



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

**DESARROLLO DE HABILIDADES DE PENSAMIENTO POR MEDIO DEL
APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE BÁSICA
SECUNDARIA Y MEDIA**

ALEXIS VÉLEZ OROZCO

JUAN JOSÉ HERNÁNDEZ NOREÑA

JOHN EDWIN LONDOÑO ARBOLEDA

Asesor

Edwin David Tamayo Martínez

**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Trabajo presentado para optar al título de licenciado en Matemáticas y Física

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

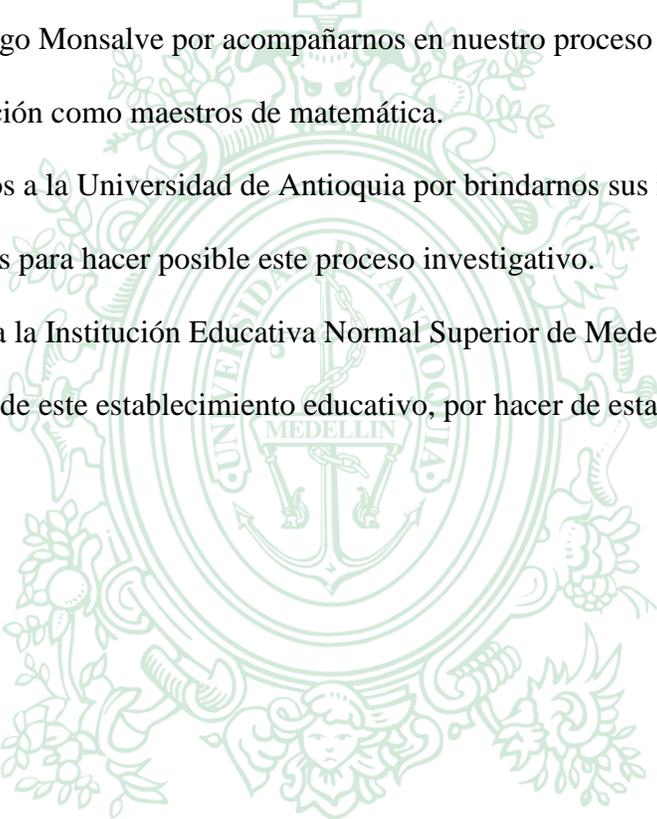
Medellín, 2018

Agradecimientos

Agradecemos profundamente a nuestro asesor Edwin Tamayo por el acompañamiento durante tres semestres académicos en este proceso de práctica, escritura e investigación. Agradecemos a nuestros maestros cooperadores de práctica Hader Palacio, Harold Rivera y Hugo Monsalve por acompañarnos en nuestro proceso de práctica académica y formación como maestros de matemática.

Agradecemos a la Universidad de Antioquia por brindarnos sus instalaciones y espacios académicos para hacer posible este proceso investigativo.

Por último, a la Institución Educativa Normal Superior de Medellín, en especial a los grupos 10-2017 de este establecimiento educativo, por hacer de esta investigación una realidad.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Esta investigación queremos dedicársela a nuestras familias, amigos y demás personas que participaron y nos ayudaron en este proceso.

RESUMEN

Esta investigación surgió como consecuencia de la preocupación sobre las dificultades que presentan los estudiantes de básica secundaria y media en el aprendizaje del concepto de función, dificultades que se presentan al momento de relacionar sus conocimientos con aquellas situaciones típicas de su realidad. Al ser un concepto abstracto, en muchos casos los estudiantes no alcanzan a familiarizarse con él completamente, dificultando así la adquisición de nuevos conocimientos y el desarrollo de habilidades intelectuales. Muchas de las dificultades mencionadas se presentan principalmente en los establecimiento educativos y en las universidades reflejándose principalmente en la reprobación de cursos, en los cuales son necesarias estas habilidades para enfrentarse a diferentes situaciones problema en las que puede ser necesario relacionar variables, establecer correspondencias entre magnitudes y fenómenos, etc.

Por esto, vimos en la Modificabilidad Estructural Cognitiva de Feuerstein y en las Experiencias de Aprendizaje Mediado la oportunidad de enfrentar tales dificultades de una manera alternativa, con fundamento en el desarrollo de las operaciones mentales de diferenciación, representación mental e inferencia lógica de los estudiantes, mientras aprenden el concepto de función, dando paso al desarrollo de la autonomía.

La investigación posee un enfoque cualitativo, pues el estudio se realiza desde el contexto natural de los participantes y la interpretación de su realidad con base en la observación. Por otra parte, la metodología que la fundamenta es la investigación acción del profesor que nos permitió trabajar con los estudiantes mientras reflexionábamos sobre nuestra propia práctica.

Esta investigación encontró que las Experiencias de Aprendizaje Mediado pueden ser un medio efectivo para abordar la enseñanza del concepto de función. Si bien se obtuvieron resultados importantes respecto del desarrollo de las operaciones mentales de diferenciación y representación mental con las actividades implementadas, es necesario aún reenfoclarlas para obtener resultados más efectivos frente a la inferencia lógica.

Palabras claves: Enseñanza del concepto de función, Operaciones mentales, Diferenciación, Representación mental, Inferencia lógica, Experiencia de Aprendizaje Mediado, Modificabilidad Estructural Cognitiva.



TABLA DE CONTENIDO

Agradecimientos	2
Resumen	3
CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, JUSTIFICACIÓN Y	
OBJETIVOS	8
1.1 Planteamiento del problema	8
1.2 Justificación	13
1.3 Objetivo general	17
1.4 Objetivos específicos	17
CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO	
2.1 Experiencias de aprendizaje mediado (EAM)	18
2.2 Investigaciones relacionadas con el tema, desarrollo de habilidades de pensamiento y el concepto de función.....	19
2.3 Concepto de función y su cambio a lo largo de la historia	24
2.4 Reflexiones sobre el desarrollo del pensamiento	26
2.5 Zona de desarrollo próximo y modificabilidad cognitiva estructural	28
2.6 Operaciones mentales	30
2.6.1 Diferenciación	32
2.6.2 Representación mental	33
2.6.3 Inferencia lógica	33
2.7 Criterios de medición	33
2.7.1 Mediación de la intencionalidad y la reciprocidad.....	34
2.7.2 Mediación de la trascendencia.....	34

2.7.3 Mediación del significado.....	34
2.7.4 Mediación del control del comportamiento y mediación sobre el sentimiento de compartir.....	35
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	36
3.1 Enfoque metodológico	36
3.2 Descripción de los participantes	40
3.3 Instrumentos de recolección de la información.....	41
3.4 Descripción de las actividades	42
3.5 Cronograma	45
3.6 Consideraciones ética	46
3.7 Limitaciones	47
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN	49
4.1 Análisis de la información	49
4.2 Resultados	55
4.3 Conclusiones y discusiones.....	73
Referencias	79
TABLAS	
Tabla 1. Cronograma de la aplicación de las actividades y los pilotajes.....	46
Tabla 2. Características del análisis de la investigación cualitativa.....	51
Tabla 3. Tabla de categorías sensibilizadoras y descriptivas.....	53
Tabla 4. Categorización de los resultados obtenidos en desarrollo de operaciones mentales.....	68
Tabla 5. <i>Diferenciación</i>	70

Tabla 6. <i>Inferencia lógica</i>	72
Tabla 7. <i>Representación mental</i>	73

ABREVIATURAS

MEN: Ministerio de Educación Nacional.

IA: Investigación Acción.

EAM: Experiencia de Aprendizaje Mediado.

MEC: Modificabilidad Estructural Cognitiva.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Planteamiento del problema

Como resultado de la formación que hemos recibido para aspirar a ser docentes de matemáticas y física, y de acuerdo con experiencias en los cursos de la Licenciatura que fueron de carácter disciplinar (en especial los Cálculos y las Físicas en todos sus niveles), podemos considerar algunas afirmaciones respecto de las dificultades que se nos presentaron durante su desarrollo. Muchas de las dificultades se dieron principalmente por falta de apropiación y familiarización con algunos conceptos, particularmente con el de función, pues notamos cómo éste ha sido fundamental a la hora de abordar el cálculo; además, cómo es necesaria su comprensión al momento de modelar diferentes situaciones tales como fenómenos físicos. Por estas mismas razones, y gracias a los acercamientos que hemos tenido con nuestros compañeros y otros estudiantes de diferentes programas (que igualmente deben cursar estas asignaturas), entendemos que este problema no solo se presenta en la Licenciatura de Matemáticas y física, sino que lo experimentan quienes estudian carreras que requieren este concepto fundamental.

Diversos estudios en relación con la temática de funciones (Socarras, 2008 y Quintero, Hawrylak y Villagrà, 2014, por ejemplo) muestran que estas problemáticas sobre la educación matemática, y particularmente su enseñanza, no son exclusivas de un establecimiento educativo, ciudad, departamento o país. Sin embargo, esto no solo se ha presentado en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, sino en diferentes ramas de las matemáticas y áreas de las ciencias relacionadas con ella.

En Colombia, aunque los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) buscan en sus planteamientos que los estudiantes se acerquen tempranamente

al concepto de función, lo que implica también un acercamiento inicial al análisis y al cálculo, se presentan problemáticas respecto a este concepto en la transición que se da en básica secundaria y media a la universidad. Por ejemplo, Porras (2011) explica cómo los estudiantes de básica secundaria y media de las instituciones educativas, al terminar sus estudios, no tienen el conocimiento adecuado acerca del concepto de función, los aspectos y los conceptos derivados de este. Zúñiga (2007) alerta también sobre cómo el aprendizaje del concepto de función parte de propuestas didácticas mal formuladas que dejan al estudiante con visiones incompletas; sugiere que las investigaciones didácticas frente al estudio del cálculo se enfocan principalmente en el aprendizaje de algoritmos, procedimientos algebraicos y transmisión de conocimiento por parte del docente, y se descuidan los procesos que pueden llevar a una real comprensión del concepto por utilizar materiales didácticos poco pertinentes. Zúñiga (2007) además agrega que otra posibilidad es que los mismos maestros no comprenden bien el concepto o no hay una profunda reflexión didáctica a la hora de enseñarlo, y por tanto la enseñanza puede ser incompleta o con vacíos; sin embargo, esto no sucede solo en los colegios, sino también en las universidades, principalmente en los primeros cursos de cálculo de los diferentes programas.

Cuesta (2007), por su parte, evidencia las dificultades presentes en los estudiantes de primer semestre en el curso Cálculo I en el programa de Economía cuando afirma que el concepto de “dominio de función” causa dificultad en la comprensión del concepto de función; no se comprende la relación entre las variables de una función; se asume la propiedad de linealidad o de crecimiento constante en el comportamiento de la función; se pone demasiado énfasis en la expresión algebraica de la función y se olvida su propio significado. Resultados similares se presentan para las matemáticas y la física en general

(Jones, 2006): se llega a respuestas correctas sin significado o se aprende meramente una técnica de resolución de ejercicios.

Se hace evidente que uno de los mayores problemas al momento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es que se aprende a operar muy rápidamente cuando el ejercicio o aquello que hay que solucionar ya está planteado, pero no sucede lo mismo cuando se debe extraer información de un enunciado o del entorno. Así, entendemos que los estudiantes no son capaces de establecer relaciones entre lo que aprenden en matemáticas y las situaciones reales o que simulan serlo. Se presenta una dificultad más, según Jones (2006): en muchas ocasiones los maestros, buscando que los estudiantes comprendan el concepto de función, lo descomponen o simplifican, causando a su vez que las concepciones y los conocimientos adquiridos queden con vacíos. Estas dificultades las hemos comprobado empíricamente a partir de muchas otras experiencias propias (en la universidad, en las instituciones educativas donde cursamos nuestra básica secundaria y media, en la institución donde se desarrolló esta investigación como resultado de lo observado en el transcurso de la práctica pedagógica, según muestran los diarios de campo- ver Anexo 1) al atestiguar cómo los estudiantes de básica secundaria y media presentan dificultades en aspectos básicos como operaciones algebraicas y en conceptos que suelen ser básicos (número, símbolos, variable, etc.). Otras dificultades se notan principalmente al relacionar variables, establecer correspondencias entre magnitudes y fenómenos, además de analizarlos. Sin embargo, tal preocupación es mayor al presentarse en los grados superiores.

En correspondencia con lo anterior, Porras (2011) explica que la formación matemática no solo se puede ver sólo como un proceso en el que los sujetos desarrollan conocimiento matemático, sino también como un estado que hace referencia principalmente al conocimiento desarrollado. Además, nos presenta dos perspectivas en relación con la

formación matemática: la primera se enfoca en el currículo, y la segunda en el comportamiento intelectual y afectivo del sujeto. Así, buscamos entender cómo la formación matemática ayuda a los estudiantes a estructurar su mente y sus pensamientos, apoyándose en tales conocimientos, mejorando y desarrollando sus habilidades de pensamiento. Inclusive, se entiende que la formación matemática es un comportamiento intelectual complejo, en el que se articulan habilidades, estrategias intelectuales, actitudes, estructuras cognitivas y afectivas; todas ellas construidas a partir de experiencias, más aún, por los procesos de aprendizaje del conocimiento matemático en contextos específicos.

Desde nuestras experiencias, inicialmente cuando cursamos la básica secundaria y media, actualmente en la universidad y en nuestras prácticas, consideramos que la enseñanza de las matemáticas está principalmente enfocada en la enseñanza de contenidos, tablas, ejercicios y teorías, donde el maestro hace a un lado el comportamiento intelectual y afectivo del sujeto, no se enseña a pensar adecuadamente sobre lo que hay más allá de esos procedimientos o teorías, sobre cómo extraer información que le permita mejorar o facilitar algunos de esos procesos cotidianos en los cuales se ve inmerso, sobre qué relación tiene el contexto con esos contenidos que le mostraron en la escuela, etc.

Surge además otra dificultad que consideramos se puede derivar de las anteriores y que influye en el desinterés de los estudiantes por aprender matemática; pues se ha venido configurando como un área que socialmente se considera un ‘dolor de cabeza’ o un área sin sentido, ya que los estudiantes no ven utilidad a ciertas ramas como el álgebra, la geometría, la estadística y el cálculo. Al respecto, Fernández (2016) sugiere que los docentes en su mayoría llevan a cabo clases magistrales, lo que deriva en una matemática poco dinámica o aplicada, con un alto grado de abstracción y un lenguaje exageradamente

formal; resalta la mala reputación, el rechazo, el miedo y la fobia frente a las matemáticas en la sociedad a pesar de reconocerse su “importancia” (p.75).

Atendiendo a estos supuestos, consideramos importante que los estudiantes cambien la visión que tienen de las matemáticas y sean capaces de desarrollar sus habilidades cognitivas y de pensamiento por medio de ellas. Ahora bien, de acuerdo con Araya (2014):

Las habilidades cognitivas le posibilitan al sujeto ampliar sus concepciones de mundo a partir de sus operaciones mentales, la experiencia y las vivencias que le provea el contexto en donde se desenvuelve, pero para ello, el individuo debe reconocerlas con el fin de hacer un buen uso de sus capacidades, de manera que se apropie del conocimiento para resolver problemas y transformar el entorno. (p.2)

Así pues, este problema llevó a la búsqueda de otras formas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el caso del presente trabajo, en relación con las funciones, se buscó reconsiderar la manera en que se está impartiendo la educación matemática, es decir, llevar a los estudiantes a situaciones donde debían pensar y confrontar aquellos conocimientos que ya tenían; que tomaran decisiones, con el fin de potenciar sus habilidades cognitivas de modo que no solo se apropiaran bien el concepto, sino que además desarrollaran su pensamiento y la capacidad de enfrentarse a aspectos teóricos de mayor abstracción y profundidad en cursos futuros. Por lo tanto, coincidimos con Araya (2014) cuando afirma que el desarrollo de la capacidad intelectual en el marco del currículo apoya los aprendizajes significativos, organizar y reelaborar el conocimiento y desarrollar la autonomía (p.4).

Entendemos que las habilidades de pensamiento se enlazan a los conocimientos para enfrentarse a diferentes situaciones, sea desde simples problemas matemáticos en donde el factor principal es el razonamiento o bien en su cotidianidad, hasta el punto que

los individuos forman, por sí mismos, sus propios conocimientos, siempre y cuando hayan contado con experiencias de aprendizaje organizadas por un mediador (el docente) que busca la autonomía en el sujeto que aprende. Al respecto Santrock (2006) (citado en Araya, 2014) considera que “el pensamiento implica manipular y transformar información en la memoria. Con frecuencia esto se hace para formar conceptos, razonar, pensar de manera crítica, tomar decisiones, pensar de manera creativa y resolver problemas” (p.287).

De todo lo anterior, el presente proyecto se enfocó en el desarrollo de las habilidades de pensamiento, reconocimiento de las dificultades y puesta en práctica de estrategias que ayudaron al estudiante no solo a conocer qué es una función y cómo graficar, sino principalmente a potenciar su pensamiento en general, contribuyendo al desarrollo de su autonomía y a los fines de la educación.

1.2 Justificación

Hay estudios (como De Prada, 1996; López y Sosa, 2008; Vanegas y Escalona, 2013 y Zúñiga, 2009) que muestran cómo en algunos países latinoamericanos como México, Chile, Argentina, Bolivia y Brasil, no solo los estudiantes de básica secundaria y media tienen dificultades con el concepto de función; éstas están presentes en los estudiantes de carreras universitarias como ingenierías y economía, más aún, los mismos docentes presentan vacíos en relación a un concepto fundamental para el estudio de las matemáticas. Esta problemática establece la necesidad de estrategias didácticas y reflexiones pedagógicas que orienten intervenciones específicas en el aula, que ayuden a los estudiantes a apropiarse de manera estructural de este concepto, para fundamentar sus estudios universitarios en el caso de carreras afines. Es así como, al reconocer la necesidad del aprendizaje del concepto de función e identificarlo como un problema local, nacional e internacional, este trabajo responde a la necesidad que se piensen situaciones de aula desde

una perspectiva alternativa, en este caso, centrada en el desarrollo del pensamiento y sus habilidades, pero que a su vez den paso al aprendizaje conceptual.

