multifichas que necesitó para cubrir la cartulina. Sin tener en cuenta los colores, su objetivo fue cubrir la superficie, es importante mencionar que para hallar los valores de la medida del contorno y la cantidad de multifichas, realiza procesos matemáticos mentales que de forma muy rápida expresó sin necesidad de realizar operaciones escritas. Lo anterior deja en evidencia el razonamiento en torno al concepto de área.

Rosa, por su parte realizó un trabajo con más calma, fue muy cuidadosa para realizar las mediciones respectivas, al cubrir la superficie con las multifichas ella lo realizó con dos colores, y de esa forma cubrió toda la superficie como se puede observar en la Ilustración 128 que se encuentra a continuación.



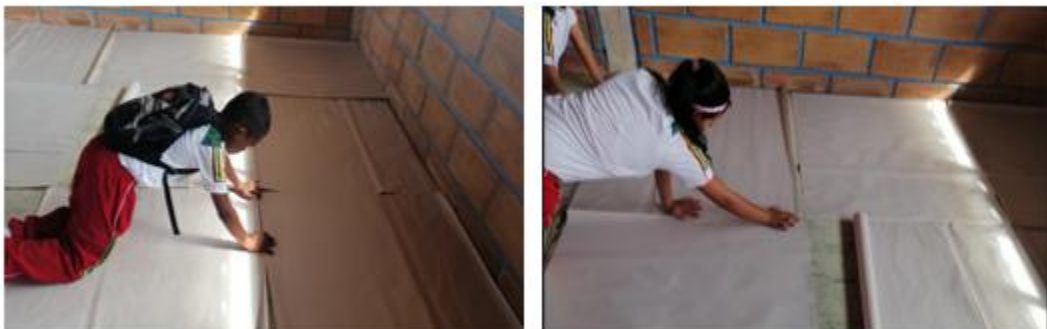
*Ilustración 123. Rosa cubriendo la superficie con las multifichas.*

Como se puede observar, la participante empezó a cubrir la superficie de forma vertical empezando a organizar una línea de multifichas de color verde, seguida de una de color amarillo y continuó con la secuencia hasta cubrir toda la superficie, se puede inferir que la organización por colores, le facilitó el conteo de las multifichas y así poder establecer de una forma más práctica la cantidad de unidades de medida (multifichas) necesarias para cubrir la superficie de la cartulina. David, por su parte, realizó un procedimiento similar al de Nataly, al organizar las multifichas en la superficie.

Con esta actividad los participantes identificaron cómo ha sido el proceso para cubrir la superficie, en las actividades anteriores al plasmar la mano o cubrir la superficie con unidades de medida construidas por ellos, (Apéndice B.2.2), se observó que siempre quedan lugares en la superficie sin cubrir, las multifichas son un instrumento que permiten tapar en su totalidad una superficie, además, se puede establecer una medida más precisa y todos obtiene el mismo resultado.

La actividad dos, de esta Fase “Cubriendo superficies grandes” (Apéndice B.4.2), que consistió en cubrir la superficie de un salón utilizando como unidad de medida papel periódico, con medidas de un metro por cada lado ( $1\text{m}^2$ ). Para el desarrollo de la actividad, primero empezaron a marcar cada lado del salón: lado uno, lado dos, lado tres y lado cuatro, (L1), (L2), (L3) y (L4), después empezaron a cubrir la superficie del salón empezando por una de sus esquinas, y de forma organizada cubrieron la superficie con los pliegos de papel periódico. Durante el proceso David observó con detenimiento cómo

habían cubierto la superficie y dice: *solo hay que poner los periódicos de los lados y ya sabemos*, la profesora preguntó: *¿Cuáles lados?* respondió David: *por el largo y el ancho del salón* (registro en audio 19 – 11 – 2019).



*Ilustración 124. David y Rosa cubriendo la superficie del salón.*

Al razonar que no debían cubrir toda la superficie del salón, quitaron los periódicos que habían colocado, y empezaron a organizarlos por el largo y el ancho, Rosa al observar dijo: *de largo tiene 8 y de ancho 6*, David dice: *profe ya se, hay 6 y 8 y  $6 \times 8$  es 48 metros cuadrados*. La profesora preguntó: *¿por qué son 48 metros cuadrados?* David respondió: *porque cada periódico mide un metro por el lado* (registro en audio 19 – 11 – 2019). Las expresiones de los participantes dejaron ver cómo han avanzado en el proceso de razonamiento en cuanto a la forma de hallar la medida del área de una superficie. Es importante mencionar que, por las características de la actividad, esta fue realizada en grupo, pero al momento de responder las preguntas lo hicieron de forma individual.

Después de realizar las actividades, “Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno” (Apéndice B.4.1) y “Cubriendo superficies grandes” (Apéndice B.4.2), donde los participantes cubrieron superficies pequeñas con unidades de medidas pequeñas (multifichas) y superficies grandes con unidades de medida grandes (papel periódico de un  $m^2$ ) se indagó a los participantes sobre la unidad de medida que utilizarían para cubrir una superficie grande.

m) Para cubrir una superficie grande, ¿utilizas las multifichas o unidades de papel que midan un metro cuadrado ( $m^2$ )? una cartulina que mide un metro  
 ¿por qué? Porque la superficie es grande y un metro también

*Ilustración 125. Respuesta David.*

m) Para cubrir una superficie grande, ¿utilizas las multifichas o unidades de papel que midan un metro cuadrado ( $m^2$ )? utilizaria unidades de papel  
 ¿por qué? me ayuda a ser mi trabajo más rápido

*Ilustración 126. Respuesta Rosa.*

m) Para cubrir una superficie grande, ¿utilizas las multifichas o unidades de papel que midan un metro cuadrado ( $m^2$ )? utilizo unidades de papel  
 ¿por qué? por que voy a cubrir una superficie grande

*Ilustración 127. Respuesta Nataly.*

Se puede notar que los participantes relacionaron la unidad de medida con el tamaño de la superficie, al escoger las unidades de papel que miden un metro cuadrado como la indicada para cubrir una superficie grande. David, se confundió y escribió “una cartulina” ya que esta, y las unidades de papel con que cubrieron las superficies son muy similares, y con la cartulina se podía realizar el mismo trabajo. Rosa por su parte, explicó que estas unidades de papel le ayudaron a realizar el trabajo más rápido. Nataly, hizo relación al tamaño, es decir, si la superficie es grande, también utilizó unidades de medida de gran tamaño.

Cada participante al sobreponer la unidad de medida pequeña (multifichas) y grande, (papel periódico) en la superficie, determinó la cantidad de veces que debe sobreponerla para cubrir la superficie en su totalidad, estos argumentos hacen referencia al razonamiento

que poseen los participantes en torno al proceso de medición de una superficie, encontrando opciones distintas al momento de dar solución a la situación, poniendo en práctica los aprendizajes adquiridos en las Fases anteriores, aspectos que se encuentran en relación con las características en la Fase cuatro (Orientación dirigida) del Modelo de van Hiele.

#### 4.2.4.2 Categoría 2: Medida de superficie

##### 4.2.4.2.1. Descriptores

- *Reconoce que para hallar la unidad de medida de una superficie se debe tener en cuenta la medida del largo y el ancho.*
- *Dada una superficie el estudiante realiza el procedimiento que permite determinar la medida del área.*

Cuando se presentaron situaciones relacionadas con el proceso de medición de la superficie, los participantes describieron lo ocurrido, en la actividad uno, “Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno” (Apéndice B.4.1), al indagar por la cantidad de unidades de área o multifichas necesarias para cubrir la superficie de la cartulina.

a) ¿Cuántas unidades de área o multifichas utilizaste para cubrir la cartulina?

700 multifichas utilice para cubrir toda la superficie de la cartulina

Ilustración 128. Respuesta de David.

a) ¿Cuántas unidades de área o multifichas utilizaste para cubrir la cartulina?

100 multifichas

Ilustración 129. Respuesta de Rosa.

a) ¿Cuántas unidades de área o multifichas utilizaste para cubrir la cartulina?

100 unidades de área

*Ilustración 130. Respuesta de Nataly.*

Cada participante, de acuerdo con el trabajo realizado escribió la cantidad de multifichas necesarias para cubrir la superficie, el cual es la medida del área, al responder de forma coherente, se evidenció que realizaron procedimientos adecuados que les permitieron hallar el área de una superficie. Nataly, por su parte relacionó las multifichas con unidades de área necesarias para medir la superficie, dejando en evidencia la utilización de la categoría medida de superficie y su relación con diferentes situaciones al realizar procesos de medida. David y Rosa, expusieron el número que representa la cantidad de multifichas utilizadas para cubrir la superficie.

La siguiente pregunta indaga sobre el procedimiento realizado para saber cuántas unidades de área o multifichas utilizaron para cubrir la superficie, a continuación, se presentan las respuestas de los participantes.

b) ¿Qué hiciste para saber cuántas unidades de área o multifichas se necesitaron para

cubrir la superficie de la cartulina? primero conte el largo

y despues conte el ancho y lo sume y sale que me dio 100

*Ilustración 131. Respuesta de David.*

b) ¿Qué hiciste para saber cuántas unidades de área o multifichas se necesitaron para

cubrir la superficie de la cartulina? contando o sumando

*Ilustración 132. Respuesta de Rosa.*

b) ¿Qué hiciste para saber cuántas unidades de área o multifichas se necesitaron para

cubrir la superficie de la cartulina? multiplicar  $10 \times 10 = 100$

multifichas



*Ilustración 133. Respuesta de Nataly.*

Cada participante explicó a su manera el proceso realizado para hallar las unidades de área necesarias para cubrir la superficie. En la respuesta de David, se infiere que contó las unidades de área (multifichas) que sobrepuso por el largo y por el ancho de la cartulina, el cual multiplicó para obtener el resultado. Rosa, por su parte concluyó que contando y sumando es posible encontrar la cantidad de multifichas utilizadas para cubrir la superficie, ella realizó un conteo de cada unidad, pero también mencionó la suma, lo que permitió inferir que al adicionar cantidades de forma horizontal o vertical halló otra manera de determinar la cantidad de unidades de área.

En cuanto a Nataly, ella expuso algoritmos y de forma directa multiplicó, la cantidad de fichas del largo por la cantidad de fichas del ancho, es decir  $10 \times 10$ , y obtuvo la cantidad de fichas necesarias para cubrir la superficie, la cual corresponde a la medida. Por lo anterior se puede inferir que los participantes identifican el procedimiento que se debe realizar para hallar el área de una superficie o figura. Siguiendo la secuencia de las preguntas, al indagar por la cantidad de fichas que colocaron por cada lado, los participantes respondieron las preguntas como se puede observar en la Ilustración 139.

c) ¿Cuántas fichas colocaste por el lado (L1) de la cartulina? 10 fichas colore  
 d) ¿Cuántas fichas colocaste por el lado (L2) de la cartulina? 10 fichas colore

*Ilustración 134. Respuesta de David.*

La respuesta de David es una muestra de lo que respondieron los demás participantes al realizar un conteo de la cantidad de multifichas colocadas por el lado uno y el lado dos (L1, L2) los cuales dieron cuenta del proceso realizado, este conteo es un referente que los participantes deben tener presente para hallar la medida del área de una superficie. En la siguiente pregunta se les pidió que multiplicaran la cantidad de multifichas del lado uno (L1) por las del lado dos (L2). La respuesta de un participante se observa a continuación.

e) ¿Cuál es el resultado si se multiplica la cantidad de multifichas del lado 1 (L1) por las del lado 2 (L2)? 100 multifichas

*Ilustración 135. Respuesta de Nataly.*

Cada participante al responder: *100 multifichas*, dio cuenta del proceso realizado para determinar el total, es importante mencionar que durante la actividad se observó que sólo Rosa de forma organizada realizó una multiplicación en el cuaderno (L1) por (L2), mientras que los demás participantes sin hacer multiplicaciones explícitas en el cuaderno hallaron la cantidad de multifichas. Por lo tanto, se entiende que los estudiantes presentan claridad frente al proceso que se debe tener en cuenta para hallar la medida del área de una superficie.

Siguiendo la secuencia de las respuestas que guardan relación con esta categoría se indagó por lo que representaba esa cantidad de multifichas.

f) ¿Qué representa esa cantidad de multifichas? la multiplicación del resultado

*Ilustración 136. Respuesta de David.*

f) ¿Qué representa esa cantidad de multifichas? la medida de la superficie

*Ilustración 137. Respuesta de Rosa.*

f) ¿Qué representa esa cantidad de multifichas? la cantidad de (L1)(L2) de la costurina

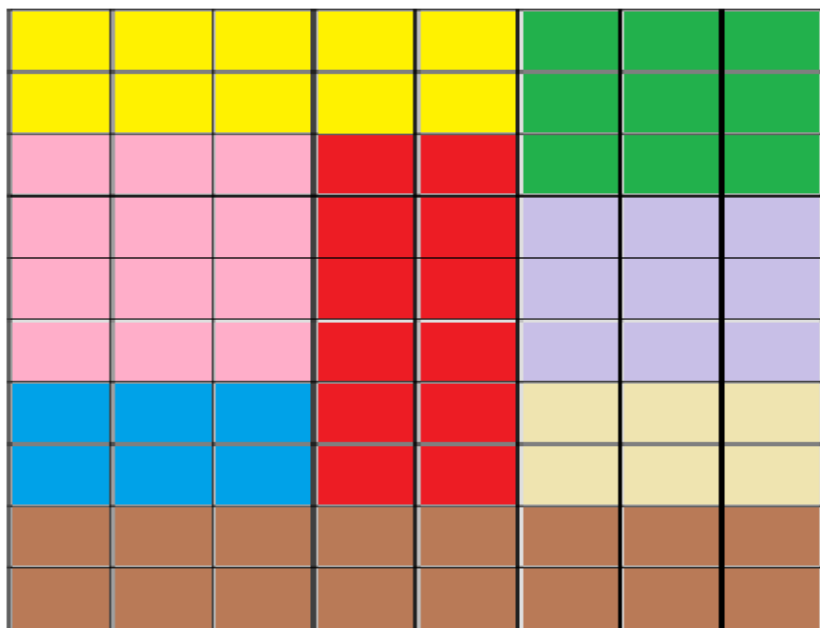
*Ilustración 138. Respuesta de Nataly*

Como se puede observar cada participante respondió de acuerdo con su interpretación o razonamiento. David hizo relación con el resultado de la multiplicación, dando a entender que toda la cantidad de multifichas es lo que representa. Rosa por su parte respondió: *la medida de la superficie*, por lo que se puede inferir que la estudiante tiene claridad, respecto a lo que representa la cantidad de multifichas al cubrir una superficie con unidades de área, esta cantidad representa la medida de la superficie. Nataly, hace relación con la cantidad de multifichas del lado (L1) y el (L2), sin hacer claridad en cuanto a lo que

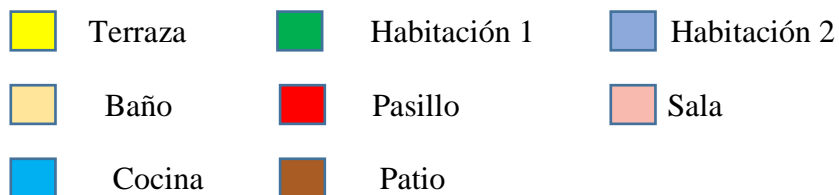


representa. En este sentido se esperaba que los participantes respondieran “el área de la superficie” pero lo expuesto por cada uno de ellos en cierta forma guarda relación con la representación.

En la actividad tres, “Aprendo de mi entorno” (Apéndice B.4.3), los participantes dieron cuenta de los aprendizajes adquiridos, los cuales se encuentran en relación con esta categoría. Esta actividad consistió en presentar a los estudiantes el plano de una casa, donde la superficie se encuentra cubierta por cuadrados y cada cuadrado representa un metro cuadrado ( $m^2$ ). Además, cada color representa una sección de la vivienda en el plano. Los participantes observaron el plano de la casa y seguidamente respondieron las preguntas realizadas, las cuales indagan sobre el área y perímetro de cada lugar de la casa. A continuación, se muestra el plano de la casa.



*Ilustración 139.* Muestra del Plano de una casa.



A continuación, se observan algunas muestras del trabajo realizado por los participantes en relación con la medida del área de los lugares de la casa. Es importante aclarar que solo aparece una muestra, debido a que las respuestas de los participantes fueron iguales o similares.

a) El área del baño es: 6 metros cuadrados  
 c) El área de la sala es: 12 metros cuadrados

*Ilustración 140. Respuesta de David.*

Se observa que los participantes respondieron de forma correcta cada una de las preguntas, realizando el conteo de cada cuadrado ( $m^2$ ) para hallar el área del baño, en este sentido todos los participantes respondieron de forma coherente cada literal, en el cual se indagó por el área y cada lugar de la casa (terraza, baño, cocina, habitación, pasillo, patio y sala), de acuerdo a las respuestas de cada participante, se puede decir que pusieron en práctica los aprendizajes adquiridos en las actividades anteriores, por lo tanto se encuentra en coherencia con las características de la Fase cuatro del Modelo de van Hiele.

Con el propósito de evidenciar los avances en cuanto a la medida del área se realizó la siguiente entrevista a los participantes.

- Profesora: ¿Qué tenías que hacer para dar respuesta a cada una de las preguntas?,
- David: *contar cada uno de los cuadros*
- Profesora: ¿Qué entiendes por área?
- David: *el área es toda una figura que contiene una superficie*
- Profesora: ¿el área es lo mismo que el perímetro?
- David: *no, porque el perímetro es el borde, y el área es la superficie de todo lo que tiene adentro*
- Profesora: ¿Cómo se halla el área?
- David: *multiplico el largo y el ancho*

Los aportes presentados por David, dan cuenta de una manera de calcular la medida del área y el perímetro.

A continuación, se presenta parte de la entrevista realizada a Rosa.

- Profesora: ¿Qué hacías para poder dar respuesta a cada pregunta?
- Rosa: *primero tenía que ver el plano de la casa y contar la orilla de cada lugar y toda el área*
- Profesora: ¿Para ti que es el área?
- Rosa: *es todo lo de adentro de una figura o lugar y que también lo puedo medir*
- Profesora: ¿El área es lo mismo que el perímetro?
- Rosa: *no, porque el perímetro es la orilla y el área es todo lo de adentro*
- Profesora: ¿Cómo se halla el área de una figura o lugar?
- Rosa: *se multiplica un lado por el otro.*

Rosa mostró apropiación del tema, al hacer evidente el reconocimiento de los conceptos de área y perímetro en sus manifestaciones verbales, dejando ver el razonamiento realizado al dar respuesta a la situación planteada.

A continuación, se presentan los argumentos expuestos por Nataly en la entrevista.

- Profesora: ¿Qué tenías que hacer para dar respuesta a cada pregunta?
- Nataly: *tenía que medir, sumar y multiplicar*
- Profesora: ¿Qué entiendes por el área de una figura?
- Nataly: *es todo lo que tiene adentro la figura o lugar, es la superficie*
- Profesora: ¿El área es lo mismo que el perímetro?
- Nataly: *no, porque el perímetro es la orilla, y el área es lo que tiene adentro*
- Profesora: ¿Cómo se halla el área?
- Nataly: *midiendo la superficie, y después multiplico un lado por el otro.*

Lo expuesto por Nataly pone en evidencia el análisis de la situación al dar respuestas verbales a cada una de las preguntas realizadas, lo cual guarda relación con la categoría

“Medida de superficie”. Los argumentos dan cuenta de la red de relaciones construida en torno a los conceptos de área y perímetro.

#### 4.2.4.3 Categoría 3: Medida de perímetro

##### 4.2.4.3.1 Descriptor

- *Utiliza la regla para medir el contorno de una figura y determinar el perímetro en centímetros.*

Teniendo en cuenta las estrategias implementadas en las Fases anteriores para resolver las actividades, se plantearon situaciones que requerían de operaciones básicas como la adición. Respecto a la actividad, “Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno” (Apéndice B.4.1), en los literales (g, h, k) se expone lo que respondieron los participantes.

g) ¿Cuántos centímetros mide el lado (L1) de la cartulina? 30 cm  
 h) ¿Cuántos centímetros mide el lado (L2) de la cartulina? 30 cm

*Ilustración 141. Respuesta de Nataly.*

Se evidenció que todos los participantes tomaron la regla y de forma organizada la colocaron por el borde de la cartulina, empezando desde el cero, por lo que se pudo analizar que realizaron un buen proceso de medición, que les permitió exponer los centímetros medidos en cada lado, además los del (L3) y (L4). Posteriormente se les pidió que sumaran las medidas de cada lado y establecieran la medida total.

k) Suma los centímetros de cada lado hallados (L1+L2+L3 +L4) ¿Cuál es el resultado?

el resultado es 120 cm

*Ilustración 142. Respuesta de Nataly.*

Dadas las indicaciones en la pregunta, los participantes realizaron la adición con la medida de los centímetros de cada lado y establecieron el resultado de la medida del perímetro de la cartulina, para profundizar un poco más se les preguntó: ¿Cuánto mide cada lado de la superficie? David respondió: *30 centímetros*, ¿Cómo se halla la medida total del contorno? Nataly respondió: *sumando todo*. Si se mide el contorno con la “cuarta” y de cada lado se miden dos, ¿cuántas “cuartas” hay en total?, se observó que los participantes quedaron en silencio, Rosa muy pensativa, mientras que David y Nataly contaban con los dedos, y después Nataly dijo: *ya sé, son ocho* (registro en video 15 -11 – 2019). Este procedimiento permitió que los participantes pusieran en práctica los aprendizajes adquiridos y fortalecieran la red de relaciones construida durante el proceso.

En la actividad dos, “Cubriendo superficies grandes” (Apéndice B.4.2) al realizar el proceso de medición los participantes expresaron la medida del perímetro de un salón de clases en metros. En los siguientes literales se observa lo que respondieron en relación con la categoría medida de perímetro de esta Fase.

Con el propósito de hallar la medida del perímetro de forma progresiva, se indagó por la medida de cada lado del salón. A continuación, se presenta una muestra de las respuestas de los participantes.

- g) ¿Cuántos metros mide el lado (L1) del salón? 6 metros  
 h) ¿Cuántos metros mide el lado (L2) del salón? 8 metros  
 i) ¿Cuántos metros mide el lado (L3) del salón? 6 metros  
 j) ¿Cuántos metros mide el lado (L4) del salón? 8 metros

*Ilustración 143. Respuesta Rosa.*

Como se puede observar todos los participantes respondieron de forma adecuada cada uno de los interrogantes, cabe resaltar que ellos no realizaron el proceso de medición del contorno con la regla o metro, sino que al cubrir la superficie con los papeles periódico por el (L1) y el (L2) los cuales medían un metro por cada lado, ellos establecieron

equivalencias, es decir, si colocaron seis unidades de medidas por el (L1) la medida de ese lado es 6 metros y de esta forma dieron respuesta a cada pregunta.

También se evidenció que, al definir la medida de un lado, de forma intuitiva establecieron la medida del lado opuesto, dejando ver que no es necesario medir cada lado de una superficie cuadrada o rectangular, si no que la medida del lado uno (L1) es la misma medida del lado opuesto (L3). Por lo anterior se infiere que los estudiantes realizaron un adecuado proceso de medición que los conllevó a encontrar la medida del perímetro del salón. Estas evidencias y las observaciones dan cuenta de la red de relaciones construida en torno a los conceptos objeto de estudio.

