UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

CONTRIBUCIONES DE LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA AL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE OBJETOS MATEMÁTICOS EN ESTUDIANTES DE 5°

Diana Cristina Arcila Gómez

Kelly Melissa Garcés Muñoz

Jesús David Ochoa Castañeda

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2019

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
COMITÉ DE PRÁCTICAS PEDAGÓGICAS

Acta de Aprobación de Trabajo de Grado - Pregrado

En la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores **Nombre del asesor y Evaluador**, en calidad de Jurados del Trabajo de Grado: ***Contribuciones de las investigaciones matemáticas en el aula al aprendizaje significativo de objetos matemáticos en estudiantes de 5°***, presentado por los estudiantes **Diana Cristina Arcila Gómez, Kelly Melissa Garcés Muñoz & Jesús David Ochoa Castañeda** del programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, quienes realizaron una presentación pública de su Trabajo de grado debidamente aprobado (artículo 25 del Acuerdo 284 de 2012). Una vez terminado el proceso de evaluación y socialización del trabajo de grado se firmó el acta con la calificación de **APROBADO**, por unanimidad.

Medellín, 11 de junio de 2019

Luz Hilduara Velázquez
Jurado

Astrid Elena Cano Zapata
Jurado

Gilberto de Jesús Obando
Coordinador de Práctica Programa Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Contribuciones de la Investigaciones Matemáticas en el Aula al aprendizaje significativo de objetos matemáticos en estudiantes de 5°

Diana Cristina Arcila Gómez
Kelly Melissa Garcés Muñoz
Jesús David Ochoa Castañeda

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Asesora:
Hilduara Velásquez Echavarría
Magister en Educación Matemática

Línea de Investigación:
Educación Matemática

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Medellín, Colombia
2019

Agradecimientos

A la asesora Hilduara Velásquez, por la valiosa orientación que brindó al trabajo, y por su disposición para prestarnos su ayuda y consejo.

A los niños, quienes con su asistencia voluntaria al semillero y su participación activa, hicieron posible la Práctica Pedagógica.

A la I.E. La Asunción, por ofrecernos el espacio y los materiales necesarios para el desarrollo de la Práctica.

A nuestras familias, quienes fueron pilares materiales y emocionales esenciales para la realización de este trabajo.

A los profesores Astrid Cano y Carlos Gómez quienes nos brindaron una tutoría oportuna para re-direccionar el enfoque dado inicialmente al proyecto.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

El proyecto de investigación se realizó en el marco de la Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. El análisis se guio por la pregunta ¿Cuáles son las contribuciones de la implementación de la estrategia de Investigaciones Matemáticas en el Aula al aprendizaje significativo de objetos matemáticos en los estudiantes de grado 5° de la I.E. La Asunción? La investigación se fundamentó en tres perspectivas teóricas, como enfoque didáctico el Enfoque Socioepistemológico (Cantoral, Montiel y Reyes, 2014 - 2015); como objeto de estudio la estrategia de las Investigaciones Matemáticas en el Aula (Ponte, Cunha y Oliveira 1995; Ponte, 2003 - 2004; Ponte, Brocadro y Oliveira 2006); y por último, el Aprendizaje Significativo (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983; Rodríguez, 2004 - 2008- 2011; Ballester, 2002).

La investigación se desarrolló bajo el enfoque cualitativo, orientada por la metodología de Investigación-Acción-Educativa (Restrepo, 2003- 2004 - 2006), en la cual se busca develar las teorías implícitas u operativas que sustentan la práctica y propiciar el diseño de alternativas didácticas y de formación, que conduzcan a la transformación de la práctica. Se tomó una macro unidad de análisis enfocada en el estudio del desarrollo de las cuatro fases que, según Ponte, Brocadro y Oliveira (2006) constituyen las IMA, y dentro de ésta se identificaron y se analizan dos sub-unidades; una de ellas relacionada con los procedimientos y la otra con la identificación de los diferentes lenguajes a través de los cuales los estudiantes resuelven situaciones matemáticas.

La intervención en el aula posibilitó la participación de los estudiantes en la re-significación de los objetos matemáticos, culturalmente construidos, y a un mayor entendimiento de las contribuciones y limitaciones de la estrategia de las Investigaciones Matemáticas en el Aula en la enseñanza.

Palabras clave: Investigaciones Matemáticas en el Aula, Aprendizaje Significativo, Procedimientos, Lenguaje, Enfoque Socioepistemológico.

ABSTRACT

The research project was carried out in the framework of the Pedagogical Practice of the Bachelor in Basic Education with Emphasis in Mathematics. The analysis was guided by the question What are the contributions of the implementation of the strategy of Mathematical Investigations in the Classroom to the significant learning of mathematical objects in the students of 5th grade of the E. I La Asunción? The research was based on three theoretical perspectives, as didactic approach, Socio-epistemological Approach (Cantoral, Montiel and Reyes, 2014 - 2015); as an object of study the strategy of Mathematical Investigations in the Classroom (Ponte, Cunha and Oliverira, 1995; Ponte, 2003 - 2004; Ponte, Brocadro and Oliveira, 2006); and finally the Significant Learning (Ausubel, Novak and Hanesian, 1983; Rodríguez, 2004 – 2008 - 2011; Ballester 2002).

The research was developed under the qualitative approach, orchestrated by the Educational Research-Action methodology (Restrepo, 2003 - 2004 - 2006), which seeks to reveal the implicit or operative theories that underpin the practice and promote the design of didactic alternatives and formation, that lead to the transformation of the practice. A macro analysis unit was taken, focused on the study of the development of the four phases that, according to Ponte, Brocadro and Oliveira (2006) constitute the IMA, and within this, two sub-units were identified and analyzed; one of them related to the procedures and the other with the identification of the different languages through which the students solve mathematical situations.

The intervention in the classroom allowed the participation of students in the re-signification of mathematical objects, culturally constructed, and to a greater understanding of the contributions and limitations of the strategy of Mathematical Investigations in the Classroom in teaching.

Keywords: Mathematical Investigations in the Classroom, Significant Learning, Socio-epistemological Approach, Procedures, Languages.

1. GENERALIDADES

1.1. Descripción del contexto

La Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, se desarrolló en la Institución Educativa La Asunción (IELA), la cual se encuentra ubicada en el barrio Santa Cruz, comuna 2 al nororiente del municipio de Medellín. En este sector se presentan diferentes problemáticas como violencia intrafamiliar y social, familias con escasos recursos económicos, venta y consumo de sustancias alucinógenas, presencia de grupos ilegales, entre otros.

La Institución Educativa La Asunción es de carácter oficial; cuenta con los niveles de educación Preescolar, Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Académica con un total de 782 estudiantes, que se encuentran distribuidos en dos jornadas: mañana y tarde. El personal estudiantil es mixto en la tarde, jornada en la que están los grados de Preescolar con 2 grupos y Básica Primaria con 10 grupos, y femenino en la mañana para los grados de Básica Secundaria y Media Académica con 10 grupos, cada grupo con un promedio de 38 estudiantes. La Institución dispone de una estructura física adecuada para el desarrollo de las actividades: doce aulas de clase, un auditorio, una biblioteca, una cafetería, una sala de cómputo, una cancha, un patio y unidades sanitarias en todos los niveles.

Los estudiantes pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3, la mayoría de ellos habitan en los barrios cercanos a la Institución; las familias, en su mayoría, están dedicadas al empleo informal y dependen económicamente de las madres, quienes por ser cabeza de hogar deben trabajar para llevar el sustento a sus hijos, cuyo cuidado y acompañamiento queda a cargo de las abuelas u otros familiares.

La Institución se propone como misión[1], la formación integral de los estudiantes, a través de una educación centrada en el ejercicio de los valores (solidaridad, respeto, honestidad y servicio),

[1] Tomado del PEI de la IELA

el respeto por la diversidad, y el acceso al conocimiento y a la tecnología, con un marcado interés por que los estudiantes sean autónomos en la construcción del proyecto de vida, lo que les permitirá enfrentar los retos, cada vez más exigentes, que les presenta la sociedad en el ámbito académico y personal.

La Institución tiene influencia de la religión católica, dado que su fundación se debe a la labor de la comunidad misionera de Jesús y María desde 1964. Con el paso de los años fue cambiando tanto la estructura del plantel como los programas ofrecidos; estuvo vinculada al colegio Ciro Mendía hasta el año 2014, cuando pasó a ser Institución Educativa oficial adscrita al municipio de Medellín.

La Institución adopta un modelo pedagógico acorde con su perspectiva teleológica, fundamentado en el Humanismo, que se basa en el reconocimiento del valor de cada ser humano en su individualidad y autonomía, fomentando una convivencia entre iguales, basada en la participación y el diálogo incluyente, para que, partiendo de estos principios, se logre una formación integral de los niños, niñas y jóvenes que atiende la Institución.

En la Institución, cada aula de clase está dotada con un computador de escritorio, con acceso a internet, televisor, DVD, sonido y algunos materiales requeridos para el desarrollo de las clases. Para las clases de matemáticas se cuenta con algunos materiales didácticos, reglas de tablero, tortas fraccionarias, dominó tradicional y geométrico, tangram, geoplano, bloques lógicos, bloques de madera, regletas, entre otros. Estos materiales se utilizan en la clase cuando los temas a explicar lo requieran y permitan, especialmente cuando se va introducir un tema, con el objetivo de que haya una mayor comprensión y facilite el paso posterior a un pensamiento más abstracto.

En cuanto al Plan de Área de matemáticas, tiene como base los Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje, siguiendo las directrices del MEN; además, concibe la enseñanza de los conceptos y competencias matemáticas[2] como un medio que

[2] Tomado del Plan de Área de Matemáticas de la IELA

apunta a la formación de un estudiante crítico, quien mediante el razonamiento lógico y analítico resuelva problemas del mundo real, y de esta manera logre una comprensión básica de las dinámicas económicas y sociales, y de los avances científicos y tecnológicos, para una participación activa en su entorno.

En la Malla curricular, el año lectivo se divide en 3 períodos: en cada uno de ellos se plantea una situación hipotética central, a partir de la cual se generan preguntas orientadoras que guían la dinámica de trabajo y el desarrollo de las temáticas, enfocados en los pensamientos numérico, geométrico y aleatorio, tomando como indicadores de desempeño la dimensión Cognitiva (saber conocer), Procedimental (saber hacer) y actitudinal (saber ser).

En el plan para el grado 5°, se enmarca el desarrollo de competencias generales consistentes en la formulación, tratamiento y resolución de problemas; la modelación, la comunicación, el razonamiento; y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

La evaluación se concibe como un proceso que permite evidenciar la evolución de los estudiantes en cuanto a los aprendizajes y destrezas alcanzadas, teniendo en cuenta los indicadores de desempeño cognitivo, procedimental y actitudinal. La evaluación se constituye en una herramienta para dar cuenta de la efectividad de las estrategias utilizadas, o de sus falencias, de manera que se puedan hacer adecuaciones al currículo.

La intensidad horaria del área de matemáticas es de 5 horas semanales en la Básica Primaria y secundaria, y 4 horas en la media académica. En las cuales se deben desarrollar las competencias específicas del área en cada uno de los cinco pensamientos matemáticos.

En la fase I de la Práctica Pedagógica, como parte del diagnóstico, se analizaron los resultados obtenidos en las Pruebas Saber en el área de matemáticas del grado 5° de los últimos 3 años (Ilustración 1).

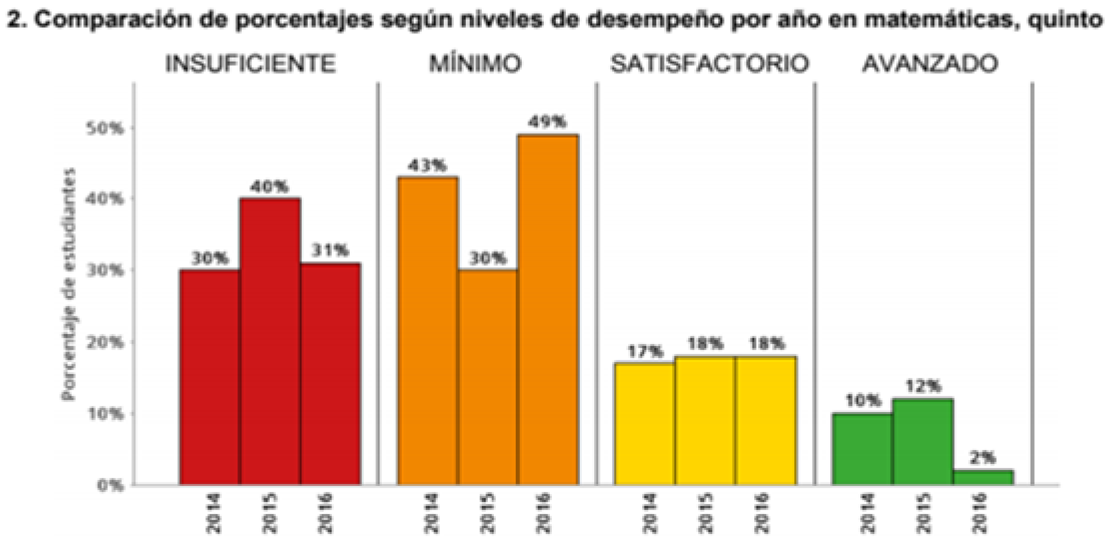


Ilustración 1. Reporte histórico de comparación entre los años 2014-2015-2016 (ICFES)

En los resultados se observa que en los 3 últimos años predominan los desempeños Insuficiente y Mínimo, por encima del Satisfactorio y el Avanzado; estos últimos no alcanzan a representar al 20% de la población estudiantil de cada año; mientras que más del 70% de los estudiantes de grado 5° se ubican en los niveles de desempeño más bajo (insuficiente y mínimo), lo cual permite evidenciar dificultades reiteradas en el desarrollo del pensamiento matemático. Estos resultados[3] derivan de falencias en la competencia Comunicativa que se manifiestan en dificultades para expresar, identificar, reconocer, representar, clasificar, interpretar y describir procesos y objetos matemáticos; en la competencia de Razonamiento, en la que presentan problemas para justificar, inferir, comparar y argumentar propiedades, objetos y procedimientos matemáticos; y en la competencia de Resolución, cuyos resultados reflejan carencias que se evidencian en la falta de resolución, formulación y relación entre situaciones cotidianas y las matemáticas.

El proyecto de investigación de la Práctica Pedagógica se inicia en el grado 4° de primaria y se continuará el proceso en el grado 5° para el 2018. Las edades de los estudiantes de este grado oscilan entre 9 y 10 años. En los dos grupos del grado 4°, el 71% son niñas y el 29% son niños.

[3] Tomado de los resultados día E

Los estudiantes se muestran interesados por el área de matemáticas, cumplen con sus responsabilidades, son participativos, desarrollan las actividades con entusiasmo; son respetuosos, sociables y manejan buena relación con la profesora, lo cual refleja un ambiente tranquilo y armonioso.

En cuanto al desempeño de los estudiantes, el 20% de ellos obtienen un rendimiento bajo; esto se debe principalmente al poco dominio que tienen de las operaciones básicas, la falta de comprensión lectora que dificulta la comprensión y solución de situaciones problema, lo cual se constituye en un limitante para el avance en el aprendizaje de las matemáticas.

1.2. Planteamiento del problema

La enseñanza de las matemáticas, según los Lineamientos Curriculares y los Estándares (MEN, 1998, 2006), tiene como objetivo lograr que el estudiante desarrolle las competencias básicas que le permitan el planteamiento y resolución de problemas en su vida cotidiana. En función de dicho objetivo, la metodología de enseñanza debe apuntar a un aprendizaje significativo, que "por definición, debe ser transferible a nuevas situaciones y contextos, pero de forma autónoma y productiva por parte de quien aprende" (Rodríguez, 2011, p.40), procurando que el estudiante comprenda los procesos y la lógica subyacente a los objetos matemáticos y los incorpore en su pensamiento para el desarrollo de las competencias esperadas. En este sentido, el aprendizaje significativo, según Rodríguez (2008), se efectúa cuando se establece una relación entre un nuevo conocimiento o información y la estructura cognitiva de la persona que aprende, que, de no darse, derivaría en un aprendizaje mecánico, entendido como:

> (…) proceso en el que no se da interacción entre el nuevo contenido y la estructura cognitiva del aprendiz o que, de haberla, es arbitraria y literal. Cuando esto ocurre, bien porque no existan elementos de anclaje claros y relevantes o bien porque no haya predisposición para aprender significativamente, el resultado final de ese proceso es un aprendizaje repetitivo carente de significado (Rodríguez, 2011, p.33).

Por lo tanto, un aprendizaje mecánico obstaculiza la comprensión de significados de nuevos objetos matemáticos, debido a que al estudiante se le dificulta establecer relación entre la nueva información y los objetos que ya tienen significado para él.

Con el propósito de evaluar el aprendizaje significativo logrado por los estudiantes de 4° grado de la IELA, acerca del plano cartesiano y de las fracciones -objetos matemáticos que ya habían sido abordados en clases previas- se realizó una prueba diagnóstica; la primera situación consistía en tomar porciones de cartulina que medían un pliego o fracciones de este, y dividirlas, en medios, cuartos u octavos, de manera tal que quedaran 38 porciones iguales, que corresponderían con la cantidad de estudiantes del aula.

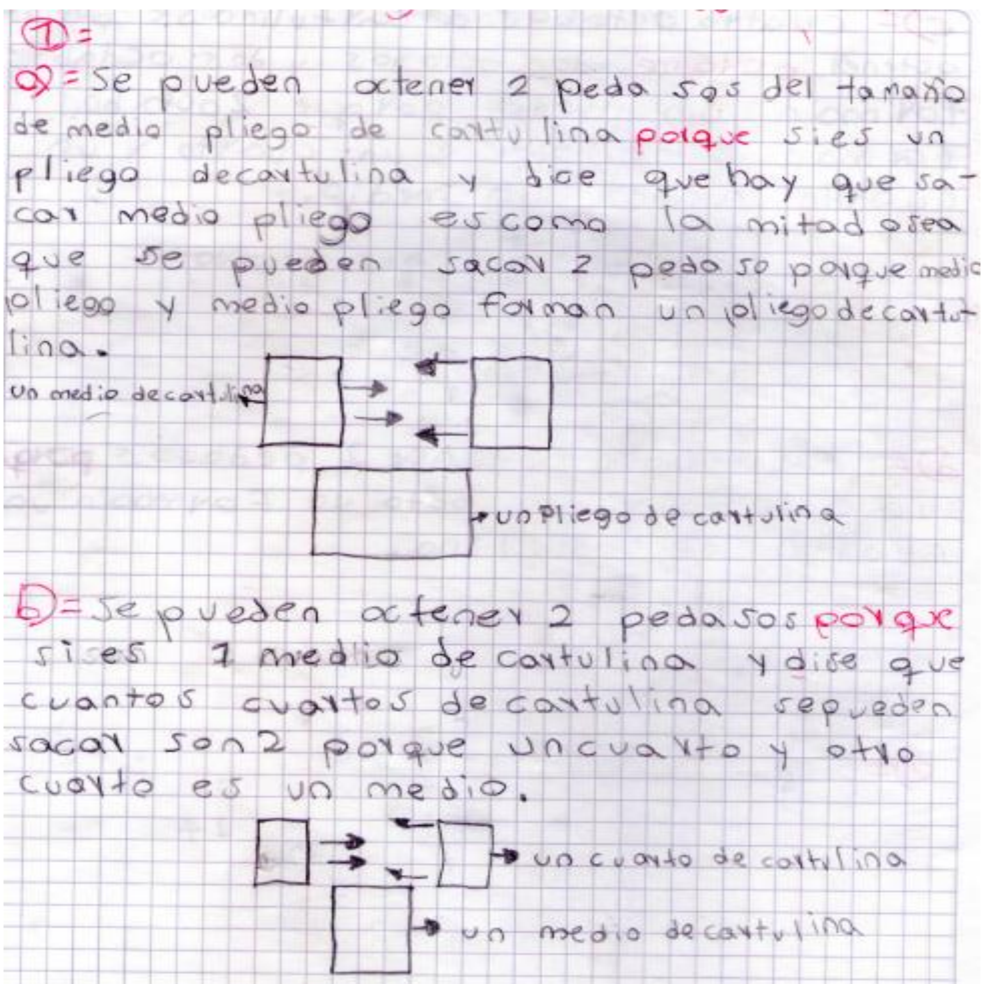


Ilustración 2. Representación gráfica 1 de repartición de la cartulina

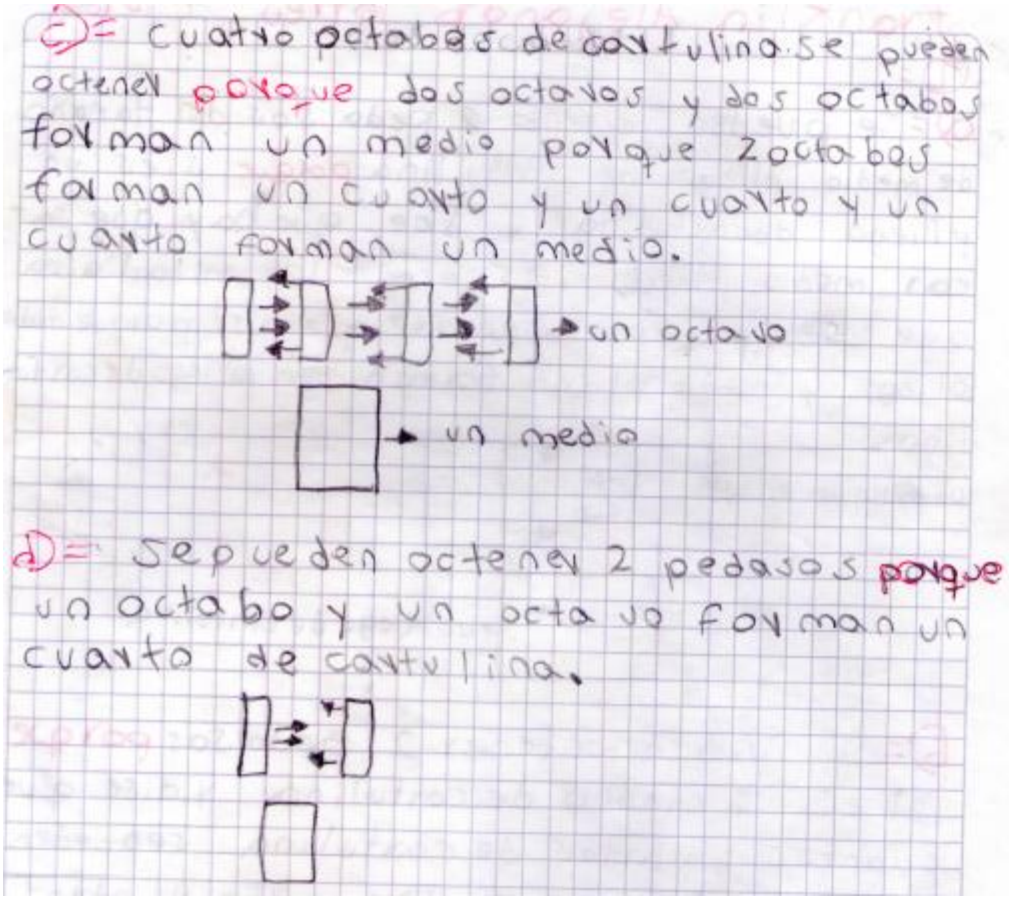


Ilustración 3. Representación gráfica 2 de repartición de la cartulina

Para resolver la situación propuesta, la mayoría de estudiantes realizó dibujos con los que representaron las divisiones de la cartulina y explicaron los procesos seguidos a través del lenguaje natural. Sin embargo, se identificaron dificultades en la interpretación del significado de la fracción como parte-todo, puesto que las diferentes fracciones de un pliego de cartulina no se tomaron como parte de una unidad -en este caso la unidad era el pliego- sino como medidas estáticas, definidas convencionalmente y sin relación con una unidad. Además, algunos estudiantes utilizaron una hoja de papel como representación de la cartulina para obtener las divisiones requeridas en el planteamiento y encontrar la solución; aunque había una comprensión de la situación y tenían conocimiento del objeto matemático que requería la misma (evidenciado en la solución y en las conversaciones que se tuvieron con ellos), las representaciones numéricas convencionales de las fracciones y las operaciones entre ellas no fueron utilizadas por los estudiantes para resolver el problema; es decir, prescindieron de los procedimientos enseñados en el aula y prefirieron, en su lugar, emplear estrategias propias que tenían sentido para ellos.