En Colombia, la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), de conformidad con el artículo 65 de la Constitución Política de Colombia, expone que entre los fines de la educación está hacer énfasis en la capacidad crítica, reflexiva y analítica, de tal manera que los sujetos sean capaces de interpretar y dar solución a diferentes problemáticas, sean estas de su cotidianidad, de la ciencia o de la tecnología (artículo 5, parágrafo 9); en el artículo 21 esta ley profundiza y refuerza estos aspectos e introduce la necesidad de desarrollar conocimientos matemáticos, que permitan realizar operaciones y diferentes procedimientos, desde la lógica elemental y que a su vez permitan dar solución a diferentes situaciones, usando y dando importancia a los conocimientos adquiridos. A partir de la observación desde la propia experiencia, consideramos que lo establecido en dicha ley no se cumple totalmente, es decir, se presentan vacíos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (particularmente el concepto de función) y las estrategias para la enseñanza no tienden a apuntar al desarrollo del pensamiento, limitando la capacidad de los estudiantes para comprender y apropiarse de los conceptos, etc.

Por otro lado, el MEN (2006) destaca que los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas están pensados de modo que los estudiantes, en calidad de la educación que reciben, sean capaces de desarrollar habilidades cognitivas y actitudinales buscando hacer posible cambiar hacia nuevas realidades, donde se estimulen actitudes mentales nuevas, capaces de enfrentarse a diversas y adversas situaciones, no solo en sus vidas cotidianas y contextos particulares, sino, más generalmente, en contextos diversos, con diferentes personas, grupos y sociedades. Más aún, afirman que ser matemáticamente competente se da cuando cuentan con pensamiento matemático y pensamiento lógico; para esto se tienen

que tener en cuenta los procesos que se dan en cualquier actividad matemática, como formular, tratar y resolver problemas, modelar, razonar, comunicar y formular, comparar y ejercitar procedimientos.

Las propuestas mencionadas en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) dan a conocer la importancia de la construcción de pensamiento buscando no solo que los estudiantes resuelvan problemas matemáticos, sino que las habilidades que se desarrollan para resolver este tipo de problemas contribuyan a cualquier decisión de su vida social, es decir, se preparen para justificar y argumentar las fortalezas y debilidades en una situación, aumentando así su capacidad de reflexión y crítica para las acciones propias que mejoran la sociedad.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) han venido integrando desde los primeros grados escolares el estudio del concepto de función de una manera intuitiva: en primaria se aborda la descripción y la identificación, representación e interpretación del cambio y la variación por medio de situaciones reales y patrones de comportamiento de una situación. Posteriormente, en la secundaria, la representación se hace numérica y simbólica: relacionar variables dependientes de las independientes y sus transformaciones de cambio, proponer modelos funcionales, abordar procesos algebraicos para la variación; del noveno grado en adelante es cuando se aborda conceptualmente la función, sus características, propiedades, representación y todo lo relacionado con el concepto, incluyendo resolución de problemas con razones de cambio, estimación de cantidades y modelos funcionales para el análisis de situaciones reales.

En contraste con todo ello, De Zubiría (2017) propone que: “los estudiantes deberían ir al colegio a aprender a pensar, comunicarse y convivir” (párr. 3) (denominadas estas tres por el autor como competencias transversales). La educación tradicional, continúa este autor,

ha cometido el error de establecer una cantidad bastante alta de materias con la convicción de mejorar la calidad de la educación pero desde un trabajo desarticulado que no busca favorecer y desarrollar competencias transversales propuestas; busca llenar a los estudiantes de información, que en la actualidad no tiene ningún sentido, pues esta información es accesible por medio de las tecnologías de la información y la comunicación; existe una necesidad para el siglo XXI referente a las capacidades que se deben desarrollar para que los estudiantes piensen:

Lo que sí necesitamos es que los jóvenes sepan dónde y cómo encontrar la información y que tengan los conceptos previos para interpretarla. Que puedan trabajar hipotética y deductivamente con ella; es decir, requerimos competencias para argumentar, deducir, inferir e interpretar. (De Zubiría, 2017, párr. 4)

En resumen, el presente trabajo pretendió que los estudiantes se enfrentaran a situaciones que permitieran desarrollar esas habilidades cognitivas, sin dejar de lado el aprendizaje del concepto de función, pues se apostó a que mejorando estas habilidades se lograra también la comprensión y el aprendizaje de este contenido de las matemáticas. Es así como la pertinencia de este proyecto no está tanto en que el estudiante aprenda el tema de funciones de una manera diferente; sino que, al hacerlo, obtenga las herramientas para establecer cuál es la manera más conveniente en que puede realizar un proceso de aprendizaje, es decir, generar niveles cada vez mayores de autonomía.

En relación con todo lo anterior, el interrogante principal de nuestro trabajo fue:

¿Qué implicaciones tiene la implementación de Experiencias de Aprendizaje Mediado (EAM) para el desarrollo de habilidades del pensamiento en el marco de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de grado décimo en la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín?

1.3 Objetivo general:

Analizar algunas implicaciones que tiene la implementación de EAM para el desarrollo de habilidades del pensamiento en el marco de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en el área de matemáticas, con estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín.

1.4 Objetivos específicos:

- Identificar ventajas y desventajas de la aplicación de una estrategia didáctica fundamentada en el desarrollo del pensamiento a través del estudio del concepto de función en el área de matemáticas.
- Determinar posibles características de EAM para el estudio del concepto de función en matemáticas que incidan en el desarrollo del pensamiento de estudiantes de grado décimo.
- Identificar la pertinencia en el contexto del aula de matemáticas de una estrategia orientada al desarrollo del pensamiento desde la perspectiva de los estudiantes participantes y los resultados de la aplicación de las EAM.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

2.1 Experiencias de Aprendizaje Mediado (EAM)

Hasta el momento hemos hecho referencia en varias ocasiones al proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de las habilidades del pensamiento vinculado a este. En adelante, especialmente en este marco teórico, continuamos haciendo referencia a este proceso en términos de Experiencias de Aprendizaje Mediado (EAM) y todo lo relacionado a ellas; por este motivo el presente apartado antecederá a todas las reflexiones teóricas, pues aclara aquí lo que estas experiencias significaron durante la investigación. Sin embargo, se profundizará en ello en un apartado posterior.

Siguiendo a Morales (2007), las EAM son aquellas experiencias en las que el sujeto, llamado mediador, busca transmitir algo que previamente a él le fue transmitido, y su prioridad es que el mediado aprenda de todo lo que se le transmite. Así, las EAM analizan las necesidades del sujeto mediado y de acuerdo con los resultados se enfoca en las más importantes, haciendo que lo que el mediado aprende sea muy diferente a lo que aprendería en situaciones de aprendizaje comunes; por tanto, dice el autor que se desarrollan el pensamiento inferencial y el predictivo logrando percibir las relaciones existentes entre lo que precede y lo que sigue. La importancia de las EAM radicó en que dieron paso a la estructuración de las actividades para el trabajo de campo y fueron la guía que nos ayudó a ubicarnos completa y adecuadamente en el papel de mediadores. Por lo anterior, a continuación, nos apoyamos en Feuerstein (citado en Ruffinelli, 2002) y en Morales (2007) cuando plantean una estructura que permite definir y entender el proceso de la mediación como práctica en el campo.

Según Schunk (2012), desde la teoría de Vygotsky la estructura que definía el proceso de enseñanza y aprendizaje se expresaba de la forma E – O – R, donde la E hace referencia a la existencia de un estímulo que sería transmitido durante el proceso al organismo (O) y finalmente esta interacción entre ambos daría como resultado una respuesta (R). Sin embargo, desde la Teoría de la Modificabilidad Estructural Cognitiva (en adelante MEC), Feuerstein agrega en el intermedio de la estructura la H, que representa al humano mediador; la estructura final es entonces de la forma E – H – O – H – R. Así, la diferencia es el papel fundamental del mediador, ya que al interponerse entre el estímulo y el organismo le permite al mediado regularse, comenzar a vincular sus experiencias previas con las actuales y con las posibles futuras, brindándole al individuo estrategias para su aprendizaje. Algo similar ocurre cuando el mediador está entre el organismo y la respuesta, pues le permite y ayuda a comprender las relaciones entre lo que precede y lo que sigue. La inclusión del mediador en esta estructura a diferencia de la estructura anterior permite que el mediado pase de aprender contenidos meramente y sin ningún sentido a apropiarse y tomar control de su propio aprendizaje. (p. 126)

La relevancia de todo lo anterior en cuanto a este proyecto es su incidencia en el trabajo de campo, pues al realizar las actividades de EAM, la estructura mencionada resultó fundamental y orientadora en cada actividad, es decir, nos permitió comprender lo que es la mediación, su influencia durante el proceso enseñanza-aprendizaje y, además, a mantener siempre presente cuál era el objetivo de tales actividades y la práctica misma: el desarrollo del pensamiento.

2.2 Investigaciones relacionadas con el desarrollo de habilidades de pensamiento y el concepto de función

El estudio de Londoño y Aldana (2012) se centran principalmente en dar a conocer los resultados de una investigación que tiene como foco la búsqueda del desarrollo de competencias en el pensamiento variacional, apoyándose en las funciones lineales. Desde nuestra perspectiva, consideramos que la búsqueda del desarrollo de competencias en el pensamiento variacional va de la mano con el desarrollo de las habilidades del pensamiento, más aún en el tratamiento del concepto de función.

Estos autores muestran cómo los estudiantes presentan dificultades a la hora de comprender el concepto de función lineal, bajo la consideración de que no logran alcanzar las competencias esperadas en los cursos de matemáticas. Santos y Alvarado (2000) (citado en Londoño y Aldana, 2012) reportan “la falta de aprendizaje del concepto debido al énfasis que se hace en la enseñanza de procedimientos algorítmicos, y la carencia de una enseñanza basada en la resolución de problemas” (p.322). Además, Duval (1988) (citado en Londoño y Aldana, 2012) se refiere a otras problemáticas que tienen que ver con aspectos como la falta de familiarización del concepto de función lineal con el lenguaje cotidiano. Por tanto, la investigación busca que los estudiantes desarrollen las competencias básicas en matemáticas con base en el concepto de función lineal, lo que se asemeja a lo propuesto en nuestro proyecto y algunas afirmaciones que hemos hecho a partir de diferentes experiencias propias y ajenas, y a otras fuentes bibliográficas.

Londoño y Aldana (2012) ponen énfasis en cómo el desarrollo del pensamiento variacional es fundamental en la investigación y cómo este necesita de una formación y desarrollo de habilidades, procesos y conceptos, además de poner al estudiante en situaciones que lo involucren con el contexto en que vive y sus propias experiencias; que comience a razonar, pensar, resolver problemas relacionándolos con situaciones cotidianas,

etc. Así, fundamentan la idea que tuvimos para nuestro trabajo de abordar el concepto de función desde el desarrollo de habilidades principalmente cognitivas.

El fundamento teórico de dicha investigación son las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) y la transposición didáctica de Chevallard (1991). Se explica qué es una situación didáctica y cómo se puede distribuir en diferentes fases. Al apoyarse en ambas teorías, el presente trabajo toma un nuevo giro, pues es claro cómo, al basarse en ellas, se lleva a cabo un proceso de enseñanza con el que los estudiantes deben reconstruir sus conocimientos a partir de algunas fases; por ejemplo, la primera busca que el maestro no intervenga mientras el estudiante toma el papel de investigador en el problema matemático, lo que se asemeja a las estrategias de las EAM, en las que el maestro solo toma un papel de mediador y ayuda al estudiante en los momentos que no avance, esto sin necesidad de darle una respuesta esperada, sino a partir de preguntas que lo lleven a interpretar, observar y entender de diferentes maneras la información y el proceso.

Estos autores concluyen que los estudiantes presentan dificultades para establecer relaciones entre gráficas, registros algebraicos, tablas, y más aún, presentan problemas en los procedimientos algebraicos relacionados al concepto; además agregan que sus estrategias lograron que los estudiantes desarrollaran competencias como razonar, pensar y representar. Estas conclusiones demuestran que al implementar nuevas estrategias en la enseñanza de las matemáticas se presentan resultados similares que nos acercaron a las posibles respuestas de nuestra pregunta de investigación, es decir, se pueden implementar estrategias que permitan a los estudiantes desarrollar sus habilidades de pensamiento a partir de la enseñanza de un concepto, por medio de situaciones en las cuales deben pensar, razonar, diferenciar, etc.

En su artículo, Jones (2006) plantea que en la educación básica y secundaria los estudiantes encuentran como fin de las matemáticas resolver problemas, llegar a una respuesta común que sea correcta, y para ello solo aprenden a realizar algoritmos. Respecto al concepto de función, mientras se aprenden y desarrollan los algoritmos, los estudiantes no captan la complejidad del concepto, considerando que este es uno de los más importantes a trabajar en las matemáticas actualmente, por sus aplicaciones y recorrido histórico. Sin embargo, dice que, cuando los estudiantes llegan a la educación superior y se enfrentan de nuevo a este concepto, se percatan que en realidad su comprensión previa es incompleta. Todo esto permite sustentar cómo el concepto de función ha sido aprendido de manera regular por los estudiantes de bachillerato, inclusive cómo lo han trabajado sin tener en cuenta su complejidad, lo que da paso a que se descuide el desarrollo de las habilidades de pensamiento.

Jones (2006) realiza un recorrido histórico que muestra cómo desde la antigüedad, de manera implícita, diferentes culturas han trabajado el concepto de función (sin definirlo como tal y por tanto sin percatarse de ello; por ejemplo, los babilonios), mostrando así cómo este concepto ha primado en el mundo, máxime en el mundo natural a partir de diferentes situaciones en las que se presentan relaciones de variación. Muestra cómo diversos estudios (de Nicole Oresme, Galileo Galilei, Isaac Newton, F. Leibniz, Bernoulli, Nicolás Bourbaki, etc.) han llevado su propia definición del concepto según sus necesidades, su contexto, sus experiencias, etc.; que los conceptos son construcciones históricas que varían con el tiempo. Esto da a entender que todos los seres humanos, desde experiencias y habilidades cognitivas, junto con diferentes procesos que pueden ser cada vez más complejos, podemos llegar a realizar estas construcciones y que en ocasiones quizás lleguemos a aspectos en común con los demás.

Salden y Salden (1992) (citados en Jones, 2006) afirman que hay un conflicto entre las estructuras de las matemáticas y el proceso cognitivo de la adquisición de conceptos: apropiarse de definiciones es muy difícil cognitivamente y máxime para el concepto de función. (pp.6-7). Así, consideramos que al implementar las EAM en la enseñanza de las matemáticas podemos enfrentar ese conflicto y relacionar las matemáticas y los procesos cognitivos, pues mientras se aprenden los conceptos se van desarrollando las habilidades mentales.

Si siguiendo con Jones (2006), los estudiantes creen que para hablar de función es necesario la presencia de algoritmos matemáticos, así Sierpinska (1992) (citado en Jones, 2006) afirma que "la habilidad algebraica acompañada por la creencia en el poder del álgebra para resolver casi automáticamente muchos tipos de problemas, puede ser un impedimento para entender el concepto general de función"(p. 14). Además, Sfard (1992) (citado en Jones, 2006) encontró que "la mayoría de los estudiantes creen que debe haber un algoritmo correspondiente a la función para que sea válida" (p.15). Es decir, el concepto de función presenta falencias en su enseñanza y aprendizaje; las EAM presentan una oportunidad de cambiar esa imagen de función en términos algebraicos y algorítmicos, por una en la que sean importantes en el mundo real, además de un medio para potenciar sus habilidades cognitivas.

En su estudio para el aprendizaje de función lineal a través de una propuesta didáctica, Roldán (2013) plantea que "el aprendizaje de la función lineal hace grandes aportes al desarrollo del pensamiento variacional que a su vez resulta fundamental en procesos de generalización y desarrollo del pensamiento abstracto" (p. IX). Busca entonces una propuesta didáctica que permita a los estudiantes familiarizarse con el concepto de función lineal, pues menciona que, desde su experiencia, los estudiantes presentan

dificultades, por ejemplo, al pasar de una representación de función a otra o al tratar de darle significados al concepto. Además, dice que hay muchas otras investigaciones que evidencian las dificultades del proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de función y que estas dificultades son una realidad que afecta la educación matemática; los estudiantes encuentran problemas al representar y establecer relaciones entre funciones, no logran relacionar el concepto con sus experiencias cotidianas y no entienden su significado (o los significados que se le pueden dar según la situación), lo que sugiere que no se tiene en cuenta el desarrollo del pensamiento variacional y el pensamiento abstracto.

2.3 Concepto de función y su cambio a lo largo de la historia

Antes de comenzar a hablar del concepto de función, consideramos importante observar cómo ha surgido a través de la historia y su fundamento epistemológico y conceptual, con el fin de comprender cómo los estudiantes podrían construirlo en el aula partiendo de actividades pensadas para ello, en tanto desarrollan habilidades de pensamiento; además, pueden aprovecharse los problemas de la historia que generaron la necesidad del concepto.