A continuación, se observa de forma detallada cómo hallaron el resultado.

k) k) Suma los metros hallados en cada lado ( $L1+L2+L3+L4$ ) ¿Cuál es el resultado?  
El resultado es 28 metros

*Ilustración 144. Respuesta Nataly.*

En este interrogante todos los participantes respondieron de forma adecuada la pregunta, cada uno realizó la adición con los metros de la medida de los lados del salón ( $L1+L2+L3+L4$ ), y de esta forma hallaron la medida del contorno, el cual corresponde a la medida del perímetro del salón, de acuerdo a lo evidenciado, se entiende que las experiencias de aprendizaje realizadas por los participantes en las Fases anteriores aportaron elementos que han fortalecido la red de relaciones en cuanto al concepto de perímetro. En el siguiente interrogante se indaga por lo que representa esa cantidad.

l) ¿Qué representa esa cantidad? la suma de cada lado

*Ilustración 150. Respuesta David*

l) ¿Qué representa esa cantidad? me representa el perímetro

*Ilustración 145. Respuesta Rosa.*

1) ¿Qué representa esa cantidad? El perímetro

Ilustración 146. Respuesta Nataly.

Lo expuesto por los estudiantes en las Ilustraciones 150, 151 y 152 permitió dar cuenta del razonamiento realizado para hallar la longitud del perímetro del salón. David por su parte, expresó: *la suma de cada lado*, dando a entender que el resultado representa la cantidad total al sumar cada lado, pero Rosa y Nataly *son* más específicas al expresar: *el perímetro*, esta respuesta deja al descubierto los avances que han tenido en cuanto a la comprensión del proceso que se debe realizar para hallar la medida del perímetro de una superficie o lugar.

Para evidenciar el razonamiento en cuanto al concepto en mención, se realizó la siguiente entrevista a los participantes.

- Profesora: ¿Para hallar el perímetro hubo que medir todos los lados?
- David: *no*
- Profesora: ¿por qué?
- David: *porque el papel mide un metro, y como hay 8, me da 8 metros y del otro lado como hay 6, me da 6 metros.*
- Profesora: y para saber la medida total del perímetro, ¿qué haces?
- David: *sumo el lado uno con el lado dos, da 14, y como el otro lado tiene largo y ancho me da  $14 + 14$  da 28.*

David, dio solución a cada una de las situaciones tratadas sin ninguna dificultad, explicando con detalle el procedimiento realizado al hallar la medida del perímetro, en este sentido se puede decir que ha puesto en práctica los aprendizajes adquiridos en las Fases anteriores, al socializar de forma sencilla a través de preguntas orientadoras la forma de hallar el perímetro de un lugar, en este caso, el salón de clase. A continuación, se presenta la entrevista realizada a Rosa.

- Profesora: ¿Para hallar el perímetro hubo que medir todos los lados?
- Rosa: *no*
- Profesora: ¿por qué?
- Rosa: *si yo medí el lado (L3) sabía que el (L1) media lo mismo y en el (L4) había lo mismo que en el (L2).*
- Profesora: ¿Qué hiciste para saber la medida total del contorno o perímetro?
- Rosa: *yo sumé dos veces 8 y dos veces 6.*

Rosa se guió por la señalización realizada previamente a cada uno de los lados del lugar (L1, L2, L3 y L4), lo que facilitó la apropiación para explicar el procedimiento realizado para hallar la medida del perímetro. A continuación, se muestra lo que respondió Nataly en relación con las preguntas realizadas.

- Profesora: ¿Para hallar la longitud del perímetro hubo que medir todos los lados?
- Nataly: *no*
- Profesora: ¿por qué?
- Nataly: *porque solo con medir el largo y el ancho podemos saber cuánto miden los otros lados (L 3) y (L 4).*
- Profesora: ¿Cómo se halla el perímetro del salón?
- Nataly: *sumando el largo y el ancho, y ya podemos saber cuánto mide el otro lado.*

Nataly, argumentó, desde su razonamiento, el proceso realizado para hallar la medida del perímetro de un lugar, quedando en evidencia el reconocimiento de la categoría y el descriptor a partir de los procedimientos realizados.

En la actividad tres, “Aprendo de mi entorno” (Apéndice B.4.3), los participantes después de observar el plano de una casa determinaron la longitud del perímetro de cada lugar de la casa. A continuación, se observan algunas muestras del trabajo realizado, que guardan relación con esta categoría (Medida de perímetro).



b) El perímetro del baño es: 70 metros de perímetro

*Ilustración 147. Respuesta David.*

Los participantes respondieron de forma correcta este literal, se observó que realizaron el conteo de cada cuadrado para hallar la longitud del contorno, el cual corresponde al perímetro.

d) El perímetro de la sala es: 14 metros

*Ilustración 148. Respuesta Rosa.*

En esta actividad los participantes respondieron de forma coherente cada literal, en el cual se indagó por el perímetro de cada lugar de la casa (Terraza, baño, cocina, habitación, pasillo, patio y sala), en este sentido cada participante expuso la medida del perímetro en metros, de los lugares de la casa antes mencionados. Los procedimientos y argumentos expuestos por los participantes al momento de hallar la medida del perímetro permitieron evidenciar los conocimientos adquiridos al momento razonar en relación con los conceptos estudiados, aspectos que se encuentran en relación con la Fase cuatro (Orientación libre) del Modelo de van Hiele.

#### **4.2.4.4 Categoría 4: Lenguaje de área y perímetro**

##### *4.2.4.4.1 Descriptor*

- *Explica qué procedimientos realizaron para determinar cuántas unidades de medida fueron necesarias para cubrir una superficie dada.*
- *Comenta qué proceso debe seguir para hallar la medida del área y el perímetro de una figura o lugar.*

En esta Fase se observó la utilización de lenguaje matemático que permitió visualizar la red de relaciones construida en torno al concepto de área y perímetro, a través de los argumentos presentados al responder preguntas relacionadas con las actividades

desarrolladas en esta Fase que dan cuenta del procedimiento realizado para determinar la medida del área y el perímetro de una figura cuadrada o rectangular.

En la entrevista realizada al final de la actividad “Cubriendo superficies grandes” Apéndice B.4.2), los participantes dieron cuenta del proceso realizado para hallar la medida de la superficie. A continuación, se expone lo que respondieron los participantes en la entrevista.

- Profesora: ¿Qué hiciste para saber la cantidad de papel que se necesita para cubrir la superficie del salón?

- David: *primero coloqué el papel del largo y el ancho, y luego multipliqué el largo y el ancho.* Profesora: ¿hay necesidad de cubrir toda la superficie para saber cuántas unidades de periódico se necesita?

- David: *no, si multiplico el largo y el ancho, ya sé que meda todo.*

En lo manifestado por David, se observa apropiación del vocabulario, al expresar con claridad el proceso realizado al emplear la operación adecuada, apropiándose de argumentos contruidos en relación con la información desarrollada en las Fases de aprendizaje. En cuanto al proceso realizado para determinar la medida del contorno David respondió.

- Profesora: ¿Para hallar el perímetro hubo que medir todos los lados?

- David: *no*

-Profesora: ¿por qué?

- David: *porque el papel mide un metro, y como hay 8, me da 8 metros y del otro lado como hay 6, me da 6 metros*

- Profesora: y para saber la medida total del perímetro ¿qué haces?

- David: *sumo el lado uno con el lado dos, da 14, y como el otro lado tiene largo y ancho me da  $14 + 14$  da 28.*

El lenguaje empleado por David permitió observar la forma como solucionó la situación en relación a la medida del perímetro teniendo en cuenta la cantidad de papeles colocados

de cada lado del salón, los cuales medían un metro por cada lado, además da cuenta de la apropiación del lenguaje matemático que posee, al dar información precisa en relación al trabajo realizado, empleando términos relacionados con los conceptos trabajados y explicando las operaciones pertinentes para hallar la solución a la situación presentada. A continuación, se expone lo que respondió Rosa a la entrevista realizada, en relación con la medida de la superficie.

- Profesora: ¿cómo hiciste para saber la cantidad de periódico que se necesitaba para cubrir la superficie del salón?
- Rosa: *llenar con papel el largo y el ancho, yo multiplique 8 x 6 y me dio 48*
- Profesora: y para saber la medida total del perímetro ¿qué haces?
- Rosa: *medir los lados, yo sumé dos veces 8 y dos veces 6 y después sumé esos resultados.*

Lo expresado por Rosa, permitió evidenciar el razonamiento en cuanto al uso del lenguaje cuando abordó situaciones relacionadas con la medida de la superficie.

A continuación, se muestra lo que respondió Nataly en relación con la medida de la superficie del salón.

- Profesora: ¿qué hiciste para saber la cantidad de papel necesaria para cubrir la superficie?
- Nataly: *medí el largo y el ancho y multipliqué*
- Profesora: ¿Qué multiplicaste?
- Nataly: *multipliqué el lado uno por el lado dos, y me dio 48.*

A continuación, se presentan los argumentos expuestos por Nataly para determinar la medida de perímetro.

- Profesora: ¿Sabes qué es el perímetro?
- Nataly: *es la orilla, contorno, borde.*
- Profesora: ¿Cómo se halla el perímetro?
- Nataly: *midiendo la orilla de una figura o lugar.*

Lo expuesto por Nataly, dejó en evidencia el razonamiento en relación con el procedimiento que realizó para determinar el área y el perímetro en la situación presentada, al dar respuestas verbales a cada una de las preguntas, utilizando un lenguaje acorde, que da cuenta de la construcción de la red de relaciones en torno a los conceptos en mención.

En la actividad tres, “Aprendo de mi entorno” (Apéndice B.4.3), los participantes también expresaron a través de la entrevista sus saberes en relación con el concepto de perímetro. A cada pregunta realizada, se expone lo que respondió cada participante.

- Profesora: ¿Sabes cuál es el perímetro?
- David: *es igual que el borde*
- Rosa: *es toda la orilla de un lugar o de una figura*
- Nataly: *es la orilla, contorno, borde*
- Profesora: ¿Cómo se halla el perímetro?
- David: *como un cuadro mide un metro, y hay 8, significa que hay 8 metros, porque cada lado mide un metro*
- Rosa: *mido el largo y el ancho, ejemplo si el ancho mide 5 metros, yo puedo decir que acá mide 5 metros (lado opuesto), y si el otro lado mide 6 metros, el otro mide igual, y después sumar*
- Nataly: *midiendo la orilla de una figura o lugar.*

A partir de lo anterior se evidenció la apropiación de los procesos que permitieron fortalecer los aprendizajes y el vocabulario que los participantes han adquirido al desarrollar cada una de las actividades de las Fases anteriores, se hace evidente en el reconocimiento del concepto de perímetro en sus manifestaciones verbales, en las observaciones, dejando ver el razonamiento al dar respuesta a las preguntas realizadas en la entrevista.

Estas respuestas evidenciaron el fortalecimiento de los aprendizajes adquiridos y la apropiación de procesos que permitieron refinar el vocabulario adquirido. Es uno de los puntos que contribuyó a la consolidación de la red de relaciones al solucionar diferentes

problemas que involucran los conceptos de área y perímetro, estos aspectos se relacionan con los aprendizajes que se debe evidenciar en la Fase cuatro (Orientación libre) del modelo de van Hiele, donde se plantea que se debe afianzar la red de relaciones que se empezó a construir en las Fases anteriores.

A continuación, se presenta la Tabla 19 que resume los avances de cada uno de los participantes en las categorías en la Fase cuatro.

**Tabla 19.** *Avances de los participantes. Fase 4 (Orientación libre).*

Categorías	Participantes	Avances
Cubrir, sobreponer, plasmar	David	Actividad uno, “Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno”, determinó la cantidad de multifichas necesaria para cubrir una superficie. En la actividad 2 “Cubriendo superficies grandes” en el literal m, seleccionó el elemento adecuado para cubrir una superficie de mayor tamaño al sobreponer unidades de medida.
	Rosa	Actividad uno, “Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno” cubrió la superficie e identificó cómo ha sido el proceso para cubrirla, además determinó la cantidad de fichas que sobrepuso. En la actividad dos, expuso la unidad de medida del largo y el ancho para hallar la medida de la superficie de un lugar.
	Nataly	Actividad uno, “Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno”, determinó la cantidad de unidades de medida necesarias para cubrirla. En la actividad dos, halló la medida de la superficie de un lugar utilizando unidades de medida de mayor tamaño, literal m.
Medida de Superficie	David	Actividad uno, halló la cantidad de unidades de medida utilizada para cubrir la superficie y explicó el procedimiento realizado, literales a, b, c, d, e. Actividad tres, “Aprendo de mi entorno”, halló la medida del área en metros de las partes en que se encuentra dividida el plano de una casa, literales a y l. y en la entrevista, explicó el procedimiento para determinar la medida del área.

Categorías	Participantes	Avances
	Rosa	Determinó las unidades de área para cubrir la superficie de una cartulina explicando el proceso realizado, actividad uno, literales a, b, c, d, e. En la actividad tres, “Aprendo de mi entorno” determinó la medida del área de diferentes partes en el plano de la casa, literales a y l, y al responder en la entrevista en la Fase cuatro.
	Nataly	Actividad uno, literales a, b, c explicó el procedimiento para saber cuántas unidades de área se necesitan para cubrir una superficie. En la actividad tres, literales a, l, justificó su respuesta al determinar la medida del área de las partes en el plano de la casa en metros, y en la entrevista.
Medida de perímetro	David	Actividad uno, “Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno, en los literales g, h y k, respondió los interrogantes y expresó la medida del perímetro en centímetros, en la actividad dos, expuso la medida del perímetro en metros, literales g, h, i, j, k. En la actividad tres “Aprendo de mi entorno”, determinó la longitud del perímetro de cada lugar de la casa, literales b y d y al explicar el procedimiento realizado para hallar la medida del perímetro.
	Rosa	Actividad uno, efectuó procesos de adición para determinar la longitud del contorno de una superficie. En la actividad dos, literales, g, h, k, expresó la medida del perímetro de cada lugar en metros, y en la actividad tres halló la medida del perímetro en cada lugar en el plano de la casa y en la entrevista al explicar el procedimiento para determinar la medida.
	Nataly	Actividad uno, literales g, h, k, n, utilizó la regla para medir el perímetro, en la actividad dos, literales g, h, i, j, k expresó la medida del perímetro en metros, en la actividad tres, determinó la longitud del perímetro de cada lugar de la casa, literales b y d, y en la entrevista explicó el procedimiento realizado.
Lenguaje de área y	David	Se observó la utilización del lenguaje propio de esta categoría, al presentar los argumentos de la entrevista, expresó con claridad lo que es

Categorías	Participantes	Avances
perímetro		el área, cómo se halla, y las diferencias con el concepto de perímetro.
	Rosa	Utilizó un lenguaje refinado en las explicaciones presentadas en la entrevista de la Fase cuatro, en relación a los conceptos de área y perímetro y las diferencias entre ellos.
	Nataly	Presentó argumentos coherentes para hallar la medida de la superficie y el perímetro, en la entrevista de la Fase cuatro,

En esta Fase los participantes se enfrentaron a situaciones prácticas y representativas que permitieron observar los procedimientos realizados para hallar la medida de la superficie y la longitud del perímetro, resolviendo situaciones y explicando lo ocurrido en cada actividad, aspectos que fueron evidenciados a través de la entrevista.

En cuanto al lenguaje se observaron expresiones más elaboradas, de acuerdo con las acciones realizadas al momento de dar solución a las diversas actividades desarrolladas en esta Fase, empleando estrategias adecuadas y claridad al responder los interrogantes en la entrevista, al realizar procedimientos razonables al momento de explicar lo ocurrido en un episodio en particular, indicando el procedimiento realizado para hallar la respuesta. A continuación, se muestra un esquema que evidencia la red de relaciones y el lenguaje en la Fase cuatro, en torno a los conceptos de área y perímetro. A continuación, se presenta la Tabla 20 que muestra aspectos relacionados con el lenguaje utilizado por los participantes en la Fase cuatro (Orientación libre).

**Tabla 20.** *Lenguaje utilizado en la Fase 4 (Orientación libre).*

Participante	Lenguaje con relación al concepto de superficie y su medida el área	Lenguaje con relación al concepto de contorno y su medida el perímetro
David	Al presentarle situaciones en diferentes contextos (área de la superficie del aula, entre otros) para determinar la medida del área expresó: <i>multiplicando el largo y el</i>	Al preguntarle por el perímetro de situaciones en diferentes contextos (perímetro del aula, entre otros) Respondió: <i>yo sumo el lado uno con el</i>

---

	<i>ancho.</i>	<i>lado dos, da 14, y como el otro lado</i>
	Definió el área como: <i>la parte de adentro de una figura que tiene un perímetro.</i>	<i>tiene largo y ancho me da 14, y 14 más 14 da 28.</i>
		Definió el perímetro como: <i>es igual que el borde.</i>
Rosa	Al presentarle situaciones en diferentes contextos (área de la superficie del aula, entre otros) para determinar la medida del área expresó: <i>midiendo la superficie, y después multiplico un lado por el otro.</i> Definió el área como: <i>todo lo de adentro de una figura o lugar y que también lo puedo medir.</i>	En cuanto al perímetro, explicó el procedimiento realizado para determinar la medida del contorno (perímetro). Respondió: <i>medí los lados, yo sumé dos veces 8 y dos veces 6 y después sumé esos resultados.</i> Definió el perímetro como: <i>es toda la orilla de un lugar o de una figura.</i>
Nataly	Al presentarle situaciones en diferentes contextos (área de la superficie del aula, entre otros) para determinar la medida del área expresó: <i>midiendo la superficie, y después multiplico un lado por el otro.</i> Definió el área como: <i>es todo lo que tiene adentro la figura o lugar, es la superficie.</i>	Al preguntarle por el perímetro de situaciones en diferentes contextos (perímetro del aula, entre otros) Respondió: <i>midiendo la orilla de una figura o lugar.</i> Definió el perímetro como: <i>es la orilla, contorno, borde.</i>

---

#### 4.2.4.4.2 Análisis del lenguaje

En la Tabla 20, se muestra las descripciones de los participantes en relación con los procesos realizados para determinar las medidas de superficie y contorno del aula de clases, mediante procedimientos algorítmicos como la suma y la multiplicación.

Al comparar el lenguaje utilizado en la Fase tres (Explicitación), con el utilizado en la Fase cuatro (Orientación libre), se evidenció el fortalecimiento del mismo, dado que utilizaron expresiones similares para referirse a la superficie y perímetro. Sin embargo, al definir el concepto de área se encontró expresiones como: *la parte de adentro de una figura que tiene un perímetro; todo lo de adentro de una figura o lugar y que también lo puedo*



*medir; es todo lo que tiene adentro la figura o lugar, es la superficie.* Lo que da cuenta del avance en relación al razonamiento del concepto de área. Para el caso de perímetro los participantes manifestaron definiciones como: *es igual que el borde; es toda la orilla de un lugar o de una figura; es la orilla, contorno, borde.* Como se puede observar las definiciones son coherentes con el concepto de perímetro, demostrando el gran avance en relación con los conceptos de área y perímetro.

#### *4.2.4.4.3 Red de relaciones*

Se pudo evidenciar que en esta Fase (Orientación libre), los participantes definieron el concepto de área de forma adecuada, al mismo tiempo indicaron la operación necesaria para hallar la medida de la superficie, utilizando unidades de medida convencionales como el metro.

De forma análoga, se hizo visible la puesta en práctica de los aprendizajes adquiridos en las Fases anteriores para calcular la medida del contorno de un lugar propuesto (aula de clases) realizando las mediciones y operaciones necesarias para este fin.

Es importante analizar que en el lenguaje utilizado por los participantes existen argumentos lógicos que se evidencian en frases más estructuradas para determinar la medida de la superficie y el perímetro, gracias al surgimiento de razonamientos como: *midiendo la superficie, la multiplicación, adición, contorno, multiplico los lados, sumo los lados, borde, midiendo la orilla, entre otros, los cuales dan cuenta de la construcción de la red de relaciones, la cual se observa más nutrida y amplia, incluyendo no solo palabras, sino, la relación que existen entre ellas para dar solución a diversas situaciones problemas en diferentes contextos.*

#### **4.2.4.5 Fase 5: Integración**

En esta Fase los estudiantes tienen una visión general del objeto de estudio y de todas sus particularidades, se les brinda la oportunidad de potenciar los conceptos que ya conocen

y así tener la posibilidad de razonar en relación con el tema estudiado, para fortalecerlos mediante las comparaciones con elementos que ya conocen. En este sentido se integran los conceptos de área y perímetro al momento de solucionar las actividades de esta Fase.

Dado el avance de los participantes en las Fases anteriores y la relación que guardan las categorías, estas se han ido unificando, teniendo en cuenta que los participantes razonan con relación a los conceptos de área y perímetro, los cuales son evidenciados a través del lenguaje. Por lo tanto, en esta Fase se abordan dos categorías que son: área y perímetro y lenguaje de área y perímetro, (Categoría refinada).

#### **4.2.4.6 Categoría 1: Área y perímetro**

##### *4.2.4.6.1 Descriptores*

- *Determina y calcula el área y el perímetro de diferentes superficies cuadradas o rectangulares como el salón de clase, la mesa del profesor, de su habitación entre otras, utilizando unidades de medida estandarizadas.*
- *Realiza operaciones básicas (adición, multiplicación) para hallar el área y el perímetro.*

Al integrar los aprendizajes adquiridos en torno a los conceptos de área y perímetro, los participantes identificaron características asociadas de los conceptos en mención. En la actividad uno, de la Fase cinco, “Aplico lo aprendido” (Apéndice B.5.1), se trasladó a los participantes a un salón diferente al que midieron en la Fase anterior (Orientación libre) para que le hallaran el área y el perímetro, utilizando como unidad de medida el metro. Posteriormente realizaron un dibujo del salón, que representa el área y el perímetro del mismo utilizando cuadrículas, donde cada cuadrícula corresponde a un metro cuadrado ( $m^2$ ).

En esta actividad los participantes se enfrentaron a una situación del entorno, para iniciar se les entregó el documento guía con las instrucciones para desarrollar la actividad. Al realizar la lectura de la guía se observó que primero empezaron a marcar cada uno de los lados del salón (L1), (L2), (L3) y (L4), posteriormente tomaron una regla de 100 centímetros e iniciaron el proceso de medición como se observa en la Ilustración 158. Es importante mencionar que por las características de la actividad el proceso de medición se realizó en grupo, pero al momento de responder las preguntas lo hicieron de forma individual.



Ilustración 149. Proceso de medición del perímetro de un lugar.

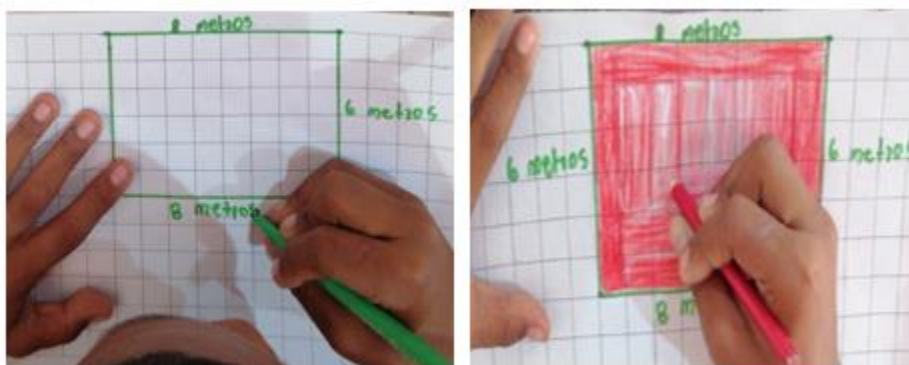
Los participantes realizaron el proceso de medición de forma organizada, marcando por cada lado del salón los metros que midieron con la regla, iniciando desde el cero. Este fue un momento de gran importancia porque se observó en los participantes tranquilidad y seguridad al realizar la actividad, seguidamente tomaron los datos registrados y realizaron los procedimientos pertinentes para hallar el área y el perímetro del salón.