En la segunda situación propuesta en la prueba diagnóstica se pedía a los estudiantes que ubicaran en un plano cartesiano algunos lugares específicos siguiendo algunas indicaciones acerca de las medidas de las distancias que los separaban de un punto de referencia; se estableció que la unidad de medida para definir las distancias era de 3 cuadros de la hoja de cuaderno. Esta actividad no fue culminada completamente por ninguno de los grupos.

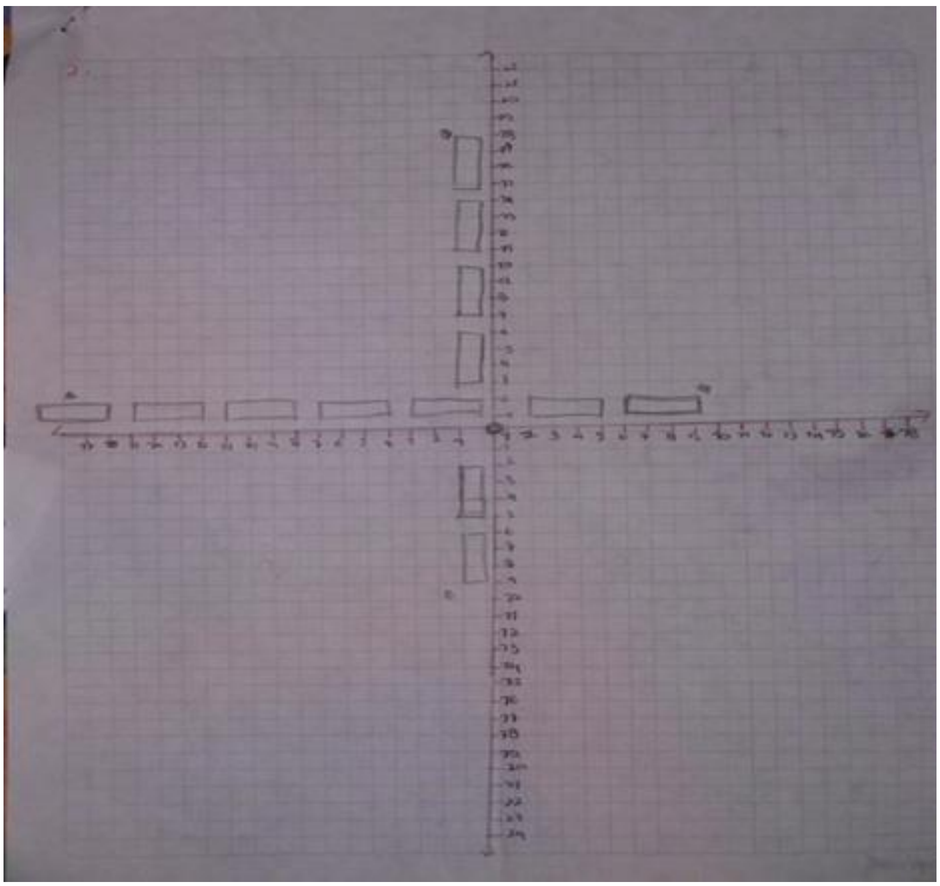


Ilustración 4. Plano cartesiano para representar la situación del repartidor

Se observó que los estudiantes en el plano cartesiano utilizaron la unidad de medida convencional (una unidad por cada cuadro), ignoraron la indicación de tres cuadros como unidad de medida, y como consecuencia los lugares no se situaron correctamente. Aquí se evidencia una comprensión estática del plano, con unas dimensiones preestablecidas como si fueran características esenciales de éste. Esto posiblemente se debe a que al enseñarse mediante ejemplos un modelo del plano cartesiano estándar con una unidad de medida estática, los estudiantes concluyen erróneamente que ésta debe permanecer invariable independientemente de la situación, por lo que se restringe la posibilidad de encontrar otras características esenciales que se conecten con el conocimiento ya existente de manera que se propicie un aprendizaje significativo. Esta manera de interpretar el objeto matemático, dificultó su utilización para la resolución de las situaciones propuestas y no permitió a los estudiantes cumplir con el objetivo de la actividad.

En general la actividad diagnóstica permitió identificar dificultades derivadas de una comprensión superficial de conceptos y procedimientos (en particular, de las fracciones y del plano cartesiano), esto puede asociarse a una metodología de enseñanza que le da prioridad al aprendizaje del algoritmo favoreciendo un aprendizaje mecánico sobre un aprendizaje significativo. Sin embargo, para que el concepto cobre sentido para el estudiante, se trascienda el aprendizaje mecánico y su utilidad sea evidente, es necesario que éste se sumerja en situaciones que le permitan la exploración de dicho concepto, para la construcción de su significado. En esta línea, Godino, Batanero y Font (2003) afirman “lo que los estudiantes aprenden -sobre conceptos y procedimientos particulares así como su capacidad de razonamiento- depende de cómo se implican en la actividad en clase de matemáticas” (p.78).

Por otro lado, considerando que la estrategia de las Investigaciones Matemáticas en el Aula incita a que el estudiante trabaje de manera colaborativa, se involucre y tenga una participación activa en la clase, dado que apela a “(...) la imaginación y a la creatividad, requiriendo capacidades que se sitúan mucho más allá del cálculo y la memorización de definiciones y procedimientos” (Ponte, 2003, p.14), este trabajo de investigación está enfocado en indagar: ¿Cuáles son las contribuciones de la implementación de la estrategia de Investigaciones Matemáticas en el Aula al aprendizaje significativo de objetos matemáticos en los estudiantes de grado 5° de la I.E La Asunción?

1.3. Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Analizar las contribuciones de la estrategia de Investigaciones Matemáticas en el Aula al aprendizaje significativo de objetos matemáticos en estudiantes de grado 5° de la I.E La Asunción.

1.3.2 Objetivos Específicos

Identificar la manera en que el desarrollo de las fases de las Investigaciones Matemáticas en el Aula y el uso del lenguaje y procedimientos en las tareas propuestas, propician el aprendizaje significativo en estudiantes de 5° de la I.E La Asunción.

Identificar los logros y obstáculos de la implementación de la estrategia de las Investigaciones Matemáticas en el Aula con estudiantes de 5° de la I.E La Asunción.

1.4. Justificación

Las diferentes orientaciones del MEN han apostado por el cambio de un enfoque basado en los contenidos a un enfoque en el desarrollo de competencias: se incorpora allí una visión pragmática e instrumental del conocimiento matemático (MEN, 2006), según la cual, dicho conocimiento no se busca como fin en sí mismo, sino como un medio para desarrollar un tipo de pensamiento lógico y matemático. Para que el desarrollo de este tipo de pensamiento se lleve a cabo, en concordancia con el enfoque en competencias al que aluden los Estándares Curriculares, es menester implementar un cambio en la manera en la que tradicionalmente se ha enseñado matemáticas, con el fin de que el estudiante tenga una experiencia significativa. Al respecto, los Estándares Curriculares afirman:

> (...) se hace necesario pasar de una enseñanza orientada sólo hacia el logro de objetivos específicos relacionados con los contenidos del área y hacia la retención de dichos contenidos, a una enseñanza que se oriente a apoyar a los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas (MEN, 2006, p.48).

En particular, las competencias matemáticas están relacionadas con "el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo" (MEN, 2006, p.50) y se desarrollan a través de los cinco procesos matemáticos, a saber: Formulación, tratamiento y resolución de problemas; Modelación, Comunicación; Razonamiento, y Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

La formulación, tratamiento y resolución de problemas, posibilita el desarrollo de competencias porque permite la construcción del conocimiento matemático, gracias a que:

> Provoca procesos de investigación que subyacen al razonamiento matemático; nos estamos refiriendo precisamente a los procesos del pensamiento matemático: la manipulación (exploración de ejemplos, casos particulares); la formulación de conjeturas (núcleo del razonamiento matemático, proponer sistemáticamente afirmaciones que parecen ser razonables, someterlas a prueba y estructurar argumentos sobre su validez); la generalización (descubrir una ley y reflexionar sistemáticamente sobre ella); la argumentación (explicar el porqué, estructurar argumentos para sustentar generalización, someter a prueba, explorar nuevos caminos) (MEN, 1998, p.53).

Los problemas a los que se hace referencia los Lineamientos curriculares deben ser estimulantes para el estudiante, tanto porque sean objeto de su interés como porque se constituyen en un reto cognitivo para él, que lo invite a la elaboración de conjeturas y a la exploración. Al respecto, los Estándares (MEN, 2006) proponen, para la Formulación, tratamiento y resolución de problemas que:

> Es importante abordar problemas abiertos donde sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna. También es muy productivo experimentar con problemas a los cuales les sobre o les falte información, o con enunciados narrativos o incompletos, para los que los estudiantes mismos tengan que formular las preguntas (p. 52).

De esto se deduce que el proceso de formulación, tratamiento, y resolución de problemas trasciende la aplicación de fórmulas previamente elaboradas, para involucrar activamente al estudiante en el desarrollo de las mismas, procurando que experimente por sí mismo, de acuerdo a sus capacidades y a los acontecimientos de su diario vivir, el camino que en el pasado siguieron quienes las construyeron. Este camino, que incluye los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático, es definido como práctica social y tomado como objeto de estudio por la Teoría Socioepistemológica, y hace referencia específicamente a aquélla práctica que antecede a los procesos de producción o construcción de conceptos, desarrollo del saber y en consecuencia, los explica (Cantoral, Farfán y Lezama, 2006).

En este sentido (Cantoral, Montiel y Reyes, 2015), propone el rediseño de la enseñanza, que deje en segundo plano al objeto matemático, y se centre en las prácticas sociales circundantes, que lo originan y lo caracterizan, para crear situaciones de aprendizaje que propicien el acercamiento a las prácticas sociales, donde la construcción del objeto matemático juegue un papel fundamental.

Con relación a esto, la estrategia de las Investigaciones Matemáticas en el Aula se constituyen en una alternativa que puede responder a estos requerimientos, la cual, de acuerdo con Pérez y Gómez (2009), consiste en el planteamiento de situaciones, que generan una problemática en relación a un concepto (u objeto) matemático, que no tiene respuesta inmediata; dicha problemática motiva la realización de búsquedas que conducirán a la formulación de diversas conjeturas que deben ser probadas, y finalmente demostradas. Estas situaciones “demandan una búsqueda exhaustiva por parte de los participantes” (Pérez y Gómez, 2009, p.34), permitiendo, según Ponte, Cunha y Oliveira (1995) que los estudiantes se sumerjan en una experiencia matemática que propicie el aprendizaje significativo, y adquieran así una visión más completa de las matemáticas que potencie el desarrollo de un pensamiento holístico, que posibilite la relación de varios tópicos.

De este modo, el aprendizaje significativo permite que el conocimiento de los estudiantes sea moldeado por las situaciones que encuentran y que paulatinamente dominan; dicho conocimiento está organizado en campos conceptuales que requieren dominio de varios conceptos de naturaleza distinta, los cuales se convierten en saberes previos que, posteriormente, quedarán más elaborados al ser usados en situaciones que darán sentido a esos conceptos (Rodríguez, 2011). En esa misma línea, se resalta el papel que tiene el aprendizaje significativo en el proceso educativo, no solo porque posibilita la constitución de significados de una manera clara y estable, sino también porque permite adquirir y retener una gran cantidad de información; al respecto Ausubel, Novak y Hanesian (1983) afirman "el aprendizaje significativo es muy importante en el proceso educativo porque es el mecanismo humano por excelencia para adquirir y almacenar la vasta cantidad de ideas e información representadas por cualquier campo del conocimiento" (p.8).

De acuerdo con Rodríguez (2011) el aprendizaje significativo requiere del interés por parte del estudiante con relación a lo que aprende, e implica un desafío individual y colectivo en la construcción de posibles significados y usos en torno a sus aprendizajes; en correspondencia con ello, es necesario pensar en una alternativa que trascienda la organización lineal y simplista del contenido escolar, y propicie la aprehensión y conceptualización de saberes.

La estrategia de Investigaciones Matemáticas en el Aula, según Ponte, Brocadro y Oliveira (2006), "puede ayudar a llevar al salón de clases el espíritu de la actividad matemática genuina, constituyendo por eso una metáfora educativa" (p.23). Esto se hace posible en la medida en que la matemática adquiere sentido y finalidad para el estudiante que se acerca a ella por descubrimiento. Al respecto, Pérez y Gómez (2009) afirman:

> La actividad investigativa puede lograr que el estudiante recree el trabajo de un matemático en el sentido de descubrir y legitimar por su propia cuenta las ideas matemáticas que en una clase convencional solo vería como teoría pasajera (p.38).

De la misma manera, permite "(...) romper con el estrecho espacio formativo que deja la transmisión mecánica y verbalista de los conocimientos para un alumnado que necesita comprender y dar respuestas a los interrogantes que día a día se le van planteando" (Pozuelos, 2001, p. 1), por lo que se constituye en una estrategia que potencia la participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento, contribuyendo así a resolver las dificultades de aprendizaje observadas en el aula, y a dar cumplimiento a los requerimientos de los Lineamientos y Estándares Curriculares.

2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico en el que se fundamenta el trabajo de grado tiene como base las siguientes conceptualizaciones: el Enfoque Socioepistemológico (Cantoral, Montiel y Reyes, 2014, 2015), el cual fundamenta la enseñanza de las matemáticas descentrada del objeto matemático y enfocada en la práctica social y cotidiana que lo produce; la estrategia de las Investigaciones Matemáticas en el Aula (Ponte, Cunha y Oliveira, 1995; Ponte, 2003, 2004; Ponte, Brocadro y Oliveira, 2006), que se constituirá en el objeto de estudio, con el fin de caracterizar y evaluar su pertinencia para propiciar el aprendizaje del estudiante; el lenguaje y los procedimientos (Cortez, Vega y Pariona, 2009; Gigosos, 2017; Godino, Batanero y Font, 2009; MEN, 2006; Mora, 2012; Rosales, 1984) como algunos de los componentes a analizar en el proceso de aprendizaje mediado por la estrategia de las Investigaciones Matemáticas en el Aula; por último el Aprendizaje Significativo (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983; Rodríguez 2004, 2008, 2011, y Ballester 2002) con el fin identificar aspectos inherentes a la construcción de significados de manera individual o colectiva asociados a objetos matemáticos.

En la Educación Matemática el enfoque Socioepistemológico “se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional” (Cantoral *et al.*, 2014, p. 93) considerando aspectos tales como el contexto y los procesos cognitivos y de institucionalización del saber. Este saber, ya aceptado socialmente e institucionalizado, cobra protagonismo en la teoría del Aprendizaje Significativo, dado que entra a interactuar con la estructura cognitiva del sujeto que aprende (Rodríguez, 2008); particularmente, en este proyecto, dicho proceso ocurre a través de la estrategia de las Investigaciones Matemáticas en el Aula, cuando el estudiante recrea de manera poco rigurosa la actividad investigativa que realiza un matemático, tanto en la formulación de preguntas y conjeturas, y en la realización de pruebas y refutaciones, como en la presentación de resultados y discusión de argumentos (Ponte *et al.*, 2006) para llegar al constructo y significación de un objeto matemático. Dicha significación en torno al objeto puede ampliarse y transformarse en la medida en que comunique sus ideas y se nutra de otras perspectivas durante la interacción y discusión con sus compañeros.

2.1. Enfoque Socioepistemológico

La educación matemática tradicional se ha caracterizado por el distanciamiento entre lo que se enseña en la escuela y las dinámicas sociales. De acuerdo con Cantoral *et al.*(2015) el *discurso matemático escolar* se centra en el tratamiento secuencial y programado de conceptos introducidos de manera formal y algorítmica, admitiendo implícitamente que el sentido de los objetos matemáticos y sus procedimientos se extraen desde y para la clase de matemáticas; según los mismos autores, este discurso está instaurado por tendencias que:

> (…) descuidan la especificidad del saber puesto en juego y suelen no atender debidamente a los escenarios de su construcción; estas tendencias han descuidado un contacto real con el contenido de las Matemáticas y con su epistemología, y sobre todo, se alejan del papel que las Matemáticas juegan en los contextos sociales y culturales del aprendiz (p.6).

Con el fin de tener en cuenta los escenarios de construcción del saber; el enfoque Socioepistemológico surge como alternativa de mejoramiento, el cual propone dar sentido y significado a aquello que origina el conocimiento bajo una perspectiva social y cultural, preguntándose por el qué, el cómo, el cuándo y el porqué del conocimiento matemático (Cantoral *et al.*, 2015); para esto, propone la *descentración del objeto matemático*, que consiste en un cambio de foco en el que se dejan de "analizar exclusivamente los conceptos matemáticos para incluir en su estudio las prácticas que acompañan su producción" (Cantoral *et al.*, 2015, p.10), de manera que se propicie su mejor entendimiento; de aquí se desprende el hecho de que "el problema educativo no es el de la constitución de objetos abstractos, sino el de **su significación compartida mediante el uso culturalmente situado**[4]" (Cantoral *et al.*, 2014, p. 93), lo que muestra a la matemática como un saber que no está aislado de la sociedad.

La Socioepistemología hace un aporte fundamental a la matemática educativa en el sentido de que modela las dinámicas de la construcción social del conocimiento matemático que derivan en un saber o "conocimiento puesto en uso". Esta noción de uso contrasta con la noción de

[4] Negrilla del autor

adquisición por aprendizaje y aceptarla implica el cambio de un conocimiento estático al estudio del conocimiento en uso, es decir, al estudio del saber (Cantoral *et al.*, 2014). Lo anterior permite concebir el objeto matemático más allá del aula, es decir, pensarlo a partir de su uso en escenarios sociales y culturales; como lo mencionan, Cantoral *et al.* (2015) se pasa del "examen de la aprehensión del objeto en sí (el conocimiento matemático en situación áulica) al análisis en profundidad del uso social de dicho objeto (el saber situado en escenarios socioculturales), esto es el estudio del objeto para sí" (p. 8).

Con ello se problematiza el saber matemático situándolo en el entorno del aprendiz, es decir, a partir de su cultura, sus conocimientos, sus saberes, su historia, su presente y la propia historia que posibilitó el conocimiento matemático, lo cual exige el rediseño del discurso Matemático Escolar con base en prácticas sociales, de manera que atienda a la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento a nivel cognitivo, didáctico, epistemológico y social (Cantoral *et al.*, 2015).

La práctica social, en la Teoría Socioepistemológica, es un emergente teórico que aparece al incorporar el componente social al sistema "epistemológico-didáctico-cognitivo", tornándose en noción fundamental y objeto de estudio de la teoría misma (Cantoral *et al.*, 2015). Bajo esta perspectiva, la práctica social se percibe, según Cantoral *et al.*, (2014), como la base del conocimiento, dado que se convierte en la generadora y orientadora de la construcción social del conocimiento matemático, tanto así, que se afirma que dicha práctica "no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen, aun sin adquirir conciencia de sus acciones" (Cantoral *et al.*, 2014, pp. 98-99); de aquí se deduce que se refieren a la práctica social que construye, difunde e institucionaliza el saber, previa al individuo que aprende, constituyéndose en un marco determinante de sus acciones, lo cual define uno de los cuatro principios fundamentales de la Teoría Socioepistemológica: la normatividad de las prácticas sociales. De esta se derivan otros tres principios, a saber, la racionalidad contextualizada, entendiendo el contexto como factor determinante en la construcción conocimiento, le da un significado y lo pone en uso; el relativismo epistemológico, que se refiere a la validez relativa del conocimiento, teniendo en cuenta el grupo del que emergió; y la resignificación progresiva, que se da a causa de la evolución de la vida del individuo o grupo y su interacción con los diversos contextos y objetos presentes en ellos, lo cual posibilita en un principio, la significación del objeto, que luego se convierte en punto de partida para la etapa de resignificación, en la que se enriquecen los saberes sobre el objeto de estudio (Cantoral *et al.*, 2015).

Los anteriores principios sustentan la idea fundamental de la Socioepistemología, según la cual, el significado del objeto matemático se deriva del uso situado que se le dé a través de la actividad práctica en la que los sujetos dotan de significación a los objetos formales (Cantoral *et al.*, 2015).

2.2. Investigaciones Matemáticas en el Aula

Las Investigaciones Matemáticas en el Aula se constituyen en una estrategia de enseñanza que hace una adaptación de la actividad realizada en el campo de investigación matemática al ambiente escolar, fomentando la participación activa del estudiante en su proceso de aprendizaje (Ponte, 2004).

Ponte (2003) cuestiona la separación entre investigar y aprender, en la medida en que “quien investiga está en busca de aprender, y quien aprende puede tener mucho interés en investigar” (p.1). Por esta razón, se pretende aplicar la forma de investigación matemática en los procesos de aprendizaje, buscando que el alumno actúe “como un matemático, no solo en la formulación de las preguntas y conjeturas y en la realización de pruebas y refutaciones, sino también en la presentación de resultados y en la discusión de argumentos con sus colegas y profesor” (Ponte *et al.*, 2006, p. 23).

La investigación, en los ámbitos académicos y científicos se constituye en una herramienta mediante la cual se soluciona un problema concreto originado en la teoría o en una situación práctica, delimitado a partir de la formulación a un interrogante (Rodríguez y Valldeoriola, 2009) para el cual se aventuran hipótesis, que deberán ser comprobadas o refutadas, en función de una mejor comprensión sobre un objeto determinado, y de la generación de conocimiento nuevo.

Particularmente, la *Investigación en matemáticas* se define en función de objetos matemáticos, esto es, conceptos de naturaleza abstracta, a los que se tiene acceso por medio de una “representación externa o un signo que permita su expresión y su reconocimiento” (Pecharromán, 2013, p.124). Este tipo de investigaciones, en concordancia con las investigaciones en las demás áreas del conocimiento, tienen como propósito la demostración o refutación de conjeturas y la descripción de sus objetos, a través del descubrimiento de las relaciones entre ellos, procurando identificar sus respectivas propiedades (Ponte *et al.*, 2006).

En los últimos años la *Investigación en el aula* se ha perfilado como una alternativa metodológica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje que busca trascender la “transmisión mecánica y verbalista de conocimientos” para la formación de un alumnado crítico, que dé respuestas a “los interrogantes que día a día se le van planteando” (Pozuelos, 2001, p.113) y sea capaz de comprobar tanto las afirmaciones que hace el profesor, como las conjeturas que realicen los compañeros y las propuestas por él.