De acuerdo con Farfán y García (2005) y Zúñiga (2009), la construcción del concepto de función se ha ido dando a lo largo de la historia de las matemáticas a partir de significativos cambios para llegar a la idea que hoy tenemos. En síntesis, estos autores proponen que:

- Los Babilonios y los griegos fueron las primeras comunidades que se acercaron de manera intuitiva al concepto de función buscando pronosticar los movimientos de los cuerpos: se han encontrado tablas donde registraban los cuadrados y cubos de cada número, búsquedas de regularidades de fenómenos naturales, aritmetizar y generalizar observaciones; intuyeron que la función no es sólo una fórmula sino una relación entre

conjuntos. Sin embargo, Bell (1945) (citado en Zúñiga, 2009, p.28) pone en duda el crédito dado a los Babilonios frente a la forma en que intuían el concepto de función, pues lo concebían como “*una tabla o una correspondencia*”.

- Ptolomeo logró acercarse al concepto de función al realizar cálculos que podrían relacionarse con las funciones trigonométricas. Esos cálculos permiten reafirmar lo sugerido por Bell, desde la perspectiva de Petersen (1974) (citado en Zúñiga, 2009): la función no como fórmula, sino como la relación de un conjunto con otro.

- En la edad media la utilidad de la función cambió y se volcó hacia la aritmética, pues el uso que se le dio fue la simplificación y reducción de los procesos aritméticos para agilizar las cuentas, pero cabe resaltar que esta idea ya la tenían los babilonios con sus tablas.

- Para 1638 Galileo asume el concepto de función como la relación entre dos variables donde si una cambia, la otra también. Descartes le da al concepto un lenguaje y escritura; el mayor aporte o contribución que hace es darle un lenguaje algebraico similar al que conocemos hoy.

- Newton, quien retoma las ideas de Galileo y Descartes, le da al concepto una definición geométrica relacionando variables. Newton también hace análisis profundos de las relaciones del concepto de función con la geometría e interpretaciones de estas relaciones.

- Más adelante, Leibniz (1673) y Bernoulli (1694) dan al concepto de función un lenguaje no sólo matemático, pues ellos hablan de las relaciones de líneas que juntas cumplen una función, algo así como formar un sistema de cantidades que juntas forman un sistema constante y útil.

- En 1748 Euler menciona: “*una función de una cantidad variable es una expresión*

analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable de números o cantidades” (citado en Zúñiga, 2009). Esta es la definición de función que hoy en día es más aceptada entre la comunidad matemática.

Tenemos que, en un lapso de alrededor de mil años, la idea de función pasó de pronosticar movimientos celestes a reducir y simplificar procesos aritméticos.

2.4 Reflexiones sobre desarrollo del pensamiento

La clave para el presente trabajo fue precisamente la manera en que el ser humano desarrolla su pensamiento, es decir, aquellos aspectos que están relacionados con el componente cognitivo; esto a partir de EAM. Consideramos imposible enseñar, aplicar o llevar a cabo acciones de mediación sin tener claro en qué consisten las EAM, que pueden explicar en parte el funcionamiento de la mente humana.

Por lo anterior, inicialmente consideramos necesario hablar sobre el constructivismo, aclararlo y describirlo debido a la influencia que tiene en el estudio sobre el desarrollo del ser humano, principalmente desde lo cognitivo. Para Bruning, Schraw, Norby y Ronning (2004) (citados en Schunk, 2012) “se entiende por constructivismo aquella perspectiva psicológica y filosófica que sostiene que las personas forman o construyen gran parte de lo que aprenden y comprenden” (p.229). Esta perspectiva se contrasta con todo aquello planteado en antecedentes y justificación, pues pone en consideración que los seres humanos desarrollamos nuestros propios conceptos, en parte, a partir de las experiencias que vivimos y en la interacción con lo demás; además estas experiencias nos permiten aprender y comprender de los diferentes contextos sociales, culturales, ambientales, educativos, etc., y relacionar todo ello con los aprendizajes escolares.

Al respecto, Schunk (2012) afirma que el constructivismo se volvió fundamental en el aprendizaje y la enseñanza, y en la actualidad, basándose en la historia sobre las investigaciones y teorías en relación con el aprendizaje, dice que ha dejado de pensarse que el aprendizaje se explica solo a partir de la influencia del ambiente: se explica desde las influencias o factores humanos. Las investigaciones se enfocan en el estudiante, al reconocimiento de la construcción en vez de la adquisición. De esta manera, con las actividades de EAM propuestas buscamos que el estudiante construyera el conocimiento en vez de obtenerlo como una adquisición. Por otro lado, el mismo autor comenta que, según Piaget, el desarrollo cognoscitivo depende de la madurez biológica, la experiencia con el ambiente físico, la experiencia con el entorno social y el equilibrio; este último proceso se compone de otros dos complementarios: la asimilación y la acomodación; el primero permite “asimilar” la realidad, mientras el segundo “acomoda” las estructuras. (p. 236)

Sumado a lo anterior, “Piaget sostiene a través de su teoría que el desarrollo puede darse sin necesidad de la interacción con la sociedad, sin embargo, el ambiente social no deja de ser fundamental para el desarrollo cognoscitivo”. (Schunk, 2012, p. 240)

Hasta este punto, consideramos realmente importante lo establecido en las teorías de Piaget y con él algunas ideas del constructivismo, esto debido a que logrando comprender cómo los sujetos desarrollan su pensamiento, cómo se enfrentan desde lo cognitivo a la realidad, cómo construyen sus conceptos e ideas, etc., pudimos obtener insumos que fortalecieron y nutrieron las actividades y estrategias planteadas como EAM, inclusive que complementaron las ideas antes mencionadas a partir de las cuales los sujetos crean sus propios conceptos desde sus experiencias y nos llevaron a observar particularmente aspectos como la influencia sobre el desarrollo cognoscitivo (y sobre su disposición al

momento de llevar a cabo prácticas de aprendizaje, su estado de ánimo, etc.) que tenía el contexto en el cual se llevaron a cabo las actividades.

En relación con Vygotsky, Shunk (2012) afirma que para él la sociedad juega un papel mucho más importante, pues funciona como un puente que facilita tanto el desarrollo como el aprendizaje (p.240). Tudge y Scrimsher (como se citaron en Shunk, 2012) dicen que para Vygotsky son fundamentales las interacciones interpersonales, así como las histórico culturales y las individuales, pues permiten el desarrollo humano; el aprendizaje y el desarrollo van íntimamente ligados al contexto y por tanto todas las interacciones sociales experimentadas por el sujeto permitirán cambios en las experiencias ligadas al aprendizaje. (p.242)

La perspectiva de Vygotsky nos pareció fundamental en tanto evidencia el papel de las interacciones sociales en la formación y el desarrollo de los individuos, lo que es parte importante de las EAM, debido a que son experiencias que dependen fuertemente de las relaciones entre los sujetos, el mediador y el contexto en que se llevan a cabo, y donde la mediación es el objeto principal para que se dé el aprendizaje. Al respecto, Schunk (2012) afirma: “La postura de Vygotsky es un tipo de constructivismo dialéctico (cognoscitivo); es constructivista porque hace hincapié en la interacción entre las personas y sus entornos. La mediación es el mecanismo clave en el desarrollo el aprendizaje”. (p.242)

2.5 Zona de Desarrollo Próximo y Modificabilidad Cognitiva Estructural

Un concepto que consideramos importante abordar es el de Zona de Desarrollo Próximo (en adelante ZDP) definida por Vygotsky (citado en Schunk, 2012) como:

La distancia entre el nivel actual del desarrollo determinada mediante la solución independiente de problemas, y el nivel de desarrollo potencial, determinado por

medio de la solución de problemas bajo la guía adulta o en colaboración con pares más capaces. (p.243)

Esto está sumamente ligado a las EAM que precisamente permiten reflejar esta distancia, pues su fundamento radica en la guía adulta o de pares más capaces por medio de la mediación para lograr un proceso de aprendizaje. La teoría de MEC de Feuerstein dice que: “cualquier individuo es susceptible de mejorar su capacidad intelectual, aprender y aprender a aprender si se involucra con experiencias de aprendizaje mediado (EAM)” (Ruffinelli, 2002, p.1). Además, se entiende que no importan las condiciones físicas, cognitivas o inclusive la edad, pues al final lo que importa es la modalidad de EAM que se use. Este supuesto nos ayudó a adaptar las actividades según la población participante elegida, sus cualidades, sus condiciones, entre otros; pues entendimos que todos podrían mejorar sus capacidades intelectuales. A propósito, Pilonieta (2010) dice que “la mediación es el acto de interacción que produce en la existencia de una persona la flexibilidad, la autoplaticidad y le da la opción de ejercer la modificabilidad permanentemente, por tal razón es la mejor expresión de la resiliencia” (p.103).

Entendimos así la mediación como el diseño y desarrollo de situaciones de aprendizaje mediado que permiten al sujeto estar abierto a la modificabilidad de carácter estructural. Según Pilonieta (2010), lo que se busca durante la mediación es identificar las potencialidades intelectuales y de aprendizaje que le permiten al sujeto obtener interacciones y experiencias positivas de manera que aquello que llama inteligencia sea susceptible de crecer y aprender constantemente, llevándolo así a la autonomía (p. 102). Por tanto, las EAM dan paso a entender más a profundidad cómo funciona la modificabilidad y probablemente su efectividad durante el aprendizaje para el desarrollo de las habilidades mentales. Según Pilonieta (2010) “el resultado del acto mediador consiste en la corrección

de las funciones cognitivas, base de las operaciones mentales. Se trata de que el organismo fortalezca sus estructuras cognitivas y afectivas para funcionar de manera adecuada y plena” (p. 109)

La teoría de MEC resalta el rol fundamental del maestro como mediador y facilitador del aprendizaje, y se plantea que no hay un límite para el desarrollo intelectual desde que se cuente con adecuadas experiencias de aprendizaje. Ruffinelli (2002) habla de un desarrollo cognitivo y aclara que el nivel de este es muy diferente a hablar de inteligencia, es decir, el nivel de desarrollo cognitivo está más específicamente ligado a la calidad de experiencias mediadas que el sujeto ha vivido. De esta manera, pocas experiencias mediadas pueden significar un bajo nivel de desarrollo cognitivo y no poca inteligencia.

Por su parte, Velarde (2008) expone que “Feuerstein en su teoría a diferencia de muchas otras no busca modificaciones parciales, sino que piensa en la posibilidad estructural e integral del ser humano” (p.206). Desde este punto de vista el factor mediador (docente) juega un papel fundamental, pues es el filtro entre el niño y el mundo mientras es mediador, con el fin de llevarlo a la reestructuración o desarrollo de su pensamiento a partir del aprendizaje, de este depende además la calidad de las EAM; esto incidió en la preparación de la interacción mediador-mediado con los estudiantes e inclusive al momento de llevarla a cabo.

En relación con todo lo anterior, haremos referencia al último concepto que hasta el momento consideramos fundamental tanto para las EAM como para la MEC, y más aún para nuestro trabajo de campo, pues las actividades a realizar dependen en gran medida de su comprensión y aplicación: operaciones mentales.

2.6 Operaciones Mentales

Como punto de partida para referirnos a las operaciones mentales retomamos a Piaget (1964) citado en Pilonieta (2010) cuando las define como “la acción interiorizada que modifica el objeto de conocimiento”, pero que Feuerstein (citado en Pilonieta, 2010) complementa como “un conjunto de acciones interiorizadas, organizadas y coordinadas, por las cuales se elabora la información procedente de las fuentes externas e internas”. (p.137) Lo anterior se da en el marco de las MEC y está relacionado con la estructura del pensamiento.

El fin principal de este trabajo es el desarrollo de las habilidades de pensamiento a través de las operaciones mentales en estudiantes de bachillerato, mientras a su vez estos aprenden acerca del concepto de función o mejoran aquellos conocimientos que ya tenían sobre él. Sobre las operaciones mentales, dice Pilonieta (2010) que las deficiencias que estas presentan, mientras el sujeto maneja y procesa la información, provocan bajos niveles de abstracción y con ello la imposibilidad en él de abordar trabajos en los cuales se requiere inteligencia. Bajo esta misma línea Gómez, Cruz, Acosta y Martínez (1998) se refieren a las operaciones mentales como “las estrategias que emplea el sujeto para manipular, organizar, transformar, representar y reproducir nueva información”. (p.23) En este sentido, las operaciones mentales son: Identificación, diferenciación, representación mental, transformación mental, comparación, clasificación, codificación, decodificación, proyección de relaciones virtuales, análisis, síntesis, inferencia lógica, razonamiento analógico, razonamiento hipotético, razonamiento transitivo, razonamiento silogístico, pensamiento divergente-convergente y conceptualización (Pilonieta, 2010; Gómez et al., 1998).

El presente trabajo pretendió desarrollar habilidades del pensamiento por medio de actividades que permitieran fortalecer las operaciones mentales de: diferenciación,

representación mental e inferencia lógica. Las dos primeras las consideramos fundamentales para cualquier proceso de aprendizaje porque son operaciones usadas cotidianamente, aunque no somos conscientes de ellas: para el caso de diferenciación, se tiene por ejemplo que constantemente podemos observar cómo una persona en un almacén o supermercado identifica las características de algunos productos, luego de acuerdo con esas características sabe qué diferencias tienen y opta por llevarse uno de esos productos; la representación mental necesita estrategias de diferenciación y permite desarrollar la habilidad de definir conceptos que necesiten de la abstracción. Estas dos operaciones mentales nos parecen muy importantes en el tema de funciones ya que se necesitó que el estudiante identificara las características de cualquier función y las diferenciara de otras, logrando finalmente hacerse una representación para definir las. La inferencia lógica es una operación un poco más compleja, ya que se relaciona con el razonamiento; también es muy utilizada cotidianamente, pues en ocasiones se presentan situaciones en las que contamos con la información explícita necesaria para resolverla, pero a veces la información necesaria está implícita y no sabemos inferirla.

A continuación, se describirán las tres operaciones mentales mencionadas anteriormente desde la perspectiva de Pilonieta (2010) y Gómez et al., (1998).

2.6.1 Diferenciación

Se da cuando se perciben aquellos aspectos relevantes e irrelevantes, y con ellos sus diferencias, permitiendo al sujeto reconocer las propiedades que definen las cosas. Esta operación mental presenta como logros (Pilonieta, 2010) los siguientes: obtener diferentes habilidades o mejorarlas, por ejemplo, el describir, reconocer e identificar aspectos como semejanzas o diferencias, además, empezar a comprender qué es el concepto de variable. Por otro lado, se presentan unos objetos de la mediación desde el mismo autor: ser capaz de

trabajar constantemente la identificación, dando paso a la posibilidad de trabajar sobre lo que llama abstracción en sus diferentes niveles de complejidad.

2.6.2 Representación mental

Es la capacidad del sujeto para hacer diferentes representaciones a partir de los aspectos esenciales y que definen al objeto a través de la retención de las principales propiedades o cualidades de este. Los logros de la mediación de esta operación apuntan a alcanzar la capacidad de trabajar desde y en lo abstracto a partir de categorizaciones de lo conceptual. Ahora, el objeto de la mediación en esta operación es fundamentalmente ser capaz de definir los propios conceptos y con ello ser capaz de manejar categorías, establecer constantemente estrategias y construir principios según los procesos.

2.6.3 Inferencia lógica

Es aquella capacidad que se obtiene a partir de la práctica y los procesos para crear información y ser capaz de realizar deducciones desde los datos que se perciben. Los logros de este proceso son la obtención de la capacidad para desarrollar o terminar tareas, problemas o actividades a partir de información incompleta, ser capaz de obtener conclusiones por medio de la interpretación de las situaciones, etc. Entre los objetos de la mediación están el organizar todas aquellas relaciones existentes en diferentes situaciones por medio de la búsqueda de patrones en común, es decir, cosas como leyes o principios, además, crear información desde los datos.

2.7 Criterios de la Mediación

Pilonieta (2010) y Gómez et al., (1998) presentan unos criterios para la mediación que consideramos fundamentales, debido a que nos dieron las bases para llevar a cabo un acto de mediación pertinente durante la aplicación de las actividades propuestas y porque nos permitieron realizar acciones para convertir una experiencia común en una experiencia

de aprendizaje, sin embargo, aclaramos que no todos los criterios fueron aplicados y por tanto, mencionamos los que tomamos como referente:

2.7.1 Mediación de la intencionalidad y la reciprocidad: este criterio se puede entender como la necesidad primordial para realizar cualquier experiencia de aprendizaje, es decir, la intencionalidad fundamental es involucrar al estudiante, recuperar su saber ya adquirido y transformar esto en un proceso continuo de crecimiento personal; cada EAM contaba con una intencionalidad que era compartida a los estudiantes. Según Pilonieta (2010) “La intención del mediador debe situarse en el proceso de desarrollo de las operaciones mentales y en las funciones cognitivas” (p.159). Por eso la función de nosotros como mediadores era lograr que los estudiantes manifestaran de alguna manera sus propios procesos de aprendizaje, por otro lado, la reciprocidad nos permitió verificar ese proceso de mediación, identificar las debilidades en las operaciones mentales y funciones cognitivas, para superarlas y luego potenciarlas.

2.7.2 Mediación de la trascendencia: “trascender es ir, es proyectar, es elevar el pensamiento a dimensiones de abstracción para que se convierta en principios que puedan ponerse a funcionar en torno al crecimiento personal y comunitario” (Pilonieta, 2010, p.162). Por esta razón, se buscaba con la mediación que el estudiante le diera sentido al aprendizaje para que luego le sirviera en un futuro; en este criterio se hizo más énfasis en las operaciones mentales que en el concepto de función, pues para los investigadores era más trascendental que el estudiante fuera autónomo en su aprendizaje y en su capacidad para identificar, seleccionar, representar, diferenciar, organizar, inferir y procesar información.