Ilustración 150. Proceso de los participantes para hallar el área y perímetro.

Se observa en la Ilustración 156 una muestra del proceso realizado para hallar el área, el cual es una multiplicación de la cantidad de metros que obtuvieron al medir el largo por el ancho del salón ( $6 \times 8 = 48$ ), en cuanto al perímetro, realizaron una adición, donde la participante Rosa organizó de forma vertical los datos obtenidos al medir cada lado del salón y de esa forma hallar la medida total del contorno (perímetro), dando como resultado 28 metros. Lo expuesto por los participantes deja en evidencia el razonamiento frente a los conceptos abordados, a partir de los procesos realizados para hallar el área y perímetro, que fortalecieron la red de relaciones y se encuentran en relación con la Fase cinco (Integración), del Modelo de van Hiele.

Seguidamente realizaron un dibujo, en el cual representaron el área y el perímetro del salón, los cuales se observan a continuación.



*Ilustración 151.* Representación realizada por David.

Se observa que David, realizó detalladamente el conteo de cada uno de los cuadrados, estableciendo equivalencias en la medida del perímetro, es decir un lado de cada cuadrícula en el plano (dibujo), equivale a un metro, dos lados a dos metros y así sucesivamente hasta completar 6 metros de ancho y 8 metros de largo, resaltando con color el contorno del dibujo y de otro color el área, de esta forma identificó el perímetro como el contorno, borde u orilla de una figura plana y el área como la superficie que cubre dicha figura. Rosa por su parte, realizó su representación de forma más explícita, debido a que

marcó cada lado del dibujo enumerándolo como se puede observar en la primera parte de la Ilustración 158.

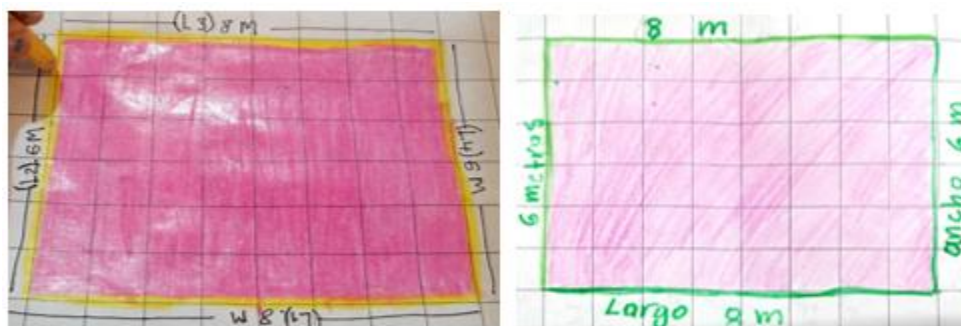


Ilustración 152. Representación realizada por Rosa y Nataly.

Se observa en la primera parte de la Ilustración 168, la representación realizada por Rosa, que de forma organizada marcó cada lado de la figura, (L1, 8 m), (L2, 6 m), (L3 8 m) y (L4, 6 m), la segunda parte corresponde a la representación realizada por Nataly, la cual marcó el perímetro e indicó la medida en metros en cada lado, la organización presentada permitió inferir que las participantes al igual que David, establecieron equivalencias en el sentido que cada lado de la cuadrícula representa un metro, evidenciando un mayor razonamiento en relación a la medida del perímetro, que se encuentra delimitada en cada representación por un color distinto, en cuanto a la superficie, las participantes la resaltaron con un color distinto, dando a entender que reconocen el área y el perímetro en una superficie, y pueden establecer diferencias entre ellas. Seguidamente los participantes respondieron las preguntas relacionadas con el trabajo realizado, las cuales se presentan a continuación.

- a) ¿Cuántos metros mide el lado (L1) del salón? 6 metros  
 b) ¿Cuántos metros mide el lado (L2) del salón? 8 metros  
 c) ¿Cuántos metros mide el lado (L3) del salón? 6 metros  
 d) ¿Cuántos metros mide el lado (L4) del salón? 8 metros

Ilustración 153. Respuesta de David.

Cada participante dio cuenta de la medida en metros de cada lado del salón, lo que permitió evidenciar un buen proceso de medición que les permitió establecer con claridad la medida del área y el perímetro del salón y explicar el procedimiento realizado como se observa en las respuestas que se exponen a continuación.

f) ¿Qué procedimiento hiciste para hallar el perímetro? sumando  
 f) ¿Qué procedimiento hiciste para hallar el perímetro? Sumo la  
medida de cada lado

Ilustración 154. Respuesta de Rosa.

f) ¿Qué procedimiento hiciste para hallar el perímetro? Sumando 8+6  
+8+6 y así encuentre el perímetro

Ilustración 155. Respuesta de Nataly.

Cada participante expuso una explicación válida que dio cuenta del progreso en cuanto al razonamiento para encontrar la medida del perímetro, es de notar que Rosa, tiene claridad en relación al procedimiento que se debe realizar para hallar la medida del perímetro, Nataly por su parte, retoma la actividad, y hace visible los datos que utilizó por medio del procedimiento, el cual le permitió encontrar la medida total. Por lo anterior se puede inferir que los participantes midieron el perímetro de figuras planas utilizando unidades de medida estandarizadas como el metro. Seguidamente se indagó por el área del salón.

g) ¿Cuál es el área del salón que mediste? 48 metros  
cuadrados

Ilustración 156. Respuesta de David.

g) ¿Cuál es el área del salón que mediste? RS 48 metros  
cuadrado

Ilustración 157. Respuesta de Rosa.

g) ¿Cuál es el área del salón que mediste? 48 m<sup>2</sup>

*Ilustración 158. Respuesta de Nataly.*

Cada participante expuso la medida del área de la superficie del salón, las expresiones: *metros cuadrados*, por parte de David y Rosa, y el símbolo “m<sup>2</sup>” por Nataly, permitieron dar cuenta de los avances de los participantes, lo cual dejó al descubierto el razonamiento en relación a la forma como se debe expresar la medida del área de una superficie. Teniendo en cuenta lo expuesto por los participantes se indagó por el procedimiento que realizaron para hallar la medida del área.

h) ¿Qué procedimiento hiciste para hallar el área del salón? multiplique el largo y el ancho y sape que me dio 48 metros cuadrados

*Ilustración 159. Respuesta de David.*

h) ¿Qué procedimiento hiciste para hallar el área del salón? multiplique el Lado 1 y el Lado 2 y me dio el resultado que es 48 metros

*Ilustración 160. Respuesta de Rosa.*

h) ¿Qué procedimiento hiciste para hallar el área del salón? multiplicando el largo y ancho

*Ilustración 161. Respuesta de Nataly.*

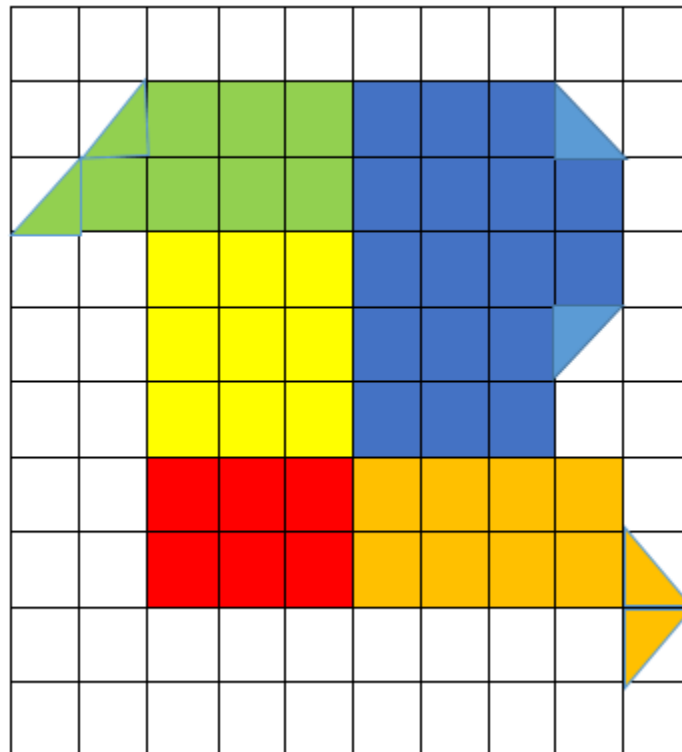
Cada participante justificó de forma clara el procedimiento que utilizó para hallar la medida del área del salón poniendo en práctica los conocimientos aprendidos en las actividades desarrolladas en las Fases anteriores, para hallar la medida del área de la



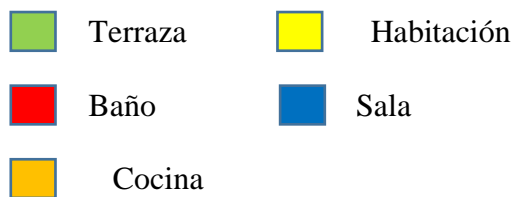
superficie. De lo anterior se puede deducir que los participantes pueden realizar procedimientos para determinar el área de una figura plana o lugar.

En la siguiente actividad “Encuentro el área y el perímetro” (Apéndice B.5.3), se integraron los saberes en relación a los conceptos de área y perímetro al presentar a los estudiantes el

plano de una casa, donde la mayor parte de la superficie se encuentra cubierta por cuadrados y cada uno representa un metro cuadrado ( $m^2$ ). A continuación, se muestra el plano de la casa.



*Ilustración 162.* Muestra del plano de una casa.





Cada uno realizó la lectura de la guía y siguiendo las indicaciones empezaron a responder las preguntas, mientras que observaron con detenimiento la Ilustración 169 y pudieron realizar un conteo para establecer la medida del área y el perímetro de cada una de las partes en que se encuentra dividido el plano de la casa. A continuación, se presentan algunas respuestas de los participantes.

a) El área de la terraza es: 8 metros cuadrados

*Ilustración 163. Respuesta de David.*

b) El perímetro de la habitación es: 12 metro de Perímetro

*Ilustración 164. Respuesta de David.*

f) El área del plano de la casa es: 50 m<sup>2</sup>

*Ilustración 165. Respuesta de Nataly.*

Los participantes realizaron un conteo de las cuadrículas, para establecer la medida del área de la terraza y el perímetro de la habitación, es importante resaltar que, en esta actividad, muchos de los cuadrados que conforman la superficie del plano de la casa se encuentran interceptados de forma diagonal, como es el área de la terraza, la sala, la cocina, en general toda la casa. En esta situación los participantes manifestaron que hay cuadrados que solo tienen la mitad, ya que está dividido por una diagonal y que al unir estas mitades da como resultado un metro cuadrado.

En este sentido cada uno de los participantes respondió de forma correcta a las preguntas que indagaron por el área y el perímetro de las partes de la casa, Rosa por su parte, utilizó el símbolo para escribir los metros cuadrados, lo que evidenció claridad en relación a la forma de expresar la medida del área. En cuanto al área de la cocina la profesora le preguntó ¿Cuál es el área de la cocina? David respondió: *nueve metros ¿por qué?* David respondió: *bueno yo conté cada cuadrado y me dio ocho, pero como hay dos pedacitos que corresponden a la mitad de uno, los junto y me da uno más* (registro en audio 22 – 11 – 2019), lo anterior, permite inferir que los participantes han adquirido un aprendizaje más

amplio en relación a los conceptos trabajados, fortaleciendo el vocabulario que han adquirido al desarrollar las actividades de las Fases anteriores.

Aspectos que permitieron fortalecer la red de relaciones formada en torno a los conceptos.

A continuación, se presenta la última actividad de esta Fase, el cual es un problema que los participantes deben solucionar con el propósito de evidenciar la capacidad de razonamiento de cada uno en relación con los conceptos trabajados.

En esta actividad se plantea un problema que involucra situaciones de la vida cotidiana y requiere de la aplicabilidad de los conceptos de área y perímetro para la solución.

“En la casa de Andrés se necesita embaldosar la habitación de él, esta mide tres metros de largo y tres de anchos. Andrés necesita la ayuda de los compañeros para saber cuántas baldosas de 30 centímetros de lado se necesitan para cubrir la superficie de la habitación. Además, se requiere saber su perímetro, porque su madre desea decorar a su alrededor con una cenefa”.

David y Rosa realizaron una representación práctica en la superficie de la habitación, ellos midieron de forma organizada los tres metros de la habitación por cada lado, como se observa en las siguientes representaciones.



*Ilustración 166.* Representación de la habitación con las baldosas.

Los participantes realizaron la representación de la habitación con medidas reales, tres metros de cada lado, durante el proceso de medición descubrieron que de un lado necesita diez baldosas y David dijo: *como de cada lado mide lo mismo, del otro lado también se necesitan diez baldosas*, intervino la docente y le preguntó: *¿Se necesita medir todos los lados?* él respondió: *no ¿Por qué? porque de cada lado mide lo mismo entonces son las mismas baldosas* (registro en audio 22 – 11 – 2019). Estos argumentos permitieron evidenciar el razonamiento de forma más amplia, dando a entender que no era necesario medir todos los lados, después trazaron las baldosas quedando diez baldosas por cada lado. Respecto al proceso y a los argumentos empleados por los participantes se puede decir que tienen claridad frente a la solución del problema planteado al establecer la cantidad de baldosas de dos de los lados. Seguidamente realizaron una multiplicación para determinar la medida del área y el perímetro de la habitación, como se puede observar a continuación.

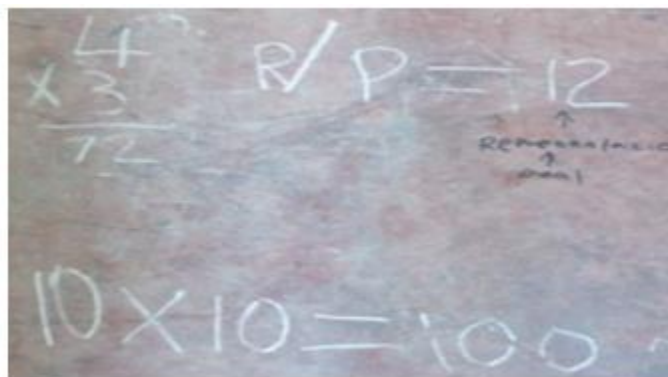


Ilustración 167. Proceso realizado por David y Rosa para hallar el perímetro.

Los participantes tienen claridad en cuanto al procedimiento que deben realizar al momento de hallar el perímetro, en este caso al identificar que tenían las mismas medidas de cada lado (tres metros) en vez de realizar una adición, optaron por multiplicar la cantidad de lados por la medida de un lado y así establecer la medida del perímetro. Después de trazar la cantidad de baldosas en dos lados, multiplicaron  $10 \times 10$  para saber la cantidad de baldosas necesarias para cubrir la superficie de la habitación, poniendo en práctica aprendizajes adquiridos en las Fases anteriores.

Nataly, por su parte, realizó un procedimiento detallado para establecer la medida del perímetro de la habitación de Andrés.

$$\begin{array}{r}
 L.1 = 3 \text{ M} \\
 L.2 = 3 \text{ M} \\
 L.3 = 3 \text{ M} \\
 L.4 = 3 \text{ M} \\
 \hline
 12 \text{ Perímetro}
 \end{array}$$

Ilustración 168. Proceso para hallar la medida del perímetro.

Es evidente que la participante se apoyó en los aprendizajes adquiridos en las actividades realizadas en las Fases anteriores, especificando cada lado con su respectiva medida y a la vez indicó con la letra “m” que significa metro, seguidamente realizó la adición de cada uno de los sumandos, y de forma organizada y detallada expuso la medida del perímetro de la habitación. Por lo anterior se infiere que Nataly comprendió el procedimiento que se debe realizar para hallar la medida del perímetro de una figura plana o lugar. A continuación, se observa el proceso realizado por Nataly para saber la cantidad de baldosas necesarias para cubrir la superficie de la habitación de Andrés.



Ilustración 169. Proceso realizado por Nataly para hallar el área.

Se evidenció que la participante utilizó la regla, y de forma cuidadosa trazó cuatro líneas para realizar una representación en escala, es decir, mediante un plano, y representar la medida de cada uno de los lados, los cuales equivalen a tres metros. Para identificar la cantidad de baldosas que se deben colocar por cada lado, ella se apoyó del trabajo realizado

por los compañeros y en la parte inferior dibujó la cantidad de baldosas que se pueden colocar de cada lado de acuerdo con la longitud de sus lados, por lo tanto, cada cuadrado equivale a una baldosa que mide treinta centímetros y como cada lado tenía la misma longitud, descubrió que los demás lados tenían la misma cantidad de baldosas. Teniendo en cuenta sus representaciones y la observación durante el proceso, se puede inferir que tiene claridad al momento de dar solución al problema planteado, ya que realizó operaciones y cálculos numéricos para dar respuesta al problema.

Un episodio que da cuenta del avance que han tenido los participantes en relación con los conceptos de área y perímetro se evidenció en las siguientes preguntas relacionadas con la situación problema.

- Profesora: ¿Qué hiciste para darle solución al problema?

- David: *con la ayuda de mi compañera hicimos la habitación de Andrés, coloqué la regla y de cada lado medí tres metros*

- Profesora: ¿Cuál fue el perímetro de la habitación?

- David: *doce metros*

- Profesora: ¿Qué hiciste para hallar el perímetro?

- David: *multipliqué cuatro por tres porque el cuadrado tiene cuatro partes y cada lado me dio tres*

- Profesora: ¿cuéntame lo que hiciste para saber cuántas baldosas se necesitan para cubrir la superficie?

- David: *“cada baldosa tiene treinta centímetros y como son tres metros, tres por diez son treinta*

- Profesora: ¿Cuántas baldosas se necesitan de cada lado?

- David: *diez*

- Profesora: ¿y para cubrir toda la superficie?

- David: *cien*

- Profesora: ¿Cómo lo sabes?,

- David: *porque aquí tiene diez, y del otro lado diez, y  $10 \times 10 = 100$ ”.*

Los argumentos expresados por el participante, al responder las preguntas en la entrevista, dan cuenta de la interpretación del problema y de las acciones realizadas para encontrar la solución, por lo tanto, se puede decir que los participantes comprenden situaciones de la vida diaria que involucran los conceptos de área y perímetro.

#### **4.2.4.7 Categoría 2. Lenguaje de área y perímetro**

##### *4.2.4.7.1 Descriptor*

- *Narra de forma ordenada los aspectos a tener en cuenta para hallar el área y el perímetro de una figura o lugar.*

En la entrevista realizada en la actividad uno “Aplico lo aprendido” (Apéndice B.5.1), se evidenció la apropiación del lenguaje matemático en relación con los conceptos de área y perímetro, donde los participantes reconocieron diferencias generales entre ellos. A continuación, se observa lo expresado por David en la entrevista.

- Profesora: ¿explícame qué hiciste en la actividad que realizaste?
- David: *medimos el contorno del salón*
- Profesora: ¿Para qué lo mediste?
- David: *para buscar el perímetro y el área*
- Profesora: ¿Cómo hallaste el perímetro?
- David: *sumando el largo y el ancho y los otros dos lados*
- Profesora: ¿Cómo hallaste el área?,
- David: *multiplicando el largo y el ancho*
- Profesora: ¿Qué aprendiste de esta actividad?
- David: *que el perímetro es alrededor del salón, y el área es todo lo de adentro.*

El participante respondió cada pregunta con mucha tranquilidad, dejando en evidencia la comprensión en el procedimiento realizado, también se observó avances en los aprendizajes al utilizar un lenguaje más refinado acorde con la situación presentada, haciendo evidente la

red de relaciones construida en relación a los conceptos de área y perímetro. A continuación se presenta la entrevista realizada a Rosa.

- Profesora: Comenta lo que hiciste en la actividad que realizaste
- Rosa: *medí el salón, respondí preguntas, coloreé y dibujé*
- Profesora: ¿Para qué mediste el salón?
- Rosa: *para hallar una medida correcta*
- Profesora: ¿Cómo hiciste para hallar el perímetro?
- Rosa: *sumé el (L1) y el (L2), y ya sabía cuánto había en cada lado*
- Profesora: ¿Cómo hallaste el área?
- Rosa: *multipliqué el (L1) y el lado (L2)*
- Profesor: ¿Se puede multiplicar el (L3) y el (L4) para hallar el área?
- Rosa: *sí se puede.*

En lo expresado por Rosa, se evidencia que falta claridad en relación a lo que se pretende con la medida del salón, ella solo responde *para hallar una medida correcta*, sin especificar que se pretende hallar la medida del área y el perímetro, pero al indagar sobre el procedimiento realizado para hallar el perímetro ella responde con tranquilidad, y explica lo que hizo utilizando un lenguaje adecuado y acorde con los conceptos trabajados. Por último, se presenta la entrevista realizada a Nataly.

- Profesora: Explica lo que hiciste en la última actividad que realizaste
- Nataly: *medí el salón y respondí preguntas*
- Profesora: ¿Para qué mediste el salón?
- Nataly: *para medir el perímetro y el área*
- Profesora: ¿Cómo hallaste el perímetro?
- Nataly: *sumando el largo y el ancho y así saber los otros lados*
- Profesora: ¿Cómo hallaste el área?
- Nataly: *multiplicando el largo y el ancho, o sea  $6 \times 8$*
- Profesora: ¿Qué aprendiste en esta actividad?

- Nataly: *aprendí que podemos hallar el área y el perímetro de un salón, midiéndolo con una regla o metro.*

Lo expresado por Nataly, deja ver como se ha refinado el lenguaje sobre los conceptos trabajados, utiliza un vocabulario adecuado que se encuentra en relación con la Fase de integración del Modelo de van Hiele. En este momento los estudiantes han construido una red de relaciones, la cual se hace evidente en los argumentos expuestos al responder cada pregunta, las cuales integran aspectos relacionadas con los conceptos de área y perímetro que ya conocen.

A continuación, se presenta la entrevista realizada a Nataly en relación con el trabajo realizado para solucionar el problema.