El mismo autor enuncia 4 tipos de *Investigación en el Aula*, si bien reconoce que cada uno de ellos tiene sus variantes. Estos son: “1) La aplicación del método científico o experimental: 2) El aprendizaje por descubrimiento y la investigación guiada; 3) La investigación del medio; 4) La investigación de situaciones problemáticas de interés” (Pozuelos, 2001, p. 114).

Según Ponte *et al.* (2006) las IMA se desarrollan básicamente a través de cuatro momentos clave; el primero se centra en el reconocimiento de la situación a investigar y la identificación del problema a resolver, lo cual es “el primer paso de cualquier gran investigación” (p. 16). Esta fase abarca también una exploración preliminar de la situación y la formulación de preguntas con base en las observaciones realizadas y en el problema identificado. En el segundo momento se formulan conjeturas que ofrezcan una posible respuesta o solución a la pregunta, las cuales pueden surgir “por observación directa de los datos, por manipulación de los datos, o por analogía con otras conjeturas” (Ponte *et al.*, 2006, p.33); estas conjeturas son meramente especulativas, aunque no totalmente arbitrarias, pues surgen en el contexto de una situación con determinadas características que se tienen en cuenta. La prueba a estas conjeturas tiene lugar en el tercer momento, que consiste en la verificación de casos particulares, y la posterior rectificación o reemplazo de las mismas, en el caso de que la verificación no sea satisfactoria. Según Ponte *et al.* (2006), "existe alguna tendencia de los alumnos para aceptar las conjeturas después de que las han verificado apenas en un número reducido de casos" (p.33), por lo que en el cuarto momento, se lleva a cabo la argumentación, la demostración y la evaluación del trabajo realizado en el aula. (Ponte *et al.*, 2006).

Sin embargo, a pesar de que las IMA comparten algunas de las características esenciales de las Investigaciones Matemáticas, poseen "sus propios fines, ritmos, procesos, técnicas y mecanismos de regulación" (Pozuelos, 2001, p. 142), diferenciándose en los contextos en los que se desarrollan y en la complejidad de los análisis y los procesos que se llevan a cabo. Así, aunque el trabajo del matemático busca la resolución de un problema concreto, difiere de la labor que realiza el estudiante que investiga en el aula, puesto que este último, en su proceso de aprendizaje, puede hacer otros descubrimientos que lleguen a ser "tan o más importantes que la solución del problema original" (Ponte *et al.*, 2006, p.17), tornándose más significativo el proceso llevado a cabo por los descubrimientos y aprendizajes que implica, que el logro del resultado como tal.

En las IMA se hacen evidentes características del *aprendizaje por descubrimiento y la investigación guiada*, dado que busca que el estudiante "descubra, a su manera, el conocimiento elaborado por los científicos a lo largo del tiempo" y actúe "de igual o parecida forma que hacen los expertos para la producción de conocimiento" (Pozuelos, 2001, p.116). Se trata, entonces, de poner al estudiante en situaciones que lo muevan a probar diferentes reacciones hasta que la respuesta sea satisfactoria, lo cual le motivará a plantearse preguntas y buscar datos y acciones para acercarse a esta (Pozuelos, 2001). En este sentido Ponte *et al*. (2006) afirman que investigar en el aula significa que "formulamos preguntas que nos interesan, para las cuales no tenemos respuesta inmediata y buscamos esa respuesta, tanto como sea posible, de modo fundamentado y riguroso" (p. 9). Tal búsqueda de respuesta a las preguntas formuladas, se dirige a conceptos, procedimientos y representaciones matemáticas (Ponte *et al.*, 2006).

A pesar de que esta estrategia guarda relación con las situaciones problema y con los ejercicios, tienen sus diferencias: los ejercicios se caracterizan por ser tareas cerradas y accesibles, los problemas consisten en una tarea también cerrada, pero con un mayor grado de dificultad, y las investigaciones son tareas abiertas, pero mucho más difíciles (Ponte, 2004), en las que no hay pregunta ni respuesta única y predeterminada desde el principio, puesto que “quien investiga tiene un papel fundamental en su definición” (Ponte *et al.*, 2006, p.23), lo cual fomenta una participación protagónica del estudiante en el aula, y una ganancia de autonomía en cuanto a la relación que tiene con el conocimiento, y particularmente, con las Matemáticas y su comprensión.

2.3. Lenguaje y procedimientos

El lenguaje y los procedimientos son componentes que están estrechamente relacionados con el conocimiento matemático, debido a que emergen dentro de lo que se denomina práctica matemática, la cual se considera, según Godino y Batanero (como se citó en Godino, Batanero y Font, 2009) como “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (p.4).

El lenguaje emerge en dichas prácticas matemáticas por medio de elementos lingüísticos como términos, expresiones, notaciones, gráficos, que se manifiestan en diferentes registros como el escrito, oral, gestual, etc. (Godino *et al.*, 2009), con el fin de que se “posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo” (MEN, 2006, p.54)

La importancia de las formas de expresión y comunicación de las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos radica en que hacen parte constitutiva de la comprensión de las matemáticas, y configuran su actividad intrínseca y radicalmente (MEN, 2006). Al respecto, según el MEN (1998) el trabajo del alumno, que debe ser análogo a la actividad científica del matemático, implica por lo general la construcción de un lenguaje, que le permita la comunicación de conceptos, modelos y teorías formulados, y el intercambio de los mismos entre pares.

En el presente trabajo se analizará particularmente tres tipos de lenguaje: el natural, el simbólico y el gráfico. El lenguaje natural según Cortez, Vega y Pariona (2009) se define como el medio que se utiliza de manera cotidiana para establecer la comunicación interpersonal y puede utilizarse para "analizar situaciones altamente complejas y razonar muy sutilmente" (p.46); además, su sintaxis puede ser modelada por un "lenguaje formal, similar a los utilizados en las matemáticas y en la lógica" (p.46). El lenguaje natural puede manifestarse de forma verbal o escrita; a partir de estas dos formas de expresión "los individuos interactúan y entran en relación unos con otros con el fin de intercambiar significados, establecer acuerdos, sustentar puntos de vista, dirimir diferencias, relatar acontecimientos, describir objetos" (MEN, 2006, p.19).

El lenguaje simbólico, según Mora (2012), hace referencia a la representación o comunicación de un objeto o situación mediante un símbolo arbitrario que no tiene relación directa con el objeto que representa. Este lenguaje simbólico se puede componer de numerales o caracteres numéricos, de relaciones aritméticas expresadas a través de operaciones entre los números, de lenguaje sincopado, que combina lenguaje natural con símbolos matemáticos sin mucha rigurosidad, y de lenguaje matemático, que se compone de numerales y símbolos matemáticos que siguen cierta sintaxis propia (Mora, 2012).

El lenguaje gráfico, por su parte, expresa regularidades que se perciben en la realidad, haciendo con estas una elaboración racional y simbólica (Gigosos, 2017). Este se produce, según Rosales (1984), cuando el estudiante utiliza la representación gráfica para hacer sus explicaciones u operaciones matemáticas, en lugar de la palabra.

Los procedimientos, según Godino *et al.* (2009), se constituyen en uno de los objetos matemáticos primarios de la práctica matemática, y se evidencian en la misma mediante algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, entre otras. En correspondencia con esta perspectiva, los Estándares (MEN, 2006) asocian los procedimientos al saber cómo, lo cual implica usarlos de manera eficaz, flexible y en contexto con los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos, ayudando así a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual.

Según los Estándares (MEN, 2006), para analizar la contribución de los procedimientos en el desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento matemático es oportuno considerar los mecanismos cognitivos involucrados en dichos algoritmos; el primero de ellos es “la alternación de momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el procedimental, lo cual requiere atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales” (p.55). El segundo mecanismo cognitivo es la automatización, la cual implica la práctica reiterada de los procedimientos, que si bien no contribuye al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento, sí ayuda a adquirir habilidades en la ejecución rápida, segura y efectiva de dichos procedimientos. El tercer mecanismo cognitivo se refiere a la reflexión sobre qué procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades en un sistema simbólico determinado y en qué contribuyen a su conceptualización; dicha reflexión le exige al estudiante explicar y entender los conceptos en los que se apoya el procedimiento, seguir la lógica que los sustentan, saber cuándo aplicarlo de manera fiable y eficaz, y cuál es la técnica que le permite obtener un resultado más rápidamente (MEN, 2006).

Los procedimientos y el lenguaje utilizado pueden clasificarse por un lado como objetos institucionales, que surgen por el convenio de un grupo de individuos en una comunidad de prácticas, y por otro, como objetos personales, que son específicos de una persona, que emergen del pensamiento y acción del sujeto ante ciertas clases de problemas (Godino et al., 2009).

2.4. Aprendizaje significativo

La teoría del Aprendizaje Significativo ha tomado relevancia en los discursos acerca de los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se dan en las aulas de clase, posiblemente, porque indaga por lo que ocurre en estos espacios de formación con relación a la manera en que el estudiante aprende, construye significados y los factores que lo hacen posible (Rodríguez, 2011). Para comprender de qué trata esta teoría, se presenta un panorama general que da cuenta del constructo central y razón de ser del Aprendizaje Significativo.

Se habla de Aprendizaje Significativo cuando "(…) ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario, sino sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe, señaladamente algún aspecto esencial de su estructura de conocimientos" (Ausubel *et al*., 1983, p.1); es decir, el Aprendizaje Significativo es posible cuando el estudiante asocia aquellas ideas o conceptos existentes en su estructura cognitiva, integrada por esquemas de conocimiento como generalizaciones o abstracciones sobre un objeto, con nuevo contenido; los preconceptos deben ser relevantes y claros dado que son el punto de partida para asimilar nueva información (Rodríguez, 2011).

El Aprendizaje Significativo según Ausubel *et al.* (1983), puede ser de tres tipos; el primero de ellos es el aprendizaje de representaciones, del cual dependen los demás tipos de aprendizaje, y consiste en atribuir un significado o representación a determinado símbolo, generalmente expresado mediante palabras unitarias. El segundo, es el aprendizaje de conceptos, el cual hace referencia a ideas genéricas, unitarias o categoriales; también son representados mediante palabras, pero a diferencia del aprendizaje de representaciones, este implica aprender ciertas características o criterios que se relacionen con la estructura cognitiva del estudiante para que de esa manera se genere un nuevo concepto genérico. Como tercer tipo está el aprendizaje de proposiciones, el cual hace alusión al significado de un símbolo expresado mediante grupos de palabras u oraciones relacionados entre sí. Al respecto, Rodríguez (2011) afirma:

> No hay aprendizaje significativo si no se captan los significados; esta captación es dependiente de la interacción personal; el intercambio y la negociación de significados entre diferentes protagonistas del evento educativo es lo que determina su consecución y para ello, ha de considerarse que el conocimiento tiene carácter social, siendo sólo posible a través de la mediación semiótica (p. 39).

Es decir, si bien el Aprendizaje Significativo es personal dado que un individuo a partir de su experiencia puede atribuir un significado a determinado símbolo u objeto, no exime la posibilidad que se construyan otras significaciones alrededor del mismo y que esas concepciones puedan entrar en dialéctica para atribuirle un significado a nivel colectivo que responda a las características convergentes encontradas de manera que el objeto se comprenda al ser comunicado.

De acuerdo con Ausubel *et al.* (1983) para que se produzca un Aprendizaje Significativo en el estudiante, es necesario tener en cuenta dos condiciones fundamentales:

- Actitud frente al Aprendizaje Significativo, esto es, tener "una disposición para relacionar no arbitraria, sino sustancialmente, el material nuevo con su estructura cognoscitiva" (p.1). En este sentido, se busca que el estudiante tenga inclinación o interés por aprender significativamente, es decir, ese aprendizaje no propende por la mecanización y repetición en los procesos; por el contrario, pretende que retome de la nueva información aquello que sea esencial y se asocie a los conocimientos preexistentes en su estructura cognitiva.

- Material potencialmente significativo, el cual debe contemplar dos factores; la intención y naturaleza del material, así como la manera en que se pueda relacionar con la estructura cognitiva del estudiante (Ausubel *et al*., 1983).

Según Rodríguez (2011), entre las ventajas que ofrece el Aprendizaje Significativo está la reconstrucción de la información debido a que los esquemas cognitivos del estudiante cambian -esto porque relaciona conocimiento nuevo con los que ya trae incorporados- lo cual implica producción y aplicación de conocimiento, en ese sentido la información asimilada permanece por más tiempo. De igual modo plantea que el Aprendizaje Significativo estimula tanto al estudiante como al docente; al primero con relación a lo que aprende dado que "supone un reto individual y colectivo que propicia satisfacción ante el logro de esos aprendizajes, su significatividad y sus posibilidades de uso, agrado por construirlos y mejora de la autoestima" (p. 41). En cuanto al docente, le posibilita trabajar las diferentes áreas del saber atendiendo la diversidad e intereses de los estudiantes, al respecto Ballester (2002) plantea:

> (...) está la satisfacción del profesorado por el trabajo realizado por el alumnado, la respuesta positiva del alumnado, se evitan y reducen problemas derivados de la disciplina, permite atender a la diversidad y heterogeneidad del aula sin que ello suponga un exceso de trabajo al profesorado, además consigue el aprendizaje de todo el alumnado, por lo que es altamente satisfactorio para la actividad educativa (p.15).

Según Rodríguez (2004) el Aprendizaje Significativo tiene importantes consecuencias pedagógicas dado que busca reconfigurar la estructura cognitiva del estudiante, ya sea para conocerla o para introducir elementos que le posibiliten dar significatividad a nueva información relacionada con una disciplina; en ese sentido requiere que el estudiante incorpore aquello que le sea relevante, para este propósito es necesario en primera instancia que identifique los conceptos que se estructuran al área del saber o al programa, y por último que logre trabajar con ellos de manera que sean significativamente aprendidos. Esto se debe a “(…) la intencionalidad y la sustancialidad de la relacionabilidad de la tarea de aprendizaje con la estructura cognoscitiva” (Ausubel *et al*., 1983, p.8), de este modo el estudiante puede explorar e interactuar tanto con sus saberes previos como con la nueva información, esto permite que las conceptualizaciones que traía y las nuevas se articulen de manera que se construyan nuevos significados y se expanda los aprendizajes.

3. METODOLOGÍA

La investigación para el proyecto de grado se realizó bajo el enfoque cualitativo, el cual se interesa por comprender tanto las situaciones que surgen en un momento y espacio determinado, como el sentido y los significados que le atribuyen a las experiencias los individuos o grupos participantes que son investigados (Rodríguez y Valldeoriola, 2009).

La investigación buscó interpretar, por un lado, la manera en la que los sujetos pertenecientes al grupo social investigado, los estudiantes, interpretan la realidad que ellos construyen, y por otro, cómo construyen esa realidad (Vain, 2012) a la cual le atribuyen significados en correspondencia con marcos de referencia como la conducta, la relación con los objetos presentes en el entorno y las situaciones en las que se encuentra cada individuo (Martínez, 2011). En particular, en este trabajo se interpretaron las soluciones, preguntas, conjeturas, argumentaciones y procedimientos propuestos por los estudiantes (en el marco del Semillero de Matemáticas, que fue la modalidad de intervención en el aula), de acuerdo con los significados que les atribuyeron con base en marcos de referencia como las explicaciones formales de las clases, o vivencias personales que moldean cierta lógica a partir de la cual construyen sus propias soluciones.

La metodología se centró en la Investigación-Acción-Educativa (I.A.E) Restrepo (2003), la cual posibilita la reflexión de la propia práctica, para develar las teorías implícitas u operativas que la sustentan, y para propiciar el diseño de alternativas didácticas y de formación que se ensayan, y a cuyos resultados se hace un seguimiento para verificar su efectividad, acompañado de una reflexión que conduzca a una transformación de la práctica; en esencia se aplica la autorregulación o procesos metacognitivos a la propia práctica.

Según Restrepo (2004) la I.A.E se desarrolla en tres fases, la primera fase, denominada Deconstrucción, consiste en la crítica a la propia práctica mediante una reflexión acerca del quehacer pedagógico, las teorías en las que se basa y la situación en la que viven los estudiantes, con el fin de construir un saber pedagógico que explique la razón de ser de las tensiones que la práctica enfrenta, y que fundamente la transformación de la misma.

En el Proyecto, esta fase se llevó a cabo en el semestre 2017-2, durante el cual se hizo un reconocimiento institucional tomando como base los documentos rectores del MEN, el PEI de la Institución Educativa La Asunción, los resultados de las Pruebas Saber del año 2016 del grado quinto y el Plan de área de matemáticas; así mismo, se realizaron observaciones en las clases de matemáticas y se implementó una prueba diagnóstica en uno de los grupos, con el objetivo de analizar la comprensión que los estudiantes tenían de algunos objetos matemáticos que ya habían sido enseñados en las clases de matemáticas.

La segunda fase, la Reconstrucción, consiste en el diseño de una práctica alternativa que busque dar solución a las falencias encontradas en la primera fase, apoyándose en teorías pedagógicas vigentes que se puedan adaptar, de manera que se ponga en diálogo la teoría y la práctica, y se propicie así un saber pedagógico subjetivo, individual, funcional y práctico; la Reconstrucción no implica una transformación total de la práctica, sino una reafirmación de lo bueno, complementado con propuestas de transformación en los aspectos débiles, inefectivos e ineficientes (Restrepo, 2006).

Esta fase se realizó en los semestres de 2018- 1 y 2018-2 durante los cuales se construyó la base teórica que ofreciera herramientas para la práctica, se hizo un rastreo bibliográfico enfocado en encontrar textos que presentaran teorías sobre la estrategia de las IMA, el Aprendizaje Significativo y el enfoque Socioepistemológico, principalmente. A partir de lo hallado en el rastreo bibliográfico, se hizo el diseño y aplicación de tareas en la modalidad de Semillero de Matemáticas, elegida porque facilita a los estudiantes "aproximarse al estudio de diferentes disciplinas de una manera más cercana a sus intereses y a su realidad" (Aldana, 2010, p.6). Este espacio de formación se desarrolló en horario contrario a las clases regulares, la asistencia era voluntaria, con un promedio de doce estudiantes por sesión. En total se llevaron a cabo 22 sesiones de clase, con una intensidad de 3 horas semanales, en las cuales se implementó la estrategia de las IMA.

Por último, se lleva a cabo la fase de Evaluación en la que se validan los resultados de la propuesta alternativa comenzando con la ejecución de la práctica reconstruida, con el fin de someter a prueba su desempeño; el docente entonces realiza la reflexión frente al cambio que propone, teniendo en cuenta su satisfacción personal y el comportamiento de los estudiantes ante las transformaciones didácticas y formativas. Esta fase se recrea constantemente en ciclos sucesivos (Restrepo, 2004).

En esta fase, se analizó el proceso de los estudiantes y maestros en formación durante la práctica a la luz de los soportes teóricos del proyecto. Para llevar a cabo el análisis se utilizó la estrategia de Triangulación; según Leal (2015), este procedimiento permite emplear dentro de un mismo estudio, diferentes elementos propios de la metodología de la investigación, entre los que se destacan los métodos, las teorías, las fuentes y los tipos de datos, los informantes y las técnicas de indagación. En el análisis se tuvieron en cuenta tres unidades, que fueron: las fases en que se desarrolla las IMA, los procedimientos y el lenguaje utilizado por los estudiantes al resolver las diferentes situaciones.

Para registrar las experiencias, la información y procesos encontrados en la realización de las tres fases de la investigación, se utilizaron dos técnicas; la primera fue la observación participante, que se entiende como “una técnica interactiva de «participar» hasta cierto punto en las situaciones que ocurren, de forma natural, durante un periodo de tiempo” (McMillan y Schumacher, p. 51); lo observado se registró en el diario reflexivo que, de acuerdo con Jaramillo (2003) es elaborado por los futuros profesores, después de terminar cada clase, para registrar detalles de la Práctica Pedagógica en general y reevaluar lo ocurrido, de manera que se establezca una dialéctica entre la reflexión y la acción o entre la teoría y la práctica, en la que el maestro aprenda de la propia experiencia y genere conocimiento profesional.

De manera puntual, la observación participante como técnica de recolección de datos se utilizó durante todo el proceso. Dado que el proyecto se enfocó en la estrategia de las IMA, que tienen como fin propiciar un aprendizaje significativo a través de la inmersión de los estudiantes en la clase de matemáticas y potenciar una forma de pensamiento que relaciona varios tópicos, lo cual es esencial en el raciocinio matemático (Ponte *et al.*, 1995), se buscó identificar, por medio de la observación participante, elementos de la metodología utilizada por la profesora de matemáticas durante las clases que representaran un obstáculo para una participación activa y un aprendizaje significativo de los estudiantes, para dilucidar así el problema en la fase I.

Durante el II y III semestre de la Práctica Pedagógica, la observación participante se enfocó en investigar la propuesta metodológica que se llevó a cabo en las clases del semillero; principalmente se identificaron, registraron y analizaron las posibilidades que brinda la estrategia para el mejoramiento de la clase de matemáticas, y los principales obstáculos que se hicieron evidentes en su ejecución.

La segunda técnica empleada para la recolección de datos fue la denominada grupo nominal que se caracteriza por "una fase de reflexión individual en la que se generan las ideas y, una segunda, en la que hay una puesta en común y discusión de las mismas para su evaluación y posterior ordenamiento" (Campoy y Gomes, 2009, p. 281). Esta técnica permitió generar diálogos espontáneos o discusiones de los estudiantes entre sí y con los futuros profesores durante las clases del semillero.

Entre los instrumentos utilizados en la recolección de datos se encuentran los enseres, entendidos como "objetos materiales y símbolos de un suceso, grupo, persona u organización pasados o presentes (...) que revelan procesos, significados y valores sociales" (McMillan y Schumacher, 2005, p. 52); particularmente se tomaron documentos institucionales y productos de los estudiantes registrados a través de la prueba diagnóstica realizada en el I semestre y de los documentos guía de algunas tareas que se propusieron a los estudiantes en el semillero.

Las tareas se diseñaron con base en la estrategia de las IMA y tenían el objetivo de propiciar acciones investigativas por parte de los estudiantes, sobre situaciones que presentaban un problema que debía ser identificado por ellos, y para el cual debían ofrecer una solución, originada a partir de la exploración guiada mediante preguntas formuladas tanto por los maestros en formación como por los estudiantes, y de la decantación de hipótesis, todo esto con el fin último de llegar al reconocimiento y comprensión de los objetos matemáticos implicados.

Las tareas 1 y 2 denominadas *Volvió el agua parte I* y *Volvió el agua parte II* fueron diseñadas con el propósito de que los estudiantes lograran identificar regularidades y se acercaran al concepto de progresión numérica y geométrica, respectivamente. Para el análisis se retomará la tarea 1.

La tarea 3 denominada *El diablo de los números* tenía como propósito analizar las propiedades de la división y de algunos números enteros, a partir de la problematización de las preguntas que estaban en el fragmento tomado del capítulo 3 (*La tercera noche*) del libro *El diablo de los números*.

La tarea 4 denominada *Dominó mágico* pretendía, en un primer momento, que los estudiantes formaran cuadrados utilizando solo fichas de dominó, y en un segundo momento, que encontraran la manera de que estas estuvieran dispuestas estratégicamente para que los resultados de la suma de puntos de cada lado fueran iguales entre sí; para el análisis sólo se retomará la primera parte de la tarea.