2.7.3 Mediación del significado: este tiene relación con el aprendizaje significativo que, según Pilonieta (2010), se da por dos factores: la intencionalidad y la relación entre el

abordaje inteligente de la situación de aprendizaje y la estructura cognitiva desarrollada. En este criterio se pretendió involucrar al estudiante en la construcción de nuevos conocimientos, permitiéndole llevar una relación entre estos con sus conocimientos ya existentes; se trata entonces de aprender a aprender, de generar nuevas necesidades para interactuar, para preguntar y para descubrir el porqué de los razonamientos.

2.7.4 Mediación del control del comportamiento y mediación sobre el sentimiento de compartir: Se pueden describir en conjunto por su relación; consideramos que fue indispensable el control del comportamiento impulsivo pues esta conducta genera dificultades en el aprendizaje ya que promueve errores y no permite la participación; este control del comportamiento se basaba en que el estudiante no podía mirar el contenido de las hojas que se le entregaban en las EAM hasta que el mediador lo consideraba pertinente, más aún, no podía escribir nada hasta que se leyera la intencionalidad de la actividad y hasta que comprendieran que debía hacer; la acción de los investigadores como mediadores era hacer las preguntas: ¿qué veo?, ¿qué hay que hacer?, ¿cómo lo hago?, que en palabras de Pilonieta (2010) “son procesos de orden metacognitivo, ayudan a las personas a conocer sus propios procesos de construir y acceder conocimientos y a su vez, también le facilita llegar a la trascendencia y significado del aprendizaje” (p.168). El sentimiento de compartir fue mediado para promover la interacción, pues las EAM se realizaron en grupos de 2 o 3 personas, lo que permitió que los estudiantes comprendieran otros puntos de vista, que respetaran las ideas de los compañeros y que fueran tolerantes al escuchar al otro.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Enfoque Metodológico

La investigación está permeada por un enfoque cualitativo, que en palabras de Hernández, Fernández y Baptista (2014) “utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación” (p.7). A partir de esto, el interés de los investigadores se centró en el estudio desde el contexto natural de los participantes, la descripción basada en la observación y el uso de diarios de campo; además de un registro fílmico y fotográfico en el momento de la aplicación de las actividades. Entendemos la investigación cualitativa como un proceso a su vez inductivo y recurrente que permite realizar diferentes análisis, partiendo de las múltiples realidades subjetivas de quienes hacen parte o participan en el proyecto investigativo (Hernández et al., 2014). Inclusive, es pertinente para esta investigación debido a que el margen de interpretación de los datos obtenidos resulta ser realmente amplio, cada significado que podamos dar a las interpretaciones puede ser muy profundo y además se permite una contextualización del fenómeno investigado.

La realidad que tienen los estudiantes se puede considerar compleja, por eso es importante situarse en este enfoque cualitativo, de manera que nos permite la inmersión en esa realidad, analizar múltiples realidades desde descripciones de las experiencias que permitan definir categorías. De igual modo, Hernández et al. (2014) expone que el propósito de una investigación cualitativa es reconstruir la realidad; para esto es importante y fundamental considerar la interacción de todas las realidades que intervienen, la diversidad de ideologías y las cualidades auténticas de cada participante.

Por consiguiente, la necesidad de adoptar un enfoque cualitativo para este proyecto radicó en la importancia que tiene toda persona dentro de un grupo social y su manera única de ver el mundo. En la intencionalidad de esta propuesta fue fundamental tener el conocimiento de dichos participantes para identificar las necesidades y buscar las soluciones más apropiadas que ayudaron al desarrollo cognitivo y al desarrollo de las operaciones mentales: diferenciación, representación mental e inferencia lógica.

La presente investigación se desarrolló con base en el método de la investigación-acción (IA), que se escogió por la necesidad de investigar nuestra propia práctica.

Sagastizabal y Perlo (2006) sostienen que:

La investigación- acción es una de las herramientas más importantes en la formación docente, ya que da una dimensión profesional a la tarea de enseñar, en la medida en que acerca al maestro a su realidad desde un estudio sistemático de la misma, a la vez que le aporta pautas y criterios para la acción. (p.66)

Además, plantean los mismos autores que IA no solo permite investigar nuestras propias prácticas, sino que da la posibilidad de mejorarlas, de crear estrategias que busquen cambios educativos y que como maestros seamos capaces de elaborar respuestas ante nuevas situaciones; cada uno de estos argumentos se verán reflejados en las acciones que se llevaron a cabo en las cuatro fases que caracterizan una IA, como se verá más adelante.

Lo anterior resulta relevante para el proyecto debido a que la IA nos permite ver la pertinencia de las EAM al momento de poner en práctica la acción docente, esto mientras investigamos la práctica propia, además, nos da pautas para llevar a cabo el proceso de investigación y de paso nos permite proponer tales experiencias como otras alternativas para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (particularmente el concepto de función), que permiten al estudiante desarrollar su pensamiento y permite al maestro estar alerta a los

cuestionamientos que se generan en las EAM, no para darle solución sino para generar preguntas que acerquen al estudiante a pensar una respuesta.

Es preciso aclarar que para otros autores la IA tiene otras modalidades, por ejemplo Ghiso (1996) clasifica la IA en investigación-acción del profesor, participativa y cooperativa; la primera enfocada a la investigación que el profesor hace dentro de su contexto educativo y está dirigida a servir al individuo, la segunda va dirigida a servir a la comunidad y se sale de los parámetros de la modalidad de educación no formal, la tercera va dirigida a servir a un grupo y está más enfocada a la investigación que se hace con los problemas de los profesionales y las escuelas que forman estos profesionales. En sintonía con Sagastizabal y Perlo (2006), nuestra investigación fue enfocada a la IA del profesor ya que es la que más características comparte con lo desarrollado en el trabajo de campo de esta investigación, pues Ghiso (1996) y Valenzuela y Flores (2011) plantean que este tipo de investigación tiene como meta el mejoramiento de la situación en que se desenvuelve la práctica, perfeccionar su comprensión; además, el profesor es quien analiza las diferentes situaciones que requieran una respuesta que se describe y se explica en términos del lenguaje de los participantes.

Diferenciamos el enfoque explicado de la IA participativa, pues los objetivos de esta se centran en "producir conocimiento y acciones útiles para un grupo de personas, que la gente se empodere/capacite a través del proceso de construcción y utilización de su propio conocimiento" (Ghiso, 1996, p.15). En esta modalidad, quienes se encargan del proceso de investigación es todo el grupo o toda la comunidad que participa en ella, siempre buscando un cambio estructural que pueda mejorar su calidad de vida de acuerdo con sus habilidades y capacidades. También nos apartamos la IA cooperativa, porque se puede decir que este enfoque busca solucionar los problemas de los profesores en cooperación de una facultad

universitaria (o de una institución educativa), con el fin de producir conocimiento que ayude a solucionar los problemas planteados por los profesores e investigadores.

Ahora bien, las cuatro fases que plantea Lewin (citado en Ghiso, 1996) como característica de toda IA son: planificar, actuar, observar y reflexionar. De esta manera, el desarrollo del proyecto se basó en un periodo extenso de planificación derivado de experiencias de práctica en el contexto de interés, las aulas de clase, la relación previa con los estudiantes, la identificación de sus necesidades en el área y los intereses propios de los investigadores; para luego identificar una problemática, definir una pregunta y diseñar estrategias a modo de EAM para la interacción en el aula.

Respecto de las fases citadas por Ghiso (1996) denominadas “actuar” y “observar”, se realizó la implementación de las actividades planeadas, se requirió observar el contexto, el comportamiento de los participantes (la manera de comunicarse), la manera de relacionarse, las problemáticas que enfrentan, las relaciones con el profesor (en este caso el investigador), actitudes durante las clases y por fuera de ellas, además de los cuestionamientos que realizan con mayor frecuencia. De acuerdo con Ghiso (1996) aspectos propios de la IA son: experiencias, preguntas, comportamientos, interacciones surgidos desde los sujetos participantes.

En lo que se refiere a esa última fase (reflexión), la presente investigación se orientó al análisis de los datos obtenidos (datos cualitativos), a extraer aquellos pertinentes para la pregunta de investigación y la teoría consistente con los datos mismos; fue importante que cada una de las fases estuviera orientada a reconocer y analizar problemas en las vivencias o situaciones sociales, interpretar el estudio de los participantes en términos de sus mismos lenguajes, evaluar en conjunto con los mismos participantes y buscar un cambio dentro de nuestras mismas prácticas.

3.2 Descripción de los participantes

La investigación se llevó a cabo en uno de los grados décimo de la Institución Educativa Normal Superior de Medellín, ubicada en el barrio Villa Hermosa de la comuna 8. El grupo está conformado por 41 estudiantes (de los cuales la cantidad presente durante la aplicación de las actividades variaba por diferentes razones; por ejemplo, inasistencia debido a enfermedad o refuerzos, etc.) cuyas edades están en un intervalo de 14 a 18 años, el estrato socioeconómico al que pertenece la población participante varía mayormente entre 2 y 3. Ninguno de los participantes aparece registrado con alguna necesidad educativa especial (física, cognitiva o psicológica). Además, la población no manifiesta dificultades o problemáticas internas como el Bullying o conflictos por diferencias entre los mismos estudiantes, y tampoco problemáticas académicas o personales con su respectivo maestro de matemáticas.

Todas estas características se evidencian en los registros de las observaciones realizadas en los diarios de campo a lo largo de los dos semestres mencionados anteriormente, y resultan importantes, ya que al ser esta una investigación cualitativa, todas estas experiencias son importantes para posteriores análisis de datos, y los procesos que conllevan.

Ahora, de las observaciones realizadas durante nuestra práctica pedagógica en los semestres 2017-1 y 2017-2 en el establecimiento educativo, consideramos importante mencionar algunas de las principales características de la población participante:

- Gran parte de los estudiantes muestra desinterés por aprender matemáticas la mayor parte del tiempo y quienes muestran interés, en su mayoría son mujeres.
- Los estudiantes se ven más concentrados en la clase (explicación de la teoría, ejercicios de ejemplo, ejercicios para participar durante la explicación, etc.) en las

horas de la mañana. En las horas de la tarde, su concentración se pierde constantemente, se dispersan demasiado fácil (por ejemplo, cuando alguno de sus compañeros hace comentarios que no corresponden con la temática que se está abordando), suelen hacer más ruido, levantarse más de sus asientos, etc.

- Suelen realizar los trabajos grupales siempre conformando los mismos equipos de tres integrantes, aunque hay una excepción, es decir, un estudiante prefiere trabajar solo.
- Muestran gran dependencia hacia las notas, es decir, se incentivan rápidamente cuando esta se pone como recompensa por su participación, y constantemente a lo largo de cada clase todo el que se acerca al maestro suele preguntar qué notas tiene o hace el intento de verlas por sí mismo.
- Se evidencia y admiten que no suelen (la mayoría) revisar sus cuadernos en sus respectivas casas, sea para estudiar, repasar temáticas o terminar trabajos pendientes.
- Suelen (en su mayoría) terminar los trabajos que quedan pendientes momentos antes de que inicie la clase para la cual está previsto entregarlos.

3.3 Instrumentos de Recolección de la información

En el transcurso de las prácticas pedagógicas en el semestre 2017-01 y 2017-02 se llevó a cabo un proceso de recolección de información basado en el investigador como principal instrumento para la recolección y el análisis de los datos; según Hernández, Fernández y Baptista (2014) es él la persona fundamental en una investigación cualitativa, pues no solo recoge y analiza los datos, sino que es el medio por el cual se obtiene la información; esta obtención de información por parte de los investigadores se hizo mediante la observación y el registro de diarios de campo, durante el acompañamiento en

clase, talleres, evaluaciones y recesos; el formato que se utilizó en los diarios de campo (ver ejemplo diario de campo en Anexo 1) separaba las reflexiones de las descripciones con el propósito de no sesgar la observación y la descripción de los datos cualitativos. Los diarios fueron examinados con el fin de buscar información relevante que nutriera nuestro proyecto, además, que diera paso a buscar posibles respuestas e interrogantes relacionados a nuestra pregunta de investigación.

Se realizó una entrevista semiestructurada (ver Anexo 2) al final de las actividades de EAM, este tipo de entrevistas se basa “en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información” (Hernández et al., 2014, p.403). Cabe resaltar que esta entrevista es de preguntas abiertas con el fin de recoger información ampliada; se entrevistaron cuatro estudiantes de los cuales dos de ellos en las actividades de mediación mostraron resultados o actitudes favorables y los otros dos estudiantes participaron activamente en las actividades de mediación, pero presentaron resultados poco favorables. También se utilizó registro fílmico y fotográfico (ver Anexo 3) con el fin de recoger evidencias del trabajo de campo.

A partir de los diarios de campo y la revisión de documentos relacionados con EAM y operaciones mentales, buscamos información que nos permitiera sentar las bases para la creación de las actividades para el trabajo de campo directamente relacionado con las operaciones mentales y el aprendizaje de función. Las actividades (ver Anexo 4) fueron a su vez de gran importancia para la determinación de categorías y de las unidades de análisis que ayudaron con los fines y objetivos del proyecto; estas actividades se describen a continuación detalladamente.

3.4 Descripción de actividades

Con el fin de cumplir los objetivos iniciales y responder a nuestra pregunta de investigación, se diseñaron diferentes actividades que pudieran fortalecer las operaciones mentales en los estudiantes participantes, en el caso de este proyecto, diferenciación, representación mental e inferencia lógica. Las actividades movilizaron a los estudiantes a reconocer y establecer diferencias, observar, interpretar, imaginar, describir, representar, deducir, generar conclusiones, etc. Además, trabajaron los temas de mayor relevancia de funciones lineales, cuadráticas y trigonométricas. Cada una de las actividades (ver Anexo 4) tenía una finalidad diferente, es decir, buscaba potenciar el desarrollo de una, dos o las tres operaciones mentales mencionadas anteriormente; inclusive, estas fueron diseñadas para ser desarrolladas por parejas. La duración esperada para cada actividad fue de dos horas aproximadamente. A continuación, se hace una descripción general de cada una de ellas:

Actividad 00:

Esta actividad propició de insumo para planear estrategias que desarrollen habilidades de pensamiento como la diferenciación, la representación mental y la inferencia lógica en los estudiantes, partiendo de las fortalezas y debilidades que presentan al momento de abordar el concepto de función por medio de una evaluación diagnóstica. La actividad se dividió en cuatro momentos: el primero buscó diferenciar, a partir de algunas gráficas, cuáles representaban funciones y cuáles no, momento principalmente enfocado a la diferenciación; el segundo momento, centrado en la representación mental, los estudiantes analizaron algunas transformaciones que sufre la gráfica de la parábola; el tercer y cuarto momento, se centraron en la inferencia lógica, buscando que el estudiante aplicara los insumos que recogieron en la actividad y definiera qué es función, diera sus características y graficara una función particular. (Ver Anexo 4.1).

Actividad 01:

Por medio de esta actividad se propició el desarrollo de la habilidad de pensamiento relacionada con la representación mental, con ejercicios que adentran al estudiante en la posibilidad de diferenciar una relación de una función, mientras genera las respectivas representaciones mentales de las gráficas de las funciones. La actividad está pensada en tres momentos: en el primero los estudiantes deben observar cómo una relación entre dos conjuntos puede llegar a ser una función (diagrama sagital); en el segundo momento, se muestra al estudiante una serie de gráficas y se le pide señalar cuáles representan una función; en el tercer momento se le pide que argumente con sus palabras qué entiende por representación mental y qué entiende por relación, función y cómo estas dos están relacionadas. (Ver Anexo 4.2).

Actividad 02:

Esta actividad propició trabajar las habilidades de pensamiento como la diferenciación y la inferencia lógica, pues tales habilidades se pueden desarrollar a través de ejercicios en los que el estudiante debe identificar propiedades específicas, semejanzas y diferencias de las funciones trigonométricas por medio de su descripción y de sus gráficas. Además, nos permite observar cómo los estudiantes elaboran conclusiones al analizar la relación existente entre las funciones seno y coseno. La actividad está planteada en 4 momentos; en el primer momento trabaja la operación mental diferenciación, el estudiante debe observar las funciones seno y coseno identificando las características particulares de cada una (semejanzas, diferencias y similitudes entre sí); en el segundo momento se sigue trabajando la operación mental diferenciación, el estudiante observa en un mismo plano cartesiano las gráficas de las funciones seno y coseno, se le pide que observe y saque conclusiones de lo observado; en el tercer momento se trabaja la inferencia lógica, el

estudiante debe revisar todo lo realizado hasta este momento de la actividad y elaborar conclusiones; en el cuarto momento se sigue con la inferencia lógica y la representación mental, el estudiante debe proyectar todo lo trabajado estableciendo las diferencias, semejanzas y similitudes observadas con sus propias conclusiones. (Ver Anexo 4.3)

Tras el pilotaje previo a la implementación de las actividades en la población participante, a las actividades se les realizaron una serie de mejoras o reformas basadas en las opiniones de los estudiantes de otro grupo décimo. Estas mejoras fueron principalmente de forma (no afectaron estructuralmente las actividades) en los enunciados, pues los estudiantes consideraban, por ejemplo, que estos no eran muy claros o simplemente no describían completamente la mediación (realizada por los investigadores) bajo la que les orientábamos. No fue necesario mejorar los ejercicios propuestos, ya que los estudiantes manifestaron que no eran difíciles y que, al ser una opción diferente para aprender, resultaban interesantes. Por tanto, al final las mejoras fueron simples cambios de palabras o se agregó un complemento a las descripciones.