- Profesora: *¿Qué hiciste para darle solución al problema?*

- Nataly: *primero decidí responderle la pregunta a la mamá de Andrés porque la vi más fácil*

- Profesora: *¿Cómo hiciste para resolver la pregunta a la mamá de Andrés?*

- Nataly: *primero recordé lo que había hecho, lado uno, lado dos... y coloqué los tres metros de cada lado, y los sumé y allí descubrí la respuesta*

- Profesora: *¿Cuál fue la respuesta?*

- Nataly: *doce metros*

- Profesora: *¿Qué hiciste para continuar y terminar de resolver el problema*

- Nataly: *después hice un cuadrado y de cada lado u orilla coloqué tres metros y como de cada lado se necesitan diez baldosas, yo dibujé diez adentro.*

- Profesora: *¿Cómo descubriste que de cada lado se necesitaban diez baldosas?*

- Nataly: *bueno, yo miré a mis compañeros y después medí con la regla treinta centímetros de cada lado, fui midiendo hasta que me dio diez baldosas.*

- Profesor: *¿Cómo hiciste para saber la cantidad de baldosas necesarias para cubrir la superficie?*

- Nataly: *yo pensé que como abajo había colocado diez, yo pensé que arriba también, y fui contando de diez en diez y me dio cien.*



De acuerdo con el modelo de van Hiele, al realizar la entrevista se evidenció el razonamiento en relación con los conceptos de área y perímetro a partir del lenguaje, el cual ilustró las acciones realizadas de forma detallada para dar solución al problema. A continuación, en la Tabla 21 se muestra un resumen de los avances de cada participante en la Fase cinco.

**Tabla 21.** *Avances de los participantes. Fase 5 (Integración)*

Categorías	Participante	Avances
Área y perímetro	David	Integró los conocimientos, mostrando apropiación de los conceptos al desarrollar la actividad “Aplicando lo aprendido” realizó el proceso de medición para hallar el área y el perímetro de un salón de clases y expuso el procedimiento realizado, además, realizó en cuadrículas un dibujo que representa el salón, teniendo en cuenta las medidas de cada lado. En la actividad, “Encontrando el área y el perímetro” estableció la medida del área y el perímetro de diferentes lugares a partir de la observación de un plano que tiene algunas unidades cuadradas interceptadas por una diagonal. Solucionó problemas de la vida diaria que involucra los conceptos estudiados.
	Rosa	En la actividad uno, “Aplicando lo aprendido”, determinó el área y el perímetro de una superficie utilizando operaciones básicas, realizó la representación de la superficie del salón en cuadrículas, literales f y h. En la actividad dos “Solucione problemas” halló el área y el perímetro y lo expresó en metros cuadrados. Solucionó problemas de la vida cotidiana que requieren la aplicabilidad de los conceptos de área y perímetro.
	Nataly	Realizó el proceso adecuado de medición al solucionar la actividad uno, empleando operaciones aditivas para hallar el perímetro y multiplicativas para determinar la superficie, justificando sus respuestas, literales f y h. Realizó representaciones del área y el perímetro utilizando cuadrículas. En la actividad dos, determinó el área y el perímetro de las partes en que se encuentra dividido el plano de la casa, literales a, b, f. Solucionó la situación problema propuesta en esta Fase y especificó el procedimiento realizado.

Lenguaje de área y perímetro	David	El refinamiento del lenguaje en torno a los conceptos de área y perímetro se hizo evidente en las respuestas narradas en la entrevista de la actividad “Aplicando lo aprendido”, al explicar cómo halla el área y el perímetro. También expuso lo aprendido en el proceso, al solucionar la situación problema. explica. Además, explicó el proceso para hallar el área y el perímetro. Se observó claridad en sus argumentos en relación al lenguaje utilizado en esta categoría.
	Rosa	El lenguaje formado en relación a los conceptos de área y perímetro se hizo visible en las explicaciones presentadas en la entrevista de la actividad uno, al explicar la forma de encontrar el área, dio cuenta del procedimiento para hallar la solución. En la situación problema propuesta, se observó la apropiación de las operaciones (adición y multiplicación) como las necesarias para hallar el área y el perímetro de la habitación de Andrés.
	Nataly	En la actividad “Aplico lo aprendido” expresó de forma clara el proceso realizado para determinar el área y el perímetro haciendo uso de procesos aditivos y multiplicativos. En la entrevista explicó el procedimiento para la solución, en el cual se evidenció un lenguaje claro y acorde con la situación presentada haciendo visible la red de relaciones.

En esta Fase se observó el desempeño de los participantes al solucionar situaciones de la vida diaria, problemas de aplicación, actividades representadas en el plano, enfrentándose con seguridad, utilizando los procedimientos adecuados según el caso. Además, justificaron sus acciones para determinar el área y el perímetro de una figura o lugar, estableciendo diferencias en relación con los conceptos, expresando de forma explícita sus argumentos, justificaciones y enunciados, estos aspectos evidenciaron el razonamiento y la construcción de la red de relaciones construida en torno a los conceptos, permitiendo de esta manera estar en relación con las características de la Fase cinco del Modelo de van Hiele.

A continuación, se muestra un esquema que evidencia la red de relaciones y el lenguaje en la Fase cinco, en torno a los conceptos de área y perímetro. A continuación, se presenta la Tabla 22 que muestra aspectos relacionados con el lenguaje utilizado por los participantes en la Fase cinco (Integración).

**Tabla 22.** *Lenguaje utilizado por los participantes en la Fase 5 (Integración).*

Participante	Lenguaje con relación al concepto de superficie y su medida el área	Lenguaje con relación al concepto de contorno y su medida el perímetro
David	<p>Al integrar los aprendizajes adquiridos el participante resolvió problemas que requirieron de procedimientos para determinar área de una figura o lugar, usando expresiones como: <i>multipliqué el largo y el ancho y supe que me dio 48 metros cuadrados</i>.</p> <p>Realizó representaciones de un lugar, a través de un dibujo basado en cuadrículas, estableció equivalencias (cada cuadrícula equivale a un metro cuadrado).</p>	<p>En relación con el concepto de perímetro, explicó el proceso realizado para hallar la medida del perímetro de la habitación y del salón de clases, utilizó expresiones como: <i>multipliqué cuatro por tres, porque el cuadrado tiene cuatro partes y cada lado me dio tres</i>.</p> <p>En relación a lo aprendido expresó: <i>que el perímetro es alrededor del salón, y el área es todo lo de adentro</i>.</p>
Rosa	<p>Al integrar los aprendizajes adquiridos la participante resolvió problemas que requirieron de procedimientos para determinar área de una figura o lugar, usando expresiones como: <i>multipliqué el lado uno y el lado dos y me dio el resultado que es 48</i>. Además, realizó representaciones de un lugar, a través de un dibujo en cuadrículas, estableció equivalencias (cada cuadrícula equivale a un metro cuadrado).</p>	<p>En relación con el concepto de perímetro, explicó el proceso realizado para hallar la medida del perímetro de la habitación y del salón de clases, utilizó expresiones como: <i>sumé el (L1) y el (L2), y ya sabía cuánto había en cada lado</i>.</p> <p>En relación a lo aprendido expresó: <i>el perímetro es la orilla y el área es todo lo de adentro</i>.</p>
Nataly	<p>Al integrar los aprendizajes adquiridos la participante resolvió problemas que requirieron de procedimientos para determinar área de una figura o lugar, usando expresiones como: <i>multiplicando el largo y el ancho</i>. Además, realizó representaciones de un lugar, a través de un</p>	<p>En relación con el concepto de perímetro, explicó el proceso realizado para hallar la medida del perímetro de la habitación y del salón de clases, utilizó expresiones como: <i>multiplicando el largo y el ancho</i>.</p> <p>En relación a lo aprendido expresó:</p>

Participante	Lenguaje con relación al concepto de superficie y su medida el área	Lenguaje con relación al concepto de contorno y su medida el perímetro
	dibujo en cuadrículas, estableció equivalencias (cada cuadrícula equivale a un metro cuadrado).	<i>aprendi que podemos hallar el área y el perímetro de un salón, midiéndolo con una regla o metro.</i>

#### 4.2.4.7.2 Análisis del lenguaje

El lenguaje utilizado en esta Fase muestra el avance y la apropiación de los conceptos de área y perímetro que los participantes construyeron y fueron refinando al pasar por cada una de las fases anteriores.

En relación a los conceptos abordados los participantes razonaron diciendo: *que el perímetro es alrededor del salón, y el área es todo lo de adentro; el perímetro es la orilla y el área es todo lo de adentro; multipliqué el lado uno y el lado dos y me dio el resultado que es 48; multiplicando el largo y el ancho.* lo que demuestra un avance significativo en cuanto al razonamiento de todo aquello que implica enfrentarse a situaciones donde se involucran superficies planas con su respectivo perímetro, es decir, los participantes fueron capaces de asociar a una superficie y un contorno, medidas de área y perímetro, mediante el uso de operaciones matemáticas (adición y multiplicación) que dan muestra de los aprendizajes adquiridos en relación a los conceptos estudiados.

#### 4.2.4.7.3 Red de relaciones

Al finalizar esta Fase se observó que los participantes resolvieron problemas de forma adecuada que requerían de un razonamiento un poco más complejo, puesto que en la situación presentada debían analizar cómo hallar el área y el perímetro de diferentes espacios integrados en un mismo problema. De igual forma, representaron gráficamente el área y el perímetro de diferentes espacios (aula de clases, habitación) dando cuenta del uso del Sistema Internacional de medidas (metro cuadrado).

En esta Fase, se evidencia una red de relaciones más amplia, construida a lo largo del estudio, debido a que obtuvieron un razonamiento más específico, en torno a la diferencia de los conceptos de área y perímetro de figuras planas. Como se puede evidenciar los elementos que conformaron la red de relaciones de la Fase cinco (Integración), son más estructurados ya que realizaron diferentes representaciones y expresiones como la solución de problemas de la vida diaria que involucran operaciones matemáticas asociadas al objeto de estudio, además, de realizar representaciones simbólicas y mentales, que permitieron mostrar el progreso del razonamiento de los participantes al pasar por las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele.

A manera de síntesis, en la actividad diagnóstica se identificó que los participantes se limitaron a responder preguntas, utilizando palabras aisladas, expuestas de forma escrita sin hacer ninguna relación entre los conceptos de superficie y su contorno, por lo cual no se pudo observar elementos en cuanto a la red de relaciones. En la Fase uno (Información) el lenguaje utilizado en torno a los conceptos fue más notorio que en la actividad diagnóstica, ya que hicieron estimaciones y determinaron cantidades, además realizaron representaciones gráficas y conteos, generando así una familiarización con los conceptos de medida de una superficie y la longitud del contorno, estos aspectos permitieron evidenciar el inicio de la red de relaciones en torno a los conceptos de área y perímetro.

En la Fase dos (Orientación dirigida), se evidenció que emplearon justificaciones adecuadas al hacer comparaciones de superficies utilizando frases más estructuradas lo cual fue un aspecto que no se observó en la Fase anterior, adicionalmente para recorrer el contorno de lugares hicieron mención de unidades de medida convencionales y no convencionales mostrando avances en este componente. Aquí se aclararon los conceptos de superficie y contorno, así como las clases de figuras que fueron elementos de aprendizaje para ellos, elementos que fortalecieron la red de relaciones en torno a los conceptos estudiados.

Los procesos presentados en la Fase tres (Explicitación) permitieron dar cuenta de la evolución del lenguaje al referirse a la superficie y al perímetro, debido a que desarrollaron operaciones aditivas y multiplicativas para determinar la medida de una superficie y el contorno. El crecimiento de la red de relaciones se hizo evidente en el momento que los participantes compartieron sus experiencias con los compañeros, mostrando apropiación de los aprendizajes adquiridos durante el proceso. Ya en la Fase cuatro (Orientación libre), se evidenció la consolidación del lenguaje puesto que los participantes usaron expresiones más estructuradas al definir el concepto de área y de perímetro de forma adecuada. Las expresiones lógicas al momento de hallar la medida de la superficie y el contorno, así como la forma de procesos empleados para solucionar diversas situaciones permitieron evidenciar la construcción de la red de relaciones en torno a los conceptos objeto de estudio.

Por último, en la Fase cinco (Integración) se mostró el avance en cuanto a el lenguaje, a través de la asimilación de los conceptos, y al exponer diferencias claras en cuanto a lo que es el área y el perímetro de figuras planas integrándolos también en la solución de diferentes problemas de este tipo, fue así como se dejó en evidencia la puesta en práctica de los conocimientos adquiridos al pasar por cada una de las Fases de aprendizaje. Aquí se hizo evidente la red de relaciones al hacer explícitos elementos diferenciadores entre los conceptos de área y perímetro, lo que conllevó a brindar a los participantes más herramientas para poder avanzar de nivel.

#### **4. 3 Progreso de los participantes con relación a los conceptos de área y perímetro**

Luego de aplicar las actividades propuestas en cada una de las cinco Fases (Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre e integración), se aplicó una actividad de cierre para evidenciar la evolución de los avances conceptuales y procedimentales de los participantes en cuanto al razonamiento de los conceptos de área y perímetro. Para esta actividad se les pidió a los participantes que respondieran preguntas relacionadas con el concepto de área y perímetro. A continuación, se expone la Tabla 23, la cual contiene las preguntas y respuestas de los participantes acerca de los conceptos.

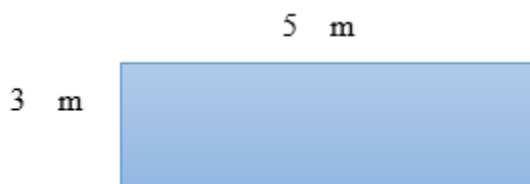
**Tabla 23.** *Actividad de cierre con relación al concepto de área y perímetro*

N°	Preguntas	Participantes	Respuestas
1	¿Qué comprendes por el área de una figura?	David	<i>Es una figura que contiene una superficie, que en el área se multiplica</i>
		Rosa	<i>Es todo el centro de una figura o cosa</i>
		Nataly	<i>Comprendo que es todo lo que está adentro de una figura</i>
2	El área de una superficie se puede medir con:	David	<i>Un metro o regla</i>
		Rosa	<i>Con figuras, entre otras</i>
		Nataly	<i>Regla o metro</i>
3	¿Qué procedimiento usarías para hallar el área de un cuadrado?	David	<i>Multiplicando el largo por el ancho y ya sé que me da</i>
		Rosa	<i>Multiplicando el largo y el ancho</i>
		Nataly	<i>Multiplicando el largo por el ancho</i>
4	El perímetro de una figura es:	David	<i>Todo como el borde, el contorno o perímetro</i>
		Rosa	<i>Toda la orilla</i>
		Nataly	<i>Todo el borde</i>
5	El perímetro de una figura se puede medir con:	David	<i>Regla o metro</i>
		Rosa	<i>Regla o metro</i>
		Nataly	<i>Metro, regla</i>
6	¿Qué procedimiento usarías para	David	<i>Sumando el largo y el ancho, ya sé que me</i>

N°	Preguntas	Participantes	Respuestas
	hallar el perímetro de un cuadrado?	<i>da</i>	
		Rosa	<i>Sumaría el largo y el ancho dos veces</i>
		Nataly	<i>Sumando todos los lados</i>

Con el propósito de identificar cómo los participantes de grado tercero hallan el área y el perímetro en una situación de la vida diaria, se les presentó el siguiente problema que enmarca elementos de la cotidianidad para darle solución.

El patio de la casa de Andrés tiene forma rectangular, mide 5 metros de largo y 3 metros de ancho como se muestra en la imagen. Teniendo en cuenta esta información responde:



En la Tabla 24, se puede observar las preguntas y respuestas de los participantes en torno a la solución del problema en cual se indaga por el área y el perímetro del patio de la casa de Andrés.

**Tabla 24.** Actividad de cierre con relación al concepto de área y perímetro

N°	Preguntas	Participantes	Respuestas
1	El área del patio de la casa de Andrés es:	David	<i>15 metros de área</i>
		Rosa	<i>15 m<sup>2</sup></i>
		Nataly	<i>15 metros</i>
2	El procedimiento que hiciste para	David	<i>Multiplcando 5 x 3 y el área me dio 15</i>



N°	Preguntas	Participantes	Respuestas
	hallar el área fue:		<i>metros cuadrados</i>
		Rosa	<i>Multiplcando el largo y el ancho</i>
		Nataly	<i>Multipliqué el largo y el ancho</i>
3	El perímetro del patio de la casa de Andrés es.	David	<i>16 metros de perímetro</i>
		Rosa	<i>16 metros</i>
		Nataly	<i>16 metros</i>
4	El procedimiento que hiciste para hallar el perímetro fue:	David	<i>Sumando <math>5 + 3</math> y <math>5 + 3</math> el resultado dio 16</i>
		Rosa	<i>Sumé el largo y el ancho</i>
		Nataly	<i>Sumé todos los lados</i>
5	Si se quiere cercar el patio de la casa de Andrés con parales de madera, cuya distancia es de un metro ¿Cuántos de estos parales se necesitan para cercar el patio?	David	<i>Se necesitan 16 parales para cercar el patio</i>
		Rosa	<i>Se necesitan 16 parales para cercar el patio de la casa de Andrés</i>
		Nataly	<i>16 parales de madera</i>

En las Tablas 23 y 24 se observan elementos que sintetizan el progreso de los aprendizajes de los participantes al completar las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, las cuales se constituyen en herramientas de gran importancia a la hora de abordar conceptos geométricos en estudiantes de Educación Básica Primaria.

A manera de conclusión, en la actividad de cierre se identificó que los participantes dieron cuenta del razonamiento acerca de los conceptos de área y perímetro construido en

las actividades implementadas en las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, tales como definiciones de una superficie, relacionar elementos con los que se puede medir, como regla, metro entre otros, de manera que explicaron el procedimiento que se debe realizar para hallar el área de un cuadrado.

También, definieron el concepto de perímetro como toda la orilla, todo el borde y todo el contorno, relacionando instrumentos de medida estandarizados con los que se puede medir, además explicaron el procedimiento que se debe realizar para hallar el perímetro de una figura plana o lugar.

Se observó que pusieron en práctica los aprendizajes adquiridos al dar solución a una situación de la vida diaria, donde debían hallar el área y el perímetro de la casa de Andrés. Utilizaron los datos presentados en el problema para responder cada una de las preguntas relacionadas a la situación, por lo que se pudo evidenciar que cada participante realizó un razonamiento adecuado para determinar el área y el perímetro de una superficie rectangular por medio de operaciones básicas (adición y multiplicación). En cuanto al procedimiento empleado, lo hicieron explícito de forma escrita (Tabla 24).

También se evidenció que para dar respuesta al literal 5 de la Tabla 24, los participantes realizaron representaciones, pictogramas, que permitieron recrear de manera visual el patio de la casa de Andrés y dar respuesta a la pregunta, dejando en evidencia el razonamiento en torno a los conceptos de área y perímetro.

Por lo tanto, se entiende que los razonamientos evidenciados en los procesos y manifestaciones de los participantes dan cuenta de las apropiaciones conceptuales que hacen los estudiantes sobre los conceptos geométricos al momento de trabajar de forma sistemática las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele.

En relación con el anterior análisis, en el cual se da cuenta del razonamiento de los participantes en las actividades implementadas en las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, se presenta en el siguiente Capítulo las conclusiones del proceso investigativo.

## Capítulo V: Resultados y Conclusiones

A lo largo de este trabajo se realizó una investigación en relación con el aprendizaje y el razonamiento, que exhiben estudiantes del grado tercero de Educación Básica Primaria de la Institución Educativa San Pedro de Urabá, cuando se diseñan experiencias de aprendizaje enmarcadas en las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele. El diseño de las experiencias se realizó teniendo en cuenta elementos cercanos al entorno de los estudiantes.

En este Capítulo se presenta la forma en la que se le dio respuesta a la pregunta de investigación y el logro de los objetivos, tanto el general como los específicos. Se hace referencia a las dificultades que se presentaron en el transcurso del estudio, se plantea el aporte realizado a la Educación Matemática y se proponen futuros temas de investigación relacionados con este trabajo.

Es importante recordar que, al iniciar el proceso de investigación en el Capítulo I, en el Apartado 1.6 se plantea la pregunta de investigación: *¿Cómo pueden razonar los estudiantes de tercer grado de básica primaria sobre los conceptos de área y perímetro a partir de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele?*, La cual surge desde la experiencia como docente y se fortalece con la revisión de la literatura. En los Capítulos anteriores en los que se expuso el diseño de las experiencias de aprendizaje y el trabajo de campo, se dio respuesta a la pregunta de investigación. A continuación, se resaltan algunos aspectos relacionados que muestran la forma como se obtuvo este importante resultado.

A partir del estudio de varios marcos teóricos y siguiendo su planteamiento se seleccionó el Modelo de van Hiele para orientar el proceso investigativo, teniendo en cuenta al mismo tiempo las orientaciones expuestas por el MEN (1998). Las características de dicho Modelo favorecen el razonamiento de conceptos relacionados con el pensamiento geométrico, en este sentido, las Fases de aprendizaje propuestas por el Modelo, permitieron

orientar las actividades que conllevaron a la comprensión de los conceptos abordados, enriqueciendo el proceso investigativo teniendo en cuenta que se trabajó con estudiantes de grado tercero de Educación Básica Primaria.

La metodología implementada en el Capítulo III, posibilitó el diseño de las actividades para cada una de las Fases de aprendizaje a partir de sus características, con el propósito de analizar cómo razonan los estudiantes de grado tercero acerca de los conceptos de área y perímetro a partir de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele.

El Capítulo IV, se centró en analizar cómo razonan los estudiantes de grado tercero acerca de los conceptos de área y perímetro a partir de la producción de evidencias (salidas de campo, trabajo en el aula, diseño de unidades de medida, entrevistas, exposiciones a los compañeros, entre otras) recolectadas del trabajo de los participantes mediados por las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele. Para el análisis se tuvo en cuenta las categorías y los descriptores que se diseñaron a priori en el Capítulo III y que se fueron refinando a partir de las experiencias de aprendizaje en cada una de las cinco Fases, así como en el pretest (actividad diagnóstica) y el posttest (actividad de cierre), realizados por los estudiantes participantes en el proceso investigativo.

En este sentido, se muestran las conclusiones obtenidas en la presente investigación, teniendo en cuenta las ideas expuestas anteriormente. En el desarrollo de esta investigación relacionada con el componente geométrico, se evidenció que la participación activa de los estudiantes de grado tercero de Educación Básica Primaria, en el estudio de los conceptos de área y perímetro, a partir de la implementación de las actividades en las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, permitió evidenciar el razonamiento de los participantes en cada una de las actividades desarrolladas en las diferentes Fases, factor que permitió dar respuesta a la pregunta de investigación.

Teniendo en cuenta la implementación de las cinco Fases del Modelo de van Hiele, la cual permitió plantear experiencias de aprendizaje relacionadas con los conceptos de área y

perímetro, se puede decir que estas facilitaron la construcción de la red de relaciones que ayudaron al razonamiento de los conceptos antes mencionados.

### 5.1 Resultados de la investigación

Los resultados obtenidos durante el desarrollo de esta investigación guardan relación con el marco teórico elegido, el cual fue el Modelo de van Hiele, en uno de sus tres componentes, como son las Fases de Aprendizaje. Este marco teórico se convirtió en la herramienta que permitió el diseño de los instrumentos y de las actividades desarrolladas por los estudiantes en cada una de las Fases del Modelo. Esto permitió la recolección de información y su posterior análisis a partir de la triangulación de la información recolectada en las encuestas, grabaciones en audio, videos y la observación que permitió evidenciar la forma como los estudiantes solucionaban en equipo e individualmente, cada una de las actividades propuestas por la investigadora. El análisis de la información permitió verificar la solución a la pregunta de investigación planteada y el logro de los objetivos planteados al inicio del proceso investigativo.

Con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación, se planteó el siguiente objetivo general: *Analizar cómo razonan los estudiantes de grado tercero acerca de los conceptos de área y perímetro a partir de las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele*. Además, en esta misma línea se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Implementar estrategias que conlleven al razonamiento de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero.
- Identificar el área como la superficie que cubre una figura plana.
- Identificar el perímetro como el contorno, borde, orilla de diversas figuras planas del entorno.
- Identificar que a toda figura plana le corresponde un perímetro y un área.