Con la tarea 5, *Competencia de aviones de papel*, se pretendía trabajar con el concepto de fracción equivalente que debía surgir como respuesta a la necesidad de convertir, de una unidad de medida a otra, la distancia recorrida por los aviones de papel, que había sido medida con regletas de Cuisanaire por los estudiantes.

El objetivo de la tarea 6, nombrada *Tiro al blanco*, apuntaba a que los estudiantes se enfrentaran a la necesidad de transformar gráficamente fracciones heterogéneas a fracciones homogéneas, para realizar su suma.

La tarea 7 denominada *¿Cómo multiplicamos?* tenía como objetivo que los estudiantes comprendieran el algoritmo de la multiplicación a través del análisis de una multiplicación realizada con un procedimiento diferente al convencional.

La tarea 8 denominado *Carrera de caballos* tenía como objetivo tratar la probabilidad, propiciando la recolección y análisis de datos que los estudiantes generaban durante el juego.

En todo el proceso también se utilizaron instrumentos suplementarios como el vídeo y registros fotográficos; particularmente, el vídeo se concibe no sólo como un instrumento para almacenar y comprobar datos, sino como objeto y estrategia de investigación que permite la reconstrucción, análisis y diferentes lecturas de un suceso (García, 2011). Por otro lado, los registros fotográficos posibilitan visibilizar aspectos que no se perciben con otras técnicas o métodos de estudio, porque proporcionan una lectura holística y detallada de la situación que se investiga (Bonetto, 2016). Estos dos últimos instrumentos se emplearon durante los semestres 2018-1 y 2018-2 en algunas sesiones del semillero con el fin de registrar enunciados, argumentos, acciones o procesos realizados por los estudiantes, que pudieron pasar desapercibidos en su momento, pero que son de suma importancia para el análisis e interpretación de los resultados.

4. ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA

Durante la Práctica Pedagógica, se aplicaron ocho tareas que tenían como objetivo propiciar en los estudiantes un acercamiento a las IMA, a través de situaciones que presentaran algún problema o cuestionamiento que, al ser resuelto, posibilitara la manipulación de algunos objetos matemáticos, tendiente a lograr un aprendizaje significativo de los mismos. Para efectos de este análisis se seleccionaron tres de las ocho tareas aplicadas porque proporcionaron mayor evidencia y claridad en los registros, mostrando el desarrollo de las IMA a la luz del marco teórico. Las tareas serán estudiadas a partir de una macro unidad de análisis enfocada en el desarrollo de las cuatro fases que, según Ponte *et al.* (2006) constituyen las IMA (explorar el problema; formular conjeturas para una posible solución, confrontar y reformular conjeturas, y por último, argumentar, validar y discutir las conclusiones a las que se llegó).

Dentro de las fases de la IMA se identificaron y se analizan dos sub-unidades; una de ellas está relacionada con los procedimientos, que se refieren tanto a las técnicas y estrategias empleadas en la representación de conceptos o las transformaciones de dichas representaciones, como a las habilidades para elaborar, comparar, ejercitar algoritmos y argumentar (MEN, 2006); la otra consiste en la identificación de los diferentes lenguajes a través de los cuales expresan, representan, leen y escriben las matemáticas, que apuntan al lenguaje formal institucionalizado, cuya adquisición y dominio debe ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para que se encuentre la conexión entre ellos y se propicie el trabajo en equipo (MEN, 2006). En la *ilustración 5* se representa las relaciones entre dichas unidades de análisis.

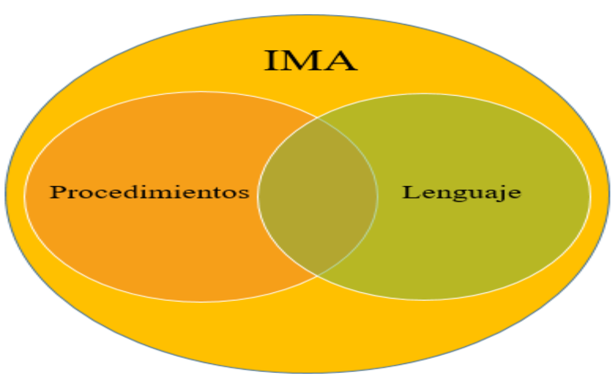


Ilustración 5. Unidades de análisis

A continuación se presenta el análisis de las tareas.

4.1. Tarea: Volvió el agua parte I

La tarea correspondiente a los días 12 y 26 de abril denominada *Volvió el agua parte I*, proponía a los estudiantes una situación hipotética en la que debían ayudar al encargado de una empresa de agua a recuperar los registros de la cantidad de casas a las que iba regresando este recurso cada día, luego de reparar la avería en el tubo principal del sistema de distribución. Para esto, se presentaba el registro de las primeras casas, que mostraba para el primer día, 1 casa beneficiada; para los días siguientes, este número iba aumentando de dos en dos, creándose de esta manera un patrón de formación que debía ser identificado por los estudiantes para completar el número de casas beneficiadas que faltaban en el registro, y predecir el número de casas beneficiadas de cualquier día, gracias a la generalización de ese patrón. A continuación se muestra el enunciado:

Durante los días posteriores de la reparación al tubo principal del barrio Santo Domingo, la empresa Agua Clara envió a varios trabajadores a realizar una encuesta para identificar la cantidad de casas en las que había servicio de agua. Algunos resultados de la encuesta se presentan en la siguiente tabla:

Día	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de casas benefi-ciadas	1	3	5	7	9	11	13	

Ilustración 6. Tabla de registro N° de casas por día con agua

1. Reconocimiento de la situación e identificación del problema a resolver: para el desarrollo de la tarea los estudiantes se reunieron en pequeños grupos de 3 o 4 integrantes; en un principio consideraron insuficientes los datos suministrados para encontrar la respuesta, y asumieron una actitud poco propositiva. Sin embargo, cuando se les motivó a analizar con más detenimiento los datos, se dispusieron a observar la manera en la que estaban organizadas la cantidad de casas beneficiadas en cada día, y cómo se relacionaban con los números de las dos filas de la tabla dada. Esto muestra que, como lo indica Ponte *et al.* (2006) en esta etapa los estudiantes se inmiscuyen en la situación, se familiarizan con los datos y se apropian del sentido de la tarea, lo cual les permitió encontrar un camino para la posible solución.

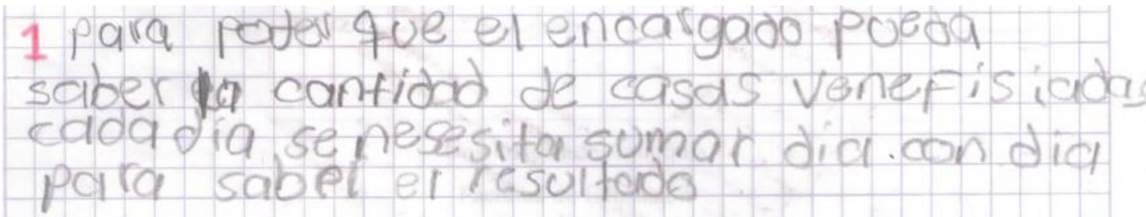
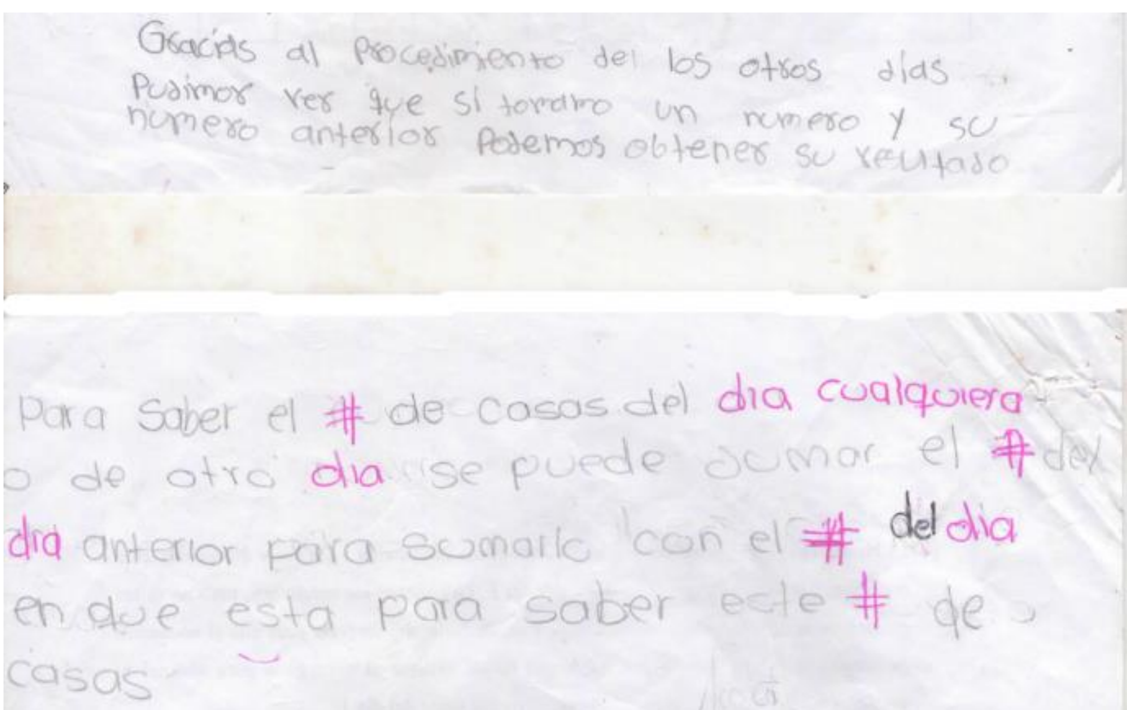

1 para poder que el encargado pueda saber la cantidad de casas venefisiadas cada dia se nesesita sumar dia con dia para sabel el resultado

Ilustración 7. Respuesta de estudiantes a la situación

A pesar de que a los estudiantes no se les especificó el ***procedimiento*** matemático necesario, identificaron por sí mismos cuál era el más pertinente, y llegaron a la solución a través de la operación suma.

2. Formulación de conjeturas: una vez los estudiantes analizaron las relaciones entre los números comenzaron a formular varias conjeturas, las cuales se resumen en las dos que se presentan a continuación:


Gracias al procedimiento del los otros dias pudimos ver que si tomamos un numero y su numero anterior podemos obtener su resultado

Para saber el # de casas del dia cualquiera o de otro dia se puede sumar el # del dia anterior para sumarlo con el # del dia en que esta para saber este # de casas

Ilustración 8. Conjetura 1. Cantidad de casas a las que llega el agua cada día

La primera conjetura afirmaba que el número de casas de un día determinado se hallaba sumando el número correspondiente al ordinal de ese día, más el ordinal del día anterior. En esta conjetura, como primer acercamiento, los estudiantes no emplearon símbolos matemáticos, pero se observa un mayor uso de ***lenguaje*** natural con el que describen el ***procedimiento*** matemático que aplican en la situación. La mayoría de estudiantes propuso esta conjetura, que fue diferente a la que se tenía prevista, lo que demuestra la existencia y validez de diversidad de métodos para llegar al resultado esperado si no hay una determinación previa de los procedimientos a utilizar, lo cual fomenta la autonomía del estudiante en la búsqueda de soluciones que partan de sus propios conocimientos.

Sin embargo, la conjetura que se había previsto también fue propuesta por uno de los estudiantes.

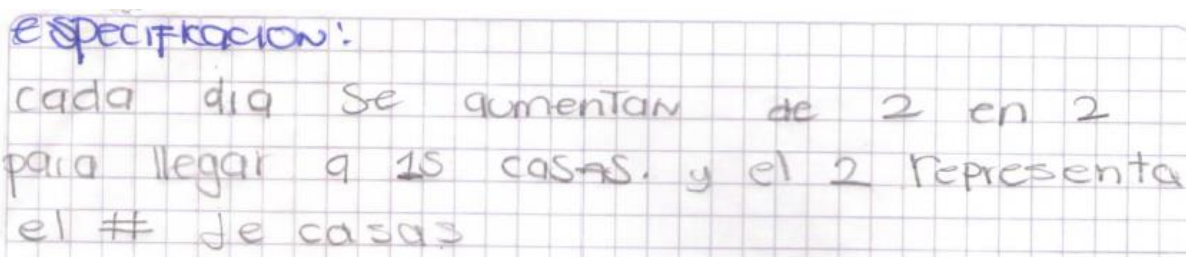
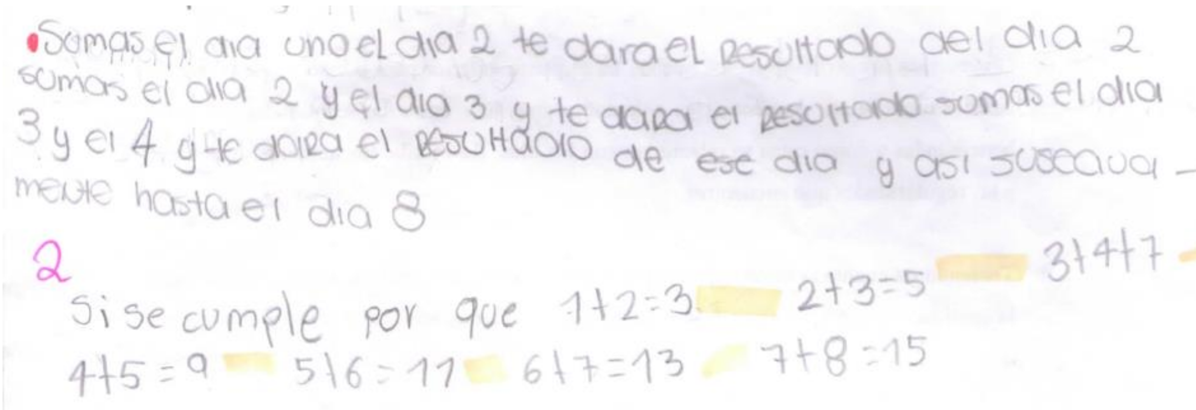


Ilustración 9. Conjetura 2 en tarea *Volvió el agua*

Esta conjetura afirmaba que para saber el número de casas beneficiadas en un día específico, se debía sumar 2 al número de casas beneficiadas el día anterior, evidenciándose así la identificación de un patrón en la variación de los datos, lo cual implica un acercamiento al pensamiento variacional, que está relacionado con “el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos (...)” (MEN, 2006, p.66). Para expresar esta identificación acudieron al ***lenguaje*** natural que, aunque no hace uso de símbolos matemáticos, también configura intrínseca y radicalmente la actividad matemática (MEN, 2006), convirtiéndose en un medio para la expresión del ***procedimiento*** que les permitió obtener la respuesta, en este caso, la operación suma.

3. Realización de pruebas y refinamiento de conjeturas: una vez los estudiantes formularon ciertas conjeturas, hicieron pruebas utilizando datos específicos.



Somas el dia uno el dia 2 te dara el resoltado del dia 2 somas el dia 2 y el dia 3 y te dara el resoltado somas el dia 3 y el 4 y te dara el resoltado de ese dia y asi susecuamente hasta el dia 8

2

Si se cumple por que 1+2=3 2+3=5 3+4=7

4+5=9 5+6=11 6+7=13 7+8=15

Ilustración 10. Comprobación de la Conjetura 1

En el planteamiento anterior se observa la explicación que realizaron los estudiantes haciendo uso del ***lenguaje*** natural acerca del ***procedimiento*** empleado y la expresión de esta conjetura en un ***lenguaje*** simbólico, que al ser propuesto por ellos mismos como respuesta a una necesidad, propicia la comprensión significativa del algoritmo, y su utilización consciente y correcta.

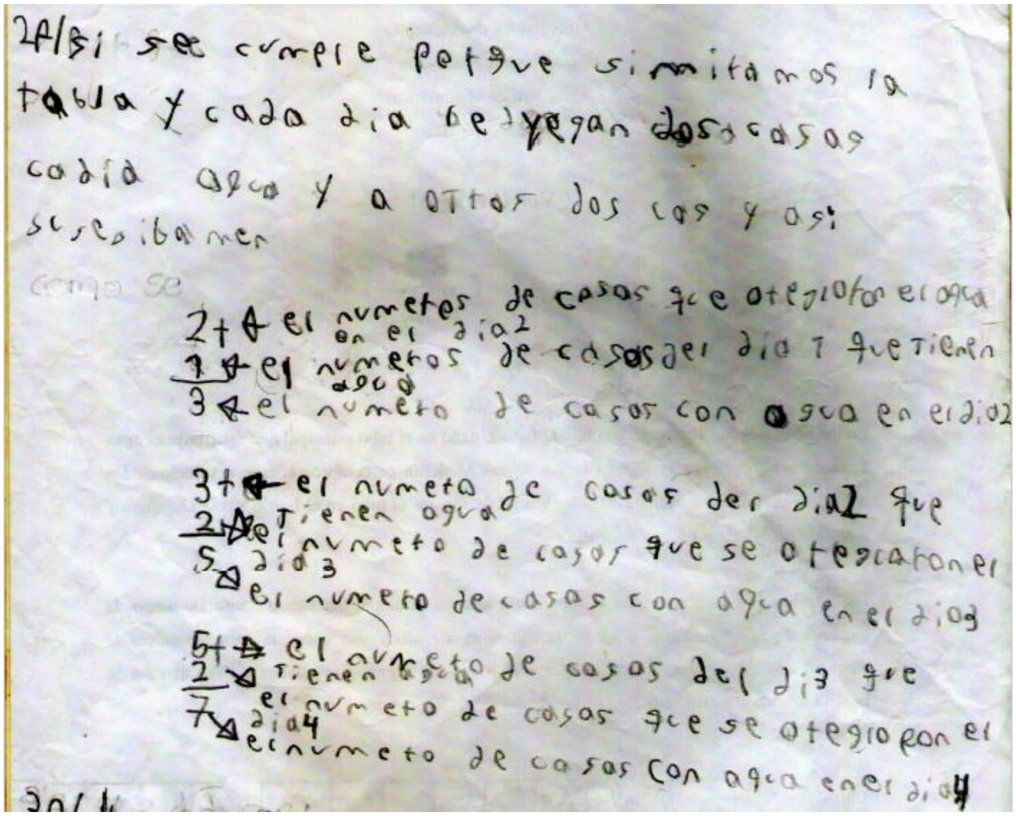


Ilustración 11. Comprobación de la Conjetura 2

"*Sí se cumple porque si miramos la tabla, cada día les llega agua a dos casas y así sucesivamente*

2 + *el número de casas que obtuvieron el agua en el día 2*

1 ________ *el número de casas del día 1 que tienen agua*

3 *el número de casas con agua en el día 2*

3 + *el número de casas del día 2 que tienen agua*

2 ________ *el número de casas que se obtuvieron el día 3*

5 *el número de casas con agua en el día 3*

5 + *el número de casas del día 3 que tienen agua*

2 ________ *el número de casas que se obtuvieron el día 4*

7 *el número de casas con agua en el día 4*"

En esta conjetura se observa el paso del ***lenguaj***e natural al simbólico, denotándose una mayor apropiación del ***procedimiento*** matemático elegido, la operación suma, dado que acuden a su uso reiterado teniendo en cuenta el valor constante que deducen de los datos, es decir, el número 2; además, aclaran el significado de cada número dentro de la situación planteada, logrando así ampliar y explicar la conjetura propuesta y con esto, reafirmarla, cuando comparan las respuestas obtenidas con los datos que hay en la tabla, como se evidencia en la *ilustración 11*, en la afirmación: “sí se cumple porque si miramos la tabla (...)”.

Ante las conjeturas mostradas como solución, se indagó a los estudiantes si éstas conjeturas también servían para encontrar el número de casas del día 3, con el fin de conseguir que empezaran a comprobar por sí mismos si los resultados encontrados eran válidos o no, en lugar de esperar a que el maestro hiciera esa validación. Estas preguntas se formulan porque, según Ponte *et al.* (2006), “existe alguna tendencia de los alumnos para aceptar las conjeturas después de que las han verificado apenas en un número reducido de casos” (p.33), esta tendencia debe ser aminorada con la ayuda del profesor, quien debe propiciar discusiones que estimulen a los estudiantes a buscar contraejemplos. Al realizar la comprobación para responder a la pregunta, confirmaban que la respuesta era correcta, porque hacían el contraste entre el resultado de las operaciones matemáticas y los números registrados en la tabla.

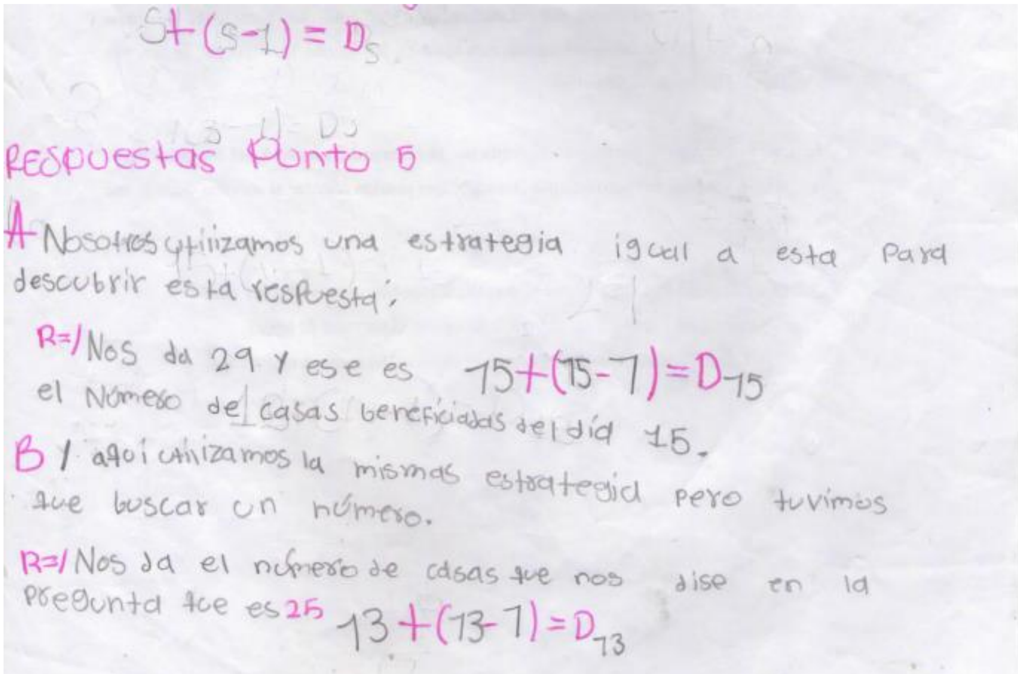
Por otro lado, la tarea preguntaba a los estudiantes por un método diferente a los que ya habían propuesto, que permitiera encontrar el número de casas beneficiadas de un día cuyo número ordinal fuera tan alto, que los métodos que se venían utilizando resultaran ineficientes. Haciendo esta pregunta, se pretendía que los estudiantes utilizaran el patrón encontrado que les permitiera plantear una generalización para hallar el número de casas de un día determinado sin hacer las sumas sucesivas, que antes realizaban hasta llegar a dicho día.

5. Qué otra estrategia propones para evitar realizar procedimientos largos y conocer:

    c. ¿En qué día habrá 25 casas beneficiadas con el servicio de agua?
    d. ¿Cuántas casas se beneficiarán con el servicio del agua en el día 15?