3.5 Cronograma

A continuación, presentamos el cronograma con el cual realizamos el proceso de aplicación de las actividades a partir del trabajo de campo en el que se implementaron las actividades planeadas con el fin de observar cómo los estudiantes llevaban a cabo los procesos para desarrollar las operaciones mentales seleccionadas:

Fecha (2017)	Compromisos de los mediadores	Resumen de la descripción de las actividades
Jueves 26 de octubre	Presencia en el establecimiento educativo para realizar el primer pilotaje. Allí se trabajó las primeras dos actividades.	Actividad enfocada a crear estrategias que desarrollen habilidades de pensamiento como la diferenciación, la representación mental y la inferencia lógica en los estudiantes.

Miércoles 1 de noviembre	Inicio al desarrollo y aplicación de las actividades en la población participante, donde la primera se realizó la actividad diagnóstica, cuyo fin fue observar cómo la población entiende el concepto de función.	Actividad enfocada en la diferenciación a partir de algunas gráficas, la representación mental y la diferenciación lógica.
Miércoles 15 de noviembre	Aplicación de actividad número 1 con la población participante, cuyo fin fue trabajar las funciones y relaciones.	Se pretende que el estudiante observe como un diagrama sagital puede representar una función, mostrar al estudiante algunas gráficas y que identifique las funciones, que argumente con sus palabras qué es la representación mental, que son relación, función y cómo se relacionan.
Jueves 16 de noviembre	Se realizó el pilotaje de las actividades 2 y en el grupo décimo.	Observar proceso del estudiante mientras trabaja las operaciones mentales representación mental e inferencia lógica, con el fin de obtener información para mejorar las actividades.
Lunes 20 de noviembre	Se aplicó de la actividad número 2 con la población participante. Allí se trabajó la representación mental y la inferencia lógica.	Esta actividad trabaja habilidades de pensamiento como la diferenciación y la inferencia lógica. Se le indica al estudiante que observe las funciones seno y coseno identificando las características particulares de cada una.

Tabla 1. Cronograma de la aplicación de las actividades y los pilotajes.

3.6 Consideraciones Éticas

La tarea de la investigación demanda conductas éticas en los investigadores, por eso fue necesario que los participantes de este trabajo estuvieran informados sobre los propósitos de la investigación, además, los apuntes, los registros de diarios de campo, las posturas e intervenciones que se utilizan en este trabajo cuentan con el consentimiento y la aprobación de todos ellos (ver Anexo 5.1 y 5.2).

De acuerdo con lo anterior, nosotros como investigadores tenemos claro que al vivir en sociedad crecemos con unas costumbres que determinan la manera de percibir e interpretar otras personas de diferentes comunidades culturales, por eso es fundamental alejarnos de todo tipo de juicios morales y aplicar el etnocentrismo flexible, que en palabras de Matsumoto (2000):

Significa darnos la oportunidad de ir más allá de aquellas reacciones que nos generan otras culturas, controlar nuestros juicios morales y reacciones emocionales,

que emergen de manera automática por nuestro mismo aprendizaje cultural y tratar de ver el mundo desde otros puntos de vista. (p.1).

Por lo tanto, para la investigación es importante tener en cuenta el relativismo cultural que se refiere a “la posición que considera que cada cultura debe ser apreciada y estudiada en sus propios términos sin juzgarla de acuerdo con los estándares básicos de la propia sociedad” (Lipson. 2002. p. 60). Nos valemos de los principios éticos que Lipson (2002) menciona: consentimiento informado, riesgos y beneficios, la oportunidad de abandonar la investigación o repudiar y no participar en una actividad, y finalmente la confidencialidad y el derecho a ser protegido. Con esto no queremos decir necesariamente que el contexto en que llevamos a cabo la investigación pueda poner en riesgo la seguridad de los participantes, pero sí buscamos resaltar la importancia de la privacidad al mantener anónimas las identificaciones propias de estos, de tal manera que puedan participar en la investigación con la mayor naturalidad posible.

3.7 Limitaciones

Las actividades que se propusieron para realizar la intervención en el establecimiento educativo no fueron aplicadas completamente dado que a lo largo del transcurso del año escolar se fueron presentando diferentes situaciones en los horarios de clase del grupo participante: pérdida de clase debido a reuniones de maestros en esos días y horas, programas culturales, días festivos, programaciones internas, hasta actividades evaluativas institucionales de final de periodo académico, etc. El caso que mayor influencia tuvo en el retraso de la programación fueron unas coyunturas sociales entre el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y las distintas asociaciones y sindicatos de maestros. Dichas coyunturas se enmarcaron en un paro nacional del Magisterio que tuvo un periodo de duración de 37 días calendario; este paro afectó nuestra asistencia a la institución

(generando retrasos en la recolección de información recogida en los diarios de campo), pues durante ese tiempo no tuvimos un acercamiento con los estudiantes y toda la comunidad educativa en general (no asistíamos al establecimiento educativo). En una segunda instancia, se presentó un retraso en el calendario académico del colegio; pues, en una forma de compensar el tiempo del paro, el MEN y el magisterio modificaron el calendario alargando el periodo académico de noviembre a diciembre. Ya cuando entramos a realizar nuestro trabajo de campo y en él las actividades propuestas (ver el cronograma expuesto anteriormente), los estudiantes se encontraban en un tiempo de terminación de periodo, habilitaciones y finalización del año escolar, lo cual provocó que las fechas pactadas fuesen alteradas a medida que el año escolar terminaba y por tanto las actividades y los pilotajes fueron aplazados, así no fue posible realizar todas las actividades propuestas y solo se realizaron 3 (tres) de las 5 (cinco) actividades pensadas y planeadas en nuestras EAM.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 Análisis de la Información

De Hernández, Fernández y Baptista (2014) entendemos que los procesos de análisis y recolección de datos en la investigación cualitativa se dan en paralelo: el primero no es uniforme, pues, de acuerdo con el estudio, el esquema puede variar. Los autores plantean que mientras se lleva a cabo el proceso de recolección de datos a lo largo de la investigación, toda la información recogida no presenta una estructura definida, que constituye una cuando se lleva a cabo el proceso de análisis. Se entiende inclusive que los datos son básicamente observaciones y narraciones del investigador además de narraciones de los participantes, que pueden ir desde visuales y auditivas hasta escritas. El análisis se centra en explorar datos, darles una estructura, describir las experiencias de los participantes, descubrir conceptos, categorías, temas, vincular resultados con conocimientos y formular teorías basadas en los datos, etc.

Ahora bien, para analizar los datos se utilizó el programa de análisis cualitativo ATLAS.ti[®], que facilitó la organización de toda la información. Para el uso del programa fue necesario la transcripción de todos los datos recolectados en el trabajo de campo. Luego de esto, se empezaron a escoger fragmentos de los documentos transcritos como elementos claves de la investigación; estos fragmentos recibieron el nombre de *unidad de análisis* (Hernández, Fernández y Batista, 2014) y que llamaremos también ‘citas’ (dado que así se domina en ATLAS.ti[®]). Se dio paso a la categorización de la información, que dentro del programa consistía en nombrar, por medio de códigos, esos fragmentos importantes (comprendemos acá que *código* en el programa es equivalente a *categoría* en los autores citados). Para esto se tomaron en cuenta dos tipos de categorías: las descriptivas y las sensibilizadoras. Para comprender la diferencia entre ambas, debe saberse que, en el

momento de asignar códigos, estos se nombraban de acuerdo con la unidad de análisis, es decir, según las características comunes observadas por primera vez en el trabajo de campo y que permitieron ir organizando todo el material por temas o frases que describieran esa información contenida en esa categoría; a estas categorías se les denominó descriptivas. Por otro lado, las categorías sensibilizadoras permitieron realizar la misma función de las categorías descriptivas, pero no organizando las unidades de análisis sino ordenando las categorías descriptivas. Para reforzar estas ideas:

Las categorías descriptivas son las que se organizan en torno a rasgos comunes tal como son observados o representados por primera vez. Las categorías sensibilizadoras son más generalizadas, pues se concentran en las características comunes entre un abanico de categorías descriptivas (Woods, 1995).

Las categorías descriptivas se pueden clasificar en *etic* y *emic*: las primeras son aquellas que surgen del punto de vista de los investigadores y las segundas provienen del punto de vista y las expresiones de los participantes. Para aclarar, el material *emic* es de tipo inductivo, pues surgen de los datos recogidos o que no hayan sido contruidos por quien analiza; el material *etic* es de tipo deductivo, pues surgen de las preguntas y problemas propuestos.

En general, desde Hernández, Fernández y Baptista (2014), resaltamos algunas características del proceso de análisis cualitativo:

Característica	Implicación para la investigación
Lo vivido por el investigador es la fuente principal de datos.	De esta manera, nosotros como investigadores nos aseguramos que los datos recogidos sí son pertinentes para el proyecto, más aún, están enfocados en la pregunta de investigación o están relacionados con los objetivos planteados, permitiéndonos así permanecer centrados en nuestros objetivos.
Los datos se organizan por categorías.	Esto implica la posibilidad de encontrar relaciones entre las diferentes unidades de análisis, llevándonos así a una mejor y más general interpretación de los datos, inclusive llevándonos a encontrar tendencias o particularidades que nos lleven a conclusiones para el proyecto.

El proceso es ecléctico, sistemático y no rígido.	Esto implica que las posibles categorías, datos, códigos, entre otras clasificaciones que surgen durante el análisis pueden estar relacionadas entre sí o no. Pueden presentarse casos en los que los datos encontrados sean recurrentes, es decir, se repiten constantemente presentándose tendencias, además la flexibilidad otorga la posibilidad de estar cambiando entre una u otra categoría, por ejemplo; inclusive puede cambiar la interpretación que los investigadores otorgamos constantemente a los datos o categorías.
Se estudian los datos en sí mismos y en relación con los demás.	Al momento de analizar los datos, nos dimos cuenta cómo cada unidad de análisis aporta información por sí misma, que puede o no ser importante para el proyecto, pero a su vez el estudio de estas unidades nos puede llevar a una relación con otra u otras, mostrando así recurrencias que pueden llegar a ser muy importantes para dar respuesta o simplemente aportar a los resultados y conclusiones.
La interpretación de los datos es subjetiva del investigador.	Esto implica que a partir de las unidades de análisis y en ocasiones a partir de las relaciones o tendencias que encontramos en el análisis de los datos, como investigadores damos interpretaciones propias según nuestros propios criterios y con base a los fines de nuestra investigación, pero principalmente nos muestra que las interpretaciones son únicas, es decir, si otra persona mirara nuestro trabajo de análisis, existe la posibilidad de que interprete los datos de manera diferente, inclusive puede crear categorías nuevas o establecer otras relaciones entre ellas.
La interacción entre la recolección y el análisis otorga flexibilidad en la valoración de datos y adaptabilidad en las conclusiones.	Esto implicó que nuestro trabajo, en cuanto a la valoración de los datos, estuviera cambiando constantemente según fue avanzando; a medida que encontrábamos aspectos importantes según nuestros objetivos y pregunta, se alteraban las posibles conclusiones. De esta manera las conclusiones pueden pasar de ser particulares a generales sobre el contexto en el que llevamos a cabo la recolección de la información.

Tabla 2. Características del análisis de la investigación cualitativa.

Todo lo anterior implica, en general, que al ser nosotros mismos quienes recogemos la información y la analizamos, no desconocemos, sino que aprovechamos, el carácter subjetivo del trabajo, reconocemos su importante mediación en las diferentes interpretaciones que damos y, desde una reflexión crítica frente a toda subjetividad, enriquecemos los resultados y conclusiones, en esfuerzos continuos de triangulación.

Para mantener la consistencia en esta organización de la información, facilitar y orientar el proceso de análisis, la redacción de resultados, discusiones y conclusiones, se diseñó una tabla de triple entrada (ver Anexos 6). En dicha tabla, sugerimos posibles categorías (que luego se convertirían en las definitivas), que nos ayudarían en primer lugar, con fundamento en preguntas derivadas del problema de investigación y los objetivos, a clasificar la información obtenida en el trabajo de campo; para dicha información (recogida en las categorías) se presentó la fuente, es decir, si podría salir de nuestros diarios,

entrevistas o documentos, de una fuente bibliográfica (expuesta en el marco teórico) o de ambas.

A continuación, se presenta una tabla donde se muestra la categorización realizada; allí se presenta la descripción de las categorías descriptivas, su origen según los instrumentos para la recolección de la información, y dejamos para más adelante la descripción de las categorías sensibilizadoras. Resaltamos que las categorías descriptivas pueden pertenecer a una sola de las categorías sensibilizadoras o a varias, motivo por el cual solo damos su descripción en una oportunidad y además la ubicamos en una sola categoría sensibilizadora, pero en su descripción agregamos a cuáles otras pertenecen:

Categoría sensibilizadora	Categoría descriptiva	Calcificación de la categoría		Descripción
		Etic	Emic	
Aspectos relevantes presentes antes de las EAM	Metodología para el desarrollo de las clases e influencia del maestro.	X		Se registran las diferentes metodologías y estrategias empleadas por el maestro para desarrollar sus clases de matemáticas. Se incluyen además las percepciones de los practicantes sobre cómo influye la presencia del maestro en las dinámicas de la clase y en los estudiantes.
	Preguntas, opiniones y dificultades de estudiantes sobre matemáticas	X		Se incluyen las preguntas, las opiniones y todas aquellas dificultades (sobre procesos algorítmicos de cursos previos y relacionado con funciones) que presentaron los estudiantes y con ellas la manera en que ellos perciben que se les enseñó; todo lo anterior registrado en los diarios de campo.
	Percepciones del maestro y practicante sobre las clases.	X		Son aquellas suposiciones que vienen directamente del maestro o del practicante relacionadas con el comportamiento de los estudiantes y el desarrollo de las clases según diferentes aspectos como el estado físico o emocional de los estudiantes. Se incluyen además supuestos sobre la manera en que los estudiantes trabajan, se enfrentan a la clase y a las matemáticas y qué es de su mayor interés.
	Aspectos relevantes para el desarrollo de la clase de matemáticas.	X	1 8	Se incluyen aquellas observaciones en la cuales se ve reflejado cómo diferentes factores provocan cambios en la actitud de los estudiantes hacia la clase de matemáticas, cambios que alteran su disciplina e inclusive su disposición frente a ella. Además, se resaltan los aspectos que le agradan y valora, pero también entran los aspectos que pide y que le gustaría añadir o cambiar de las clases.
Implicaciones y aspectos	Disposición y comportamien	X		Se presentan las observaciones propias de los practicantes respecto de la disposición que presentaron

generales en las EAM	tos durante las EAM.			los estudiantes al momento de aplicar las EAM, como se comportaron, como actuaban, además de cómo variaban tales actitudes a la medida que se iba avanzando. Se presentan también algunas citas en las cuales los estudiantes expresan cómo se sintieron.
	Estrategias de los estudiantes para desarrollar las actividades durante las EAM.	X		Son aquellas estrategias que los estudiantes empleaban para dar solución a los ejercicios y a las preguntas propuestas en las EAM. Tales estrategias varían desde las interacciones grupales hasta la manera en que individualmente trataban de resolver dichos ejercicios.
	Problemas y dificultades del estudiante en su interacción con las EAM.	X		Son los problemas y dificultades que presenta el estudiante mientras realiza las EAM, incluso las dificultades respecto a la temática de estas (concepto de función). Se ve reflejada la capacidad de este para seguir instrucciones y se presentan las preguntas que le surgieron a este durante el proceso.
	Consideraciones generales y sugerencias de los estudiantes respecto a las EAM.	X		Entran todas aquellas observaciones, favorables y desfavorables, sugerencias, entre otros, que los estudiantes hicieron sobre las EAM. Incluso sus opiniones sobre cómo ellos percibieron y creen que intentamos ayudarlos a desarrollar su pensamiento por medio de las EAM. También, se incluyen sus perspectivas sobre la relación existente entre las EAM y el concepto de función, más aún, sobre la manera en que se trató de trabajarlas unidas y si creen que fue pertinente o no.
	Qué entiendo por diferenciación.		X	En esta categoría se agregan aquellas citas en las cuales el estudiante expresa en sus propias palabras qué entiende por diferenciación.
	Qué entiendo por inferencia lógica.		X	En esta categoría se agregan aquellas citas en las cuales el estudiante expresa en sus propias palabras qué entiende por inferencia lógica.
	Qué entiendo por representación mental.		X	En esta categoría se agregan aquellas citas en las cuales el estudiante expresa en sus propias palabras qué entiende por representación mental.
	Qué otras habilidades cognitivas desarrollo.		X	Se introducen aquellas citas en las cuales los estudiantes plantean posibles habilidades de pensamiento que ellos creen se desarrollaron y se pueden desarrollar a partir de las EAM.
	Esta categoría sensibilizadora se relaciona además con <i>Preguntas, opiniones y dificultades estudiantes sobre las matemáticas (particular las funciones) y Metodología para el desarrollo de las clases e influencia del maestro en los estudiantes.</i>			
Factores relacionados directamente al desarrollo del pensamiento	Desarrollo del pensamiento por medio de las matemáticas.	X	1 8	Son aquellas citas en las cuales el estudiante hace consideraciones sobre la manera en que los mismos creen que las matemáticas ayudan al proceso de desarrollo del pensamiento. Además, también entran las consideraciones en las cuales no lo creen (en caso de presentarse).
	Esta categoría sensibilizadora se relaciona además con: <i>diferenciación, inferencia lógica, representación mental, otras habilidades cognitivas que desarrollan.</i>			