En primera instancia se diseñaron actividades para cada una de las Fases de aprendizaje, las cuales fueron sometidas a una revisión detallada durante el proceso investigativo, de tal forma que se encontraran en relación con lo planteado en cada una de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele. Además, antes de ser aplicada, cada actividad fue sometida a prueba con otros estudiantes del grado tercero, esto se realizó con la finalidad de verificar que el lenguaje en el que estaban redactadas las actividades fuera adecuado al nivel de escolaridad, en el que se encontraban los participantes de la investigación. Una vez refinada cada una de las actividades se procedió con el trabajo de campo, donde se tomaron registros de acuerdo con los instrumentos expuestos en el Capítulo III.

## **5.2 Alcance de los objetivos específicos**

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, se inicia tomando y analizando los objetivos específicos, argumentando cada uno de estos en torno al desarrollo de las actividades implementadas en cada Fase. Inicialmente, se toma el objetivo que hace relación con la implementación de estrategias, seguidamente con el que se relaciona con el concepto de área, después, el que guardan relación con el concepto de perímetro y, posteriormente, se toma el objetivo que integra a los dos conceptos.

### **5.2.1 Objetivo relacionado con la implementación de estrategias**

- Implementar estrategias que conlleven al razonamiento de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero.

Con respecto al objetivo específico relacionado con la implementación de estrategias, estas fueron diseñadas para cada una de las Fases de aprendizaje, se pueden observar en los siguientes apéndices (B.1, B.2, B.3, B.4, B.5).

La puesta en marcha de las actividades en las cinco Fases del modelo de van Hiele, permitió abordar experiencias de aprendizajes relacionadas con los conceptos objeto de

estudio, los cuales posibilitaron la construcción de la red de relaciones que conllevaron al razonamiento de los conceptos de área y perímetro, los cuales se fueron refinando en cada participante al pasar por cada una de las Fases (Capítulo IV).

### 5.2.2 Objetivo relacionado con el concepto de área

- Identificar el área como la superficie que cubre una figura plana.

Con respecto al objetivo específico relacionado con el concepto de área, se concluye que los participantes razonaron de la siguiente manera:

- Identificaron el área de una figura plana al plasmar, sobreponer o cubrir con diferentes unidades de medida una superficie. En la Ilustración 177 se puede observar el proceso realizado por los participantes.



Ilustración 170. Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida.

Como se puede observar, representan las unidades de medida que permitieron cubrir completamente o en su mayoría toda la superficie (trozo de cartulina de 30cm x 30cm).

- Establecieron procedimientos que dieron cuenta de la medida de la superficie al determinar la cantidad de veces que sobrepusieron la unidad de medida, por ejemplo; cuando se les preguntó por el procedimiento realizado, ellos respondieron: *primero conté el largo y después conté el ancho, y sumé todo, contando y sumando, coloqué la unidad de medida por el largo y el ancho y multipliqué, yo multiplico la cantidad del largo por el ancho.*

- Realizaron comparaciones entre superficies, utilizando diferentes unidades de medidas, esto se reflejó cuando explicaron sus apreciaciones, ejemplo: *mi compañero utilizó más unidades de medida para cubrir la superficie porque utilizó cuadros pequeños, yo utilicé más, porque utilicé figuras más pequeñas.*

Esto muestra que los estudiantes comprendieron la idea fundamental de medir: es decir, medir es comparar. En este caso, se compararon dos superficies: la que se quiere medir (cartulina de 30cm x 30 cm), con la que se va a medir (multifichas o unidades definidas por los estudiantes).

Ahora, a partir del análisis del cubrimiento de las superficies planas con diferentes unidades de medida los participantes:

- Determinaron la cantidad de unidades necesarias para cubrir una superficie dada. Por ejemplo, se evidenció el razonamiento acerca de la medida de la superficie manifestado por los estudiantes al responder: *utilicé 66 unidades cuadradas, 10 unidades, plasmé siete veces la mano, hay 100 unidades.*

Los participantes expusieron la medida de la superficie al determinar las unidades de medida cuadradas necesarias para cubrir la superficie, mediante procedimientos ejemplificados, a través de las evidencias de las actividades que fueron analizadas en el Capítulo IV.

- Explicaron lo que representan las unidades de medida con las que cubrieron la superficie, respondiendo las preguntas así: *la medida de la superficie, la cantidad del lado uno y la del lado dos.*

En la medida en que desarrollaron las actividades, estas permitieron a los participantes reconocer lo que representa la cantidad de unidades de medida que se necesitaron para cubrir la superficie, lo que da a entender que las experiencias de aprendizaje utilizando



material concreto permitió que identificaran lo que representa la cantidad de unidades de medida necesarias para cubrir una superficie.

- Explicaron los procedimientos realizados para hallar la medida de una superficie utilizando unidades de medida cuadradas o rectangulares, utilizaron explicaciones como: *contando los largos y los anchos y multipliqué cinco por cuatro, medí el largo y el ancho y multipliqué, multipliqué el lado uno y el lado dos y me dio el resultado que es 48.*

En los razonamientos expuestos, se muestra con claridad que los estudiantes integraron diferentes métodos algorítmicos para encontrar el área de una superficie al contar las veces que se sobrepone la unidad de medida o colocando la unidad de medida por los lados y luego multiplicando las veces que superpuso por cada uno de los lados.

Representar, comparar, realizar procesos de medición acerca de una situación matemática conllevó a los participantes a entender características de las situaciones presentadas que permitió entenderlas, realizar representaciones de ellas basadas en problemas de la cotidianidad, como se puede ver en las Fases tres, cuatro y cinco, actividades: “Comparando superficies”, “Aplico lo aprendido” y “Soluciono problemas”. También se tienen evidencias que se pueden observar en el Capítulo IV, y en los siguientes apéndices (B.1.3, B.2.2, B.2.3, B.2.4, B.3.1, B.4.1).

### **5.2.3 Objetivo relacionado con el concepto de perímetro**

Con relación al objetivo específico orientado al concepto de perímetro se planteó el siguiente:

- Identificar el perímetro como el contorno, borde, orilla de diversas figuras planas del entorno.

Con respecto al objetivo específico relacionado con el concepto de perímetro, los participantes razonaron de la siguiente manera:

- Realizaron procedimientos que permitieron identificar el perímetro en figuras planas al recorrer el contorno de estas, utilizando partes del cuerpo como unidad de medida (cuarta, pulgada, pasos), además, relacionaron elementos con los que se podría recorrer el contorno como (lápiz, lapicero, sacapuntas, vara, entre otros), y unidades de longitud (regla y metro). En el Capítulo IV se evidencia el razonamiento del concepto de perímetro en cada una de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, además, se puede observar en la Ilustración 178.



*Ilustración 171* Recorriendo el contorno con diferentes unidades de medida.

En este sentido, se identificaron prácticas donde los participantes reconocieron el contorno, borde u orilla de figuras planas, implementando diferentes unidades de longitud.

- Determinaron las veces que recorrieron con un objeto, con la pulgada o los centímetros de una regla, entre otros, por el contorno de una superficie (trozo de cartulina de 30cm x 30cm) o lugar, las respuestas dadas en los instrumentos de recolección de la información, dieron cuenta de la medida del contorno escribiendo

las veces que recorrieron con el objeto el borde de la superficie. Por ejemplo, expusieron las veces que recorrieron el contorno así: *recorrí con el lápiz nueve veces por el contorno de la cartulina, la pulgada por el borde de la cartulina, 45 veces y 59 centímetros, por el ancho de la mesa.*

- Explicaron el procedimiento realizado para medir el perímetro de una figura o lugar. Lo expuesto por un participante se aprecia cuando respondieron: *sumo el lado uno con el lado dos, da 14, y como el otro lado tiene largo y ancho me da  $14 + 14$  da 28, sumé la medida de cada lado, sumando ocho más seis más ocho más seis y sí encontré el perímetro.*
- Explicaron lo que representan las unidades de medida con las que recorrieron el contorno de la superficie. Esto se aprecia cuando se les preguntó por lo que representa y respondieron: *me representa el perímetro, la suma de cada lado.*

Como se puede apreciar en las respuestas anteriores dadas por los participantes, se está comparando el largo, ancho o contorno de la mesa o el trozo de cartulina con objetos de las mismas características: pulgada, palmo, centímetros de la regla, entre otros. Además, se construyeron algoritmos para encontrar la medida de un borde: sumo las veces que puse el lápiz, o sume las veces que puse el pulgar por todos los bordes.

Por consiguiente, se entiende que involucrar experiencias de aprendizajes, en el aula de estudiantes de grado tercero de Básica Primaria, favorece el razonamiento de los conceptos de área y perímetro y facilita el aprendizaje y la enseñanza de estos conceptos en estudiantes en edades escolares, por lo cual se reconoce que el Modelo de van Hiele posibilita el razonamiento en los estudiantes, respecto a conceptos geométricos, en este caso de los de área y perímetro. El proceso se puede observar en el capítulo IV, en el desarrollo de las actividades planteadas, (Apéndice B.1.1, B.1.2, B.1.3, B.2.2, B.2.3, B.2.4, B.4.1, B.4.2 y B.4.3).

### 5.2.3.1 *Objetivo que integra los dos conceptos*

- Identificar que a toda figura plana le corresponde un perímetro y un área.

Los participantes desarrollaron actividades que les permitieron identificar el contorno de una figura o lugar al realizar representaciones simbólicas de lugares en un plano, indicando la superficie y el contorno. El logro de este objetivo fue evidenciado en las actividades desarrolladas por los estudiantes a través del lenguaje en las respuestas dadas en la entrevista así: *el perímetro es el borde, y el área es la superficie de todo lo que tiene adentro, el perímetro es la orilla, y el área es lo que tiene adentro, ..., porque el perímetro es la orilla y el área es todo lo de adentro.*

Los participantes realizaron procesos que les permitieron medir el área de figuras planas con diferentes unidades de medida e identificar el perímetro como el contorno, borde, orilla en diversas figuras planas, las cuales fueron ilustradas con las evidencias de las actividades realizadas por los participantes que se encuentran analizadas en el Capítulo IV. Los procesos de medición del contorno, utilizando diferentes unidades de medida conllevaron a los participantes a realizar comparaciones, generar estrategias, realizar procedimientos y exponer argumentos, aspectos que permitieron dar cuenta del progreso del lenguaje y la red de relaciones en torno al concepto de perímetro.

Al cubrir superficies utilizando diferentes unidades de medida, les permitió a los participantes identificar el área de superficies planas en relación con plasmar, conteo, cubrir, tapar y sobreponer. Además, medir el área implicó realizar conteos, adición, sustracción que fueron asumidos como procedimientos para determinar el área de la superficie como se evidencian en los Apéndices (B.2.4, B.4.1, B.4.2).

A partir de lo anterior e integrando los resultados expuestos en el Capítulo IV, y lo expuesto en los párrafos anteriores en relación con la consecución de los objetivos, es válido afirmar que los objetivos específicos se lograron.

### 5.3 Análisis por Fases

Al describir el razonamiento alcanzado por los participantes de grado tercero de Educación Básica primaria se puede concluir que:

- En la Fase 1, (Información) los participantes razonaron al cubrir superficies utilizando como unidades de medida las partes del cuerpo (palma de la mano, dedo), por medio del cual realizaron el reconocimiento de la superficie, también midieron el contorno de superficies planas usando como unidad de medida las partes del cuerpo (dedo pulgar, la cuarta y objetos cercanos a ellos), además, en cuanto al concepto de perímetro, al recorrer el contorno de diferentes lugares del entorno escolar, realizaron el conteo de los pasos que dieron por el borde de cada lugar, lo anterior se evidencia en el Capítulo IV, (apéndice B.1.1, B.1.2, B.1.3), demostrando el acercamiento a los conceptos abordados.

Al cubrir superficies utilizando diferentes elementos y recorrer el contorno con diversas unidades de medida se observó el lenguaje utilizado por los participantes al realizar estimaciones y explicar las veces que una persona adulta podría plasmar la mano o el dedo pulgar en un trozo de cartulina (30 cm x 30 cm), usaron expresiones como: *la mano del adulto es más grande, la pongo más cerrada y cabe más veces, el dedo de un adulto es más grande*. En relación al concepto de perímetro, los participantes determinaron la cantidad de pasos que dieron al recorrer algunos lugares del entorno escolar (jardinera, placa polideportiva), al comparar por qué unos dieron más pasos que otros, usaron expresiones como: *porque unos dimos los pasos más grandes y otros más pequeños*.

Como se puede percibir en los argumentos dados por los participantes, se está justificando sus estimaciones y comparaciones, aspectos que permitió evidenciar el lenguaje en esta Fase.

La red de relaciones se hizo evidente en los conteos, estimaciones, adiciones y la forma cómo los participantes se integraron en los procedimientos al utilizar unidades de medida y cubrir una superficie como la palma de la mano, dedo entre otros. Estos aspectos se pueden observar en el Capítulo IV.

- En la Fase 2, (Orientación dirigida) los participantes compararon superficies, donde realizaron actividades como plasmar la mano en un trozo de cartulina, e identificaron en cuál se cubrió más o menos superficie y explicaron el porqué, adicionalmente, observaron que dada cierta unidad de medida se puede escoger la más adecuada para cubrir una superficie o recorrer su contorno, también razonaron al relacionar elementos que podrían ser utilizados para sobreponer en una superficie o recorrer su contorno realizando procedimientos adecuados. Además, expresaron las veces que sobrepusieron las unidades de medida (figuras) en la superficie y el contorno de la cartulina. En estas acciones se evidenció el razonamiento en los participantes, manifestado a través del lenguaje que estuvo en coherencia con los conceptos de área y perímetro, aspectos que se encuentran en relación con la Fase dos (Orientación dirigida) del Modelo de van Hiele. Capítulo IV, (apéndice B.2.1, B.2.2, B.2.3, B.2.4).

En esta Fase los participantes dieron cuenta del lenguaje utilizado al comparar las veces que plasmaron la mano en la superficie de la cartulina, identificando donde se cubrió mayor superficie, en este sentido David expuso: *en la que acabo de realizar están cerradas las manos y en la primera estaban abiertas las manos*. Al seleccionar unidades de medida para cubrir una superficie los participantes justificaron sus apreciaciones usando expresiones como: *me ayudó a cubrir todo, casi me tapó toda la cartulina, pude cubrir la superficie*. En relación al concepto de perímetro los participantes explicaron el proceso utilizado para medir el contorno utilizando expresiones como: *los largos y los anchos, midiendo el contorno, midiendo el contorno y sumando*, además relacionaron elementos con los que se podría recorrer el contorno de un lugar como: el metro, una vara entre otros.

En lo expuesto se evidencia con claridad la forma cómo ha progresado el lenguaje, pues, en la Fase 1 (Información), los participantes realizaron estimaciones, representaciones, mientras que en esta Fase (Orientación dirigida), usaron expresiones más estructuradas al referirse al proceso de medir la superficie o el contorno.

En cuanto a la red de relaciones esta se evidenció cuando los participantes realizaron conteos, dimensionamiento, relaciones con objetos del entorno que podrían ser usados para cubrir una superficie o recorrer el contorno de una figura o lugar. En esta Fase los participantes mostraron claridad al referirse o relacionar elementos o figuras que guardan relación con los conceptos de superficie y contorno, aspecto que permitió evidenciar elementos fundamentales de la red de relaciones asociados a los conceptos de área y perímetro.

- En la Fase 3, (Explicitación) razonaron al cubrir superficies y medir el contorno de figuras rectangulares o cuadradas, empleando diferentes unidades de medida, compartieron con sus compañeros, la forma como realizaron algunas actividades dando argumentos lógicos de cómo lo hicieron. Durante este proceso se evidenció que las expresiones utilizadas eran más organizadas que las anteriores, en relación con los conceptos de área y perímetro, haciendo entendibles sus justificaciones. Se puede evidenciar lo dicho en el trabajo realizado por los participantes en el Capítulo IV, (apéndice B.3.2, B.3.2).

En esta Fase el lenguaje utilizado por los participantes se hizo evidente cuando expresaron a los compañeros cuáles fueron los elementos que le ayudaron a medir de forma más precisa, usando expresiones como: *yo creo que el metro, tiene una medida perfecta para medir, para mí fue la cuarta, porque me ayudo a medir bien, el metro y la cinta métrica y la regla*. Además, usaron expresiones algorítmicas para determinar la medida de la superficie, en este caso los participantes expresaron: *marqué la superficie por el largo y el ancho y luego conté, primero coloqué la unidad de medida por el largo y el ancho y multipliqué*. En relación al perímetro en esta Fase los participantes utilizaron procedimientos matemáticos más estructurados usando argumentos como: *sumé el lado uno con el lado dos, y como el otro lado tiene largo y ancho, sumo los dos, sumé la medida de cada lado de la mesa, sumo todo lo que medí*. Esto evidenció la evolución del lenguaje.

Al comparar el lenguaje de las Fases anteriores (Información, Orientación dirigida) con el de la Fase 3 (Explicitación), se evidenció un lenguaje más refinado, puesto que en esta

Fase los participantes usaron frases más organizadas que dieron cuenta de procedimientos matemáticos realizados por ellos.

En cuanto a la red de relaciones esta se hizo evidente al expresar y compartir con los compañeros los procedimientos realizados para dar solución a las diferentes situaciones presentadas al medir la superficie y el contorno de una figura, donde realizaron operaciones tales como: conteo, adición multiplicación. Estos aspectos se pueden corroborar en el capítulo IV.

- En la Fase 4 (Orientación libre) el desarrollo de las actividades y la entrevista semiestructurada facilitó el uso apropiado del lenguaje, en torno a los conceptos de área y perímetro, identificando una organización que incluye aspectos más generales en relación con los conceptos de área y perímetro. En todos los participantes se observó apropiación personal al resolver las actividades de esta Fase, y en las entrevistas presentadas, esto se puede corroborar en el capítulo IV, (apéndice B.4.1, B.4.2, B.4.3).

En esta Fase los participantes utilizaron expresiones similares al referirse a la superficie o el perímetro, pero al definir el concepto de área se encontró expresiones como: *la parte de adentro de una figura que tiene un perímetro; todo lo de adentro de una figura o lugar que también lo puedo medir; es todo lo que tiene adentro la figura o lugar, es la superficie.* Para el caso del perímetro, los participantes manifestaron definiciones como: *es igual que el borde; es toda la orilla de un lugar o de una figura; es la orilla, contorno, borde.* Como se puede observar, en las definiciones dadas por los participantes, el lenguaje fue más refinado, en relación a los conceptos en mención, puesto que utilizan elementos que clarificaron sus apreciaciones. Al comparar el lenguaje utilizado en la Fase anterior (Explicitación), con el expuesto en la presente Fase, (Orientación libre), se evidenció el fortalecimiento del mismo dado que utilizaron expresiones más adecuadas para definir los conceptos.

En cuanto a la red de relaciones, se observó más nutrida puesto que los participantes definieron el concepto de área y perímetro de forma adecuada explicando el procedimiento



necesario para hallar dichas medidas, el cual fue evidenciado a través de razonamientos como: midiendo la superficie, la multiplicación, adición, contorno, multiplico los lados, sumo los lados, borde, midiendo la orilla, entre otros.

- Por último, en la Fase 5 (Integración) la implementación de estrategias personales por los participantes para solucionar problemas de la vida cotidiana, permitió el razonamiento de forma generalizada, utilizando la adición y la multiplicación como procesos algorítmicos para dar respuesta a situaciones contextuales relacionadas con los conceptos de área y perímetro, dando explicaciones coherentes en la solución de las actividades desarrolladas en esta Fase, esto se puede evidenciar en el capítulo IV, (apéndice B.5.1, B.5.2 y B.5.3).

En cuanto a los conceptos abordados, el lenguaje en los participantes se evidenció cuando expresaron: *que el perímetro es alrededor del salón, y el área es todo lo de adentro; el perímetro es la orilla y el área es todo lo de adentro; multipliqué el lado uno y el lado dos y me dio el resultado que es 48; multiplicando el largo y el ancho.* Como se puede apreciar en los razonamientos expuestos, se muestra el avance y la apropiación del lenguaje al definir los conceptos de área y perímetro, el cual se fue refinando al pasar por cada una de las Fases del Modelo de van Hiele.

La red de relaciones en esta Fase se tornó más amplia, puesto que fue construida a lo largo del proceso investigativo, mostrando un razonamiento más característico en relación a las diferencias de los conceptos de área y perímetro de figuras planas, debido a que realizaron representaciones, expresiones y la solución de problemas que involucraron operaciones algorítmicas relacionadas con los conceptos objeto de estudio. Esto se puede evidenciar en el Capítulo IV.

En síntesis, se puede concluir que el razonamiento de los participantes del grado tercero de Educación Básica Primaria se evidenció de la siguiente manera:

En la Fase 1 (Información)

- Mediante el contacto con el material concreto.

- Por medio del reconocimiento visual.
- A través de conteos para determinar la cantidad de objetos necesarios para cubrir una superficie o recorrer su contorno.

#### En la Fase 2 (Orientación dirigida)

- Mediante las comparaciones (quién plasmó más, menos y por qué).
- Cuando se integraron situaciones del contexto.
- Al seleccionar una figura (unidad de medida) adecuada para cubrir una superficie.
- Al realizar conteos de las veces que se marcó una ficha por el largo y el ancho de una superficie.
- Al medir con partes del cuerpo (cuarta, pulgada) u otros elementos cada lado de una figura.

#### En la Fase 3 (Explicitación)

- Al determinar las unidades de medida necesarias para cubrir la superficie de la mesa del salón.
- Mediante las explicaciones dadas a los compañeros sobre el proceso realizado.
- Cuando expusieron a los compañeros procedimientos realizados en las Fases anteriores.

#### En la Fase 4 (Orientación libre)

- Al comparar cómo se realizó el proceso para cubrir una superficie en su totalidad.
- Al medir el contorno de una superficie con la regla y compararlas con los procesos realizados cuando utilizó otros instrumentos de medida.
- Mediante el proceso realizado para determinar la cantidad de multifichas necesarias para cubrir una superficie cuadrada o rectangular.
- Mediante la solución de situaciones de la vida diaria que involucraron los conceptos estudiados.

#### Fase 5 (Integración)

- Mediante la puesta en práctica de los aprendizajes adquiridos para hallar el área y el perímetro de un lugar cercano a ellos (salón de clase).
- Al solucionar problemas de la cotidianidad que involucren estos conceptos.
- Al justificar los procedimientos realizados para hallar el área y el perímetro de una figura o lugar.

De igual manera la entrevista semiestructurada permitió analizar el razonamiento que expusieron los participantes en relación con los conceptos geométricos estudiados. Además, los argumentos, acciones y justificaciones expuestas en las actividades desarrolladas en cada una de las Fases de aprendizaje, permitieron observar cómo fue progresando la red de relaciones y como se fue refinando el lenguaje.