Ilustración 12. Pregunta propuesta en la tarea *Volvió el agua*

Esta pregunta y otros cuestionamientos condujeron a los estudiantes a proponer una nueva conjetura.



$S+(S-1)=D_S$

Respuestas Punto 5

A Nosotros utilizamos una estrategia igual a esta para descubrir esta respuesta:

R=/ Nos da 29 y ese es $15+(15-7)=D_{15}$ el Número de casas beneficiadas del día 15.

B/ aquí utilizamos la mismas estrategia pero tuvimos que buscar un número.

R=/ Nos da el número de casas que nos dise en la pregunta que es 25 $13+(13-7)=D_{13}$

Ilustración 13. Conjetura 3 *Volvió el agua* y comprobación

Los estudiantes enunciaron la conjetura utilizando un ***lenguaje*** simbólico, logrando una expresión algebraica, que es un acercamiento al proceso de generalización, para ello utilizaron letras a las que les dieron un significado acorde a la situación y a las que posteriormente le asignaron valores numéricos para validarla; específicamente, la letra “S” indicaba el ordinal correspondiente a un día cualquiera, la expresión “S-1” hacía referencia al día anterior, y “D_s” aludía al total de casas beneficiadas en ese día. Los estudiantes lograron identificar una ley de formación que les permitió acercarse a una expresión algebraica para resolver la situación de una manera más abreviada.

4. Argumentación, demostración y evaluación del trabajo realizado: se propuso una discusión grupal con el fin de formalizar los conceptos matemáticos y construir colectivamente una generalización. Los aportes eran puestos en cuestión, de manera que los integrantes del grupo se vieran exhortados a justificarlos, y el resto de estudiantes, que también habían solucionado el mismo problema, evaluaran los aportes de sus compañeros a través de una discusión más nutrida.

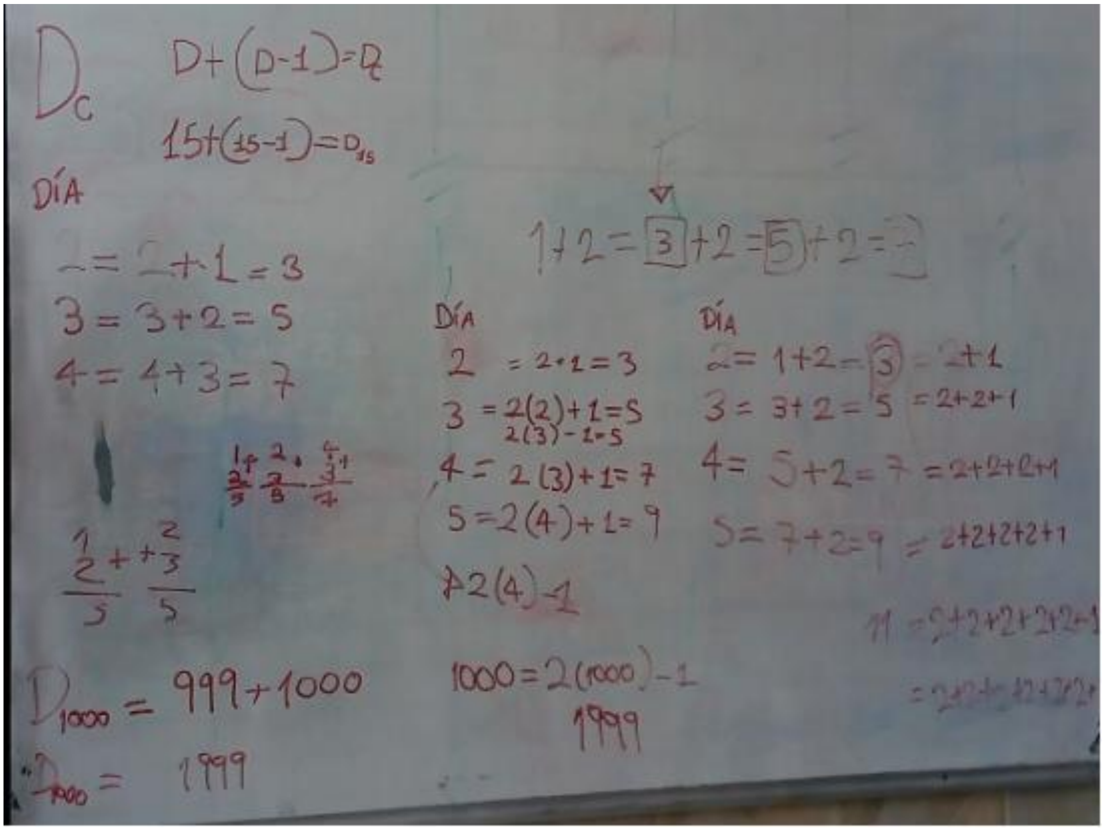


Ilustración 14. Discusión grupal

En la *Ilustración 14* se evidencia el resultado al que se llegó conjuntamente, gracias a los avances de cada grupo y a la problematización de los mismos durante la discusión. Se registró en el tablero los dos métodos utilizados para la solución del problema, y se hicieron las respectivas pruebas, con los objetivos, por un lado, de que se verificara la coincidencia de los resultados de las conjeturas con los datos que estaban en la tabla, y por otro, de que los estudiantes identificaran patrones repetitivos, que se pudieran utilizar para plantear una generalización. Las preguntas orientadoras realizadas por los maestros en formación tuvieron un papel fundamental en la depuración de las conjeturas, en su verificación, y en los avances a los que se llegó.

Ponte *et al.* (2006) menciona que, al desarrollar Investigaciones Matemáticas en el Aula, la capacidad de comunicar matemáticamente se trabaja de manera espontánea y genuina, dado que los estudiantes logran expresar sus propios pensamientos; además, señala que escribir los resultados ayuda a los estudiantes a aclarar ideas, explicar conjeturas, favorecer el establecimiento de consensos y el entendimiento común de los procedimientos. Al respecto, en esta fase, particularmente, predominó el ***lenguaje*** natural en su manifestación verbal como estrategia de los estudiantes para comunicar a sus compañeros las conjeturas que realizaron a partir del análisis de los datos; así mismo, fue necesario que las ideas expresadas se presentaran de forma escrita a través de ejemplos para que fueran comprendidas y validadas. Al respecto,

A pesar de que en un principio los estudiantes se mostraron, por un lado, dubitativos por no tener una estrategia determinada previamente para hallar una solución, y por otro, poco propositivos para explorar los datos suministrados que los condujeran a una respuesta, lograron superar estas dificultades y se evidenciaron aspectos positivos reflejados en los diferentes métodos y procedimientos matemáticos propuestos para resolver la situación, expresados mediante lenguaje natural y simbólico; además, después de que se llevara a cabo una discusión grupal, en la que los estudiantes expresaron sus argumentos y mostraron las diferentes maneras en que razonaron y procedieron en la situación, se destaca que llegaron a una expresión algebraica luego de observar características esenciales de los datos y las conclusiones que se generaron en cada grupo. Así, el desarrollo de esta tarea dio cuenta de cómo las IMA, al permitir y propiciar un mayor protagonismo del estudiante en la búsqueda de soluciones, lograron inicialmente que el procedimiento de la suma surgiera como un medio adecuado para solucionar un problema, de manera que su utilidad fuera evidente, y luego posibilitaron la identificación de regularidades que acercaron a los estudiantes al proceso de generalización a través de la representación algebraica de la conjetura propuesta, dotando así de sentido los conceptos y procedimientos matemáticos involucrados.

4.2. Tarea: Dominó mágico

La tarea denominada *Dominó mágico* realizada los días 23 y 30 de agosto, y 6 de septiembre buscaba que mediante la manipulación y exploración de las fichas tradicionales del dominó se hallara un modelo a seguir para la formación de cuadrados, derivado de la observación y abstracción de patrones que se repetían cada vez que se lograba construir esta figura exitosamente, y que una vez construidos los cuadrados posibles, siguiendo este modelo, se hiciera una generalización con respecto a la cantidad de fichas utilizada para cada cuadrado y al número de fichas que formaban cada lado.

1. Reconocimiento de la situación e identificación del problema a resolver: la tarea se presenta con el siguiente enunciado:

- Formar todos los cuadrados posibles con las fichas de dominó ¿Es posible utilizar todas las fichas? ¿Los cuadrados que realizaste son todos los posibles? ¿Por qué?

Ilustración 15. Pregunta propuesta en la tarea *Dominó mágico*

Los estudiantes se reunieron en grupos de 2 o 3 integrantes y después de leer el enunciado, se dispusieron a construir los cuadrados, basándose principalmente en la noción que afirma que un cuadrado es un cuadrilátero de lados iguales.

Ilustración 16. Construcción de los cuadrados *Dominó mágico*

En esta fase de exploración y manipulación del material, los estudiantes a través del ensayo-error construían cuadriláteros con las diferentes fichas de dominó, armándolos y desarmándolos reiteradamente, y aunque no llegaban a una solución concreta, estos ensayos y errores les permitían identificar características que sentarían las bases para la formulación de las conjeturas.

2. Formulación de conjeturas: las construcciones originadas en la exploración que los estudiantes hacían de la situación, y que eran consideradas por ellos como cuadrados, fueron las primeras conjeturas.

Ilustración 17. Conjetura 1: construcción cuadrilátero

Ilustración 18. Conjetura 2: construcción cuadrilátero

Ilustración 19. Conjetura 3: construcción cuadrilátero

Ilustración 20. Conjetura 4: construcción cuadrilátero

De acuerdo con Ponte *et al.* (2006) "las conjeturas pueden surgir en el alumno de diversas formas, por ejemplo, por observación directa de los datos, por manipulación de los datos, o por analogía con otras conjeturas" (p.33). Estas emergen en el contexto de una situación, a partir de la observación de determinadas características que se tienen en cuenta, y aunque inicialmente son especulativas, no son totalmente arbitrarias.

3. Realización de pruebas y refinamiento de conjeturas: los estudiantes se basaron en su percepción visual para justificar que las construcciones eran cuadrados, sin ofrecer argumentos que respaldaran objetivamente dichas conjeturas, por lo cual se les pidió una explicación más convincente que no apelara a un juicio tan subjetivo; para responder a esta petición, empezaron a contar las fichas de dominó de cada lado de los cuadrados que construían, con el fin de comprobar si eran iguales; aquí se observa que asumieron implícitamente una unidad de medida no convencional, es decir, la ficha de dominó, de forma análoga a como ocurrió en la historia previamente a la estandarización de las medidas, lo cual demuestra que estimular en los estudiantes la búsqueda autónoma de soluciones, como se propuso con las IMA, propició el surgimiento de objetos y procedimientos matemáticos como medios para la solución a un problema, lo cual puede generar condiciones favorables para lograr un aprendizaje significativo.

En el intento de uno de los grupos por justificar formalmente sus construcciones utilizando parte de la definición de cuadrado, se les presentó una dificultad: al construir un cuadrilátero que para ellos visualmente era un cuadrado, el resultado del conteo de la cantidad de fichas de cada lado era diferente, puesto que al contar estaban omitiendo la parte de los extremos que aparecían perpendiculares a ese lado y que equivalían a media ficha de dominó, evidenciándose así la resistencia frecuente a aceptar los números racionales, que son menos intuitivos que los naturales. De esta manera, cuando este grupo pretendía construir un cuadrilátero, cuidándose de poner un número de fichas supuestamente igual en cada lado, la figura resultaba siendo un cuadrilátero rectángulo, cuyos lados adyacentes no tenían la misma medida.

Al continuar con la exploración para superar esta dificultad, algunos estudiantes del grupo establecieron la siguiente equivalencia: dos fichas yuxtapuestas por el largo de manera vertical, miden lo mismo que el largo de una ficha ubicada de forma horizontal sobre ellas, de lo que dedujeron que el ancho de una ficha equivale a la mitad del largo; con esto, aceptaron y reconocieron la validez de las partes de las fichas de dominó, ubicadas en las esquinas, que medían la mitad de la unidad elegida -ficha de dominó-, es decir, una cantidad racional, y la empezaron a incluir en la suma para la medida de cada lado; de esta manera pudieron comprobar cuáles de las conjeturas iniciales cumplían las condiciones para ser un cuadrado. Estos estudiantes superaron la dificultad y lograron construir cuadriláteros con las medidas de sus lados iguales entre sí.

A partir de la observación de los cuadriláteros que realizaban, dos de los grupos comenzaron a notar regularidades en sus construcciones, para las que propusieron de manera independiente la misma conjetura que las describen: el primer método (conjetura 5) consistía en hacer que un lado del cuadrado y su opuesto midieran una cantidad entera de veces la unidad de medida elegida -la ficha de dominó-, y que los dos lados restantes se formaran con una unidad menos, como se muestra a continuación:

Ilustración 21. Conjetura 5. Método 1 para la construcción del cuadrado

Al momento de indagar a los estudiantes por la descripción del método empleado en la construcción del cuadrado, uno de los grupos logró comunicar verbalmente el razonamiento a través del ***lenguaje*** natural; mientras que el otro grupo ilustró lo esencial del método mediante un ***lenguaje*** gráfico (*ilustración 22*) y lo explicó mediante ***lenguaje*** natural. En general, se evidenció en los estudiantes mayor entusiasmo por la actividad y mayor seguridad para justificar sus construcciones con base en la definición de cuadrado, porque la discordancia que se les presentó en un principio, entre la figura que se observaba y la cantidad de fichas de cada lado, se había resuelto.

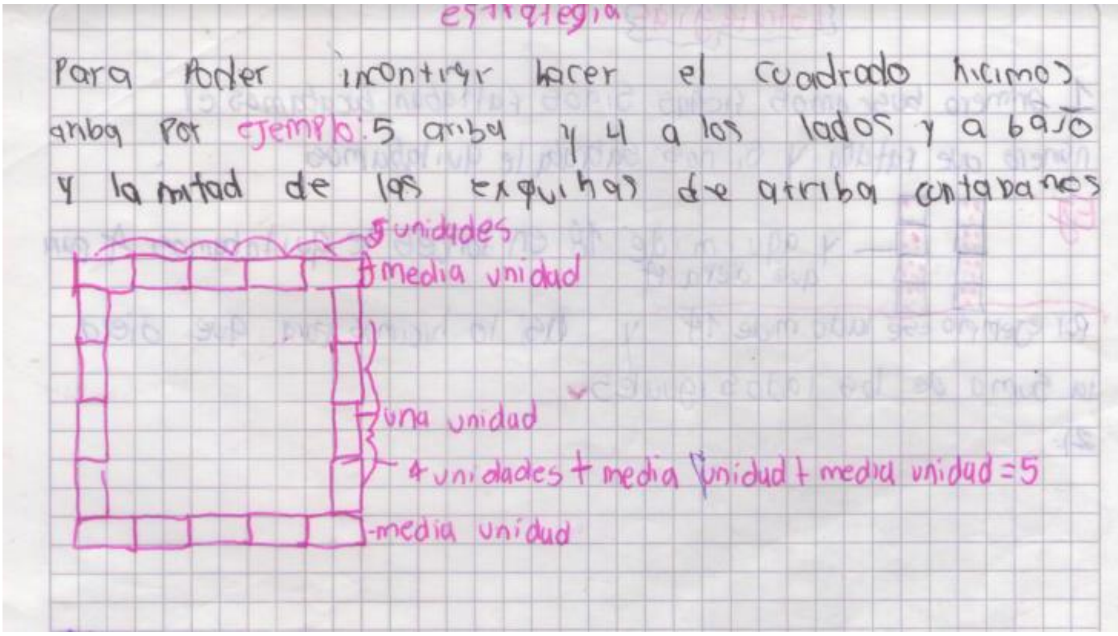


Ilustración 22. Argumentos sobre la conjetura 5

Un tercer grupo propuso el segundo método (conjetura 6) que consistía en formar cada lado del cuadrado poniendo en cada esquina una ficha de dominó perpendicular a las demás fichas que conforman el lado, de manera que completaba la medida de dicho lado con media ficha de dominó, como se observa en la *ilustración 23*:

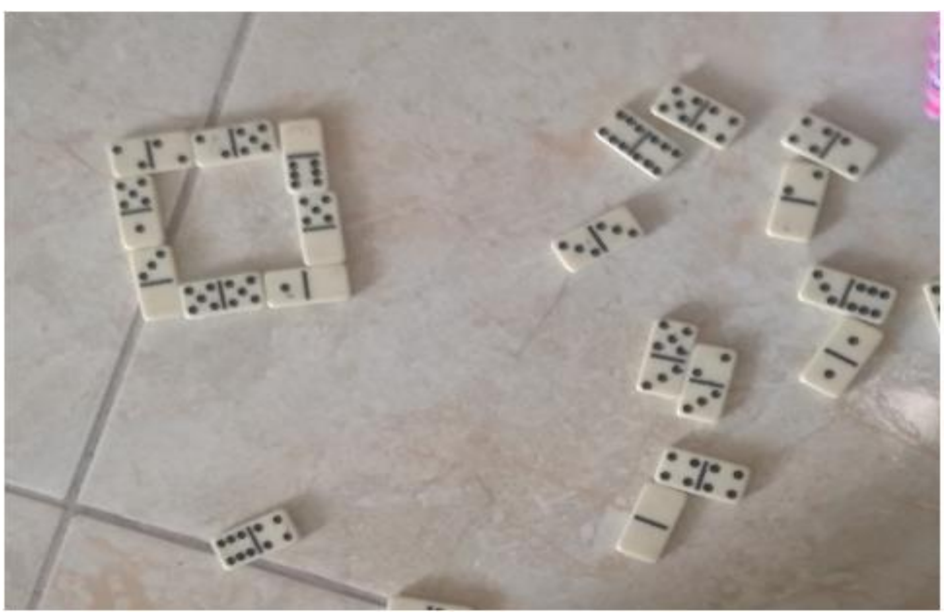


Ilustración 23. Conjetura 6. Método 2 para la construcción del cuadrado

Con relación a esta propuesta surgió el siguiente episodio:

Profesor (P): *“(...) ¿Cómo hacen ustedes para saber que los lados del cuadrado que están construyendo son iguales?”*

Estudiante 1 (E1): *“Midiéndolo con la regla”*

P: *“¿Solamente con la regla?”*

Estudiante 2 (E2): *“Contando las fichas (...) los cuadritos de las fichas”*

P: *“¿Cuántas fichas tiene este cuadrado?”*

E2: *“ocho”*

P: “*¿Cuántas fichas tiene cada lado?”*

E2: *“(...) dos y medio (...) queda así (...) queda este pedazo* [media ficha del dominó] *con esta* [ficha entera del dominó] *y esta* [ficha entera del dominó], *queda* [el lado] *con dos y medio”*

En este diálogo se observa cómo los estudiantes logran reconocer la mitad de la ficha como cantidad que suma en cada lado del cuadrado; el cuadrado que se muestra en la *Ilustración 23* y el diálogo sostenido con los estudiantes permiten identificar los ***procedimientos*** que realizaron en su construcción; particularmente, se evidencia que utilizaron la unidad de medida establecida, la ficha de dominó, para medir cada lado; y que sumaron las unidades enteras con la mitad de las fichas ubicadas en las esquinas, lo cual puede constituirse en los cimientos de la suma de fracciones. Así mismo, en el diálogo se destacan el ***lenguaje*** gestual y verbal, utilizados por los estudiantes para indicar y explicar cómo se efectúa la medida de cada lado; este hecho muestra la importancia del lenguaje dentro de las IMA porque las conjeturas pueden expresarse tanto mediante el lenguaje verbal como gestual para completar aquello que no es dicho (Ponte *et al.*, 2006). De esta forma, las propuestas para solucionar un problema o para superar un obstáculo, que formulaban y comunicaban los estudiantes implícita o explícitamente, se interpretan como conjeturas en las IMA, y las explicaciones o procedimientos para sustentar dichas propuestas, se interpretan como pruebas o demostraciones a esas conjeturas.

La prueba de conjeturas en las IMA puede confundirse con el proceso inductivo, porque “la manipulación de datos comienza a apuntar en el sentido de cierta conjetura” (Ponte *et al.*, 2006, p.33), es decir, se pone a prueba la conjetura con varios datos, y se descarta si se encuentra un caso en el que no se verifica; así, para probar sus conjeturas, los estudiantes empezaron a formar cuadriláteros de acuerdo a los métodos encontrados por ellos y confirmaron que todas las figuras que se formaban eran cuadrados, dado que todos los lados medían el mismo número de fichas de dominó.

Realizar la comprobación a partir de la construcción de varios cuadrados usando las conjeturas 5 y 6, les permitió a los estudiantes formular nuevas conjeturas. La conjetura 7, que surgió a partir del primer método para la construcción de los cuadrados, establecía una forma general para conocer la cantidad de fichas con que se formaba un cuadrado, conociendo la medida de su lado: se suma el doble de la cantidad de fichas del lado, con el doble de esta cantidad reducida en una unidad. A continuación, se ve la secuencia construida siguiendo este método, y el procedimiento que hicieron para obtener uno de los resultados:

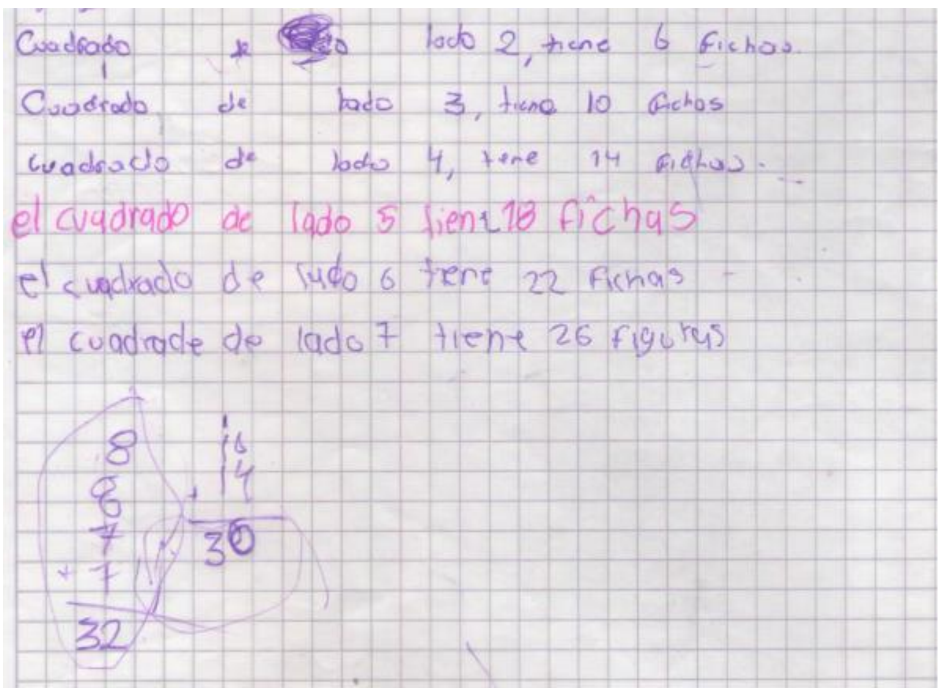


Ilustración 24. Secuencia y prueba en la conjetura 7

En la *ilustración 24* se observa una variación constante en la secuencia, que consiste en que por cada unidad que aumente la medida de los lados del cuadrado, el total de fichas que conforman el cuadrado se aumenta en cuatro unidades; además, se hace explícito el ***procedimiento*** que los estudiantes realizaron, con base en la nueva conjetura, para verificar la posibilidad de continuar la secuencia y establecer la cantidad máxima de fichas con las que se podía construir el cuadrado más grande; particularmente, los estudiantes efectuaron la operación suma para determinar la cantidad de fichas que se requerían en la construcción de un cuadrado cuyos lados medían 8 unidades, y dado que el resultado obtenido, correspondiente a 30 fichas de dominó, excedía en dos unidades la cantidad total del juego, se descartó dicha posibilidad, observándose con esto, que gracias a la investigación realizada, los estudiantes no solo llevaron a cabo procedimientos matemáticos, sino que también tuvieron en cuenta el contexto del problema que estaban resolviendo para ofrecer una solución, lo cual demuestra mayor inmersión de los estudiantes en la situación problema, que propicia la utilización consciente de los objetos matemáticos.