Resultados funciones en las EAM	Funciones infinitas en x e y .	X		Son aquellas respuestas que dan los estudiantes en las EAM donde relacionan las funciones directamente con las nociones de infinito o menos infinito en los ejes coordenados según las gráficas.
	Función con inversa.	X		Son las consideraciones en las cuales los estudiantes plantean criterios para que una función tenga inversa, o afirman que tienen inversa y en ocasiones como para ser función es necesario tenerla.
	Función exclusivamente e como lineal.		X	Son las respuestas en las cuales los estudiantes afirman que para ser una función necesariamente su gráfica tiene que ser lineal.
	Función exclusivamente e como trigonométrica.	X		Se presentan aquellas respuestas en las que los estudiantes asocian las gráficas presentadas directamente con las funciones trigonométricas, principalmente a partir de sus características (periodo, frecuencia, amplitud, etc.) y en ocasiones a partir de semejanzas en sus gráficas respectivas.
	Función exclusivamente e como la simetría.		X	Los estudiantes asocian las gráficas presentadas con el concepto de simetría y en algunos casos afirman que las gráficas son funciones según la simetría que se presente, sea esta con respecto al eje Y , al eje X o a ambos.
	Función como continua.	X		Son las respuestas en las cuales los estudiantes afirman que una función debe necesariamente ser continua (No se especifica si en todo el dominio o parcialmente).
	Función exclusivamente e como algo no circular.		X	Se presentan las consideraciones de los estudiantes en las que las gráficas necesariamente tienen que ser líneas y no figuras cerradas como circunferencias o elipses, inclusive polígonos.
	Función exclusivamente e como gráfica.	X		Son aquellas respuestas en las cuales los estudiantes asocian las funciones directamente con gráficas, es decir que para ser función tiene que tener gráfica.
	Función como ecuación.	X		Son las consideraciones en las cuales el estudiante relaciona las funciones necesariamente con una ecuación matemática, es decir, que si no hay ecuación, entonces no es función.
	Tabla de valores como apoyo para graficar una función.	X		Son las consideraciones en las cuales los estudiantes presentan tablas de valores o las asocian a las gráficas como necesarias para poder realizar las mismas o describirlas y entenderlas.
	Función relación punto de salida a un único punto de llegada.		X	Se asocian las funciones necesariamente con tener un punto de salida (punto en el eje X) con un punto de llegada (punto en el eje Y) y en ocasiones al revés, es decir, una dependencia entre los puntos vista a partir de las gráficas.
	Otros tipos de función.	X		En las respuestas se asocian las gráficas presentadas en las EAM con funciones que los estudiantes nunca vieron durante sus clases ni se mencionan en las mismas actividades, por ejemplo, la función logaritmo y su respectiva gráfica.
	No responde.	X		Los estudiantes no dan respuestas a los enunciados de las EAM o simplemente responden cosas que no tienen sentido o no van al caso.

Las EAM Y las funciones	Funciones y concepto de función según estudiantes.	X	Son las consideraciones y pensamiento que tienen los estudiantes sobre el concepto de función y todo lo que le concierne a este, por ejemplo, la manera en que ellos conciben la definición de función.
	Esta categoría sensibilizadora se relaciona además con: <i>Problemas y dificultades del estudiante en su interacción con las EAM.</i>		

Tabla 3. Tabla de categorías sensibilizadoras y descriptivas.

4.2 Resultados.

El análisis de los datos, con las diferentes categorías en las que fueron organizados, nos permitió ver, de manera sistemática, la información que recogimos y relacionar los resultados de manera simple y profunda. A continuación presentamos las categorías sensibilizadoras (ya nombradas en la Tabla 3) y las describimos, hacemos mención de su importancia para este trabajo y luego presentamos de manera sintética los hallazgos realizados; resaltamos que, aunque presentamos tales hallazgos, sólo exponemos la recurrencia de algunos de ellos (es decir, el número de veces que surgen en los datos) y presentamos sólo algunos ejemplos de unidades de análisis asociadas a las categorías descriptivas. Es necesario aclarar que las categorías que se explicarán en adelante fueron estructuradas en un esquema del ATLAS.ti® y que muestra cómo quedó cada categoría sensibilizadora asociada a sus respectivas categorías descriptivas (ver el Anexo 7).

La primera categoría sensibilizadora, llamada *Aspectos relevantes presentes antes de las EAM* (esquema en Anexo 7.1), se refiere a todos aquellos aspectos que sobresalieron e influyeron en las clases de matemáticas antes y durante su desarrollo a lo largo del año escolar, sin tener en cuenta las clases en que se aplicaron las EAM. Consideramos importante esta categoría sensibilizadora dado que se pudo comparar con la categoría *Implicaciones y aspectos generales en las EAM*, es decir, hemos visto en qué aspectos ambas categorías coinciden y en cuáles difieren, lo que a la vez nos dio ideas sobre cómo influyen las EAM en el desarrollo de una clase de matemáticas. Además, fue necesario

entender las dinámicas que se desarrollaban en el contexto en el cual íbamos a actuar, entender las dinámicas de la población, entre otras cosas; todo con el fin de generar escenarios apropiados para el aprendizaje, comprender aspectos como las dificultades que presentan los estudiantes al llevar a cabo procesos cognitivos, usar tales observaciones para idear las estrategias de aprendizaje desde las EAM asociadas a las temáticas trabajadas durante el año.

Entre los hallazgos de esta categoría, tenemos que el maestro siempre necesitaba idear diferentes estrategias que le permitieran incentivar la disposición de los estudiantes frente a la clase de matemáticas, estrategias que fueron desde motivarlos a participar otorgando una recompensa equivalente a una nota positiva, hasta motivarlos cambiando el contexto o el ambiente en el cual se desarrolla la clase (esto se evidenció en 39 de las 46 citas asociadas a la categoría descriptiva *Metodología para el desarrollo de las clases e influencia del maestro*). Otro hallazgo es que los maestros, al momento de planear sus clases de matemáticas, consideraron constantemente, y bajo supuestos, el posible estado emocional y físico del estudiante (si estaba cansado, tenía sueño o calor, si tenía poca disposición para el trabajo, etc.), de manera que sus estrategias estuvieron direccionadas hacia la satisfacción de los intereses de estos y su motivación mientras aprenden los contenidos (esto se evidenció en 33 de las 82 citas asociadas a la categoría *Percepciones del maestro y practicante sobre las clases*).

Así mismo, encontramos que los factores, como la hora en que se desarrolla la clase, el lugar, la estrategia del maestro o la actividad a realizar, influyeron en el comportamiento de los estudiantes y su disposición frente a esta; es decir, cuándo pudieron ponerse indisciplinados, ruidosos, desconcentrarse o hasta dormirse, razón por la cual ellos pidieron que las clases se dieran en otros lugares diferentes como la sala de informática,

que se dieran usando herramientas como *Geogebra* o por medio de juegos, pero más aún, pidieron que las clases fueran más usando talleres que tipo magistrales. Encontramos que durante las clases de matemáticas los estudiantes presentan constantemente dificultades con lo que los investigadores llamamos conocimientos previos, recientes y actuales, en una categoría que se integró en *Preguntas, opiniones y dificultades de estudiantes sobre las matemáticas*. Por ejemplo, en los conocimientos previos se les dificultó realizar los procesos algorítmicos en las operaciones con números fraccionarios, presentaron dificultades con las propiedades de la potenciación e incluso se les dificultaron procesos algebraicos como la factorización; en los conocimientos recientes y actuales presentaron dificultades para diferenciar las gráficas del seno y del coseno, o incluso para identificar el dominio y el rango de estas funciones, entre otros, dificultando así su proceso de aprendizaje en las nuevas temáticas.

Un ejemplo de estos hallazgos (lo que piensa el estudiante sobre la clase y lo que quiere en ella) es el siguiente apartado que hace parte de una de las entrevistas realizadas, donde E es el Entrevistador e I el entrevistado; veamos:

‘E: *Bueno, ¿Qué piensas sobre la manera en que se te enseña las matemáticas?*

I: *Bueno, pienso la manera en la que nos enseñan las matemáticas en este momento es un poco tradicionalista, pero, eh... al momento le han incrementado como un poco una manera lúdica de enseñar, eh... me parece, a mí me parece bueno que sigan como... como lo que se viene desde hace varios años que es lo tradicional, pero sin llegar a pasarse y al mismo tiempo como ir... em... enganchando o las nuevas maneras por ejemplo de estudiar.*

E: *¿y cómo cuáles son las nuevas maneras de estudiar?*

I: *Que cambien, por ejemplo, que no todo sea en el aula de clases, qué cambiemos por otras salas diferentes, por otros lugares diferentes, otras formas diferentes de enseñar, no*

siempre eh... enseña, copia, evaluación; se pueden hacer actividades diferentes como juegos o cosas parecidas' (cita tomada de las entrevistas realizadas el 11 de diciembre del 2017)

Otro ejemplo, directamente relacionado con este primer hallazgo es: *'El maestro me explica que para el día hoy se tenía programado el trabajar en la sala de informática, pues era necesario. Por un lado, por la calidad y el objetivo de la clase, pero por otro lado me da a entender que era más conveniente el desarrollar la clase allí porque para la hora los estudiantes se encuentran demasiado cansados, con sueño y por tanto distraídos; lo cual sería un problema si la clase fuera de tipo magistral, pues sería poca la atención que prestarán al maestro y a sus explicaciones, además la indisciplina sería mayor'* (Diario de campo de investigador).

La segunda categoría sensibilizadora, llamada *Implicaciones y aspectos generales en las EAM* (esquema en Anexo 7.2), se refiere a todos aquellos aspectos que sobresalieron e influyeron en las clases de matemáticas durante la aplicación de las actividades; incluye todas aquellas categorías que están directamente relacionadas con las EAM y lo que es el desarrollo del pensamiento para el estudiante. Esta categoría, como se mencionó antes, tiene aspectos que se pueden comparar con la categoría sensibilizadora anterior; máxime, su importancia radica precisamente en que, al tomar todo lo vinculado directamente a las EAM, se tiene una fuente sustancial de información referida a las implicaciones de éstas en el contexto escolar y particularmente en la enseñanza de las matemáticas. Aquí se tratan aspectos como las operaciones mentales desde el punto de vista de los estudiantes, la utilidad de las EAM, los intereses de los estudiantes durante las EAM, las implicaciones que tuvieron los estudiantes durante éstas, el cómo iban estos construyendo su propio conocimiento, etc. Todos estos aspectos fueron sustentados directamente desde los

antecedentes, la justificación y especialmente el marco teórico, a partir de las diferentes teorías constructivistas, investigaciones relacionadas a las temáticas tratadas en este trabajo, la MEC y otros.

Entre los hallazgos tenemos que, en primer lugar, durante la aplicación de las EAM, el comportamiento y las dinámicas de los estudiantes se asemeja a las que tienen en las clases que tales actividades no se implementaron: se dispersan, se distraen y terminan haciendo otras cosas diferentes (por ejemplo, chatean, escuchan música, conversan de otros temas, etc.). Respecto de esta situación, y con respecto a los datos obtenidos, no se evidencia un cambio significativo o permanente durante el trabajo de campo: se encontró que, durante la aplicación de estas experiencias, a medida que el tiempo avanzaba la actitud de los estudiantes en su mayoría comenzaba a verse afectada, demuestran pereza, sueño y cansancio, sin embargo, en algunos casos, más bien de poca recurrencia (8 de 37 citas) los estudiantes afirmaban que las actividades son muy interesantes y pertinentes debido a que los sacaban de la rutina de las clases magistrales.

En segundo lugar, percibimos que los estudiantes al momento de enfrentarse a las EAM empleaban estrategias de grupo similares a las que emplearon en sus clases y talleres de matemáticas comunes; en estas estrategias uno de los integrantes del grupo trabaja, mientras los otros se distraían realizando otras acciones. De la única manera que se presentó una interacción real en la mayoría de los equipos fue cuando aquel que está trabajando en la actividad se vio atascado, no sabía cómo proceder y por tanto terminaba solicitando la ayuda de sus compañeros. Dado que lo anterior se presentó con una recurrencia de 11 en 103 citas, aunque la recurrencia es poca, lo consideramos importante debido al contraste con las estrategias del estudiante en las clases previas a las EAM.

En tercer lugar, en contraste con las categorías *Preguntas, opiniones y dificultades de estudiantes sobre matemáticas* antes de las EAM y *Resultados funciones en las EAM*, encontramos que los estudiantes, durante la aplicación de las actividades, presentaron las mismas dificultades sobre conocimientos previos y recientes, es decir, se mantuvieron los problemas de tipo operativo con los algoritmos, se mantuvieron las dificultades con las propiedades de algunas operaciones, entre otros. Inclusive aumentaron las deficiencias presentes en lo que trata el concepto de función y todo lo relacionado con él, sin embargo, este aspecto luego lo tocaremos más profundamente. Por otro lado, los estudiantes presentan dificultades al momento de enfrentarse a los enunciados, no logran entender la información que se les otorga de manera inmediata, en ocasiones no perciben las ayudas o indicaciones extras que se les dan a lo largo de las actividades, etc. Ahora, en cuarto lugar, si miramos las consideraciones generales y sugerencias de los estudiantes respecto a las EAM como fuente de hallazgos, tenemos que los estudiantes consideran que las EAM deben ser aplicadas en horarios matutinos, puesto que, en las horas de la tarde, al igual que se mencionó líneas más arriba, su disposición recae, se sienten cansados, con sueño y por tanto con pereza, se les dificulta más realizar tales actividades. Se considera también, con una recurrencia de 7 de 28 citas, que los enunciados de las actividades y las ayudas deben ser más simples, más fáciles de entender, ya que podrían no ser capaces de realizar lo que se les pide y pueden pasar por alto información, más aún, los estudiantes piden que se les recuerde la temática abordada dado que en muchas ocasiones no la recuerdan.

En quinto lugar, encontramos que los estudiantes consideran que las EAM facilitan la comprensión del concepto de función y de ninguna manera lo dificultan, pues tener que estar recordando continuamente la temática les permite aprender lo que no sabían o simplemente recordar lo que, según ellos, ya se les ha olvidado. En sexto lugar, y el

hallazgo más importante, desde nuestra perspectiva, aunque su recurrencia es de apenas 4 citas, es que los estudiantes consideran que durante la aplicación de las EAM intentamos potenciar su pensamiento, desarrollar sus habilidades mentales provocándoles la necesidad de emplear los conocimientos que ya tenían (recordarlos), llevándolos a poner tales conocimientos en práctica, obligándolos a pensar, analizar la información, y pidiendo argumentos, cosa que no percibían en sus clases comunes. Los estudiantes afirman que las actividades, en algunas ocasiones, los llevaron a tener que repasar los contenidos estudiados a lo largo del año mientras estaban en casa, debido a que sentían la necesidad de responder a los problemas planteados en las actividades, pues no querían quedarse sin responder por no saber.

En séptimo lugar, encontramos que, los estudiantes se hicieron ideas superficiales sobre qué es cada una de las tres operaciones mentales que trabajamos (donde la recurrencia para cada una es de 4 citas de 12). De esta manera, los estudiantes definen, por ejemplo, diferenciación como: *‘sacarle las cualidades a una o a varias cosas, distintas cualidades, eh..., no sé, formas’*, inferencia lógica es *‘cómo analizo las cosas, como..., cómo dice la palabra, cómo puedo llegar a decir esto es así o esto no es esto’* y para el caso de representación mental *‘es la imagen que se da en la mente cuando se monta una situación o problema. Doy una imagen por medio de lo que entiendo e hicimos una proyección en la hoja sobre el tema propuesto’* (citas tomadas de las entrevistas realizadas el 11 de diciembre de 2017).

Por último, encontramos que los estudiantes consideran que las habilidades de pensamiento *‘son aquellas que nos permiten pensar, leer y escribir’* (según se muestra en un diario de campo), *‘son aquellas que se desarrollan con lengua, matemáticas, sociales, pues todas esas que se desarrollan a través de un proceso en la básica y que nos ayudan a*

ser mejores personas, y en sí a lograr analizar las cosas de una forma correcta' (tomado de la entrevista realizada el 11 de diciembre del 2017). Además, consideran que esas otras habilidades que se desarrollan son, por ejemplo, el pensamiento lógico, la creatividad, la capacidad de solucionar problemas, la interpretación y la rapidez para pensar. Incluso, resaltamos que ellos sienten que las operaciones mentales no se trabajan por separado, sino que se articulan con funciones cognitivas por medio de las diferentes situaciones y problemas a los que se van enfrentando.

Un ejemplo de los hallazgos mencionados, que hace parte de la categoría descriptiva *Consideraciones generales y sugerencias de los estudiantes respecto a las EAM*, seleccionado por ser una de las citas más relevantes, es: *'Nos gustó, porque nos colocaron a recordar todo lo que anteriormente nos habían enseñado, su forma didáctica fue excelente. Primero, estuvo un poco dura porque no recordábamos las cosas. Segundo, deben colocar un ejemplo para guiarnos más fácil y, tercero, colocar trabajos con temas más recientes'* (cita tomada de los registros en las actividades). El estudiante allí nos dice claramente cómo le pareció la actividad y por qué, en qué se le dificultó y, además, de una vez hace sugerencias sobre ella.