#### 5.4 Análisis por categorías

Para el proceso de análisis en relación a los conceptos de área y perímetro se establecieron siete categorías a priori, estas se construyeron en el Capítulo III (Metodológico), que una vez iniciado el análisis y teniendo en cuenta el desarrollo de las actividades en cada una de las Fases se fueron refinando, es así, como en la Fase 3 (Explicitación) y Fase 4 (Orientación libre) se integraron tres categorías y en la Fase 5 (Integración) se integraron otras dos categorías quedando solo dos; concepto de área y concepto de perímetro, esto se debió a un proceso de refinamiento y al avance mostrado por los participantes en sus razonamientos al desarrollar las diferentes actividades relacionadas con el área y el perímetro.

A continuación, se presentan las Tablas 25, 26 y 27, que muestran el avance de los razonamientos por parte de los participantes de acuerdo con Fases y categorías.

**Tabla 25.** *Avances en las Fases 1 y 2*

Categorías	Códigos	Información	Orientación dirigida
------------	---------	-------------	----------------------

Cubrir, sobreponer, plasmar	Tapar, colocar sobre, plasmar, que son la base para la construcción del concepto de área de una superficie.	Plasmaron las manos para cubrir una superficie.  Asociaron la superficie con elementos planos.	Cubrieron superficies con objetos grandes y pequeños.  Establecieron estrategia para plasmar la mano y cubrir más superficie.
Superficie	Reconoce regiones planas como superficies y nombra algunas de ellas: mesa, hojas del cuaderno, piso del aula, entre otras (palma de la mano).	Reconocieron que una superficie se puede cubrir con otras.  Contaron las veces que plasmaron la mano en la superficie.  Estimaron las veces que se plasmaría la mano de un niño o una persona adulta.	Construyeron unidades de medida utilizando las partes del cuerpo para cubrir una superficie y contaron las veces que la sobrepusieron.  Relacionaron elementos con los que se podría cubrir una superficie de mayor tamaño.
Área y medida de superficie	Conteo, adición, medida, multiplicación.	Contaron las veces que sobrepusieron un objeto para cubrir una superficie.  Identificaron que, al plasmar la mano o dedo en una superficie, esta no se cubre en su totalidad.	Seleccionaron la unidad de medida apropiada para cubrir una superficie.  Determinaron las veces que sobrepusieron la unidad de medida para cubrir una superficie, mediante el conteo y procesos multiplicativos.
Lenguaje de área	Expresiones verbales asociadas: medición, superficie,	Usaron expresiones verbales como tapar, plasmar sobre, es más	Mencionaron cuál o cuáles objetos le permiten cubrir mayor

---

	conteo, adición, multiplicación.	grande.	superficie.  Usaron expresiones como: cubrí todo, tapó todo, cubrí la superficie.
Alrededor de, contorno, borde, orilla	Perímetro: medición, longitud, delinear, recorrer, adición, multiplicación	Bordearon una cartulina, usando como instrumento de medida partes del cuerpo (dedo pulgar, cuarta, entre otras), caminaron por el borde de diferentes lugares del entorno escolar.	Construyeron y utilizaron diferentes unidades de medida para medir el contorno de un lugar.  Relacionaron elementos que usarían para medir el contorno de un lugar.
Perímetro y medida de perímetro	Conteo, adición, multiplicación	Contaron las veces que marcaron la cuarta, pulgada, objeto y los pasos al recorrer por el borde de la superficie de una cartulina y lugar.  Estimaron los pasos que daría un niño de tres años por el contorno de un lugar.	Utilizaron la regla para medir el contorno de una superficie pequeña.
Lenguaje de perímetro	Expresiones verbales asociadas: medición, conteo, adición.	Expresaron palabras como: medí por el borde, alrededor, recorrí por el borde.	Mencionaron procedimientos para obtener la medida del contorno.  Expresiones como: midiendo el largo y el ancho, midiendo el contorno, contando y

---

---

sumando.

---

**Tabla 26.** Avances en las Fases 3 y 4

Categorías	Códigos	Explicitación	Orientación libre
Cubrir, sobreponer, plasmar	Superficie, tapar, colocar sobre, pintar, señalar.	Compartieron con sus compañeros el proceso realizado para cubrir una superficie.	Cubrieron una superficie en su totalidad utilizando las multifichas. Cubrieron la superficie del salón, usando unidades de medida de un metro cuadrado.
Medida de superficie	Conteo, adición multiplicación.	Explicaron a los compañeros la forma del conteo, para hallar las unidades de medida de una superficie y los elementos utilizados para cubrirla.  Contaron a los compañeros qué elementos usaron al desarrollar las actividades.	Explicaron cuales objetos le permiten cubrir una superficie en su totalidad y qué procedimientos realizaron para determinar cuántos objetos fueron necesarios para cubrir la superficie dada.  En el plano de una casa, hallaron la medida del área en metros, y explicaron el procedimiento realizado.
Medida de Perímetro	Perímetro, medición, longitud, delinear, adición, multiplicación	Explicaron a los compañeros procedimientos realizados para medir el	Explicaron cómo se halla la medida total del contorno de una figura cuadrada

		contorno de un lugar o figura.	
Lenguaje de área y perímetro	Expresiones verbales asociadas medición, conteo, adición, multiplicación	Explicaron a los compañeros los objetos utilizados para cubrir superficies y medir su contorno, cuáles eran los más apropiados.  Contaron las palabras nuevas que aprendieron.	Explicaron a los compañeros el proceso que realizaron para hallar la medida del área y el perímetro de una superficie cuadrada o rectangular.

**Tabla 27.** *Avances en la Fase 5*

Categorías	Códigos	Integración
Área y perímetro	Medición, longitud, metro	Utilizaron el metro para hallar el área de una superficie cuadrada o rectangular.  Dada una superficie, escogieron el elemento más adecuado para medir el perímetro.  Realizaron representaciones, e identificaron la superficie y el perímetro. Dada una situación problema la resolvieron haciendo uso de procesos de mediciones para hallar el área y el perímetro.
Lenguaje de área y perímetro	Expresiones verbales asociadas a medición,	Dado el plano de una casa hallaron el área y el perímetro en metros. Explicaron de forma clara los procedimientos realizados para hallar el

---

conteo, adición, multiplicación	área de una superficie y el perímetro.  Explicaron diferencias entre el concepto de área y perímetro.
------------------------------------	--

---

De esta manera, se puede observar que la implementación de las actividades en las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele contribuyeron al razonamiento de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero de Educación Básica Primaria.

De acuerdo con el avance de los participantes se refinó la matriz de categoría, que inicialmente se construyó a priori y en el transcurso del proceso investigativo sufrió algunas modificaciones ajustándose a lo evidenciado en el desarrollo de las actividades implementadas en cada una de las Fases. A continuación, se presenta la matriz de categorías con sus respectivos descriptores.



**Tabla 28.** *Matriz de descriptores de las Fases*

Conceptos	Información	Orientación dirigida	Explicitación	Orientación libre	Integración
Área	Reconoce que una superficie se puede cubrir con diferentes objetos o partes del cuerpo de mayor o menor tamaño.  Sobrepone una superficie con un objeto plan, cuenta el número de veces que lo realiza.  Estima las veces que se puede sobreponer un objeto en una superficie de acuerdo a su tamaño.  Establece la medida de una superficie utilizando como unidad de medida las partes del cuerpo.	Identifica que entre más cerca se coloque un mismo objeto sobre una superficie más veces se debe sobreponer para cubrirla.  Reconoce que al sobreponer en una superficie diferentes objetos, algunos de ellos permiten cubrirla en su totalidad.  <i>Reconoce que la medida de una superficie se puede expresar en diferentes unidades de medida.</i>  Reconoce que la medida de una superficie se puede expresar en diferentes	Explica a sus compañeros los procedimientos realizados para cubrir superficies con diferentes unidades de medida, y la forma como determina las veces que sobrepone la medida para cubrir la superficie.  Dadas varias unidades de medidas planas identifica la más adecuada que se debe sobreponer para cubrir una superficie en su totalidad.  Explica a los compañeros la forma del conteo para determinar la medida del área de una superficie.	Dada una unidad de área, el estudiante determina cuántas veces es necesario sobreponerla para cubrir una superficie.  Reconoce que para hallar la unidad de medida de una superficie se debe tener en cuenta la medida del largo y el ancho.  Dada una superficie el estudiante realiza el procedimiento que permite determinar la medida del área.  Explica qué procedimientos realizaron para determinar cuántas unidades de medida	Determina y calcula el área y el perímetro de diferentes superficies cuadradas o rectangulares como el salón de clase, la mesa del profesor, de su habitación, entre otras, utilizando unidades de medida estandarizadas.  Realiza operaciones básicas (adición, multiplicación) para hallar el área y el perímetro.

	Dada una situación relacionada con una superficie, usa expresiones verbales como cubrir, tapar, plasmar sobre, entre otras.	unidades de medida.  <i>Reconoce que las veces que sobrepone la unidad de medida en una superficie corresponden a la medida del área.</i>	Explica a sus compañeros los procedimientos realizados para medir el borde o contorno de una figura o lugar.	fueron necesarios para cubrir una superficie dada  Utiliza la regla para medir el contorno de una figura y determinar el perímetro en centímetros.	
		Menciona palabras que guardan relación con el concepto de área.		Comenta qué proceso debe seguir para hallar la medida del área y el perímetro de una figura o lugar.	
Perímetro	Reconoce que una figura plana o en un lugar, se puede recorrer el borde o contorno utilizando diferentes partes del cuerpo, (dedo, cuarta, pasos, entre otros).  Cuenta las veces que pone un objeto o partes del cuerpo, por el borde o contorno de una figura plana o lugar.	Identifica el objeto que le permite medir con mayor precisión el contorno o perímetro de una figura.  Utiliza partes del cuerpo para medir el contorno o borde de una figura o lugar y establece comparaciones entre ellas.  Crea estrategias que le permiten establecer una	Explica con claridad el procedimiento realizado al efectuar una actividad relacionada con la medición del contorno.  Explica a los compañeros los objetos utilizados para cubrir superficies y medir el borde, menciona cuáles son los más apropiados.  Menciona palabras	Reconoce que el perímetro corresponde a la orilla o borde que rodea una superficie.  Utiliza la regla para medir el contorno de una figura y determinar el perímetro en centímetros.  Comenta qué proceso debe seguir para hallar la medida del área y el perímetro de	Narra de forma ordenada los aspectos a tener en cuenta para hallar el área y el perímetro de una figura o lugar.

---

<p>Dada una situación relacionada con el perímetro de una figura plana, los participantes utilizan expresiones verbales asociadas a medición, conteo, adición, multiplicación.</p>	<p>medida más aproximada para medir el borde o contorno de una figura.</p> <p>Menciona palabras que guardan relación con el concepto de perímetro.</p> <p>Reconoce que el contorno de una figura o lugar se puede expresar en centímetros.</p>	<p>relacionadas con los conceptos de área y perímetro, aprendidas en las Fases anteriores.</p>	<p>una figura o lugar.</p> <p>Explica qué procedimientos realizaron para determinar cuántas unidades de medida fueron necesarios para cubrir una superficie dada.</p>
--	--	--	---

---

En este sentido se da una respuesta positiva, a la pregunta de investigación que orientó el desarrollo de la presente investigación. La respuesta está en relación con el objetivo general planteado: Analizar cómo razonan los estudiantes de grado tercero acerca de los conceptos de área y perímetro a partir de las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele. Para alcanzar el presente objetivo se diseñaron unos objetivos específicos expuestos al inicio de este apartado y las actividades en cada una de las Fases de aprendizaje

### **5.5 Alcance de la pregunta y el objetivo general**

De acuerdo con lo anterior, las experiencias de aprendizaje, diseñadas para el pretest (actividad diagnóstica), las Fases de Aprendizaje y el postest (actividad de cierre) permitieron que los participantes expusieran su razonamiento acerca de los conceptos de área y perímetro de figuras planas. Los participantes mostraron en el escenario de las actividades en las Fases de aprendizaje (Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre e Integración), a partir del trabajo realizado que permitieron identificar el razonamiento de los estudiantes del grado tercero en relación a los conceptos de área y perímetro, así mismo se observó el crecimiento de la red de relaciones, evidenciado a través del lenguaje, el cual se fue refinando de forma progresiva en torno a los conceptos, donde los participantes argumentaron sobre los procesos desarrollados en cada una de las actividades propuestas y justificando el porqué de los procesos realizados (Capítulo IV).

Las manifestaciones de los participantes que permitieron analizar cómo razonaron en las actividades en relación con el reconocimiento de la superficie, al plasmar la mano, se evidenció cuando respondieron: *la pongo más cerrada y cabe más veces*, en relación a las veces que se podría plasmar la mano en la superficie de la cartulina si se coloca de otra forma.

Visualizar como se cubrió la superficie de una cartulina utilizando la mano y el dedo de la mano como unidad de medida, permitió que los participantes determinaran las veces que plasmaron la mano en la superficie de la cartulina, que estimaran las veces que se podría plasmar la mano o el dedo de una persona adulta, que asociaran otros elementos con los que

podían cubrir la superficie, además, que compararan el trabajo realizado con los compañeros para determinar quién cubrió mayor superficie y por qué, tal como se evidencia en el Capítulo IV. Visualizar el cubrimiento de la superficie permitió que los participantes dieran respuestas a las preguntas, exponiendo argumentos válidos que permitieron el reconocimiento del objeto de estudio en situaciones prácticas.

En relación con el concepto de perímetro, los participantes recorrieron el contorno de una cartulina estableciendo las veces que midieron con la cuarta o el dedo pulgar por el contorno, además implementaron otras unidades de medida que les permitieron establecer diferencias al comparar el trabajo con los compañeros como se muestra en el Capítulo IV, Fase uno, categoría seis (Perímetro y medida de perímetro).

En este sentido identificaron que las superficies están delimitadas por un contorno, y que este se puede medir utilizando partes del cuerpo u otras unidades de medida. También se pueden hallar evidencias del razonamiento en el Capítulo IV, Fase dos, categoría tres (Área y medida de superficie) y cinco (Alrededor de, contorno, borde, orilla), al reconocer que la medida de una superficie y el contorno de una figura se puede expresar en diferentes unidades de medida.

Este razonamiento fue evidenciado en la Fase dos a partir de la implementación de las unidades de medida (A, B, C), (apéndice B.2.3, B.2.4). La práctica repetida permitió establecer formas de razonar y desarrollar habilidades que les permitieron descubrir que, al multiplicar la cantidad de unidades de medida del largo por el ancho, era posible determinar las veces que se debe sobreponer una unidad de medida para cubrir el área de una superficie. En cuanto a la medida del contorno, los participantes realizaron adiciones de cada uno de los lados medidos en la superficie o lugar para determinar su medida, la cual corresponde a la medida del perímetro.

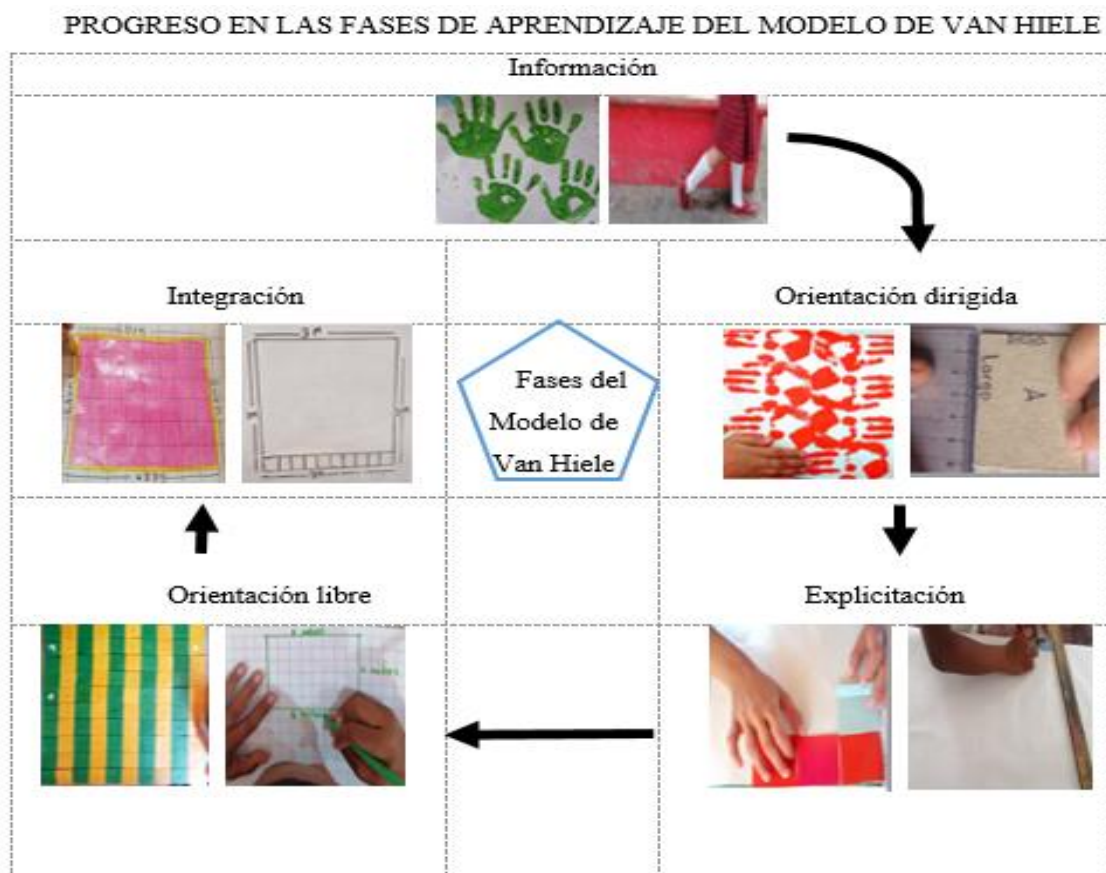
En las actividades uno, dos y tres de la Fase cuatro, (apéndice B.4.1, B.4.2, B.4.3), los participantes implementaron unidades de medida estandarizadas que durante el proceso dieron cuenta del razonamiento gracias a las experiencias de aprendizaje que le permitieron

poner en práctica los conocimientos adquiridos. Realizaron procesos de medición que les permitió inferir sobre lo que representan las unidades de área o multifichas, aspecto que posibilitó evidenciar el razonamiento y la red de relaciones en torno al concepto de área y perímetro, se puede observar el análisis en el Capítulo IV Fase cuatro, categoría tres (medida de perímetro). Al solucionar las actividades de las Fases cuatro, cinco y en las respuestas en la entrevista semiestructurada, se hicieron visibles las expresiones mediante el lenguaje utilizado para explicar el procedimiento realizado al dar solución a las actividades y a la situación problema, explicando la forma como la solucionaron.

Conforme a lo expuesto anteriormente, el análisis en las actividades de las Fases del Modelo de van Hiele permitió distinguir que el razonamiento de los conceptos geométricos surge a partir de las experiencias de aprendizaje repetidas, que guían el desarrollo de una forma de razonar y se hacen visibles al explicar por qué las formas de solución y cómo lo solucionó (el lenguaje).

En este sentido se puede decir que las actividades diseñadas en cada una de las Fases de aprendizaje cobran relevancia ya que permitieron el razonamiento de los conceptos en mención, siendo importantes en momentos donde se requiere hacer mediciones de áreas y perímetros ya sea en huertas para hortalizas o cultivos de diferentes tipo, las cuales son situaciones prácticas que hacen parte de la cotidianidad de los estudiantes y que docentes de Básica Primaria podrían aprovechar para realizar un aprendizaje más significativo en diferentes contextos, puesto que a los estudiantes se les facilita poner en práctica diferentes temáticas cuando lo relacionan con el trabajo en su cotidianidad.

A continuación, se presenta una infografía con las producciones de los participantes que evidencia el razonamiento en torno al proceso investigativo de los conceptos estudiados.



*Ilustración 172.* Progreso en las Fases de aprendizaje.

Esta infografía evidencia el progreso de los participantes al pasar por cada una de las Fases y da respuesta a la pregunta de investigación, se muestra el avance que tuvieron durante el desarrollo del proceso investigativo, el cual posibilitó crear, primero, lo que van Hiele denomina “vértices de la red” en los planteamientos de Jaime y Gutiérrez (1990), para ir conformando la red de relaciones en torno a los conceptos de área y perímetro. A través de estas representaciones se muestra el resultado de los estudiantes durante el proceso investigativo, los cuales permitieron analizar el proceso de razonamiento a partir de las prácticas manifestadas en cada una de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele.

Por todo lo anterior, se puede manifestar que la pregunta de investigación se respondió de forma satisfactoria, esto se evidenció al pasar por los objetivos, tanto general, como específicos; por las Fases de aprendizaje y, por último, por las categorías, donde en cada momento, se aprecia el alcance de la investigación. De esta forma se concluye que

involucrar las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele, posibilita el razonamiento de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero de Educación Básica Primaria.

### **5.6 Análisis del nivel alcanzado por los participantes**

El Modelo de van Hiele, en su componente de los niveles de razonamiento, da pautas para ayudar a descubrir el nivel de razonamiento que los estudiantes tienen respecto de conceptos geométricos. En nuestro estudio se abordaron los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero de Educación Básica Primaria.

De acuerdo a lo establecido por los niveles de razonamientos uno y dos, donde el primero hace referencia al desarrollo de una caracterización más global de las figuras geométricas, destacando todo lo asociado a los aspectos explícitos, a lo visual y concreto, mientras que en el segundo nivel se propone que los participantes sean capaces de realizar una descripción de las partes que integran una figura, identificando características y propiedades básicas que la conforman, la observación juega un papel importante para la identificación de dichos atributos, aunque se debe aclarar que todavía no establecen relaciones entre dichas propiedades, lo que dificulta clasificar las figuras. En este nivel se da un razonamiento matemático en los estudiantes, puesto que pueden hacer distinciones que no conocían y así reconocer elementos geométricos en las figuras, aspecto que da cuenta de su cambio en la forma de observar e identificar ciertas características que no tenían en cuenta en el primer nivel, tal es el caso de propiedades como: rectas paralelas, perpendiculares, número de lados, entre otros, evidenciando que en este nivel se va más allá de un simple reconocimiento de la forma de una figura.

En este sentido se puede concluir que, dado al resultado en las actividades desarrolladas en el transcurso de esta investigación, se observó un avance significativo de los participantes en cuanto al razonamiento de los conceptos de área y perímetro, y tomando en consideración las particularidades de los niveles expuestos en el párrafo anterior, es válido concluir que los participantes alcanzaron el nivel dos de razonamiento propuesto por van



Hiele, dado que lograron identificar características y propiedades como: ancho, largo, contorno, borde, superficie. Además, relacionaron el contorno de una figura con el perímetro, como también, la superficie con el área de esta. Incluso propusieron estrategias operativas para determinar el perímetro y área de una figura (cuadrado, rectángulo). De igual forma, resolvieron problemas prácticos de situaciones relacionadas con su contexto colocando en práctica lo aprendido.

Por lo tanto, implementar experiencias de aprendizajes a través de las Fases de este Modelo, facilita el razonamiento de estos conceptos y permite seguir avanzando en la búsqueda de un nivel superior.

### **5.7 Aprendizajes adquiridos por la docente investigadora en el proceso investigativo**

Ha sido un largo camino que ha conllevado a trascender las diferentes percepciones de los niños y así obtener más información relacionada a la forma como ellos perciben e interpretan distintos procedimientos asociados al área y el perímetro. La organización a la hora de planear y aplicar las actividades ha sido fundamental durante todo este recorrido que, sin lugar a dudas, deja aprendizajes en diferentes ámbitos muy útiles en nuestro crecimiento como profesionales de la educación.