En el siguiente diálogo, otro de los grupos formula la conjetura 8, derivada del primer método sobre la construcción de cuadrados:

P1: *¿Cuántas fichas utilizó para hacer ese cuadrado?*

E3: *"Uno, dos, tres… Veintidós"*

E4: *"¡Ay! ya tengo una idea; he visto y he notado que, para hacer un cuadrado hay que usar fichas como que tengan mitad. ¿Sí me entiende? Por ejemplo acá hay veintidós, y el veintidós tiene mitad (...) por ejemplo si yo hago uno* [cuadrado] *con cinco* [fichas de dominó] *en cada lado, entonces utilizaría veinte figuras* [fichas de dominó], *y veinte tiene mitad. Voy a ver uno* [cuadrado] *con veinte* [fichas de dominó]*"*

Para formular esta conjetura, este grupo hizo la abstracción de una regularidad expresada como "tener mitad", con base en la cantidad de fichas que observaron en los cuadrados que habían construido, esto da cuenta de cómo la búsqueda de regularidades, y de modelos que las describan, dieron pie a otras búsquedas similares, vislumbrándose así las bases para el desarrollo del pensamiento variacional, el cual de acuerdo con los Estándares "se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente" (MEN, 2006, p.66).

De igual manera quedó en evidencia la conjetura 9 enunciada implícitamente por este grupo, al asumir que si el cuadrado que medía 6 fichas de dominó se formaba con 22 fichas, entonces el cuadrado cuyo lado midiera 5 fichas de dominó, se formaría con 20 fichas, es decir, esta conjetura establecía una relación entre la cantidad total de fichas que conforman el cuadrado y la medida de sus lados, y consistía en que al aumentar 1 unidad en la medida del lado del cuadrado, aumentaría 2 unidades en el total de fichas que lo formaba. De esto se puede inferir que las IMA, al permitir que los estudiantes exploraran los datos, propició un espacio en el que pudieron realizar propuestas, observaciones o deducciones, de manera que tuvieron un papel activo en la construcción del conocimiento.

A continuación se muestra la construcción que hicieron los estudiantes para probar la conjetura 8 empleando el primer método que encontraron para construir cuadrados:

Ilustración 25. Construcción del cuadrado y comprobación de la conjetura 8

Luego de la construcción del cuadrado propuesto, se interpeló a los estudiantes de este grupo:

P2: *"¿Este es un cuadrado? ¿Cómo lo sabes?"*
E5: *"No (...) porque este* [lado] *tiene cuatro y medio y este* [lado] *tiene cinco"*
E4: "*Ahora yo, uno, dos, tres, cuatro y cinco*"
E5: *"¡Sí es un cuadrado! Sí es un cuadrado"*

P1: ¿*Y cuántas fichas usó?*

E4: *Las que yo le dije, veinte*

P1: *¿Ahí hay veinte fichas?*

E3 y E4: *"Sí, porque (...) cinco, diez, quince y veinte"*

P2: *"cuenta por favor"*

E3: *"(...) dieciocho"*

E4: *"Y dieciocho tiene mitad, ¡si ve!"*

En la confrontación de ideas que se desató en torno a la situación, los estudiantes identificaron el error en la conjetura 9, dado que no se cumplía que al aumentar 2 unidades en el total de fichas que formaba un cuadrado, aumentara en 1 unidad el lado del cuadrado; sin embargo, se comprobó la conjetura que establecía que el total de fichas con que se construía un cuadrado con fichas de dominó siempre correspondía a un número par. En el diálogo se llamó la atención de los estudiantes sobre casos específicos, que posiblemente no tuvieron en cuenta por el afán de generalizar las coincidencias halladas en casos anteriores.

El tercer grupo de estudiantes, al emplear el segundo método para la construcción de los cuadrados, observaron una regularidad, que los llevó a proponer que por cada media ficha de dominó en que se aumentaba la medida del lado, la cantidad total de fichas utilizadas para la formación del cuadrado aumentaba en 2, estableciendo de esta manera la conjetura 10, que les permitió hacer la siguiente lista, sin la necesidad de construir todos los cuadrados que se mencionan.

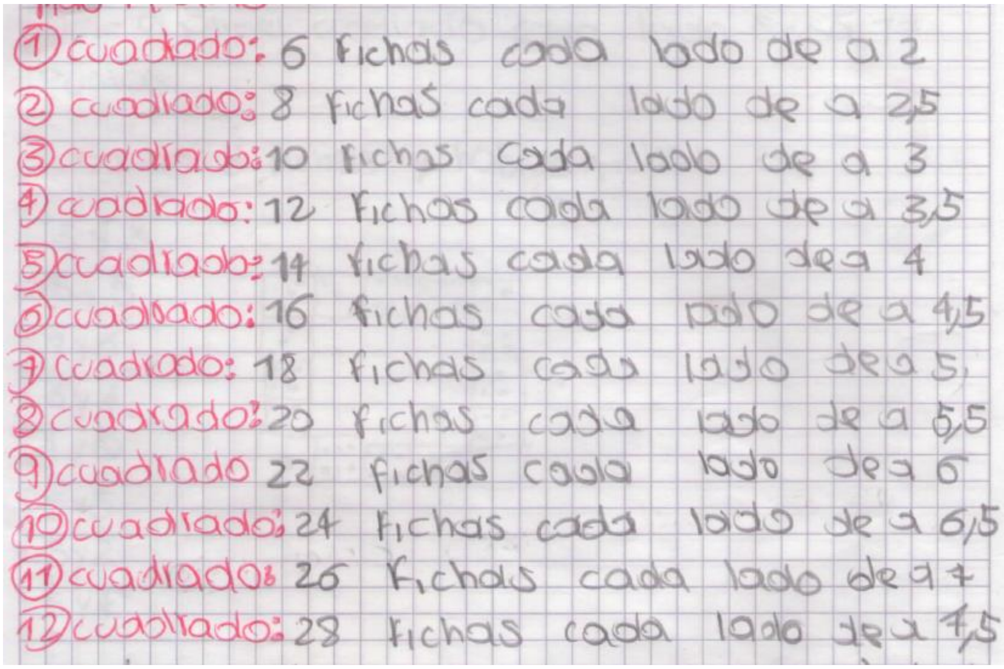


Ilustración 26. Regularidad en la conjetura 10

En esta conjetura se observa que los estudiantes se acercaron a una generalización sin fórmula explícita, que permitía conocer la cantidad de fichas que necesitaría un cuadrado conociendo la medida de su lado, y lograron expresar dicha generalización a través de un ***lenguaje*** natural.

4. Argumentación, demostración y evaluación del trabajo realizado: utilizando las conjeturas para la construcción de cuadrados, y las conjeturas que relacionaban la cantidad de fichas del lado con el total de fichas utilizada para la construcción de cuadrados, cada grupo predijo la cantidad de fichas que requerían para la formación de algún cuadrado y posteriormente hizo la construcción para validar dicha predicción, como se indica a continuación:

P1: *"Ya está* [construido] *el de 14* [el cuadrado de 14 fichas en total] (...) *Según la secuencia de acá* [de la lista] ¿*Cuál sigue?"*

E1 y E2: *"El de 16* [el cuadrado de 16 fichas en total]*"*

P1: *"Entonces ¿Será que se puede construir uno* [cuadrado] *de 16* [fichas en total]*?"*

E1: *"Falta* [construir] *el de 16* [el cuadrado de 16 fichas en total] *(...) y que me dé cuatro y medio cada lado"*

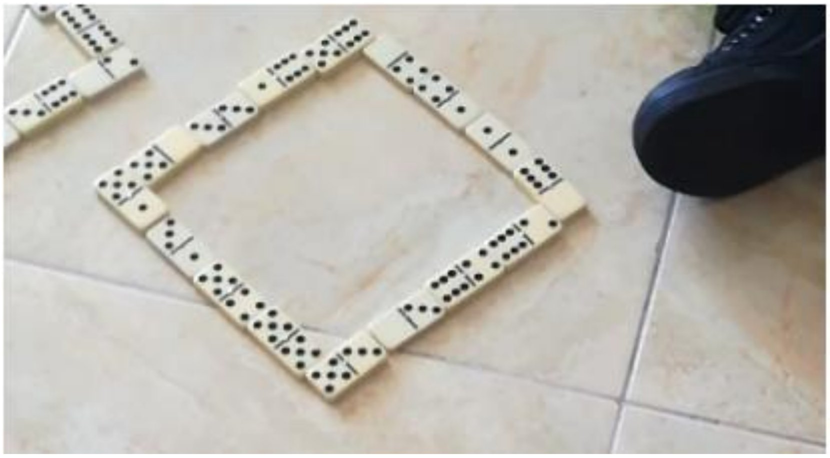


Ilustración 27. Construcción del cuadrado con 16 fichas de dominó

La aplicación de la tarea permitió a los estudiantes recrear el acercamiento que tuvo la humanidad a actividades matemáticas, al proporcionar situaciones en las que surgiera una necesidad que se pudiera satisfacer con determinados conceptos y procedimientos matemáticos, los cuales, al aparecer dentro de un contexto en el que desempeñaban una función evidente y clara para los estudiantes, pueden ser mejor comprendidos y aplicados. Particularmente, los estudiantes se acercaron a la acción de medir usando los materiales disponibles en la tarea, con los que establecieron la unidad de medida y prescindieron de sistemas convencionales de medida; dicho proceso de medición surgió para satisfacer la necesidad de, al momento de hacer las construcciones, cumplir con la característica esencial del cuadrado, de que las medidas de los cuatro lados son iguales; en esta caso, la definición de cuadrado se constituyó en una idea de anclaje adecuada que tenían los estudiantes, que les permitió la interacción con el material que se les presentó, lo cual es un requisito para lograr un aprendizaje significativo (Rodríguez 2011). Así mismo, se percibió en los estudiantes un avance en la comprensión de los números racionales, al reconocerlos y tenerlos en cuenta en la medición, en la construcción de los cuadrados y en la realización de la operación suma. Además, la tarea propició la observación de variaciones y regularidades numéricas en los cuadrados construidos, y el acercamiento a la abstracción y generalización de las mismas.

Durante el desarrollo de la tarea, los estudiantes asumieron una actitud propositiva y participativa en la manipulación del material y en la formulación de conjeturas; la comunicación se constituyó en un elemento clave en el desarrollo de la tarea, evidenciándose la importancia del lenguaje natural, gestual o gráfico para expresar, argumentar y explicar, en las discusiones y diálogos sostenidos entre los compañeros y maestros en formación.

4.3. Tarea: Tiro al blanco

Para la tarea *Tiro al blanco* realizada los días 27 de septiembre y 4 de octubre, se presentó a los estudiantes un blanco de anillos, con un prototipo similar al que se muestra a continuación:

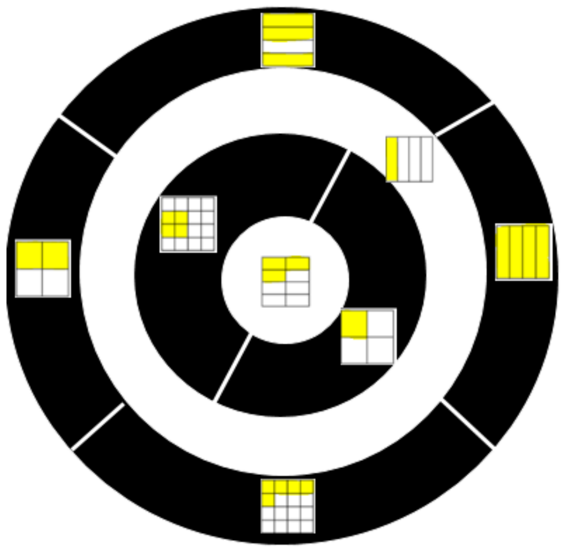


Ilustración 28. Gráfico de un blanco de anillos

Después de conformar grupos de 4 estudiantes, se situó el blanco de anillos en el suelo a donde cada integrante lanzaba un objeto que debía caer en una de las secciones en las que se encontraban las representaciones gráficas de diferentes fracciones de la unidad (¼, 4/16, 5/16, ⅜, ¾, 2/4, 4/4); en caso de que el objeto cayera por fuera del tablero, se debía repetir el lanzamiento.

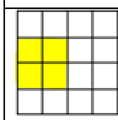
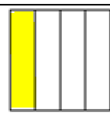
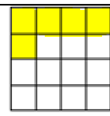
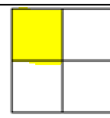
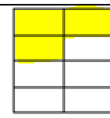
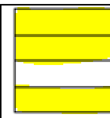
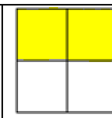
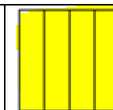
En esta tarea se pretendía que los estudiantes hallaran el puntaje que resultaba de sumar las fracciones (representadas gráficamente por las partes sombreadas de los cuadrados), en los que caía el objeto que lanzaban, y de esta manera, se enfrentaran a la suma de fracciones heterogéneas, y a la necesidad de transformarlas en fracciones homogéneas.

1. Reconocimiento de la situación e identificación del problema a resolver: se les dieron a los estudiantes algunas indicaciones básicas para que empezaran a jugar y registrar en la tabla, marcando con una X, la casilla donde estaba representada la fracción que obtenían en cada lanzamiento del objeto.

Tiro al blanco

Nombre: ____

Registra en la tabla el resultado que obtuviste en cada lanzamiento, marcando con una X la casilla que corresponda.

N° de lanzamiento	**Figura obtenida**							
								
1								
2								
3								
4								
5								

¿Cuál es el resultado total obtenido? ____

Ilustración 29. Tabla de registro para el *Tiro al blanco*

Mediante este registro, los estudiantes empezaron a identificar las fracciones representadas gráficamente para señalarlas en la tabla. En la tarea no se especificó a qué procedimientos debían acudir los estudiantes para hallar el resultado de la suma de las secciones sombreadas; de esta manera, se buscaba que los estudiantes tuvieran autonomía en la situación y se vieran exhortados a encontrar una estrategia para resolver el problema por sí mismos.

2. Formulación de conjeturas: la primera conjetura que se observó y que fue empleada por la mayoría de los grupos consistía en que, para hallar el resultado de la suma de las fracciones representadas por las partes sombreadas se debían contar dichas partes, independientemente de que la cantidad de divisiones de cada unidad fuera diferente. En la *ilustración 30*, se observan las representaciones gráficas de las fracciones que se obtuvieron en cada uno de los lanzamientos realizados por uno de los equipos. A través del uso del ***lenguaje*** natural, los estudiantes enuncian el ***procedimiento*** que efectuaron, es decir, el conteo de las partes coloreadas de cada unidad y el resultado que obtuvieron. Esta primera conjetura da a entender que estaban asumiendo las diferentes partes de los cuadrados como iguales y en consecuencia, las respuestas de los estudiantes fueron dadas en cantidades enteras como se muestran a continuación:

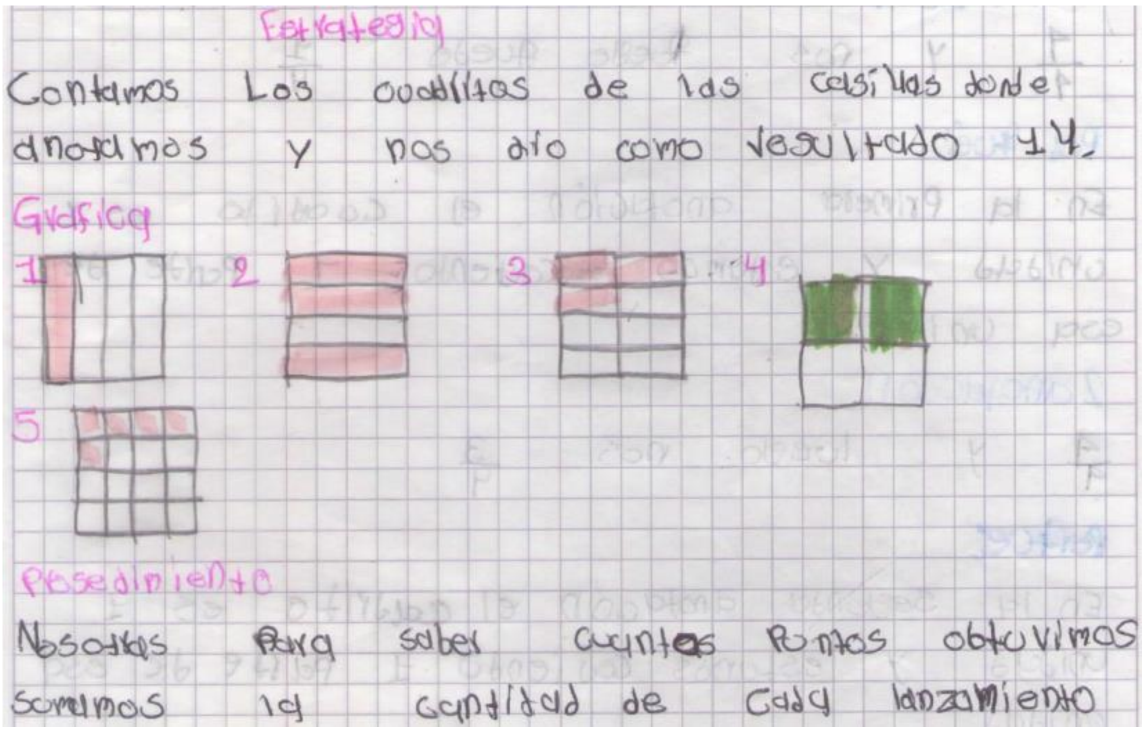


Ilustración 30. Conjetura 1 en *Tiro al blanco*

Ante esta primera conjetura, los maestros en formación indagaron acerca de la naturaleza de esa cantidad que ofrecían como respuesta a aquello que estaban contando; como respuesta decían que estaban contando unidades o partes, frente a lo cual se les hizo notar la imprecisión de la misma, y por ende, la poca información que ofrecía.

3. Realización de pruebas y refinamiento de conjeturas: las discusiones propiciadas por los maestros en formación en cada grupo crearon la necesidad de replantear la primera conjetura. En el diario reflexivo elaborado para dicha clase, se describe el siguiente episodio, en el que los estudiantes llegan a una conclusión que se considera clave porque apunta a la identificación del problema:

Hubo un momento en el que les pregunté si era posible sumar los resultados que ellas [las estudiantes] *estaban escribiendo, teniendo en cuenta que las partes en las que estaban divididas* [las unidades] *eran diferentes. Al no obtener respuestas, reuní a los cuatro estudiantes para que lo discutieran, y llegaron a la conclusión de que no se podía realizar la suma porque necesitaban pasarlo a una misma "unidad".*

Aquí se observa que los estudiantes reconocieron que la conjetura inicial estaba errada puesto que para realizar la suma, las secciones sombreadas deberían estar expresadas en términos de una misma "*unidad*", es decir, debían ser homogéneas. Con la expresión *unidad* se infiere que los estudiantes se referían a cada una de las partes en las que está dividido el cuadrado. Como respuesta a este error, un estudiante hizo la siguiente propuesta, que se registró en el diario reflexivo:

[Un estudiante] propuso realizar la división de las partes pintadas (1 parte de 4) en otras 4 partes iguales; al indagar por qué era necesario hacer eso, el estudiante respondió que lo realizaron con el fin de que quedara con la forma del cuadrado más pequeño [fracción más pequeña] *(que lo representaba 1/16) y que al partirlo de esa manera era más fácil realizar la suma.*

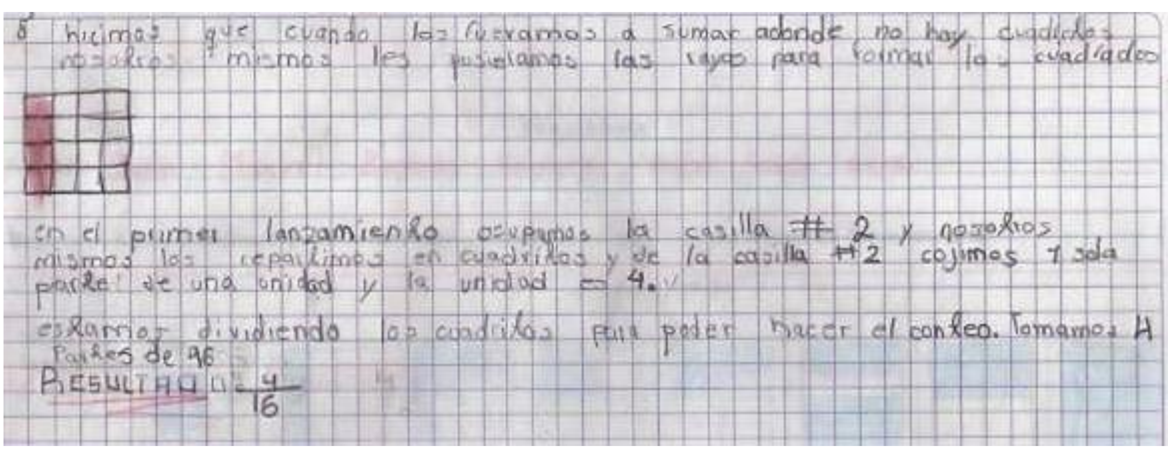


Ilustración 31. Propuesta para dividir los cuadrados en partes homogéneas

"Hicimos que, cuando los fuéramos a sumar, donde no hay cuadritos nosotros mismos les pusiéramos las rayas para formar los cuadrados."

"En el primer lanzamiento ocupamos la casilla #2 y nosotros mismos los repartimos en cuadritos, y de la casilla #2 cogimos 1 sola parte de una unidad, y la unidad es 4.

Estamos dividiendo los cuadritos para poder hacer el conteo. Tomamos 4 partes de 16

Resultado: 4/16"

En la *Ilustración 31* se observa la explicación de algunos estudiantes sobre el procedimiento que realizaron antes de sumar: primero, asumen que todo el cuadrado está fraccionado en 4 partes, y específicamente la parte pintada es ¼ del total, luego, al ver que otro cuadrado tiene 16 particiones, deciden realizar las divisiones necesarias al primer cuadrado para igualarlas a las del segundo, esto quiere decir que identificaron a 16 como el denominador común de las fracciones representadas en los cuadrados, concluyendo que ¼ del cuadrado es equivalente a 4/16. De esta manera fue propuesta la segunda conjetura, que afirmaba que para sumar las fracciones heterogéneas de dos cuadrados, que estaban divididos en un número de partes diferentes, debían hacer las divisiones adicionales necesarias en el cuadrado de menos divisiones, para que las secciones de ambos fueran homogéneas, es decir, los estudiantes reconocieron implícitamente la necesidad de realizar la amplificación para que, gracias a este ***procedimiento***, se pudiera llevar a cabo la suma; además hicieron uso del ***lenguaje*** gráfico para representar la forma final del cuadrado tras realizar las particiones, y mediante el ***lenguaje*** natural describieron la conversión de fracciones heterogéneas a homogéneas que usualmente se hace numéricamente.