Otra unidad de análisis que consideramos muy relevante, debido a que sugiere que se apliquen las EAM en otras áreas y no solo en las matemáticas, es la siguiente:

'E: ¿qué sugerencias o recomendaciones aporta para mejorar las actividades?

I: Sería de que implementen esas actividades en el resto de materias, pero creo que la actividad en sí está muy completa' (cita tomada de las entrevistas realizadas el 11 de diciembre del 2017).

La tercera categoría sensibilizadora llamada *Factores relacionados directamente al desarrollo del pensamiento* (esquema en Anexo 7.3) se refiere a todos aquellos aspectos

que resultaron del interés sobre la posibilidad de desarrollar el pensamiento a través de la matemática. Esta categoría es importante debido a que está directamente relacionada con el eje central del presente trabajo, tal y como lo hemos planteado desde los antecedentes y el marco teórico. Entre los hallazgos, tenemos que los estudiantes consideraron las matemáticas como un medio para desarrollar el pensamiento, debido a que en sus propias palabras *‘me ponen a pensar’* (comentario de uno de los participantes durante la actividad 2), además, las matemáticas los llevan directamente al análisis de los problemas o situaciones que se les van presentando, de manera que tienen además que implementar lo que van aprendiendo durante este análisis. Según se verá, los estudiantes se ven permeados por la idea proveniente desde sus familias que las matemáticas son muy importantes porque ayudan al desarrollo del pensamiento. La mejor ilustración posible sobre ello es:

‘E: Listo. ¿Qué piensa sobre la afirmación “el pensamiento se puede desarrollar con las matemáticas”?’

I: Si, soy una persona que... en mi casa me han dicho que las matemáticas se utilizan en todo para la vida, y que todo consta de matemáticas, que las matemáticas es una materia muy buena como para plantear, como para desarrollar lo que es el pensamiento y la inteligencia, entonces considero que sí, que entre más practique uno las matemáticas, entre más la desarrolla mejor va a ser su inteligencia y su desarrollo intelectual y cosas así’ (cita tomada de las entrevistas realizadas el 11 de diciembre del 2017).

El último hallazgo en esta categoría, que consideramos muy importante, aunque apenas se presenta en 2 citas, es cómo los estudiantes perciben que las otras materias que deben cursar durante sus estudios de básica secundaria y media también ayudan o deberían ayudar al desarrollo del pensamiento.

La cuarta categoría sensibilizadora llamada *Las EAM y las funciones* (esquema en Anexo 7.4) habla directamente sobre las percepciones de los estudiantes en cuanto a la relación entre las EAM y las funciones, percepciones que quedaron tras haber implementado las actividades. Esta categoría permitió analizar la relación que tenía trabajar a la vez tanto las funciones como el desarrollo del pensamiento por medio de las operaciones mentales, también nos permitió identificar cuáles eran las dificultades más recurrentes que presentaban los estudiantes en la comprensión de las funciones y en la realización, observación y análisis de sus gráficas durante las EAM; sin embargo, esto último lo tratamos fuertemente en la categoría sensibilizadora siguiente, de modo que por el momento nos limitamos a otros hallazgos.

Tenemos que a la mayoría de los estudiantes se les dificultaba definir el concepto de función, algunos inclusive afirmaban no saber hacerlo; lo que sí es claro, es que relacionaban el concepto de función directamente con aquellos conocimientos que adquirieron durante las clases y con las actividades propuestas en ellas, es decir, vieron el concepto de función directamente como una gráfica, dijeron que es todo lo que se puede medir en una gráfica o en un plano, que es un conjunto que trae técnicas o procesos que se pueden aplicar a un problema, inclusive mencionaron que función es una gráfica que pasa por los ejes x e y , que es un proceso matemático en el cual se pueden resolver el seno, el coseno, etc. Ahora, algunos de los estudiantes afirmaron que función es algo que tiene coordenadas y que tiene un nombre según su ecuación matemática, y aquellos que más se acercaron a lo que es una función, según la definición formal, afirmaron que esta *‘es una relación matemática que se puede graficar y en la que se pueden hacer muchas otras cosas’* (cita tomada de las actividades implementadas).

La quinta categoría, llamada *Resultados funciones en las EAM* (esquema Anexo 7.5), se refiere a aquellas categorías en las que están inscritas las unidades de análisis que contienen las respuestas de los estudiantes a los ejercicios o situaciones planteadas en las actividades de EAM. Esta categoría es importante debido a que sus resultados se ponen en contraste con otras categorías ya trabajadas, además, porque arroja resultados sobre las actividades de EAM empleadas durante el trabajo de campo en relación con las funciones. Entre los hallazgos, cuya totalidad de citas equivale a 153, tenemos que los estudiantes consideraron que todas las gráficas son funciones sólo si éstas tienen un dominio y un rango que va desde menos infinito hasta infinito (esto se presenta con una recurrencia de 14 citas). Los estudiantes mencionan que para ser función necesariamente tiene o debe ser una función inversa (una recurrencia es de 3 citas). En 9 ocasiones afirman que solo se es función si es lineal, sin embargo, no hacen la claridad si se refieren a la gráfica como una línea cualquiera o necesariamente como una recta.

Por otro lado, el hallazgo que presenta más recurrencia (con un total de 40 citas), es que los estudiantes relacionaban las gráficas de funciones directamente con las funciones trigonométricas, es decir, para ellos solo es función aquello que es una gráfica trigonométrica; sin importar qué tipo de gráfica fuera, siempre le asocian las características de las funciones trigonométricas, como son, por ejemplo, el periodo, la frecuencia, la amplitud o la fase. Entre otros hallazgos, los estudiantes presentan la necesidad de realizar siempre una tabla de valores para poder realizar las gráficas, no tienen en cuenta las propiedades o la ecuación de la función con las respectivas transformaciones para graficarlas.

Algunos estudiantes afirman que una función no puede ser de forma circular, mejor dicho, una función no puede ser una curva cerrada como las elipses o las circunferencias;

consideran que las gráficas de las funciones necesariamente deben ser continuas, es decir, no pueden tener saltos. Otros asocian las gráficas con otras funciones como, por ejemplo, las logarítmicas o las racionales, incluso algunos mencionan que las gráficas no pueden ser simétricas respecto del eje x dado que en sus propias palabras *'no pueden tener dos puntos de partida'*. Algunos ejemplos para estos hallazgos son: *'No es función, una función es lineal por el hecho de que un solo punto de y pertenece a x , no puede presentarse en forma de óvalo o como tal, ningún polígono o figura cerrada'*; *'No es función porque creo que las funciones van en forma de línea, no circulares, además no tiene secuencia'* (citas tomadas de las respuestas en las actividades implementadas).

Incluso, para el caso de la categoría *Función exclusivamente como trigonométrica*, en la cual los estudiantes asocian todas las funciones necesariamente a las funciones trigonométricas a partir de sus características, inclusive en ocasiones en que no tiene relación alguna, aparecen aspectos como: *'Al igual que la anterior podemos deducir que si es una función y se repite secuencialmente, tiene todas sus propiedades, tiene una amplitud, periodo'* o *'No es una función porque no representa periodo, rango, dominio o algún tipo de desplazamiento. Es una simple figura limitada ubicada en un plano cartesiano que no ubica algún tipo de coordenada'* (citas tomadas de las respuestas en las actividades implementadas).

La sexta categoría sensibilizadora, llamada *Resultados operaciones mentales en las EAM* (esquema en Anexo 7.6), cuyas categorías presentamos a continuación (tabla 4), hace referencia a los resultados obtenidos al mirar el progreso de los estudiantes respecto al desarrollo de su pensamiento, tomando como base las tres operaciones mentales seleccionadas. Las categorías descriptivas asociadas son nombradas con códigos para

abreviar cada operación mental: Dif: diferenciación, Inf: inferencia lógica, Rep: representación mental. Se expone además un número que indica el grado, según la complejidad de las respuestas dadas por los estudiantes en las actividades. Dichos grados se obtuvieron con fundamento en los logros para cada operación propuestos por Pilonieta (2010) y Gómez et al. (1998):

Categoría sensibilizadora	Categoría descriptiva	Calcificación de la categoría		Descripción
		Etic	Emic	
Resultados operaciones mentales en las EAM	(Dif.) Grado 1.	X		(Nivel bajo). El estudiante no describe características y propiedades de los objetos o situaciones, más aún, no logra identificar y describir diferencias entre dichas propiedades y características para establecer cuáles son relevantes y cuáles no son relevantes.
	(Dif.) Grado 2.	X		(Nivel básico). Si bien el estudiante describe características y propiedades de los objetos o situaciones, no logra identificar y describir diferencias entre dichas propiedades y características, ni diferencia entre las que son relevantes y las que no son relevantes.
	(Dif.) Grado 3.	X		(Nivel medio). El estudiante describe las características y propiedades de los objetos o situaciones y las diferencias entre dichas propiedades y características, pero no establece cuáles son relevantes y cuáles no son relevantes.
	(Dif.) Grado 4.	X		(Nivel alto). El estudiante describe las características y propiedades de los objetos o situaciones y las diferencias entre dichas propiedades y características, lo que le lleva a establecer cuáles son relevantes y cuáles no son relevantes.
	(Inf.) Grado 1.	X		(Nivel bajo). El estudiante no realiza deducciones ni llega a conclusiones, leyes o principios a partir de la interpretación de proposiciones o de la información dada o implícita.
	(Inf.) Grado 2.	X		(Nivel básico). El estudiante realiza deducciones y conclusiones, leyes o principios, pero estos no parten de la interpretación de proposiciones o de la información dada o implícita.
	(Inf.) Grado 3.	X		(Nivel medio). El estudiante realiza deducciones y conclusiones, leyes o principios que parten de la interpretación de proposiciones o de la información dada, pero no de datos implícitos.
	(Inf.) Grado 4.	X		(Nivel alto) El estudiante realiza deducciones y conclusiones, leyes o principios que parten de la interpretación de proposiciones e información dada, además de datos que están implícitos.
	(Rep.) Grado 1.	X		(Nivel bajo). El estudiante no representa las propiedades que definen un objeto. No se evidencia habilidad para construir o definir conceptos, categorías o principios.
	(Rep.) Grado 2.	X		(Nivel básico). El estudiante representa propiedades que definen un objeto, pero estas no son esenciales o

			constitutivas del objeto. No se evidencia habilidad para construir o definir conceptos, categorías o principios.
	(Rep.) Grado 3.	X	(Nivel medio). El estudiante representa las propiedades esenciales que definen un objeto, pero no se evidencia habilidad para construir o definir conceptos, categorías o principios.
	(Rep.) Grado 4.	X	(Nivel alto). El estudiante representa las propiedades esenciales que definen un objeto y, a partir de estas, evidencia habilidad para construir o definir conceptos, categorías o principios.

Tabla 4. Categorización de los resultados obtenidos en desarrollo de operaciones mentales.

Esta categoría es importante en tanto nos permitió evaluar el progreso de los estudiantes en cuanto a las operaciones mentales según sus respuestas en las EAM y muestra si las actividades influenciaron el desarrollo del pensamiento en los estudiantes.

Para los resultados de esta categoría presentamos 3 tablas (tabla 5: *diferenciación*; tabla 6: *Inferencia Lógica*, tabla 7: *Representación mental*), cada una perteneciente a una de las operaciones mentales trabajadas. Cada tabla presenta en la primera fila las actividades realizadas, en el orden en que se implementaron. Para cada actividad hay dos columnas: una hace referencia a la cantidad de citas asociadas a cada grado de complejidad y la otra al valor porcentual de esas citas por grado alcanzado por los estudiantes en sus respuestas (al final el 100 % representa la cantidad total de citas asociadas a cada grado). Resaltamos que estas citas son exclusivas de las actividades implementadas.

Ahora bien, para interpretar los resultados en estas tres tablas, es necesario tener en cuenta que para el grado 1, a medida que se avanza en las actividades, si cambia de un valor grande a uno pequeño, significa que los estudiantes podrían haber mejorado, pues menos estudiantes están en el nivel bajo y alcanzaron grados superiores. Para el grado 2 y 3, sin embargo, frente a la variación de los valores a medida que se avanza en las actividades, no es posible afirmar con certeza si los estudiantes mejoraron o empeoraron, es decir, si pasaron de estos niveles a un grado inferior o superior. Para el grado 4, si el valor aumenta,

significa que los estudiantes mejoraron, pues estudiantes que estaban en grado 3 o inferiores tuvieron que pasar a un grado 4 y, si disminuye, entonces empeoraron, pues estudiantes en grado 4 pasaron a desempeños inferiores.

Es necesario subrayar, no obstante, que no siempre los estudiantes respondieron a las preguntas sugeridas. Además, no necesariamente siempre los mismos estudiantes participaron en las actividades (según se expuso en limitaciones, por la asistencia irregular a las clases).

Finalmente, respecto de las citas asociadas a cada grado, se debe considerar que hubo respuestas de los estudiantes que podían estar en relación con más de una operación mental, esto debido a que, según se expuso en el marco teórico, no se pueden mirar de manera independiente.

A continuación, presentamos la tabla 5 perteneciente a la operación mental *diferenciación*.

Tabla 5. *Diferenciación*

Grados	Pilotaje diagnóstico		Pilotaje actividad 1		Actividad 1		Actividad 2		Actividad 3		Total	
	# citas	%	# citas	%	# citas	%	# citas	%	# citas	%	# citas	%
1	2	14.28	4	28.57	3	21.42	4	28.57	1	7.14	14	100
2	17	27.41	13	20.96	10	16.12	10	16.12	12	19.35	62	100
3	12	13.95	13	15.11	20	23.25	22	25.58	19	22.09	86	100
4	9	14.75	7	11.47	14	22.95	16	26.22	15	24.59	61	100

De la tabla 5, para el grado 1, podemos ver que la recurrencia en las respuestas de las primeras 4 actividades es más alta que en la última, lo cual sugiere que al avanzar en las actividades las respuestas de los estudiantes fueron mejorando, es decir, comenzaron a avanzar en procesos de diferenciación. Para el grado 2, la recurrencia en las respuestas de la primera actividad es alta, pero para el resto disminuye o varía en una, dos o tres unidades numéricas; aunque no podemos concluir con certeza, según la experiencia de campo,

consideramos que los estudiantes en las siguientes cuatro actividades pudieron mejorar su habilidad para diferenciar. Para el grado 3, claramente se percibe que son pocos los estudiantes que en sus respuestas llevan un proceso de diferenciación aceptable durante las primeras dos actividades, pero a medida que se aplican otras, van mejorando: la recurrencia de las respuestas en este grado va aumentando en las siguientes actividades, siendo mayor en la tercera y cuarta actividad. Finalmente, en las respuestas del grado 4, se evidencia cómo las respectivas recurrencias son menores comparadas con el tercer grado, además, a medida que se avanza por actividades esta recurrencia aumenta casi al doble en comparación a la primera y segunda actividad, lo que nos dice que algunos estudiantes mejoraron su proceso de diferenciación.

A continuación, presentamos unos ejemplos de las respuestas que categorizamos en el grado 1 y en el grado 4 de la operación mental diferenciación, para que el lector tenga una idea de nuestra selección: Grado 1: *‘No creo que pueda ser una función sin haber función. Y no creo que se pueda tener un solo valor y varias incógnitas’* o *‘Esta no es función porque no tiene cara de función’*. Las categorizamos en el grado 1, dado que se les presentaron gráficas de funciones y los estudiantes no describen características de ellas que les permitieran establecer con argumentos claros que estas fueran o no funciones. Grado 4: *‘Vemos dos conjuntos A y B los cuales se relacionan entre sí, en un lado tenemos números pares y en el otro su doble, aquí hay una función porque no se repite ningún dato del rango ni del dominio’* o *‘Lo que vemos son dos conjuntos que se interrelacionan uno tiene letras y el otro número, no hay función ya que del lado izquierdo no podemos repetir ningún dato’*. Estas las categorizamos en el grado 4, debido que, al presentarles diagramas sagitales, los estudiantes identificaron características de estos y las diferenciaron, de manera que

establecieron con certeza que estos representaban o no una función (citas tomadas de las respuestas en las actividades implementadas).

La siguiente tabla 6 pertenece a la operación mental *inferencia lógica*.

Tabla 6. *Inferencia lógica*

Grados	Pilotaje diagnóstico		Pilotaje actividad 1		Actividad 1		Actividad 2		Actividad 3		Total	
	# citas	%	# citas	%	# citas	%	# citas	%	# citas	%	# citas	%
1	5	25	7	35	3	15	3	15	2	10	20	100
2	19	24.35	15	19.23	17	21.79	13	16.66	14	17.94	78	100
3	19	18.09	17	16.19	23	21.9	21	20	25	23.8	105	100
4	18	25.35	15	21.12	10	14.08	12	16.9	16	22.53	71	100

De esta tabla 6, para el grado 1 se percibe cómo en las dos primeras actividades la recurrencia en las respuestas en que los estudiantes no logran realizar procesos de inferencia lógica es mucho mayor que en las últimas, es decir, comienzan a mejorar sus procesos en esta operación. Para el grado 2, en la primera actividad la diferencia en la recurrencia en las respuestas no es mucha, lo que nos dice que son pocos los estudiantes que tienen avances o retrocesos en este caso. En el grado 3, en las primeras actividades la respuesta de los estudiantes es menor comparada con las siguientes actividades, especialmente la última, lo que, según la tendencia de los datos en la tabla 6 (en otros grados) podría sugerir que algunos han comenzado a mejorar en cuanto a sus procesos de inferencia lógica. Finalmente, en el grado 4 se percibe, en la recurrencia de los datos, que algunos estudiantes disminuyeron la complejidad de sus respuestas respecto al proceso de inferencia lógica a medida que avanzaron en las actividades, dando como resultado que en la última actividad fueron menos en comparación con la primera.