En este sentido, el desarrollo de cada una de las Fases de aprendizaje, así como la organización de la información recolectada fue una labor compleja que amerita extraer elementos que a primera vista no son perceptibles. Por lo que actitudes como la disciplina en la organización de todos los procesos que con algo de timidez se iban tomando e implementando, justamente buscando la mayor excelencia posible, han sido aspectos que sin duda prevalecen y que permitirán desarrollar futuros proyectos con mayor empeño con miras a mejorar la práctica docente sobre todo en un área tan fundamental como lo son las matemáticas, que no sólo fortalece la comprensión de conceptos tan importantes como el área y el perímetro sino que también sembrará en los estudiantes un respeto y una mayor atracción hacia el estudio de las matemáticas en lo que será su vida académica futura.

Otras vivencias a destacar es la capacidad que indiscutiblemente se debe desarrollar de forma muy acertada, y corresponde a aprender minuciosamente de los errores que cometemos y que en el desarrollo de este trabajo se presentaron gran cantidad de veces, aprendiendo formas de persistir y corregir cuando hizo falta, siempre buscando mejorar en cada nuevo paso que se tomaba.

Prácticas como las desarrolladas en este trabajo permite que se puedan abordar temas aplicando metodologías correctas e integrando diferentes factores externos que influyen directamente con la formación de nuestros educandos. El conocer minuciosamente las particularidades de cada sujeto, es un mundo del cual siempre habrá campo para descubrir nuevas informaciones ya que el ser humano sigue siendo una caja de sorpresas, de dónde se vuelve difícil no sorprendernos.

### **5.8 Limitantes durante el proceso investigativo**

Durante el desarrollo de la investigación se presentó un factor limitante como fue el tiempo, debido a que antes del proceso de aplicación de las actividades, estas debían ser aplicadas a otros estudiantes para luego ser refinadas y llevarlas a los participantes vinculados al proceso de investigación, esto con el fin de garantizar su comprensión al momento de desarrollar las actividades en cada una de las Fases.

Además, el diseño de las actividades en el marco de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele requiere de tiempo, ya que es necesario una estructura organizada para su aplicación a los participantes que permita evidenciar el progreso en cada una de las Fases.

### **5.9 Futuras líneas de investigación**

Teniendo en cuenta la presente investigación cuyo objetivo fue analizar cómo razonan los estudiantes de grado tercero acerca de los conceptos de área y perímetro a partir de las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, se realizó una contribución a la línea de investigación en el Modelo de van Hiele en la educación matemática, que consistió en

aportar herramientas que pueden ser implementadas al interior del aula de clase y permitan potenciar el razonamiento de los estudiantes desde los primeros años de escolaridad, en la Educación Básica Primaria, vinculando situaciones de la cotidianidad relacionadas con el componente geométrico.

Esta investigación abre la puerta para abordar otras líneas de investigaciones que pueden estar relacionadas a:

- Diseñar estrategias mediante las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele para el aprendizaje de los conceptos de área y perímetro.
- Analizar el progreso del razonamiento del concepto de área y perímetro a través de las Fases de aprendizaje del Modelo de van Hiele en estudiantes de los grados primero y segundo de Educación Básica Primaria.
- Analizar a partir de las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele la independencia de las medidas del área y perímetro de figuras planas.
- Otras formas de realizar procesos de medición del área y el perímetro involucrando diferentes figuras geométricas.
- Asociar el área de figuras planas con el concepto de fracción

### **5. 10 Participación en eventos académicos**

Durante el desarrollo de la investigación se participó en dos eventos de carácter internacional, los cuales permitieron mostrar los avances del proceso investigativo y su contribución a la Educación Matemática en el componente geométrico.

XV Conferencia Internacional de Educación Matemática, (XV CIAEM), Medellín Colombia, mayo 5 al 10 de 2019.

### 5.10.1 Modalidad de participación. Comunicación



Ilustración 173. Certificado, comunicación breve.

### 5.10.2 Modalidad de participación. Poster



Ilustración 174. I Seminario Internacional de Innovación en Educación y Didáctica de las Ciencias.

## Apéndice

### Apéndice A. Actividad diagnóstica

La presente actividad se centra en identificar la forma como los estudiantes de grado tercero cubren la superficie de una cartulina con diversos objetos, y la manera como con esos mismos objetos bordean la cartulina.

**Materiales:** Cartulina cuyas dimensiones son: 30 cm de cada lado, útiles escolares.

Lee atentamente y responde:

1. Una superficie es: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. Una superficie se puede medir con: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
3. Observa la cartulina suministrada por la profesora. Ahora, busca en tu bolso el objeto más pequeño que tengas. Sobrepongalo en la cartulina marcándolo con el lápiz hasta cubrirla totalmente, las veces que sobrepuse el objeto en la cartulina fueron:  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

4. De los elementos que traes en tu bolso, el que te permite cubrir la mayor parte de la cartulina es: \_\_\_\_\_

---

---

5. Para cubrir totalmente la cartulina los objetos más adecuados que tengo son: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_porqué\_

---

---

6. Una manera de comparar dos figuras planas es: \_\_\_\_\_

---

7. Otra forma de cubrir la cartulina es: \_\_\_\_\_

---

---

Lee atentamente y responde:

1. El perímetro es: \_\_\_\_\_

---

---

2. El perímetro de una figura se puede medir con: \_\_\_\_\_

---

---

3. Observa la cartulina suministrada por la profesora. Ahora busca en tu bolso el objeto más pequeño que tengas. Recorre el contorno de la cartulina con el objeto marcándolo hasta bordearla totalmente, las veces que marcaste el objeto en el

contorno de la cartulina fueron:

---



---

4. De los elementos que traes en tu bolso, el que te permite recorrer el borde completamente de la cartulina sin que te sobre nada es:

---



---

5. Para recorrer el contorno de la cartulina los objetos más adecuados que tengo son:

\_\_\_\_\_ porque \_\_\_\_\_

---



---

6. Una manera de comparar el contorno de dos objetos es: \_\_\_\_\_

---

7. Otra forma de recorrer el borde de la cartulina es: \_\_\_\_\_

---

## **Apéndice B. Instrumentos para la recolección de la información**

### **B.1 Fase 1. (Información)**

#### **B.1.1 Plasmamos nuestras manos**

Esta actividad consiste en entregar una lámina de cartulina de 30 centímetros de largo por 30 centímetros de ancho a los estudiantes para que plasmen las manos con pintura tantas veces sea necesario, hasta cubrir en lo posible toda la superficie de la hoja, luego en otra lámina de cartulina con las mismas medidas, plasman un dedo de la mano (el mismo), con pintura las veces que sea necesario para cubrir la mayor parte de la superficie de la

lámina. Se pretende con esta actividad que los estudiantes visualicen cómo queda cubierta la superficie de la hoja, utilizando la mano o un dedo de la mano como unidad de medida.

Posteriormente deberán responder las siguientes preguntas:

- a. ¿Cuántas veces se plasmó la mano sobre la cartulina?

---



---

- b. ¿Crees que si se plasma la mano de una persona adulta estaría las mismas veces que la tuya? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

- c. ¿Si colocas la mano sobre la cartulina de otras formas es posible plasmarla más veces? \_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

---

- d. ¿Cuántas veces se plasmó el dedo sobre la cartulina? \_\_\_\_\_

---

- e. ¿Crees que si se plasma el dedo de una persona adulta estaría las mismas veces que el dedo tuyo? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

- f. ¿Qué otro elemento puedes utilizar para cubrir toda la superficie de la cartulina?

---

Para finalizar la actividad se les pide que comparen el trabajo realizado con otros compañeros para identificar la cantidad de veces que cada uno plasmó la mano sobre la cartulina y de esta manera observar cómo quedó cubierta la superficie de la cartulina.

### **B.1.2 Midiendo por el borde**

Se retoma la actividad 1, donde se les entregó el material en el cual plasmaron las manos en la actividad anterior, para que los participantes bordeen la cartulina utilizando como instrumento de medida la pulgada (dedo pulgar), además pueden utilizar otras unidades de



medidas no convencionales como la cuarta u otras que ellos estimen conveniente.

Seguidamente, responderán las siguientes preguntas:

- a. ¿Cuántas pulgadas tiene el borde de la cartulina?

---

- b. ¿Cuántas pulgadas tiene el borde de la hoja?

---

- c. ¿Cuántas cuartas de la mano tiene el borde de la cartulina?

---

- d. ¿Con que otro instrumento puedes medir el contorno de la cartulina y hoja de block?

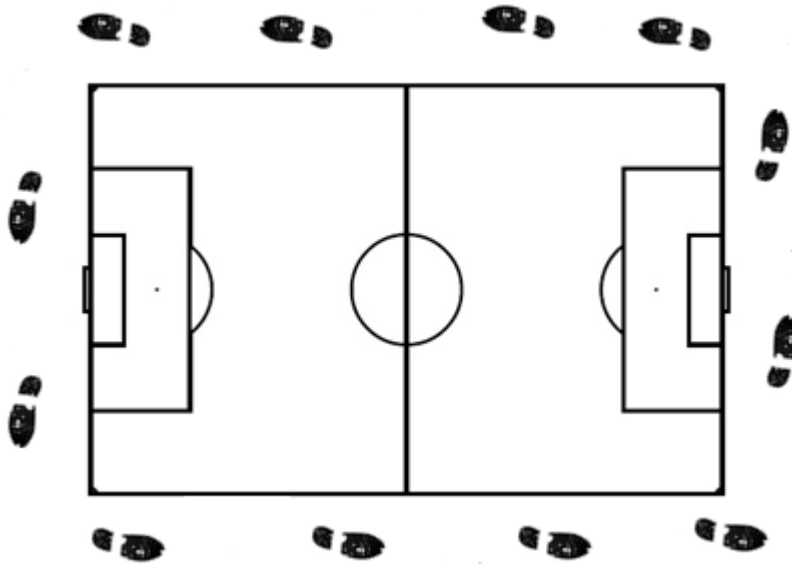
---

Se busca con esta actividad que los estudiantes exploren la orilla, el borde, contorno, como un acercamiento al concepto de perímetro, permitiendo identificar que las superficies están delimitadas por un contorno, y que éste se puede medir utilizando diferentes unidades de medidas, en este caso, se utilizan las partes del cuerpo, el cual se evidencia en el momento que los estudiantes realizan las mediciones con la pulgada, la cuarta, además, se puede implementar estrategias que permitan utilizar otros instrumentos de medidas los cuales pueden ser utilizados para obtener una medida más aproximada.

### **B.1.3 Reconociendo nuestro entorno**

En esta actividad, los estudiantes salen al patio del colegio para realizar un recorrido por diferentes lugares del entorno escolar, como la placa polideportiva, el aula múltiple y la jardinera. Cada lugar es recorrido por el borde, a la vez que realicen un conteo de los pasos que dan en cada uno de sus lados, para ello se les pide que representen en dibujos los lugares recorridos, en los cuales muestran la cantidad de pasos que cada uno realiza alrededor de estos. Esta actividad busca reconocer el borde de un lugar, a diferencia de la actividad anterior donde los estudiantes miden el contorno de una hoja, estas actividades se realizan en un entorno Institucional, haciendo un reconocimiento de los diferentes lugares, con el fin de que los participantes observen que también se puede realizar mediciones en

diferentes lugares, de diferentes formas y de mayor longitud utilizando unidades de medidas no convencionales.



Muestra de recorrido por el contorno de la placa polideportiva.

Después de terminar el recorrido por los diferentes lugares, los estudiantes realizan comparaciones con los compañeros y responden las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos pasos contaste al ir por el borde de la jardinera? \_\_\_\_\_
- ¿En cuál lugar se dio menos pasos? \_\_\_\_\_
- ¿En cuál lugar se dio más pasos? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Si un niño de tres años hace el mismo recorrido, ¿crees que cuenta más o menos pasos? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Esta actividad permite que los participantes identifiquen la orilla, borde o contorno de diferentes lugares del entorno escolar utilizando unidades de medidas no convencionales como una aproximación al concepto de perímetro.

## **B.2 Fase 2 (Orientación dirigida)**

### **B.2.1 Comparando superficies**

En esta actividad se retoma la actividad uno de la fase anterior (información), donde se les entrega a los participantes láminas con las mismas dimensiones; (30 centímetros de largo y 30 centímetros de ancho), se les pide que plasmen la mano en la cartulina de tal forma que cubran la mayor superficie posible, esto para que los estudiantes identifiquen que la posición de la mano influye en la cantidad de veces que se plasma sobre la cartulina, ya que se puede cubrir más superficie, además pueden comparar en cuál actividad se cubre más superficie, en la anterior o en la que acaban de realizar, y así acercarlos al concepto de área. Posteriormente responden las siguientes preguntas:

- a. ¿Cuántas veces se plasma la mano sobre la cartulina?

---

- b. Si comparas esta actividad con la anterior donde también plasmaste las manos, ¿en cuál se cubre mayor superficie? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

- c. ¿Qué objeto puedes utilizar para cubrir toda la superficie?

---



---

### B.2.2 De paseo por algunos lugares

La docente realiza una salida al parque con los estudiantes del grado tercero para que observen las partes en las que se encuentra dividido el parque, los cuales serán utilizados para que los estudiantes realicen el proceso de medición de la superficie y el contorno, posteriormente los participantes buscan la forma de elaborar la unidad de medida que ellos deseen utilizando partes del cuerpo para cubrir la superficie y medir el contorno de la figura seleccionada. Después responden las siguientes preguntas:

- a. ¿Qué parte del cuerpo utilizaste para construir la unidad de medida para cubrir la superficie?

---



---

- b. ¿Cuántas unidades necesitas para cubrir la superficie?

---

- c. ¿Se cubre la superficie en su totalidad? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

- d. ¿Qué otro elemento utilizas para cubrir toda la superficie?

---



---

- e. ¿Qué parte del cuerpo utilizaste para medir el contorno de la figura?

---



---

- f. ¿Crees que la medida que usaste es la apropiada para medir el contorno?

\_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

---

g. ¿Qué otro elemento puedes usar para medir el contorno de la figura?

---

Esta actividad permite identificar diferentes instrumentos de medidas para cubrir superficies o medir el contorno, además brinda la oportunidad al estudiante de pensar en instrumentos de medición que le sean apropiados para realizar una medida más exacta y a la vez aproximarlos al concepto de área y perímetro utilizando como instrumento de medida diferentes partes del cuerpo.

### **B.2.3 Escojo mi unidad de medida**

En esta actividad se les entrega a los estudiantes una cartulina con las siguientes medidas: 30 cm de cada lado, en ella los participantes deben delinear el contorno o borde, y después cubrir la superficie de la cartulina. Para esta actividad se les entrega unidades de medida de diferentes formas y tamaños (redondos, cuadrados, triángulos, rectángulos, paletas, cartas) para que ellos escojan la unidad de medida que estimen conveniente, y que les permita cubrir en su totalidad toda la superficie de la cartulina delimitada por el contorno. Esta actividad tiene como propósito identificar que la superficie de una figura plana, es la región encerrada por el borde o contorno, y que se puede cubrir utilizando diferentes unidades de medida. Posteriormente deben completar los siguientes literales.

a. La unidad de medida que escogiste para cubrir la superficie fue:

\_\_\_\_\_ Porqué: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b. Las unidades de medida que necesitaste para cubrir la superficie fueron:

\_\_\_\_\_

c. La unidad de medida que utilizaste fue la más apropiada para cubrir la superficie:

\_\_\_\_\_ porqué: \_\_\_\_\_

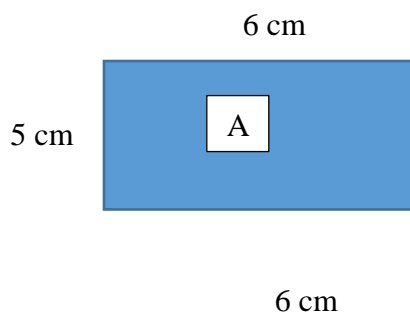
\_\_\_\_\_

- d. La forma que utilizaste para saber cuántas unidades fueron necesarias para cubrir la superficie de la cartulina fue: \_\_\_\_\_
- e. Comparo mi trabajo con el de mi compañero y quien utilizó más unidades de medida para cubrir la superficie de la cartulina fue: \_\_\_\_\_ porque \_\_\_\_\_

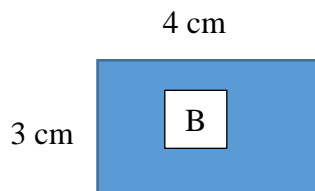
### **B.2.4 Cubriendo superficies con diferentes unidades de medida y bordeando contornos con diferentes unidades de longitud**

Se entrega a los estudiantes una cartulina que mida 30 cm de largo por 20 cm de ancho, figuras cuadradas y rectangulares con las siguientes medidas.

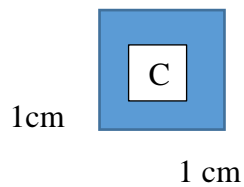
Unidad de medida A: 6 cm de largo por 5 cm de ancho.



Unidad de medida B: 4 cm de largo por 3 cm de ancho.



Unidad de medida C: 1 cm de largo por 1 cm de ancho.



Toma la unidad de medida “A” y cubre con ella toda la superficie de la cartulina, márcala cuantas veces sea necesario. De acuerdo a lo anterior responde:

a. ¿Cuántas veces sobrepones la unidad de medida “A” por el largo de la cartulina?

---

b. ¿Cuántas veces sobrepones la unidad de medida “A” por el ancho de la cartulina?

---

c. ¿Cuántas veces colocaste la unidad de medida “A” en toda la superficie de la cartulina?

---

d. ¿Cómo haces para saber cuántas veces sobrepones la unidad de medida “A” en toda la superficie de la cartulina?

---



---

Toma la unidad de medida “A”, y mide con una regla los centímetros que tiene por cada lado.

¿Cuánto mide por el largo?

---

¿Cuánto mide por el ancho?

---

¿Cuánto mide el contorno de la unidad de medida “A”? \_\_\_\_\_

---

¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? \_\_\_\_\_

---

Toma la unidad de medida “B” y cubre con ella toda la superficie de la cartulina, márcala cuantas veces sea necesario. De acuerdo a lo anterior responde:

a. ¿Cuántas veces sobrepones la unidad de medida “B” por el largo de la cartulina?

---

b. ¿Cuántas veces sobrepones la unidad de medida “B” por el ancho de la cartulina?

---

c. ¿Cuántas veces colocaste la unidad de medida “B” en toda la superficie de la cartulina?

---

d. ¿Qué haces para saber cuántas veces sobrepones la unidad de medida “B” en toda la superficie de la cartulina?

---

Toma la unidad de medida “B”, y mide con una regla los centímetros que tiene por cada lado.

e. ¿Cuánto mide por el largo?

---

f. ¿Cuánto mide por el ancho?

---



g. ¿Cuánto mide el contorno de la unidad de medida “B”?

---

h. ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno?

---



---

Toma la unidad de medida “C” y cubre con ella toda la superficie de la cartulina, márcala cuantas veces sea necesario. De acuerdo a lo anterior responde:

a. ¿Cuántas veces sobrepones la unidad de medida “C” por el largo de la cartulina?

---

b. ¿Cuántas veces sobrepones la unidad de medida “C” por el ancho de la cartulina?

---

c. ¿Cuántas veces colocaste la unidad de medida “C” en toda la superficie de la cartulina?

---

d. ¿Cómo haces para saber cuántas veces sobrepones la unidad de medida “C” en toda la superficie de la cartulina?

---

Toma la unidad de medida “C” y mide con una regla los centímetros que tiene por cada lado,

e. ¿Cuánto mide por el largo? \_\_\_\_\_

f. ¿Cuánto mide por el ancho? \_\_\_\_\_

g. ¿Cuánto mide el contorno de la unidad de medida “C”? \_\_\_\_\_

h. ¿Cómo haces para obtener la medida total del contorno? \_\_\_\_\_

---

Se espera que, al cubrir la superficie con cada unidad de medida, los estudiantes escriban: “la cartulina se cubre con tantas unidades de medida que tiene tantos centímetros de largo por tantos de ancho”. Y para el perímetro o contorno digan la unidad de medida “A” tiene tantos cm de largo por tantos cm de ancho, y por el contorno mide tantos centímetros.

### **B.3 Fase 3 (Explicitación)**

#### **B.3.1 Explico lo aprendido**

Se les entrega a los participantes diferentes unidades de medida de diversos tamaños para que escojan la que estimen conveniente, que les permita cubrir la superficie del escritorio que se encuentra en el aula de clase y establezcan las unidades de medida necesaria para cubrir la parte superior en su totalidad, posteriormente con la regla deben medir el largo y el ancho de la mesa y expresar la medida del contorno en centímetros. Después de realizar la actividad deben responder las siguientes preguntas.

a. Las unidades de medidas que necesitaste para cubrir la superficie de la mesa son:

---

b. El largo y el ancho de la unidad de medida que utilizaste para cubrir la superficie de la mesa es: Largo \_\_\_\_\_

Ancho \_\_\_\_\_

c. Describe lo que hiciste para saber cuántas unidades de medida se necesitan para cubrir de la superficie de la mesa: \_\_\_\_\_

d. El largo de la mesa es: \_\_\_\_\_

- e. El ancho de la mesa es: \_\_\_\_\_
- f. ¿Cuál es la medida total del contorno de la mesa? \_\_\_\_\_
- g. ¿Cómo haces para saber la medida total del contorno de la mesa?

\_\_\_\_\_

Se pretende que los participantes realicen la actividad y a la vez les expliquen a los compañeros el procedimiento que realizan para hallar la medida de la superficie y la longitud del contorno.

### B.3.1 Cuestionario

Para evidenciar el aprendizaje obtenido en las fases uno y dos, los estudiantes realizan el siguiente cuestionario:

- a. Lo que hiciste en la primera actividad cuando plasmaste con pintura la mano sobre la cartulina fue: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- b. En la salida al parque, la unidad de medida que utilizaste para cubrir la superficie de la figura que escogiste fue: \_\_\_\_\_ ¿podías haber utilizado otra unidad de medida? \_\_\_\_\_ ¿Cuál?

\_\_\_\_\_

- c. Los materiales o elementos que utilizaste en la realización de las actividades fueron:

\_\_\_\_\_

- d. Las palabras nuevas que has aprendido son: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- e. Entre la primera actividad y la segunda actividad en la cual plasmaste las manos de diferentes formas, en la que se cubrió más superficie fue en: \_\_\_\_\_

Porqué \_\_\_\_\_

---

f. De las actividades que realizaste, la que te gustó más fue: \_\_\_\_\_

---

Porqué: \_\_\_\_\_

g. Lo que aprendiste al desarrollar las actividades fue: \_\_\_\_\_

---

h. De las unidades de medidas implementadas en las actividades anteriores, las más indicadas para realizar mediciones de forma más precisa son:

Porque: \_\_\_\_\_

---

i. El instrumento que se debe utilizar para obtener una medida más exacta al realizar proceso de medición es: \_\_\_\_\_

---

Este cuestionario permite evidenciar los aprendizajes adquiridos en la fase uno y dos, es el momento donde los estudiantes cuentan sus experiencias, explican cómo desarrollaron las actividades, utilizando un lenguaje adecuado, el cual posibilite sacar conclusiones.