Las IMA implican trabajar a partir de situaciones que interpelen a los estudiantes o que sean inicialmente confusas, y que una vez sean aclaradas y ordenadas, se vean exhortados a formular conjeturas y a verificarlas (Ponte *et al.*, 2006); algunas de estas características se evidenciaron en el proceso llevado a cabo para la formulación de las conjeturas propuestas.

4. Argumentación, demostración y evaluación del trabajo realizado: se generó una discusión con todo el grupo, a partir de la problematización de una suma de fracciones heterogéneas representada gráficamente (similar a las realizadas en la tarea del *Tiro al blanco*), con su correspondiente resultado hipotético obtenido de la misma forma (conjetura 1) que utilizaron los estudiantes en la solución a la tarea inicialmente presentada, con el fin de movilizar los planteamientos realizados, hacer más evidente el error, y retomar los aportes a los que cada grupo ya había llegado, de manera que entre todos llegaran a una refutación del resultado con argumentos.

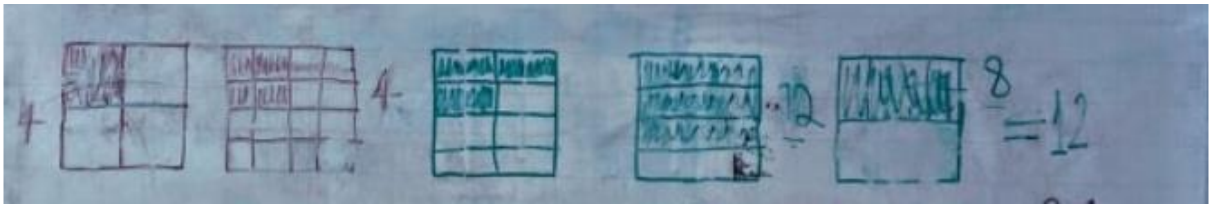


Ilustración 32. Suma de fracciones heterogéneas

En la *Ilustración 32* se observa la suma de fracciones que se propuso a los estudiantes. Ante la propuesta del 12 como resultado, se preguntó al grupo si estaba o no de acuerdo; en el tablero se registraron las respuestas de los estudiantes, es decir, los argumentos y procedimientos para aceptar o refutar la conjetura, como se observa en las *Ilustraciones 33* y *34:*

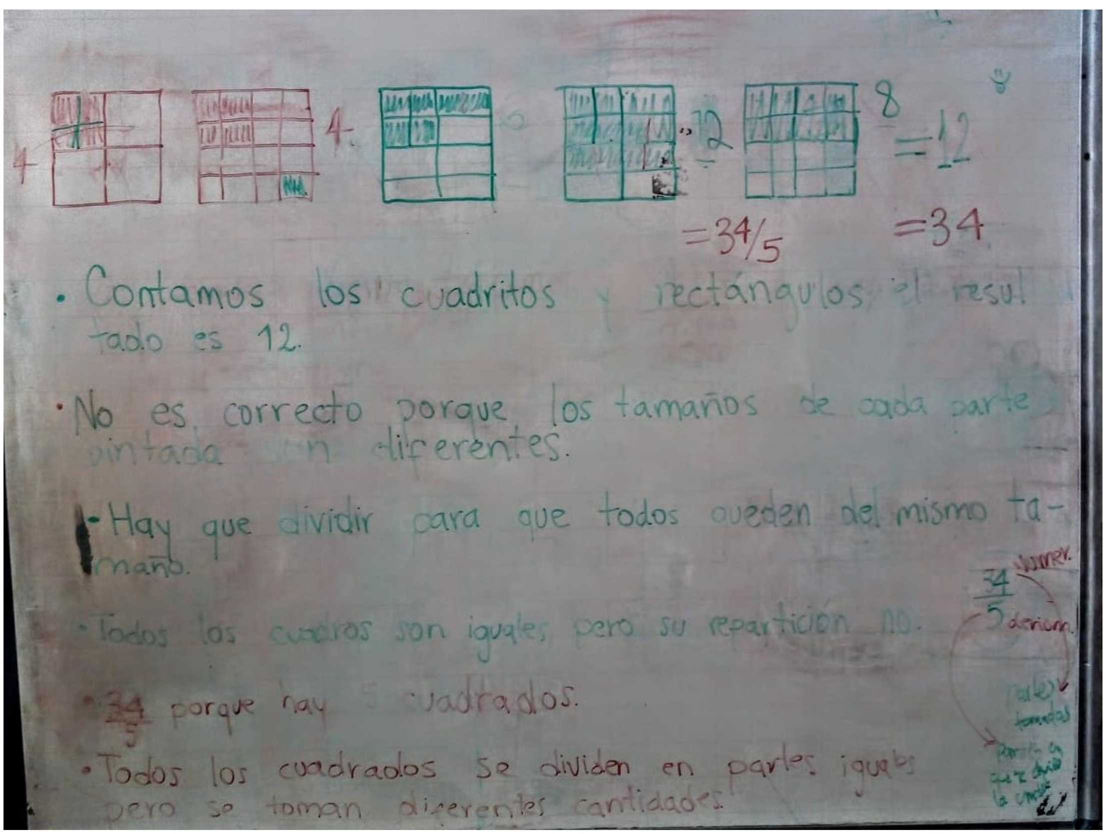


Ilustración 33. Argumentos de la fase 4 en *Tiro al blanco*

"Contamos los cuadritos y rectángulos y el resultado es 12"

"No es correcto porque los tamaños de cada parte pintada son diferentes"

"Hay que dividir para que todos queden del mismo tamaño"

"Todos los cuadrados son iguales, pero su repartición no"

"34/5 porque hay 5 cuadrados"

"Todos los cuadrados se dividen en partes iguales, pero se toman diferentes cantidades"

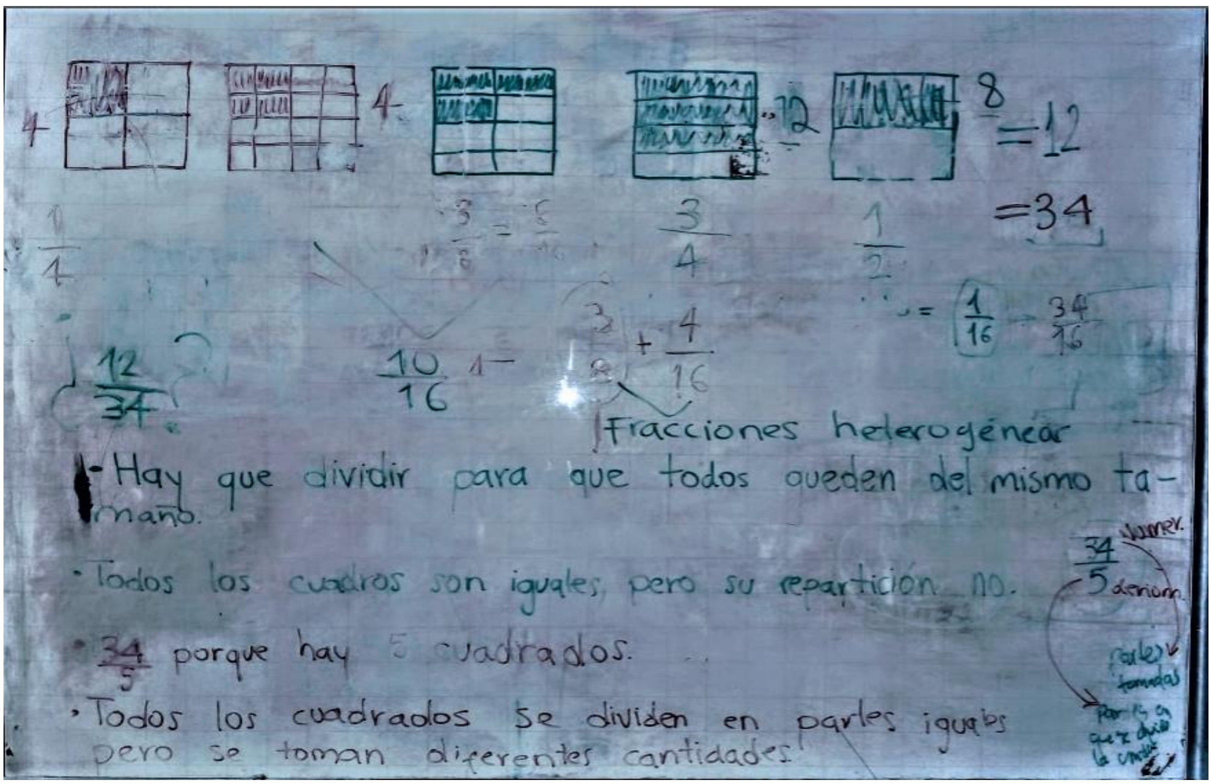


Ilustración 34. Argumentos y procedimientos de la fase 4 en *Tiro al blanco*

"¼ ⅜ = 6/16 ¾ ½"

"¿12/34? 10/16 ⅜+ 4/16 fracciones heterogéneas 1/16 34/16"

Los argumentos dados por los estudiantes fueron registrados en el tablero, independientemente de que estuvieran correctos o no, con el propósito de que los discutieran, hicieran ajustes a sus planteamientos y construyeran conjuntamente una solución al problema, que se pudiera llevar luego a la formalización. En la *ilustración 33* se observa que los estudiantes inicialmente asumieron el número 12 como respuesta correcta porque coincidía con la cantidad total de partes sombreadas en los 5 cuadrados; sin embargo, también se evidencian otros argumentos que no aceptaban dicha solución porque reconocían que no se debían sumar las partes que no eran iguales, y proponían como solución al problema, dividir aquellas unidades (cuadrados) cuyas partes fueran más grandes hasta igualarlas con la unidad de partes más pequeñas, que fue la solución propuesta por muchos en el desarrollo de la tarea inicial.

Después de que los estudiantes hicieron las divisiones e igualaron todas las unidades, contaron las partes señaladas, y enunciaron como respuesta 34 cuadraditos, de los más pequeños, en los que estaba dividida la unidad, sin utilizar la representación numérica de la fracción como referencia al todo del que hacían parte; posteriormente, propusieron representarlo como 34/5, argumentando que en total había 5 cuadrados (unidades), y de ellos se tomó 34 “cuadraditos” (partes) equivalentes a 1/16, pero luego se percataron de que las particiones necesarias para expresar ⅕ eran menores que las necesarias para expresar 1/16, y en consecuencia, 34/5 no correspondía con el resultado de la suma planteada.

Otra propuesta consistía en que como los 5 cuadrados estaban divididos en 16 partes cada uno, la fracción que representaba el resultado de la suma era 34/80, es decir, los estudiantes multiplicaron las 16 partes en que estaba fraccionada la unidad, por 5, que era la cantidad total de cuadrados (unidades) que había. De los dos argumentos dados por los estudiantes para expresar la suma de las partes sombreadas se infiere que hubo un reconocimiento de la necesidad de homogeneizar las fracciones, dividiendo cada unidad (cuadrado) en 16 partes, pero en las soluciones dadas no se estableció una relación inmediata con el todo del que hacían parte (16/16); ante esta dificultad, los maestros en formación hicieron la pregunta específica por la cantidad de partes, equivalentes a 1/16, que estaban sombreadas lo cual los condujo a establecer la relación entre la forma de expresar la parte individualmente, como 1/16, y el total de estas partes sombreadas, y a la realización de una suma de fracciones homogéneas que derivó en la respuesta de 34/16.

Con el fin de verificar el resultado obtenido gráficamente, se indagó a los estudiantes por la manera en que resolvían la suma de fracciones usualmente; una estudiante manifestó que se debía hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m) entre los denominadores, por lo cual se le sugirió realizar la suma de las fracciones 4/16 y ⅜ (que estaban representadas gráficamente en el tablero) utilizando este método, mientras que los demás estudiantes seguían intentando dar respuesta a la suma por otros medios. Gracias a las discusiones realizadas previamente, y a preguntas hechas por los maestros en formación, llegaron a la conclusión de que una de las fracciones debía transformarse en otra para que los dos denominadores fueran iguales(⅜ en 8/16); dicha conclusión hizo evidente para los estudiantes el concepto de fracciones equivalentes, y de su característica esencial, enunciada por uno de ellos, de que “representan una misma cantidad”; por su parte, la estudiante que realizó la suma hallando el m.c.m entre los dos denominadores, reconoció que el sentido de hacer esto era igualar los denominadores de ambas fracciones. De esta manera, se pudo establecer la conexión entre los dos métodos, logrando que a través del entendimiento del proceso de homogeneizar los denominadores, realizado gráficamente, cobrara sentido el mismo proceso, realizado algorítmicamente.

La tarea permitió a los estudiantes reconocer la necesidad de realizar la conversión de las fracciones representadas gráficamente, mediante el proceso de la amplificación, con el propósito de obtener fracciones que fueran equivalentes a las presentadas inicialmente y homogéneas entre sí, para poder realizar el procedimiento de la suma. Así mismo, el hecho de que los estudiantes se enfrentaran a la suma de fracciones heterogéneas y a la necesidad de convertirlas a fracciones homogéneas, mediante su representación gráfica, pudo facilitar visualmente la comprensión del proceso que implica dicha conversión, que no es tan evidente cuando se realiza numéricamente.

Los estudiantes mostraron interés tanto por el juego como por la situación problema que se originó a partir del mismo, tomando una postura propositiva reflejada en el planteamiento de conjeturas y estrategias que condujeran a posibles respuestas. Durante el desarrollo de la tarea fue primordial la comunicación entre los estudiantes y los maestros en formación, la cual se evidenció en los argumentos y preguntas que se generaron en los diálogos y discusiones alrededor de las soluciones dadas al problema planteado, que fueron presentadas, en su mayoría, mediante el lenguaje gráfico acompañadas de explicaciones en un lenguaje natural.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el desarrollo de la Práctica Pedagógica se tuvo como propósito analizar las contribuciones de la estrategia de las IMA al aprendizaje significativo de los objetos matemáticos que fueron abordados en el Semillero con estudiantes de 5° grado de la I.E La Asunción; a continuación se presentan algunas conclusiones que se derivan de las reflexiones suscitadas tras la implementación de esta estrategia de enseñanza y de aprendizaje.

A pesar de que en un principio los estudiantes tendían al trabajo individual, la estrategia de las IMA propició el trabajo colaborativo gracias a que generó la necesidad de interacción entre los estudiantes; esto permitió un acercamiento conjunto al conocimiento con base en los requerimientos de una situación específica, reafirmando así la idea planteada bajo el enfoque socioepistemológico, el saber se construye en el seno de las prácticas sociales.

Dado que los estudiantes estaban habituados a que el docente prescribiera el problema a solucionar y el método a seguir explícitamente, se percibió en ellos una dificultad para desarrollar las tareas iniciales al no tener una directriz clara, mostrándose renuentes a tomar la iniciativa para extraer de una situación el problema a resolver, proponer posibles soluciones y validarlas. Esta dificultad se superó en la medida en que se incentivaba a los estudiantes a desarrollar las tareas propuestas atendiendo a los momentos de las IMA, logrando que estos se fueran familiarizando poco a poco con la estrategia y que adquirieran más autonomía en la realización de las tareas posteriores.

El hecho de incentivar a los estudiantes a que justificaran sus respuestas con argumentos válidos, como una parte esencial de la investigación que realizaron, fomentó la aplicación de los objetos matemáticos, garantizando mayor probabilidad de comprensión; estos argumentos, en las IMA, no exigen una justificación matemática formal, sino explicaciones a sus respuestas, que se fundamenten matemáticamente. De esta manera, el diálogo generado en el interior de los grupos a partir del trabajo colaborativo favoreció a su vez el desarrollo de procesos comunicativos que permitieron, por un lado, mejorar la capacidad de expresión y argumentación de los estudiantes cuando formulaban y justificaban sus ideas y conjeturas, de manera que fueran más comprensibles para el resto de compañeros, y por otro, fortalecer la capacidad de escucha y el respeto por la palabra del otro al momento de atender, refutar o complementar la variedad de argumentos que surgían en el intento de solucionar ciertos problemas o necesidades presentadas en un contexto matemático.

En este proceso comunicativo que surgió a partir de la interacción entre los estudiantes, es importante resaltar los diferentes lenguajes que emergieron al resolver las tareas; al respecto se evidenció el uso del lenguaje natural como medio para describir y respaldar los procedimientos, conjeturas y argumentos propuestos para dar solución a las situaciones planteadas. De igual modo, el proceso de investigación permitió el acercamiento al lenguaje algebraico, que era nuevo para ellos, y que se originó por la necesidad de expresar ciertos patrones de manera general; sin dejar de lado el uso de un lenguaje gráfico, como un apoyo para la visualización de algunos procedimientos y objetos matemáticos.

La implementación de la estrategia de las IMA le dio un papel importante a las ideas intuitivas de los estudiantes que, aunque no eran matemáticamente formales, actuaban como ideas de anclaje útiles para la conexión con los objetos y procedimientos matemáticos; estas ideas posibilitaron el surgimiento de diferentes métodos y procedimientos para dar solución a un problema, algunos eran conocidos por los estudiantes por ser los que se trabajan de manera formal en las clases y otros eran estrategias propias que surgían de forma espontánea de acuerdo a las condiciones dadas, lo que permitió que los estudiantes asumieran una actitud más activa, logrando que se involucraran en la resolución de las tareas y que, de esta forma, fueran partícipes en la construcción de un conocimiento con sentido para ellos, enriqueciendo las clases gracias a la posibilidad de varios caminos válidos. De esta manera, se revela la importancia de las IMA para propiciar el aprendizaje significativo de los objetos y procedimientos matemáticos, puesto que estos surgen como respuesta a una necesidad concreta.

La posibilidad que tenían los estudiantes de corregir conjeturas y validar conclusiones, tanto en pequeños grupos como a nivel general, les permitió por un lado, que evidenciaran por sí mismos la apropiación que lograban de los objetos matemáticos que resultaron en el desarrollo de la tarea y que hubiera una re-construcción colectiva de los significados de los objetos matemáticos, y por otro, que se cambiara la connotación negativa que normalmente se tiene del error, utilizando el ensayo-error como un método válido para solucionar problemas, de manera que se desplazara el interés por la nota, al interés por el aprendizaje y por un buen proceso.

Respecto al enfoque socioepistemológico, se observó que los diseños de tareas en los que se privilegiaron situaciones que involucraban activamente al estudiante desde el hacer, manipulando material o interactuando con los compañeros, representaron mejor el propósito de las investigaciones en el aula, recibieron una mejor acogida y por ende, generaron una respuesta satisfactoria por parte de la clase. Este hecho posibilitó que los estudiantes adquirieran una mayor autonomía para guiar su aprendizaje, cambiando así la concepción sobre los roles que tradicionalmente asumen los maestros y estudiantes, y sentando las bases para un trabajo futuro que reconozca las capacidades que tienen los estudiantes como investigadores y re-creadores de conocimientos, y la importancia de que, a través del aprovechamiento de estas capacidades, se apropien de los significados que culturalmente se han asignado a los objetos matemáticos, es decir, realicen un proceso de re-significación de esos objetos, como lo propone este enfoque.

La estrategia de las IMA no presupone la planeación estricta de cada momento de la clase, sino unas pautas generales, puesto que, al dar un papel tan importante a la participación del estudiante, se acepta un alto grado de impredecibilidad; sin embargo, el profesor debe estar preparado para esto, adoptando una actitud flexible, que se adapte a los cambios, sin que esto signifique desviarse del propósito de la clase. Esta flexibilidad que se adoptó en el proceso permitió que lo trabajado en la clase desbordara los temas que se habían planeado, y que se establecieran conexiones entre estos y otros temas intra y extra matemáticos, de modo que se complementaran y enriquecieran unos a otros.

Las tareas propuestas se enfocaron en propiciar la formulación de conjeturas y el desarrollo de la argumentación por parte de los estudiantes, sin embargo, también se considera conveniente promover la elaboración de preguntas que impliquen un análisis más profundo de las situaciones y que conduzcan a una mejor reflexión sobre los objetos y procedimientos matemáticos tratados, pues fue un aspecto al que no se le dio mucha fuerza en nuestro proyecto con la implementación de las IMA. La elaboración de buenas preguntas por parte de los estudiantes, preguntas que reflejaran mayor profundidad y complejidad, fue un aspecto que podría mejorarse, por lo tanto esto puede constituirse en otro reto investigativo ¿Cómo la implementación de las IMA promueve en los estudiantes la elaboración de preguntas direccionadas a profundizar sobre un objeto matemático?

La Práctica Pedagógica como primera experiencia en el aula nos permitió el acercamiento a una estrategia de enseñanza y de aprendizaje -las IMA- que se aleja de las clases tradicionales a las que estaban habituados los estudiantes. En particular, la estrategia de las IMA nos mostró la importancia de dinamizar las clases con tareas abiertas que permitieran una participación activa y mayor autonomía de los estudiantes, adaptándonos al ritmo de trabajo de los estudiantes y aceptando la posibilidad del error como instrumento de aprendizaje. Ante tales circunstancias, fue necesario adoptar una actitud abierta frente a las soluciones de los estudiantes para que las exploraran libremente, aunque estas no fueran siempre acertadas.

La Práctica Pedagógica posibilitó la confrontación entre la práctica y la teoría recibida en el proceso de formación de la licenciatura, fue encontrarnos con la realidad y la complejidad de la escuela, llevándonos a adoptar una concepción más realista, y por ende, más cercana a los sucesos particulares del aula, que nos condujeron a la conclusión de que no hay métodos absolutos eficientes para todas las clases, sino que el maestro debe encontrar sus propias estrategias, con base en las reflexiones que haga sobre las necesidades que se presentan en el aula. La Práctica Pedagógica reafirma nuestro accionar de Ser maestro y nos crea la necesidad de búsqueda de estrategias que propicien mejores desempeños en los estudiantes, a través de la reflexión permanente de nuestra propia práctica docente.

Los procesos de investigación y de reflexión de la propia práctica, no pueden darse como concluidos, acabados; este es un proceso continuo y son muchas las ideas que quedan circundando y que pueden constituirse en futuras investigaciones. La estrategia de las IMA se implementó en la modalidad de semillero y de cierta manera esta modalidad favoreció su implementación, pero nos queda el interrogante ¿Cómo adaptar la estrategia de las IMA en un aula regular, con las demandas que exige el currículo, el número de estudiantes y los tiempos rígidos de clases?

6. REFERENCIAS

Aldana, L. (2010). Creando semilleros de investigación en la escuela. *Gondola, 5*(1), 3-10.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México. Editorial Trillas. Recuperado de http://www.arnaldomartinez.net/docencia_universitaria/ausubel02.pdf

Ballester, A. (2002). Cómo hacer el aprendizaje significativo en la práctica. Recuperado de http://www.aprendizajesignificativo.es/mats/El_aprendizaje_significativo_en_la_practica.pdf

Bonetto, M. (2016). El uso de la fotografía en la Investigación social. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social*, (11), 71-83. Recuperado de http://www.relmis.com.ar/ojs/index.php/relmis/article/view/151/230

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, (Esp), 83-102.

Cantoral, R., Reyes, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: El caso de latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, *18* (1), 5-17.