A continuación, presentamos unos ejemplos de las respuestas que categorizamos en el grado 1 y en el grado 4 de la operación mental inferencia lógica: Grado 1: 'No se' o 'No

lo es' y 'no es función'. Los anteriores ejemplos los categorizamos en el grado 1, dado que no se perciben conclusiones o deducciones basadas en la interpretación de la información de los diagramas sagitales. Grado 4: 'No es función una función es lineal por el hecho de que un solo punto de y pertenece a x , no puede presentarse en forma de óvalo o como tal, ningún polígono o figura cerrada' o 'Relación cada elemento del dominio se repite dos veces con un elemento del rango' o 'Aquí vemos que la letra a se parte para dos números, o sea que no es función, ya que solo se puede una vez'. Estas citas, las categorizamos en el grado 4, dado que los estudiantes demuestran en ellas que realizaron un proceso de interpretación y deducción a partir de las características de las gráficas o los diagramas sagitales que se les presentaron (citas tomadas de las respuestas en las actividades implementadas).

La última tabla 7 pertenece a la operación *representación mental*:

Tabla 7. Representación mental

Grados	Pilotaje diagnóstico		Pilotaje actividad 1		Actividad 1		Actividad 2		Actividad 3		Total	
	# citas	%	# citas	%	# citas	%	# citas	%	# citas	%	# citas	%
1	3	30	3	30	2	20	1	10	1	10	10	100
2	15	22.05	12	17.64	16	23.52	15	22.05	10	14.70	68	100
3	17	17.70	16	16.66	19	19.79	20	20.83	24	25	96	100
4	10	14.28	14	20	13	18.57	17	24.28	16	22.85	70	100

Por medio de esta tabla 7, identificamos como resultados para el grado 1 que algunos estudiantes durante las primeras actividades no lograron llevar a cabo procesos de representación mental mientras desarrollaron las actividades, sin embargo, para las últimas dos mejoraron, pues la recurrencia evidente en la tabla 7 para este grado disminuye al avanzar. En el grado 2, la recurrencia en las respuestas de los estudiantes que comienzan a presentar procesos de representación mental durante las actividades fluctúa, es decir, a

medida que se pasa de una actividad a la siguiente, no podemos decir con certeza si los estudiantes mejoran o empeoran frente a esta operación mental. En el grado 3, en la primera y la segunda actividad algunos de los estudiantes parecen avanzar, según el comportamiento de los demás datos, en sus procesos de representación mental, pues la recurrencia aumentó. Por último, en el grado 4 la recurrencia de las respuestas en las que se refleja un proceso de representación mental completo es menor en la primera actividad comparada con las siguientes y especialmente con la última, lo que nos lleva a entender que los estudiantes mejoraron sus procesos de representación mental.

A continuación, presentamos unos ejemplos de las respuestas que categorizamos en el grado 1 y en el grado 4: Grado 1: *'Ninguna es una función representativa', 'No es una función' o 'No sé'*. Estas citas fueron categorizadas en el grado 1 de representación mental, dado que los estudiantes no presentan propiedades que definen los objetos que se les presentaron en las actividades y por tanto no mostraron habilidades para hacer una representación de ellos. Grado 4: *'Relación cada elemento del dominio se repite dos veces con un elemento del rango' o 'Esta si representa una función, porque la relación entre los datos del dominio y el rango no están repetidas. El dominio se compone de 2, 4, 6, 8 los cuales aumentan de dos en dos, el rango es de 4, 8, 12, 16 y aumentan de cuatro en cuatro'*. Estas citas las clasificamos en el grado 4 porque los estudiantes mostraron que representan cuáles son las propiedades esenciales que definen los objetos que se les presentaron y a partir de ello evidenciaron tener habilidades para construir y definir cuáles de estos objetos representaban o no una función (citas tomadas de las respuestas en las actividades implementadas).

4.3 Conclusiones y discusión

En relación con los anteriores resultados, entendemos que los estudiantes están inconformes con la forma en que se les enseña matemática en general y además presentan vacíos, pero no solo en el concepto de función. En atención a todo ello, y a los resultados e impactos que se esperaban alcanzar al inicio de la investigación, se concluye, en primer lugar, que las actividades aplicadas en el trabajo de campo sí pueden constituir un insumo para la enseñanza del concepto de función a la par que permiten desarrollar el pensamiento en los estudiantes. En efecto, respecto de la operación mental de diferenciación, al aplicar las EAM, los estudiantes muestran avances significativos, alcanzando incluso capacidad para describir características y propiedades del concepto de función y las diferencias, estableciendo cuáles son relevantes y no relevantes para su comprensión; frente a la representación mental, se obtuvieron resultados similares y las actividades propuestas podrían llevar a que los estudiantes representen propiedades esenciales de los objetos matemáticos que les permitan construir y definir el concepto trabajado, categorías relacionadas y principios asociados. Sin embargo, para la inferencia lógica concluimos que, si bien es posible que los estudiantes, por medio de las actividades propuestas, puedan llegar a realizar deducciones y conclusiones desde la interpretación de la información explícita, se requiere un nuevo enfoque de las EAM que les permita acercarse cada vez más a deducciones que partan de información implícita.

Ante la demanda por parte de los estudiantes por estrategias alternativas para aprender matemáticas, es decir, que las clases no sólo consistan en explicaciones, luego talleres y finalmente evaluación; las actividades propuestas como EAM, aunque entendidas por los estudiantes como talleres, representaron para ellos una opción diferente para aprender matemáticas porque les ayuda a pensar. Al respecto, los estudiantes consideraron que las EAM fueron una herramienta que les permitió aprender por medio de procesos

cognitivos en los que ellos debían poner a trabajar su mente, al tiempo que recordaban aquellos conocimientos que alguna vez adquirieron o aprendieron por medio del análisis mientras debían usarlos; se hicieron conscientes de su progreso en los procesos de pensamiento, toma de decisiones y postura crítica, lo que va en correspondencia con los postulados de Santrock (2006) (citado en Araya, 2014, p.287) y Araya (2014), con los objetivos de la educación según la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), que fueron ampliamente abordados en este trabajo. Esta situación coincide además con los objetivos principales de este tipo de experiencias, según se expuso en el marco teórico desde Morales (2007) y Pilonieta (2010), en el que el estudiante asume un papel activo y el maestro es un mediador que lo orienta en sus procesos de pensamiento.

La importancia de enfocarse en el desarrollo de habilidades y no sólo la explicación de conceptos o procedimientos (como señala Londoño y Aldana, 2012) permite reflexionar sobre la importancia del papel del docente como mediador, que más que dar respuestas es ofrecer las preguntas que permitan al estudiante organizar la información. Las preguntas de los estudiantes se atendieron con preguntas del mediador y es notorio cómo los estudiantes llegan por sí solos a las respuestas porque (según se expuso en resultados) la mediación les lleva a recordar lo trabajado en clases anteriores. Sin embargo, otros se confunden con las preguntas devueltas, lo que puede sugerir que es necesario repensar la pregunta que se devuelve (una reflexión para el mediador), y otros finalmente se daban por vencidos, lo que implicaría arrojar algunas respuestas (no preguntas) pero orientadoras, de ayuda, no que resuelvan completamente la situación. Por otro lado, fue común encontrar que los estudiantes pedían con ansia confirmación de sus resultados, lo que implicaba de nuevo

mediación con preguntas por parte del docente. Las EAM, en estas condiciones, parecen representar para los estudiantes un reto real, al punto de querer seguir pensando autónomamente en casa, según se mostró en resultados.

Aunque los estudiantes consideraron las actividades propuestas como una estrategia alternativa para aprender matemáticas, en ellas también se presentaron coincidencias con las estrategias de clases magistrales, pues en ambas situaciones se distrajeron con los celulares en la mano, escuchaban música, conversaban entre sí y hasta se llegaron a dormir, incluso, las dificultades con los conocimientos fueron las mismas o muy similares. Se concluye que estas actitudes se debieron a que como mediadores no logramos escoger los estímulos más adecuados para esos estudiantes, en concordancia con los criterios de intencionalidad y reciprocidad y construcción de significado. Sin embargo, se podría considerar que las EAM permitirían a los docentes enfrentar esas dificultades en la adquisición de conocimientos, particularmente sobre el concepto de función en contraste con Zúñiga (2007), Jones (2006), Fernández (2016) y Cuesta (2007), mostrando que las EAM dan oportunidades para que los estudiantes no se centren solo en aprender algoritmos y procedimientos algebraicos.

En relación con lo anterior, la motivación es fundamental para el proceso de aprendizaje, ya que la disposición de los estudiantes cuando no hay motivación va desde el mínimo interés en realizar tareas hasta quedarse dormidos; así, cuando el maestro se preocupa por aspectos emocionales y físicos de los estudiantes para la planeación de una clase, logra una mejor disposición frente a sus procesos de aprendizaje, reduciendo los factores negativos y posibilitando una mejor comprensión de los contenidos por medio de las interacciones entre docente-estudiante, estudiante-estudiante y contexto-estudiante, pues a través de estas se favorece el desarrollo humano, el aprendizaje y el desarrollo cognitivo;

tal como menciona Schunk (2012) con base en las teorías de Piaget y Vygotsky, Tudge y Scrimsher.

Siguiendo este orden de ideas, consideramos necesario tener en cuenta además las dinámicas mediante las que los estudiantes llevan a cabo sus procesos de aprendizaje cuando están en interacción con grupos grandes, pues de los resultados se tiene que al enfrentarse a un taller, de la única manera que se da una verdadera interacción social entre ellos es cuando no tienen una respuesta clara, cuando dudan y por tanto necesitan de la opinión de los demás, lo que demuestra el papel tan importante que juega la interacción social desde la perspectiva de Schunk (2012), es decir, el medio como facilitador del desarrollo y del aprendizaje.

Se podría concluir además que el desarrollo del pensamiento no es algo propio y único de las matemáticas, sino que es un proceso que se debe de transversalizar en todas las áreas escolares; a manera de ejemplo están las actividades EAM y la actitud del maestro como mediador que cambiaría su papel en los procesos de enseñanza-aprendizaje; basándonos en los resultados y en las conclusiones anteriores, nos atrevemos a decir que las EAM ayudaron a desarrollar dos competencias transversales (pensar y comunicarse) en correspondencia con los planteamientos de De Zubiría (2017).

El trabajo de investigación puede servir como insumo para nuevos proyectos de investigación ligados al desarrollo del pensamiento o a las temáticas abordadas. También está la posibilidad que se puedan aplicar las otras actividades que no se realizaron aquí (según se manifestó en limitaciones) y poder estudiar su impacto frente a las operaciones mentales trabajadas (u otras). Respecto de otras actividades, nos parece que sería muy pertinente en futuras intervenciones pensar EAM frente a la función lineal de manera exclusiva mientras se trabaja OM como identificación o diferenciación. En efecto, los

estudiantes tienen idea de lo que es una función lineal y cuando no la podían asociar a una trigonométrica, negaban que era función por no ser lineal; esto sugiere la necesidad de profundizar, antes de desarrollar las actividades aquí propuestas, en la función lineal (tal y como se expuso citando a Roldán (2013) en el marco teórico).

Sería interesante que otras investigaciones busquen resolver los siguientes interrogantes: ¿Cómo se podrían trabajar las otras operaciones mentales en relación con el aprendizaje de función? ¿Qué estrategias o qué enfoque se pueden utilizar para mejorar los grados de inferencia lógica en los estudiantes? ¿Cómo se pueden vincular los otros criterios de mediación para investigaciones relacionadas? ¿Qué implicaciones tendría trabajar el fortalecimiento de las operaciones mentales con las estrategias de aprendizaje basado en problemas o proyectos? ¿Qué diferencias se pueden presentar entre grupos grandes y pequeños al aplicar las EAM? ¿Cómo se pueden articular las EAM en otras áreas de la educación escolar? Planteamos los anteriores interrogantes porque creemos que sirven como posibles fundamentos para llevar a cabo próximas investigaciones en el campo de la educación, máxime en el campo de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo del pensamiento.

Para terminar, esperamos que con este trabajo de investigación se haya generado una perspectiva acerca de cómo se pueden fortalecer las operaciones mentales y cómo pueden estas ayudar al desarrollo del pensamiento en estudiantes de bachillerato; también que los maestros tengan en cuenta su papel como formadores y vean en estas EAM insumos que les permitan entender que es posible trascender la enseñanza de las matemáticas desde las estrategias tradicionales hacia nuevas estrategias cuyo centro no sea solo la adquisición de conocimientos, sino también la reflexión sobre sus significados.

Referencias

- Araya, N. (2014). Las habilidades del pensamiento y el aprendizaje significativo en matemática, de escolares de quinto grado en costa rica. *Actualidades Investigativas en Educación, Volumen 14* (Número 2), 1-31. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/447/44731371005.pdf>
- http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Cuesta, A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. (Tesis de doctorado; universidad autónoma de Barcelona; Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas). Barcelona, España.
- De Prada, D. (1996). El concepto de función: dificultades en su aprendizaje. *Análisis de una experiencia con estudiantes de enseñanza media*. Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas (IEPS). Monografías, 20.
- De Zubiría, J. (2017, 01 de marzo). ¿A qué deberían ir los niños a la escuela? *Semana*. Recuperado de <https://www.semana.com/educacion/articulo/para-que-sirve-estudiar/489542>
- Farfán, R., y García, M. (2005). El concepto de función: un breve recorrido epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 18 (pp. 489-494). México DF, México.
- Fernández, S. (2016). *Evidencias de fobia, miedo o rechazo hacia la matemática en estudiantes de décimo año del colegio el Carmen de Alajuela*. (Tesis de pregrado). Recuperado de https://www.uned.ac.cr/ecen/matematica/images/Archivos_Licenciatura/Tesis_y_proyec

tos/004_Silenne_Fern%C3%A1ndez.pdf

Gómez, H., Cruz, R., Acosta, A., y Martínez, A. (1998). *Guía práctica para la evaluación cualitativa vol.2. Cómo evaluar operaciones mentales*. Santafé de Bogotá. Colombia

Ghiso, A. (1996). Métodos de investigación cualitativa. En: Rodríguez, G. y otros.

(1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*.

Editorial McGraw Hill: México.

Jones. M. (2006). Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of the Function. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*: Vol. 7;

Iss 2, Article 5. Available at: <http://scholar.rose-hulman.edu/rhumj/vol7/iss2/5>

Lipson, Juliene G. (2002). Ética de la investigación etnográfica. *Utopía siglo XXI*. No. 8,

Págs. 59-68.

Londoño, José A.; Aldana, E. (2012). Desarrollo de competencias matemáticas en torno al concepto de función lineal. En Obando Gilberto (Ed.), *Memorias del 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 322-329). Medellín: Sello Editorial

Universidad de Medellín. Recuperado de

Universidad de Medellín. Recuperado de

<http://funes.uniandes.edu.co/2285/1/DesarrolloLondo%C3%B1oAsocolme2012.pdf>

López, J. y Sosa, L. (2008). *Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

21. Recuperado de

<http://funes.uniandes.edu.co/4946/1/L%C3%B3pezDificultadesALME2008.pdf>

Matsumoto, D. (2000). *Culture and psychology: people around the world*. Belmont, CA:

Wadsworth

MEN, Ministerio de Educación Nacional (autor corporativo). (1998). *Matemáticas*,

Lineamientos Curriculares: Áreas Obligatorias y Fundamentales. Santafé de Bogotá:

Ministerio de Educación Nacional.

MEN, Ministerio de Educación Nacional (autor corporativo). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Recuperado de:

MEN, Ministerio de Educación Nacional (autor corporativo). (2016). *Los Derechos Básicos de Aprendizaje.* Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Morales, M. (2007). *El cambio cognitivo en el niño de aprendizaje lento.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Pilonieta, G. (2010). *Modificabilidad Estructural Cognitiva y educación.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Porras, F. (2011). *El concepto de función en la transición bachillerato universidad.* (Tesis de Maestría Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía). Santiago de Cali.

Quintero, J. C., Hawrylak, M. F., y Villagrà, J. A. M. (2014). Propuesta didáctica con enfoque constructivista para mejorar el aprendizaje significativo de las matemáticas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (38), 33-49.

Roldán, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica.* (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia). Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/12943/1/1186875.2013.pdf>

Ruffinelli V., Andrea. (2002). *Modificabilidad cognitiva en el aula reformada.* Revista electrónica diálogos educativos. 3, año 2.

Schunk, D. H. (2012). *Teorías del aprendizaje: Una perspectiva educativa,* México, D.F. México: Pearson

Socarras, J. M. R. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista iberoamericana de educación*, 47(3), 1-8.

Valenzuela, G., y Flores, M. (2011). *Fundamentos de investigación educativa*. México:

Editorial Digital del Tecnológico de Monterrey

Vanegas, M. y Escalona, M. (2013) *Concepciones sobre funciones matemáticas de una variable, en estudiantes del primer semestre de ingeniería*. *Omnia*, Vol. (19), pp. 99-113; Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/737/73726911005.pdf>

Velarde, E. (2008) La teoría de la Modificabilidad Estructural Cognitiva de Reuven

Feuerstein. *Investigación Educativa, Volumen (12)*, 203 - 221

Woods, Peter, (1995). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa*.

Barcelona: Piados.

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista*

Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, (10), 001, pp. 145-175.

Zúñiga, M. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función,*

visualización. En alumnos de un curso cálculo I. Tesis de maestría. Universidad pedagógica nacional Francisco Morazán, Honduras.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3