## B.4 Fase 4 (Orientación libre)

### B.4.1 Cubriendo superficies pequeñas y midiendo su contorno

Se les entrega a los estudiantes una cartulina con las mismas dimensiones que fueron utilizadas en la actividad uno (30 cm de cada lado) de la fase uno (información), y marcadas por su contorno: lado (1), lado (2), lado (3) y lado (4), en esta ocasión se les pide que midan los bordes de la cartulina utilizando una regla o metro, después se les propone que cubran la superficie de la cartulina con las multifichas.

Se pretende que los estudiantes identifiquen como ha sido el proceso para cubrir la superficie de la cartulina.

Las Multifichas son figuras geométricas encajables unas con otras, cada una tiene una medida de tres cm de lado y están distribuidas en cuatro colores: rojas, verdes, azules y amarillas. Palabra maestra. (2015).



Muestra de las multifichas.

Posteriormente responden las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántas multifichas utilizaste para cubrir la cartulina? \_\_\_\_\_

---

- b. ¿Qué hiciste para saber cuántas multifichas tiene la superficie? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- c. ¿Cuál es el resultado si se multiplica la cantidad de multifichas de un lado por las del otro lado?  
\_\_\_\_\_
- d. ¿Cuántos centímetros mide cada lado de la cartulina? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- e. Suma cada uno de los lados que mediste ¿Cuál es el resultado? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

#### **B.4.2 Cubriendo superficies grandes**

Para esta actividad los participantes necesitan una cinta métrica, una regla de cien centímetros y pliegos de papel periódico o cartulinas, cada uno debe medir un metro por cada lado. La cinta métrica o la regla la utilizan para medir el salón de clase por cada uno de sus lados, con el papel periódico o cartulina cubren la superficie del salón de clases, posteriormente responden las siguientes preguntas:

- a. ¿Cuántas veces colocaste la regla por el borde del salón? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- b. ¿Cuántos metros mide todo el borde del salón de clases? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- c. ¿Cuántos metros mide cada lado del salón? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- d. ¿Es necesario medir todo el borde del salón para saber cuál es su perímetro? \_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

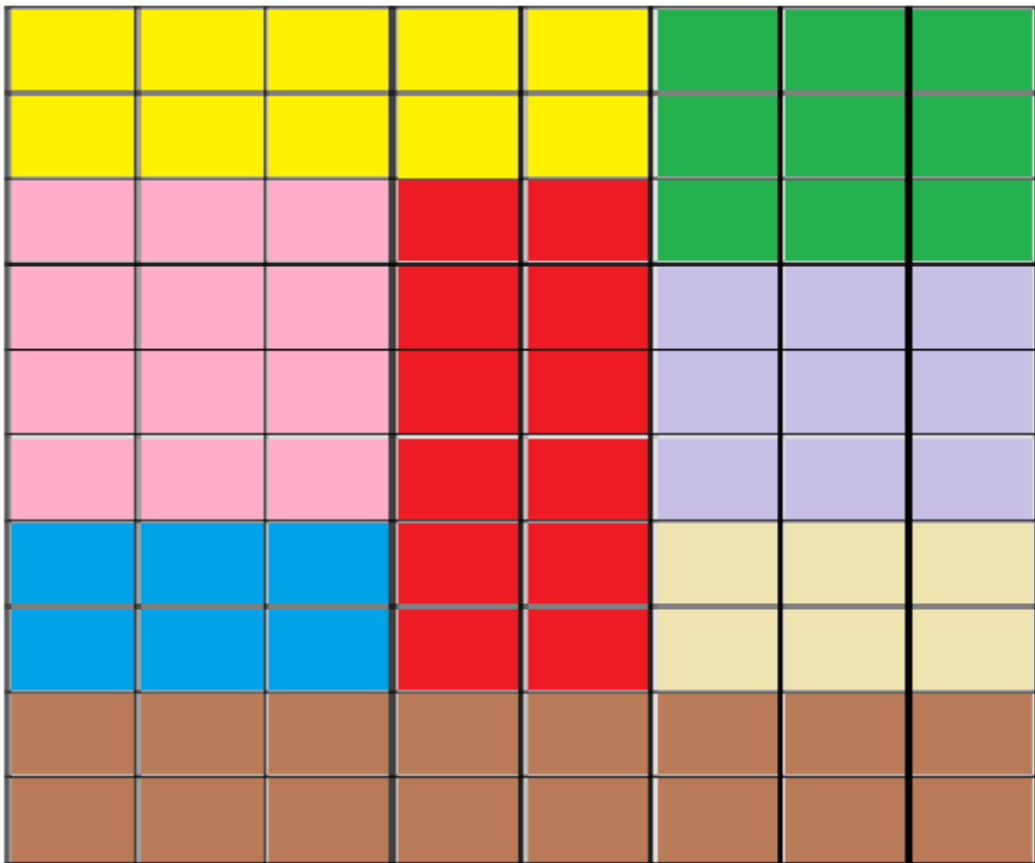
e. ¿Cuántos periódicos o cartulinas se necesitaron para cubrir la superficie del salón de clases? \_\_\_\_\_

f. ¿Qué operación puedes realizar para hallar la cantidad de periódicos necesarios para cubrir la superficie del salón? \_\_\_\_\_









Se pretende que los estudiantes pongan en práctica los conceptos trabajados, al realizar procedimientos que le permitan hallar el área y el perímetro de un lugar muy cercano a ellos en fases anteriores.

### **B.4.3 Aprendo de mi entorno**

La siguiente actividad consiste en presentar a los estudiantes el plano de una casa, donde la superficie se encuentra cubierta por cuadrados y cada cuadrado representa 1 metro cuadrado ( $m^2$ ). Además, cada color representa una sección de la vivienda en el plano, como se muestra en la siguiente Ilustración.



Muestra del plano de una casa. Elaboración propia

	Terraza		Habitación 1		Habitación 2
	Baño		Pasillo		Sala
	Cocina		Patio		

Después responden las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el área del baño? \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es el área de la cocina? \_\_\_\_\_

c. ¿Cuál es el área de la sala? \_\_\_\_\_



- d. ¿Cuánto mide el borde del pasillo? \_\_\_\_\_
- e. ¿Cuánto mide el borde la habitación? \_\_\_\_\_
- f. ¿Cuál es el perímetro del plano de la casa? \_\_\_\_\_
- g. ¿Cuál es el área del plano de la casa? \_\_\_\_\_

Esta actividad permite fortalecer los aprendizajes y el vocabulario que los estudiantes han adquirido al desarrollar cada una de las actividades de las fases anteriores.

## **B.5 Fase 5 (Integración)**

### **B.5.1 Aplicando lo aprendido**

Se lleva a los estudiantes a un salón diferente al que midieron en la fase anterior para que le hallen el perímetro de este, utilizando como unidad de medida el metro. Posteriormente realiza un dibujo del salón en el cual hallaron el perímetro, después hacen un dibujo que represente el área del salón utilizando cuadrículas, donde cada cuadrícula represente un metro cuadrado.

Después responden las siguientes preguntas:

- a. ¿Cuántos metros mide cada lado del salón? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es el perímetro del salón donde realizaste el proceso de medición?  
\_\_\_\_\_
- c. ¿Qué procedimiento hiciste para hallar el perímetro? \_\_\_\_\_

---

a. ¿Cuál es el área del salón que mediste? \_\_\_\_\_

---

b. ¿Qué procedimiento hiciste para hallar el área? \_\_\_\_\_

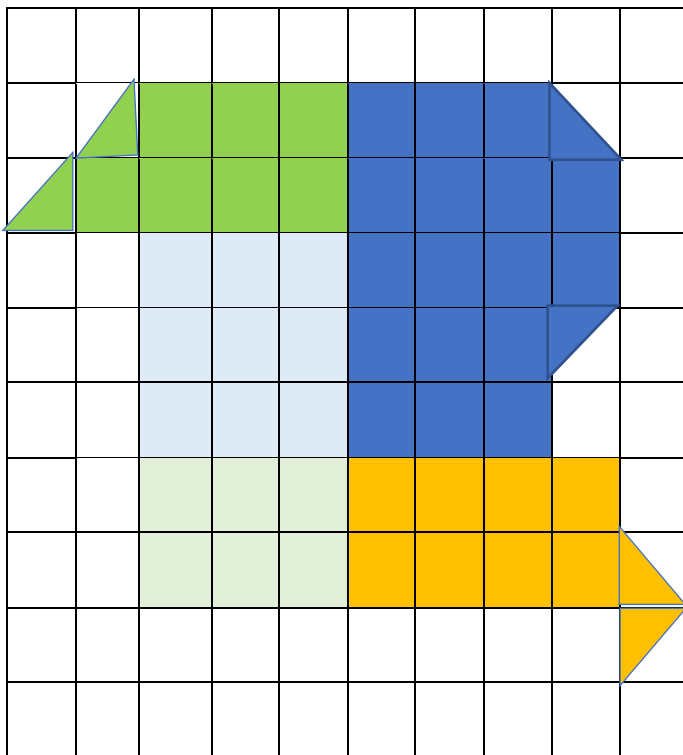
---

### **B.5.2 Soluciono problemas**

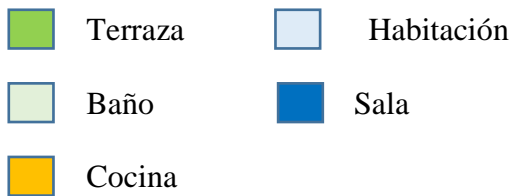
En la casa de Andrés se necesita embaldosar la habitación de él, ésta mide tres metros (300 cm) de largo y tres de ancho. Andrés necesita la ayuda de los compañeros para saber cuántas baldosas de 30 centímetros de lado se necesitan para cubrir la superficie de la habitación”. Además, se requiere saber su perímetro, porque su madre desea decorar a su alrededor con una cenefa.

### **B.5.3 Encontrando el área y el perímetro**

La siguiente actividad consiste en presentar a los estudiantes el plano de una casa, donde la mayor parte de la superficie se encuentra cubierta por cuadrados y cada cuadrado representa un metro cuadrado ( $m^2$ ), y algunas unidades cuadradas se encuentran divididas por su diagonal Como se observa en la siguiente Ilustración.



Muestra del plano de una casa.



Responde las siguientes preguntas:

- El área de la terraza es: \_\_\_\_\_
- El perímetro de la habitación es: \_\_\_\_\_
- El área de la sala es: \_\_\_\_\_
- El perímetro del baño es: \_\_\_\_\_

- e. El área de la cocina es: \_\_\_\_\_
- f. El área del plano de la casa es: \_\_\_\_\_
- g. Que hiciste para saber cuál es el área del plano de la casa: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

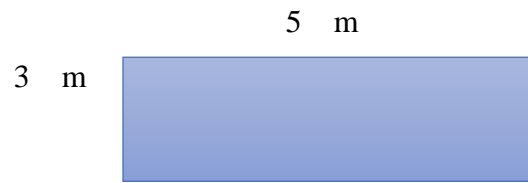
Esta actividad permite fortalecer los aprendizajes y el vocabulario que los estudiantes han adquirido al desarrollar cada una de las actividades de las fases anteriores.

### Apéndice C. Actividad de cierre

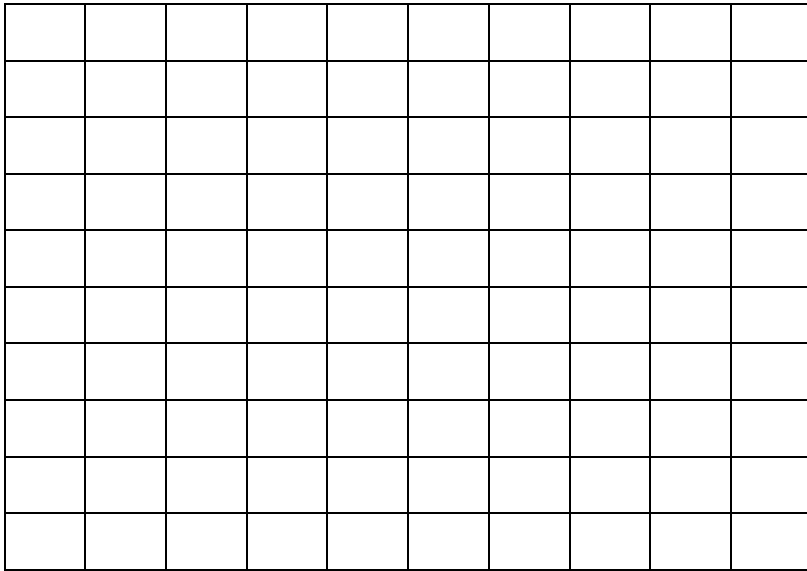
1. Lee atentamente y responde:

- a. ¿Qué comprendes por el área de una figura? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- b. El área de una superficie se puede medir en: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- c. ¿Qué procedimiento usarías para hallar el área de un cuadrado? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- d. El perímetro de una figura es: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- e. El perímetro de una figura se puede medir con: \_\_\_\_\_
- f. ¿Qué procedimiento usarías para hallar el perímetro de un cuadrado? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2. El patio de la casa de Andrés tiene forma rectangular, mide 5 metros de largo y 3 metros de ancho como se muestra en la imagen. Teniendo en cuenta esta información responde:



- a. El área del patio de la casa de Andrés es: \_\_\_\_\_
- b. El procedimiento que hiciste para hallar el área fue: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- c. El perímetro del patio de la casa de Andrés es: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- d. El procedimiento que hiciste para hallar el perímetro fue: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- e. Si se quiere cercar el patio de la casa de Andrés con parales de madera, cuya distancia es de un metro. ¿Cuántos de estos parales se necesitan para cercar el patio?  
\_\_\_\_\_
3. En la cuadrícula que se encuentra a continuación dibuja:
- a. Una figura que tengan un área de  $16 \text{ cm}^2$  y la resaltas con el color que desees
- b. Una figura que tenga un perímetro que de 20 cm y lo marcas con tu color preferido.



1cm



1cm<sup>2</sup>

## Apéndice D. Consentimiento de los padres

### Consentimiento de participación en proyecto de investigación

Señor padre de familia, madre de familia o acudiente

Cordial saludo:

El motivo del presente oficio tiene como propósito informarles que me encuentro adelantando estudios de Maestría en Educación, línea de formación matemáticas en la Facultad de la Universidad de Antioquia sede Apartadó. Durante el proceso de mi formación académica es de gran importancia realizar y presentar un trabajo de investigación, el cual busca aportar a la Educación Matemática y en especial a los estudiantes. El trabajo de investigación tiene por nombre “**Razonamiento de los conceptos de área y perímetro, a partir de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele en estudiantes de grado tercero**” en el cual es importante la participación de su hijo,

**Propósito de la investigación:** analizar cómo los estudiantes de grado tercero razonan los conceptos de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

**Beneficios:** el ser participante en esta investigación permite que los estudiantes comprendan situaciones de la vida diaria asociadas a los conceptos de área y perímetro, además de potenciar el pensamiento espacial y sistemas geométricos.

**Procedimiento:** como participante en este estudio el estudiante será observado en clase, algunas veces video gravado, fotografías, se les aplicará una serie de actividades orientadas por cada una de las fases del modelo de razonamiento de Van Hiele y en algunas ocasiones se realizarán actividades en horarios distintos al establecido en la Institución y será necesario contar con el desplazamiento del niño(a).

**Riesgo:** no hay riesgo asociado a la participación en este evento.

**Confidencialidad:** la información será guardada en un archivo con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de la investigadora y sólo para fines académicos. Toda la información recolectada en esta investigación será confidencial

respetando la política de protección de datos contemplada en la Ley 1581 de 2012 y su Decreto Reglamentario 1317 de 2013.

**Preguntas posteriores:** la investigadora responderá cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto a través del correo electrónico [dianaluz-20@hotmail.com](mailto:dianaluz-20@hotmail.com)

**Consentimiento del padre de familia:** entiendo que formando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación

Muchas gracias por su comprensión y apoyo.

Linet Arcia Suarez

Firma del padre o responsable

1041262221

Cédula



respetando la política de protección de datos contemplada en la Ley 1581 de 2012 y su Decreto Reglamentario 1317 de 2013.

**Preguntas posteriores:** la investigadora responderá cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto a través del correo electrónico [dianaluz-20@hotmail.com](mailto:dianaluz-20@hotmail.com)

**Consentimiento del padre de familia:** entiendo que formando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación

Muchas gracias por su comprensión y apoyo.

Rosadul

Firma del padre o responsable

32 271437

Cédula

respetando la política de protección de datos contemplada en la Ley 1581 de 2012 y su Decreto Reglamentario 1317 de 2013.

**Preguntas posteriores:** la investigadora responderá cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto a través del correo electrónico [dianaluz-20@hotmail.com](mailto:dianaluz-20@hotmail.com)

**Consentimiento del padre de familia:** entiendo que formando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación

Muchas gracias por su comprensión y apoyo.

Cira Osorio

Firma del padre o responsable

32251719

Cédula

### Referencias bibliográficas

- Aravena, M. y Caamaño, C. Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule: Talca, Chile. *Relime* [online]. 2013, vol.16, n.2 [citado 2020-07-17], pp.179-211. Disponible en:  
 <[http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362013000200002&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362013000200002&lng=es&nrm=iso)>. ISSN 2007-6819. <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1621>.
- Baldor, J.A. (1967). *Geometría plana y del espacio*. Bogotá, Colombia: Vasco Americano S.A.
- Bedoya, D. (2013). *La comprensión de las estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele*. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquía, Colombia.
- Berciano, A., Jiménez-Gestal, C., y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso.
- Binda, N. U., & Balbastre-Benavent, F. (2013). *Investigación cuantitativa e investigación cualitativa: buscando las ventajas de las diferentes metodologías de investigación*. *Revista de Ciencias Económicas*, 179–187.
- Blythe, T. (1999) *Enseñanza para la comprensión: Guía para el Docente*. Paidós, Buenos Aires.
- Bourbaki, N., & Hernández, J. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. París, Francia: Alianza Universidad.  
<https://es.calameo.com/read/00228829710a0d5857d8b>
- Braga, G.M. (1991). Apuntes para la enseñanza de la geometría. *Signos, teoría y práctica para la educación*, 4, julio-diciembre, 52-57
- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, 31-48.

- Carabalí, J. S. (2012). *Patrones de medida no convencionales: el caso de la longitud en el barrio Desepaz del municipio de Santiago de Cali, Colombia* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.
- Case, R. (1989) *El Desarrollo Intelectual del Nacimiento a la Edad Madura*. Barcelona: Paidós
- Corberán, R. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Recuperado de: <https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/CorOtr94.pdf>
- Corberán, R. (1996) *análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Valencia, España.
- Corberán, R., Gutierrez, Á., Huerta, M., Pastor, A., Margarit, J., Peñas, A., y otros. (2004). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele*. Madrid: Ministerio de Educación y ciencia.
- D'Amore, B., Fandiño, M. (2007) *Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes*. *Relime* Vol. 10, Núm. 1, marzo, 2007, pp. 39-68.
- Dickson, L. (1989). Area of a rectangle. In Johnson, D. (Ed.), *Children's mathematical frameworks: A study of classroom teaching* (pp. 76–88). Berkshire: NFER-Nelson.
- Domínguez, E. J., & Ferrer, J. (2011). *Magnitudes y unidades de medida (Mecanizado básico)*: Ciclos Formativos. Editex.
- Gallo, O. F. (2006). *Módulo 3 Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas*. Medellín, Colombia: Artes y Letras Ltda.
- Garrido, E. (2015) *La enseñanza del concepto de área y perímetro de polígonos a través del Geoplano, para el desarrollo de la competencia matemática en resolución de problemas del grado séptimo en el Colegio María Antonia Cerini*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- González, J. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café*. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

- Guillén, G.; Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Cáceres, M. (1992): *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* memoria final del proyecto de investigación. Valencia: Institución Valenciana de Estudios e Investigación “Alfonso el Magnánimo”
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Bogotá: Iberoamericana.
- Hemmerling, M. (2005). “*Elementos básicos de la geometría*” en *Geometría elemental*. México: Limusa, pp. 11-62.
- Hernández, R. Fernández, C, Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- Ibarra, T. (2014). *Relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele*. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquía, Colombia.
- Iparraguirre, L.M. (2009). *Mecánica básica Fuerza y Movimiento*. Buenos Aires, Argentina. Recuperado de:  
<http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001845.pdf>
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de la investigación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele*. Sevilla: Alfar. México.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). Valencia: Univ. de Valencia.
- Jaramillo, C. M., & Esteban, P. V. (2006). *Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele*. Revista Educación y pedagogía, 18, 109-118.
- Jurado, F. y Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. (tesis de maestría). Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.
- Kelle, U. (2010). The development of categories: Different approaches in grounded theory. *The Sage handbook of grounded theory*, 2, 191-213.
- Machaba, F. M. (2016). The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of Grade 10 learners. *Pythagoras*, 37(1), 1-11.

- Manotas, M., & Rojas, C. (2008). *Conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres alumnos universitarios*. Zona próxima (9). Revista del Instituto de Estudios en Educación. Universidad del Norte.
- Martínez, G (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(1), 35-62.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión de la matemática y la Teoría APOE. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 6(3): 221-278
- Méndez, D. y Vargas, L. (2013). *Comprensión de información presentada en tablas y gráficas estadísticas desde la EpC*. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín- Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (2015). *Guía de enseñanza para docentes de primaria*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de:  
[https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias del área de matemáticas*. Bogotá. Colombia. Recuperado de:  
[https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021\\_recurso\\_1.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf).
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje del área de matemáticas*. Colombia. Recuperado de: <https://es.slideshare.net/sbmalambo/dba-derechos-bsicos-de-aprendizaje-matemticas>.
- Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática*. Recuperado de:  
<http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf>.
- Pastor, J. y Babini, J (1985) Historia de las matemáticas, Volumen 2. *Del renacimiento a la actualidad*. Editorial gedisa. <https://es.calameo.com/read/0024347008b1bd318ac9e>.
- Saldarriaga, P. Bravo, G. Loor, M. (2016) La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. Ciencias sociales y política. *Revista*

- científica dominio de la ciencia*, (2), pp. 127-137. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5802932>
- Sáenz, E. (1994). *Apuntes para el curso: Historia de las matemáticas*. Monterrey, México.
- Salkind, N. J. (1999). *Métodos de investigación*. Pearson Educación.  
<https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=3uIW0vVD63wC&oi=fnd&pg=PR19&dq=Salkind,+N.+J.+M%C3%A9todos+de+investigaci%C3%B3n.+Pearson+Educa+ci%C3%B3n,+1999.>
- Samper, C., Leguizamón, C., Camargo, L. (2002). La construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría. *Revista Ema*, 7(3), 293-309.
- Selmer, S., Valentine, K., Luna, M., Rummel, S., & Rye, J. (2016). *How Can We Best Use Our School Garden Space? Exploring the Concepts of Area and Perimeter in an Authentic Learning Context*. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 21(4), 3-10.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudios de caso*. Madrid: Morata, S.L.
- Stone, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión*. Paidós, Buenos Aires
- Vasco, E & Bedoya, J. (2005). *Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases del modelo de van Hiele*. Tesis de maestría publicada, Universidad de Antioquia, Colombia.
- Venegas, M. (2015). *Niveles de razonamiento geométrico de van Hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con alumnos de 13 a 16 años en Cantabria* (tesis de maestría). Universidad de Cantabria, España.