Cortez, A., Vega, H., y Pariona, J. (2009). Procesamiento del lenguaje natural. *Revista de ingeniería de sistemas e informática, 6*(2), 45-54. Recuperado de http://sisbib.unmsm.edu.pe/BibVirtual/Publicaciones/risi/2009_n2/v6n2/a06v6n2.pdf

García, M. (2011). El vídeo como herramienta de investigación. Una propuesta metodológica para la formación de profesionales en Comunicación. *Revista del CES Felipe, 2* (13). 1-12. Recuperado de http://www.cesfelipesegundo.com/revista/articulos2011/Monica%20Garcia.pdf

Gigosos, M. (2017). *Utilización del lenguaje gráfico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en secundaria* (tesis de maestría). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, 1–24. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Leal, N. (2015). La triangulación en investigaciones sociales y educativas: orientaciones generales. *UNA Investig@ción*, *7* (14), 14-37.

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismo*, *1* (8), 1-34. Recuperado de http://www.cide.edu.co/doc/investigacion/3.%20metodos%20de%20investigacion.pdf

Martínez, M. (2000). La investigación-acción en el aula. *Agenda Académica, 7*(1), 27-39.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa. Una introducción conceptual*. Madrid, España: Pearson Addison Wesley.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 1-103.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Y Ciudadanas*, 46–95.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias del Lenguaje. *Estándares Básicos de Competencias En Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Y Ciudadanas*, 18–45.

Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. En el del Programa de Transformación de la Calidad Educativa del MEN en convenio con la Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias. 31*(3), 121-134.

Pérez, D. y Gómez. W. (2009). *Las investigaciones matemáticas en el aula: actividad mediadora en el proceso de apropiación del concepto de polígono* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín.

Ponte, J., Cunha H., Oliveira, H. (1995). Investigaçoes Matemáticas na sala de aula. *Actas do ProfMat95, Associação de Professores de Matemática*, 161-167. Lisboa, Portugal.

Ponte, J. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação, Vol.* 2, pp. 93-169.

Ponte, J. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Gímenez, L. Santos y J. Ponte (Ed.), *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes.* (pp. 25-34). Barcelona, España: GRAÓ.

Ponte, J., Brocardo, J. y Oliveira, H. (2006), *Investigações matemáticas na Sala de Aula,* Belo Horizonte, Brasil: Autêntica Editora.

Pozuelos, F., Travé, G. (2001) *Entre pupitres. Razones e instrumentos para un nuevo marco educativo.* Huelva, España: Universidad de Huelva.

Restrepo, B. (2003). Aportes de la investigación-acción educativa a la hipótesis del maestro investigador. Pedagogía y Saberes, (18), 65-66.

Restrepo, B. (2004). La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico. Educación y Educadores, (7), 45-55.

Restrepo, B. (2006). La investigación-Acción Pedagógica, variante de la investigación Acción Educativa que se viene validando en Colombia. Revista Universidad de La Salle, 42(2), 92–101. Recuperado de https://revistas.lasalle.edu.co/index.php/ls/article/view/1739

Rodríguez, D. y Valldeorial, J, (2009), *Metodología de investigación*, Cataluña, España, Universitat Oberta de Catalunya (UOC).

Rodríguez, M. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. En A. J. Cañas, J. D. Novak y F. M. González (Eds.), *Proceedings of the First Conference on Concept Mapping.* Pamplona, España. Recuperado de http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf

Rodríguez, M. (2008). La Teoría del Aprendizaje Significativo. En M. Rodríguez (Ed.), *La Teoría del Aprendizaje Significativo en la perspectiva de la Psicología Cognitiva* (pp.7-45) Barcelona, España: Editorial Octaedro.

Rodríguez, M. (2011). La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. *Revista Electrònica d'Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa*, *3* (1), 29-50. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3634413

Rosales, C. (1984). El lenguaje matemático en los textos escolares. En C. Rosales (Ed.), *Orientaciones para el análisis y evaluación de textos escolares (No publicado)* (pp.153-162). Recuperado de http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:20263/lenguaje_matematico.pdf

Vain, P. (2012). El enfoque interpretativo en investigación educativa: algunas consideraciones teórico-metodológicas. *Revista de Educación, 4*, 37-46.

ANEXOS

Anexo A. Consentimiento informado: Práctica Pedagógica IELA

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA ASUNCIÓN
Resolución Municipal 10033 del 11 de Octubre de 2013
CODIGO DANE 1050010001163 **NIT**. 900704752-7 **CÓDIGO ICFES** 188763
NUCLEO EDUCATIVO 915
"FORMAMOS EN EQUIDAD Y SOLIDARIDAD AL SERVICIO DE LA COMUNIDAD"

LA RECTORA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA ASUNCIÓN

HACE CONSTAR QUE:

En calidad de rectora de la I.E.L.A autorizo el desarrollo del proyecto de investigación "*Investigar para aprender matemáticas en 5° grado*"; el cual se desarrolla a través de la modalidad de semillero en el grado 5°, en el marco de la Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Básica Matemática de la Universidad de Antioquia, por los maestros en formación: Diana Cristina Arcila Gómez, Kelly Melissa Garcés Muñoz y Jesús David Ochoa Castañeda.

La implementación de este proyecto pretende contribuir al mejoramiento del desempeño de los niños y niñas de dicho grado.

Dada en la ciudad de Medellín, a los 15 días del mes de septiembre de 2017.

Para constancia firma:

Hilduara Velásquez Echavarría
C.C 43086105
Rectora

Anexo B. Consentimiento informado: Padres de familia

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, los abajo firmantes mayores de edad, madres, padres, o representantes legales del estudiante: Zamantha Areiza del grado: _5°__, hemos sido informados acerca de la solicitud de autorización del uso de registros fotográficos o de video de nuestros acudidos para uso exclusivo del proyecto de investigación: ___*Investigar para aprender matemáticas en 5° grado*_____ que se desarrolla en la Institución Educativa ___La Asunción___ en el marco de la Licenciatura en Básica matemática de la Universidad de Antioquia.

El proyecto se lleva a cabo en el año 2018 y las evidencias de las experiencias de aula, serán utilizadas para el informe del proyecto de la práctica pedagógica, con fines académicos y pedagógicos, sin ánimo de lucro.

Luego de haber sido informados sobre las condiciones de la participación de nuestros acudidos en el proyecto de investigación pedagógica y resuelto todas las inquietudes, se entiende que:

- La participación de nuestro acudido en estas acciones no generará ningún gasto, ni recibiremos remuneración alguna por su participación.
- No habrá ninguna sanción para nuestros acudidos en caso de no autorizar su participación.
- La identidad de nuestros acudidos no será publicada y se garantiza la protección de las imágenes de nuestros acudidos y el uso de las mismas, de acuerdo con la normatividad vigente, durante y posteriormente al proceso pedagógico.

Atendiendo a lo anterior, Como padre de familia o representante legal, autorizo la participación de mi acudido en este proceso

Nombre del padre de familia Luz Amparo Rios C.C 1'128.726.002

Firma: Luz Amparo Rios

Anexo C. Prueba diagnóstica

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

OBJETIVO: Identificar en los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa La Asunción la comprensión que tienen del plano cartesiano y de fracciones.

1. Para la clase de artística, la profesora pidió a algunos estudiantes que llevaran cartulina. Sin embargo, la profesora no especificó el tamaño de la cartulina. Tres niños llevaron un pliego de cartulina, dos niños llevaron un medio de cartulina, dos niños llevaron un cuarto de cartulina, y dos niños un octavo de cartulina. En el salón hay 38 estudiantes y a cada uno le debe corresponder un pedazo de cartulina del mismo tamaño.

Ayudemos a la profesora a repartir la cartulina que hay para los 38 estudiantes.

a) ¿Cuántos pedazos del tamaño de medio pliego de cartulina se pueden obtener de un pliego de cartulina? ¿Por qué? Realiza una representación
b) ¿Cuántos pedazos del tamaño de un cuarto de pliego de cartulina se pueden obtener de media cartulina? ¿Por qué? Realiza una representación
c) ¿Cuántos pedazos del tamaño de un octavo de pliego de cartulina se pueden obtener de media cartulina? ¿Por qué? Realiza una representación

d) ¿Cuántos pedazos del tamaño de un octavo de pliego de cartulina se pueden obtener de un cuarto de cartulina? ¿Por qué? Realiza una representación
e) ¿En cuántas partes se debe dividir el pliego, en cuántas el medio pliego, en cuántas el cuarto de pliego y en cuántas el octavo de pliego para que a cada estudiante le corresponda un pedazo de cartulina del mismo tamaño? ¿Por qué? Realiza una representación

2. PLANO CARTESIANO

Enrique ha empezado a trabajar en el supermercado de su barrio, para ayudar a su familia con los gastos de la casa. Enrique tiene que hacer domicilios a los clientes, pero aún no conoce las direcciones de sus casas. Estas son las indicaciones que le dejaron para que Enrique pueda encontrar sus casas:
Nota 1: Representa la medida de una cuadra con 3 cuadros de una hoja cuadriculada.

- DOÑA MARTA: 5 cuadras a la izquierda del supermercado
- DON ALEJANDRO: 2 cuadras a la derecha del supermercado
- DON DIEGO: 2 cuadras al frente del supermercado
- DOÑA MILAGROS: 4 cuadras atrás del supermercado
- DON VICTOR: 3 cuadras al frente de Doña Marta
- DOÑA CLAUDIA: 3 cuadras a la derecha de Don Víctor
- DON MIGUEL: 4 cuadras detrás de Don Alejandro
- DOÑA CECILIA: 5 cuadras a la izquierda de Doña Milagros
- DOÑA CARLA: 1 cuadras a la izquierda de Doña Milagros
- DOÑA MARÍA: 3 cuadras a la derecha de Doña Marta
- DOÑA SUSANA: 5 cuadras a la izquierda de Don Diego

a) Ubica estas casas en el plano cartesiano, teniendo en cuenta que una casa puede ser representada con un punto.
b) Escribe la ubicación de las casas de los clientes del supermercado, en términos de parejas ordenadas del plano cartesiano.
c) El supermercado se va a cerrar, porque ya es muy tarde, y Enrique aún no ha terminado de entregar los domicilios. Se las lleva para su casa para terminarlas

de entregar. Tenemos un plano en el que está ubicada la casa de Enrique (que es la que está encerrada en un círculo), y el resto de casas a las que tiene que llevar las compras. Para facilitarle el trabajo a Enrique, representa la ubicación de cada casa coloreada, en el plano cartesiano, teniendo en cuenta las distancias de unas casas a otras y representando cada casa con un punto.

Regresar

Anexo D. Tarea 1: Volvió el agua (Parte I)

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

¡Volvió el agua!

En los barrios Santo Domingo y Granizal hay un daño en el tubo principal que distribuye el agua a las casas. Las empresas Agua Clara y Aguas Medellín se comprometieron a solucionar los daños, de esta manera, Agua Clara se encargó de reparar el tubo en el barrio Santo Domingo y Aguas Medellín en el barrio Granizal.

Durante los días posteriores de la reparación al tubo principal del barrio Santo Domingo, la empresa Agua Clara envió a varios trabajadores a realizar una encuesta para identificar la cantidad de casas en las que había servicio de agua. Algunos resultados de la encuesta se presentan en la siguiente tabla:

Día	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de casas beneficiadas	1	3	5	7	9	11	13	

1. El encargado del registro de la cantidad de casas que tenían agua cada día perdió esos registros, y solo quedó con el registro del día 1. Tú conoces los resultados pero no se los puedes decir directamente, sin embargo, puedes darle alguna pista para que él encuentre la manera de obtenerlos. ¿Qué estrategia puede utilizar el encargado para obtener el registro de casas del día 2 a partir del registro que tiene del día 1?
2. ¿Se pueden conocer la cantidad de casas que se beneficiarán del agua los días siguientes con la misma estrategia? ¿Cómo? Escribe ese procedimiento.
3. Observando los procedimientos hechos en el punto anterior para conocer la cantidad de casas beneficiadas, encuentra las relaciones que hay entre las cantidades de casas beneficiadas y cómo estas se relacionan con los días. Re-escribe los números de acuerdo a las regularidades que encuentres.
4. Teniendo en cuenta la estrategia empleada por el encargado, escribe en el recuadro vacío la cantidad de casas del barrio Santo Domingo que pueden acceder al servicio durante ese día.
5. Qué otra estrategia propones para evitar realizar procedimientos largos y conocer:
   a. ¿En qué día habrá 25 casas beneficiadas con el servicio de agua?
   b. ¿Cuántas casas se beneficiarán con el servicio del agua en el día 15?

Regresar

Regresar al análisis

Anexo E. Tarea 2: Volvió el agua (Parte II)

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

¡Volvió el agua!
Parte II

Durante los días posteriores de la reparación al tubo principal del barrio Granizal, la empresa Aguas Medellín envió a varios trabajadores a realizar una encuesta para identificar la cantidad de casas en las que había servicio de agua. Algunos resultados de la encuesta se presentan en la siguiente tabla:

Día	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de casas beneficiadas	1	2	4	6	16	32	64	

1. El encargado del registro de la cantidad de casas que tenían agua cada día perdió esos registros, y solo quedó con el registro del día 1. Tú conoces los resultados

pero no se los puedes decir directamente, sin embargo, puedes darle alguna pista para que él encuentre la manera de obtenerlos. ¿Qué estrategia puede utilizar el encargado para obtener el registro de casas del día 2 a partir del registro que tiene del día 1?

2. ¿Se pueden conocer la cantidad de casas que se beneficiarán del agua los días siguientes con la misma estrategia? ¿Cómo? Escribe ese procedimiento.
3. Observando los procedimientos hechos en el punto anterior para conocer la cantidad de casas beneficiadas, encuentra las relaciones que hay entre las cantidades de casas beneficiadas y cómo estas se relacionan con los días. Re-escribe los números de acuerdo a las regularidades que encuentres.
4. Teniendo en cuenta la estrategia empleada por el encargado, escribe en el recuadro vacío la cantidad de casas del barrio Granizal que pueden acceder al servicio durante ese día.
5. Qué otra estrategia propones para evitar realizar procedimientos largos y conocer:
    a. ¿En qué día habrá 512 casas beneficiadas con el servicio de agua?
    b. ¿Cuántas casas se beneficiarán con el servicio del agua en el día 12?

Regresar

Anexo F. Tarea 3: El diablo de los números

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

El diablo de los números

Hans Magnus Enzensberger

La tercera noche (Fragmento)

- ¿Por qué das tantas vueltas? -preguntó el diablo de los números. Robert vio que su cama estaba en una cueva.

El anciano estaba sentado ante él, haciendo girar su bastón en el aire.

- ¡En pie, Robert! -dijo-. ¡Hoy vamos a dividir!

- ¿Es preciso? -preguntó Robert-. Por lo menos podrías haber esperado a que me durmiera. Además, no soporto las divisiones.

- ¿Por qué no?

-Mira, cuando se trata de sumar, restar o multiplicar, salen todas las cuentas. Sólo al dividir no. Entonces suele quedar algún resto; me parece una pesadez.

-La pregunta es cuándo.

- ¿Cuándo qué? -preguntó Robert.

-Cuándo queda un resto y cuándo no -le explicó el diablo de los números-. Ese es el punto de partida. A algunos números se les ve en la cara que se les puede dividir sin que quede resto.

-Está claro -dijo Robert-. Los números pares siempre salen cuando se les divide entre dos.

- ¡No hay problema! Y los números de la tabla del tres también se pueden dividir fácil-mente

….

-Diecinueve -murmuró-. Prueba con el 19. Intenta dividirlo en partes iguales de forma que no quede nada.

Robert reflexionó.

-Eso sólo se puede hacer de una manera -dijo al fin-. Lo dividiré en diecinueve partes iguales.

-Eso no vale -respondió el diablo de los números.

-O lo dividiré entre cero.

-Eso no vale en ningún caso.

- ¿Y por qué no vale?

-Porque está prohibido. Dividir por cero está estrictamente prohibido.

- ¿Y si aun así lo hago?

Regresar

Anexo G. Tarea 4: El dominó mágico

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

EL DOMINÓ MÁGICO

Nombres:

____

____

____

En esta guía encontrarás algunas preguntas que debes desarrollar con base en la exploración y manipulación de las fichas del dominó.

- Formar todos los cuadrados posibles con las fichas de dominó ¿Es posible utilizar todas las fichas? ¿Los cuadrados que realizaste son todos los posibles? ¿Por qué?

- ¿Cómo construir un cuadrado de tal manera que, el resultado de la suma de los puntos que forman cada lado sea igual? ¿Cuál es el cuadrado más grande que se puede construir con esas condiciones?

- ¿Es posible que sobren algunas fichas de dominó cuando se construyan todos los cuadrados posibles y que éstas se puedan reemplazar por otras que estén en el cuadrado sin que se altere la forma y la suma?

Regresar

Regresar al análisis

Anexo H. Tarea 5: Carta Competencia internacional de carreras de aviones de papel

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

Nombres

Carta
Competencia internacional de carreras de aviones de papel

Estimado competidor:
Recibimos los datos relacionados con la distancia recorrida en el lanzamiento de su avión de papel; sin embargo, debemos informarle que aquí manejamos unidades de medida diferentes a las que usted utilizó para medir dicha distancia. Por este motivo y con el fin de no descalificarlo de la competencia, los jurados sugieren que realice la conversión de la unidad de medida que utilizó, a las unidades de medida que le solicitamos, para que así podamos saber cuál fue la distancia recorrida por su avión.

La medida roja debe convertirla a la medida del blanco mediano, y al negro

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

Nombres

Carta
Competencia internacional de carreras de aviones de papel

Estimado competidor:
Recibimos los datos relacionados con la distancia recorrida en el lanzamiento de su avión de papel; sin embargo, debemos informarle que aquí manejamos unidades de medida diferentes a las que usted utilizó para medir dicha distancia. Por este motivo y con el fin de no descalificarlo de la competencia, los jurados sugieren que realice la conversión de la unidad de medida que utilizó, a las unidades de medida que le solicitamos, para que así podamos saber cuál fue la distancia recorrida por su avión.

La medida blanca mediana debe convertirla a la medida negra, y a la verde pequeña.

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

Nombres

____
____
____

Carta
Competencia internacional de carreras de aviones de papel

Estimado competidor:
Recibimos los datos relacionados con la distancia recorrida en el lanzamiento de su avión de papel; sin embargo, debemos informarle que aquí manejamos unidades de medida diferentes a las que usted utilizó para medir dicha distancia. Por este motivo y con el fin de no descalificarlo de la competencia, los jurados sugieren que realice la conversión de la unidad de medida que utilizó, a las unidades de medida que le solicitamos, para que así podamos saber cuál fue la distancia recorrida por su avión.

La medida negra debe convertirla a la medida de la blanca mediana, y a la verde pequeña

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

Nombres

____
____
____

Carta
Competencia internacional de carreras de aviones de papel

Estimado competidor:
Recibimos los datos relacionados con la distancia recorrida en el lanzamiento de su avión de papel; sin embargo, debemos informarle que aquí manejamos unidades de medida diferentes a las que usted utilizó para medir dicha distancia. Por este motivo y con el fin de no descalificarlo de la competencia, los jurados sugieren que realice la conversión de la unidad de medida que utilizó, a las unidades de medida que le solicitamos, para que así podamos saber cuál fue la distancia recorrida por su avión.

La medida azul debe convertirla a la medida de la verde pequeña, y la blanca grande

Regresar

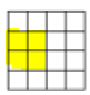
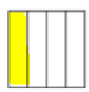
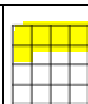
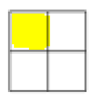
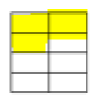
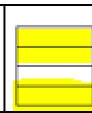
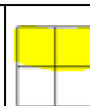
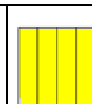
Anexo I. Tarea 6: Tiro al blanco

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción
Tiro al blanco

Nombres:

____

Registra en la tabla el resultado que obtuviste en cada lanzamiento, marcando con una X la casilla que corresponda.

Nº de lanzamiento	Figura obtenida							
								
1								
2								
3								
4								
5								

¿Cuál es el resultado total obtenido?

____

Regresar

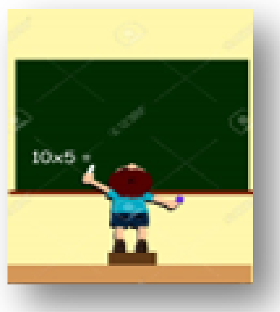
Regresar al análisis

Anexo J. Tarea 7: ¿Cómo multiplicamos?

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

Nombres:

¿Cómo multiplicamos?



En la clase de matemáticas, la profesora propuso a los estudiantes que multiplicaran los números 25 y 35. Tres estudiantes salieron al tablero, y uno de ellos realizó el siguiente procedimiento.

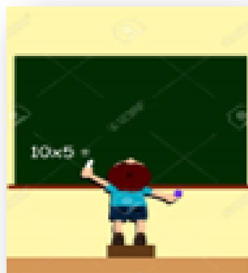
Verifica si el resultado es correcto. Identifica las características del procedimiento realizado para que se las expliques a tus compañeros.

$$
\begin{array}{r}
25 \times \\
\underline{35} \\
125 + \\
\underline{75} \\
875
\end{array}
$$

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

Nombres:____
____
____

¿Cómo multiplicamos?



En la clase de matemáticas, la profesora propuso a los estudiantes que multiplicaran los números 25 y 35. Tres estudiantes salieron al tablero, y uno de ellos realizó el siguiente procedimiento.

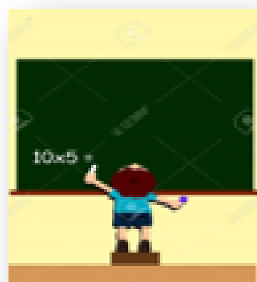
Verifica si el resultado es correcto. Identifica las características del procedimiento realizado para que se las expliques a tus compañeros.

$$\begin{array}{r} 25\ \text{x} \\ \underline{\quad 35\ \ } \\ 175\ + \\ \underline{\quad 700\ \ } \\ 875\ \ \ \end{array}$$

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

Nombres:____
____
____

¿Cómo multiplicamos?



En la clase de matemáticas, la profesora propuso a los estudiantes que multiplicaran los números 25 y 35. Tres estudiantes salieron al tablero, y uno de ellos realizó el siguiente procedimiento.

Verifica si el resultado es correcto. Identifica las características del procedimiento realizado para que se las expliques a tus compañeros.

$$\begin{array}{rl} 25 & \times \\ \underline{35} & \\ 25 & + \\ 150 & \\ 100 & \\ \underline{600} & \\ 875 & \end{array}$$

Regresar

Anexo K. Tarea 8: Carrera de caballos

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Semillero de Matemáticas
I.E La Asunción

Nombres:

____

____

____

Carrera de caballos

Tomada del artículo: Alcance de las tareas propuestas por los profesores de estadística.

Reglas del juego:

- Formar grupos de máximo cuatro participantes
- Cada participante debe escoger uno de los carriles por el que correrá su caballo
- Uno de los participantes lanza los dos dados y halla la diferencia entre los puntos obtenidos
- Avanza el caballo que esté ubicado en el carril cuyo número coincida con el resultado obtenido en la diferencia
- Gana el caballo que primero llegue a la meta

Analiza y responde la siguiente pregunta:

Uno de tus amigos quiere participar de la carrera la próxima semana. ¿Por cuál caballo le aconsejarías apostar, y cómo le demostrarías que ese caballo es el que tiene mayor posibilidad de ganar?

Regresar